Генеза

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

Олександр ІСТЕР, Дмитро ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

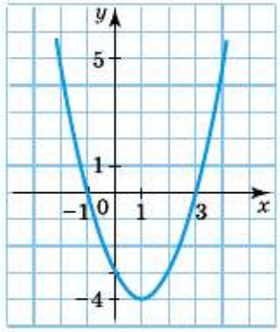
ІНТЕГРОВАНИЙ КУРС

ЧАСТИНА 2

ФУНКЦІЯ $y = ax^2 + bx + c$, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ

Приклад. $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1; \quad y_в = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4.$$



x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	5	0	−3	−4	−3	0	5

Властивості

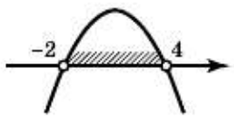
1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(f) = [-4; +\infty)$.
3. Нулі функції: $x = -1$; $x = 3$.
4. $f(x) > 0$, якщо $x < -1$ або $x > 3$;
   $f(x) < 0$, якщо $-1 < x < 3$.
5. Функція зростає, якщо $x \in [1; +\infty)$;
   функція спадає, якщо $x \in (-\infty; 1]$.

КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ

Приклад 1. $x^2 + 5x - 6 \geqslant 0$;

$x^2 + 5x - 6 = 0$;
$x_1 = -6$; $x_2 = 1$.
$x \in (-\infty; -6] \cup [1; +\infty)$

Приклад 2. $-x^2 + 2x + 8 > 0$;



$-x^2 + 2x + 8 = 0$;
$x_1 = -2$; $x_2 = 4$.
$x \in (-2; 4)$

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР,
ДМИТРО ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

Підручник інтегрованого курсу для 9 класу
закладів загальної середньої освіти
(у 2-х частинах)

Частина 2

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Київ
«Генеза»
2026

УДК 51(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 27.01.2026 р. № 110)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Відповідає модельній навчальній програмі
«Математика (інтегрований курс). 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.)

Інтерактивний електронний додаток до підручника
https://cutt.ly/MtS5o3KF

Інтерактивні методичні матеріали до підручника
https://faino.school/

Істер О. С.
І-89 Математика : підруч. інтегр. курсу для 9-го кл. закл. заг. серед. освіти. (У 2 ч.). Ч. 2 / Олександр Семенович Істер, Дмитро Олександрович Істер. — Київ : Генеза, 2026. — 280 с. : іл.

ISBN 978-617-8468-41-5
ISBN 978-617-8468-56-9 (Ч.2).

УДК 51(075.3)

ISBN 978-617-8468-41-5
ISBN 978-617-8468-56-9 (Ч.2)

© Істер О. С., Істер Д. О., 2026
© «Генеза», оригінал-макет, 2026

Шановні дев'ятикласники та дев'ятикласниці!

Продовжуємо вивчати курс **математики**, який міститиме дві складові частини – *алгебру* і *геометрію*. Допоможе вам у цьому підручник, у якому використано такі умовні позначення:

– пригадай (раніше вивчене); – зверни особливу увагу;

– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

1.13 – завдання для класної та 1.15 – домашньої роботи;

■ – кінець доведення;

– рубрика «Україна – це ми»;

– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;

– рубрика «Життєва математика»;

– вправи для підготовки до вивчення нової теми;

– вправи для повторення;

– рубрика «Головне в темі».

Текст, надрукований **жирним** шрифтом, звертає вашу увагу на нове поняття або таке, яке треба пригадати.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так: із позначок , , , , починаються вправи відповідно початкового, середнього, достатнього, високого рівнів та підвищеної складності.

Перевірити свої знання й підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Після кожної теми наведено вправи для її повторення, основний теоретичний матеріал (рубрика *«Головне в темі»*), а в кінці підручника – *«Завдання для перевірки знань за курс математики 9 класу»*. *«Задачі підвищеної складності»* допоможуть підготуватися до математичної олімпіади і поглибити знання з математики.

Автори намагалися подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках та під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, які часто доводиться розв'язувати в повсякденному житті.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів та розвитку математики як науки ви знайдете в рубриці *«А ще раніше...»*.

Шановні вчителі та вчительки!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів / учениць, диференціації навчання та інших критеріїв.

Додаткові вправи в *«Завданнях для перевірки знань»* призначено для учнів / учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Чи правильно їх розв'язано, учитель / учителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення тем можна запропонувати учням, наприклад, під час уроків узагальнення або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю й підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, а в рубриці *«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»* – задачі, що допоможуть актуалізувати відповідні знання.

«Задачі підвищеної складності» в кінці підручника допоможуть підготувати учнів / учениць до різноманітних математичних змагань та підвищити їхню цікавість до математики.

«Завдання для перевірки знань за курс математики 9 класу», які також розміщено в кінці підручника, можна запропонувати учням / ученицям для підготовки до річної контрольної роботи.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього потрібно розв'язати вправи, що посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж курсу математики 9 класу, який опрацьовує дитина, ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики і бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на *«Задачі підвищеної складності»*, які розміщено в кінці підручника.

Бажаємо успіхів в опануванні курсу!

ТЕМА 6

КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ. СИСТЕМА ДВОХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **ознайомитеся** з квадратичною функцією;
- **дізнаєтеся**, що таке нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції; найбільше та найменше значення функції;
- **навчитеся** виконувати перетворення графіків функції; будувати графік квадратичної функції; розв'язувати квадратні нерівності та системи двох рівнянь другого степеня з двома змінними.

§ 26. Квадратна нерівність

1. Означення квадратної нерівності

Нерівності вигляду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, де x – змінна, a, b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають *квадратними нерівностями* (або *нерівностями другого степеня з однією змінною*).

Наприклад, квадратними є нерівності: $2x^2 + 3x - 5 > 0$, $4x^2 - 8 \geqslant 0$, $7x^2 - 9x < 0$, $x^2 - 9x + 17 \leqslant 0$.

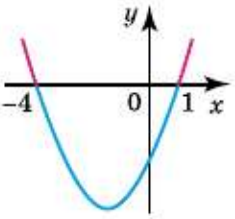
Розв'язки квадратних нерівностей можна розглядати як проміжки, на яких квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних (для нерівності $ax^2 + bx + c > 0$), невід'ємних (для нерівності $ax^2 + bx + c \geqslant 0$), від'ємних (для нерівності $ax^2 + bx + c < 0$) і недодатних (для нерівності $ax^2 + bx + c \leqslant 0$) значень. Отже, щоб розв'язати квадратну нерівність, достатньо знайти відповідні проміжки знакосталості квадратичної функції.

2. Розв'язування квадратних нерівностей у разі, коли рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різних корені

Розглянемо спочатку приклади нерівностей, для яких графік функції $y = ax^2 + bx + c$ двічі перетинає вісь абсцис, тобто у разі, коли дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ є додатним числом.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $x^2 + 3x - 4 < 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = x^2 + 3x - 4$. Графіком її є парабола, гілки якої спрямовані вгору. З'ясуємо, чи перетинає парабола вісь x. Для цього розв'яжемо рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$, тобто знайдемо нулі функції. Маємо: $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.



Мал. 26.1

Отже, парабола перетинає вісь x у точках з абсцисами 1 і -4. Будуємо схематично графік функції $y = x^2 + 3x - 4$, знаючи її нулі та напрямок гілок (мал. 26.1).

За графіком з'ясовуємо, що функція набуває від'ємних значень, коли $x \in (-4; 1)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 < 0$ є проміжок $(-4; 1)$.

Відповідь: $(-4; 1)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність:

1) $x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$; 2) $x^2 + 3x - 4 > 0$; 3) $x^2 + 3x - 4 \geqslant 0$.

Розв'язання. Розглянемо схематичне зображення графіка функції $y = x^2 + 3x - 4$ (мал. 26.1).

1) Нерівність $x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$ задовольняють ті самі значення x, що й нерівність $x^2 + 3x - 4 < 0$, а також числа -4 і 1 – нулі функції, тобто ті значення аргументу, за яких значення функції $y = x^2 + 3x - 4$ дорівнює нулю. Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 \leqslant 0$ є проміжок $[-4; 1]$.

2) З малюнка 26.1 бачимо, що функція $y = x^2 + 3x - 4$ набуває додатних значень, якщо $x \in (-\infty; -4)$ або $x \in (1; +\infty)$. Множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 > 0$ є об'єднання цих проміжків, тобто $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$.

3) Нерівність $x^2 + 3x - 4 \geqslant 0$ задовольняють ті самі значення x, що й нерівність $x^2 + 3x - 4 > 0$, включаючи нулі функції $y = x^2 + 3x - 4$, тобто числа -4 і 1. Отже, множиною розв'язків нерівності $x^2 + 3x - 4 \geqslant 0$ є $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

Відповідь: 1) $[-4; 1]$;
2) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$;
3) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$.

3. Схема розв'язування квадратної нерівності

Зауважимо, що для запропонованого способу розв'язування ані положення вершини параболи, ані розташування параболи відносно осі y не мають значення. Важливо лише знати абсциси точок перетину параболи з віссю x (нулі функції) та напрямок гілок параболи (угору чи вниз).

Отже, для розв'язування квадратних нерівностей слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (якщо вони існують);
2) якщо нерівність має строгий знак ($>$ чи $<$), то корені квадратного тричлена позначаємо на осі x «виколотими» точками (вони виключатимуться із множини розв'язків нерівності); якщо знак нерівності нестрогий ($\geqslant$ чи $\leqslant$), то корені квадратного тричлена позначаємо зафарбованими точками (вони включатимуться до множини розв'язків нерівності);
3) схематично зображуємо графік функції $y = ax^2 + bx + c$, враховуючи напрямок гілок параболи та точки її перетину з віссю x (якщо вони існують);
4) знаходимо на осі x проміжки, на яких функція $y = ax^2 + bx + c$ задовольняє цю нерівність;
5) записуємо відповідь.

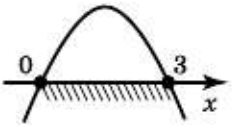
Приклад 3. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{3x - x^2}$.

Розв'язання. Областю визначення цієї функції є розв'язки нерівності $3x - x^2 \geqslant 0$.

1) Коренями квадратного тричлена $3x - x^2$ є числа 0 і 3.

2) Зображуємо корені на осі x зафарбованими точками, оскільки знак нерівності є нестрогим.

3) Схематично зображуємо графік функції $y = 3x - x^2$. Це парабола, що перетинає вісь x у точках 0 і 3, гілки якої спрямовані униз (мал. 26.2).



Мал. 26.2

4) Нерівність справджується для $x \in [0; 3]$.

Відповідь: $[0; 3]$.

4. Розв'язування квадратних нерівностей у разі, якщо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має один корінь

Далі розглянемо приклади нерівностей, для яких графік функції $y = ax^2 + bx + c$ дотикається до осі абсцис, тобто в разі, якщо дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ дорівнює 0.

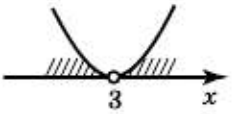
Приклад 4. Розв'язати нерівність $x^2 - 6x + 9 > 0$.

Розв'язання. 1) Коренем квадратного тричлена $x^2 - 6x + 9$ є число 3.

2) Позначаємо точку 3 на осі x «виколотою», бо знак нерівності – строгий.

3) Схематично зображуємо графік функції $y = x^2 - 6x + 9$ (мал. 26.3). Це парабола з вершиною на осі x, її гілки спрямовані вгору. З віссю x вона має лише одну спільну точку – точку 3 (кажуть, що парабола дотикається до осі x).

4) За малюнком 26.3 робимо висновок, що функція набуває додатних значень за будь-якого значення x, крім числа 3. Отже, множиною розв'язків нерівності є $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.



Мал. 26.3

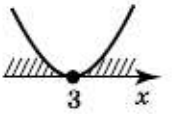
Відповідь: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Зауважимо, що відповідного висновку можна було дійти і записавши нерівність у вигляді $(x - 3)^2 > 0$.

Приклад 5. Розв'язати нерівності:

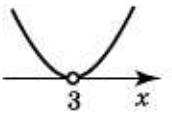
1) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$; 2) $x^2 - 6x + 9 < 0$;

3) $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$.



Мал. 26.4

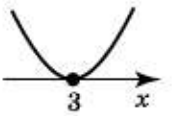
Розв'язання. 1) Нерівність $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$ задовольняють ті самі числа, що й нерівність $x^2 - 6x + 9 > 0$, а також число 3 – нуль функції (мал. 26.4). Тому множиною розв'язків нерівності $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$ є множина всіх дійсних чисел, тобто $(-\infty; +\infty)$.



Мал. 26.5

2) З малюнка 26.5 бачимо, що жодна точка з точок параболи не лежить нижче від осі x, а тому нерівність $x^2 - 6x + 9 < 0$ розв'язків не має.

3) Жодна з точок параболи не лежить нижче від осі x, проте точка з абсцисою 3 належить цій осі, а тому задовольняє нерівність (мал. 26.6). Отже, єдиним розв'язком нерівності $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$ є число 3.



Мал. 26.6

Відповідь: 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) немає розв'язків; 3) $x = 3$.

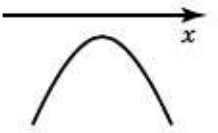
Зауважимо, що ці відповіді можна було отримати, подавши ліві частини нерівностей у вигляді $(x - 3)^2$.

5. Розв'язування квадратних нерівностей у разі, якщо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має розв'язків

Наостанок розглянемо приклади нерівностей, для яких графік функції $y = ax^2 + bx + c$ не перетинає вісь абсцис, тобто якщо дискримінант $D = b^2 - 4ac$ квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ є від'ємним числом.

Приклад 6. Розв'язати нерівність $-x^2 + 2x - 7 < 0$.

Розв'язання. Рівняння $-x^2 + 2x - 7 = 0$ коренів не має, адже $D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) = -24 < 0$. Отже, парабола $y = -x^2 + 2x - 7$ вісь x не перетинає, а її гілки спрямовані униз (мал. 26.7).



Мал. 26.7

Оскільки всі точки параболи лежать нижче від осі x, то множиною розв'язків нерівності $-x^2 + 2x - 7 < 0$ є множина всіх дійсних чисел, тобто $(-\infty; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $-x^2 + 2x - 7 \geqslant 0$.

Розв'язання. З малюнка 26.7 бачимо, що жодна з точок параболи не лежить вище від осі x і не належить цій осі, тому нерівність $-x^2 + 2x - 7 \geqslant 0$ не має розв'язків.

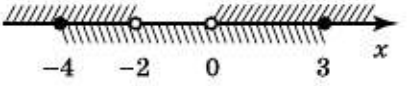
Відповідь: немає розв'язків.

6. Розв'язування систем, що містять квадратні нерівності

Приклад 8. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + 2x > 0, \\ x^2 + x - 12 \leqslant 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язком системи нерівностей є спільні розв'язки нерівностей системи. Отже, щоб знайти розв'язки системи, треба розв'язати кожну нерівність окремо і знайти їхні спільні розв'язки. Множиною розв'язків нерівності $x^2 + 2x > 0$ є $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ (розв'яжіть цю нерівність самостійно). Множиною розв'язків нерівності $x^2 + x - 12 \leqslant 0$ є $[-4; 3]$ (розв'яжіть цю нерівність самостійно). Зобразимо на координатній прямій отримані множини розв'язків нерівностей (мал. 26.8). Множиною розв'язків системи буде перетин множин розв'язків нерівностей, тобто $[-4; -2) \cup (0; 3]$.



Мал. 26.8

Відповідь: $[-4; -2) \cup (0; 3]$.

Які нерівності називають квадратними? ○ Як розв'язати квадратну нерівність?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

26.1. (*Усно.*) Які з нерівностей є квадратними:

1) $2x + 3 > 0$; 2) $3x^2 - 7x - 5 \geqslant 0$; 3) $\frac{1}{x^2 - 5x} < 0$;

4) $9x^2 - 3x^3 \leqslant 0$; 5) $x^2 + 7x < 0$; 6) $x^2 + 9 \geqslant 0$?

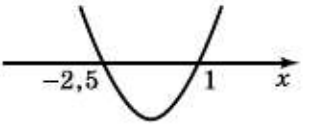
26.2. Які із чисел -3; 0; 2 є розв'язками квадратної нерівності:

1) $x^2 - x > 0$; 2) $x^2 - x + 2 > 0$; 3) $4x^2 + 3x - 1 < 0$?

26.3. Які із чисел -2; 0; 1 є розв'язками квадратної нерівності:

1) $x^2 + x > 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 < 0$; 3) $3x^2 - x + 2 > 0$?

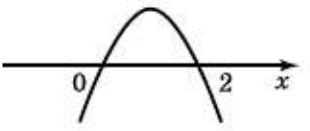
26.4. На малюнку 26.9 схематично зображено графік функції $y = 2x^2 + 3x - 5$. Використовуючи графік, запишіть розв'язки нерівності:



Мал. 26.9

1) $2x^2 + 3x - 5 > 0$;
2) $2x^2 + 3x - 5 \geqslant 0$;
3) $2x^2 + 3x - 5 < 0$;
4) $2x^2 + 3x - 5 \leqslant 0$.

26.5. На малюнку 26.10 схематично зображено графік функції $y = -x^2 + 2x$. Використовуючи графік, запишіть розв'язки нерівності:



Мал. 26.10

1) $-x^2 + 2x < 0$; 2) $-x^2 + 2x \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 2x > 0$; 4) $-x^2 + 2x \geqslant 0$.

2 **26.6.** Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 - 3x \geqslant 0$; 2) $x^2 + 5x < 0$;
3) $-x^2 + 8x \leqslant 0$; 4) $-x^2 - 7x > 0$.

26.7. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 - 6x < 0$; 2) $x^2 + 2x \geqslant 0$;
3) $-x^2 + 7x > 0$; 4) $-x^2 - x \leqslant 0$.

26.8. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 - 16 \leqslant 0$; 2) $x^2 - 4 > 0$;
3) $-x^2 + 1 \geqslant 0$; 4) $25 - x^2 < 0$.

26.9. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 - 36 > 0$; 2) $x^2 - 100 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 64 < 0$; 4) $9 - x^2 \geqslant 0$.

26.10. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 - 3x - 40 \geqslant 0$; 2) $x^2 - 8x + 15 < 0$;
3) $-x^2 + 6x + 7 \leqslant 0$; 4) $-x^2 - 5x - 4 > 0$.

26.11. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 - 7x + 12 \leqslant 0$; 2) $x^2 - 2x - 24 > 0$;
3) $-x^2 - x + 6 \geqslant 0$; 4) $-x^2 + 3x + 10 < 0$.

26.12. Знайдіть, за яких значень x квадратний тричлен:

1) $x^2 - 5x - 6$ набуває додатних значень;
2) $x^2 + x - 12$ набуває від'ємних значень.

26.13. Знайдіть, за яких значень x квадратний тричлен:

1) $x^2 - x - 2$ набуває від'ємних значень;
2) $x^2 + 2x - 8$ набуває додатних значень.

26.14. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 < 4$; 2) $x^2 \geqslant 100$; 3) $x^2 \leqslant 7x$; 4) $-x^2 > -3x$.

26.15. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 > 9$; 2) $x^2 \leqslant 1$; 3) $x^2 \geqslant 4x$; 4) $-x^2 < -5x$.

3 **26.16.** Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + 2x - 7 > 0$; 2) $x^2 - x - 3 \leqslant 0$.

26.17. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 - 4x - 3 < 0$; 2) $x^2 + x - 5 \geqslant 0$.

26.18. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{12 - x - x^2}}$.

26.19. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{3 - x^2 + 2x}$; 2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$.

26.20. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 + 10x + 25 \geqslant 0$; 2) $25 - 20x + 4x^2 < 0$;
3) $9x^2 - 6x + 1 > 0$; 4) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$;
5) $-x^2 - 2x - 1 < 0$; 6) $10x - x^2 - 25 \geqslant 0$;
7) $-25x^2 + 30x - 9 \leqslant 0$; 8) $-49x^2 - 70x - 25 > 0$.

26.21. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 + 8x + 16 < 0$; 2) $25x^2 - 10x + 1 \geqslant 0$;
3) $9 - 6x + x^2 \leqslant 0$; 4) $100x^2 - 120x + 36 > 0$;
5) $2x - x^2 - 1 \geqslant 0$; 6) $-64x^2 - 112x - 49 \leqslant 0$;
7) $-36x^2 + 60x - 25 > 0$; 8) $-x^2 + 16x - 64 < 0$.

26.22. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності:

1) $2x^2 - 5x + 2 < 0$;
2) $9x - 2x^2 - 4 \geqslant 0$.

26.23. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності:

1) $2x^2 - 7x + 3 \leqslant 0$;
2) $4 - 11x - 3x^2 > 0$.

26.24. Національний університет «Острозька академія» – один з найдавніших навчальних закладів Європи і перший створений в Україні – заснований 1576 р. Від самого початку свого існування академія була надзвичайно прогресивною. Знайдіть суму всіх цілих розв'язків нерівності $19x + 51 - 10x^2 \geqslant 0$, відтак дізнаєтеся, скільки іноземних мов вивчали перші студенти цієї академії.

26.25. У 2025 році в Канаді відбулися «Ігри нескорених» (*Invictus Games*), у яких брали участь спортсмени з України. Розв'яжіть нерівність $49x - 5x^2 - 72 \geqslant 0$. Добуток найменшого і найбільшого натуральних розв'язків нерівності підкажуть вам, скільки медалей спортсмени України здобули в зимових видах цих змагань.

26.26. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + x + 7 \geqslant 0$; 2) $x^2 - 2x + 5 < 0$;
3) $-x^2 - 2x - 9 \leqslant 0$; 4) $-3x^2 + 4x - 5 > 0$.

26.27. Розв'яжіть нерівність:

1) $6x^2 + x + 1 > 0$; 2) $x^2 - 3x + 7 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 4x - 9 < 0$; 4) $-x^2 - 2x - 5 \geqslant 0$.

26.28. Доведіть, що за будь-якого значення x справджується нерівність:

1) $3x^2 - x + 1 > 0$; 2) $6x < x^2 + 10$.

26.29. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $4x^2 + 11x - 20 < 0$; 2) $-3x^2 + 11x + 34 \geqslant 0$.

26.30. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $-3x^2 - 11x + 14 \geqslant 0$;
2) $12x^2 + 16x - 3 < 0$.

26.31. Розв'яжіть нерівність:

1) $2x^2 - 3x \leqslant 2(x - 1)$; 2) $4x(x + 2) > 5$;
3) $x(x - 8) > (2x - 1)^2$; 4) $3x(x - 2) + 1 > (x - 1)^2$.

26.32. Розв'яжіть нерівність:

1) $4x(x - 1) \leqslant 3$;
2) $(x + 2)^2 < 2x(x + 3) + 5$.

26.33. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3} + \dfrac{1}{x - 2}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x - 2}$.

26.34. Мотоциклістка, що рухається по мосту зі швидкістю $v_0 = 54$ км/год, виїжджає з нього й одразу після виїзду починає розганятися зі сталим прискоренням $a = 8$ км/год^2. Відстань від мотоциклістки до міста, що вимірюється в кілометрах, визначається формулою $S = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$. Оператор мобільного зв'язку гарантує стабільний зв'язок на відстані не далі, ніж 28 км від міста. Протягом якого часу мотоциклістка матиме стабільний мобільний зв'язок (відповідь дайте у хвилинах)?

26.35. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 + 7x - 8 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \geqslant 0, \\ 2x - 6 > 0. \end{cases}$

26.36. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x^2 + 5x - 18 \geqslant 0, \\ x < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 10x - 24 < 0, \\ 2x - 16 \geqslant 0. \end{cases}$

26.37. Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ 0 \leqslant x < 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geqslant 0, \\ x^2 + x - 6 \leqslant 0. \end{cases}$

26.38. Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geqslant 0, \\ -1 < x < 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 \geqslant 0, \\ x^2 - 9 \leqslant 0. \end{cases}$

26.39. Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{(x - 4)^2} \leqslant 0$; 2) $\dfrac{x^2 + x - 2}{|x - 2|} > 0$.

26.40. Знайдіть область допустимих значень змінної у виразі

$$\sqrt{x^2 - 9} + \frac{1}{\sqrt{4 + 3x - x^2}}.$$

26.41. Знайдіть область визначення функції

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}} + \sqrt{8x - x^2 - 15}.$$

26.42. За яких значень a не має коренів рівняння:

1) $x^2 - (a - 2)x + 4 = 0$;
2) $(a + 1)x^2 + 5ax + 3a = 0$?

26.43. За яких значень a рівняння має два різних корені:

1) $x^2 - ax + (2a - 3) = 0$;
2) $ax^2 + (3a - 2)x + a = 0$?

26.44. За яких значень a рівняння:

1) $x^2 - (a + 1)x + 9 = 0$ не має коренів;
2) $ax^2 + (2a - 1)x + a = 0$ має два різних корені?

26.45. За яких значень m розв'язком нерівності є будь-яке число:

1) $x^2 - (m + 2)x + (8m + 1) > 0$;
2) $mx^2 - 4x + m + 3 < 0$?

Вправи для повторення

26.46. Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 2x + 8$. За графіком знайдіть:

1) область значень функції;
2) проміжок зростання функції.

26.47. Доведіть, що $26x^2 - 10x + 2xy + y^2 + 2 > 0$ за будь-яких значень x та y.

26.48. Одним із коренів рівняння $x^3 - 2x^2 - x + a = 0$ є число -1. Знайдіть решту коренів цього рівняння.

Життєва математика

26.49. Мар'яні призначено ліки, діючу речовину яких треба вживати по 0,5 г 3 рази на добу протягом 14 днів. Одна упаковка ліків містить 10 пігулок по 0,25 г діючої речовини в кожній пігулці. Якої найменшої кількості упаковок цих ліків вистачить на весь курс лікування?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

26.50. Чи є пара чисел $(-1; 2)$ розв'язком системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 4x - 5y = -14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y - x = 7, \\ 4x + 5y = 5? \end{cases}$

26.51. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

1) $\begin{cases} 2x + 7y = -3, \\ 3x - y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 5y = -16, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$

26.52. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} x + 7y = -5, \\ 3x - 4y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 4y = -19, \\ 7x - y = -3. \end{cases}$

26.53. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ 5x - 2y = -18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 5y = 11, \\ 3x + 5y = -1. \end{cases}$

Цікаві задачі — поміркуй одначе

26.54. Відомо, що числа a, b і $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ є раціональними. Чи можна стверджувати, що числа $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ теж раціональні?

§ 27. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними

1. Система рівнянь із двома змінними та її розв'язок

У 7 класі ви розв'язували системи двох лінійних рівнянь із двома змінними, тобто системи, у яких обидва рівняння мають вигляд $ax + by = c$, де a, b, c – числа, x та y – змінні. Наприклад, такою є система

$$\begin{cases} x + 3y = 2, \\ 2x - y = 11. \end{cases}$$

Нагадаємо, що *розв'язком системи рівнянь із двома змінними називають таку пару значень змінних, за яких кожне з рівнянь системи перетворюється на правильну числову рівність.*

Так, розв'язком наведеної вище системи є пара чисел $(5; -1)$, тобто $x = 5$, $y = -1$. Справді: $5 + 3 \cdot (-1) = 2$ і $2 \cdot 5 - (-1) = 11$ – правильні числові рівності.

2. Поняття степеня рівняння з двома змінними

Рівняння $ax + by = c$ за умови, коли хоча б один з коефіцієнтів a чи b відмінний від нуля, називають *рівнянням першого степеня з двома змінними*. Це рівняння можна замінити рівносильним йому рівнянням $ax + by - c = 0$, ліва частина якого – многочлен стандартного вигляду першого степеня з двома змінними, а права – дорівнює нулю.

У такий спосіб можна визначити степінь будь-якого рівняння з двома змінними (та й взагалі з більшою кількістю змінних). Для цього достатньо замінити рівняння рівносильним йому рівнянням, ліва частина якого – многочлен стандартного вигляду, а права – число нуль. Степінь многочлена і буде *степенем рівняння*.

Так, наприклад, $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ – рівняння другого степеня, рівняння $(x^2 + y)^2 = x^4 + 3y^2 + 7$ рівносильне рівнянню $2x^2y - 2y^2 - 7 = 0$ і, отже, є рівнянням третього степеня.

Розглянемо системи рівнянь, у яких одне або обидва рівняння є рівняннями другого степеня з двома змінними, та способи розв'язування таких систем.

3. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними графічно

Системи рівнянь другого степеня з двома змінними графічно розв'язують так само, як і системи двох лінійних рівнянь із двома змінними.

Нагадаємо послідовність кроків для розв'язування системи рівнянь графічно:

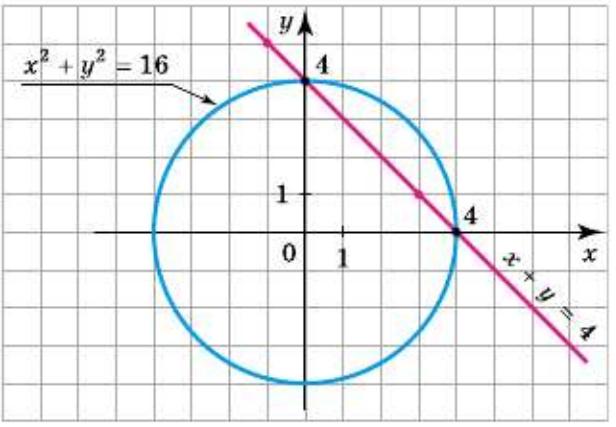
1) побудувати графіки рівнянь в одній координатній площині;
2) знайти координати їхніх точок перетину або впевнитися, що графіки рівнянь спільних точок не мають;
3) якщо координати точок перетину є цілими числами, то виконати перевірку; якщо ні, то розв'язки системи знайти наближено;
4) записати відповідь.

На відміну від лінійних рівнянь, графіком яких є пряма, графіки рівнянь другого степеня є досить різними. Так, наприклад, графіком рівняння $y = x^2$ (або рівносильного йому рівняння $y - x^2 = 0$) є парабола, графіком рівняння $y = \frac{6}{x}$ (або рівносильного йому рівняння $xy = 6$) є гіпербола, а графіком рівняння $x^2 + y^2 = 4$ є коло.

Приклад 1. Розв'язати графічно систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x + y = 4. \end{cases}$

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки рівнянь $x^2 + y^2 = 16$ та $x + y = 4$. Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 16$ є коло із центром у початку координат і радіусом 4. Графіком рівняння $x + y = 4$

є пряма, що проходить через точки (−1; 5) і (3; 1). Графіки зображено на малюнку 27.1, вони мають дві спільні точки (0; 4) і (4; 0). Перевіркою впевнюємося, що ці пари чисел є розв'язками системи.



Мал. 27.1

Відповідь: (0; 4), (4; 0).

4. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними способом підстановки

Якщо в системі рівнянь із двома змінними одне з рівнянь є рівнянням першого степеня, то таку систему завжди можна розв'язати *способом підстановки*. Нагадаємо послідовність кроків для розв'язування системи рівнянь цим способом:

1) виразити в рівнянні першого степеня одну змінну через іншу;
2) підставити отриманий вираз у друге рівняння системи замість відповідної змінної;
3) розв'язати отримане рівняння з однією змінною;
4) знайти відповідні значення другої змінної;
5) записати відповідь.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3y^2 - xy = -1, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$

Розв'язання. Виразимо з другого рівняння змінну x через змінну y: $x = 5 - 3y$. Підставимо в перше рівняння замість x вираз $5 - 3y$ та отримаємо рівняння зі змінною y: $3y^2 - (5 - 3y)y = -1$.

Після спрощень матимемо рівняння $6y^2 - 5y + 1 = 0$, корені якого $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

За формулою $x = 5 - 3y$ знаходимо значення x, що відповідають знайденим значенням y:

$x_1 = 5 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$, $x_2 = 5 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 4$.

Отже, система має два розв'язки:

$x_1 = 3\frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{2}$ та $x_2 = 4$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

Оформити розв'язання в зошиті можна так:

$\begin{cases} 3y^2 - xy = -1, \\ x + 3y = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 3y^2 - xy = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 3y^2 - (5 - 3y)y = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 5 - 3y, \\ 6y^2 - 5y + 1 = 0; \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} D = 1, \\ y_1 = 0{,}5, \ y_2 = \frac{1}{3} \end{array} \right.$

$\begin{cases} y = 0{,}5, \\ x = 5 - 3 \cdot 0{,}5 \end{cases}$ або $\begin{cases} y = \frac{1}{3}, \\ x = 5 - 3 \cdot \frac{1}{3}; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3{,}5, \\ y = 0{,}5 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 4, \\ y = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Відповідь: $(3{,}5;\ 0{,}5)$, $\left(4;\ \frac{1}{3}\right)$.

5. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними способом додавання

Як і для систем двох лінійних рівнянь із двома змінними, цей спосіб використовують, коли в результаті почленного додавання рівнянь системи отримуємо рівняння з однією змінною.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + xy = 20, \\ x - xy = -10. \end{cases}$

Розв'язання. Додамо почленно обидва рівняння системи, матимемо: $2x = 10$, тобто $x = 5$.

Підставивши знайдене значення x, наприклад, у перше рівняння, отримаємо:

$5 + 5y = 20$, тобто $y = 3$. Отже, $x = 5$, $y = 3$.

Оформити розв'язання в зошиті можна так:

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x + xy = 20, \\ x - xy = -10; \end{array} \right| + \\ \hline 2x = 10, \\ x = 5. \end{array}$$

$\begin{cases} x = 5, \\ 5 + 5y = 20; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5, \\ 5y = 15; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5, \\ y = 3. \end{cases}$

Відповідь: (5; 3).

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + 2xy = 21, \\ x + xy = 9. \end{cases}$

Розв'язання. Помножимо друге рівняння на -2. Маємо:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy = 21, \\ -2x - 2xy = -18. \end{cases}$$

Додамо почленно рівняння системи, отримаємо: $x^2 - 2x = 3$. Маємо рівняння: $x^2 - 2x - 3 = 0$, корені якого: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Знайдемо відповідні значення y, підставивши ці значення x у друге рівняння початкової системи:

1) нехай $x = -1$, тоді $-1 - y = 9$, тобто $y = -10$;

2) нехай $x = 3$, тоді $3 + 3y = 9$, тобто $y = 2$.

Відповідь: $(-1; -10)$, $(3; 2)$.

6. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними за допомогою заміни змінних

Деякі системи рівнянь другого степеня (а також системи, що містять рівняння вищих степенів) зручно розв'язувати, використовуючи заміну змінних.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y + xy = 11, \\ xy(x + y) = 30. \end{cases}$

Розв'язання. Уведемо заміну: $x + y = u$, $xy = v$. Матимемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u + v = 11, \\ uv = 30. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему способом підстановки (зробіть це самостійно), отримаємо $u_1 = 5$, $v_1 = 6$ або $u_2 = 6$, $v_2 = 5$.

Повертаємося до змінних x та y:

1) якщо $\begin{cases} u = 5, \\ v = 6, \end{cases}$ то $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему, матимемо:

$x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 2$;

2) якщо $\begin{cases} u = 6, \\ v = 5, \end{cases}$ то $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5. \end{cases}$

Отримаємо ще дві пари чисел: $x_3 = 5$, $y_3 = 1$; $x_4 = 1$, $y_4 = 5$.

Відповідь: $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(5; 1)$, $(1; 5)$.

А ще раніше...

Ще в давньовавилонських текстах, які датовані III–II тисячоліттями до н. е., траплялося чимало задач, що зводилися до систем рівнянь другого степеня. Ось одна з них.

Задача. *Площі двох своїх квадратів я склав і отримав* $25\frac{5}{12}$. *Сторона другого складає* $\frac{2}{3}$ *від сторони першого і ще 5. Знайти сторони цих квадратів.*

Система рівнянь до задачі в сучасних записах матиме такий вигляд:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\frac{5}{12}, \\ y = \frac{2}{3}x + 5. \end{cases}$$

Для її розв'язування автор підносить до квадрата ліву й праву частини другого рівняння:

$$y^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 25$$

та підставляє знайдене значення виразу y^2 в перше рівняння і зводить подібні доданки:

$$1\frac{4}{9}x^2 + 6\frac{2}{3}x = \frac{5}{12}.$$

Далі автор розв'язує це рівняння, знаходить x, а потім y.

Діофант, не маючи позначень для кількох невідомих, під час розв'язування задачі обирав невідому величину так, щоб звести розв'язування системи до розв'язування єдиного рівняння.

Задача. *Записати два числа, коли відомо, що їхня сума дорівнює* 20, *а сума їхніх квадратів* – 208.

Сучасні математики звели б цю задачу до системи

$$\begin{cases} x + y = 20, \\ x^2 + y^2 = 208. \end{cases}$$

Проте Діофант обирав невідомою величиною половину різниці шуканих чисел та отримував (у сучасних позначеннях) систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) = z, \\ \frac{1}{2}(x + y) = 10. \end{cases}$$

Спочатку додаючи ці рівняння, а потім віднімаючи перше від другого, Діофант отримував: $x = z + 10$, $y = 10 - z$ і підставляв знайдені вирази у друге рівняння початкової системи:

$$x^2 + y^2 = (z + 10)^2 + (10 - z)^2 = 2z^2 + 200,$$

щоб отримати рівняння з однією змінною: $2z^2 + 200 = 208$, звідки $z = 2$. (Діофант розглядав лише невід'ємні числа, тому корінь $z = -2$ не розглянув).

Тоді $x = 2 + 10 = 12$, $y = 10 - 2 = 8$.

У XVII–XVIII ст. прийоми розв'язування систем лінійних рівнянь у загальному вигляді за допомогою методу виключення невідомих розглядали математики П'єр Ферма, Ісаак Ньютон, Готфрід Лейбніц, Леонард Ейлер, Етьєн Безу, Ж.-Л. Лагранж та інші.

Завдяки методу координат, який запропонували в XVII ст. П. Ферма і Р. Декарт, стало можливим розв'язувати системи рівнянь графічно.

Поясніть на прикладах, що називають степенем рівняння з двома змінними. ○ Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними графічно? ○ Як розв'язати систему рівнянь із двома змінними способом підстановки? Способом додавання?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **27.1.** Чи є пара чисел $x = 2$, $y = 1$ розв'язком системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x + y = 4? \end{cases}$

27.2. Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x^2 + y = -1, \\ x + y = -2 \end{cases}$ пара чисел:

1) $(1; -3)$; 2) $(0; -1)$?

2 **27.3.** Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4$. За допомогою графіка розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = x + 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = 3x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = x - 6. \end{cases}$

27.4. Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 1$. За допомогою графіка розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = -x^2 + 1, \\ y = x + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^2 + 1, \\ y = x + 2. \end{cases}$

27.5. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 4, \\ y = 4x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

За допомогою програми для побудови графіків перевірте правильність розв'язування однієї із систем.

27.6. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - x = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 6, \\ y = 6x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

За допомогою програми для побудови графіків перевірте правильність розв'язування однієї із систем.

27.7. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x = 4y, \\ y^2 + x + 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y = 0, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$

27.8. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = -2x, \\ x^2 + y - 3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 4y - 5, \\ y^2 + x = 0. \end{cases}$

27.9. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y + 2x = 3, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

27.10. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y - x = 2, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 2, \\ y^2 - x^2 = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 3x = 1, \\ x^2 + y^2 = 53. \end{cases}$

27.11. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x - y^2 = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ -x^2 + 4y = 19. \end{cases}$

27.12. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y + x^2 = 10, \\ y - x^2 = -8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + x = 2, \\ -y^2 + 2x = 7. \end{cases}$

27.13. 1) Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + y = 7 \end{cases}$ трьома способами: графічним, способом підстановки і способом додавання.

2) Який спосіб вам сподобався найбільше?

3) Нехай $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ – пари розв'язків системи. Знайдіть значення виразу $\dfrac{x_1 + y_1 + x_2 + y_2}{2}$, відтак дізнаєтеся, скільки медалей здобув українець Андрій Трусов на літніх Паралімпійських іграх 2024 року.

Андрій Трусов

27.14. 1) Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y - x = 8, \\ x^2 - y = -2 \end{cases}$ трьома способами: графічним, способом підстановки і способом додавання.

2) Який спосіб вам сподобався найбільше?

3) Нехай $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ – пари розв'язків системи. Знайдіть значення виразу $x_1y_1 + x_2y_2 + 8$,

Ольга Броварець

відтак дізнаєтеся, у якому віці українська біофізикиня Ольга Броварець стала докторкою наук.

3 **27.15.** Розв'яжіть графічно систему:

1) $\begin{cases} x^2 + 4x - y = 0, \\ x + y + 4 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + 2. \end{cases}$

За допомогою програми для побудови графіків перевірте правильність розв'язування однієї із систем.

27.16. Розв'яжіть графічно систему:

1) $\begin{cases} x^2 + 6x - y = 0, \\ x + y + 6 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 + 3. \end{cases}$

За допомогою програми для побудови графіків перевірте правильність розв'язування однієї із систем.

27.17. Накресліть схематично графіки рівнянь системи і встановіть кількість її розв'язків:

1) $\begin{cases} xy = -4, \\ y - x^2 = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = 1. \end{cases}$

27.18. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4y^2 + xy = 22, \\ x + 5y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + \dfrac{y}{2} = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ x^2 + xy + y^2 = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 1, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{12}. \end{cases}$

27.19. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3y^2 - xy = 2, \\ x - 2y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \dfrac{x}{3} + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 - xy - y^2 = 11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$

27.20. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину:

1) прямої $x + y = 5$ і параболи $y = x^2 - 7$;

2) кола $x^2 + y^2 = 34$ і гіперболи $xy = 15$.

27.21. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + xy = 5, \\ x - xy = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ x^2 - y^2 = -21; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y^2 + xy = 36, \\ y^2 + xy = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - xy = -4, \\ 3x^2 - 2xy = -7. \end{cases}$

27.22. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y + xy = 3, \\ y - xy = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y^2 + x^2 = 13, \\ 3y^2 - x^2 = 11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2 - xy = 10, \\ x^2 - xy = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy + 2y^2 = -1, \\ 3xy + y^2 = -8. \end{cases}$

27.23. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2xy - x = 10, \\ 2xy - y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - xy - y = 13, \\ x + xy - 2y = 2. \end{cases}$

27.24. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3xy + x = 8, \\ 3xy + y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + xy + 2y = -9, \\ 2x - xy - y = -2. \end{cases}$

27.25. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy(x + y) = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6}, \\ x - y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0, \\ (x - y)^2 + 3(x - y) - 4 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x - 2y}{x + y} - \dfrac{x + y}{x - 2y} = \dfrac{15}{4}, \\ 4x + 5y = 3. \end{cases}$

27.26. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - y)^2 + 4(x - y) + 4 = 0, \\ (x + y)^2 - 2(x + y) - 3 = 0. \end{cases}$

27.27. За якого значення a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a \end{cases}$ має:

1) єдиний розв'язок; 2) рівно три розв'язки?

Вправи для повторення

27.28. Розв'яжіть нерівність $-3{,}4 \leqslant \dfrac{1 - 2x}{5} \leqslant 4{,}8$.

27.29. Теплохід проплив 24 км за течією річки на 2 год швидше, ніж 60 км проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість теплохода дорівнює 22 км/год.

27.30. Побудуйте графік функції $y = \dfrac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x}$.

Життєва математика

27.31. Приватне підприємство «Котигорошко» виробляє дитячі іграшки і продає їх за ціною $p = 500$ грн за одиницю. Змінні витрати на виробництво одиниці продукції становлять $v = 300$ грн, а сталі витрати підприємства становлять $f = 700\,000$ грн на місяць. Місячний операційний прибуток підприємства (у гривнях) обчислюється за формулою $\pi(q) = q(p - v) - f$. Визначте найменший місячний обсяг виробництва q (одиниць продукції), за якого місячний операційний прибуток підприємства становитиме не менше ніж 300 000 грн.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

27.32. Розв'яжіть задачі за допомогою системи рівнянь.

1) Два зошити й один олівець коштують разом 24 грн, а один зошит і два олівці – 21 грн. Скільки коштує один зошит і скільки – один олівець?

2) Човен за 1,5 год руху за течією річки і 2 год руху проти течії долає 62 км, а за 3 год руху в стоячій воді й 1 год руху проти течії – 70 км. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії річки.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

27.33. (*Київська математична олімпіада, 1989 р.*) Нехай a, b, c – додатні числа. Доведіть, що

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{a+c}{a^2+c^2} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

§ 28. Система двох рівнянь із двома змінними як математична модель текстових і прикладних задач

1. Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи рівнянь

Нагадаємо, що в 7 класі ви розв'язували текстові задачі за допомогою систем лінійних рівнянь у такій послідовності, яку можна застосовувати і для розв'язування складніших задач, а саме:

1) позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x та y);
2) за умовою задачі скласти систему рівнянь;

3) розв'язати одержану систему;
4) проаналізувати знайдені значення змінних на відповідність умові задачі, дати відповідь на запитання задачі;
5) записати відповідь.

Розглянемо один із найпростіших прикладів, де система рівнянь із двома змінними є математичною моделлю текстової задачі.

Приклад 1. Сума двох чисел дорівнює 8, а добуток – 15. Знайти ці числа.

Розв'язання. Позначимо невідомі числа через x та y. Тоді $x + y = 8$; $xy = 15$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Розв'язавши систему (зробіть це самостійно), матимемо $x = 3$, $y = 5$ або $x = 5$, $y = 3$.

Отже, числа, які ми шукали, це 3 і 5.

Відповідь: 3 і 5.

Зауважимо, що цю задачу, як і деякі наступні в цьому параграфі, можна розв'язати і за допомогою рівняння з однією змінною.

2. Розв'язування прикладних задач, математичними моделями яких є система рівнянь із двома змінними

Система рівнянь із двома змінними може бути математичною моделлю прикладної задачі. Нагадаємо, що прикладні задачі – це задачі, що містять нематематичні поняття, але можуть бути розв'язані методами математики.

Пригадаємо, що прикладну задачу доцільно розв'язувати в такій послідовності:

1) формулюємо задачу мовою математики, тобто складаємо математичну модель задачі;
2) розв'язуємо математичну задачу, що утворилася;
3) аналізуємо відповідь і формулюємо її мовою початкової задачі.

Приклад 2. Площа земельної ділянки прямокутної форми дорівнює 60 м^2. Якщо довжину цієї ділянки зменшити на 1 м, а ширину збільшити на 2 м, то отримаємо земельну ділянку з площею 72 м^2. Знайти довжину огорожі початкової ділянки.

Розв'язання. Нехай довжина початкової ділянки дорівнює x м, а ширина – y м. Тоді за умовою $xy = 60$. Після зменшення довжини на 1 м вона дорівнюватиме $(x - 1)$ м, а після збільшення ширини на 2 м вона дорівнюватиме $(y + 2)$ м. За умовою $(x - 1)(y + 2) = 72$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ (x - 1)(y + 2) = 72. \end{cases}$$

Покажемо один зі способів розв'язування цієї системи:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ xy + 2x - y - 2 = 72. \end{cases}$$

Оскільки з першого рівняння системи відомо, що $xy = 60$, то у друге рівняння замість xy можна підставити число 60. Матимемо:

$$\begin{cases} xy = 60, \\ 60 + 2x - y - 2 = 72; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 60, \\ y = 2x - 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x(2x - 14) = 60, \\ y = 2x - 14. \end{cases}$$

Після спрощення першого рівняння системи матимемо: $x^2 - 7x - 30 = 0$, звідки $x_1 = 10$, $x_2 = -3$. Число -3 не задовольняє умову задачі, оскільки довжина ділянки не може бути від'ємною. Отже, довжина початкової ділянки дорівнює 10 м, тоді можна знайти ширину: $2 \cdot 10 - 14 = 6$ (м). Знайдемо довжину огорожі: $P = 2(6 + 10) = 32$ (м).

Відповідь: 32 м.

Приклад 3. З пункту A вийшов пішохід. Через 50 хв після цього звідти в тому самому напрямку виїхала велосипедистка, яка наздогнала пішохода на відстані 6 км від пункту A. Знайти швидкість пішохода і швидкість велосипедистки, якщо вона за 1 год долає на 1 км більше, ніж пішохід за 2 год.

Розв'язання. Нехай x км/год – швидкість пішохода, y км/год – велосипедистки. Тоді пішохід подолав 6 км за $\frac{6}{x}$ год, а велосипедистка – за $\frac{6}{y}$ год. За умовою пішохід був у дорозі на 50 хв $= \frac{5}{6}$ год більше, ніж велосипедистка. Тому $\frac{6}{x} - \frac{6}{y} = \frac{5}{6}$.

Велосипедистка за 1 год долає y км, а пішохід за 2 год – $2x$ км. За умовою $y - 2x = 1$. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{6}{y} = \frac{5}{6}, \\ y - 2x = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши її (зробіть це самостійно) та врахувавши, що за змістом задачі $x > 0$ та $y > 0$, матимемо $x = 4$, $y = 9$.

Відповідь: швидкість пішохода 4 км/год, велосипедистки – 9 км/год.

Сформулюйте послідовність дій для розв'язування текстових та прикладних задач за допомогою систем рівнянь. ○ Поясніть, як за допомогою системи рівнянь розв'язано приклади 1–3.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

28.1. (*Усно.*) Нехай x та y – деякі числа, різниця яких дорівнює числу 5, а добуток – числу 6. Яка система рівнянь відповідає умові задачі:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 6, \\ xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 5? \end{cases}$

28.2. Сума двох чисел дорівнює -3, а добуток дорівнює -28. Знайдіть ці числа.

28.3. Добуток двох чисел дорівнює -12, а сума дорівнює 1. Знайдіть ці числа.

28.4. Різниця двох чисел дорівнює 3, а різниця квадратів більшого і меншого чисел дорівнює -21. Знайдіть ці числа.

28.5. Різниця двох натуральних чисел дорівнює 2, а сума квадратів дорівнює 52. Знайдіть ці числа.

28.6. Периметр земельної ділянки прямокутної форми дорівнює 100 м, а її площа – 600 м^2. Знайдіть сторони земельної ділянки.

28.7. Сума двох сусідніх сторін прямокутника дорівнює 18 см. Знайдіть ці сторони, якщо площа прямокутника дорівнює 80 см^2.

28.8. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 17 см. Знайдіть катети, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 13 см.

28.9. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см. Знайдіть катети цього трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 10 см.

28.10. Сума двох чисел дорівнює 15, а різниця чисел, взаємно обернених з ними, дорівнює 0,1. Знайдіть ці числа.

28.11. Різниця двох чисел дорівнює 3, а сума обернених до них чисел дорівнює 0,5. Знайдіть ці числа.

28.12. Видатна українська художниця-живописець Тетяна Нилівна Яблонська народилася в лютому 1917 р. Знайдіть двоцифрове число, яке в 4 рази більше за суму своїх цифр і в 3 рази більше за добуток своїх цифр, відтак дізнаєтеся день її народження.

28.13. Знайдіть двоцифрове число, яке в 1,5 раза більше за добуток своїх цифр і в 4 рази більше за їхню суму, відтак дізнаєтеся, скільки медалей виборола Україна на Всесвітній гімназіаді 2022 року.

28.14. Кожен із двох принтерів має надрукувати текстовий файл обсягом 120 сторінок. Перший принтер за одну хвилину друкує на 2 сторінки менше, ніж другий, і тому пропрацював на 3 хв довше. Скільки сторінок за хвилину друкує кожен принтер?

28.15. Під час зимових канікул Яна та Олег мали розв'язати по 60 задач. Яна щодня розв'язувала на 1 задачу більше, ніж Олег, а тому впоралася із завданням на 2 дні раніше за Олега. Скільки задач щодня розв'язував кожен із друзів?

28.16. Маємо два шматки кабелю різних видів. Маса першого шматка дорівнює 65 кг; другий, довжина якого на 3 м більша за перший і маса кожного метра якого на 2 кг більша за масу кожного метра першого шматка, має масу 120 кг. Знайдіть довжини цих шматків.

28.17. У кінотеатрі було 320 місць, розташованих однаковими рядами. Після того як кількість місць у кожному ряду збільшили на 4 і додали ще один ряд, місць стало 420. Скільки стало рядів у кінотеатрі, якщо їх було більше, ніж 15?

28.18. Два автомобілі виїхали одночасно з міст A і B назустріч один одному і зустрілися через годину. Після цього вони, не зупиняючись, продовжили рухатися з тією самою швидкістю. Один з них прибув у місто B на 35 хв пізніше, ніж другий у місто A. Знайдіть швидкість кожного з автомобілів, якщо відстань між містами 140 км.

28.19. Двоє велосипедистів виїхали назустріч одне одному з Києва і Боярки, перебуваючи на відстані 30 км. Через годину вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рух з тією самою швидкістю. Велосипедист прибув у Боярку на 50 хв пізніше, ніж велосипедистка у Київ. Знайдіть швидкість кожного з велосипедистів.

28.20. Із села Яблунівка в село Грушівка, відстань між якими 9 км, вийшов пішохід. Через 30 хв із села Грушівка йому назустріч виїхав велосипедист, який зустрівся з пішоходом через 30 хв після свого виїзду. Знайдіть швидкість пішохода і швидкість велосипедиста, якщо пішохід долає відстань між селами на 2 год 15 хв повільніше, ніж велосипедист.

28.21. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см. Якщо одну з його сторін збільшити на 9 см, а другу залишити без змін, то діагональ збільшиться на 7 см. Знайдіть периметр початкового прямокутника.

28.22. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см. Якщо один з його катетів збільшити на 4 см, а другий залишити без змін, то гіпотенуза нового трикутника дорівнюватиме 15 см. Знайдіть площу початкового трикутника.

28.23. Два крани, якщо їх відкрити одночасно, можуть наповнити басейн за 2 год. За скільки годин можна наповнити басейн через кожен кран окремо, якщо через один з них третина басейну наповнюється на 1,5 год повільніше, ніж шоста частина басейну через другий?

28.24. Батько й син, працюючи разом, виконують певне завдання за 6 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожен з них, працюючи окремо, якщо сину для виконання $\frac{4}{5}$ завдання треба

на 8 днів більше, ніж батькові для виконання $\frac{2}{5}$ завдання?

28.25. З пунктів A і B, відстань між якими 10 км, одночасно назустріч один одному вийшли два пішоходи. Через 1 год їм залишилося пройти до зустрічі 1 км. Якби один з пішоходів вийшов на 15 хв раніше, то зустріч відбулася б на середині шляху. Знайдіть швидкість кожного пішохода.

28.26. Із двох міст, відстань між якими 72 км, назустріч одна одній вирушили дві велосипедистки і зустрілися на середині шляху, причому одна з них виїхала на 1 год раніше за другу. Якби велосипедистки виїхали одночасно, то вони зустрілися б через 2 год 24 хв. Знайдіть швидкості велосипедисток.

28.27. Моторний човен проплив 33 км за течією річки і повернув назад за 3 год 20 хв. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії річки, якщо відомо, що 11 км за течією і 6 км проти течії він долає за 50 хв.

28.28. Із двох пунктів A і B, відстань між якими 18 км, одночасно виїхали назустріч одне одному велосипедист і велосипедистка. Велосипедист, що виїхав із пункту A, прибув до пункту B через 24 хв після зустрічі, а велосипедистка прибула до пункту A через 54 хв після зустрічі. Знайдіть швидкості велосипедистів.

Вправи для повторення

28.29. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + 5x \geqslant 0$; 2) $x^2 - 2x - 15 < 0$.

28.30. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 9, \\ x^2 - y^2 = 9. \end{cases}$

28.31. Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 2}$.

28.32. Обчисліть $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^2$.

Життєва математика

28.33. У будинку, де мешкають першокласниця Наталка і старшокласник Сергій, 9 поверхів і кілька під'їздів. На кожному поверсі по 4 квартири. Наталка проживає у квартирі № 91, а Сергій – у квартирі № 170. У якому під'їзді та на якому поверсі проживає кожен з учнів?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

28.34. Спростіть вираз:

$$2026 \cdot (2027^9 + 2027^8 + 2027^7 + \ldots + 2027^2 + 2028) + 1.$$

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 6 (§§ 26–28)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Яка з нерівностей є квадратною?

А. $2x^2 - 3x^3 \geqslant 0$ **Б.** $7x^2 - 9x + 12 \leqslant 0$

В. $\dfrac{1}{3x^2 - 2x + 7} < 0$ **Г.** $2x - 9 > 0$

2. Укажіть число, що є розв'язком нерівності $x^2 - 2x - 3 < 0$.

А. -2 **Б.** 2 **В.** 4 **Г.** -1

3. Укажіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 - y^2 = 15. \end{cases}$

А. (1; 4) **Б.** (5; 0) **В.** (−4; 1) **Г.** (4; 1)

2 **4.** Розв'яжіть нерівність $x^2 + 2x \leqslant 0$.

А. $[-2; 0]$ **Б.** $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$

В. $(-2; 0)$ **Г.** $[0; 2]$

5. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

А. $(-1; -3)$ **Б.** $(3; 1)$

В. $(3; 1), (-1; -3)$ **Г.** $(1; 3), (-3; -1)$

6. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 см, а його площа – 54 см^2. Знайдіть менший катет трикутника.

А. 8 см **Б.** 12 см **В.** 10 см **Г.** 9 см

3 **7.** Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{\sqrt{6 - x - x^2}}{x + 1}$.

А. $[-3; -1) \cup (-1; 2]$ **Б.** $(-\infty; +\infty)$

В. $(-3; -1) \cup (-1; 2)$ **Г.** $[-3; 2]$

8. Із двох пунктів, відстань між якими 6 км, одночасно назустріч один одному вирушили два пішоходи і зустрілися через 1 год 12 хв. Знайдіть швидкість того пішохода, котрий ішов швидше, якщо на весь шлях він витратив на 1 год менше, ніж другий.

А. 2 км/год **Б.** 2,5 км/год **В.** 3 км/год **Г.** 4 км/год

9. Не виконуючи побудови, знайдіть усі точки перетину прямої $x + y = 3$ і параболи $y = x^2 + 1$.

А. (1; 2) **Б.** (1; 2), (−2; 5) **В.** (−1; 4), (2; 1) **Г.** (2; 1), (5; −2)

4 **10.** Укажіть усі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} x - 2xy = 6, \\ y - 2xy = 3. \end{cases}$

А. (2; −1), (1,5; −1,5) **Б.** (−1; 2), (−1,5; 1,5)

В. Система не має розв'язків **Г.** (2; −1)

11. Знайдіть усі значення a, за яких рівняння $x^2 + (2 - a)x + 9 = 0$ має два різних корені.

А. $(-4; 8)$ **Б.** $(-\infty; -4] \cup [8; +\infty)$

В. $(-\infty; -8) \cup (4; +\infty)$ **Г.** $(-\infty; -4) \cup (8; +\infty)$

12. Майстер і учень, працюючи разом, виконують деяку роботу за 6 год. Працюючи самостійно, майстер виконує $\frac{1}{5}$ частини роботи на 3 год швидше, ніж учень $\frac{1}{3}$ частину роботи. За скільки годин виконає роботу учень, якщо працюватиме самостійно?

А. 9 год **Б.** 10 год **В.** 12 год **Г.** 15 год

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною її розв'язків (А–Г).

Нерівність	*Множина розв'язків нерівності*
1. $(x+1)^2 - 5x \geqslant 1$	**А.** $(-\infty; +\infty)$
2. $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$	**Б.** $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$
3. $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 7 < 0$	**В.** $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$
	Г. Нерівність не має розв'язків

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 26–28

1 **1.** Які з нерівностей є квадратними:

1) $x^2 + x^3 - 3 \geqslant 0$; 2) $x^2 + 3x - 3 \geqslant 0$;

3) $4x - x^2 < 0$; 4) $\frac{1}{4x - x^2} < 0$?

2. Які із чисел -1; 0; 1; 2; 3 є розв'язками нерівності $x^2 - x - 2 \geqslant 0$?

3. Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ пара чисел:

1) (4; 0);
2) (1; 3)?

2 **4.** Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 - 3x < 0$;
2) $x^2 - 7x - 30 \geqslant 0$.

5. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$

6. Периметр прямокутника дорівнює 24 см, а його площа – 35 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

3 **7.** Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{\sqrt{8 - x^2 + 2x}}{x - 1}$.

8. Із двох пунктів, відстань між якими 24 км, вирушили одночасно назустріч одне одному велосипедистка й пішохід та зустрілися через 2 год. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо велосипедистка витратила на весь шлях на 3 год менше, ніж пішохід.

4 **9.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3xy - x = 5, \\ 3xy - y = 4. \end{cases}$

Додаткові завдання

4 **10.** Знайдіть, за яких значень a не має коренів рівняння

$$x^2 + (a - 3)x + 4 = 0.$$

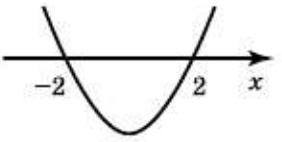
11. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати завдання за 12 год. За скільки годин може виконати завдання кожен робітник, працюючи окремо, якщо одному з них для виконання чверті завдання потрібно на 5 год менше, ніж другому для виконання третини завдання?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 6

До § 26

1 **1.** На малюнку 1 схематично зображено графік функції $y = x^2 - 4$. Використовуючи малюнок, запишіть розв'язки нерівності:

1) $x^2 - 4 > 0$;
2) $x^2 - 4 \geqslant 0$;
3) $x^2 - 4 < 0$;
4) $x^2 - 4 \leqslant 0$.



Мал. 1

2 **2.** Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + 7x > 0$; 2) $-x^2 - 5x \leqslant 0$;

3) $x^2 - 1 < 0$; 4) $-x^2 + 16 \geqslant 0$.

3. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $2x^2 + 3x - 5 > 0$; 2) $3x^2 - 7x - 10 \leqslant 0$.

4. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 > 0{,}04$; 2) $-x^2 \leqslant -\frac{9}{25}$;

3) $3x^2 \geqslant x$; 4) $-5x^2 < 2x$.

3 **5.** Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 - 2x - 9 \geqslant 0$; 2) $x^2 - 11 + 4x < 0$;

3) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0$; 4) $6x + x^2 + 9 \geqslant 0$;

5) $-x^2 - 8x - 16 < 0$; 6) $x^2 + x + 9 \geqslant 0$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2 - 1}{4} > 5 + x$; 2) $(x - 4)(x - 5) \leqslant 2$;

3) $6x^2 - 14x + 12 \geqslant (x - 3)^2$; 4) $\frac{x^2 - 4}{3} < \frac{x - 2}{2}$.

7. Одна сторона прямокутника на 2 см менша від другої. Якої довжини може бути ця сторона, якщо площа прямокутника менша від 35 см^2?

8. За яких додатних значень x справджується нерівність $x^2 \leqslant 4x + 21$?

9. Знайдіть розв'язки нерівності $0{,}8x^2 + x - 0{,}3 \leqslant 0$, що належать проміжку $\left[-2;\ -\frac{4}{3}\right]$.

4 **10.** За яких значень c множиною розв'язків нерівності $x^2 - 10x + c < 0$ є проміжок: 1) $(2; 8)$; 2) $(1; 9)$?

11. Запишіть подвійну нерівність у вигляді системи нерівностей і розв'яжіть її: 1) $1 < x^2 \leqslant 4$; 2) $0 < x^2 + x \leqslant 6$.

* **12.** За яких значень a розв'язком нерівності

$$x^2 - (a^2 - 2a - 3)x + a^2 + 2 < 0$$

є проміжок $(2; 3)$?

13. За яких значень m графіки функцій $y = mx^2 - x$ та $y = mx + 1 - 2m$ не мають спільних точок?

14. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 2(a - 1)x - (9a + 5) = 0$ відносно змінної x.

15. Для кожного значення a розв'яжіть нерівність (де x – змінна):

1) $x^2 + x(2 + a) + 2a < 0$;

2) $x^2 - x(a - 3) - (2a^2 + 6a) \geqslant 0$.

16. Для кожного значення m розв'яжіть систему нерівностей, де x – змінна:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \geqslant 0, \\ x < m; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 < 0, \\ x \geqslant m. \end{cases}$

До § 27

1 **17.** Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$ пара чисел:

1) (3; 0); 2) (4; 1);
3) (−4; −1); 4) (−1; −4)?

2 **18.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x^2, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x = 3. \end{cases}$

За допомогою програми для побудови графіків перевірте правильність розв'язування однієї із систем.

19. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = 3x - 2, \\ x^2 + y - 2 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 8, \\ xy = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 2x = 5, \\ xy = 18. \end{cases}$

3 **20.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = 2(x - 1)^2 + 3, \\ xy = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 4, \\ y = -x^2 + 6x - 8. \end{cases}$

За допомогою програми для побудови графіків перевірте правильність розв'язування однієї із систем.

21. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

22. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 5y^2 + x^2 = 29, \\ 2y^2 + x^2 = 17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2y = 5, \\ 5x^2 + 3y = 39; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2 + xy = 10, \\ 2x^2 + 5xy = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y} = 1, \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y} = 0. \end{cases}$

4 **23.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = |x - 3|, \\ \frac{1}{4}xy - 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = |x| - 1, \\ y - x^2 + 1 = 0. \end{cases}$

За допомогою програми для побудови графіків перевірте правильність розв'язування однієї із систем.

24. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} xy - x - 2y = 7, \\ 3xy - x - 3y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ y^2 - xy = -2. \end{cases}$

25. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 11, \\ \frac{x}{y}(x + y) = 24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x + 3y}{x - y} - \frac{x - y}{x + 3y} = \frac{24}{5}, \\ 5x + 8y = 18. \end{cases}$

До § 28

2 **26.** Різниця двох чисел дорівнює 3, а добуток дорівнює 10. Знайдіть ці числа.

27. Сума двох чисел дорівнює 12, а різниця їхніх квадратів – 24. Знайдіть ці числа.

28. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо їхня сума дорівнює 12 см, а площа трикутника дорівнює 16 см^2.

3 **29.** Добуток двох чисел дорівнює 20, а сума першого числа і потроєного другого дорівнює 19. Знайдіть ці числа.

30. Діагональ прямокутника дорівнює 15 см, а його площа – 108 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

31. Сума площ квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника, дорівнює 41 см^2, а площа трикутника – 10 см^2. Знайдіть катети трикутника.

32. Сума квадратів цифр двоцифрового числа дорівнює 34. Якщо до цього числа додати 18, то отримаємо число, що записано тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайдіть це число.

33. Площа прямокутника дорівнює 40 см^2. Якщо одну з його сторін збільшити на 2 см, а другу – на 1 см, то матимемо прямокутник із площею 60 см^2. Знайдіть периметр початкового прямокутника.

34. З міста A до міста B, відстань між якими 240 км, одночасно виїхали дві автівки. Через 2 год виявилося, що перша проїхала на 20 км більше, ніж друга. Знайдіть швидкість кожної автівки, якщо на весь шлях перша витрачає на 20 хв менше, ніж друга.

35. У кілька однакових кошиків розклали порівну 24 кг малини. Якби в кожен кошик поклали на 1 кг малини більше, то 2 кошики виявилися б зайвими. Скільки було кошиків?

36. (*Задача Маклорена.*) Кілька осіб пообідали разом і мали заплатити за обід 175 шилінгів. З'ясувалося, що у двох не було із собою коштів, тому інші заплатили на 10 шилінгів більше, ніж мали заплатити. Скільки осіб пообідало разом?

37. Яке двоцифрове число на 4 менше від суми квадратів його цифр і на 5 більше за їхній подвоєний добуток?

38. Периметр ділянки прямокутної форми дорівнює 360 м. Якщо довжину ділянки зменшити на 20 м, а ширину – на 30 м, то площа ділянки зменшиться вдвічі. Знайдіть розміри ділянки, якщо її довжина більша за ширину.

39. Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати певне завдання за 12 год. Якщо спочатку половину роботи виконає перша бригада, а потім друга її завершить, то всю роботу буде виконано за 25 год. За скільки годин може виконати завдання кожна бригада, працюючи самостійно?

40. Майстриня-склодув мала виготовити 200 скляних новорічних іграшок. Перші два дні вона виконувала денну норму, а потім щодня виготовляла на 4 іграшки більше, ніж передбачено нормою. Тому вже за день до кінця терміну виготовила 208 скляних іграшок. Скільки іграшок щодня мала виготовляти майстриня за нормою?

Головне в темі 6

КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ

Нерівності вигляду

$$ax^2 + bx + c > 0,$$
$$ax^2 + bx + c \geqslant 0,$$
$$ax^2 + bx + c < 0,$$
$$ax^2 + bx + c \leqslant 0,$$

де x – змінна, a, b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають ***квадратними нерівностями*** (або ***нерівностями другого степеня з однією змінною***).

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КВАДРАТНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Для розв'язування квадратних нерівностей слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (якщо вони існують);
2) якщо нерівність має строгий знак ($>$ або $<$), то корені квадратного тричлена позначаємо на осі x «виколотими» точками (вони виключатимуться із множини розв'язків нерівності); якщо знак нерівності нестрогий ($\geqslant$ або $\leqslant$), то корені квадратного тричлена позначаємо зафарбованими точками (вони включатимуться до множини розв'язків нерівності);
3) зображуємо графік функції $y = ax^2 + bx + c$ схематично, враховуючи напрямок гілок параболи і точки її перетину з віссю x (якщо вони існують);
4) знаходимо на осі x проміжки, на яких функція $y = ax^2 + bx + c$ задовольняє дану нерівність;
5) записуємо відповідь.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Графічний метод

Для розв'язування систем рівнянь графічно слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) побудувати графіки рівнянь в одній координатній площині;
2) знайти координати їхніх точок перетину або впевнитися, що графіки рівнянь спільних точок не мають;
3) якщо координати точок перетину є цілими числами, то виконати перевірку; якщо ні, то розв'язки системи знайти наближено;
4) записати відповідь.

Метод підстановки

Для розв'язування систем рівнянь способом підстановки слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) виразити в рівнянні першого степеня одну змінну через іншу;
2) підставити отриманий вираз у друге рівняння системи замість відповідної змінної;
3) розв'язати отримане рівняння з однією змінною;
4) знайти відповідні значення другої змінної;
5) записати відповідь.

СИСТЕМА ДВОХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕКСТОВИХ І ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Розв'язувати текстові задачі за допомогою систем рівнянь можна в такій послідовності:

1) позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x та y);
2) за умовою задачі скласти систему рівнянь;
3) розв'язати одержану систему;
4) проаналізувати знайдені значення змінних на відповідність умові задачі, дати відповідь на запитання задачі;
5) записати відповідь.

ТЕМА 7

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

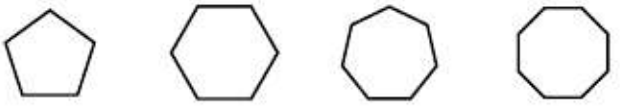
- **пригадаєте** формули довжини кола і площі круга;
- **ознайомитеся** з поняттями правильного многокутника, сектора і сегмента круга;
- **дізнаєтеся** формули радіусів вписаних та описаних кіл для правильних многокутників, довжини дуги кола, площ сектора і сегмента;
- **навчитеся** будувати правильні многокутники.

§ 29. Правильні многокутники

1. Означення правильного многокутника

Правильним многокутником **називають опуклий многокутник, у якого всі сторони між собою рівні і всі кути між собою рівні.**

Прикладами правильних многокутників є рівносторонній трикутник і квадрат. На малюнку 29.1 зображено правильні п'ятикутник, шестикутник, семикутник і восьмикутник.



Мал. 29.1

2. Формула для обчислення кута правильного n-кутника

Оскільки сума кутів будь-якого опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$, а всі кути правильного многокутника рівні між собою, то нескладно знайти міру такого кута.

Якщо α_n – кут правильного n-кутника, то

$$\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}.$$

Наприклад, кут правильного трикутника

$$\alpha_3 = \frac{180°(3-2)}{3} = 60°;$$

правильного чотирикутника (квадрата)

$$\alpha_4 = \frac{180°(4-2)}{4} = 90°,$$

це узгоджується з тим, що відомо з попередніх класів.

Приклад 1. Знайти кількість вершин правильного многокутника, якщо його зовнішній кут дорівнює 45°.

Розв'язання. 1) Оскільки зовнішній кут правильного многокутника дорівнює 45°, то легко знайти його внутрішній кут:
$\alpha_n = 180° - 45° = 135°$.

2) Маємо рівняння: $135° = \frac{180°(n-2)}{n}$, звідки $n = 8$.

Відповідь: 8.

3. Формула для обчислення зовнішнього кута правильного n-кутника

Приклад 1 можна було б розв'язати іншим способом, якщо знати формулу, яка пов'язує градусну міру зовнішнього кута правильного многокутника β_n з кількістю його вершин (сторін). Маємо:

$$\beta_n = 180° - \alpha_n = 180° - \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{180°n - 180°n + 360°}{n} = \frac{360°}{n}.$$

Отже,

якщо β_n – зовнішній кут правильного n-кутника, то

$$\beta_n = \frac{360°}{n}.$$

За цією формулою приклад 1 можна розв'язати простіше. Справді,

$$n = \frac{360°}{\beta_n} = \frac{360°}{45°} = 8.$$

4. Правильний многокутник, вписаний у коло та описаний навколо кола

Нагадаємо, що

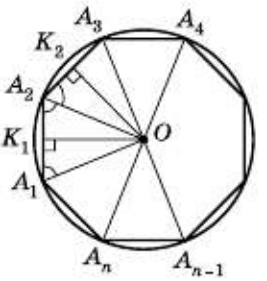
коло називають *описаним навколо многокутника*, якщо всі його вершини лежать на колі;

коло називають *вписаним у многокутник*, якщо всі його сторони дотикаються до кола.

Теорема (про коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане в нього). **Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло.**

Доведення. Нехай $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ – правильний n-кутник (мал. 29.2).

1) З вершин A_1 і A_2 проведемо бісектриси кутів n-кутника. Нехай вони перетнулися в точці O. Трикутник A_1OA_2 – рівнобедрений, бо $\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha_n}{2}$.



Мал. 29.2

2) Сполучимо точку O з вершиною A_3, $\angle OA_2A_3 = \frac{\alpha_n}{2}$ (бо A_2O – бісектриса кута $A_1A_2A_3$). Тоді $\triangle A_1A_2O = \triangle A_3A_2O$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $A_1O = A_2O = A_3O$.

3) Сполучаючи всі вершини цього n-кутника з точкою O і встановлюючи послідовно рівність кожної наступної пари трикутників, отримаємо, що $A_1O = A_2O = A_3O = \dots = A_{n-1}O = A_nO$. Це означає, що всі вершини цього правильного n-кутника рівновіддалені від точки O, а тому точка O є центром описаного навколо нього кола, а OA_1 – радіусом цього кола.

4) Проведемо висоти OK_1 і OK_2 в рівних між собою рівнобедрених трикутниках A_1A_2O і A_3A_2O до основ A_1A_2 і A_2A_3 відповідно. $\triangle OK_1A_1 = \triangle OK_2A_2$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $OK_1 = OK_2$.

5) Аналогічно доводимо, що рівними між собою є висоти всіх рівнобедрених трикутників, вершиною яких є точка O, а основою – сторона правильного многокутника. Усі сторони цього правильного многокутника рівновіддалені від точки O, а тому точка O – центр кола, вписаного в цей многокутник, а OK_1 – радіус цього кола. ■

Наслідок 1. Центри вписаного й описаного кіл правильного многокутника збігаються.

Цю точку називають *центром правильного многокутника*. На малюнку 29.2 точка O – центр многокутника.

Наслідок 2. Коло, вписане у правильний многокутник, дотикається до сторін многокутника у їхніх серединах.

5. Центральний кут правильного многокутника

Кут між двома радіусами описаного кола, кінцями яких є сусідні вершини правильного многокутника, називають *центральним кутом правильного многокутника*.

На малюнку 29.2 центральними кутами правильного n-кутника є кути A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, ..., $A_{n-1}OA_n$, A_nOA_1. Усі вони рівні між собою (за доведеною теоремою) і дорівнюють по $\frac{360^\circ}{n}$.

Нехай γ_n – центральний кут правильного n-кутника, тоді

$$\gamma_n = \frac{360^\circ}{n},$$

де γ_n – центральний кут правильного n-кутника.

6. Знаходження площі правильного многокутника

Приклад 2. Знайти площу правильного n-кутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює R.

Розв'язання. Нехай S_n – площа правильного n-кутника, S_1 – площа трикутника A_1OA_2 (див. мал. 29.2).

1) Тоді $S_n = n \cdot S_1$. Знайдемо S_1:

$$S_1 = \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \cdot \sin A_1OA_2 = \frac{1}{2} R^2 \sin\frac{360^\circ}{n}.$$

2) Маємо: $S_n = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \sin\frac{360^\circ}{n} = \frac{n}{2} R^2 \sin\frac{360^\circ}{n}$.

Відповідь: $\frac{n}{2} R^2 \sin\frac{360^\circ}{n}$.

Оскільки у правильний многокутник можна вписати коло, то його площу S_n за наслідком з теореми про площу трикутника за радіусом вписаного кола можна знайти і так:

$$S_n = pr,$$

де p – півпериметр n-кутника, r – радіус вписаного в нього кола.

7. Формули радіусів вписаних та описаних кіл правильних многокутників

Нехай $A_1A_2 = a_n$ – сторона правильного n-кутника, $OA_1 = R$ – радіус описаного навколо нього кола, $OK_1 = r$ – радіус вписаного в нього кола (див. мал. 29.2).

Тоді $A_1K_1 = \frac{a_n}{2}$, $\angle A_1OK_1 = \frac{\angle A_1OA_2}{2} = \frac{360^\circ}{n} : 2 = \frac{180^\circ}{n}$.

Із трикутника A_1OK_1:

1) $r = OK_1 = \frac{A_1K_1}{\operatorname{tg} \angle A_1OK_1} = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

2) $R = OA_1 = \frac{A_1K_1}{\sin \angle A_1OK_1} = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$.

3) $r = OK_1 = OA_1 \cos \angle A_1OK_1 = R\cos\frac{180^\circ}{n}$.

Систематизуємо отримані формули в таблицю та подамо в ній також формули радіусів вписаного й описаного кіл правильного трикутника, чотирикутника (квадрата), шестикутника.

Загальна формула	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$	$r = \dfrac{a_3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r = \dfrac{a_4}{2}$	$r = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$R = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}} = \dfrac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R = \dfrac{a_4}{\sqrt{2}} = \dfrac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R = a_6$
$r = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$	$r = \dfrac{R}{2}$	$r = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$	$r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Запам'ятовувати ці формули необов'язково, але потрібно вміти їх виводити.

Приклад 3. Знайти радіуси вписаного й описаного кіл правильного трикутника, якщо їхня різниця дорівнює 6 см. Чому дорівнює сторона цього трикутника?

Розв'язання. Нехай $R = x$ см, тоді $r = (x - 6)$ см.

1) Оскільки у правильному трикутнику $r = \dfrac{R}{2}$, то маємо рівняння: $x - 6 = \dfrac{x}{2}$, звідки $x = 12$ (см).

2) Отже, $R = 12$ см, $r = 6$ см, $a_3 = R\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ (см).

Відповідь: $R = 12$ см, $r = 6$ см, $a_3 = 12\sqrt{3}$ см.

8. Побудова правильних многокутників

Розглянемо, як за допомогою циркуля та лінійки без поділок побудувати правильні трикутник, чотирикутник і шестикутник, вписані в коло.

Приклад 4. Побудувати правильний шестикутник, вписаний у коло.

Розв'язання. Ураховуючи, що $a_6 = R$, побудову виконаємо в такій послідовності.

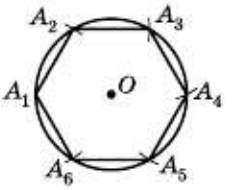
1) Проведемо довільне коло (мал. 29.3).

2) Позначимо на колі довільну точку A_1 – одну з вершин правильного шестикутника.

3) З точки A_1, як із центра радіусом, що дорівнює радіусу кола, зробимо на колі по обидва боки від точки A_1 засічки й отримаємо точки A_2 і A_6.

4) Продовжуємо робити засічки, рухаючись від точки A_2, тим самим радіусом, отримуючи вершини A_3, A_4, A_5, і сполучаємо їх.

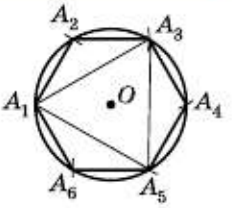
Отримаємо правильний шестикутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.



Мал. 29.3

Приклад 5. Побудувати правильний трикутник, вписаний у коло.

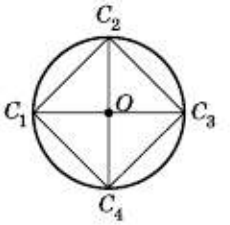
Розв'язання. Для побудови правильного вписаного трикутника потрібно відрізками сполучити вершини правильного вписаного шестикутника через одну (мал. 29.4). Отримаємо правильний трикутник $A_1A_3A_5$.



Мал. 29.4

Приклад 6. Побудувати правильний чотирикутник (квадрат), вписаний у коло.

Розв'язання. Для побудови вписаного чотирикутника (квадрата) достатньо через центр кола провести дві взаємно перпендикулярні прямі. Вони перетнуть коло у вершинах квадрата (мал. 29.5). Маємо квадрат $C_1C_2C_3C_4$.



Мал. 29.5

А ще раніше...

У давніх єгипетських та вавилонських пам'ятках трапляються правильні чотирикутники, п'ятикутники і восьмикутники у вигляді зображень на стінах та прикрасах, які висічено з каменя.

Давньогрецькі математики виявляли цікавість до правильних многокутників та їхньої побудови ще із часів Піфагора. Поділ кола на деяку кількість рівних частин для побудови правильних многокутників мав важливе значення для піфагорійців.

Учення про правильні многокутники, що розпочалося у школі Піфагора та продовжило розвиватися у V–IV ст. до н. е., було систематизовано Евклідом у четвертій книзі «Начал». За допомогою циркуля та лінійки Евклід умів будувати правильні n-кутники для n = 3, 4, 5, 6, 15. Крім того, Евклід визначив два критерії побудови правильних многокутників. Перший полягав у тому, що коли відомо, як побудувати правильний n-кутник, то можна побудувати і правильний $2n$-кутник, для чого, очевидно, кожну з дуг, що міститься між двома сусідніми вершинами правильного n-кутника, потрібно ділити навпіл. Евклід указав і другий критерій. Якщо відомо, як будувати правильні многокутники з кількістю сторін j і s, а j і s – взаємно прості числа, то можна побудувати правильний многокутник з $j \times s$ сторонами. Так можна дійти висновку, що давні вчені вміли будувати многокутники з $2^m \cdot 3^{k_1} \cdot 5^{k_2}$ сторонами, де m – ціле невід'ємне число, а k_1 і k_2 набувають значень 0 або 1.

Остаточне розв'язання задачі про те, як можна побудувати правильні n-кутники за допомогою тільки циркуля та лінійки, належить видатному німецькому математику Карлу Фрідріху Гауссу (1777–1855). У віці 19 років Гаусс довів, що за допомогою циркуля та лінійки можна поділити коло на просте число N рівних частин, таке, що обчислюється за формулою $N = 2^{2^n} + 1$, де n – натуральне число або нуль.

Після цього, 1801 р., Гаусс засобами алгебри довів, що за допомогою циркуля та лінійки можна побудувати лише такі правильні n-кутники, де число n можна розкласти на множники у вигляді:

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m,$$

де k – ціле невід'ємне число, а $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – прості числа вигляду $2^{2^t} + 1$ (де t – ціле невід'ємне число)*.

* Ці числа називають простими числами Ферма. На сьогодні відомо лише п'ять простих чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65 537.

Відкриття Гаусса наблизило математиків до висновку, що, крім раніше відомих правильних многокутників, які можна побудувати за допомогою циркуля та лінійки, з кількістю вершин, що дорівнює 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, …, за допомогою циркуля та лінійки можна побудувати й правильні многокутники, кількість вершин яких дорівнює 17, 34, 68, 126, 252, 257, … . Натомість неможливо за допомогою лише циркуля та лінійки побудувати правильний многокутник, у якого 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 28, … вершин.

Що називають правильним многокутником? ○ Чому дорівнює кут правильного n-кутника? ○ Сформулюйте і доведіть теорему про коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане в нього. ○ Сформулюйте наслідки із цієї теореми. ○ Що називають центром правильного многокутника, центральним кутом правильного многокутника? ○ Доведіть формули радіусів вписаних та описаних кіл правильних многокутників.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

29.1. (*Усно.*) Які з наведених многокутників є правильними:
1) паралелограм;
2) рівносторонній трикутник;
3) ромб;
4) рівнобедрений трикутник;
5) квадрат;
6) рівнобічна трапеція?

29.2. Знайдіть центральний кут правильного:
1) шестикутника;
2) двадцятикутника.

29.3. Знайдіть центральний кут правильного:
1) трикутника;
2) десятикутника.

29.4. Центральний кут правильного многокутника дорівнює 15°. Знайдіть кількість сторін многокутника.

29.5. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його центральний кут дорівнює 10°.

29.6. (*Усно.*) Чи правильне твердження:
1) будь-який правильний многокутник опуклий;
2) будь-який опуклий многокутник є правильним?

29.7. (*Усно.*) Які з тверджень правильні, а які – неправильні:
1) якщо чотирикутник не є квадратом, то він не може бути правильним;
2) многокутник є правильним, якщо він опуклий і всі його сторони між собою рівні;
3) серед прямокутників є правильні чотирикутники;
4) трикутник є правильним, якщо всі його кути між собою рівні?

29.8. Чи правильне твердження:

1) серед трапецій є правильні чотирикутники;

2) терміни «рівносторонній трикутник» і «правильний трикутник» означають одне й те саме;

3) будь-який чотирикутник, у якого всі сторони між собою рівні, є правильним;

4) якщо многокутник не є опуклим, то він не може бути правильним?

29.9. Знайдіть міру кута правильного n-кутника, якщо:

1) $n = 8$;

2) $n = 15$.

29.10. Знайдіть міру кута правильного:

1) дев'ятикутника; 2) дванадцятикутника.

29.11. Знайдіть міру зовнішнього кута правильного:

1) п'ятикутника; 2) тридцятикутника.

29.12. Знайдіть міру зовнішнього кута правильного n-кутника, якщо:

1) $n = 10$; 2) $n = 36$.

29.13. 1) Скільки сторін має правильний многокутник, якщо його кут дорівнює 165°?

2) Сприймаючи кількість сторін, як число, згадайте, яка визначна подія для України пов'язана із цим числом.

29.14. 1) Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут дорівнює 108°.

2) Кількість сторін буде дорівнювати століттю, у якому засновано м. Алушта (Автономна Республіка Крим).

29.15. Який найбільший центральний кут може бути у правильного многокутника?

29.16. Сторона правильного трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.

29.17. Сторона квадрата дорівнює 2 см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.

29.18. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо кола з радіусом $2\sqrt{3}$ см.

29.19. Знайдіть сторону правильного трикутника, вписаного в коло з радіусом $8\sqrt{3}$ см.

29.20. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в коло з радіусом $7\sqrt{2}$ см.

29.21. Накресліть коло, радіус якого 4 см. Впишіть у коло правильний шестикутник.

29.22. Накресліть коло, радіус якого 3 см. Впишіть у коло правильний трикутник.

29.23. Накресліть коло, діаметр якого 5 см. Впишіть у коло квадрат.

29.24. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо його зовнішній кут дорівнює 30°?

29.25. Зовнішній кут правильного многокутника дорівнює 20°. Знайдіть, скільки у многокутника вершин.

29.26. Зовнішній кут правильного многокутника становить $\frac{2}{7}$ від внутрішнього. Скільки вершин у цього многокутника?

29.27. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, зовнішній кут якого на 108° менший від внутрішнього.

29.28. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює $2\sqrt{6}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

29.29. Сторона квадрата, описаного навколо кола, дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

29.30. Впишіть у коло правильний восьмикутник.

29.31. Впишіть у коло правильний дванадцятикутник.

29.32. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 12 см, а радіус вписаного в нього кола – $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть кількість сторін многокутника та його сторону.

29.33. Радіус кола, вписаного у правильний многокутник, дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а радіус кола, описаного навколо нього, – 4 см. Знайдіть кількість вершин многокутника та його сторону.

29.34. Сторона правильного восьмикутника дорівнює $4\sqrt{2-\sqrt{2}}$ см. Знайдіть його площу.

29.35. Сторона правильного дванадцятикутника дорівнює $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см. Знайдіть його площу.

29.36. Кути квадрата, сторона якого дорівнює $(2+\sqrt{2})$ см, зрізали так, що утворився правильний восьмикутник. Знайдіть його сторону.

Вправи для повторення

29.37. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:

1) 7 см і 24 см; 2) $6a$ см і $8a$ см.

29.38. Знайдіть косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см, 8 см і 10 см.

29.39. Дві хорди перетинаються всередині круга. Відрізки, на які точка перетину хорд ділить одну з них, дорівнюють 4 см і 9 см. Знайдіть відрізки, на які ця точка ділить другу хорду, якщо:

1) вони між собою рівні;

2) один з них на 16 см більший за інший.

29.40. Периметр трапеції дорівнює 108 см, а точка дотику вписаного в неї кола ділить бічну сторону на відрізки 4 см і 16 см завдовжки. Знайдіть площу трапеції.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

29.41. *Практичне завдання.* 1) Візьміть стакан (циліндр, підставку для ручок циліндричної форми тощо) та за допомогою нитки обведіть цей предмет. Знайдіть довжину C нитки.

2) Поставте цей предмет на аркуш паперу й обведіть олівцем. Знайдіть центр отриманого кола, а потім його діаметр d (або знайдіть діаметр за допомогою штангенциркуля).

3) Знайдіть відношення $C : d$ з точністю до тисячних. Систематизуйте дані, що отримали, в таблицю:

№ досліду	Довжина нитки C, см	Діаметр d, см	Відношення $C : d$
1			
2			
3			

Життєва математика

29.42. 1) Потрібно пофарбувати стелю у двох тренажерних залах: один з них квадратної форми зі стороною 4,5 м, а другий – прямокутної, розмірами 5 м і 3 м. Для фарбування 1 м^2 стелі витрачається 220 г фарби. Фарба продається в банках по 2,5 кг. Яку найменшу кількість банок фарби потрібно для цього придбати?

2) Скільки потрібно заплатити за цю фарбу, якщо одна банка коштує 370 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

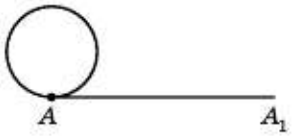
29.43. Відстані від точки перетину медіан до вершин гострих кутів прямокутного трикутника дорівнюють $6\sqrt{73}$ і $12\sqrt{13}$ см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

§ 30. Довжина кола. Довжина дуги кола

1. Уявлення про довжину кола

Наочне уявлення про *довжину кола* можна отримати так. Уявімо, що коло виготовлено з тонкої нитки, яка не розтягується. Розріжемо нитку в деякій точці A і вирівняємо її (мал. 30.1). Матимемо відрізок AA_1, довжина якого є довжиною кола.

Периметр будь-якого правильного многокутника, вписаного в коло, є наближеним значенням довжини цього кола. Що більшою є кількість сторін многокутника, то точнішим буде це наближене значення (мал. 30.2). Так, наприклад, периметр правильного вписаного в коло дванадцятикутника менше відрізняється від довжини кола, ніж пери-



Мал. 30.1

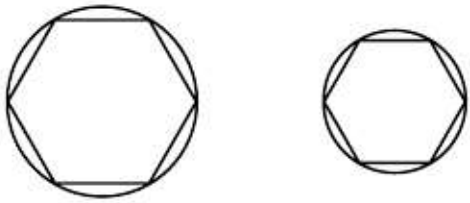
Мал. 30.2

метр правильного шестикутника, вписаного в те саме коло. Якщо кількість сторін правильного многокутника збільшувати необмежено, то його периметр буде необмежено наближатися до довжини кола.

2. Відношення довжини кола до його діаметра

Доведемо важливу властивість довжини кола.

Теорема (про відношення довжини кола до його діаметра). Відношення довжини кола до його діаметра є сталим для всіх кіл.



Мал. 30.3

Доведення. Розглянемо два довільних кола, радіуси яких R і R', а довжини кіл C і C' (мал. 30.3).

1) У кожне з кіл впишемо правильний n-кутник з однаковою кількістю сторін. Нехай сторони цих n-кутників a_n і a'_n, їхні периметри P_n і P'_n.

2) Маємо:

$$P_n = na_n = n \cdot 2R \sin\frac{180^\circ}{n} \text{ і } P'_n = na'_n = n \cdot 2R' \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

3) Тоді:

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}.$$

4) Ця рівність є пропорцією за будь-якого значення n. Якщо n збільшувати необмежено, то периметри многокутників P_n і P'_n необмежено наближатимуться до довжин кіл C і C'. Тому:

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}, \text{ звідки } \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Отже, відношення довжини кола до його діаметра є числом сталим для всіх кіл. ■

Відношення довжини кола до його діаметра прийнято позначати грецькою літерою π (читають «пі»):

$$\frac{C}{2R} = \pi.$$

Число π ірраціональне, його наближене значення $\pi \approx 3{,}1416$. Для практичних потреб наближене значення найчастіше використовують з точністю до сотих: $\pi \approx 3{,}14$.

3. Формула для обчислення довжини кола

З рівності $\frac{C}{2R} = \pi$ отримаємо, що

довжина кола, радіус якого дорівнює R, обчислюється за формулою $C = 2\pi R$.

А враховуючи, що діаметр кола дорівнює $2R$, маємо формулу довжини кола:

$$C = \pi d, \text{ де } d - \text{діаметр.}$$

Приклад 1. Знайти довжину кола, радіус якого дорівнює:
1) 5 см; 2) 0,8 дм.

Розв'язання. 1) $C = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ (см);
2) $C = 2\pi \cdot 0{,}8 = 1{,}6\pi$ (дм).
Відповідь: 1) 10π см; 2) $1{,}6\pi$ дм.

Приклад 2. Знайти радіус кола, довжина якого дорівнює:
1) 12π см; 2) 8 дм.

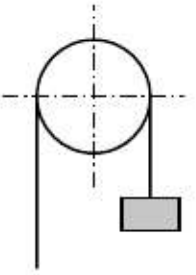
Розв'язання. 1) $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{12\pi}{2\pi} = 6$ (см).

2) $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$ (дм).

Відповідь: 1) 6 см; 2) $\frac{4}{\pi}$ дм.

Приклад 3. Вантаж піднімають за допомогою блока (мал. 30.4). На скільки підніметься вантаж за 10 обертів блока, якщо діаметр блока становить 15 см?

Розв'язання. 1) Оскільки $d = 15$ см, то довжина кола блока: $C = \pi d = 15\pi$ (см).
2) Якщо блок зробить 10 обертів, то підніме вантаж на висоту:
$10 \cdot 15\pi = 150\pi \approx 150 \cdot 3{,}14 = 471$ (см) = 4,71 (м).
Відповідь: 4,71 м.

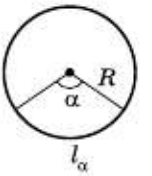


Мал. 30.4

4. Формула для обчислення довжини дуги кола

Знайдемо *формулу* для обчислення *довжини дуги кола*, що відповідає центральному куту α, якщо радіус кола дорівнює R (мал. 30.5).

Оскільки довжина кола дорівнює $2\pi R$, то довжина дуги, що відповідає центральному куту $1°$, складає $\frac{1}{360}$ від довжини кола, тобто $l_{1°} = \frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тоді довжину дуги l_α можна обчислити за формулою:



Мал. 30.5

$$l_\alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha, \text{ де } \alpha - \text{градусна міра дуги.}$$

Приклад 4. Радіус кола дорівнює 4 см. Знайти довжину дуги, що відповідає центральному куту: 1) $20°$; 2) $270°$.

Розв'язання. 1) $l_{20°} = \frac{\pi \cdot 4}{180} \cdot 20 = \frac{4\pi}{9}$ (см);

2) $l_{270°} = \frac{\pi \cdot 4}{180} \cdot 270 = 6\pi$ (см).

Відповідь: 1) $\frac{4\pi}{9}$ см; 2) 6π см.

Приклад 5. Довжина дуги кола дорівнює 3π см, а її градусна міра – $36°$. Знайти радіус кола.

Розв'язання. $3\pi = \frac{\pi \cdot R}{180} \cdot 36$, звідки $R = 15$ см.

Відповідь: 15 см.

А ще раніше...

І в далекому минулому людям доводилося розв'язувати задачі на обчислення довжини кола.

У різні часи значення відношення довжини кола C до його діаметра d, які використовували під час обчислень, різнилися. Наприклад, у Давньому Єгипті (≈ 3500 років тому) це значення дорівнювало 3,16, а давні римляни вважали, що 3,12. Досить точно значення цього відношення визначив давньогрецький учений Архімед (бл. 287–212 рр. до н. е.). Він довів, що $3\frac{10}{17} < \frac{C}{d} < 3\frac{1}{7}$, тобто що $3{,}1408... < \frac{C}{d} < 3{,}1428...$

Першим використовувати грецьку літеру π для позначення відношення довжини кола до його діаметра запропонував англійський математик Вільям Джонс 1706 р., але загальновживаним це позначення стало завдяки працям видатного німецького математика Леонарда Ейлера (1707–1783), який обчислив число π з точністю до 153 десяткових знаків.

У наш час за допомогою сучасних комп'ютерів обчислено понад 200 мільярдів десяткових знаків числа π.

Як можна отримати уявлення про довжину кола? ○ Сформулюйте і доведіть теорему про відношення довжини кола до його діаметра. ○ Чому дорівнює це відношення? ○ Як обчислити довжину кола? ○ Як обчислити довжину дуги кола градусної міри α, якщо радіус кола дорівнює R?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

30.1. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:
1) 5 см; 2) 12 см; 3) 2,3 дм; 4) 0,4 м.

30.2. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:
1) 7 см; 2) 1,5 см; 3) 4 дм; 4) 0,2 м.

30.3. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює:
1) 4 см; 2) 8 дм; 3) 3,5 см; 4) 1,6 м.

30.4. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює:
1) 6 дм; 2) 14 см; 3) 2,8 см; 4) 0,7 м.

30.5. У скільки разів збільшиться довжина кола, якщо його радіус збільшити у:
1) 2 рази; 2) 5 разів?

30.6. У скільки разів зменшиться довжина кола, якщо його радіус зменшити у:
1) 3 рази; 2) 10 разів?

2

30.7. 1) 12-річний український легкоатлет Матвій Строгалєв побив рекорд у стрибках із жердиною серед юнаків, молодших 14 років. Знайдіть довжину кола C, діаметр якого на 2 м більший за радіус.

2) Частка $\frac{C}{\pi}$ допоможе дізнатися, яку висоту підкорив юний легкоатлет.

30.8. Знайдіть довжину кола, радіус якого на 8 см менший від діаметра.

30.9. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює:
1) 4π см; 2) 7π дм; 3) 6 см; 4) $4\pi^2$ дм.

30.10. Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює:
1) 6π дм; 2) π см; 3) 8 дм; 4) $6\pi^2$ см.

30.11. Радіус кола дорівнює 20 см. Знайдіть довжину дуги градусної міри α, якщо α дорівнює:
1) 1°; 2) 10°; 3) 45°;
4) 120°; 5) 225°; 6) 300°.

30.12. Радіус кола дорівнює 10 см. Знайдіть довжину дуги градусної міри β, якщо β дорівнює:
1) 1°; 2) 20°; 3) 90°; 4) 135°; 5) 240°; 6) 330°.

30.13. На котушку радіуса 2 см намотано 10 витків нитки. Знайдіть довжину нитки.

30.14. На котушку діаметром 1 м намотано 15 витків дроту. Знайдіть довжину дроту.

3

30.15. Радіус кола зменшили на 4 см. На скільки зменшиться довжина кола?

30.16. Радіус кола збільшили на 5 см. На скільки збільшиться довжина кола?

30.17. Знайдіть радіус кола, у якому дуга, що відповідає центральному куту 20°, має довжину 2π см.

30.18. Довжина дуги дорівнює 18π см, а її градусна міра – 120°. Знайдіть радіус кола.

30.19. Довжина дуги кола радіуса 18 см дорівнює 4π см. Знайдіть градусну міру дуги.

30.20. Знайдіть градусну міру дуги кола, якщо її довжина дорівнює 6π см, а радіус кола – 15 см.

30.21. Хвилинна стрілка годинника, установленого на вежі, має довжину 2,5 м. Дугу якої довжини описує кінець стрілки за 25 хв? (Результат округліть із точністю до сотих метра.)

30.22. Діаметр вала колодязя дорівнює 30 см, а глибина колодязя – 7,6 м. Скільки повних обертів корби треба зробити, щоб витягти відро води?

30.23. На котушку радіуса 3,6 см намотано 1,4 м мотузки. Скільки зроблено повних витків?

30.24. Хорда $6\sqrt{2}$ см завдовжки стягує дугу кола, градусна міра якої становить 90°. Знайдіть довжину кола.

30.25. Хорда 8 см завдовжки стягує дугу кола, градусна міра якої становить 60°. Знайдіть довжину кола.

30.26. Знайдіть довжину кола, вписаного в ромб, сторона якого дорівнює 8 см, а гострий кут – 30°.

30.27. Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутного трикутника з катетами 6 см і 8 см.

4

30.28. За даною хордою a знайдіть довжину її дуги, якщо градусна міра дуги дорівнює:
1) 60°;
2) 90°;
3) 120°.

30.29. За даною довжиною дуги, що дорівнює 2π см, знайдіть її хорду, якщо градусна міра дуги:
1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

30.30. Знайдіть довжину кола, описаного навколо трапеції, сторони якої дорівнюють 6 см, 6 см, 6 см і 12 см.

30.31. У колі проведено дві паралельні хорди, довжини яких 12 см і 16 см. Відстань між хордами становить 14 см. Знайдіть довжину кола.

30.32. Три кола з радіусами 2 см, 3 см і 27 см попарно дотикаються одне до одного. Знайдіть довжину кола, що проходить через центри цих кіл.

Вправи для повторення

30.33. Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB : BC : CA = 3 : 4 : 5$, $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 8$ см, $C_1A_1 = 10$ см;
2) $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$, $\angle A_1 = 20°$, $\angle B_1 = 70°$, $\angle C_1 = 90°$?

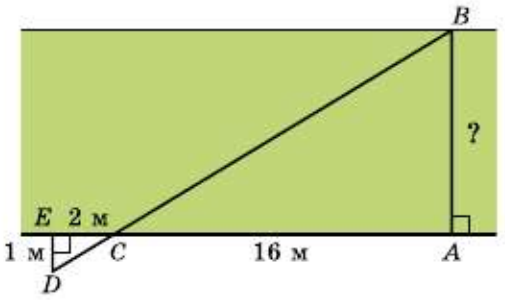
30.34. Розв'яжіть трикутник ABC, у якого $\angle C = 90°$:
1) $AC = 6$ см, $BC = 4$ см;
2) $AB = 7$ см, $BC = 2$ см.
Гострі кути трикутника знайдіть з точністю до мінути.

30.35. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 26 см і 30 см. Знайдіть:
1) площу трикутника;
2) висоти трикутника;
3) радіус кола, вписаного у трикутник;
4) радіус кола, описаного навколо трикутника.

30.36. Кути правильного трикутника зрізали так, що отримали правильний шестикутник. Знайдіть сторону трикутника, якщо сторона шестикутника дорівнює a см.

Життєва математика

30.37. Використовуючи дані, наведені на малюнку, знайдіть ширину AB річки.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

30.38. (*Олімпіада Нью-Йорка, 1977 р.*) Нехай a, b, c – сторони трикутника, P – його периметр. Доведіть, що

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{P^2}{3}.$$

§ 31. Площа круга та його частин

1. Площа круга

Нагадаємо, що *кру́гом* називають частину площини, обмежену колом, об'єднану із самим колом.

Теорема (про площу круга). Площа S круга, радіус якого дорівнює r, обчислюється за формулою:

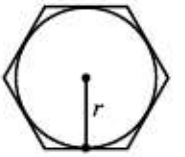
$$S = \pi r^2.$$

Доведення. Опишемо навколо кола правильний n-кутник, нехай P_n – периметр n-кутника, S_n – його площа (мал. 31.1).

1) За наслідком з теореми про площу трикутника за радіусом вписаного кола маємо: $S_n = \frac{P_n}{2} \cdot r$.

2) Якщо n збільшувати необмежено, то периметр многокутника необмежено наближатиметься до довжини C кола, а площа многокутника необмежено наближатиметься до площі S круга. Тоді:

$$S = \frac{C}{2} \cdot r = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2. \blacksquare$$



Мал. 31.1

Приклад 1. Знайти площу круга, радіус якого дорівнює:

1) 3 см; 2) $\frac{7}{\sqrt{\pi}}$ дм.

Розв'язання. 1) $S = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ (см^2); 2) $S = \pi\left(\frac{7}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = \frac{49\pi}{\pi} = 49$ (дм^2).

Відповідь: 1) 9π см^2; 2) 49 дм^2.

Приклад 2. Знайти радіус круга, площа якого дорівнює:

1) 16π см^2; 2) 7 дм^2.

Розв'язання. 1) $r^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{16\pi}{\pi} = 16$, отже, $r = 4$ см.

2) $r^2 = \frac{S}{\pi} = \frac{7}{\pi}$, отже, $r = \sqrt{\frac{7}{\pi}}$ дм.

Відповідь: 1) 4 см; 2) $\sqrt{\frac{7}{\pi}}$ дм.

Приклад 3. Дві водопровідні труби, діаметр яких 10 см, потрібно замінити однією трубою тієї самої пропускної спроможності. Яким має бути діаметр цієї труби?

Розв'язання. 1) Радіус кожної з двох труб $r = 5$ см.

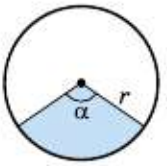
2) Переріз кожної з труб $S = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$ (см^2).

3) Переріз нової труби має дорівнювати сумі перерізів двох старих, тобто $25\pi \cdot 2 = 50\pi$ (см^2).

4) Нехай R – радіус нової труби. Тоді $50\pi = \pi R^2$, $R = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07$ (см). Тоді діаметр цієї труби 14,14 см.

Відповідь: 14,14 см.

2. Сектор та його площа



Мал. 31.2

Частину круга, обмежену двома його радіусами, називають *сектором*. На малюнку 31.2 зображено два сектори, один з яких зафарбований, а другий – ні. Знайдемо *формулу площі сектора* кола радіуса r, що відповідає центральному куту градусної міри α. Оскільки площа круга дорівнює πr^2, то площа сектора, що відповідає центральному куту 1°, становить $\frac{1}{360}$ від площі круга і дорівнює $\frac{\pi r^2}{360}$. Тому

площа сектора, що відповідає центральному куту градусної міри α, обчислюється за формулою:

$$S_\alpha = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha.$$

Приклад 4. Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см, якщо відповідний сектору центральний кут дорівнює:
1) 30°; 2) 225°.

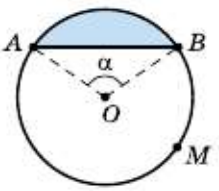
Розв'язання.

1) $S_{30^\circ} = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 30 = 3\pi$ (см^2);

2) $S_{225^\circ} = \frac{\pi \cdot 6^2}{360} \cdot 225 = 22{,}5\pi$ (см^2).

Відповідь: 1) 3π см^2; 2) $22{,}5\pi$ см^2.

3. Сегмент та його площа



Мал. 31.3

Частину круга, обмежену хордою і відповідною їй дугою, називають *сегментом*. На малюнку 31.3 зображено два сегменти, один з яких обмежено хордою AB і дугою AB, а другий – хордою AB і дугою AMB. Якщо градусна міра центрального кута, що відповідає сегменту, менша від 180°, то площу сегмента знаходимо як різницю площ відповідного сектора і трикутника AOB. Якщо градусна міра центрального кута, що відповідає сегменту, більша за 180°, то площу сегмента знаходимо як суму площ відповідного сектора і трикутника AOB (мал. 31.3). Сегмент, якому відповідає розгорнутий кут, є півкругом, і його площа дорівнює $\frac{\pi r^2}{2}$, де r – радіус круга.

Отже,

площа сегмента, що не є півкругом, обчислюється за формулою

$$S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \pm S_{AOB}.$$

Приклад 5. Кінці хорди ділять коло у відношенні 1 : 2. Знайдіть площі двох сегментів, що утворилися, якщо радіус круга дорівнює 12 см.

Розв'язання. Нехай на малюнку 31.3 менша з дуг, що утворилися, дорівнює $x°$, тоді більша дорівнює $(2x)°$.

1) Маємо $x° + (2x)° = 360°$, звідси $x = 120°$. Отже, меншому із сегментів відповідає центральний кут 120°, а більшому – 240°.

2) $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin AOB = \frac{1}{2} \cdot 12^2 \cdot \sin 120° = 36\sqrt{3}$ (см^2).

3) Позначимо площі сегментів S_1 і S_2. Матимемо:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot 12^2}{360} \cdot 120 - 36\sqrt{3} = 48\pi - 36\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 12^2}{360} \cdot 240 + 36\sqrt{3} = 96\pi + 36\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $(48\pi - 36\sqrt{3})$ см^2, $(96\pi + 36\sqrt{3})$ см^2.

А ще раніше...

Задачі щодо обчислення площі круга, як і задачі щодо знаходження довжини кола, виникли в давнину.

У папірусі Ахмеса (≈ 2 тис. років до н. е.) указано, що площею S круга слід вважати площу квадрата, сторона якого дорівнює $\frac{8}{9}$ діаметра, тобто:

$$S = \left(\frac{8}{9} \cdot 2R\right)^2 = \frac{256}{81} R^2.$$

Це означає, що на той час значенням відношення довжини кола до його діаметра (у сучасних позначеннях – число π) вважали число $\frac{256}{81} \approx 3{,}1605\ldots$

У творах Герона «Метрика» і «Геометрика» є багато вправ на обчислення діаметра і довжини кола, площі круга, сегмента і сектора круга.

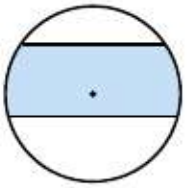
Термін *сегмент* латинського походження (*segmentum* – відрізок) і є дослівним перекладом відповідного грецького терміна, який використовував ще Евклід. Термін *сектор* також латинського походження (*sector* – різець).

Крім задачі на знаходження площі круга, видатні геометри Давньої Греції намагалися розв'язати також і задачу про квадратуру круга, тобто за допомогою циркуля та лінійки побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі заданого круга. Лише в XIX ст. було доведено, що задачу про квадратуру круга неможливо розв'язати, тому під виразом *квадратура круга* мають на увазі задачу, яку неможливо розв'язати.

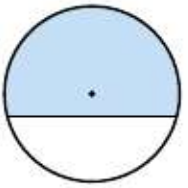
Сформулюйте і доведіть теорему про площу круга. ○ Що називають сектором? ○ За якою формулою обчислюють площу сектора? ○ Що називають сегментом? ○ За якою формулою обчислюють площу сегмента?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

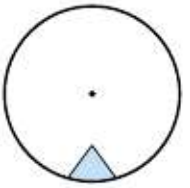
1 **31.1.** (*Усно.*) На якому з малюнків 31.4–31.7 зафарбована фігура є сектором, а на якому – сегментом?



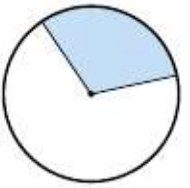
Мал. 31.4



Мал. 31.5



Мал. 31.6



Мал. 31.7

31.2. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:

1) 2 см; 2) 5 дм; 3) 1,4 см; 4) $\frac{2}{5}$ м.

31.3. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:

1) 4 дм; 2) 7 см; 3) $\frac{1}{3}$ см; 4) 0,8 м.

31.4. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює:

1) 6 см; 2) 1,4 дм.

31.5. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює:

1) 12 дм; 2) 1,6 дм.

2 **31.6.** Знайдіть площу круга, радіус якого на 10 см менший від діаметра.

31.7. Знайдіть площу круга, діаметр якого на 12 дм більший за радіус.

31.8. Площа одного круга в 9 разів більша за площу другого. Знайдіть відношення їхніх радіусів.

31.9. Радіус круга збільшили втричі. У скільки разів збільшиться площа круга?

31.10. Площа круга дорівнює 25π см^2. Знайдіть радіус круга.

31.11. Площа круга дорівнює 121π см^2. Знайдіть радіус круга.

31.12. Знайдіть площу круга, довжина кола якого дорівнює 20π см.

31.13. Знайдіть площу круга, довжина кола якого дорівнює 18π дм.

31.14. Знайдіть площу сектора круга радіуса 8 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:

1) 36°; 2) 60°; 3) 135°; 4) 225°.

31.15. Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:

1) 18°; 2) 75°; 3) 150°; 4) 240°.

31.16. Площа круга чисельно дорівнює довжині кола, що його обмежує. Знайдіть радіус круга.

31.17. (*Усно.*) 1) Чи може сегмент круга бути водночас сектором?
2) За якої умови сегмент круга можна розрізати на сектори?

31.18. 1) Щоб засіяти 1 м^2 землі, потрібно 40 г насіння газонної трави. Скільки кілограмів газонної трави необхідно, щоб засіяти дві клумби круглої форми, діаметр кожної з яких становить 16 м? (Відповідь округліть до десятих кілограма.)

2) Газонну траву продають на вагу за ціною 450 грн за кілограм. Скільки коштів знадобиться, щоб засіяти ці дві клумби?

31.19. 1) Норма висадження троянд становить 8 штук на 1 м^2. Потрібно висадити троянди на трьох клумбах круглої форми, радіус кожної з яких дорівнює 3 м. Скільки знадобиться троянд для цього?

2) Скільки коштів знадобиться для цього, якщо насіння троянди продають у пакетиках по 10 штук за ціною 80 грн за пакетик?

31.20. Знайдіть площу круга, описаного навколо правильного трикутника зі стороною $4\sqrt{3}$ см.

31.21. Знайдіть площу круга, вписаного у правильний трикутник зі стороною $2\sqrt{3}$ см.

31.22. Знайдіть площу круга, вписаного у квадрат, площа якого дорівнює 8 см^2.

31.23. Знайдіть площу круга, описаного навколо квадрата, площа якого дорівнює 12 см^2.

31.24. Знайдіть площу кільця, розміщеного між двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 2 см і 5 см.

31.25. Визначте площу тієї частини круга, що лежить поза вписаним у нього квадратом зі стороною 10 см.

31.26. Знайдіть площу тієї частини круга, що лежить поза вписаним у нього прямокутним трикутником з катетами 12 см і 16 см.

31.27. 1) Круг, радіус якого 2 м, поділено на два сектори, центральний кут одного з яких дорівнює 120°. Сектори пофарбовано у два різних кольори. Скільки витратили фарби кожного кольору, якщо на один квадратний метр площі потрібно 0,2 кг фарби? Відповідь округліть до десятих кілограма.

2) Фарба продається у банках по 0,3 кг за ціною 120 грн за банку. Скільки коштів знадобиться, щоб пофарбувати весь круг?

31.28. Знайдіть радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 180π см^2, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює 72°.

31.29. Знайдіть радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 12π см^2, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює 120°.

31.30. Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 12 см, а центральний кут, що відповідає сегменту, дорівнює:

1) 30°; 2) 120°; 3) 225°.

31.31. Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 6 см, а центральний кут, що відповідає сегменту, дорівнює:

1) 45°; 2) 90°; 3) 210°.

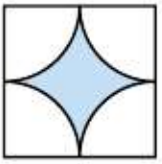
4 **31.32.** Кінці хорди $6\sqrt{3}$ см завдовжки ділять коло у відношенні 1 : 2. Знайдіть площі двох утворених сегментів.

31.33. Кінці хорди 12 см завдовжки ділять коло у відношенні 1 : 5. Знайдіть площі двох утворених сегментів.

31.34. Знайдіть площу круга, вписаного в рівнобічну трапецію, основи якої дорівнюють 5 см і 3 см.

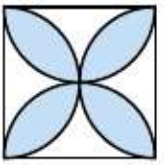
31.35. У рівнобічну трапецію вписано круг, площа якого дорівнює 48π см^2. Знайдіть площу трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60°.

31.36. Знайдіть площі зафарбованих фігур на малюнках 31.8–31.10, якщо сторона квадрата дорівнює a.



Мал. 31.8

Мал. 31.9



Мал. 31.10

Вправи для повторення

31.37. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Невідомі сторони знайдіть з точністю до сотих:

1) $AB = 5$ см, $\angle A = 72°$;

2) $BC = 4$ см, $\angle B = 15°$.

31.38. Скільки вершин має правильний многокутник, якщо різниця його внутрішнього і зовнішнього кутів дорівнює 100°?

31.39. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 8 см, а кут між ними – 60°. Знайдіть найменшу висоту трикутника.

31.40. Побудуйте трапецію з основами a і b та діагоналями d_1 і d_2.

Життєва математика

31.41. Тарас та Яна проводять кілька разів на тиждень легкоатлетичне тренування, пробігаючи по колу радіуса 50 м. Тарас пробігає 10 кіл зі швидкістю 15 км/год, а Яна зі швидкістю 12 км/год біжить 7 кіл. Хто з них витрачає більше часу на тренування? На скільки (дати відповідь з точністю до секунди)?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

31.42. (*Всеукраїнська математична олімпіада, 1985 р.*) Точки A, B, C і D є вершинами опуклого чотирикутника. П'ять із шести можливих відстаней між парами цих точок дорівнюють 1, 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 3. Знайдіть шосту відстань.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 7 (§§ 29–31)

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Центральний кут правильного шестикутника дорівнює...

А. 30° **Б.** 45° **В.** 60° **Г.** 120°

2. Довжина кола, радіус якого 6 см, дорівнює...

А. 12 см **Б.** 12π см **В.** 6π см **Г.** 24π см

3. Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює 10 см.

А. 25 см^2 **Б.** 100π см^2 **В.** 20π см^2 **Г.** 25π см^2

2

4. Чому дорівнює градусна міра внутрішнього кута правильного вісімнадцятикутника?

А. 100° **Б.** 155° **В.** 160° **Г.** 165°

5. Радіус кола дорівнює 9 см. Знайдіть довжину дуги, градусна міра якої 240°.

А. 12π см **Б.** 6π см **В.** 9π см **Г.** 18π см

6. Знайдіть площу сектора круга, радіус якого 6 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює 100°.

А. 20π см^2 **Б.** 10π см^2 **В.** 36π см^2 **Г.** $\frac{5}{3}\pi$ см^2

3

7. Зовнішній кут правильного многокутника становить $\frac{1}{4}$ від внутрішнього. Знайдіть, скільки сторін у цього многокутника.

А. 9 **Б.** 10 **В.** 12 **Г.** 16

8. Хорда, довжина якої $8\sqrt{2}$ см, стягує дугу кола, градусна міра якої становить 90°. Знайдіть довжину кола.

А. 8π см **Б.** 32π см **В.** $8\sqrt{2}\pi$ см **Г.** 16π см

9. Знайдіть площу кільця, розміщеного між двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 7 см і 4 см.

А. 3π см^2 **Б.** 9π см^2 **В.** 33π см^2 **Г.** 45π см^2

4

10. Радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, дорівнює 6 см, а радіус кола, вписаного у правильний многокутник, – $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть кількість сторін многокутника.

А. 3 **Б.** 4 **В.** 6 **Г.** 8

11. За довжиною дуги, що дорівнює 4π см, знайдіть її хорду, якщо дуга містить 120°.

А. 6 см **Б.** 12 см

В. $6\sqrt{2}$ см **Г.** $6\sqrt{3}$ см

12. Кінці хорди, 6 см завдовжки, ділять коло у відношенні 1 : 5. Знайдіть площу меншого з утворених сегментів.

А. 36π см^2 **Б.** $(6\pi - 9\sqrt{3})$ см^2

В. $(6\pi + 9\sqrt{3})$ см^2 **Г.** 6π см^2

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між характеристикою геометричного об'єкта (1–3) та її числовим значенням (А–Г).

Характеристика геометричного об'єкта	*Числове значення*
1. Довжина кола, описаного навколо правильного шестикутника зі стороною 6.	**А.** 6π
2. Довжина меншої дуги кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною $9\sqrt{3}$, кінцями якої є вершини трикутника.	**Б.** 12π
3. Площа круга, описаного навколо квадрата зі стороною $4\sqrt{2}$.	**В.** 16π
	Г. 24π

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 29–31

1 **1.** Знайдіть центральний кут правильного двадцятикутника.

2. Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює 6 см.

3. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює 8 дм.

2 **4.** Знайдіть міри внутрішнього та зовнішнього кутів правильного тридцятикутника.

5. Радіус кола дорівнює 12 см. Знайдіть довжину дуги, що відповідає центральному куту 150°.

6. Знайдіть площу сектора круга радіуса 4 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює 45°.

3 **7.** Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, у якого зовнішній кут на 90° менший від внутрішнього.

8. Хорда, довжина якої $4\sqrt{3}$ см, стягує дугу кола, градусна міра якої становить 120°. Знайдіть довжину кола.

4 **9.** Знайдіть площу круга, вписаного в рівнобічну трапецію з основами 6 см і 10 см.

Додаткові завдання

4 **10.** Радіус кола, вписаного у правильний многокутник, дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а радіус кола, описаного навколо правильного многокутника, – 6 см. Знайдіть кількість сторін многокутника та його сторону.

11. Кінці хорди, яка $6\sqrt{2}$ см завдовжки, ділять коло у відношенні 1 : 3. Знайдіть площі сегментів, що утворилися.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 7

До § 29

1

1. Знайдіть центральний кут правильного:

1) чотирикутника;

2) п'ятнадцятикутника.

2

2. Знайдіть міри внутрішнього та зовнішнього кутів правильного шістнадцятикутника.

3. Сторона правильного шестикутника дорівнює 4 см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного навколо нього кіл.

4. Знайдіть сторону правильного трикутника, описаного навколо кола з радіусом $10\sqrt{3}$ см.

5. Радіус кола, описаного навколо квадрата, дорівнює $8\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей квадрат.

3

6. Яким може бути найменший кут правильного многокутника?

7. Доведіть, що центральний кут правильного многокутника дорівнює його зовнішньому куту.

8. Сума зовнішніх кутів правильного многокутника, узятих по одному при кожній вершині, разом з одним із внутрішніх кутів дорівнює 528°. Знайдіть кількість сторін многокутника.

9. Сторона шестикутника, вписаного в коло, дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону трикутника, описаного навколо цього кола.

10. Радіус кола, вписаного у правильний шестикутник, дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть меншу діагональ шестикутника.

11. $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – правильний шестикутник. Продовження сторін A_1A_2 і A_4A_3 перетнулися в точці K. Знайдіть градусну міру кута A_2KA_3.

4

12. Знайдіть радіуси вписаного у правильний шестикутник та описаного навколо нього кіл, сума яких дорівнює $8\sqrt{3}$ см.

13. Опишіть навколо даного кола правильний:

1) трикутник; 2) шестикутник.

14. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, є для одного з них стороною вписаного квадрата, а для другого – стороною правильного вписаного шестикутника. Знайдіть відстань між центрами кіл, якщо радіус меншого з них дорівнює r (розгляньте два можливих випадки розміщення кіл).

15. Знайдіть відношення площ квадрата, правильного трикутника і правильного шестикутника, вписаних в одне й те саме коло.

16. У правильний трикутник зі стороною, що дорівнює a, вписано коло, у яке вписано правильний шестикутник. Знайдіть площу шестикутника.

17. Дано відрізок завдовжки a. Побудуйте правильний шестикутник, сторона якого дорівнює $a\sqrt{2}$.

18. Доведіть, що сума квадратів відстаней від довільної точки кола до вершин вписаного в нього квадрата є величиною сталою. Знайдіть цю величину, якщо радіус кола дорівнює R.

До § 30

1 **19.** Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:

1) $\frac{2}{\pi}$ см; 2) π см.

20. У скільки разів збільшиться або зменшиться довжина кола, якщо радіус кола:

1) збільшити у 8 разів; 2) зменшити в 6 разів?

2 **21.** Побудуйте коло, довжина якого 8π см.

22. Знайдіть діаметр кола, довжина якого дорівнює:

1) 18π см; 2) 9π дм; 3) 10 см; 4) $4\pi^2$ дм.

23. Радіус кола дорівнює 1 см. Знайдіть довжину дуги, градусна міра якої:

1) 30°; 2) 60°; 3) 150°;
4) 270°; 5) 315°; 6) 345°.

3 **24.** Довжина першого кола на 8π см більша за довжину другого. На скільки сантиметрів радіус першого кола більший за радіус другого?

25. Знайдіть довжину кола, якщо його дуга градусної міри 120° має довжину 8 см.

26. Діаметр ведучого колеса електровоза дорівнює 1,6 м. Знайдіть швидкість електровоза (у км/год), якщо ведуче колесо за одну хвилину робить 120 обертів. Відповідь округліть до десятих.

27. Кінці хорди ділять коло у відношенні 1 : 5, при цьому більша дуга має довжину 20π см. Знайдіть довжину хорди.

28. Довжина сторони правильного шестикутника дорівнює a. У шестикутник вписано коло. Знайдіть довжину дуги кола між точками його дотику до сусідніх сторін шестикутника.

29. Знайдіть довжину кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 8 см і бічною стороною 5 см.

4 **30.** Периметр прямокутної трапеції становить 60 см, а більша бічна сторона – 17 см. Знайдіть довжину кола, вписаного у трапецію.

31. Із вала зняли шар стружки 0,3 см завтовшки. Знайдіть довжину кола вала до обробки, якщо довжина кола після обробки становила 14,5 см.

32. За даною хордою a знайдіть довжину її дуги, градусна міра якої:

1) 30°; 2) 150°.

33. За даною довжиною дуги l знайдіть її хорду, якщо градусна міра дуги:

1) 135°; 2) 240°.

34. Навколо кола радіуса r описано трикутник, кути якого відносяться як 1 : 2 : 3. Знайдіть довжини дуг, кінцями яких є точки дотику.

До § 31

1 **35.** Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:

1) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ см; 2) $\frac{1}{\pi}$ дм.

2 **36.** Площа круга дорівнює 196π см^2. Знайдіть діаметр круга.

37. Площа круга дорівнює 10 дм^2. Знайдіть з точністю до десятих дециметра радіус круга.

38. Площі двох кругів відносяться як 9 : 16. Визначте відношення їхніх радіусів.

39. Яку частину площі круга становить площа сектора, якщо відповідний сектору центральний кут дорівнює:

1) 10°; 2) 36°; 3) 108°;
4) 150°; 5) 230°; 6) 315°?

40. Знайдіть градусну міру центрального кута, що відповідає сектору, площа якого становить:

1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$;
3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{7}{12}$

від площі круга.

3 **41.** Довжини двох кіл дорівнюють $a\pi$ см і $3a\pi$ см. Знайдіть відношення площ обмежених ними кругів.

42. Знайдіть площу круга, вписаного в рівносторонній трикутник, площа якого дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2.

43. Знайдіть відношення площі круга до площі вписаного в нього квадрата.

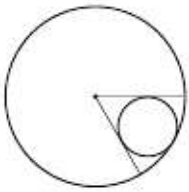
44. Знайдіть радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 10π см^2, а центральний кут, що відповідає цьому сектору, дорівнює 225°.

45. Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 18 см, а центральний кут, що відповідає сегменту, дорівнює:

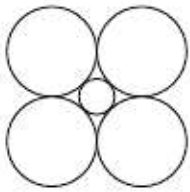
1) 60°; 2) 135°; 3) 150°;
4) 240°; 5) 300°; 6) 330°.

4 **46.** Кінці хорди, довжина якої $8\sqrt{2}$ см, ділять коло у відношенні 1 : 3. Знайдіть площі двох утворених сегментів.

47. У круговий сектор, дуга якого містить 60°, вписано коло радіуса r см, як показано на малюнку 1 (коло дотикається до радіусів і дуги, що обмежують сектор). Знайдіть площу сектора.



Мал. 1



Мал. 2

48. Навколо круга радіуса r розташовано чотири однакових круги, кожен з яких дотикається до даного круга, і кожні два сусідніх круги дотикаються між собою (мал. 2). Знайдіть площу одного із цих кругів.

49. Знайдіть площу кільця, що міститься між двома концентричними колами, довжини яких дорівнюють C_1 і C_2 ($C_1 > C_2$).

50. У крузі радіуса R по різні боки від центра проведено дві паралельні між собою хорди, одна з яких стягує дугу 60°, друга – 120°. Знайдіть площу частини круга, що міститься між хордами.

Головне в темі 7

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

Правильним многокутником називають опуклий многокутник, у якого всі сторони між собою рівні і всі кути між собою рівні.

Якщо α_n – кут правильного многокутника, то

$$\alpha_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}.$$

Якщо β_n – зовнішній кут правильного n-кутника, то

$$\beta_n = \frac{360^\circ}{n}.$$

Теорема (про коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане в нього). **Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло.**

Наслідок 1. **Центри вписаного й описаного кіл правильного многокутника збігаються.**

Наслідок 2. **Коло, вписане в правильний многокутник, дотикається до сторін многокутника у їхніх серединах.**

$$\gamma_n = \frac{360^\circ}{n},$$

де γ_n – центральний кут правильного n-кутника.

$$S_n = pr,$$

де p – півпериметр n-кутника, r – радіус вписаного в нього кола.

Загальна формула	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$r = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$	$r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}} = \frac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r = \frac{a_4}{2}$	$r = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$
$R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$	$R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = \frac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R = \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R = a_6$
$r = R\cos\frac{180^\circ}{n}$	$r = \frac{R}{2}$	$r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

ДОВЖИНА КОЛА. ДОВЖИНА ДУГИ КОЛА

Довжина кола, радіус якого дорівнює R, обчислюється за формулою:

$$C = 2\pi R.$$

Довжину дуги l_α можна обчислити за формулою:

$$l_\alpha = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha,$$

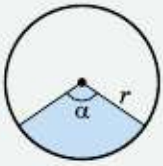
де α – градусна міра дуги.

ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН

Теорема (про площу круга). **Площа S круга, радіус якого дорівнює r, обчислюється за формулою:**

$$S = \pi r^2.$$

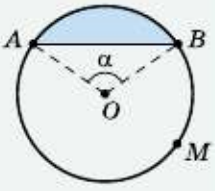
Частину круга, обмежену двома його радіусами, називають ***сектором***.



Площа сектора, що відповідає центральному куту градусної міри α, обчислюється за формулою:

$$S_\alpha = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha.$$

Частину круга, обмежену хордою і відповідною їй дугою, називають ***сегментом***. На малюнку зображено два сегменти, один з яких обмежено хордою AB і дугою AB, а другий – хордою AB і дугою AMB. Якщо градусна міра центрального кута, що відповідає сегменту, менша від 180°, то площу сегмента знаходимо як різницю площ відповідного сектора і трикутника AOB. Якщо градусна міра центрального кута, що відповідає сегменту, більша за 180°, то площу сегмента знаходимо як суму площ відповідного сектора і трикутника AOB. Сегмент, якому відповідає розгорнутий кут, є півкругом, і його площа дорівнює $\frac{\pi r^2}{2}$, де r – радіус круга.



Площа сегмента, що не є півкругом, обчислюється за формулою:

$$S_{\text{сегм.}} = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \pm S_{AOB}.$$

ТЕМА 8

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **ознайомитеся** із числовою послідовністю, арифметичною та геометричною прогресіями; формулами n-го члена арифметичної та геометричної прогресій, суми n перших членів цих прогресій, суми нескінченної геометричної прогресії;
- **навчитеся** розв'язувати вправи та прикладні задачі, пов'язані з арифметичною та геометричною прогресіями; записувати періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного.

§ 32. Числові послідовності

1. Поняття про числову послідовність

Приклад 1. Запишемо в порядку зростання натуральні парні числа:

2; 4; 6; 8; 10; ... .

Маємо *послідовність* парних натуральних чисел. На першому місці в ній записано число 2, на другому – число 4, на п'ятому – 10. Якщо продовжити записувати парні натуральні числа далі, то, наприклад, на десятому місці буде число 20, на сотому – число 200. Узагалі, для будь-якого натурального числа n можна вказати натуральне парне число, що стоїть на n-му місці. Таким числом буде число $2n$.

Числа, які утворюють послідовність, називають відповідно першим, другим, третім, четвертим тощо *членами послідовності*. Члени послідовності прийнято позначати буквами з індексами, які відповідають порядковому номеру члена послідовності. Наприклад: a_1, a_2, a_3, a_4, ... (читають «a перше, a друге, a третє, a четверте» тощо). У нашому прикладі $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, ... Член послідовності з номером n, або, як кажуть, *n-й член послідовності*, позначають a_n. Саму послідовність прийнято позначати (a_n).

Розглянемо два сусідніх члени послідовності з номерами k і $k + 1$, а саме: a_k і a_{k+1}. Член a_{k+1} називають *наступним* за a_k, а член a_k – *попереднім* до a_{k+1}.

2. Формула n-го члена послідовності

Оскільки в послідовності парних натуральних чисел на n-му місці стоїть число $2n$, то можна записати, що $a_n = 2n$. Отримали *формулу n-го члена послідовності парних натуральних чисел*.

Ця послідовність містить нескінченну кількість членів, тому таку послідовність називають *нескінченною*. Записуючи нескінченну послідовність, після кількох її перших членів ставлять трикрапку. Якщо послідовність містить скінченну кількість членів, то її називають *скінченною*.

Приклад 2. Послідовність двоцифрових натуральних чисел 10; 11; 12; ...; 98; 99 є скінченною. Вона містить 90 членів і може бути задана формулою n-го члена: $a_n = n + 9$.

Якщо ми знаємо формулу n-го члена послідовності, то можемо знайти будь-який її член.

Приклад 3. Послідовність задано формулою $b_n = n^2 - n$. Знайдемо кілька її членів: $b_1 = 1^2 - 1 = 0$ – перший, $b_7 = 7^2 - 7 = 42$ – сьомий, $b_{20} = 20^2 - 20 = 380$ – двадцятий, $b_{100} = 100^2 - 100 = 9900$ – сотий.

3. Способи задання послідовності

Формула n-го члена є досить зручним, але не єдиним способом задання послідовності.

Приклад 4. Скінченну послідовність можна задати *переліком її членів*. Наприклад, (c_n): 1; 8; 17; 9.

Приклад 5. Послідовність можна задати *описом її членів*. Наприклад, послідовність натуральних чисел, які є дільниками числа 18 і які записано в порядку зростання: 1; 2; 3; 6; 9; 18, можна назвати послідовністю натуральних дільників числа 18.

Приклад 6. Скінченну послідовність можна задати у *вигляді таблиці*. Наприклад:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	4	3	1	0	−2	−5	−10

4. Рекурентний спосіб задання послідовності

Послідовність можна задавати, указавши перший або кілька перших членів послідовності, а потім – формулу, за якою можна знаходити інші члени послідовності через попередні. Таку формулу називають *рекурентною*, а спосіб задання послідовності – *рекурентним*.

Приклад 7. Нехай перший член послідовності (x_n) дорівнює 2, а кожен наступний дорівнює квадрату попереднього, тобто $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n^2$. Тоді за відомим першим членом можна знайти другий: $x_2 = x_1^2 = 2^2 = 4$, за відомим другим можна знайти третій: $x_3 = x_2^2 = 4^2 = 16$ і так само далі.

Матимемо послідовність: 2; 4; 16; 256; 65 536; ... .

Приклад 8. Знайдемо третій, четвертий та п'ятий члени послідовності (y_n), заданої рекурентно: $y_1 = 2$, $y_2 = -3$, $y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n$.

Матимемо: $y_3 = 2y_2 + y_1 = 2 \cdot (-3) + 2 = -4$;
$y_4 = 2y_3 + y_2 = 2 \cdot (-4) + (-3) = -11$;
$y_5 = 2y_4 + y_3 = 2 \cdot (-11) + (-4) = -26$.

Послідовності, які ми розглянули вище, є *числовими послідовностями*, оскільки складаються із чисел. Іноді розглядають послідовності, членами яких є вирази, функції тощо. Надалі будемо розглядати лише числові послідовності.

А ще раніше...

Математики досить давно почали вивчати числові послідовності.

Поняття числової послідовності виникло і закріпилося набагато раніше, ніж вчення про функції. Ось такі нескінченні числові послідовності прийшли до нас із давнини:

1) 1, 2, 3, 4, 5, … – послідовність натуральних чисел;

2) 2, 4, 6, 8, 10, … – послідовність парних натуральних чисел;

3) 1, 3, 5, 7, 9, … – послідовність непарних натуральних чисел;

4) 1, 4, 9, 16, 25, … – послідовність квадратів натуральних чисел;

5) 2, 3, 5, 7, 11, … – послідовність простих чисел;

6) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ – послідовність чисел, обернених до натуральних.

Для всіх цих послідовностей, крім п'ятої, можна записати формулу n-го члена. Для послідовності простих чисел формула n-го члена була невідомою давнім математикам… Невідома вона і донині!

Однією з найвідоміших є числова послідовність, яку називають *послідовністю Фібоначчі*, на честь італійця *Леона́рдо Пізанського (Фібоначчі)* (бл. 1170 – бл. 1228). Він першим розглянув послідовність чисел, перші два члени якої – одиниці й кожен член якої, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144 ... .

Лише через кілька століть було знайдено формулу n-го члена послідовності Фібоначчі:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Наведіть приклад числової послідовності. ○ Назвіть три перших члени цієї послідовності. ○ Наведіть приклад числової послідовності, заданої формулою n-го члена. ○ Як ще можна задавати числову послідовність? ○ Яку послідовність називають нескінченною, а яку – скінченною?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

32.1. (*Усно.*) Дано послідовність: 2; 4; 7; 10; 15.

1) Скільки членів має ця послідовність?

2) Назвіть перший та останній члени цієї послідовності.

3) Який номер члена послідовності, що дорівнює 10?

4) Який член послідовності є наступним за членом послідовності, що дорівнює 4?

5) Який член послідовності попередній до члена послідовності, що дорівнює 15?

32.2. Послідовність задано формулою $a_n = 5n - 1$. Знайдіть перший, п'ятий та сьомий члени цієї послідовності.

32.3. Послідовність задано формулою $b_n = 4n + 3$. Знайдіть перший, четвертий та восьмий члени цієї послідовності.

32.4. Запишіть чотири перших члени послідовності:

1) непарних натуральних чисел, узятих у порядку зростання;
2) кубів натуральних чисел, узятих у порядку зростання;
3) одноцифрових натуральних чисел, узятих у порядку спадання.

32.5. Випишіть п'ять перших членів послідовності:

1) квадратів натуральних чисел, узятих у порядку зростання;
2) двоцифрових натуральних чисел, узятих у порядку спадання.

32.6. Знайдіть чотири перших члени послідовності (x_n), яку задано формулою:

1) $x_n = 4n^2 - 17$; 2) $x_n = \frac{n^2}{n+1}$;

3) $x_n = \frac{2n-17}{n+3}$; 4) $x_n = \frac{n^3}{2^n}$.

32.7. Знайдіть три перших члени послідовності (y_n), яку задано формулою:

1) $y_n = 2n^2 + 3$; 2) $y_n = \frac{n^2-1}{n}$;

3) $y_n = \frac{4n-5}{n+1}$; 4) $y_n = \frac{3^n}{n^2}$.

32.8. 1) Послідовність задано формулою $b_n = 4n + 25$. Знайдіть номер члена послідовності, що дорівнює 65.

2) Знайдений номер укаже довжину (у метрах) найбільшої витинанки авторства відомої майстрині Тетяни Кузьмич (Кашуби), що представлена в Музеї історії міста Києва.

32.9. Послідовність задано формулою $a_n = 5 - 3n$. Знайдіть номер члена послідовності, що дорівнює -46.

32.10. 1) Задайте таблицею п'ять перших членів послідовності натуральних чисел, які кратні числу 3.

2) Знайдіть номер члена цієї послідовності, що дорівнює 12.

32.11. Послідовність задано формулою $y_n = 2n^2 - 18n + 7$. Які із чисел є членами цієї послідовності:

1) 7; 2) -29; 3) 50; 4) 79?

Для чисел, що є членами послідовності, укажіть їхні номери.

32.12. Послідовність задано формулою $x_n = n^2 - 4n + 9$. Які із чисел є членами цієї послідовності:

1) 69; 2) 68; 3) 5; 4) 6?

Для чисел, що є членами послідовності, укажіть їхні номери.

32.13. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (c_n), яку задано рекурентно:

1) $c_1 = 8$, $c_{n+1} = c_n - 5$;

2) $c_1 = -3$, $c_{n+1} = 2c_n + 3$;

3) $c_1 = -2$, $c_2 = 3$, $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$;

4) $c_1 = 0$, $c_2 = -5$, $c_{n+2} = \dfrac{c_{n+1}}{c_n + 1}$.

32.14. Знайдіть п'ять перших членів послідовності (y_n), яку задано рекурентно:

1) $y_1 = 5$, $y_{n+1} = 2y_n - 7$;

2) $y_1 = 16$, $y_2 = 1$, $y_{n+2} = \dfrac{y_n}{2y_{n+1}}$.

32.15. Знайдіть найбільший член послідовності, заданої формулою n-го члена:

1) $a_n = 26 - n^2$; 2) $b_n = -2n^2 + 16n$;

3) $c_n = (-1)^n$; 4) $y_n = -n^2 + 5n$.

32.16. Знайдіть найменший член послідовності, заданої формулою n-го члена:

1) $x_n = 2n^2 - 3$; 2) $a_n = n^2 - 8n - 5$.

32.17. Доведіть, що послідовність (p_n), у якої $p_n = 2n^2 + 6n - 5$, не містить найбільшого члена, а послідовність (t_n), у якої $t_n = -n^2 - 4n$, не містить найменшого члена.

Вправи для повторення

32.18. Товар коштував 150 грн. Через деякий час він подорожчав до 165 грн. На скільки відсотків підвищилася ціна товару?

32.19. Обчисліть $\dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-3} + \dfrac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}+3}$.

32.20. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$

Життєва математика

32.21. До встановлення лічильників родина Заліщуків за користування водою щомісяця сплачувала 1120 грн. Після встановлення двох лічильників (на холодну і на гарячу воду) щомісячна сплата за воду зменшилася до 700 грн. Один лічильник води коштує 740 грн, а його встановлення – 240 грн. Через яку найменшу кількість місяців економія на сплаті за воду перевищить витрати на придбання та встановлення лічильників, якщо тарифи на воду не змінюватимуться?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

32.22. 1) Запишіть числову послідовність, що містить десять членів, у якої перший член дорівнює 2, а кожен наступний – на 3 більший за попередній.

2) Запишіть формулу n-го члена цієї послідовності.

32.23. Знайдіть закономірність і продовжте ряд чисел, записавши чотири наступних числа ряду:

1) 42, 45, 48, 51, ...;
2) 6, 1, −4, −9, ...;
3) 15, 0, −15, −30, ...;
4) −13, −9, −5, −1, ...

Цікаві задачі – поміркуй одначе

32.24. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$

§ 33. Арифметична прогресія, її властивості. Формула n-го члена арифметичної прогресії

1. Означення арифметичної прогресії

Розглянемо числову послідовність, перший член якої дорівнює 4, а кожен наступний, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до числа 3:

$$\overset{+3}{\frown}\ 4;\ \overset{+3}{\frown}\ 7;\ \overset{+3}{\frown}\ 10;\ \overset{+3}{\frown}\ 13;\ \overset{+3}{\frown}\ 16;\ \overset{+3}{\frown}\ 19;\ \ldots\ .$$

Таку послідовність називають *арифметичною прогресією*.

Послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число, називають *арифметичною прогресією*.

Це число називають *різницею арифметичної прогресії* і позначають буквою d (від початкової літери латинського слова *differentia* – різниця). Тому, якщо (a_n) – арифметична прогресія, то справджуються рівності: $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, $a_4 = a_3 + d$, ...

Отже, для будь-якого натурального n справджується рівність:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Тоді

$$d = a_{n+1} - a_n,$$

тобто

різницю арифметичної прогресії можна знайти, якщо від будь-якого члена прогресії, починаючи з другого, відняти попередній.

2. Формула n-го члена арифметичної прогресії та її застосування

Нехай перший член арифметичної прогресії дорівнює a_1, а її різниця дорівнює d. Тоді:

$a_2 = a_1 + d$;
$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$;
$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$;
$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$.

Помічаємо, що в кожній з отриманих формул коефіцієнт біля різниці d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії, для якого записано цю формулу. Справді, щоб знайти a_n, маючи a_1 і d, треба $n - 1$ разів додати до a_1 число d, тобто до a_1 додати $(n - 1)d$. Маємо:

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Отримали *формулу n-го члена арифметичної прогресії*.

Розглянемо кілька вправ на застосування цієї формули.

Приклад 1. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 32{,}8$, $d = -0{,}4$. Знайти двадцятий член цієї послідовності.

Розв'язання. $a_{20} = a_1 + d(20 - 1) = a_1 + 19d = 32{,}8 + 19(-0{,}4) = 25{,}2$.

Відповідь: 25,2.

Приклад 2. Чи належить арифметичній прогресії 7; 10; 13; ... число: 1) 82; 2) 102?

Розв'язання. У цій прогресії $a_1 = 7$, $a_2 = 10$, тоді $d = a_2 - a_1 = 3$. Складемо формулу n-го члена цієї прогресії:

$a_n = 7 + 3(n - 1) = 3n + 4$, тобто $a_n = 3n + 4$.

1) Припустимо, що число 82 є членом прогресії (a_n). Тоді існує таке натуральне число n, що $a_n = 82$, тобто $3n + 4 = 82$. Маємо рівняння:

$3n + 4 = 82$,
$3n = 78$,
$n = 26$.

Отже, число 82 є двадцять шостим членом арифметичної прогресії, тобто $a_{26} = 82$.

2) Міркуючи в той самий спосіб, маємо: $3n + 4 = 102$,
$3n = 98$,
$n = 32\frac{2}{3}$.

Число $32\frac{2}{3}$ не є натуральним, тому арифметична прогресія числа 102 не містить.

Відповідь: 1) так; 2) ні.

Приклад 3. Кубики складено рядами так, що у верхньому ряду 4 кубики, а в кожному ряду, що нижче, – на одну й ту саму кількість кубиків більше, ніж у попередньому. Відомо, що в шостому ряду 14 кубиків. Скільки кубиків у третьому ряду?

Розв'язання. Оскільки в кожному нижньому ряду на одну й ту саму кількість кубиків більше, ніж у попередньому, то числа, що дорівнюють кількості кубиків у рядах, утворюють арифметичну прогресію.

У цій прогресії $a_1 = 4$, $a_6 = 14$, отже, нам треба знайти a_3.

Знайдемо спочатку різницю d цієї прогресії. Оскільки за формулою n-го члена $a_6 = a_1 + 5d$, маємо рівняння:

$$14 = 4 + 5d,$$
$$5d = 10,$$
$$d = 2.$$

Тепер, знаючи значення d, знайдемо a_3:

$$a_3 = a_1 + 2d = 4 + 2 \cdot 2 = 8.$$

Отже, у третьому ряду 8 кубиків.

Зауважимо, що знайти d можна було і не використовуючи рівняння, наприклад виразивши d з формули 6-го члена прогресії. Справді, оскільки $a_6 = a_1 + 5d$, то

$$d = \frac{a_6 - a_1}{5} = \frac{14 - 4}{5} = 2.$$

Відповідь: 8 кубиків.

3. Властивості арифметичної прогресії

Доведемо деякі важливі властивості арифметичної прогресії.

1. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ де } n \in N,\ n \geqslant 2.$$

Доведення. Для доведення використаємо формулу n-го члена арифметичної прогресії, тоді

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + d((n-1)-1) + a_1 + d((n+1)-1)}{2} =$$
$$= \frac{2a_1 + d(n-1-1+n)}{2} = \frac{2a_1 + 2d(n-1)}{2} =$$
$$= \frac{2a_1}{2} + \frac{2d(n-1)}{2} = a_1 + d(n-1) = a_n. \blacksquare$$

За однією з версій, саме із цією властивістю арифметичної прогресії й пов'язано її назву.

2. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених від нього членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ де } n \in N,\ k \in N,\ k < n,\ n \geqslant 2.$$

Властивість доводиться аналогічно до попередньої властивості.

3. Якщо k, l, p і s — натуральні числа і $k + l = p + s$, то

$$a_k + a_l = a_p + a_s.$$

Доведення. Використаємо формулу n-го члена, тоді:
$a_k + a_l = a_1 + d(k - 1) + a_1 + d(l - 1) = 2a_1 + d(k + l - 2)$;
$a_p + a_s = a_1 + d(p - 1) + a_1 + d(s - 1) = 2a_1 + d(p + s - 2)$.
Але $k + l = p + s$, тому $2a_1 + d(k + l - 2) = 2a_1 + d(p + s - 2)$, тобто $a_k + a_l = a_p + a_s$. ■

4. Будь-яку арифметичну прогресію можна задати формулою $a_n = dn + b$, де b і d — деякі числа.

Доведення. За формулою n-го члена маємо:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) = dn + (a_1 - d).$$

Позначивши $a_1 - d = b$, матимемо: $a_n = dn + b$. ■

5. Послідовність (a_n), яку задано формулою вигляду $a_n = dn + b$, де b і d — деякі числа, є арифметичною прогресією.

Доведення. Знайдемо різницю $(n + 1)$-го і n-го членів цієї послідовності: $a_{n+1} - a_n = d(n + 1) + b - (dn + b) = dn + d + b - dn - b = d$.
Отримали, що для будь-якого n справджується рівність $a_{n+1} = a_n + d$. Отже, послідовність (a_n) є арифметичною прогресією, різниця якої дорівнює d. ■

А ще раніше...

Перші уявлення про арифметичну прогресію з'явилися ще до нашої ери. У давньоєгипетському папірусі Ахмеса (II тис. до н. е.) є така задача: *«Нехай тобі сказано: поділи 10 мір ячменю між десятьма людьми так, щоб кожен отримав на $\frac{1}{8}$ міри більше, ніж сусід»*. Розв'язання задачі зводиться до знаходження десяти членів арифметичної прогресії: a, $a + \frac{1}{8}$, $a + \frac{2}{8}$, ..., $a + \frac{9}{8}$, сума яких дорівнює 10.

Задачі на арифметичні прогресії є і в давньоєгипетському трактаті «Математика в дев'яти книгах».

Перші задачі про арифметичні прогресії, що дійшли до нас, пов'язані з діяльністю людини (розподіл продуктів, спадщини тощо).

Давні греки теорію арифметичної прогресії асоціювали з так званою неперервною арифметичною пропорцією:

$$a - b = b - c.$$

Якщо числа a, b і c поєднані між собою такою властивістю, то вони утворюють арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює $\frac{c - a}{2}$.

Так, прогресію розглядали як продовження арифметичної пропорції, а тому назву *арифметична* було перенесено з пропорції на прогресію. Це одна з версій, чому ця прогресія отримала саме таку назву.

Яку послідовність називають арифметичною прогресією? ○ Яке число називають різницею арифметичної прогресії? ○ Як можна знайти різницю арифметичної прогресії? ○ Запишіть формулу n-го члена арифметичної прогресії. ○ Сформулюйте і доведіть властивості арифметичної прогресії.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

33.1. Які з послідовностей є арифметичними прогресіями? Укажіть для них перший член та різницю.

1) 2; 5; 8; 11;
2) 4; 4; 4; 4;
3) 0; 1; 5; 10;
4) 4; −4; 4; −4;
5) −5; −4; −3; −2;
6) 0; 1; 0; 2.

33.2. Чи є арифметичною прогресією послідовність:

1) натуральних чисел: 1; 2; 3; 4; 5; ...;
2) квадратів натуральних чисел: 1; 4; 9; 16; 25; ...;
3) непарних натуральних чисел: 1; 3; 5; 7; 9; ...;
4) правильних дробів із чисельником 1: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}$; ...?

2

33.3. Запишіть п'ять перших членів арифметичної прогресії (a_n), різниця якої дорівнює d:

1) $a_1 = 5$, $d = 4$;
2) $a_1 = 4{,}7$, $d = -0{,}7$.

33.4. Запишіть чотири перших члени арифметичної прогресії (a_n), різниця якої дорівнює d:

1) $a_1 = 4$, $d = -2$;
2) $a_1 = 3{,}8$, $d = 0{,}2$.

33.5. Знайдіть три наступних члени арифметичної прогресії

4,2; 3,8; 3,4; ... .

33.6. Знайдіть чотири наступних члени арифметичної прогресії

5,7; 6,1; 6,5; ... .

33.7. 1) В арифметичній прогресії (a_n) $a_1 = 13$, $a_2 = 33$. Знайдіть a_{34}.

2) Обчисліть значення виразу $3a_{34}$, відтак дізнаєтеся, якого року збірна України з футболу віком до 20 років стала чемпіоном світу.

33.8. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:

1) a_7, якщо $a_1 = 3$, $d = -8$; 2) a_{12}, якщо $a_1 = 2{,}7$, $d = 0{,}4$.

33.9. В арифметичній прогресії (a_n) $a_1 = -15$, $d = 3{,}7$. Знайдіть:

1) a_2; 2) a_5; 3) a_{10}; 4) a_{101}.

33.10. Знайдіть різницю, десятий і вісімнадцятий члени арифметичної прогресії:

1) $1; \frac{1}{2}; 0; \ldots$; 2) $0; 1{,}5; 3; \ldots$.

33.11. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_2 = 8$, $d = -5$; 2) $a_{10} = 7$, $d = 4$.

33.12. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_2 = -7$, $d = 4$; 2) $a_8 = 5$, $d = -2$.

33.13. Знайдіть різницю арифметичної прогресії, у якої перший член дорівнює 8, а одинадцятий – 33.

33.14. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = -5$, $a_9 = 7$.

33.15. Тіло за першу секунду подолало 5 м, а за кожну наступну – на 2 м більше, ніж за попередню. Скільки метрів подолало тіло за шосту секунду; за десяту секунду?

33.16. Учень прочитав книжку за 10 днів. Першого дня він прочитав 40 сторінок, а кожного наступного дня читав на 3 сторінки менше, ніж попереднього. Скільки сторінок учень прочитав за третій день; за останній день?

33.17. Між числами 3 і 7 вставте:

1) одне число; 2) два числа; 3) три числа

таких, щоб вони разом із заданими утворювали арифметичну прогресію.

33.18. Між числами 15 і 30 вставте чотири таких числа, щоб вони разом із заданими утворювали арифметичну прогресію.

33.19. Знайдіть формулу n-го члена арифметичної прогресії:

1) $2x, 5x, 8x, \ldots$; 2) $\frac{m-1}{m}, 1, \frac{m+1}{m}, \ldots$.

33.20. Знайдіть перший член та різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_{18} = 5$, $a_{19} = 3$; 2) $a_4 = 11$, $a_{20} = 43$.

33.21. Знайдіть перший член та різницю арифметичної прогресії (c_n), якщо:

1) $c_{17} = 3$, $c_{18} = 6$; 2) $c_8 = -22$, $c_{14} = -40$.

33.22. Таксі «Найкраще» обслуговує клієнтів за таким тарифом: замовлення (подача таксі) – 50 грн, вартість проїзду – 8 грн за розпочатий кілометр.

1) Складіть формулу, за якою можна обчислити загальну вартість проїзду C (у грн) залежно від відстані s (у км), яку проїхав пасажир.

2) Чи буде ця залежність арифметичною прогресією, якщо s є натуральним числом?

3) Знайдіть C, якщо $s = 12$ км.

4) Знайдіть s, якщо $C = 170$ грн.

33.23. Брокерська фірма «Вереснева» здає кімнату подобово на таких умовах: плата за укладення договору (бронювання кімнати) – 800 грн (одноразово), вартість добової оренди – 600 грн за кожну розпочату добу.

1) Складіть формулу, за якою можна обчислити загальну плату за оренду C (у грн) залежно від кількості діб n, на які орендовано кімнату.

2) Чи буде ця залежність арифметичною прогресією, якщо n є натуральним числом?

3) Знайдіть C, якщо $n = 5$ км.

4) Знайдіть n, якщо $C = 5600$ грн.

33.24. Чи містить арифметична прогресія 5; 8; 11; ... число:

1) 92; 2) 112?

33.25. В арифметичній прогресії (x_n) $x_1 = 12$, $d = -2{,}5$. Чи є членом цієї прогресії число:

1) -7; 2) -23?

33.26. Знайдіть номер першого від'ємного члена арифметичної прогресії (y_n), у якої $y_1 = 12$, $d = -0{,}4$.

33.27. Знайдіть номер першого додатного члена арифметичної прогресії -5; $-4{,}8$; $-4{,}6$; ... .

33.28. Арифметичну прогресію задано формулою $a_n = 5n - 7$. Знайдіть:

1) різницю прогресії; 2) суму $a_5 + a_6 + a_7$.

33.29. За яких значень x числа $x^2 + 2$, $4x - 2$, x є послідовними членами арифметичної прогресії?

33.30. За яких значень y числа $y + 3$, $2y + 3$, $y^2 - 1$ є послідовними членами арифметичної прогресії?

33.31. За якого значення m числа $m^2 - 4$, m, $2m + 3$ і $4m^2 + 5$ є послідовними членами арифметичної прогресії?

33.32. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:

1) $a_5 + a_{19}$, якщо $a_1 + a_{23} = -37$;

2) a_{17}, якщо $a_{10} + a_{24} = 5$.

33.33. Послідовність (b_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:
1) $b_9 + b_{11}$, якщо $b_1 + b_{19} = -25$; 2) $b_7 + b_{13}$, якщо $b_{10} = 2{,}7$.

33.34. Доведіть, що якщо числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ і $\frac{1}{a+b}$ утворюють арифметичну прогресію, то числа a^2, b^2 і c^2 також утворюють арифметичну прогресію.

33.35. Доведіть, що якщо числа a^2, b^2 і c^2 утворюють арифметичну прогресію, то числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ і $\frac{1}{a+b}$ також утворюють арифметичну прогресію.

Вправи для повторення

33.36. Спростіть вираз:
1) $-4p^2t \cdot (-0{,}5p^3t^4)$; 2) $\frac{39p^3}{5a} : 13p^7a^5$.

33.37. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$; 2) $(x^2 - 2x)^2 + 2(x^2 - 2x) - 3 = 0$.

33.38. Чи кратне значення виразу $8^6 - 4^7$ числу 6?

33.39. Знайдіть область визначення функції
$$y = \sqrt{10 - 9x - x^2} + \frac{x+1}{x^2 - 3x}.$$

Життєва математика

33.40. Для транспортування 40 тонн вантажу на відстань 1200 км можна скористатися послугами однієї з трьох компаній-перевізників. Вартість перевезення і вантажопідйомність автомобілів у кожного перевізника подано в таблиці. Скільки доведеться заплатити за найдешевше перевезення вказаного вантажу?

Перевізник	Вартість перевезення одним автомобілем (грн на 100 км)	Вантажопідйомність автомобілів (тонн)
А	800	3,5
Б	1000	5
В	2300	12

Цікаві задачі – поміркуй одначе

33.41. Доведіть нерівність $(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) + 1 \geqslant 0$.

§ 34. Сума n перших членів арифметичної прогресії

1. Формули для обчислення суми n перших членів арифметичної прогресії

Розглянемо n перших членів арифметичної прогресії (a_n): a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n. Позначимо через S_n їхню суму:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Знайдемо формулу для обчислення цієї суми. Запишемо цю суму двічі, розмістивши в першому випадку доданки в порядку зростання номерів, а у другому – в порядку спадання:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$;

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$.

Тепер ці рівності додамо почленно, матимемо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). \quad (*)$$

Але за властивістю 3 з попереднього параграфа: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_{n-1} + a_2$, тобто кожна сума в дужках у рівності (*) дорівнює $a_1 + a_n$, оскільки $1 + n = 2 + n - 1 = 3 + n - 2 = \ldots = n - 1 + 2$. Тоді у правій частині рівності (*) маємо n доданків, кожен з яких дорівнює $a_1 + a_n$. Отже,

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n).$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на 2, отримаємо формулу суми n перших членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \quad (1)$$

Якщо у формулі (1) за формулою n-го члена a_n замінити виразом $a_1 + d(n - 1)$, матимемо:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

тобто

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \quad (2)$$

Маємо ще одну формулу для обчислення суми n перших членів арифметичної прогресії, якою зручно користуватися, коли відомо перший член та різницю прогресії.

2. Застосування формул суми n перших членів арифметичної прогресії для розв'язування вправ

Застосуємо формули (1) і (2) для розв'язування вправ.

Приклад 1. Знайти суму тридцяти перших членів арифметичної прогресії 4; 7; 10; ... .

Розв'язання. 1-й спосіб. Оскільки $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, то $d = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$ і $a_{30} = a_1 + 29d = 4 + 29 \cdot 3 = 91$. Тоді за формулою (1):

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{4 + 91}{2} \cdot 30 = 1425.$$

2-й спосіб. Оскільки $a_1 = 4$ і легко з'ясувати, що $d = 3$, можемо використати формулу (2):

$$S_{30} = \frac{2a_1 + 29d}{2} \cdot 30 = \frac{2 \cdot 4 + 29 \cdot 3}{2} \cdot 30 = 1425.$$

Відповідь: 1425.

Приклад 2. Знайти суму вісімнадцяти перших членів послідовності (a_n), заданої формулою $a_n = -2n + 7$.

Розв'язання. Оскільки послідовність задано формулою $a_n = dn + b$, де $d = -2$, $b = 7$, то вона є арифметичною прогресією (за властивістю 5 попереднього параграфа).

Маємо: $a_1 = -2 \cdot 1 + 7 = 5$, $a_{18} = -2 \cdot 18 + 7 = -29$.

Знайдемо S_{18}:

$$S_{18} = \frac{a_1 + a_{18}}{2} \cdot 18 = \frac{5 + (-29)}{2} \cdot 18 = -216.$$

Відповідь: -216.

Приклад 3. Знайти суму всіх натуральних чисел, які кратні числу 7 та не перевищують 999.

Розв'язання. Натуральні числа, що кратні числу 7, утворюють арифметичну прогресію: 7; 14; 21; 28; ... , яку можна задати формулою $a_n = 7n$.

Знайдемо, скільки членів цієї прогресії не перевищують числа 999.

Для цього розв'яжемо нерівність $7n \leqslant 999$ і отримаємо, що $n \leqslant 142\frac{5}{7}$.

Отже, 142 члени прогресії не перевищують числа 999. Знайдемо їхню суму, тобто S_{142}.

Маємо: $a_1 = 7$, $a_{142} = 7 \cdot 142 = 994$. Тоді

$$S_{142} = \frac{7 + 994}{2} \cdot 142 = 71\,071.$$

Відповідь: 71 071.

Приклад 4. З двох точок, відстань між якими 100 м, одночасно назустріч один одному починають рухатися два об'єкти. Перший рухається рівномірно зі швидкістю 9 м/с, а другий за першу секунду проходить 7 м, а за кожну наступну – на 2 м більше, ніж за попередню. Через скільки секунд вони зустрінуться?

Розв'язання. Нехай об'єкти зустрінуться через n секунд. Перший за цей час подолає $9n$ м. Відстані, що подолає другий об'єкт за першу, другу, третю і наступні секунди, утворюють арифметичну прогресію, у якої $a_1 = 7$, $d = 2$. Тоді за n секунд другий об'єкт подолає відстань S_n, яку можна обчислити за формулою:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 7 + 2(n-1)}{2} \cdot n = (7 + (n-1)) \cdot n =$$

$$= (n+6)n = n^2 + 6n.$$

За умовою $9n + (n^2 + 6n) = 100$, тоді $n^2 + 15n - 100 = 0$, звідки $n_1 = 5$, $n_2 = -20$. Другий корінь не відповідає змісту задачі. Отже, $n = 5$, тобто зустріч відбудеться через 5 секунд.

Відповідь: 5 секунд.

А ще раніше...

Уже в V ст. до н. е. греки знали кілька прогресій та їхні суми, зокрема:

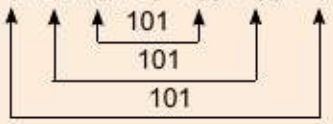
1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$;

3) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ та інші.

З обчисленням суми арифметичної прогресії пов'язана цікава історія, що трапилася з видатним німецьким математиком *Карлом Гауссом* (1777–1855), який, ще навчаючись у школі, виявляв надзвичайні математичні здібності. Одного разу вчитель запропонував учням знайти суму ста перших натуральних чисел. Маленький Гаусс розв'язав цю задачу за мить. Він помітив, що значення сум 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, ... однакові, а кількість таких сум дорівнює 50:

$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = 101 \cdot 50 = 5050.$



Запишіть формули, за якими обчислюють суму n перших членів арифметичної прогресії.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

34.1. Знайдіть S_8 – суму восьми перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 5$, $a_8 = 10$.

34.2. Знайдіть S_{10} – суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 7$, $a_{10} = 15$.

34.3. Знайдіть суму вісімнадцяти перших членів арифметичної прогресії (c_n), якщо $c_1 = 17$, $d = -2$.

34.4. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 15$, $d = -3$.

34.5. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії:
1) 2; −1; −4; ...; 2) 5; 6,5; 8; ... .

34.6. Знайдіть суму тридцяти перших членів арифметичної прогресії:
1) 5; 8; 11; ...; 2) 0; −2,5; −5; ... .

34.7. Знайдіть суму шістдесяти перших членів арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_n = -5n + 17$.

34.8. Знайдіть суму вісімдесяти перших членів арифметичної прогресії (y_n), якщо $y_n = 3n - 19$.

34.9. Знайдіть суму:
1) сорока перших натуральних чисел;
2) натуральних чисел від 1 до 70.

34.10. Знайдіть суму дев'ятнадцяти перших натуральних чисел.

34.11. Дрова складено так, що в нижньому ряду лежить 15 колод, а в кожному наступному – на одну колоду менше, ніж у попередньому. Скільки всього колод у дванадцяти рядах?

34.12. В одному із секторів стадіону 14 рядів, причому в першому ряду 5 місць, а в кожному наступному – на одне місце більше, ніж у попередньому. Скільки всього місць у цьому секторі?

34.13. Знайдіть суму:
1) усіх натуральних чисел від 125 до 317 включно;
2) усіх натуральних чисел, які кратні числу 5 і не більші за число 350;
3) усіх натуральних чисел, які кратні числу 9 і не перевищують числа 470;
4) усіх двоцифрових натуральних чисел, які при діленні на 3 дають в остачі 2.

34.14. Знайдіть суму:
1) усіх натуральних чисел, які кратні числу 7 і не перевищують числа 420;
2) усіх трицифрових натуральних чисел, які при діленні на 4 дають в остачі 1.

34.15. Знайдіть суму восьми перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:
1) $a_1 = 5$, $a_5 = -7$; 2) $a_5 = 13$, $a_9 = 19$.

34.16. Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (x_n), якщо:
1) $x_1 = 4$, $x_6 = -31$; 2) $x_3 = 13$, $x_7 = 23$.

34.17. Знайдіть перший член арифметичної прогресії, якщо сума перших п'ятнадцяти членів цієї прогресії дорівнює 375, а різниця прогресії дорівнює 3.

34.18. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 7$, а сума восьми її перших членів дорівнює 168.

34.19. Знайдіть суму додатних членів арифметичної прогресії 19; 17; 15; ... .

34.20. Знайдіть суму від'ємних членів арифметичної прогресії −23; −20; −17; ... .

34.21. Скільки треба взяти перших членів арифметичної прогресії 4; 6; 8; ..., щоб їхня сума дорівнювала 270?

34.22. Запорізька атомна електростанція є найбільшою в Європі та третьою за розмірами у світі. Знайдіть суму перших 100 членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_2 + a_{99} = 120$, відтак дізнаєтеся, якою є загальна електрична потужність цієї станції (у МВт).

34.23. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії з двадцятого до сорокового включно, якщо перший член прогресії дорівнює 8, а різниця прогресії дорівнює −0,6.

34.24. Знайдіть суму членів арифметичної прогресії 2; 5; 8; ... з десятого до двадцятого включно.

34.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $6 + 10 + 14 + ... + (4x - 2) = 448$;
2) $33 + 30 + 27 + ... + x = 195$.

34.26. Розв'яжіть рівняння:

1) $7 + 11 + 15 + ... + (4x - 1) = 297$;
2) $11 + 8 + 5 + ... + x = -221$.

34.27. Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 + a_5 = 16$, $a_3 a_4 = 88$.

34.28. З пункту A виїхала вантажівка, яка рухалася зі швидкістю 40 км/год. Одночасно в тому самому напрямку з пункту B вирушив легковик, який за першу годину проїхав 50 км, а кожної наступної години долав на 5 км більше, ніж за попередню. Через скільки годин легковик наздожене вантажівку, якщо відстань між пунктами A і B дорівнює 135 км?

34.29. Зарплата менеджерки супермаркету в перший місяць роботи становила 12 000 грн. Надалі її зарплата щомісяця підвищувалася на 1000 грн, порівняно з попереднім місяцем. Із нарахованої зарплати сплачувалися податки: 18 % – податок на доходи фізичних осіб та 5 % військового збору. Яку загальну суму (на руки) отримала менеджерка за пів року роботи після сплати податків?

Вправи для повторення

34.30. Між якими двома послідовними цілими числами міститься число:

1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $-\sqrt{5}$; 4) $-\sqrt{17}$?

34.31. Розв'яжіть нерівність $6x - 40 > (3x - 8)(3x + 8)$.

34.32. Розв'яжіть рівняння $(2x^2 - 1)(x^2 + 3) = x^2(x^2 + 7)$.

34.33. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{x^3 + 3x^2}{x + 3} + \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}.$$

Життєва математика

34.34. До електромережі підключено прилади, загальний опір яких становить $R_1 = 90$ Ом. Паралельно з ними передбачено підключити ще й електрообігрівач. Визначте найменш можливий опір R_2 цього електрообігрівача, якщо відомо, що за паралельного з'єднання двох провідників з опорами R_1 Ом і R_2 Ом їхній загальний опір обчислюють за формулою $R_{заг} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функціонування електромережі її загальний опір має бути не менше, ніж 9 Ом.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

34.35. Запишіть скінченну послідовність, що складається із шести членів, у якої перший член дорівнює 1, а кожен наступний – утричі більший за попередній.

34.36. Знайдіть закономірність і продовжте ряд чисел, записавши чотири наступних числа:

1) 3; 6; 12; 24; ...;
2) 64; 32; 16; 8; ...;
3) 1; −3; 9; −27; ...;
4) 25 000; −2500; 250; −25; ... .

Цікаві задачі – поміркуй одначе

34.37. (*Задача Стенфордського університету.*) Знайдіть усі значення m, за яких рівняння $x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$ має чотири корені, що є послідовними членами арифметичної прогресії.

§ 35. Геометрична прогресія, її властивості. Формула n-го члена геометричної прогресії

1. Означення геометричної прогресії

Розглянемо числову послідовність, перший член якої дорівнює 3, а кожен наступний, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на 2:

$$3\ \overset{\cdot 2}{;}\ 6\ \overset{\cdot 2}{;}\ 12\ \overset{\cdot 2}{;}\ 24\ \overset{\cdot 2}{;}\ 48\ \overset{\cdot 2}{;}\ 96;\ \ldots\ .$$

Таку послідовність називають *геометричною прогресією*.

Геометричною прогресією **називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожне з яких, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число.**

Це число називають знаменником геометричної прогресії і позначають буквою q (від першої літери французького слова *quotient* – частка). Тому, якщо (b_n) – геометрична прогресія, справджуються рівності:

$$b_2 = b_1q;\ \ b_3 = b_2q;\ \ b_4 = b_3q;\ \ \dots\ .$$

Отже, для будь-якого натурального n матимемо:

$$b_{n+1} = b_nq.$$

Тоді

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

тобто

знаменник геометричної прогресії можна знайти, якщо будь-який член прогресії, починаючи з другого, поділити на попередній.

Зауважимо, що оскільки члени геометричної прогресії відмінні від нуля, то і знаменник q не може дорівнювати нулю, тобто $q \neq 0$.

Якщо $q = 1$, то геометрична прогресія складатиметься з однакових чисел. Наприклад, якщо $b_1 = -5$ і $q = 1$, то матимемо геометричну прогресію:

$$-5;\ -5;\ -5;\ -5;\ -5;\ \dots\ .$$

Зауважимо, що отриману послідовність можна також вважати і арифметичною прогресією, перший член якої дорівнює -5, а різниця дорівнює 0.

2. Формула n-го члена геометричної прогресії та її застосування

Нехай перший член геометричної прогресії дорівнює b_1, а знаменник дорівнює q. Тоді:

$$b_2 = b_1q;$$
$$b_3 = b_2q = (b_1q)q = b_1q^2;$$
$$b_4 = b_3q = (b_1q^2)q = b_1q^3;$$
$$b_5 = b_4q = (b_1q^3)q = b_1q^4 \text{ тощо.}$$

Помічаємо, що в кожній з отриманих формул показник степеня числа q на 1 менший від порядкового номера члена прогресії, для якого записано цю формулу. Справді, щоб знайти b_n, маючи b_1 і q, треба $n - 1$ разів помножити b_1 на q, тобто b_1 помножити на q^{n-1}. Маємо:

$$\boldsymbol{b_n = b_1q^{n-1}.}$$

Отримали *формулу n-го члена геометричної прогресії.*

Розглянемо кілька прикладів на застосування цієї формули.

Приклад 1. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, $b_1 = -27$, $q = \frac{1}{3}$. Знайти b_6.

Розв'язання. $b_6 = b_1 q^{6-1} = b_1 q^5 = -27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{1}{9}$.

Відповідь: $b_6 = -\frac{1}{9}$.

Приклад 2. Знайти знаменник q геометричної прогресії (b_n), якщо $b_5 = 4$, $b_7 = 36$.

Розв'язання.

1-й спосіб. Маємо $b_5 = b_1 q^4$, $b_7 = b_1 q^6$. Тоді $\frac{b_7}{b_5} = \frac{b_1 q^6}{b_1 q^4} = q^2$.

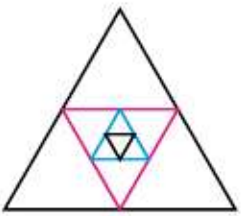
Але $\frac{b_7}{b_5} = \frac{36}{4} = 9$, тобто $q^2 = 9$, отже, $q = 3$ або $q = -3$.

2-й спосіб. ... $b_5 \overset{\cdot q}{;} b_6 \overset{\cdot q}{;} b_7$; ... .

Оскільки $b_7 = b_6 q = (b_5 q)q = b_5 q^2$, то $q^2 = \frac{b_7}{b_5} = \frac{36}{4} = 9$; отже, $q = 3$ або $q = -3$.

Відповідь: $q = 3$ або $q = -3$.

Приклад 3. Дано рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює 8 см. Середини його сторін є вершинами другого трикутника, а середини сторін другого є вершинами третього і так само далі (мал. 35.1). Знайти площу п'ятого трикутника, побудованого в такий само спосіб.



Мал. 35.1

Розв'язання. Нехай S_1; S_2; S_3; ... – площі першого, другого, третього і далі трикутників. Знайдемо S_1:

$$S_1 = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Оскільки сторони кожного наступного трикутника є середніми лініями попереднього, то довжина сторони кожного наступного трикутника буде вдвічі меншою від довжини сторони попереднього. Тоді сторона другого трикутника дорівнює 4 см, а його площа $S_2 = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ (см^2). Сторона третього трикутника дорівнює 2 см, тоді $S_3 = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ (см^2). Очевидно, що S_3 в 4 рази менша від S_2,

а S_2 у 4 рази менша від S_1, тобто дійдемо висновку, що площа кожного наступного трикутника в 4 рази менша від площі попереднього, тому знайдені числові значення площ S_1; S_2; S_3; ... є послідовними членами геометричної прогресії зі знаменником $\frac{1}{4}$, перший член якої дорівнює $16\sqrt{3}$. Тоді числове значення площі п'ятого трикутника є відповідно п'ятим членом цієї прогресії. Тому

$$S_5 = S_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5-1} = 16\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{\sqrt{3}}{16} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{16}$ см^2.

3. Властивості геометричної прогресії

Доведемо деякі важливі *властивості геометричної прогресії*.

1. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів, тобто

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ де } n \in N, n \geqslant 2.$$

Доведення. Скористаємося формулою n-го члена геометричної прогресії. Тоді:

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 q^{(n-1)-1} \cdot b_1 q^{(n+1)-1} = b_1^2 q^{n-2+n} = b_1^2 q^{2n-2} = (b_1 q^{n-1})^2 = b_n^2. \blacksquare$$

Якщо всі члени геометричної прогресії є додатними числами, то $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$, тобто кожен член геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів.

За однією з версій саме із цією властивістю геометричної прогресії і пов'язано її назву.

2. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох рівновіддалених від нього членів, тобто

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \text{ де } n \in N, k \in N, k < n.$$

Властивість доводиться аналогічно попередній властивості.

3. Якщо k, l, p і s — натуральні числа і $k + l = p + s$, то

$$b_k \cdot b_l = b_p \cdot b_s.$$

Доведення. Скористаємося формулою n-го члена геометричної прогресії:

$b_k \cdot b_l = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 q^{l-1} = b_1^2 q^{(k+l)-2}$;

$b_p \cdot b_s = b_1 q^{p-1} \cdot b_1 q^{s-1} = b_1^2 q^{(p+s)-2}$.

Але $k + l = p + s$, тому $b_1^2 q^{(k+l)-2} = b_1^2 q^{(p+s)-2}$.

Отже, $b_k b_l = b_p b_s$. ■

А ще раніше...

У папірусі Ахмеса, який ми вже неодноразово згадували, є задача, у якій треба знайти суму n членів геометричної прогресії, а саме: *«У семи людей є по сім кішок, кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків, з кожного колоска можна виростити по сім мір зерна. Якими є числа цього ряду та їхня сума?»*.

У своїй праці «Псаммит» Архімед уперше порівняв арифметичну й геометричну прогресії:

1; 2; 3; 4; 5; ...

10; 10^2; 10^3; 10^4; 10^5; ...

і помітив, що, наприклад, $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$, тобто під час множення членів такої геометричної прогресії досить додати відповідні члени арифметичної прогресії й отриману суму записати показником числа 10.

Для давніх греків геометрична прогресія, як і арифметична, була пов'язана з так званою неперервною геометричною пропорцією: $a : b = b : c$, у якій числа a, b і c утворюють геометричну прогресію зі знаменником $\sqrt{\frac{c}{a}}$. Цим зв'язком і пояснюється одна з версій назви прогресії – *геометрична*.

Яку послідовність називають геометричною прогресією? ○ Яке число називають знаменником геометричної прогресії? ○ Чи може знаменник геометричної прогресії дорівнювати нулю; одиниці? ○ Як можна знайти знаменник геометричної прогресії? ○ Запишіть формулу n-го члена геометричної прогресії. ○ Сформулюйте і доведіть властивості геометричної прогресії.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

35.1. Які з послідовностей є геометричними прогресіями? Укажіть для них перший член і знаменник.

1) 3; 6; 12; 2) 7; 7; 7; 3) 1; 2; 3;
4) 8; −8; 8; 5) 9; 3; 1; 6) 2; 4; 6.

35.2. Чи є геометричною прогресією послідовність:

1) натуральних чисел: 1; 2; 3; 4; 5; ...;
2) натуральних степенів числа 2: 2; 4; 8; 16; 32; ...;
3) натуральних степенів числа −5: −5; 25; −125; 625; ...;
4) кубів натуральних чисел: 1; 8; 27; 64; 125; ...?

35.3. Знайдіть чотири перших члени геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, якщо:

1) $b_1 = 10$, $q = 2$; 2) $b_1 = -20$, $q = 0{,}1$;
3) $b_1 = -5$, $q = -3$; 4) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$.

35.4. Знайдіть п'ять перших членів геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, якщо:

1) $b_1 = 125$, $q = -\frac{1}{5}$; 2) $b_1 = 0{,}5$, $q = 10$.

35.5. (x_n) – геометрична прогресія, $x_1 = \frac{1}{32}$, $q = -2$. Знайдіть:

1) x_2; 2) x_5; 3) x_8; 4) x_k.

35.6. (y_n) – геометрична прогресія, $y_1 = 81$, $q = -\frac{1}{3}$. Знайдіть:

1) y_2; 2) y_4; 3) y_7; 4) y_k.

35.7. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) b_6, якщо $b_1 = 1$, $q = 2$; 2) b_5, якщо $b_1 = 125$, $q = -\frac{1}{5}$;

3) b_7, якщо $b_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$; 4) b_4, якщо $b_1 = \sqrt{2}$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

35.8. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) b_5, якщо $b_1 = 2$, $q = -1$; 2) b_4, якщо $b_1 = -128$, $q = \frac{1}{2}$;

3) b_7, якщо $b_1 = 64$, $q = -\frac{1}{4}$; 4) b_3, якщо $b_1 = 3$, $q = -\sqrt{2}$.

35.9. Знайдіть шостий та n-й члени геометричної прогресії:

1) 10 000; 1000; 100; ...;

2) 3; –6; 12; ... .

35.10. Знайдіть п'ятий та n-й члени геометричної прогресії:

1) 20; 5; 1,25; ...; 2) 4; –8; 16; ... .

35.11. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_4 = 40$, $q = 2$; 2) $b_3 = 27$, $q = -3$.

35.12. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_3 = 100$, $q = -2$; 2) $b_4 = 64$, $q = 4$.

35.13. 1) (b_n) – геометрична прогресія, у якої $b_2 = 6$, $q = 2$. Знайдіть b_4.

2) Знайдіть, чому дорівнює $83b_4$, відтак дізнаєтеся, якого року на Олімпійських іграх уперше прозвучав гімн України.

35.14. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть b_7, якщо $b_6 = 4$, $b_8 = 9$.

35.15. Матеріальна точка за першу секунду подолала 5 м, а за кожну наступну – утричі більшу за попередню відстань. Скільки метрів подолала матеріальна точка за четверту секунду?

35.16. Ламана складається з п'яти ланок. Перша з них дорівнює 48 см, а кожна наступна вдвічі коротша від попередньої. Яка довжина п'ятої (найкоротшої) ланки?

35.17. Доведіть, що послідовність (x_n), задана формулою $x_n = 3 \cdot 4^n$, є геометричною прогресією. Знайдіть її перший член і знаменник.

35.18. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), у якої:

1) $b_7 = 12$, $b_9 = 48$;
2) $b_8 = 9$, $b_{11} = 243$;
3) $b_{16} = 16$, $b_{18} = 9$;
4) $b_{30} = 1$, $b_{33} = -1$.

35.19. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), у якої:

1) $b_{10} = 11$, $b_{12} = 99$;
2) $b_{10} = 27$, $b_{13} = 1$.

35.20. Запишіть геометричну прогресію з п'яти членів, у якої третій член дорівнює 10, а знаменник дорівнює -2.

35.21. Запишіть геометричну прогресію із шести членів, четвертий член якої дорівнює 80, а знаменник дорівнює -4.

35.22. Послідовність (x_n) – геометрична прогресія. Знайдіть x_5, якщо $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{8}$.

35.23. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть b_1, якщо $b_4 = -1$, $b_6 = -100$.

35.24. Послідовність (c_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) c_1, якщо $c_3 = 10$, $c_5 = \frac{1}{10}$;
2) c_6, якщо $c_1 = 2$, $c_3 = 8$.

35.25. Під мікроскопом розглядають 5 клітин, які розмножуються поділом навпіл щохвилини. Скільки утвориться клітин через одну хвилину; через три хвилини; через шість хвилин?

35.26. У перший тиждень після відкриття піцерії «Найкраща» в ній зробили замовлення 500 клієнтів. Надалі кількість замовлень збільшувалася у 1,2 раза щотижня, і такий приріст тривав протягом наступних 3 тижнів.

1) Скільки клієнтів зробило замовлення у четвертий тиждень?
2) Чи можна стверджувати, що в разі збереження такої тенденції через 2 місяці (тобто на 9-й тиждень) після відкриття піцерія обслуговуватиме понад 1500 клієнтів щотижня?

35.27. У чемпіонаті України із шахів були встановлені грошові призи для учасників, які посіли перші вісім місць. Чемпіон отримував 100 000 грн. Кожен наступний призер, починаючи з 2-го місця, отримував 90 % від суми призу, яку отримав учасник, що посідав місце на одну позицію вище.

1) Який приз отримав учасник, який посів 4-те місце?
2) Чи отримав учасник, який посів 8-ме місце, приз, більший за 50 000 грн?

35.28. Між числами 1 і 64 вставте:
1) одне число; 2) два числа
таких, щоб вони разом з даними утворили геометричну прогресію.

35.29. Геометрична прогресія (b_n) складається з п'яти членів: $\frac{1}{2}$, x_2, x_3, 4, x_5. Знайдіть x_2, x_3, x_5.

35.30. За якого значення x числа $x + 3$, $2x$ і $5x - 4$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.

35.31. За якого значення y числа y, $2y + 3$ і $4y + 3$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.

35.32. Доведіть, що коли числа a, b і c є послідовними членами геометричної прогресії, то справджується рівність:

$$(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$$

35.33. Для деяких чисел x, y, z, жодне з яких не дорівнює нулю, справджується рівність:

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = (xy + yz)^2.$$

Доведіть, що x, y, z – послідовні члени геометричної прогресії.

35.34. Дано квадрат зі стороною 16 см. Середини його сторін є вершинами другого квадрата, а середини сторін другого квадрата є вершинами третього і так само далі. Знайдіть площу шостого квадрата, побудованого в такий самий спосіб.

Вправи для повторення

35.35. Обчисліть:
1) 2^7;
2) 4^6;
3) $3^5 - 1$;
4) $(3 - 1)^5$.

35.36. Знайдіть перший член та різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо:
1) $a_2 + a_4 = 14$, $a_6 + a_9 = 32$;
2) $a_2 + a_6 = 4$, $a_4 a_3 = 6$.

35.37. Доведіть, що значення виразу $\frac{a + 3}{2a + 2} - \frac{a + 1}{2a - 2} + \frac{2}{a^2 - 1}$ не залежить від значення змінної.

35.38. Відомо, що x_1 та x_2 – корені рівняння $5x^2 + 7x - 9 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть $x_1^3 x_2 + x_2^3 x_1$.

35.39. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$.

Життєва математика

35.40. Після дощу рівень води в колодязі може підвищитися. Тарас вимірює час t падіння невеликих камінчиків у колодязь і розраховує відстань до води за формулою $h = 5t^2$, де h – відстань у метрах до води, t – час падіння в секундах. В один із днів час падіння камінців становив 0,9 с, а після кількох дощових днів – 0,8 с. На скільки метрів піднявся рівень води в колодязі за ці дні?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

35.41. Знайдіть:

1) 7 % від 10 000;
2) 9 % від 20 000;
3) 11 % від 15 000;
4) 12 % від 8000.

35.42. Вкладниця відкрила в банку депозитний рахунок на 40 000 грн під 15 % річних.

1) Скільки відсоткових коштів матиме вкладниця через рік?
2) Якою буде сума на рахунку вкладниці через рік?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

35.43. Про послідовність (a_n) відомо, що $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + n$. Знайдіть формулу n-го члена цієї послідовності.

§ 36. Формула складних відсотків

1. Задача нарахування відсоткових коштів

Бухгалтерам і працівникам банків часто доводиться розв'язувати задачі на відсотки. Розглянемо задачу про нарахування *відсоткових коштів*. З економічної точки зору відсоткові кошти можна вважати винагородою, яку сплачує особа чи установа (позичальник) за користування протягом певного часу певною сумою коштів, отриманих від іншої особи чи установи (кредитора). Розмір цієї винагороди залежить від суми позики та терміну користування нею.

Приклад 1. Вкладник відкрив у банку депозит у розмірі 10 000 грн під 11 % річних (тобто банк зобов'язується виплатити відсоткові кошти в розмірі 11 % на рік від початкової суми вкладу). Скільки відсоткових коштів отримає вкладник через рік?

Розв'язання. 11 % = 0,11, тому вкладник отримає $0{,}11 \cdot 10\,000 = 1100$ (грн) відсоткових коштів.

Відповідь: 1100 грн.

2. Формула складних відсотків

Якщо вкладник вирішив тримати кошти в банку більше ніж один рік, не додаючи нових коштів і не забираючи з банку вкладених кош-

тів, то обчислити суму коштів на рахунку вкладника через кілька років можна за допомогою *формули складних відсотків*.

Нехай вкладник поклав до банку A_0 грн під p % річних, A_0 ще називають *початковим капіталом*. Через рік банк нарахує вкладнику $\frac{A_0 p}{100}$ грн відсоткових коштів. Тому на рахунку вкладника через рік буде $A_0 + \frac{A_0 p}{100} = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ грн – *нарощений капітал*. Позначимо $A_1 = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. За другий рік вкладнику буде нараховано $\frac{A_1 p}{100}$ грн відсоткових коштів (адже тепер банк нараховує p % річних від числа A_1), і його вклад дорівнюватиме:

$$A_1 + \frac{A_1 p}{100} = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Міркуючи аналогічно та застосовуючи формулу n-го члена геометричної прогресії (b_n), де $b_1 = A_0$ і $q = 1 + \frac{p}{100}$, дійдемо висновку, що через n років нарощений капітал становитиме:

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ грн.}$$

Отже,

початковий капітал A_0, внесений до банку під p % річних, через n років стане нарощеним капіталом A_n, розмір якого обчислюється за формулою:

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

яку називають *формулою складних відсотків*.

3. Застосування формули складних відсотків під час розв'язування задач

Приклад 2. Вкладниця відкрила в банку депозит на 5000 грн під 12 % річних. Скільки коштів буде на рахунку вкладниці через 3 роки? Скільки відсоткових коштів отримає вкладниця через 3 роки?

Розв'язання. $A_0 = 5000$, $p = 12$ %, $n = 3$. Тоді

$$A_3 = 5000\left(1 + \frac{12}{100}\right)^3 = 7024{,}64 \text{ (грн)}.$$

Відсоткові кошти можна знайти як різницю $A_3 - A_0$.

Отже, $A_3 - A_0 = 7024{,}64 - 5000 = 2024{,}64$ (грн).

Відповідь: 7024,64 грн, 2024,64 грн.

За формулою складних відсотків можна також розв'язувати й інші задачі, не пов'язані з нарощенням капіталу.

Приклад 3. Населення деякого міста становить 30 000 мешканців. Щорічно кількість населення зменшується на 0,2 %. Яким буде населення цього міста через 10 років?

Розв'язання. Оскільки населення міста щороку зменшується на однаковий відсоток, і це відсоток від кількості населення кожного попереднього року, а не від початкової кількості мешканців, то можна скористатися формулою складних відсотків.

Маємо, що $A_0 = 30\ 000$, $p = -0{,}2$ (оскільки населення зменшується, то $p < 0$), $n = 10$. Тоді:

$$A_{10} = 30\ 000\left(1 - \frac{0{,}2}{100}\right)^{10} \approx 29\ 405 \text{ (мешк.)}.$$

Відповідь: 29 405 мешканців.

Що таке відсоткові кошти? Запишіть формулу складних відсотків.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

36.1. Вкладник поклав на депозитний рахунок 100 000 грн під 11 % річних.

1) Скільки коштів буде на цьому рахунку через 3 роки; через 5 років?

2) Скільки відсоткових коштів матиме вкладник через 3 роки; через 5 років?

36.2. Вкладниця відкрила в банку депозитний рахунок на 200 000 грн під 12 % річних.

1) Якою буде сума на рахунку через 2 роки; через 4 роки?

2) Скільки відсоткових коштів отримає вкладниця за 2 роки; за 4 роки?

36.3. Вкладник відкрив депозит на 80 000 грн під 9 % річних. Складіть формулу для обчислення відсоткових коштів вкладника через n років. Обчисліть за цією формулою відсоткові кошти, якщо: $n = 2$; $n = 3$.

36.4. Яку мінімальну суму коштів треба покласти в банк під 12 % річних, щоб через 2 роки мати на рахунку більше, ніж 100 000 грн? Відповідь округліть до тисяч гривень.

36.5. Яку суму треба внести на депозит під 10 % річних, щоб одержати через 2 роки прибуток у розмірі 12 180 грн?

36.6. Яку суму треба внести на депозит під 5 % річних, щоб одержати через 2 роки прибуток у розмірі 8200 грн?

36.7. Товар коштує 2000 грн. Щомісяця ціна товару знижується на 3 %. Якою буде ціна товару через:

1) 3 місяці;
2) пів року?

Відповідь округліть до сотих гривні.

36.8. Населення міста становить 50 000 осіб і щороку зменшується на 1 %. Якою буде кількість населення міста через:

1) 5 років;
2) 10 років?

36.9. Який відсоток річних має нараховувати банк, щоб через три роки початковий розмір вкладу збільшився в $1\frac{91}{125}$ раза?

Вправи для повторення

36.10. Скільки цілих розв'язків має нерівність

$$x(x-2)+3x \geqslant 2x(x+1)-6?$$

36.11. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2-y^2=12, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=3. \end{cases}$

Життєва математика

36.12. Волонтерська організація збирає кошти для закупівлі пластмаси, яка використовується для друку необхідних виробів на 3D-принтері. За місяць вдалося зібрати 51 000 грн волонтерських коштів. На ринку є такі пропозиції:

Продавець	Ціна за 1 кг пластмаси, грн	Особливі умови
1	270	Немає
2	300	Знижка 15 % у разі купівлі більше ніж 10 кг
3	320	Знижка 20 % у разі купівлі більше ніж 15 кг

Як краще розпорядитися зібраними коштами?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

36.13. (*Національна олімпіада Румунії, 1981 р.*) Розв'яжіть рівняння $x^6+3x^3+1=y^4$ у цілих числах.

§ 37. Сума n перших членів геометричної прогресії

1. Формули для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії

Розглянемо n перших членів геометричної прогресії (b_n): b_1, b_2, b_3, …, b_{n-1}, b_n. Позначимо через S_n їхню суму:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n.$$

Знайдемо формулу для обчислення цієї суми. Маємо (враховуючи формулу n-го члена геометричної прогресії):

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Віднімемо почленно від цієї рівності попередню:

$$S_nq - S_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n) -$$

$$- (b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}) = b_1q^n - b_1 = b_1(q^n - 1).$$

Отже, $S_nq - S_n = b_1(q^n - 1)$ і $S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1)$.

Якщо $q \neq 1$, то отримаємо *формулу суми n перших членів геометричної прогресії*:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}. \qquad (1)$$

Якщо $q = 1$, то всі члени прогресії дорівнюють першому члену і тоді $S_n = nb_1$.

Зауважимо, що отриману формулу (1) можна записати й у такому вигляді:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Оскільки $b_n = b_1q^{n-1}$, то отриману формулу (1) суми n перших членів геометричної прогресії можна подати й в іншому вигляді. Справді,

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1q^{n-1}q - b_1}{q - 1} = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}.$$

Отже,

$$S_n = \frac{b_nq - b_1}{q - 1}. \qquad (2)$$

Маємо ще одну формулу для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії, якою зручно користуватися, якщо відомо перший та n-й члени прогресії та її знаменник.

2. Застосування формул суми n перших членів геометричної прогресії для розв'язування вправ

Застосуємо ці формули для розв'язування вправ.

Приклад 1. Знайти суму перших семи членів геометричної прогресії 2; −6; 18; ... .

Розв'язання. 1-й спосіб. За умовою: $b_1 = 2$, $b_2 = -6$, $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{2} = -3$.

Тоді за формулою (1):

$$S_7 = \frac{b_1(q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{2((-3)^7 - 1)}{-3 - 1} = \frac{2 \cdot (-2188)}{-4} = 1094.$$

2-й спосіб. Відомо, що $b_1 = 2$, $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{2} = -3$, тоді

$b_7 = b_1 q^6 = 2 \cdot (-3)^6 = 1458$.

За формулою (2): $S_7 = \frac{b_7 q - b_1}{q - 1} = \frac{1458 \cdot (-3) - 2}{-3 - 1} = 1094$.

Відповідь: 1094.

Приклад 2. Знайти суму перших шести членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_2 = 8$, $b_4 = 32$.

Розв'язання. Оскільки $b_4 = b_1 q^3 = (b_1 q)q^2 = b_2 q^2$, то $q^2 = \frac{b_4}{b_2} = \frac{32}{8} = 4$, отже, $q = 2$ або $q = -2$.

Тоді існують дві прогресії, що задовольняють умову задачі:

1) якщо $q = 2$, то $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{8}{2} = 4$ і $S_6 = \frac{4(2^6 - 1)}{2 - 1} = 252$;

2) якщо $q = -2$, то $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{8}{-2} = -4$ і $S_6 = \frac{-4((-2)^6 - 1)}{-2 - 1} = 84$.

Відповідь: 252 або 84.

Приклад 3. Скоротити дріб $\frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{x^6 - 1}$.

Розв'язання. Доданки в чисельнику дробу є послідовними членами геометричної прогресії 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, перший член якої дорівнює 1, а знаменник дорівнює x. З умови випливає, що $x \neq 1$.

Знайдемо суму всіх шести членів цієї прогресії за формулою (1) та скоротимо поданий в умові дріб:

$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}{x^6 - 1} = \frac{\frac{1 \cdot (x^6 - 1)}{x - 1}}{x^6 - 1} = \frac{1}{x - 1}.$$

Відповідь: $\frac{1}{x - 1}$.

А ще раніше...

Стародавня індійська задача-легенда розповідає, що винахідник шахів Сета попросив у індійського царя Шерама за свій винахід стільки зерен, скільки їх буде, якщо покласти на першу клітинку шахівниці одну зернину, на другу – дві, на третю – чотири, на четверту – вісім і далі в той самий спосіб, доки не заповняться всі клітинки шахівниці.

Цар здивувався, що винахідник забажав так мало, і запропонував своїм математикам обчислити кількість зернин, які повинен йому віддати. Подиву царя не було меж, коли він почув, що ця кількість дорівнює числу

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Щоб зібрати таку кількість зернин, треба було засіяти й зібрати врожай пшениці з площі, яка у 2000 разів більша за площу Землі. Для зберігання такого врожаю знадобилася б комора, яка за ширини 10 м і висоти 4 м мала б довжину 300 000 000 км, тобто удвічі більшу за відстань від Землі до Сонця.

Запишіть формули, за якими обчислюють суму n перших членів геометричної прогресії.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **37.1.** Знайдіть S_5 – суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 1$, $q = 2$.

37.2. Знайдіть S_4 – суму чотирьох перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 1$, $q = 3$.

2 **37.3.** Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$; 2) $b_1 = -17$, $q = -2$;

3) $b_1 = 32$, $q = -\frac{1}{2}$; 4) $b_1 = 5\sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}$.

37.4. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 32$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_1 = 5$, $q = -2$;

3) $b_1 = 27$, $q = -\frac{1}{3}$; 4) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$.

37.5. Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії:

1) 16; −8; 4; ...; 2) 1,5; 3; 6; ...;

3) 4; 4^2; 4^3; ...; 4) $\sqrt{3}$; 3; $3\sqrt{3}$; ... .

37.6. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії:

1) 1,5; 6; 24; ...; 2) −4; 2; −1; ...;

3) 2; 2^2; 2^3; ...; 4) 2; $\sqrt{2}$; 1; ... .

37.7. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) S_7, якщо $b_1 = 2$, $q = -3$; 2) S_8, якщо $b_1 = -1$, $q = 4$.

37.8. Використовуючи формулу (2) із цього параграфа, обчисліть суму чисел, що є послідовними членами геометричної прогресії:

1) $1 + 3 + 9 + \ldots + 729$; 2) $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \ldots + 2$.

37.9. Використовуючи формулу (2) із цього параграфа, обчисліть суму чисел, що є послідовними членами геометричної прогресії:

1) $2 + 4 + 8 + \ldots + 128$; 2) $\frac{1}{5} + 1 + 5 + \ldots + 625$.

37.10. На п'яти ділянках висаджено смородину. На першій ділянці 16 кущів, а на кожній наступній у 1,5 раза більше, ніж на попередній. Скільки всього кущів смородини висаджено на п'яти ділянках?

37.11. Одна зі сторін чотирикутника дорівнює 12,5 см, а кожна наступна – у 1,2 раза довша за попередню. Знайдіть периметр чотирикутника.

37.12. Аріна розмістила на *YouTube* цікавий ролик. Першого дня ролик отримав 40 лайків. Протягом наступних 3 днів кількість лайків щодня збільшувалася у 2,5 раза, порівняно з попереднім днем.

1) Скільки лайків отримав ролик на четвертий день?
2) Скільки всього лайків ролик Аріни зібрав за перші чотири дні?

37.13. Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n), у якої:

1) $b_2 = 6$, $q = 2$; 2) $b_3 = 8$, $q = -4$.

37.14. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n), у якої:

1) $b_2 = 8$, $q = 4$; 2) $b_3 = 27$, $q = -3$.

37.15. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) S_8, якщо $b_3 = \frac{1}{4}$, $b_4 = \frac{1}{8}$; 2) S_5, якщо $b_1 = 5$, $b_3 = 45$, $q > 0$;

3) S_4, якщо $b_2 = 8$, $b_4 = 2$, $q < 0$;

4) S_7, якщо $b_1 = 5$, $b_4 = 40$.

37.16. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:

1) S_7, якщо $b_2 = \frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$;

2) S_8, якщо $b_1 = 9$, $b_3 = 36$, $q > 0$;

3) S_4, якщо $b_2 = 25$, $b_4 = 1$, $q < 0$;

4) S_6, якщо $b_1 = 1$, $b_4 = 27$.

37.17. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), у якої:

1) $q = 2$, $S_6 = 315$; 2) $q = -\frac{2}{3}$, $S_4 = 13$.

37.18. Знайдіть перший член геометричної прогресії (b_n), у якої:

1) $q = -2$, $S_6 = -63$; 2) $q = \frac{1}{3}$, $S_5 = 121$.

37.19. Скоротіть дріб:

1) $\frac{1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8}{x^{10} - 1}$; 2) $\frac{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5}{x^6 - 1}$.

37.20. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, $b_2 = 125$, $b_4 = 5$. Знайдіть S_5.

37.21. Послідовність (c_n) – геометрична прогресія, $c_3 = 27$, $c_5 = 3$. Знайдіть S_6.

37.22. (*Із книжки Я. І. Перельмана «Жива математика», 1967 р.*) Один чоловік запропонував багатію таку угоду: чоловік щодня протягом місяця сплачуватиме багатію по 100 000 карбованців, а багатій сплачуватиме цьому чоловікові: першого дня – 1 копійку, другого – 2 копійки, третього – 4 копійки, четвертого – 8 копійок і далі в той самий спосіб. Угода діятиме рівно 30 днів. Багатій погодився. Хто з них виграє за такої угоди? Візьміть до уваги, що 1 карбованець = 100 копійок.

37.23. Послідовність (c_n) – геометрична прогресія, $c_5 - c_3 = 144$, $c_4 - c_2 = 48$. Знайдіть S_6.

37.24. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, $b_6 - b_4 = 48$, $b_3 - b_5 = 24$. Знайдіть S_5.

37.25. Друзі Марічка та Павло, кожен окремо, зареєстрували ФОП. Марічка першого місяця отримала прибуток 60 000 грн, а кожного наступного місяця – на 5 % більше, ніж попереднього. Павло першого місяця також отримав прибуток 60 000 грн, а кожного наступного місяця – на 5000 грн більше, ніж попереднього.

1) Хто з друзів отримав більший загальний прибуток за пів року; на скільки? (Відповідь округліть до тисяч гривень.)

2) Як зміниться відповідь на перше запитання, якщо в перший місяць кожен із підприємців отримав прибуток 100 000 грн?

3) Зробіть висновки.

37.26. Знайдіть кількість членів геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 15$, $q = 2$, $S_n = 945$;
2) $b_1 = 2$, $b_n = 128$, $S_n = 254$;
3) $q = 3$, $b_n = 486$, $S_n = 726$.

Вправи для повторення

37.27. Розв'яжіть нерівність:

1) $5(x - 2) \leqslant x + 26$; 2) $2x^2 - 3x - 5 > 0$.

37.28. Знайдіть суму всіх від'ємних членів прогресії $-4{,}8; -4{,}4; -4; \ldots$.

37.29. Обчисліть:

$$\left(\frac{\sqrt{7}+3}{\sqrt{7}-3}-\frac{\sqrt{7}-3}{\sqrt{7}+3}\right)^2.$$

37.30. Вкладниця внесла до банку на два різних рахунки кошти на загальну суму 60 000 грн. За першим із них банк нараховує 10 % річних, а за другим – 7 %. Через рік вкладниця отримала 4800 грн прибутку. Яку суму коштів вона внесла на кожен з рахунків?

37.31. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a-20}{(a-5)^2}:\left(\frac{a}{a^2-25}-\frac{a-8}{a^2-10a+25}\right)$$

є додатним, якщо $a<-5$.

37.32. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\dfrac{y}{2x}-\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2},\\ y^2-5xy+2x^2=32.\end{cases}$

Життєва математика

37.33. У трьох салонах мобільного зв'язку однаковий смартфон у кредит продають на різних умовах. Умови кредиту подано в таблиці.

Салон	Ціна смартфона, грн	Початковий внесок (у % від ціни)	Строк кредиту (місяців)	Сума щомісячного платежу, грн
Альфа	5000	15	12	400
Бета	5240	10	6	850
Гамма	4750	20	12	380

Визначте, у якому із салонів придбання смартфона в кредит є найвигіднішим, та обчисліть остаточну суму, у яку обійдеться купівля.

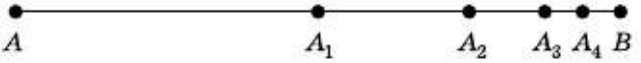
Цікаві задачі – поміркуй одначе

37.34. З пункту A до пункту B виїхав мотоцикліст. Через 2 год у тому самому напрямку виїхав легковик, який прибув до пункту B одночасно з мотоциклістом. Якби мотоцикліст і легковик одночасно виїхали назустріч один одному з пунктів A і B, то вони зустрілися б через 1 год 20 хв. За який час кожен з них долає шлях від A до B?

§ 38. Нескінченна геометрична прогресія та її сума

1. Поняття про суму нескінченної геометричної прогресії

Нехай довжина відрізка AB дорівнює 2 одиниці. A_1 – середина відрізка AB, A_2 – середина відрізка A_1B, A_3 – середина відрізка A_2B і так само далі (мал. 38.1).



Мал. 38.1

Довжини відрізків AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... утворюють нескінченну геометричну прогресію:

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots .$$

Перший член цієї прогресії дорівнює 1, а знаменник дорівнює $\frac{1}{2}$. Якщо кількість відрізків, які утворилися в такий спосіб, збільшувати до нескінченності, то сума їхніх довжин буде як завгодно близько наближатися до довжини відрізка AB, тобто до числа 2. У такому разі число 2 називають *сумою нескінченної геометричної прогресії* $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$ і записують:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$$

2. Формула для обчислення суми нескінченної геометричної прогресії при $|q| < 1$

Знайдемо формулу для обчислення суми нескінченної геометричної прогресії $b_1; b_1q; b_1q^2; b_1q^3; \ldots$ зі знаменником q, де $|q| < 1$. За відомою формулою знайдемо суму її n перших членів:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Перетворивши вираз у правій частині цієї формули, матимемо:

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1q^n - b_1}{q - 1} = \frac{b_1q^n}{q - 1} - \frac{b_1}{q - 1} = \frac{b_1}{1 - q} + \frac{b_1}{q - 1} \cdot q^n.$$

Отже, $S_n = \frac{b_1}{1 - q} + \frac{b_1}{q - 1} \cdot q^n$.

В останній формулі значення дробу $\frac{b_1}{1 - q}$ є сталим, а значення виразу $\frac{b_1}{q - 1} \cdot q^n$ – змінним, яке залежить від n. Оскільки $|q| < 1$, то за

необмеженого збільшення n множник q^n наближатиметься до нуля, а тому наближатиметься до нуля і добуток $\frac{b_1}{q-1} \cdot q^n$. Тоді сума S_n за необмеженого збільшення n наближатиметься до числа $\frac{b_1}{1-q}$.

Число $\frac{b_1}{1-q}$ називають *сумою нескінченної геометричної прогресії* (b_n) зі знаменником q, де $|q| < 1$. Позначивши цю суму через S, отримаємо формулу:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Зауважимо, що коли $|q| \geqslant 1$, то для суми n перших членів геометричної прогресії за необмеженого збільшення n неможливо вказати жодного числа, до якого вона наближається. Отже, суму нескінченної геометричної прогресії можна знайти, лише коли $|q| < 1$.

3. Застосування формули для обчислення суми нескінченної геометричної прогресії для розв'язування вправ

Розглянемо кілька вправ на застосування цієї формули.

Приклад 1. Знайти суму нескінченної геометричної прогресії 18; −6; 2; … .

Розв'язання. $b_1 = 18$, $b_2 = -6$, тому $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$. Умова $|q| < 1$ – виконується. Отже,

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{18}{1+\frac{1}{3}} = 13{,}5.$$

Відповідь: 13,5.

Приклад 2. Другий член нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q, де $|q| < 1$, дорівнює 4, а сума прогресії дорівнює 16. Знайти перший член та знаменник прогресії.

Розв'язання. За умовою $b_2 = 4$, $S = 16$. Виразимо b_2 і S через b_1 і q, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} b_1 q = 4, \\ \frac{b_1}{1-q} = 16; \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = \frac{4}{q}, \\ \frac{4}{q(1-q)} = 16. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи і знайдемо значення q:

$4 = 16q(1 - q)$; $4q^2 - 4q + 1 = 0$; $q = 0{,}5$. Тоді $b_1 = \frac{4}{0{,}5} = 8$.

Відповідь: $b_1 = 8$, $q = 0{,}5$.

4. Перетворення нескінченних десяткових періодичних дробів на звичайні

Формула суми нескінченної геометричної прогресії допомагає перетворити нескінченні десяткові періодичні дроби на звичайні.

Приклад 3. Записати нескінченний десятковий періодичний дріб $0{,}(4)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. Оскільки $0{,}(4) = 0{,}4444\ldots$, запишемо цей нескінченний періодичний дріб у вигляді суми розрядних доданків:

$$0{,}(4) = 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + 0{,}0004 + \ldots .$$

Доданки $0{,}4$; $0{,}04$; $0{,}004$; $0{,}0004$; ... є членами нескінченної геометричної прогресії, перший член якої дорівнює $0{,}4$, а знаменник $q = \frac{0{,}04}{0{,}4} = 0{,}1$ задовольняє умову $|q| < 1$. За формулою суми нескінченної геометричної прогресії матимемо: $S = \frac{0{,}4}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}4}{0{,}9} = \frac{4}{9}$. Отже, $0{,}(4) = \frac{4}{9}$.

Відповідь: $0{,}(4) = \frac{4}{9}$.

Перевірити правильність отриманої відповіді можна, поділивши 4 на 9. Справді, $4 : 9 = 0{,}444\ldots$.

Приклад 4. Записати нескінченний десятковий періодичний дріб $2{,}4(18)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. $2{,}4(18) = 2{,}4181818\ldots$ Подамо це число у вигляді суми розрядних доданків:

$$2{,}4(18) = 2{,}4 + 0{,}018 + 0{,}00018 + 0{,}0000018 + \ldots .$$

Доданки $0{,}018$; $0{,}00018$; $0{,}0000018\ldots$ є членами нескінченної геометричної прогресії, перший член якої дорівнює $0{,}018$, а знаменник $q = \frac{0{,}00018}{0{,}018} = 0{,}01$ задовольняє умову $|q| < 1$. Знайдемо суму цієї прогресії: $S = \frac{0{,}018}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}018}{0{,}99} = \frac{18}{990} = \frac{1}{55}$.

Тоді $2{,}4(18) = 2{,}4 + \frac{1}{55} = 2\frac{2}{5} + \frac{1}{55} = 2\frac{23}{55}$.

Відповідь: $2{,}4(18) = 2\frac{23}{55}$.

За якою формулою знаходять суму нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q, де $|q| < 1$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

38.1. Знайдіть S – суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 4$, $q = 0{,}5$; 2) $b_1 = 1$, $q = \frac{2}{3}$.

38.2. Знайдіть S – суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_1 = 1$, $q = 0{,}75$.

38.3. Перевірте, що знаменник q нескінченної геометричної прогресії задовольняє умову $|q| < 1$, і знайдіть суму цієї прогресії:

1) $7; 1; \frac{1}{7}; \ldots$; 2) $-1; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{16}; \ldots$;

3) $0{,}5; -0{,}05; 0{,}005; \ldots$; 4) $-10; 4; -1{,}6; \ldots$.

38.4. Перевірте, що знаменник q нескінченної геометричної прогресії задовольняє умову $|q| < 1$, і знайдіть суму цієї прогресії:

1) $5; 1; \frac{1}{5}; \ldots$; 2) $-1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \ldots$;

3) $0{,}3; -0{,}03; 0{,}003; \ldots$; 4) $-16; 2; -0{,}25; \ldots$.

38.5. (*Задача Архімеда.*) Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots .$$

38.6. Знайдіть перший член нескінченної геометричної прогресії, якщо відомо її суму S та знаменник q:

1) $S = 16$, $q = 0{,}5$;

2) $S = 27$, $q = -\frac{1}{3}$.

38.7. Знайдіть перший член нескінченної геометричної прогресії, сума якої дорівнює 8, а знаменник дорівнює $\frac{1}{4}$.

38.8. Знайдіть знаменник q, де $|q| < 1$, нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $S = 10$, $b_1 = 5$; 2) $S = 9$, $b_1 = 15$.

38.9. Знайдіть знаменник q, де $|q| < 1$, нескінченної геометричної прогресії, якщо її перший член дорівнює 12, а сума дорівнює 14.

38.10. На промені OP від точки O послідовно відкладено відрізки. Довжина першого з них дорівнює 12 см, а довжина кожного наступного дорівнює $\frac{1}{4}$ від довжини попереднього. Обчисліть суму довжин усіх відрізків, якщо їх відкладати нескінченну кількість разів.

3 **38.11.** Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

1) $5\sqrt{2}; 5; \frac{5\sqrt{2}}{2}; \ldots$; 2) $\frac{1}{4-2\sqrt{2}}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2+\sqrt{2}}; \ldots$.

38.12. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

1) $3\sqrt{3}; 3; \sqrt{3}; \ldots$; 2) $1+\sqrt{5}; \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}; \frac{1+\sqrt{5}}{5}; \ldots$.

38.13. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_3 = 20$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_4 = 1$, $q = -\frac{1}{3}$.

38.14. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_5 = 1$, $q = \frac{1}{3}$; 2) $b_2 = -10$, $q = -\frac{2}{3}$.

38.15. Знайдіть суму, якщо $|x| < 1$:

1) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$;

2) $x - x^3 + x^5 - x^7 + \ldots$.

38.16. Запишіть нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:

1) 0,(3); 2) 0,(15); 3) 3,1111...;
4) 7,393939...; 5) 0,6(3); 6) 7,(25).

38.17. Запишіть нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:

1) 0,(7); 2) 0,(18);
3) 5,2222...; 4) 4,424242...;
5) 0,5(4); 6) 4,(28).

38.18. Послідовність (b_n) – нескінченна геометрична прогресія. Знайдіть:

1) b_5, якщо $S = 13{,}5$, $q = \frac{1}{3}$; 2) b_2, якщо $S = 49$, $b_1 = 56$.

38.19. Послідовність (b_n) – нескінченна геометрична прогресія. Знайдіть:

1) b_3, якщо $S = 25$, $b_1 = 20$; 2) b_4, якщо $S = 81$, $q = -\frac{2}{3}$.

38.20. Другий член нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q, де $|q| < 1$, дорівнює 24, а сума прогресії дорівнює 108. Знайдіть четвертий член цієї прогресії.

38.21. Другий член нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q, де $|q| < 1$, дорівнює 36, а сума прогресії дорівнює 144. Знайдіть п'ятий член цієї прогресії.

38.22. У рівносторонній трикутник вписано другий трикутник, вершинами якого є середини сторін першого. У другий трикутник у той самий спосіб вписано третій, і далі в такій само послідовності. Знайдіть суму периметрів усіх трикутників, якщо сторона першого дорівнює a см.

38.23. У квадрат, сторона якого дорівнює c см, вписано другий квадрат так, що його вершини є серединами сторін першого. У другий квадрат у той самий спосіб вписано третій квадрат, і далі в такій само послідовності. Знайдіть суму площ усіх таких квадратів.

38.24. Запишіть у вигляді звичайного дробу нескінченний періодичний десятковий дріб:

1) 3,27(3); 2) 6,40(30).

38.25. Запишіть у вигляді звичайного дробу число:

1) 4,57(6); 2) 5,03(06).

38.26. Розв'яжіть рівняння, якщо $|x| < 1$:

1) $\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{7}{2}$;

2) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{13}{6} - 3x$.

Вправи для повторення

38.27. Знайдіть п'ятий член і суму перших тридцяти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = -5$, $a_2 = -1$.

38.28. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні числу 11 і не перевищують числа 990.

38.29. Побудуйте графік функції $y = -x^2 + 2x - 3$. За графіком знайдіть:

1) область значень функції; 2) проміжок зростання функції.

38.30. Знайдіть найбільший член послідовності, заданої формулою n-го члена: $x_n = -2n^2 + 8n + 17$.

Життєва математика

38.31. Із 50 000 мешканців міста Вишневого 65 % не цікавиться футболом. Серед футбольних уболівальників 85 % дивилося фінал Ліги чемпіонів по телевізору. Скільки жителів міста дивилися цей матч по телевізору?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

38.32. Знайдіть найбільше значення функції $y = \dfrac{20x^2}{x^4 + 100}$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 8 (§§ 32–38)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Послідовність задано формулою $x_n = 3n - 7$. Знайдіть x_7.

А. 7 **Б.** 14 **В.** −7 **Г.** 28

2. Укажіть послідовність, що є арифметичною прогресією.

А. 2; 4; 6 **Б.** 2; 4; 5 **В.** 0; 1; 8 **Г.** 1; 3; 9

3. Укажіть послідовність, що є геометричною прогресією.

А. 0; 1; 8 **Б.** 4; 5; 6 **В.** 1; 2; 4 **Г.** −2; −3; −4

2 **4.** Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 7$, $a_2 = 4$.

А. −130 **Б.** −65 **В.** −100 **Г.** 65

5. Знайдіть п'ятий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 3$, $q = -2$.

А. 24 **Б.** −96 **В.** −48 **Г.** 48

6. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії: 18; −9; 4,5; ...

А. 12 **Б.** 27 **В.** −12 **Г.** 36

3 **7.** Послідовність (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 14{,}5$, $d = -2{,}5$. Укажіть число, яке є членом цієї прогресії.

А. −21 **Б.** −22 **В.** −23 **Г.** −24

8. Знайдіть суму натуральних чисел, які кратні числу 8 і не перевищують числа 400.

А. 20 400 **Б.** 10 600 **В.** 10 200 **Г.** 9800

9. Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть S_6, якщо $b_2 = 2$, $b_4 = 8$ і $q < 0$.

А. −21 **Б.** 21 **В.** 63 **Г.** −63

4 **10.** Знайдіть найменший член послідовності $x_n = n^2 - 6n - 8$.

А. −16 **Б.** −17 **В.** −18 **Г.** Такого члена не існує

11. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть $a_4 + a_{18}$, якщо $a_{11} = -8$.

А. Знайти неможливо **Б.** −4 **В.** −16 **Г.** 16

12. За яких значень x числа $x - 2$, $x + 1$ і $5x + 1$ є послідовними членами геометричної прогресії?

А. 3 **Б.** -3 **В.** 0,25, -3 **Г.** $-0,25$, 3

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між нескінченним періодичним десятковим дробом (1–3) та звичайним дробом (А–Г), який йому дорівнює.

Нескінченний періодичний десятковий дріб	*Звичайний дріб*
1. 0,222...	**А.** $\frac{19}{90}$
2. 0,(21)	**Б.** $\frac{11}{90}$
3. 0,2(1)	**В.** $\frac{2}{9}$
	Г. $\frac{7}{33}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 32–38

1 **1.** Послідовність задано формулою $x_n = 4n + 5$. Знайдіть:
1) x_{10}; 2) x_{25}.

2. Які з послідовностей є арифметичними прогресіями:
1) 3; 1; 2; 2) 4; 2; 0;
3) 1; 3; 9; 4) 1; 11; 21?

3. Які з послідовностей є геометричними прогресіями:
1) 7; -14; 28; 2) 5; 6; 7; 3) 4; 2; 1; 4) 3; 1; 0?

2 **4.** Знайдіть сьомий член і суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 5$, $a_2 = 8$.

5. Знайдіть шостий член і суму восьми перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = -1$, $q = 2$.

6. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії: 12; -6; 3; ...

3 **7.** Послідовність (a_n) – арифметична прогресія, $a_1 = 18,5$, $d = -1,5$. Чи є членом цієї прогресії число:
1) 2,5; 2) 5?

8. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні числу 6 і не перевищують числа 540.

4 **9.** За яких значень x числа $x - 1$, $x + 2$ і $5x + 6$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.

Додаткові завдання

3 **10.** Вкладниця відкрила в банку депозитний рахунок на 100 000 грн під 10 % річних.
1) Якою буде сума на рахунку через 2 роки?
2) Скільки відсоткових коштів отримає вкладниця за 2 роки?

4 **11.** Знайдіть найбільший член послідовності $y_n = -n^2 + 4n - 5$.

12. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть a_{15}, якщо $a_8 + a_{22} = 7$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 8

До § 32

1 **1.** Послідовність задано формулою $a_n = 7n - 19$. Знайдіть:
1) a_1; 2) a_5; 3) a_{100}; 4) a_{1000}.

2 **2.** Запишіть п'ять перших членів послідовності натуральних двоцифрових чисел, які:
1) при діленні на 7 дають в остачі 1;
2) при діленні на 6 дають в остачі 5.

3 **3.** Знайдіть кількість додатних членів послідовності $a_n = 15 - 2n$.

4. Знайдіть перший від'ємний член послідовності $x_n = 7 - \frac{1}{3}n$.

5. Знайдіть найменший член послідовності $b_n = 4n - 5$.

4 **6.** Підберіть одну з можливих формул n-го члена послідовності:

1) 1; 3; 5; 7; 9; ...;
2) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$; ...;
3) 1; 4; 9; 16; 25; ...;
4) 2; 4; 8; 16; 32; ...;
5) −1; 1; −1; 1; −1; ...;
6) 1; 3; 1; 3; 1; ... .

7. Послідовність задано формулою $a_n = n^2 - 4n - 7$. Скільки членів, що не перевищують числа −2, містить ця послідовність?

До § 33

1 **8.** Чи є арифметичною прогресією послідовність натуральних чисел, кратних числу 5?

2 **9.** Знайдіть різницю та шостий член арифметичної прогресії: 2,7; 2,4; 2,1; ... .

10. Послідовність (x_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:
1) x_1, якщо $x_{12} = -8$, $d = -3$;
2) d, якщо $x_1 = 0$, $x_9 = -28$.

11. Знайдіть формулу n-го члена арифметичної прогресії:

1) $-5; -2; 1; \ldots;$ 2) $7; 7\frac{1}{4}; 7\frac{1}{2}; \ldots$.

12. Ламана складається з восьми ланок. Довжина першої ланки дорівнює 12 см, а кожна наступна на 0,5 см коротша від попередньої. Знайдіть довжину третьої ланки; восьмої ланки.

13. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Доведіть, що:
1) $a_{10} = a_3 + 7d$; 2) $a_7 + a_3 = a_1 + a_9$.

14. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Знайдіть:
1) a_{10}, якщо $a_1 = 8$, $a_5 = 2$;
2) a_{100}, якщо $a_{40} = -20$, $d = -3$.

15. Скільки додатних членів містить арифметична прогресія: 8; 7,7; 7,4; ...?

16. Знайдіть найбільший від'ємний член арифметичної прогресії (a_n), у якої $a_1 = -8{,}9$, $d = 0{,}2$.

17. Периметр трикутника дорівнює 39 см, причому довжини його сторін утворюють арифметичну прогресію. Чи можна знайти довжину хоча б однієї з них?

18. Кути деякого трикутника утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що один з них дорівнює $60°$.

19. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 7. Знайдіть другий і третій її члени, якщо вони є квадратами двох послідовних натуральних чисел.

20. Доведіть, що коли a, b і c – три послідовних члени арифметичної прогресії, то:

1) $c^2 = (a + 2b)^2 - 8ab$; 2) $\left(\frac{a - c}{2}\right)^2 = b^2 - ac$.

До § 34

21. Знайдіть S_{100} – суму ста перших членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 2$, $a_{100} = 198$.

22. Знайдіть суму п'ятдесяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 5$, $a_2 = 7{,}5$.

23. Знайдіть суму всіх цілих від'ємних чисел від -20 до -1.

24. Довжини сторін шестикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть периметр шестикутника, якщо найкоротша його сторона дорівнює 10 см, а найдовша – 20 см.

25. Знайдіть суму перших тридцяти членів арифметичної прогресії (y_n) з різницею d, якщо:
1) $y_{30} = 15$, $d = 2$; 2) $y_7 = 5$, $d = -3$.

26. Різниця арифметичної прогресії (a_n) дорівнює d. Знайдіть:
1) d, якщо $a_1 = 4$, $S_{10} = 175$; 2) a_1, якщо $d = 5$, $S_8 = 196$.

27. Яся взяла в бібліотеці роман обсягом 324 сторінки. Першого дня вона прочитала 20 сторінок, а кожного наступного дня читала на 4 сторінки більше, ніж попереднього. За скільки днів Яся прочитала роман?

4 **28.** Знайдіть перший член та різницю арифметичної прогресії, якщо сума перших десяти її членів дорівнює 170, а сума перших двадцяти її членів – 540.

29. В арифметичній прогресії (a_n):
1) $a_3 + a_7 = 18$. Знайдіть S_9; 2) $a_{11} = 5$. Знайдіть S_{21}.

30. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, менших від числа 100 і не кратних числу 4.

31. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{p \cdot p^2 \cdot \ldots \cdot p^n}{p \cdot p^3 \cdot \ldots \cdot p^{2n-1}}$; 2) $\dfrac{c^2 \cdot c^4 \cdot c^6 \cdot \ldots \cdot c^{2n}}{c \cdot c^2 \cdot c^3 \cdot \ldots \cdot c^n}$.

До § 35

1 **32.** Чи є геометричною прогресією послідовність натуральних степенів числа a ($a \neq 0$): a^1, a^2, a^3, a^4, ...?

2 **33.** Відомо два перших члени геометричної прогресії: 0,5 і 1,5. Знайдіть наступні за ними чотири члени.

34. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_3 = 8$, $b_4 = 32$; 2) $b_4 = 2$, $b_6 = 18$ і $q > 0$.

35. Довжини трьох відрізків утворюють геометричну прогресію. Знайдіть середній за розміром відрізок, якщо менший із відрізків дорівнює 1 см, а більший – 9 см.

3 **36.** Запишіть перші п'ять членів геометричної прогресії, у якої третій і четвертий члени відповідно дорівнюють 8 і –16.

37. Серед членів геометричної прогресії (b_n) є і додатні, і від'ємні члени, $b_2 = 8$, $b_4 = 72$. Знайдіть b_1.

38. Членами геометричної прогресії (c_n) є лише додатні числа, $c_4 = 125$, $c_6 = 5$. Знайдіть c_8 і c_9.

39. Між числами 27 і 12 уставте таке від'ємне число, щоб воно разом із ними утворювало геометричну прогресію.

4 **40.** Число 768 є членом геометричної прогресії: 3; 6; 12; ... . Знайдіть його номер.

41. За якого значення x числа $x - 1$, $3 - 3x$ і $4x + 1$ є послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.

42. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_1 + b_3 = 6$, $b_2 + b_4 = 12$; 2) $b_4 - b_2 = 18$, $b_5 - b_3 = 36$.

43. Чи можуть довжини сторін прямокутного трикутника утворювати геометричну прогресію? Якщо так, укажіть знаменник такої прогресії.

До § 36

3 **44.** Вкладниця відкрила в банку депозитний рахунок на 150 000 грн під 14 %.
1) Скільки коштів буде на цьому рахунку через 2 роки; через 4 роки? (Відповідь округліть до десятків гривень.)
2) Скільки відсоткових коштів матиме вкладниця через 2 роки; через 4 роки? (Відповідь округліть до десятків гривень.)

45. Яку мінімальну суму коштів треба покласти в банк під 10 %, щоб через три роки мати 15 000 грн відсоткових коштів? (Відповідь округліть до десятків гривень.)

4 **46.** У перший день пандемії в місті захворіло 10 000 осіб. А потім щотижня кількість хворих зменшувалася на 10 %. Скільки було хворих через:
1) 3 тижні? 2) 5 тижнів?

До § 37

1 **47.** Знайдіть суму трьох перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 8$, $q = -2$.

2 **48.** Послідовність (b_n) – геометрична прогресія. Знайдіть:
1) S_4, якщо $b_1 = -2$, $q = 10$; 2) S_5, якщо $b_1 = -60$, $q = 2$;
3) S_6, якщо $b_1 = 0{,}1$, $q = -3$; 4) S_7, якщо $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$.

49. Використовуючи формулу суми геометричної прогресії $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$, подайте у вигляді дробу вираз:
1) $1 + p + p^2 + \ldots + p^8$, де $p \neq 1$;
2) $c^8 + c^7 + \ldots + c^3$, де $c \neq 1$.

3 **50.** На площині побудовано п'ять квадратів. Сторона першого дорівнює 3 см, а сторона кожного наступного вдвічі більша за сторону попереднього. Знайдіть суму площ цих квадратів.

51. Доведіть, що послідовність (x_n), яку задано формулою $x_n = 0{,}2 \cdot 5^{n-1}$, є геометричною прогресією. Знайдіть суму шести перших членів цієї прогресії.

52. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії, перший член якої дорівнює 1, а п'ятий – дорівнює 81, якщо відомо, що її члени з парними номерами – від'ємні.

4 **53.** Послідовність (b_n) – геометрична прогресія, у якої $b_5 + b_4 = 72$, $b_4 - b_2 = 18$. Знайдіть S_8.

54. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 14, а сума їхніх квадратів дорівнює 84. Знайдіть суму восьми перших членів цієї прогресії.

55. Знайдіть перший член, знаменник і кількість членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_5 - b_1 = 45$, $b_3 + b_1 = 15$, $S_n = -63$.

56. Знайдіть геометричну прогресію, яка складається із шести членів, якщо сума її членів з непарними номерами дорівнює 273, а сума членів з парними номерами – 1092.

57. (*Задача про поширення чуток із книжки Я. І. Перельмана «Жива математика», 1967 р.*) У невеличке містечко, населення якого становить 50 тисяч осіб, о 8-й годині ранку прибув мешканець столиці й привіз цікаву новину. О 8 год 15 хв він розповів цю новину трьом своїм знайомим, після чого ще через 15 хв кожен з них розповів новину трьом тим своїм знайомим, котрі про неї не знали. Після цього кожен з дев'яти мешканців міста, що дізналися про цю новину, розповів її трьом своїм знайомим і так само далі. О котрій годині (приблизно) про цю новину дізнаються всі мешканці міста?

До § 38

1 **58.** Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (x_n), якщо:

1) $x_1 = 1$, $q = \frac{1}{8}$; 2) $x_1 = 4$, $q = \frac{5}{6}$.

2 **59.** Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = 8$, $b_2 = 1$; 2) $b_1 = -1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$;

3) $b_1 = 4$, $b_2 = -2$; 4) $b_1 = -4$, $b_2 = 1$.

60. Послідовність (b_n) – нескінченна геометрична прогресія, у якої $|q| < 1$. Знайдіть:

1) b_1, якщо $S = 7$, $q = -\frac{1}{7}$;

2) q, якщо $S = 12$, $b_1 = 8$.

61. Тіло проходить за першу секунду 100 м, а за кожну наступну – чверть попередньої відстані. Чи зможе тіло подолати відстань 130 м, якщо рух триватиме нескінченно довго?

3 **62.** (*Задача П. Ферма.*) Доведіть, що

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \ldots = \frac{7}{4}.$$

63. Чи може сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q, де $|q| < 1$, бути меншою від її першого члена?

64. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, де $|q| < 1$, якщо $b_3 = 8$, $b_4 = -4$.

65. Запишіть у вигляді звичайного дробу число:

1) 0,(57); 2) 0,2(4); 3) 4,(17); 4) 5,1(3).

4 **66.** Послідовність (b_n) – нескінченна геометрична прогресія, $b_1 = 9$, $q = \frac{1}{3}$. Знайдіть суму її членів:

1) з непарними номерами; 2) з парними номерами.

67. У нескінченній геометричній прогресії перший член дорівнює 15, а знаменник дорівнює $\frac{1}{4}$. Знайдіть суму квадратів усіх її членів.

68. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), у якої $|q| < 1$, якщо:

1) $b_2 = 36$, $b_4 = 4$; 2) $b_4 b_6 = 1$, $b_3 + b_5 = 17$.

69. Сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q, де $|q| < 1$, дорівнює 9, а сума квадратів її членів – 40,5. Знайдіть перший член і знаменник прогресії.

70. (*Задача П. Ферма.*) S – сума нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, де $|q| < 1$. Доведіть, що $\frac{S}{S - b_1} = \frac{b_1}{b_2}$.

Головне в темі 8

АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число.

ФОРМУЛА n-го ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

1. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ де } n \in N,\ n \geqslant 2.$$

2. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених від нього членів, тобто

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ де } n \in N,\ k \in N,\ k < n,\ n \geqslant 2.$$

3. Якщо k, l, p і s – натуральні числа і $k + l = p + s$, то

$$a_k + a_l = a_p + a_s.$$

4. Будь-яку арифметичну прогресію можна задати формулою $a_n = dn + b$, де b і d – деякі числа.

5. Послідовність a_n, яку задано формулою вигляду $a_n = dn + b$, де b і d – деякі числа, є арифметичною прогресією.

СУМА n ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ АРИФМЕТИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{або} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ

Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожне з яких, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число.

ФОРМУЛА n-го ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

ВЛАСТИВОСТІ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

1. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів, тобто
$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \text{ де } n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$
2. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох рівновіддалених від нього членів, тобто
$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, \text{ де } n \in N,\ k \in N,\ k < n.$$
3. Якщо k, l, p і s – натуральні числа і $k + l = p + s$, то
$$b_k \cdot b_l = b_p \cdot b_s.$$

ФОРМУЛА СКЛАДНИХ ВІДСОТКІВ

Початковий капітал A_0, внесений до банку під p % річних, через n років стане нарощеним капіталом A_n, розмір якого обчислюється за формулою:

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

яку називають *формулою складних відсотків*.

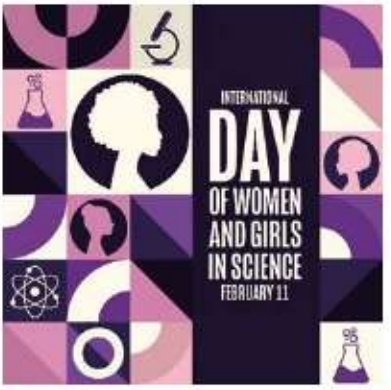
СУМА n ПЕРШИХ ЧЛЕНІВ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{або} \quad S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$$

СУМА НЕСКІНЧЕННОЇ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ де } |q| < 1$$

Жінки в науці: як хвилі океану допомагають вивчати математику



Щороку 11 лютого у світі за підтримки ЮНЕСКО відзначається **Міжнародний день жінок і дівчат у науці (*International Day of Women and Girls in Science*)**. Його мета – сприяти повноцінному та рівному доступу жінок і дівчат до участі в наукових дослідженнях.

За даними Інституту статистики ЮНЕСКО, лише близько 33 % науковців у світі – жінки. Проте в Україні ситуація значно краща: серед наших науковців 46 % – жінки. Це дає змогу Україні посідати почесне 12-те місце за кількістю жінок-учених у рейтингу серед 41 країни світу.

На знак підтримки та заохочення молодих науковиць 2018 року в Україні запровадили премію, яка є частиною глобальної Програми **L'ORÉAL-ЮНЕСКО «Для жінок у науці»**. Вона присуджується молодим жінкам, які професійно займаються дослідженнями в галузі STEM (наука, технології, інжиніринг, математика) та активно розвивають українську науку.

Лауреаткою ІІ української премії L'ORÉAL-ЮНЕСКО «Для жінок у науці» стала **Катерина Валеріївна Терлецька**. Вона – українська науковиця, математикиня, доктор фізико-математичних наук у галузі механіки.

Катерина Валеріївна досліджує внутрішні хвилі океану та вивчає роль океану у зміні клімату. Це дуже важливий напрям досліджень, що поєднує глибокі математичні знання з актуальними екологічними проблемами. Її наукові інтереси охоплюють нелінійні хвилі та стратифіковані течії. Вона є авторкою понад 100 наукових праць.

Катерина Терлецька

Крім власних досліджень, пані Терлецька активно працює з обдарованою молоддю. Вона завідувачка лабораторії математичних наук НЦ МАН України та курирує напрям математики в Малій академії наук. Її мета – розвивати в учнів / учениць нестандартне мислення та поглиблювати їхній інтерес до математики.

Досвід Катерини Валеріївни не обмежується Україною. Вона неодноразово брала участь у європейських наукових конференціях, а також працювала в Кореї та Китаї, що свідчить про її міжнародне визнання та співпрацю. Зараз Катерина Терлецька працює старшим науковим співробітником відділу моделювання морських та річкових систем Інституту проблем математичних машин і систем НАН України.

ТЕМА 9

ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕМІЩЕННЯ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** поняття подібності трикутників та рівності фігур;
- **дізнаєтеся** про переміщення (рух) та його властивості, симетрію відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення, перетворення подібності;
- **навчитеся** виконувати перетворення фігур, знаходити площі подібних фігур.

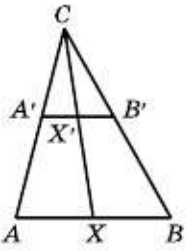
§ 39. Переміщення (рух) та його властивості. Рівність фігур

1. Перетворення фігур

Будь-яку геометричну фігуру можна розглядати як множину точок. Наприклад, відрізок – це множина точок прямої, що лежать між двома її точками, разом із цими точками.

Іноді між точками двох геометричних фігур можна встановлювати певну відповідність.

Нехай $A'B'$ – середня лінія трикутника ABC, що паралельна стороні AB (мал. 39.1). Уважатимемо, що кожній точці X сторони AB трикутника ABC відповідає точка X' середньої лінії $A'B'$, що лежить на промені CX. Наприклад, точці A відповідає точка A', точці B – точка B'. Точку X', яка відповідає точці X, називають *образом* точки X, точку X при цьому називають *прообразом* точки X'.



Мал. 39.1

За встановленою відповідністю кожній точці X відрізка AB відповідає певна точка X' відрізка $A'B'$. При цьому кожна точка відрізка $A'B'$ є відповідною деякій точці відрізка AB. Крім цього, різним точкам відрізка AB відповідають різні точки відрізка $A'B'$. Множиною всіх точок, які відповідають точкам відрізка AB, є відрізок $A'B'$. Так, отримали перетворення відрізка AB у відрізок $A'B'$.

Перетворенням фігури F у фігуру F' **називають таку відповідність, за якої:**

1) кожній точці фігури F відповідає певна точка фігури F';

2) кожна точка фігури F' є образом деякої точки фігури F;

3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F'.

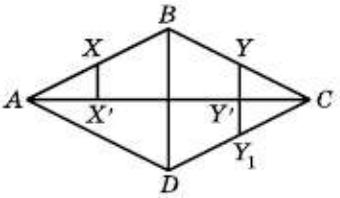
Кажуть, що фігура F' є *образом фігури* F для такого перетворення, а фігура F є *прообразом* фігури F'.

Зауважимо, що не кожна відповідність між точками двох фігур є перетворенням.

Приклад 1. Чи є перетворенням відповідність, за якої кожній точці X ромба $ABCD$ ставиться у відповідність точка X' – точка перетину діагоналі ромба AC із перпендикуляром, проведеним через точку X до прямої, що містить AC?

Розв'язання. 1) Для заданої відповідності кожній точці X ромба $ABCD$ відповідає єдина точка X' діагоналі ромба AC (мал. 39.2). 2) Але водночас кожній точці Y' діагоналі AC (за винятком точок A і C) відповідають дві точки ромба Y та Y_1. Тому задана відповідність не є перетворенням.

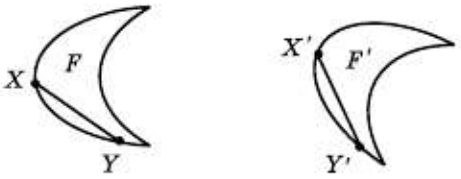
Відповідь: ні.



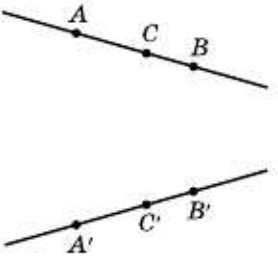
Мал. 39.2

2. Переміщення (рух) та його властивості

Перетворення однієї фігури в іншу називають *переміщенням* (*рухом*), якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки X та Y першої фігури в точки X' та Y' другої так, що $XY = X'Y'$ (мал. 39.3).



Мал. 39.3



Мал. 39.4

Розглянемо основні *властивості* переміщення.

Теорема 1 (властивість переміщення). **Точки, що лежать на прямій, під час переміщення переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їхнього взаємного розміщення.**

Доведення. 1) Нехай точки A, B і C лежать на одній прямій. Тоді одна з них лежить між двома іншими, наприклад, точка C лежить між точками A і B (мал. 39.4). Тоді:

$$AB = AC + CB.$$

2) Деяке переміщення переводить точку A в точку A', точку B – у точку B', точку C – у точку C'. Оскільки переміщення зберігає відстані між будь-якими двома точками, то:

$$A'B' = AB,\ A'C' = AC,\ C'B' = CB.$$

Тому:

$$A'B' = A'C' + C'B'.$$

3) З останньої рівності випливає, що точки A', B' і C' лежать на одній прямій, причому точка C' лежить між точками A' і B'. ■

Наслідок. Під час переміщення прямі переходять у прямі, промені – у промені, відрізки – у відрізки.

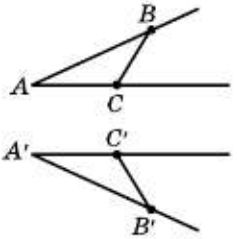
Теорема 2 (властивість переміщення). Під час переміщення кут переходить у рівний йому кут.

Доведення. 1) Нехай маємо нерозгорнутий кут BAC. Під час переміщення два промені AB і AC, що виходять зі спільної точки і не лежать на одній прямій, переходять у деякі два промені $A'B'$ і $A'C'$ (мал. 39.5).

2) Оскільки переміщення зберігає відстані між будь-якими двома точками, то $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

3) Тоді $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (за трьома сторонами).

Із рівності трикутників випливає, що $\angle BAC = \angle B'A'C'$. ■



Мал. 39.5

3. Рівність фігур

Використовуючи поняття переміщення, можна сформулювати загальне означення рівності геометричних фігур.

Дві фігури називають *рівними*, якщо при переміщенні вони переходять одна в одну.

Відомі нам із попередніх класів означення рівності відрізків, кутів і трикутників не суперечать наведеному загальному означенню рівних фігур.

Із цього означення випливає, що:

1) *якщо фігура F дорівнює фігурі F_1, то і F_1 дорівнює F;*

2) *якщо фігура F дорівнює фігурі F_1, а F_1 дорівнює F_2, то F дорівнює F_2;*

3) *якщо фігура F дорівнює фігурі F_1, то існує деяке переміщення, що переводить фігуру F у фігуру F_1.*

Які саме види переміщень існують, ми розглянемо в наступних параграфах.

Приклад 2. $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB. Чи існує переміщення, за якого: 1) відрізок AC переходить у відрізок BC; 2) кут A переходить у кут B?

Розв'язання. Оскільки трикутник рівнобедрений з основою AB, то $AC = BC$ і $\angle A = \angle B$. Тому існує переміщення, що переводить відрізок AC у відрізок BC, і існує переміщення, що переводить кут A в кут B.

Відповідь: 1) так; 2) так.

Що називають перетворенням фігури F у фігуру F'? ○ Яке перетворення фігури називають переміщенням? ○ Сформулюйте і доведіть властивості переміщення. ○ Які фігури називають рівними? ○ Які висновки можна зробити із загального означення рівності фігур?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

39.1. Чи існує переміщення, яке переводить відрізок AB у відрізок $A'B'$, якщо:

1) $AB = 5$ см, $A'B' = 5$ см; 2) $AB = 4$ см, $A'B' = 7$ см?

39.2. Чи існує переміщення, яке переводить відрізок MN у відрізок $M'N'$, якщо:

1) $MN = 6$ см, $M'N' = 4$ см; 2) $MN = 7$ см, $M'N' = 7$ см?

39.3. Чи існує переміщення, яке переводить кут D в кут D', якщо:

1) $\angle D = 60°$, $\angle D' = 62°$; 2) $\angle D = 30°$, $\angle D' = 30°$?

39.4. Чи існує переміщення, яке переводить кут A в кут A', якщо:

1) $\angle A = 100°$, $\angle A' = 100°$; 2) $\angle A = 98°$, $\angle A' = 85°$?

2

39.5. При переміщенні трикутник ABC перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть кути трикутника $A'B'C'$, якщо трикутник ABC – рівнобедрений з кутом A при вершині й $\angle A = 20°$.

39.6. При переміщенні прямокутний трикутник ABC з катетами $AC = 3$ см і $BC = 4$ см перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть сторони трикутника $A'B'C'$.

39.7. $ABCD$ – паралелограм. Чи існує переміщення, за якого:

1) сторона AB переходить у сторону CD;

2) кут BAD переходить у кут BCD?

39.8. $KLMN$ – ромб. Чи існує переміщення, за якого:

1) сторона KL переходить у сторону KN;

2) кут KLN переходить у кут MNL?

3

39.9. Нехай маємо два кола зі спільним центром O. Кожній точці X першого кола відповідає точка X' другого кола, яка лежить на промені OX. Чи буде ця відповідність між точками двох кіл перетворенням?

39.10. Коло із центром у точці O вписано у квадрат. Кожній точці X кола відповідає точка X' квадрата, яка лежить на промені OX. Чи буде ця відповідність між точками кола і квадрата перетворенням?

39.11. Чи існує переміщення, за якого відрізок MN переходить у відрізок KL, якщо $M(-2; 3)$, $N(2; 0)$, $K(5; 1)$, $L(0; 2)$?

39.12. Чи існує переміщення, за якого відрізок AB переходить у відрізок CD, якщо $A(0; 5)$, $B(6; -3)$, $C(4; 5)$, $D(-1; 0)$?

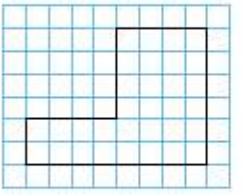
39.13. Чи існує переміщення, яке переводить коло $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ у коло $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$?

39.14. Чи існує переміщення, яке переводить коло $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ у коло $x^2 + y^2 + 8x = 0$?

39.15. Розділіть фігуру (мал. 39.6) на дві рівні частини.

39.16. Розділіть фігуру (мал. 39.7) на дві рівні частини.

Мал. 39.6



Мал. 39.7

Вправи для повторення

39.17. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з них на 30° більший за інший.

39.18. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см, дві інші утворюють кут 60°, а їхня різниця дорівнює 3 см. Знайдіть площу трикутника.

39.19. Два кола з радіусами 4 см і 9 см мають зовнішній дотик. Спільна зовнішня дотична дотикається до кіл у точках A і B. Знайдіть AB.

39.20. У правильному п'ятикутнику $ABCDE$ діагоналі AD і BE перетинаються в точці O. Знайдіть кут DOE.

Життєва математика

39.21. 1) Одного рулону шпалер вистачає для обклеювання смуги від підлоги до стелі 1,6 м завширшки. Скільки рулонів шпалер потрібно купити для обклеювання прямокутної кімнати розмірами 3,6 м × 4,8 м (вікнами та дверима знехтувати)?

2) *Проєктна діяльність.* Дізнайтеся вартість шпалер, які вам до вподоби, та обчисліть, скільки потрібно заплатити грошей за них.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

39.22. На колі навмання розташували 5 точок. Доведіть, що:

1) існує принаймні три трійки точок, що є вершинами тупокутних трикутників;

2) існує таке розташування точок, за якого тупокутних трикутників буде точно три.

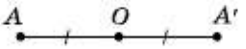
§ 40. Симетрія відносно точки

1. Означення симетрії відносно точки

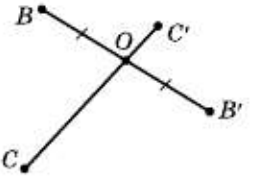
Дві точки A та A' називають *симетричними відносно точки O*, якщо O є серединою відрізка AA' (мал. 40.1).

Точкою, симетричною точці O, буде сама точка O.

На малюнку 40.2 точки B і B' симетричні відносно точки O, а точки C і C' не є симетричними відносно точки O.



Мал. 40.1



Мал. 40.2

Щоб побудувати точку A', симетричну точці A відносно точки O:

1) проводимо промінь AO;
2) по інший бік від точки O відкладаємо на ньому відрізок $OA' = OA$ (див. мал. 40.1).

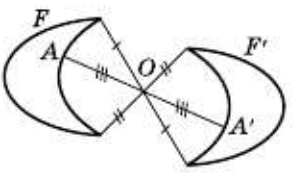
Приклад. Точки $A(x; 2)$ і $A'(-3; y)$ симетричні відносно точки $O(4; -5)$. Знайти x та y.

Розв'язання. Точка O – середина відрізка AA'. За формулами середини відрізка: $4 = \dfrac{x + (-3)}{2}$ і $-5 = \dfrac{2 + y}{2}$, звідси: $x = 11$, $y = -12$.

Відповідь: $x = 11$, $y = -12$.

2. Фігури F і F', симетричні відносно деякої точки. Центрально-симетрична фігура

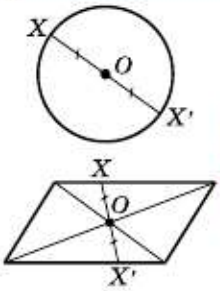
Якщо кожна точка фігури F симетрична деякій точці фігури F' відносно точки O, і навпаки, то фігури F і F' називають *симетричними відносно точки O* (мал. 40.3). Таке перетворення фігури F у фігуру F' називають *перетворенням симетрії відносно точки O* (або *центральною симетрією* відносно точки O). Точку O називають *центром симетрії*.



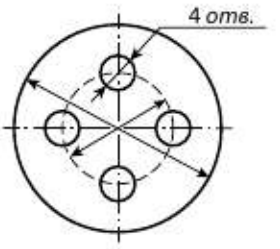
Мал. 40.3

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то фігуру F називають *центрально-симетричною*, а точку O – її *центром симетрії* (тобто *центром симетрії фігури F*).

Прикладами центрально-симетричних фігур є коло і паралелограм (мал. 40.4). Центром симетрії кола є центр кола, а центром симетрії паралелограма – точка перетину його діагоналей.



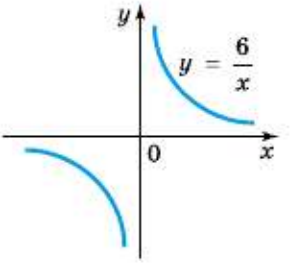
Мал. 40.4



Мал. 40.5

Приклади центрально-симетричних фігур трапляються у природі, техніці, побуті (мал. 40.5). Наприклад, центрально-симетричними є орнаменти на килимах, вишивках тощо (мал. 40.6). В алгебрі, наприклад, графіком функції $y = \frac{6}{x}$ є гіпербола, симетрична відносно початку координат (мал. 40.7).

Мал. 40.6

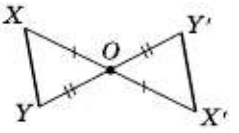


Мал. 40.7

3. Теорема про перетворення симетрії відносно точки

Теорема (про перетворення симетрії відносно точки). Перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.

Доведення. Нехай X та Y – дві довільні точки фігури F, а перетворення симетрії відносно точки O переводить їх у точки X' та Y' (мал. 40.8).



Мал. 40.8

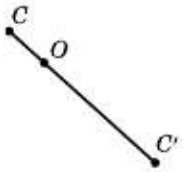
1) Оскільки $XO = X'O$, $YO = Y'O$ (за означенням симетрії) і $\angle XOY = \angle X'OY'$ (як вертикальні), то $\triangle XOY = \triangle X'OY'$ (за двома сторонами і кутом між ними).

2) Тому $XY = X'Y'$. Це означає, що симетрія відносно точки O є переміщенням. (Випадок, коли точки X, Y та O лежать на одній прямій, розгляньте самостійно.) ■

Які точки називають симетричними відносно даної точки? ○ Яке перетворення називають симетрією відносно даної точки? ○ Яку фігуру називають центрально-симетричною? ○ Яку точку називають центром симетрії фігури? ○ Наведіть приклади фігур, що мають центр симетрії. ○ Доведіть, що перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.

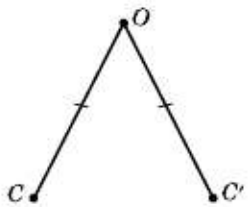
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

40.1. (*Усно.*) На якому з малюнків 40.9–40.12 точки C і C' симетричні відносно точки O?

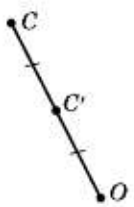


Мал. 40.9

Мал. 40.10



Мал. 40.11



Мал. 40.12

40.2. Дано дві точки O і A. Побудуйте точку A', симетричну точці A відносно точки O.

40.3. Дано дві точки O і B. Побудуйте точку B', симетричну точці B відносно точки O.

40.4. Дано відрізок AB, $A(-2; 3)$, $B(4; 5)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно початку координат, і запишіть координати його кінців.

40.5. Дано відрізок MN, кінці якого мають координати $M(-2; -1)$, $N(4; -3)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку MN відносно початку координат, і запишіть координати його кінців.

40.6. Серед точок $A(-2; 3)$, $B(2; 3)$, $C(-2; -3)$, $D(2; -3)$ укажіть пари точок, які симетричні відносно початку координат.

40.7. Чи симетричні точки $A(-2; 3)$ і $B(4; -7)$ відносно точки $O(1; 2)$?

40.8. Які координати має точка O, відносно якої симетричні точки $M(-4; 5)$ і $N(8; -1)$?

40.9. 1) Точки $A(x; -3)$ і $A'(5; y)$ симетричні відносно точки $O(7; 1)$. Знайдіть x та y.

2) Сума $x + y$ укаже, у якому віці українка Анна Дудченко почала займатися наукою, працюючи в лабораторії.

40.10. 1) Точки $B(5; y)$ і $B'(x; -7)$ симетричні відносно точки $O(-3; 4)$. Знайдіть x та y.

2) Знайдіть суму $x + y$, відтак дізнаєтеся, скільки міжнародних нагород одержала київська школярка Дар'я Зосименко за дослідження імунної відповіді організму на COVID-19.

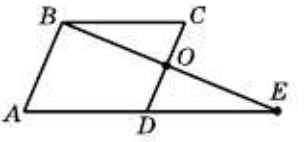
40.11. Чи має центр симетрії:

1) відрізок; 2) промінь; 3) пряма; 4) коло?

Якщо так, то вкажіть центр симетрії.

40.12. $ABCD$ – паралелограм (мал. 40.13). Точка E симетрична точці A відносно точки D. Доведіть, що:

1) точки C і D симетричні відносно точки O;



Мал. 40.13

2) точки B та E симетричні відносно точки O.

40.13. $ABCD$ – паралелограм (мал. 40.13). Точка E симетрична точці B відносно точки O. Доведіть, що:

1) точки C і D симетричні відносно точки O;

2) точки A та E симетричні відносно точки D.

40.14. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ відносно:

1) початку координат; 2) точки $O(-1; 5)$.

40.15. Запишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$ відносно:

1) початку координат; 2) точки $O(2; -3)$.

4 **40.16.** Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $2x - y + 5 = 0$ відносно:

1) початку координат; 2) точки $O(1; 3)$.

40.17. 940. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $x + 2y - 3 = 0$ відносно:

1) початку координат; 2) точки $O(-1; -2)$.

Вправи для повторення

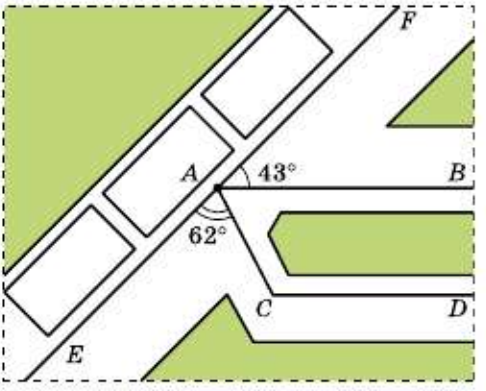
40.18. З точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, що вдвічі більша за перпендикуляр. Знайдіть кут між похилою та прямою.

40.19. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, бічна сторона якої перпендикулярна до діагоналі й дорівнює меншій основі.

40.20. Площа прямокутного трикутника в 4 рази менша від площі квадрата, який побудовано на гіпотенузі. Знайдіть гострі кути трикутника.

Життєва математика

40.21. На плані міста вулиці, позначені як AB і CD, паралельні. Вулиця EF становить з вулицями AB і AC кути відповідно $43°$ і $62°$. Знайдіть кут, який утворюють між собою вулиці AC і CD.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

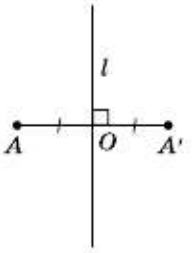
40.22. Знайдіть довжини сторін AB і AC трикутника ABC, якщо $BC = 8$ см, а довжини висот, проведених до AC і BC, дорівнюють відповідно 6,4 см і 4 см. Скільки випадків слід розглянути?

§ 41. Симетрія відносно прямої

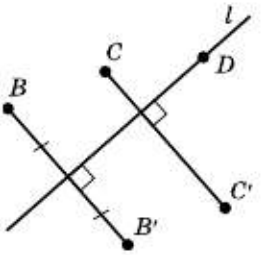
1. Означення симетрії відносно прямої

Дві точки A і A' називають *симетричними відносно прямої l*, якщо ця пряма є серединним перпендикуляром до відрізка AA' (мал. 41.1).

Якщо точка A лежить на прямій l, то її вважають симетричною самій собі відносно прямої l.



Мал. 41.1



Мал. 41.2

На малюнку 41.2 точки B і B' симетричні відносно прямої l, точки C і C' не симетричні відносно прямої l, а точка D симетрична сама собі відносно прямої l.

Щоб побудувати точку A', симетричну точці A відносно прямої l:

1) проводимо перпендикуляр AO з точки A до прямої l;

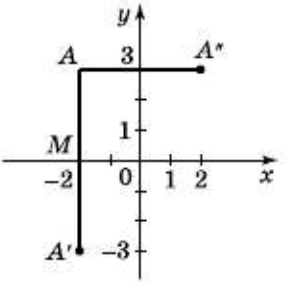
2) на його продовженні з іншого боку від прямої l відкладаємо відрізок $OA' = OA$ (див. мал. 41.1).

Приклад. Знайдіть координати точок, симетричних точці $A(-2; 3)$ відносно осей координат.

Розв'язання. Нехай точка A' симетрична точці A відносно осі x (мал. 41.3). Тоді $AA' \perp x$ і точка M середина відрізка AA'. Тому абсциса точки A' дорівнює абсцисі точки A, а ординати цих точок – протилежні числа. Отже, $A'(-2; -3)$.

Нехай точка A'' симетрична точці A відносно осі y. Міркуючи аналогічно, матимемо $A''(2; 3)$.

Відповідь: $A'(-2; -3)$ і $A''(2; 3)$.

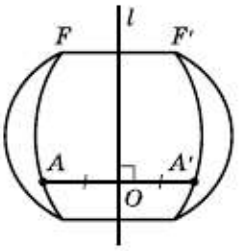


Мал. 41.3

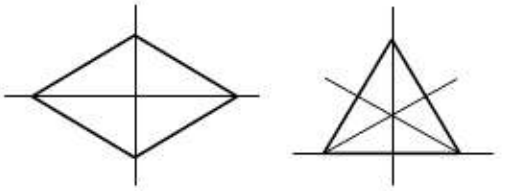
2. Фігури F і F', симетричні відносно деякої прямої. Фігура, симетрична відносно прямої

Якщо кожна точка фігури F відносно прямої l симетрична деякій точці фігури F', і навпаки, то фігури F і F' називають *симетричними відносно прямої* l (мал. 41.4). Таке перетворення фігури F у фігуру F' називають *перетворенням симетрії* відносно прямої l (або *осьовою симетрією* відносно прямої l). Пряму l називають *віссю симетрії*.

Якщо перетворення симетрії відносно прямої l переводить фігуру F у себе, то фігуру F називають *симетричною відносно прямої* l, а пряму l – її *віссю симетрії* (тобто віссю симетрії фігури F).



Мал. 41.4

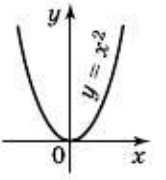


Мал. 41.5

Прикладами фігур, які мають вісь симетрії, є ромб і рівносторонній трикутник (мал. 41.5). Ромб має дві осі симетрії, а рівносторонній трикутник – три.

Фігури, симетричні відносно прямої, оточують нас у повсякденному житті, є у природі, техніці тощо (мал. 41.6).

Мал. 41.6



Мал. 41.7

В алгебрі симетрія відносно прямої трапляється під час побудови графіків. Наприклад, графік функції $y = x^2$ симетричний відносно осі ординат (мал. 41.7).

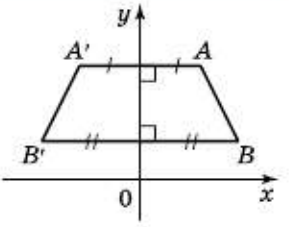
3. Теорема про перетворення симетрії відносно прямої

Теорема (про перетворення симетрії відносно прямої). Перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.

Доведення. Виберемо систему координат так, щоб вісь симетрії збігалася з віссю y.

Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ – дві довільні точки фігури F, а A' і B' – точки, симетричні відповідно точкам A і B відносно прямої y (мал. 41.8).

Тоді можемо вказати координати точок A' і B': $A'(-x_1; y_1)$ і $B'(-x_2; y_2)$ (див. розв'язання задачі на с. 130).



Мал. 41.8

Маємо: $AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$;

$A'B'^2 = (-x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Тому $AB^2 = A'B'^2$, отже, $AB = A'B'$, тобто симетрія відносно прямої є переміщенням. ■

А ще раніше...

Слово «*симетрія*» – грецького походження (*сим* – з, *метрон* – міра) і дослівно означає «співмірність». У давнину цей термін застосовували в архітектурі та мистецтві, маючи на увазі гармонійність, рівновагу, красу.

Пізнаючи в повсякденному житті явища природи, люди помічали симетричну форму листя та метеликів, спіралі мушлі, будови кристалів тощо, а також симетрію будови тіла людини.

Вчення про симетрію веде свій початок з давнини, про що свідчать геометричні орнаменти, які збереглися на кам'яних плитах, посудинах тощо. Багатовікові спостереження людини за симетрією мінералів, рослин, тварин та досвід застосування симетрії в будівництві й мистецтві стали передумовами створення вчення про симетрію.

Про симетрію у трактаті «Про архітектуру» писав римський інженер Вітрувій (I ст.). Симетрію вивчали і застосовували архітектори й художники доби Відродження, зокрема видатні італійські живописці Леонардо да Вінчі та Рафаель Санті; нею займалися вчені Луї Пастер (1822–1895), П'єр і Жак Кюрі та інші.

У геометрію елементи вчення про симетрію ввів французький математик Адрієн-Марі Лежа́ндр Летанур (1752–1833).

***

У наші часи вчення про симетрію є основою науки кристалографії та широко застосовується в науці, техніці й промисловості.

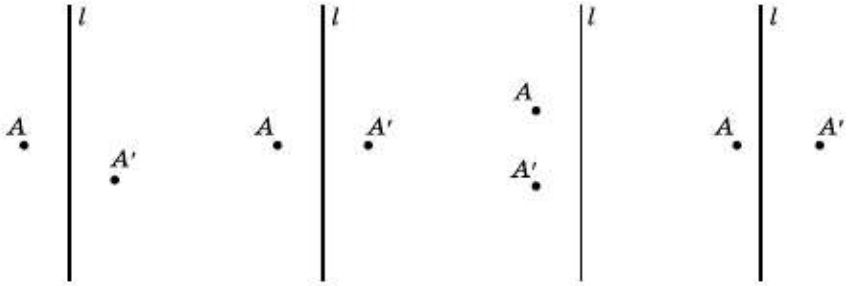
З давніх часів люди асоціювали симетрію з красою в будівництві, архітектурі, дизайні, мистецтві, й навіть вважали її важливою рисою особистої привабливості. У математиків симетрія не лише є мірою краси, а й потужним інструментом для аналізу, зокрема для рівнянь. З математичного погляду, симетрія – це таке перетворення математичного об'єкта (наприклад, обертання або переміщення у просторі), після якого об'єкт зберігає свій початковий вигляд. Наприклад, квадрат є симетричним відносно своїх діагоналей і середини сторін, а коло – відносно будь-якої точки свого центра.

Тадж-Маха́л – величний мавзолей-мечеть (м. Агра, Індія)

Які точки називають симетричними відносно даної прямої? ○ Яке перетворення називають симетрією відносно прямої? ○ Яку фігуру називають симетричною відносно даної прямої? ○ Як називають пряму, відносно якої фігура є симетричною? ○ Наведіть приклади фігур, що мають вісь симетрії. ○ Доведіть, що перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

41.1. (*Усно.*) На якому з малюнків 41.9–41.12 точки A і A' симетричні відносно прямої l?



Мал. 41.9 Мал. 41.10 Мал. 41.11 Мал. 41.12

41.2. Дано пряму l і точку M, що їй не належить. Побудуйте точку, симетричну точці M відносно прямої l.

41.3. Дано пряму l і точку N, що їй не належить. Побудуйте точку N', симетричну точці N відносно прямої l.

41.4. Дано відрізок CD, кінці якого мають координати $C(-4; 1)$, $D(2; -3)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку CD відносно осі абсцис, і запишіть координати його кінців.

41.5. Дано відрізок AB, кінці якого мають координати $A(2; 5)$, $B(3; -1)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно осі ординат, і запишіть координати його кінців.

41.6. Серед точок $A(-2; 5)$, $B(-2; -5)$, $C(2; 5)$, $D(2; -5)$ укажіть пари точок, симетричних відносно осі ординат.

41.7. Серед точок $M(3; -4)$, $N(-3; 4)$, $K(-3; -4)$, $L(3; 4)$ укажіть пари точок, симетричних відносно осі абсцис.

41.8. Накресліть трикутник ABC. Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої BC.

41.9. Накресліть прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB. Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої AC.

41.10. Скільки осей симетрії має:

1) відрізок; 2) промінь;
3) пряма; 4) коло;
5) прямокутник, що не є квадратом; 6) квадрат?

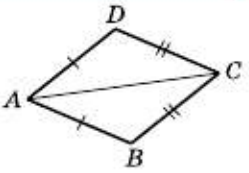
41.11. Знайдіть x та y, якщо точки $A(x; -2)$ і $A'(3; y)$ симетричні відносно:

1) осі абсцис; 2) осі ординат.

41.12. Знайдіть x та y, якщо точки $A(-5; y)$ і $A'(x; 6)$ симетричні відносно:

1) осі абсцис; 2) осі ординат.

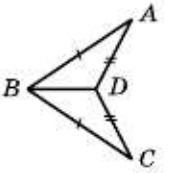
41.13. На малюнку 41.13 $AD = AB$, $CD = CB$. Доведіть, що точки B і D симетричні відносно прямої AC.



Мал. 41.13

41.14. На малюнку 41.14 $AB = BC$, $AD = DC$. Доведіть, що точки A і C симетричні відносно прямої BD.

41.15. Осі координат є осями симетрії ромба. Середина однієї зі сторін ромба – точка $N(-2; 3)$. Знайдіть координати вершин ромба.



Мал. 41.14

41.16. Осі координат є осями симетрії квадрата. Середина однієї зі сторін квадрата – точка $M(2; -2)$. Знайдіть координати вершин квадрата.

41.17. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $2x - 3y - 6 = 0$ відносно:
1) осі абсцис; 2) осі ординат.

41.18. 963. Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $4x - y + 8 = 0$ відносно:
1) осі абсцис; 2) осі ординат.

Вправи для повторення

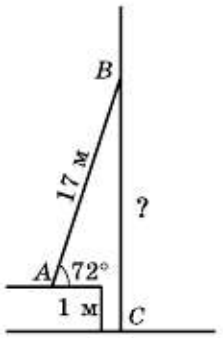
41.19. Периметр ромба дорівнює 24 см, а один з його кутів дорівнює 60°. Знайдіть діагоналі ромба.

41.20. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 36 см, а основа менша від бічної сторони на 3 см.

41.21. Знайдіть відношення площі правильного шестикутника, вписаного в коло, до площі квадрата, описаного навколо цього кола.

Життєва математика

41.22. Пожежна драбина висунута на 17 м при граничному куту підйому 72°. Знайдіть висоту, якої досяг верхній кінець драбини, якщо її нижній кінець віддалений від поверхні землі на 1 м.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

41.23. (*Київська математична олімпіада, 1993 р.*) Дано три ненульових вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які попарно неколінеарні. Доведіть, що коли вектор $\vec{a} + \vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b} + \vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, то вектор $\vec{a} + \vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{b}$. Знайдіть суму векторів $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

§ 42. Поворот

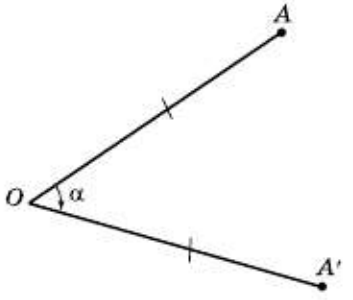
1. Означення повороту

Поворотом **навколо точки O на кут α називають перетворення, за якого точка A переходить у точку A' так, що $OA = OA'$ і $\angle AOA' = \alpha$ (мал. 42.1).**

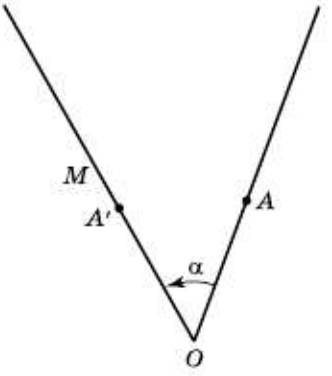
Після повороту точка O переходить у себе. Точку O називають *центром повороту*, а кут AOA' – *кутом повороту*.

Поворот можна виконати у двох напрямках: за годинниковою стрілкою і проти годинникової стрілки.

На малюнку 42.1 виконано поворот точки A навколо точки O на кут α за годинниковою стрілкою.



Мал. 42.1



Мал. 42.2

Щоб побудувати точку A', у яку переходить точка A внаслідок повороту в заданому напрямку (за годинниковою стрілкою або проти) навколо центра повороту (точки O) на кут α:

1) проводимо промінь OA;

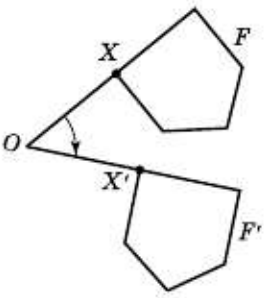
2) від променя OA в заданому напрямку відкладаємо кут AOM, що дорівнює куту α;

3) на промені OM позначаємо точку A' таку, що $OA = OA'$ (мал. 42.2).

На малюнку 42.2 виконано поворот точки A навколо точки O на кут α проти годинникової стрілки.

Зауважимо, що поворот на 180° навколо точки O і за годинниковою стрілкою, і проти годинникової стрілки є симетрією відносно точки O.

Якщо задано кут α, центр і напрямок повороту, то навколо центра повороту можна виконати поворот будь-якої фігури F. Для цього кожну точку X фігури F потрібно повернути навколо центра повороту на заданий кут α, отримавши в такий спосіб точку X' фігури F' (мал. 42.3). У такому разі кажуть, що поворот навколо точки O на кут α відображає фігуру F у фігуру F'.

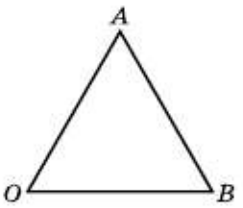


Мал. 42.3

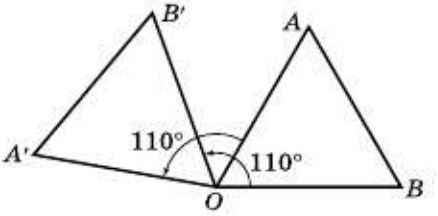
Приклад. Трикутник AOB – рівносторонній (мал. 42.4).

1) Побудувати відрізок $A'B'$, у який переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут $110°$ проти годинникової стрілки.

2) Знайти градусну міру кута AOB'.



Мал. 42.4



Мал. 42.5

Розв'язання. 1) Побудову зображено на малюнку 42.5.

2) $\angle AOB' = \angle B'OB - \angle AOB = 110° - 60° = 50°$.

Відповідь: 2) $50°$.

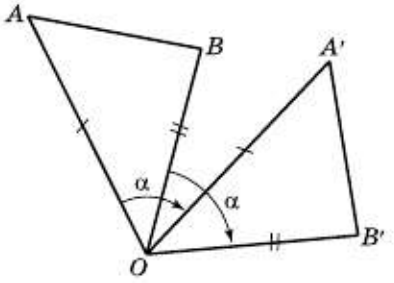
2. Теорема про поворот навколо точки

Теорема (про поворот навколо точки). Перетворення повороту є переміщенням.

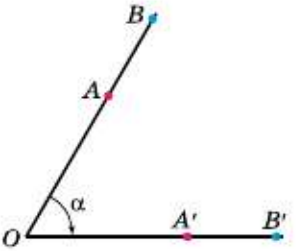
Доведення. Нехай при повороті навколо точки O на кут α точки A і B фігури F переходять відповідно в точки A' і B' фігури F'. Тоді $OA = OA'$, $OB = OB'$ і $\angle AOA' = \angle BOB'$.

1) Нехай точки A, B та O не лежать на одній прямій (мал. 42.6). Тоді $\angle AOB = \angle A'OB'$ (бо кожен із цих кутів дорівнює різниці кутів α і BOA'). Тому $\triangle AOB = \triangle A'OB'$ (за двома сторонами і кутом між ними), звідси $AB = A'B'$.

2) Нехай точки A, B та O лежать на одній прямій (мал. 42.7).



Мал. 42.6



Мал. 42.7

Тоді $AB = OB - OA = OB' - OA' = A'B'$.

Отже, в обох випадках $AB = A'B'$. ■

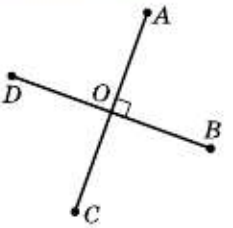
Що називають поворотом навколо точки O на кут α? ○ Що називають центром повороту; кутом повороту? ○ Доведіть, що перетворення повороту є переміщенням.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

42.1. У яку точку при повороті на кут 90° за годинниковою стрілкою навколо точки O (мал. 42.8) переходить точка:

1) B; 2) D; 3) A; 4) C?



Мал. 42.8

42.2. У яку точку при повороті на кут 90° проти годинникової стрілки навколо точки O (мал. 42.8) переходить точка:

1) A; 2) D; 3) B; 4) C?

42.3. Стрілки годинника показують 11 год. Який час покаже годинник, якщо хвилинна стрілка здійснить поворот на 120°?

42.4. Стрілки годинника показують 8 год. Який час покаже годинник, якщо хвилинна стрілка здійснить поворот на 60°?

2

42.5. Дано точки A та O. Побудуйте точку A', у яку переходить точка A при повороті навколо точки O:

1) за годинниковою стрілкою на 80°;

2) проти годинникової стрілки на 130°.

42.6. Дано точки B та O. Побудуйте точку B', у яку переходить точка B при повороті навколо точки O:

1) проти годинникової стрілки на 70°;

2) за годинниковою стрілкою на 100°.

42.7. У яку точку переходить точка $B(0; -3)$ при повороті відносно початку координат на:

1) 90° проти годинникової стрілки;

2) 90° за годинниковою стрілкою;

3) 180°?

42.8. У яку точку переходить точка $A(2; 0)$ при повороті відносно початку координат на:

1) 90° за годинниковою стрілкою;

2) 90° проти годинникової стрілки;

3) 180°?

3

42.9. Накресліть трикутник ABC. Виконайте поворот трикутника на 60° за годинниковою стрілкою навколо вершини B.

42.10. Накресліть трикутник ABC. Виконайте поворот трикутника на 110° проти годинникової стрілки навколо вершини C.

42.11. Побудуйте точки, у які переходять точки $A(3; -1)$, $B(-2; 2)$, $C(1; 2)$, $D(-4; -4)$ при повороті на 90° проти годинникової стрілки навколо початку координат. Укажіть координати одержаних точок.

42.12. Побудуйте точки, у які переходять точки $M(-4; 2)$, $N(1; -1)$, $K(4; 3)$, $L(-2; -2)$ при повороті на 90° за годинниковою стрілкою навколо початку координат. Укажіть координати одержаних точок.

42.13. На який найменший кут треба повернути квадрат відносно його центра симетрії, щоб він перейшов сам у себе?

42.14. 1) Точка $A(m; -3)$ переходить у точку $A'(n; 4)$ при повороті навколо початку координат на 90° за годинниковою стрілкою. Знайдіть m і n.

2) Обчисліть добуток mn, відтак дізнаєтеся, скільки діб провів на орбіті перший космонавт незалежної України Леонід Каденюк.

42.15. 1) Точка $B(4; m)$ переходить у точку $B'(-3; n)$ при повороті навколо початку координат на 90° проти годинникової стрілки. Знайдіть m і n.

2) Обчисліть суму $m + n$, відтак дізнаєтеся, скільки українок-науковиць було 2023 року включено до світового рейтингу «100 успішних жінок у науці».

42.16. Знайдіть координати точки A', у яку переходить точка $A(2; 0)$ при повороті навколо початку координат на кут 45° за годинниковою стрілкою.

42.17. Знайдіть координати точки B', у яку переходить точка $B(0; 2)$ при повороті навколо початку координат на кут 45° проти годинникової стрілки.

42.18. Дано відрізок AB. За допомогою циркуля та лінійки виконайте поворот навколо його середини на 120° за годинниковою стрілкою.

Вправи для повторення

42.19. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 25 см, а один з катетів – 20 см.

42.20. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 9 см і 13 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 84 см.

42.21. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 45°, $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$. Знайдіть $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

42.22. 1) Вектор $\vec{m}(-2; 3)$ відкладено від точки $L(4; 5)$. Знайдіть координати кінця вектора.

2) Вектор $\vec{m}(a; b)$ відкладено від точки $K(x; y)$. Знайдіть координати кінця вектора.

42.23. 1) Точка $M(4; -3)$ – кінець вектора $\vec{d}(-5; 0)$. Знайдіть координати початку вектора.

2) Точка $C(x'; y')$ – кінець вектора $\vec{d}(a; b)$. Знайдіть координати початку вектора.

Життєва математика

42.24. Аліса та Сергій виготовляли кільце для гри в баскетбол. Кільце має бути діаметром 18 дюймів. Якої довжини (із точністю до десятих см) потрібно взяти металевий дріт для виготовлення кільця, щоб воно відповідало вимогам гри?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

42.25. Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане навколо нього коло в точці D. Знайдіть довжини хорд DC і DB, якщо $DI = l$, де I – центр кола, вписаного у трикутник.

§ 43. Паралельне перенесення

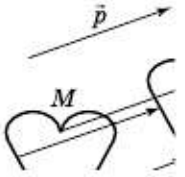
1. Означення паралельного перенесення. Формули паралельного перенесення

Нехай дано вектор $\vec{p}$.

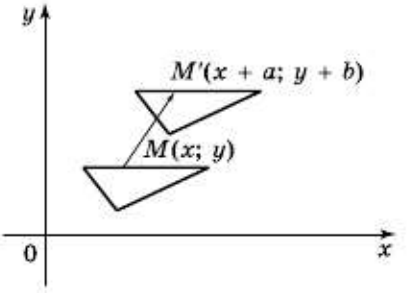
Паралельним перенесенням **на вектор $\vec{p}$ називають таке перетворення, за якого кожній точці M відповідає така точка M', що $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$** (мал. 43.1).

Якщо координати вектора відомі, то можна дати інше означення паралельного перенесення на вектор $\vec{p}(a; b)$.

Паралельним перенесенням **називають таке перетворення фігури, за якого її довільна точка $M(x; y)$ переходить у точку $M'(x + a; y + b)$, де a і b – одні й ті самі для всіх точок фігури** (мал. 43.2).



Мал. 43.1



Мал. 43.2

Якщо точка M' має координати $(x'; y')$, то отримаємо *формули паралельного перенесення*:

$$x' = x + a,\ y' = y + b.$$

Приклад 1. Паралельне перенесення задано формулами $x' = x + 2$, $y' = y - 3$. З'ясувати:
1) у яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $A(5; 4)$;
2) яка точка при цьому паралельному перенесенні переходить у точку $B'(-7; -3)$.

Розв'язання. 1) Нехай точка $A(5; 4)$ переходить у точку $A'(x'; y')$, тоді $x' = 5 + 2$, $x' = 7$, $y' = 4 - 3$, $y' = 1$. Отже, $A'(7; 1)$.
2) Нехай у точку $B'(-7; -3)$ перейшла точка $B(x; y)$, тоді $-7 = x + 2$, звідки $x = -9$ і $-3 = y - 3$, звідки $y = 0$. Отже, $B(-9; 0)$.

Відповідь: 1) $A'(7; 1)$; 2) $B(-9; 0)$.

Приклад 2. Знайти формули, що задають паралельне перенесення, за якого точка $C(2; -5)$ переходить у точку $C'(4; 9)$.

Розв'язання. Щоб знайти значення a і b, у формули паралельного перенесення $x' = x + a$ та $y' = y + b$ підставимо значення відповідних координат точок C і C'. Матимемо:
$4 = 2 + a$ і $9 = -5 + b$; звідки $a = 2$ і $b = 14$.
Отже, формули паралельного перенесення мають вигляд: $x' = x + 2$, $y' = y + 14$.
Відповідь: $x' = x + 2$, $y' = y + 14$.

2. Теорема про паралельне перенесення

Теорема (про паралельне перенесення). Паралельне перенесення є переміщенням.

Доведення. Нехай за деякого паралельного перенесення точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ фігури F переходять відповідно в точки $A'(x_1 + a; y_1 + b)$ і $B'(x_2 + a; y_2 + b)$ фігури F'.

Тоді за формулою відстані між двома точками:

$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$;

$A'B'^2 = (x_1 + a - (x_2 + a))^2 + (y_1 + b - (y_2 + b))^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

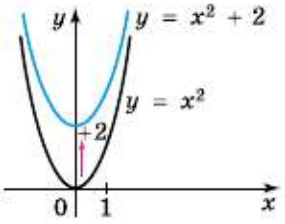
Отже, $AB^2 = A'B'^2$, а тому $AB = A'B'$. ■

Доведену властивість паралельного перенесення використовують у повсякденному житті, алгебрі тощо.

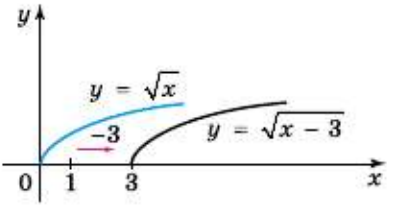
Однакові малюнки, що періодично повторюються на шпалерах, тканинах, вишитих рушниках; секції огорожі, паркетна підлога з малюнками, які повторюються; зовнішній вигляд поверхів багатоповерхівок є прикладами паралельного перенесення в повсякденному житті.

За допомогою паралельного перенесення будують графіки функцій в алгебрі. Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = x^2 + 2$, треба

для графіка функції $y = x^2$ виконати паралельне перенесення на дві одиниці вгору (мал. 43.3), а щоб побудувати графік функції $y = \sqrt{x - 3}$, треба графік функції $y = \sqrt{x}$ паралельно перенести на три одиниці праворуч (мал. 43.4).



Мал. 43.3



Мал. 43.4

Що називають паралельним перенесенням (сформулюйте два означення)? ○ Які формули задають паралельне перенесення? ○ Доведіть, що паралельне перенесення є переміщенням. ○ Наведіть приклади паралельного перенесення із життя. ○ Наведіть приклади паралельного перенесення в алгебрі.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

43.1. (*Усно.*) Які з тверджень правильні:

1) існує паралельне перенесення, за якого більша основа трапеції переходить у меншу;

2) за паралельного перенесення коло переходить у коло того самого радіуса;

3) за паралельного перенесення прямокутний трикутник переходить у рівносторонній;

4) існує паралельне перенесення, за якого сторона паралелограма переходить у паралельну їй сторону?

43.2. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 2$, $y' = y + 5$. У які точки при цьому паралельному перенесенні переходять точки:

1) $O(0; 0)$; 2) $A(3; -1)$; 3) $B(2; -5)$; 4) $C(10; 1)$?

43.3. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 1$, $y' = y - 2$. У які точки при цьому паралельному перенесенні переходять точки:

1) $O(0; 0)$; 2) $M(-2; 4)$; 3) $N(-1; 2)$; 4) $K(-5; 8)$?

43.4. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 3$, $y' = y - 7$. Які точки при цьому паралельному перенесенні переходять у точки:

1) $K'(2; 3)$; 2) $M'(3; -7)$;

3) $N'(0; 0)$; 4) $L'(4; -5)$?

43.5. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 3$, $y' = y + 7$. Які точки при цьому паралельному перенесенні переходять у точки:

1) $A'(2; 4)$; 2) $B'(-3; 7)$;

3) $C'(0; 0)$; 4) $D'(-3; 17)$?

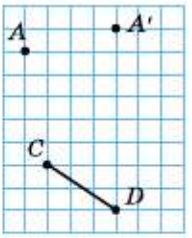
43.6. Запишіть формули паралельного перенесення, за якого точка A переходить у точку A', якщо:

1) $A(2; 7)$, $A'(-4; 5)$; 2) $A(-1; 3)$, $A'(2; -5)$.

43.7. Запишіть формули паралельного перенесення, за якого точка B переходить у точку B', якщо:

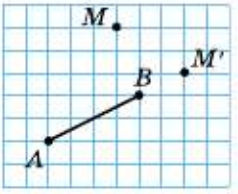
1) $B(-1; 2)$, $B'(0; -2)$; 2) $B(2; 4)$, $B'(5; 0)$.

43.8. За деякого паралельного перенесення точка A перейшла в точку A' (мал. 43.5). Перемалюйте малюнок у зошит і побудуйте фігуру, у яку при цьому паралельному перенесенні переходить відрізок CD.



Мал. 43.5

43.9. За деякого паралельного перенесення точка M перейшла в точку M' (мал. 43.6). Перемалюйте малюнок у зошит і побудуйте фігуру, у яку при цьому паралельному перенесенні переходить відрізок AB.



Мал. 43.6

43.10. Чи існує паралельне перенесення, за якого:

1) точка $A(2; -1)$ переходить у точку $B(4; -7)$, а точка $C(0; 2)$ – у точку $D(2; -3)$;

2) точка $M(4; -2)$ переходить у точку $N(0; -3)$, а точка $K(3; 0)$ – у точку $L(-1; -1)$?

43.11. Чи існує паралельне перенесення, за якого:

1) точка $C(0; 0)$ переходить у точку $D(4; 5)$, а точка $A(-1; 2)$ – у точку $B(2; 7)$;

2) точка $K(-1; -1)$ переходить у точку $L(2; -3)$, а точка $M(0; 2)$ – у точку $N(3; 0)$?

43.12. Запишіть рівняння кола, у яке переходить коло $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 15$ за паралельного перенесення, заданого формулами: $x' = x - 5$, $y' = y + 2$.

43.13. Запишіть рівняння кола, у яке переходить коло $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 7$ за паралельного перенесення, заданого формулами: $x' = x + 3$, $y' = y - 4$.

43.14. Запишіть рівняння прямої, у яку переходить пряма $x + 2y - 4 = 0$ за паралельного перенесення, заданого формулами: $x' = x + 1$, $y' = y - 2$.

43.15. Запишіть рівняння прямої, у яку переходить пряма $3x - y - 6 = 0$ за паралельного перенесення, заданого формулами: $x' = x - 2$, $y' = y + 3$.

43.16. Виконали паралельне перенесення прямої $2x - 5y - 10 = 0$. Запишіть рівняння прямої, що при цьому отримали, якщо вона проходить через точку:

1) $O(0; 0)$; 2) $A(2; -1)$.

43.17. Виконали паралельне перенесення прямої $3x - 2y + 6 = 0$. Запишіть рівняння прямої, що при цьому отримали, якщо вона проходить через точку: 1) $O(0; 0)$; 2) $B(4; -1)$.

Вправи для повторення

43.18. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 45°, а інший прямокутний трикутник є рівнобедреним. Чи подібні ці трикутники?

43.19. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 30°, а бічна сторона – 4 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони.

43.20. Знайдіть площу трапеції з основами 20 см і 12 см, якщо центр кола, описаного навколо цієї трапеції, лежить на більшій основі.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

43.21. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, якщо:

1) $\angle A = 50°$, $\angle B = \angle B_1 = 100°$, $\angle C_1 = 30°$;

2) $\angle C = \angle C_1 = 20°$, $AC = 2$ см, $BC = 5$ см, $A_1C_1 = 4$ см, $B_1C_1 = 10$ см;

3) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 12$ см, $A_1C_1 = 18$ см.

43.22. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = 3$, $P_{ABC} = 24$ см. Знайдіть $P_{A_1B_1C_1}$.

Життєва математика

43.23. У шкільній майстерні шаблони гайок мають форму правильних многокутників та кути 90°, 120° і 135° відповідно. Визначте форму гайок, для яких можна використати ці шаблони.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

43.24. Кожне з трьох рівних між собою кіл радіуса r дотикається до двох інших. Знайдіть площу трикутника, утвореного спільними дотичними до цих кіл.

§ 44. Перетворення подібності та його властивості. Подібність фігур

1. Означення перетворення подібності

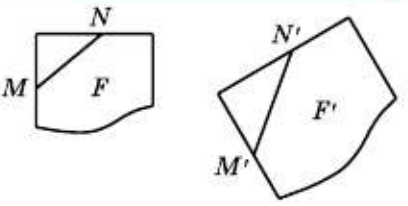
Раніше ми вже розглядали подібність трикутників. Поняття подібності можна ввести не тільки для трикутників, а й для довільних фігур.

Перетворення фігури F у фігуру F' називають *перетворенням подібності*, або *подібністю*, якщо при цьому перетворені відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли довільні точки M і N фігури F при перетворенні подібності переходять у точки M' і N' фігури F', то

$$M'N' = kMN,$$

де k – одне й те саме додатне число для всіх пар точок M і N (мал. 44.1). Це число k називають *коефіцієнтом подібності* фігури F' по відношенню до фігури F, або просто коефіцієнтом подібності фігур.



Мал. 44.1

2. Основні властивості перетворення подібності

Розглянемо основні *властивості перетворення подібності.*

1. Переміщення можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$.
2. При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їхнього взаємного розташування.

Доведення. 1) Нехай точки A, B і C лежать на одній прямій, причому точка B лежить між точками A і C. Тоді $AC = AB + BC$.

2) При перетворенні подібності точки A, B і C переходять відповідно в точки A', B' і C', причому $A'B' = k \cdot AB$, $B'C' = k \cdot BC$, $A'C' = k \cdot AC$.

3) Маємо:

$$A'C' = k \cdot AC = k(AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'.$$

З рівності $A'C' = A'B' + B'C'$ випливає, що точки A', B' і C' лежать на одній прямій, причому точка B' лежить між точками A' і C'. ■

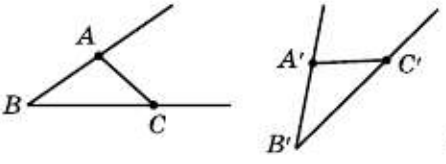
Наслідок. Перетворення подібності переводить прямі у прямі, промені – у промені, відрізки – у відрізки.

3. При перетворенні подібності кут переходить у рівний йому кут.

Доведення. Нехай $\angle ABC$ перетворенням подібності з коефіцієнтом переводиться в $\angle A'B'C'$ (мал. 44.2).

1) Тоді $A'B' = k \cdot AB$, $B'C' = k \cdot BC$, $A'C' = k \cdot AC$.

2) Тому $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (за трьома пропорційними сторонами).



Мал. 44.2

А отже, $\angle ABC = \angle A'B'C'$. ■

3. Означення подібних фігур

Дві фігури називають *подібними*, якщо вони переходять одна в одну при перетворенні подібності.

Якщо перетворенням подібності точки M і N фігури F переходять у точки M' і N' фігури F' і $M'N' = k \cdot MN$, то кажуть, що фігура F' подібна фігурі F *з коефіцієнтом* k, і записують так: $F' \sim F$ (читають: «фігура F' подібна фігурі F»), або $F' \overset{k}{\sim} F$, коли треба вказати коефіцієнт (читають: «фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k»).

Зауважимо, що введене раніше означення подібності трикутників не суперечить загальному означенню подібності фігур.

Подібні фігури трапляються нам у повсякденному житті. Подібними є, наприклад, фотознімки, надруковані з одного негатива, але за різних збільшень; зображення на кіноплівці й зображення на екрані; карти однієї місцевості різних масштабів тощо.

Масштаб карти (креслення), добре відомий вам з молодших класів, є коефіцієнтом подібності карти (креслення) по відношенню до реальних розмірів. Так, наприклад, масштаб 1 : 1000 означає, що одному сантиметру на карті відповідає 1000 см (або 10 м) на місцевості.

4. Основні властивості подібних фігур

Розглянемо основні *властивості подібних фігур.*

1. Кожна фігура подібна сама собі з коефіцієнтом 1.

2. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k, то фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$.

Доведення. Нехай фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k, а точки M і N фігури F переходять у точки M' і N' фігури F'.

Тоді $M'N' = k \cdot MN$, звідки $MN = \frac{1}{k} \cdot M'N'$.

Остання рівність означає, що фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$. ■

3. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k_1, а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом k_2, то фігура F'' подібна фігурі F з коефіцієнтом k_1k_2.

Доведення. 1) Нехай фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k_1, і довільні точки M і N фігури F переходять у точки M' і N' фігури F'. Тоді $M'N' = k_1 \cdot MN$.

2) Нехай фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом k_2, і точки M' і N' фігури F' переходять у точки M'' і N'' фігури F''. Тоді $M''N'' = k_2 \cdot M'N'$.

3) Маємо: $M''N'' = k_2 \cdot M'N' = k_2 \cdot k_1 MN = k_1 k_2 \cdot MN$.

Остання рівність означає, що фігура F'' подібна фігурі F з коефіцієнтом $k_1 k_2$. ■

4. У подібних многокутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні.

Ця властивість випливає із властивостей перетворення подібності.

5. Правильні многокутники з однаковою кількістю сторін подібні.

Доведіть цей наслідок самостійно.

Зауважимо, що при позначенні подібних многокутників (як і при позначенні подібних трикутників) має значення порядок слідування вершин у назвах.

Приклад 1. Довести, що периметри подібних многокутників відносяться як відповідні сторони цих многокутників.

Розв'язання. 1) Нехай $A_1A_2 \ldots A_n \sim A_1'A_2' \ldots A_n'$ і $A_1'A_2' = k \cdot A_1A_2$, $A_2'A_3' = k \cdot A_2A_3$, …, $A_n'A_1' = k \cdot A_nA_1$.

Тоді $\dfrac{A_1'A_2'}{A_1A_2} = \dfrac{A_2'A_3'}{A_2A_3} = \ldots = \dfrac{A_n'A_1'}{A_nA_1} = k$.

$$2)\ \frac{P_{A_1'A_2'\ldots A_n'}}{P_{A_1A_2\ldots A_n}} = \frac{A_1'A_2' + A_2'A_3' + \ldots + A_n'A_1'}{A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1} =$$

$$= \frac{k \cdot A_1A_2 + k \cdot A_2A_3 + \ldots + k \cdot A_nA_1}{A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1} =$$

$$= \frac{k(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1)}{A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1} = k. \ ■$$

Приклад 2. Сторони чотирикутника відносяться як $3:4:5:6$. Знайти сторони подібного йому чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.

Розв'язання. 1) Сторони чотирикутника, подібного даному, відносяться так само, як сторони даного чотирикутника, тобто $3:4:5:6$. Позначимо сторони чотирикутника, периметр якого дорівнює 72 см, відповідно $3x$ см, $4x$ см, $5x$ см і $6x$ см.

2) Маємо рівняння: $3x + 4x + 5x + 6x = 72$, звідки $x = 4$ (см).

3) Тепер знайдемо сторони чотирикутника:

$3 \cdot 4 = 12$ (см), $4 \cdot 4 = 16$ (см), $5 \cdot 4 = 20$ (см), $6 \cdot 4 = 24$ (см).

Відповідь: 12 см, 16 см, 20 см, 24 см.

Яке перетворення називають перетворенням подібності? ○ Що називають коефіцієнтом подібності? ○ Сформулюйте і доведіть властивості перетворення подібності. ○ Сформулюйте наслідок із властивості 2. ○ Які фігури називають подібними? ○ Наведіть приклади подібних фігур із повсякденного життя. ○ Сформулюйте і доведіть властивості подібних фігур.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

44.1. (*Усно.*) Чотирикутники $ABCD$ і $KLMN$ подібні. Заповніть пропуски:

1) $\angle A = \ldots$; 2) $\angle C = \ldots$;
3) $\angle D = \ldots$; 4) $\angle B = \ldots$.

44.2. Чотирикутники $ABCD$ і $KLMN$ подібні, $\frac{AB}{KL} = 3$. Чому дорівнює відношення:

1) $\frac{BC}{LM}$; 2) $\frac{CD}{MN}$; 3) $\frac{AD}{KN}$?

44.3. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом 7. З яким коефіцієнтом фігура F подібна фігурі F'?

44.4. Фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$. З яким коефіцієнтом фігура F' подібна фігурі F?

44.5. Фігура F' подібна фігурі F'' з коефіцієнтом $\frac{1}{5}$, а фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. З яким коефіцієнтом фігура F подібна фігурі F''?

44.6. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом 2, а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом 4. З яким коефіцієнтом фігура F'' подібна фігурі F?

44.7. Чи подібні між собою:

1) два квадрати; 2) два правильних десятикутники?

44.8. Чи подібні між собою:

1) два рівносторонніх трикутники;
2) два правильних шестикутники?

2

44.9. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом $\frac{3}{4}$. З яким коефіцієнтом фігура F'' подібна фігурі F', якщо фігури F і F'' рівні?

44.10. Периметри двох правильних п'ятикутників відносяться як $2:3$. Сторона п'ятикутника з меншим периметром дорівнює 12 см. Знайдіть сторону п'ятикутника з більшим периметром.

44.11. Сторони двох квадратів відносяться як $4:3$. Знайдіть периметр квадрата, сторона якого менша від сторони іншого, якщо периметр другого квадрата дорівнює 24 см.

44.12. На малюнку, виконаному в масштабі 1 : 1000, земельну ділянку зображено прямокутником зі сторонами 3 см і 4 см. Знайдіть площу цієї ділянки.

44.13. На плані земельної ділянки у масштабі 1 : 2000 відстань між точками дорівнює 3,7 см. Обчисліть відповідну відстань на місцевості.

44.14. Довжина кабінету математики – 8 м, а ширина – 5 м. Накресліть план кабінету в масштабі 1 : 200.

44.15. Довжина кімнати дорівнює 4 м, а ширина – 3 м. Накресліть план кімнати в масштабі 1 : 100.

44.16. Відстань між двома селами на місцевості – 20 км, а на карті – 2 см. Знайдіть масштаб карти.

44.17. Відстань між двома містами на місцевості – 350 км, а на карті – 3,5 см. Знайдіть масштаб карти.

44.18. Чотирикутники $ABCD$ і $A'B'C'D'$ подібні, $\angle A = 30°$, $\angle B' = 90°$, $\angle C = 130°$. Знайдіть невідомі кути обох чотирикутників.

44.19. Чотирикутники $KLMN$ і $K'L'M'N'$ подібні, $\angle K' = 20°$, $\angle L = 100°$, $\angle M' = 140°$. Знайдіть невідомі кути обох чотирикутників.

44.20. Чи можна стверджувати, що два чотирикутники подібні, якщо кути одного з них відповідно дорівнюють кутам іншого? Наведіть приклади.

44.21. Чи можна стверджувати, що два чотирикутники подібні, якщо сторони одного з них відповідно пропорційні сторонам другого? Наведіть приклади.

44.22. Сторони чотирикутника відносяться як 3 : 4 : 5 : 6. Знайдіть сторони подібного йому чотирикутника, якщо в нього:

1) найбільша сторона дорівнює 12 см;

2) різниця найбільшої та найменшої сторін дорівнює 18 см;

3) периметр дорівнює 90 см.

44.23. Сторони п'ятикутника відносяться як 3 : 4 : 5 : 6 : 7. Знайдіть сторони подібного йому п'ятикутника, якщо в нього:

1) найменша сторона дорівнює 15 см;

2) сума найбільшої та найменшої сторін дорівнює 80 см;

3) периметр дорівнює 50 см.

44.24. Доведіть, що перетворення подібності переводить прямокутник у прямокутник, сторони якого пропорційні сторонам даного.

44.25. Два прямокутники подібні. Сторони одного з них дорівнюють 4 см і 6 см, а одна зі сторін другого – 12 см. Знайдіть іншу сторону другого прямокутника. Скільки розв'язків має задача?

44.26. Два прямокутники подібні. Сторони одного з них дорівнюють 3 см і 6 см, а одна зі сторін другого – 18 см. Знайдіть іншу сторону другого прямокутника. Скільки розв'язків має задача?

44.27. (*Усно.*) Що означає масштаб 10 : 1, 100 : 1, 1000 : 1? У яких випадках використовується цей масштаб?

44.28. $ABCD$ – прямокутник, $AB = a$, $BC = b$. Відрізок FE, де точка F належить AB, а точка E належить DC, відтинає прямокутник $CBFE$, подібний даному. Знайдіть сторону BF цього прямокутника.

44.29. Доведіть, що перетворення подібності переводить ромб у ромб, кути якого дорівнюють кутам даного.

44.30. Чи подібні два ромби, якщо в одного з них менша діагональ дорівнює стороні, а в другого – більша діагональ у $\sqrt{3}$ разів більша за сторону?

44.31. Доведіть, що перетворення подібності переводить коло в коло.

44.32. Периметри подібних п'ятикутників відносяться як 2 : 3, а сума їхніх найбільших сторін дорівнює 30 см. Знайдіть сторони обох п'ятикутників, якщо відношення сторін одного з них дорівнює 2 : 2 : 3 : 4 : 6.

44.33. Периметри подібних чотирикутників відносяться як 4 : 3, а різниця їхніх найбільших сторін дорівнює 5 см. Знайдіть сторони обох чотирикутників, якщо відношення сторін одного з них дорівнює 2 : 2 : 3 : 5.

Вправи для повторення

44.34. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо інші його сторони дорівнюють:

1) 17 см і 8 см;

2) $13b$ см і $5b$ см.

44.35. Дано відрізок AB і точку O, що йому належить, але не є його серединою. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно точки O.

44.36. Периметр паралелограма дорівнює 50 см, а його сторони відносяться як 2 : 3. Знайдіть площу паралелограма, якщо один з його кутів на 60° більший за інший.

44.37. Хорда $8\sqrt{2}$ см завдовжки стягує дугу кола, градусна міра якої 90°. Знайдіть довжину кола та площу круга, обмеженого цим колом.

44.38. Знайдіть площу квадрата, якщо сума радіусів його вписаного й описаного кіл дорівнює 7 см.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

44.39. 1) Сторона квадрата втричі більша за сторону іншого квадрата. У скільки разів площа першого квадрата більша за площу другого?

2) Площа першого квадрата у 25 разів менша від площі другого. У скільки разів сторона першого квадрата менша від сторони другого?

44.40. 1) Сторона правильного трикутника вдвічі менша від сторони іншого правильного трикутника. У скільки разів площа першого трикутника менша від площі іншого?

2) Площа одного правильного трикутника у 16 разів більша за площу іншого правильного трикутника. У скільки разів сторона першого трикутника більша за сторону іншого?

Життєва математика

44.41. Скільки спиць у колесі, якщо кути між сусідніми спицями дорівнюють 150°?

Цікаві задачі — поміркуй одначе

44.42. (*Національна олімпіада Болгарії, 1981 р.*) Бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині C трикутника ABC перетинають пряму AB у точках L і M відповідно. Доведіть, що якщо $CL = CM$, то $AC^2 + BC^2 = 4R^2$, де R – радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

§ 45. Площі подібних фігур

1. Теорема про площі подібних многокутників та її наслідки

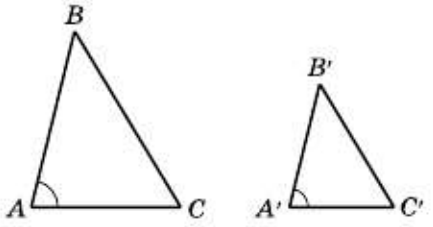
Теорема (про площі подібних многокутників). Площі подібних многокутників відносяться як квадрати їхніх відповідних лінійних розмірів.

Доведення. 1) Спочатку доведемо теорему для трикутників.

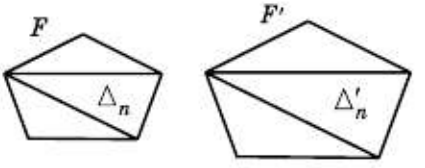
Нехай $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k$, $\angle A = \angle A'$ (мал. 45.1).

Тоді $AB = k \cdot A'B'$, $AC = k \cdot A'C'$ і

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A}{\frac{1}{2} A'B' \cdot A'C' \cdot \sin A'} = \frac{k \cdot A'B' \cdot k \cdot A'C'}{A'B' \cdot A'C'} = k^2.$$



Мал. 45.1



Мал. 45.2

2) Розглянемо два n-кутники F і F', подібних з коефіцієнтом k. Розіб'ємо фігуру F діагоналями, що виходять з однієї вершини, на скінченну кількість трикутників $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, ..., $\triangle_n$ (мал. 45.2). Перетворенням подібності ці трикутники перейдуть відповідно у трикутники $\triangle'_1$, $\triangle'_2$, $\triangle'_3$, ..., $\triangle'_n$ фігури F'. Тоді:

$$\frac{S_F}{S_{F'}} = \frac{S_{\triangle_1} + S_{\triangle_2} + \ldots + S_{\triangle_n}}{S_{\triangle'_1} + S_{\triangle'_2} + \ldots + S_{\triangle'_n}} = \frac{k^2 S_{\triangle'_1} + k^2 S_{\triangle'_2} + \ldots + k^2 S_{\triangle'_n}}{S_{\triangle'_1} + S_{\triangle'_2} + \ldots + S_{\triangle'_n}} =$$

$$= \frac{k^2 (S_{\triangle'_1} + S_{\triangle'_2} + \ldots + S_{\triangle'_n})}{S_{\triangle'_1} + S_{\triangle'_2} + \ldots + S_{\triangle'_n}} = k^2. \blacksquare$$

Наслідок. Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Цей наслідок є очевидним, оскільки відношення відповідних лінійних розмірів многокутника дорівнює коефіцієнту подібності.

Узагалі, можна довести, що

відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Для многокутників це твердження вже доведено, для кругів виконайте доведення самостійно. Якщо фігури не є многокутниками, кругами або частинами кругів, то доведення є досить громіздким. Тому ми його не наводимо.

2. Застосування теореми про площі подібних многокутників до розв'язування задач

Розглянемо задачі, під час розв'язування яких використовують теорему про площі подібних многокутників.

Приклад 1. Сторони двох правильних трикутників відносяться як 4 : 5. Як відносяться їхні площі?

Розв'язання. Оскільки правильні трикутники подібні, то можна використати теорему про площі подібних многокутників. Отже, відношення площ трикутників дорівнює:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} = 16 : 25.$$

Відповідь: 16 : 25.

Приклад 2. Площі двох подібних многокутників відносяться як 4 : 9. Як відносяться периметри цих многокутників?

Розв'язання. 1) Нехай a_1 і a_2 – відповідні лінійні розміри многокутників. Тоді:

$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, звідки $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3} = 2 : 3$.

2) Оскільки периметри подібних многокутників відносяться як відповідні сторони цих многокутників (див. приклад 1 § 44), то відношення периметрів многокутників також дорівнює 2 : 3.

Відповідь: 2 : 3.

Приклад 3. Площа земельної ділянки на карті становить 1,2 см^2, масштаб карти дорівнює 1 : 1000. Яка площа земельної ділянки насправді?

Розв'язання. 1) Нехай S см^2 – площа ділянки.

2) Оскільки масштаб є коефіцієнтом подібності карти по відношенню до земельної ділянки, то $\frac{1,2}{S} = \left(\frac{1}{1000}\right)^2$.

Тоді $S = 1,2 \cdot 1000^2 = 1\ 200\ 000$ (см^2) $= 120$ (м^2).

Відповідь: 120 м^2.

Сформулюйте та доведіть теорему про площі подібних многокутників. ○ Сформулюйте наслідок із цієї теореми. ○ Як відносяться площі подібних фігур?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **45.1.** Сторона першого квадрата втричі більша за сторону другого. У скільки разів площа другого квадрата менша від площі першого?

45.2. Сторона першого правильного трикутника вдвічі менша від сторони другого. У скільки разів площа другого правильного трикутника більша за площу першого?

45.3. Сторони двох правильних п'ятикутників відносяться як 4 : 7. Як відносяться їхні площі?

45.4. Сторони двох правильних шестикутників відносяться як 5 : 3. Як відносяться їхні площі?

2 **45.5.** Площі двох подібних многокутників відносяться як 4 : 3. Як відносяться їхні відповідні лінійні розміри?

45.6. Площі двох подібних многокутників відносяться як 7 : 9. Як відносяться їхні відповідні лінійні розміри?

45.7. Площі двох правильних трикутників відносяться як 25 : 36. Як відносяться відповідні медіани цих трикутників?

45.8. Площі двох квадратів відносяться як 9 : 4. Як відносяться діагоналі цих квадратів?

3

45.9. Сторона одного квадрата дорівнює діагоналі іншого квадрата. Як відносяться площі цих квадратів?

45.10. Висота одного правильного трикутника дорівнює стороні іншого правильного трикутника. Як відносяться площі цих трикутників?

45.11. Відповідні сторони двох подібних многокутників відносяться як $2:3$. Площа першого з них становить 48 см^2. Знайдіть площу другого многокутника.

45.12. Площі двох подібних многокутників відносяться як $25:4$. Одна зі сторін першого многокутника дорівнює 15 см. Знайдіть відповідну їй сторону другого многокутника.

45.13. Периметри двох подібних многокутників відносяться як $3:4$, а сума їхніх площ – 50 см^2. Знайдіть площу кожного із многокутників.

45.14. Різниця площ двох подібних многокутників дорівнює 45 см^2. Знайдіть площу кожного із многокутників, якщо їхні відповідні сторони відносяться як $5:4$.

4

45.15. Площа лісу дорівнює 20 га, а на карті ліс займає площу 20 см^2. Знайдіть масштаб карти.

45.16. План парку виконано в масштабі $1:1000$. У скільки разів площа парку більша за площу цього плану?

45.17. Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC, ділить його на дві рівновеликі фігури. Знайдіть відрізок цієї прямої, що міститься між сторонами AC і CB трикутника, якщо $AB = 4\sqrt{2}$ см.

45.18. Висота трикутника ABC, що виходить із вершини C, дорівнює $6\sqrt{2}$ см. На якій відстані від точки C треба провести пряму, паралельну стороні AB, щоб ця пряма розділила трикутник на дві рівновеликі частини?

Вправи для повторення

45.19. При переміщенні рівносторонній трикутник MNK перейшов у трикутник $M'N'K'$. Знайдіть кути трикутника $M'N'K'$.

45.20. Периметри подібних трикутників відносяться як $3:5$, а сума їхніх найменших сторін дорівнює 32 см. Знайдіть сторони кожного з трикутників, якщо сторони одного з них відносяться як $4:7:8$.

Життєва математика

45.21. При піднятті води з колодязя вал робить 14 оборотів. Знайдіть глибину колодязя, якщо діаметр вала дорівнює 25 см. (Для спрощення обчислень прийміть $\pi \approx 3$.)

Цікаві задачі – поміркуй одначе

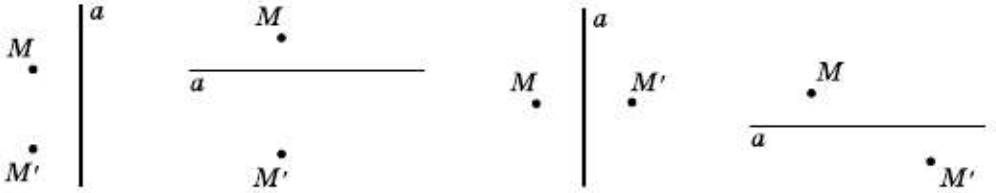
45.22. Спільну хорду двох кіл, що перетинаються, видно з їхнього центра під кутами $90°$ і $60°$. Знайдіть радіуси кіл, якщо відстань між їхніми центрами дорівнює $\sqrt{3} + 1$. Скільки випадків слід розглянути?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 9 (§§39–45)

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

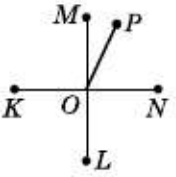
1

1. На якому з малюнків точки M і M' симетричні відносно прямої a?



А. **Б.** **В.** **Г.**

2. У яку точку при повороті навколо точки O на кут $90°$ проти годинникової стрілки переходить точка N (мал. 1)?



Мал. 1

А. K **Б.** M **В.** P **Г.** L

3. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 1$, $y' = y + 3$. У яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $T(2; -5)$?

А. $T'(3; 8)$ **Б.** $T'(-2; 1)$ **В.** $T'(5; -6)$ **Г.** $T'(1; -2)$

2

4. При переміщенні трикутник ABC перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть кут A' трикутника $A'B'C'$, якщо трикутник ABC є рівнобедреним і його кут при вершині C дорівнює $140°$.

А. $20°$ **Б.** $40°$ **В.** $140°$ **Г.** $100°$

5. Укажіть координати точки, що симетрична точці $M(-1; 5)$ відносно початку координат.

А. $(5; -1)$ **Б.** $(1; 5)$ **В.** $(-1; -5)$ **Г.** $(1; -5)$

6. Медіани двох правильних трикутників відносяться як $2 : 7$. Як відносяться площі цих трикутників?

А. $4 : 7$ **Б.** $2 : 7$ **В.** $4 : 49$ **Г.** $2 : 49$

3

7. Точки $A(-2; y)$ і $B(x; 5)$ симетричні відносно осі абсцис. Знайдіть x та y.

А. $x = -2$, $y = 5$ **Б.** $x = 2$, $y = 5$

В. $x = -2$, $y = -5$ **Г.** $x = 2$, $y = -5$

8. При паралельному перенесенні точка $A(-2; 3)$ переходить у точку $A'(4; 0)$. У яку точку при такому паралельному перенесенні перейде точка $B(3; -1)$?

А. $B'(-3; 2)$ **Б.** $B'(9; -4)$ **В.** $B'(-9; 4)$ **Г.** $B'(3; -2)$

9. Сторони п'ятикутника відносяться як $3 : 4 : 5 : 6 : 7$. Знайдіть найменшу сторону подібного йому п'ятикутника, периметр якого дорівнює 75 см.

А. 3 см **Б.** 12 см **В.** 21 см **Г.** 9 см

4 **10.** Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $x - 2y - 10 = 0$ відносно початку координат.

А. $x - 2y + 10 = 0$ **Б.** $x + 2y - 10 = 0$
В. $x + 2y + 10 = 0$ **Г.** $x - 2y = 0$

11. Виконали паралельне перенесення прямої $3x - y = 0$. Запишіть рівняння цієї прямої, якщо вона проходить через точку $M(-1; 4)$.

А. $x - 3y + 13 = 0$ **Б.** $3x - y + 7 = 0$
В. $3x - y - 7 = 0$ **Г.** $3x + y - 1 = 0$

12. Периметри двох подібних трикутників відносяться як $2:3$, а сума їхніх найбільших сторін дорівнює 30 см. Знайдіть периметр другого трикутника, якщо сторони першого відносяться як $4:5:6$.

А. 30 см **Б.** 40 см **В.** 45 см **Г.** 60 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

2 **13.** Задано точки $A(-4; 3)$, $B(6; -1)$, $C(4; -3)$, $D(6; 1)$. До кожного початку речення (1–3) підберіть його закінчення (А–Г).

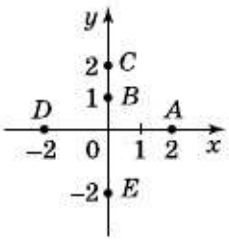
Початок речення	*Закінчення речення*
1. Точки A і C ...	**А.** симетричні відносно осі абсцис
2. Точки B і C ...	**Б.** симетричні відносно осі ординат
3. Точки B і D ...	**В.** симетричні відносно початку координат
	Г. симетричні відносно точки $O(5; -2)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 39–45

1 **1.** Дано пряму a і точку M, що їй не належить. Побудуйте точку M', симетричну точці M відносно прямої a.

2. У яку точку при повороті навколо точки O на кут 90° проти годинникової стрілки перейде точка A (мал. 1)?

3. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 3$, $y' = y - 2$. У яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $L(-3; 8)$?



Мал. 1

2 **4.** При переміщенні трикутник ABC перейшов у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть кути трикутника $A'B'C'$, якщо трикутник ABC рівнобедрений з основою AC, а кут B дорівнює 40°.

5. Дано відрізок MN, $M(-4; 2)$, $N(-2; 5)$. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку MN відносно початку координат, і знайдіть координати його кінців.

6. Площі двох правильних трикутників відносяться як 9 : 4. Як відносяться висоти цих трикутників?

3 **7.** Точки $A(x; -6)$ і $B(4; y)$ симетричні відносно осі ординат. Знайдіть x та y.

8. Сторони чотирикутника відносяться як 2 : 3 : 4 : 6. Знайдіть сторони подібного йому чотирикутника, периметр якого дорівнює 45 см.

4 **9.** Запишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $3x - 4y - 24 = 0$ відносно початку координат.

Додаткові завдання

4 **10.** Периметри двох подібних п'ятикутників відносяться як 3 : 4, а сума їхніх найменших сторін дорівнює 28 см. Знайдіть сторони кожного з п'ятикутників, якщо сторони одного з них відносяться як 2 : 5 : 6 : 7 : 9.

11. Виконали паралельне перенесення прямої $2x + y - 8 = 0$. Запишіть рівняння прямої, яку при цьому отримали, якщо вона проходить через точку $A(5; 1)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 9

До § 39

1 **1.** При переміщенні відрізок AB перейшов у відрізок $A'B'$. Чи рівні між собою відрізки AB і $A'B'$?

2. При переміщенні фігура F перейшла у фігуру F'. При другому переміщенні фігура F' перейшла у фігуру F''. Чи рівні між собою фігури F і F''?

2 **3.** $ABCD$ – квадрат. Чи існує переміщення, яке переводить:

1) сторону AB у сторону BC;
2) кут ABC у кут BCD?

4. Три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника. Чи існує переміщення, яке переводить перший трикутник у другий?

3 **5.** Чи рівні між собою два квадрати, якщо:

1) рівні їхні периметри;
2) рівні їхні площі;
3) діагональ одного з них дорівнює діагоналі другого;
4) діагональ одного з них дорівнює стороні другого?

6. Периметри двох ромбів рівні. Чи завжди існує переміщення, яке переводить один із них у другий?

4 **7.** Коло із центром у точці O описано навколо квадрата. Як задати відповідність між точками кола і квадрата так, щоб ця відповідність була перетворенням фігур?

8. Чи існує переміщення, яке переводить кут BAC у кут BCA, якщо $A(2; -3)$, $B(-2; -6)$, $C(-5; -2)$?

До § 40

9. Побудуйте точку $A(-2; 5)$ і точку, їй симетричну відносно початку координат.

10. Дано відрізок AB і точку O. Побудуйте відрізок, симетричний відрізку AB відносно точки O, якщо:

1) точка O не належить відрізку AB;

2) точка O належить відрізку AB.

11. Чи симетричні точки A і A' відносно початку координат, якщо:
1) $A(4; -5)$ і $A'(-4; -5)$; 2) $A(-3; 2)$ і $A'(3; -2)$?

12. Знайдіть координати точки A', симетричної точці $A(-4; 5)$ відносно точки $O(2; -9)$.

13. Чи може пряма при симетрії відносно точки перейти сама в себе?

14. Точки A і A' симетричні відносно початку координат. Знайдіть довжину відрізка AA', якщо $A(-3; 4)$.

15. Запишіть рівняння прямої, у яку при симетрії відносно початку координат переходить пряма:

1) $x = 3$;

2) $y = -2$.

16. Відрізки AB і CD симетричні відносно точки O. Доведіть, що прямі AB і CD паралельні.

17. Чи може точка перетину діагоналей трапеції бути її центром симетрії?

18. Побудуйте відрізок, серединою якого є дана точка, а кінці лежать на двох даних прямих, що перетинаються.

19. Дано точки A та O. Використовуючи лише циркуль, побудуйте точку A', у яку переходить точка A при симетрії відносно точки O.

До § 41

20. Побудуйте точку $A(3; -4)$ і точки, симетричні точці A відносно координатних осей.

21. Побудуйте коло радіуса 3 см і пряму, що його не перетинає. Побудуйте коло, симетричне даному відносно цієї прямої.

22. Накресліть тупокутний трикутник ABC з тупим кутом C. Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої BC.

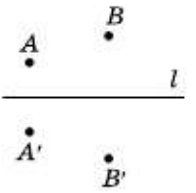
23. На кожній зі сторін кута позначили по точці на однаковій відстані від його вершини. Доведіть, що ці точки симетричні відносно прямої, яка містить бісектрису кута.

24. Складіть рівняння кола, симетричного відносно осі абсцис колу з радіусом 2 і центром у точці $O(-2; 3)$.

25. Осі координат є осями симетрії прямокутника. Одна з його вершин має координати (−3; 4). Знайдіть координати інших вершин прямокутника.

4 **26.** Прямі AC і BD – осі симетрії чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що $ABCD$ – ромб.

27. Точки A і A', B і B' попарно симетричні відносно прямої l (мал. 1). Доведіть, що навколо чотирикутника $ABB'A'$ можна описати коло.



Мал. 1

28. Доведіть, що фігура, яка має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, має і центр симетрії.

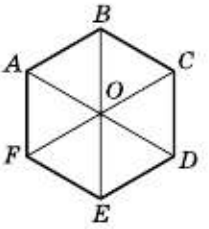
29. Точки A і B лежать по один бік від прямої l. Знайдіть на цій прямій таку точку C, щоб значення суми $AC + CB$ було найменшим.

До § 42

1 **30.** $ABCDEF$ – правильний шестикутник (мал. 2). У яку точку при повороті навколо точки O:

1) на кут 60° за годинниковою стрілкою перейде точка A; точка C;

2) на кут 120° проти годинникової стрілки перейде точка E; точка B?



Мал. 2

2 **31.** Дано відрізок AB і точку O, яка йому не належить. Побудуйте відрізок $A'B'$, у який перейде відрізок AB при повороті навколо точки O:

1) на 90° проти годинникової стрілки;

2) на 20° за годинниковою стрілкою.

32. У яку точку переходить точка $C(-5; 0)$ при повороті навколо початку координат:

1) на 90° за годинниковою стрілкою;

2) на 90° проти годинникової стрілки;

3) на 180°?

3 **33.** Побудуйте фігуру, у яку переходить квадрат при повороті навколо точки перетину його діагоналей на 45° за годинниковою стрілкою.

34. У результаті повороту навколо точки A рівносторонній трикутник ABC перейшов у трикутник ACD. На який кут виконали поворот?

4 **35.** Знайдіть координати точки C', у яку перейде точка $C(2; 0)$ при повороті навколо початку координат на кут 60° проти годинникової стрілки.

36. Складіть рівняння прямої, яку отримають у результаті повороту прямої $2x - y + 1 = 0$ навколо початку координат на кут 90°:

1) за годинниковою стрілкою;

2) проти годинникової стрілки.

37. Дано відрізок AB. За допомогою тільки циркуля та лінійки без поділок виконайте поворот навколо його середини на кут 135° за годинниковою стрілкою.

До § 43

38. Які з тверджень правильні:

1) існує паралельне перенесення, за якого одна бічна сторона трикутника переходить в іншу його бічну сторону;

2) при паралельному перенесенні зберігається градусна міра кута;

3) існує паралельне перенесення, за якого сторона ромба переходить у протилежну сторону;

4) існує паралельне перенесення, за якого квадрат переходить у ромб, жоден з кутів якого не є прямим?

39. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 3$, $y' = y + 2$. У які точки при цьому паралельному перенесенні перейдуть кінці відрізка AB, якщо:

1) $A(3; -2)$, $B(0; 0)$;

2) $A(2; 5)$, $B(1; -3)$?

40. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 3$, $y' = y - 5$. При цьому паралельному перенесенні трикутник ABC переходить у трикутник $A'B'C'$. Знайдіть координати вершин трикутника ABC, якщо $A'(3; -5)$, $B'(0; 0)$, $C'(2; -7)$.

41. За паралельного перенесення точка $A(2; -7)$ перейшла в точку $A'(-3; 5)$.

1) Запишіть формули цього паралельного перенесення.

2) У яку точку при цьому паралельному перенесенні переходить точка $A'(-3; 5)$?

42. Дано точки $A(2; 5)$, $B(-3; 1)$, $C(5; -13)$. Запишіть формули паралельного перенесення, за якого образом точки A є середина відрізка BC.

43. Дано трикутник з вершинами в точках $A(-3; 5)$, $B(4; 7)$, $C(-1; 2)$. Виконайте таке паралельне перенесення трикутника, за якого точка A переходить у точку C. Зробіть малюнок і запишіть координати вершин отриманого трикутника.

44. Дано коло із центром у точці $O(-1; 2)$, яке проходить через точку $B(3; 5)$. Запишіть рівняння кола, у яке переходить дане коло при паралельному перенесенні, що задано формулами: $x' = x$, $y' = y + 2$.

45. При паралельному перенесенні точка $A(5; -2)$ перейшла в точку $A'(4; 0)$. Запишіть рівняння образу кривої $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$ при такому паралельному перенесенні та побудуйте його.

46. Вершини трикутника ABC мають координати $A(0; 4)$, $B(3; 0)$, $C(3; 4)$. Після паралельного перенесення центр вписаного у трикутник кола перейшов у початок координат. У яку точку перейшов центр кола, описаного навколо трикутника?

До § 44

1 **47.** Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом $\frac{2}{3}$. З яким коефіцієнтом фігура F подібна фігурі F'?

48. Фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом $\frac{2}{3}$, а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{3}{4}$. З яким коефіцієнтом фігура F'' подібна фігурі F?

2 **49.** Периметри двох правильних трикутників відносяться як 5 : 6. Сторона трикутника з меншим периметром дорівнює 50 см. Знайдіть сторону трикутника, периметр якого більший.

50. Довжина газопроводу – 450 км. Зобразіть цей газопровід відрізком у масштабі 1 : 10 000 000.

51. Чотирикутник $A'B'C'D'$ подібний чотирикутнику $ABCD$ з коефіцієнтом 2, $AB = 5$ см, $B'C' = 12$ см, $CD = 7$ см, $A'D' = 4$ см. Знайдіть невідомі сторони обох чотирикутників.

3 **52.** Сторони шестикутника відносяться як 3 : 4 : 5 : 5 : 6 : 7. Знайдіть сторони подібного йому шестикутника, якщо у нього:

1) сума двох рівних сторін дорівнює 40 см;

2) різниця найбільшої та найменшої сторін дорівнює 8 см;

3) периметр дорівнює 90 см.

53. Чи подібні прямокутники, якщо сторони одного з них дорівнюють 4 см і 3 см, а сторона другого дорівнює 12 см і його діагональ дорівнює 15 см?

54. В одному з ромбів один з кутів утричі більший за інший, а у другому ромбі – один з кутів на 80° більший за інший. Чи подібні ці ромби?

4 **55.** Рамка для фотографій – прямокутної форми (прямокутник не є квадратом). Чи подібні зовнішній і внутрішній прямокутники цієї рамки, якщо ширина рамки скрізь однакова?

56. Доведіть, що перетворення подібності переводить паралельні прямі в паралельні прямі.

57. Середня лінія ділить трапецію на дві трапеції.

1) Чи подібні між собою трапеції, що утворилися?

2) Чи подібна будь-яка із цих трапецій даній?

58. Два многокутники розбито на однакову кількість попарно подібних між собою трикутників. Чи можна стверджувати, що ці многокутники подібні?

59. У трапеції з основами a і b проведено відрізок, паралельний основам трапеції. Цей відрізок розбиває трапецію на дві трапеції, подібні між собою. Знайдіть довжину цього відрізка.

До § 45

1 **60.** Сторона одного правильного шестикутника у 4 рази більша за сторону другого. У скільки разів площа першого шестикутника більша за площу другого?

61. Сторони двох правильних десятикутників відносяться як 2 : 9. Як відносяться їхні площі?

2 **62.** Площі двох квадратів відносяться як 4 : 7. Як відносяться їхні периметри?

63. Площі двох правильних трикутників відносяться як 16 : 9. Як відносяться радіуси кіл, описаних навколо цих трикутників?

64. Яку частину площі даного трикутника становить площа трикутника, що відтинається від даного його середньою лінією?

3 **65.** Сторони двох квадратів відносяться як 3 : 4, а площа одного з них дорівнює 144 см^2. Знайдіть площу другого квадрата. Скільки розв'язків має задача?

66. Менша діагональ одного правильного шестикутника дорівнює стороні другого. Знайдіть відношення площ цих шестикутників.

67. Площі двох квадратів відносяться як 9 : 4, а сума їхніх периметрів – 80 см. Знайдіть сторону кожного з квадратів.

68. Площа озера на карті становить 1,5 см^2, масштаб карти дорівнює 1 : 2000. Яка площа озера?

69. Карту, яку виконано в масштабі 1 : 20 000, перемалювали в масштабі 1 : 60 000. У скільки разів при цьому збільшиться або зменшиться площа будь-якої земельної ділянки на карті?

70. Знайдіть відношення площі трикутника до площі трапеції, яка відтинається від цього трикутника його середньою лінією.

4 **71.** Знайдіть відношення площ трикутника і трапеції, на які трикутник ділиться прямою, проведеною через точку перетину медіан паралельно одній із його сторін.

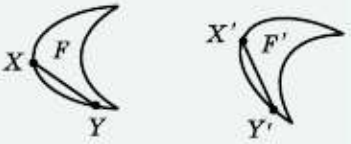
72. Медіана трикутника дорівнює 10 см. Пряма, паралельна медіані, ділить трикутник на частини, площі яких відносяться як 1 : 7. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника.

73. Побудуйте чотирикутник, подібний даному, площа якого у 2,25 раза більша за площу даного.

Головне в темі 9

ПЕРЕМІЩЕННЯ (РУХ) ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. РІВНІСТЬ ФІГУР

Перетворення однієї фігури в іншу називають ***переміщенням (рухом)***, якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки X та Y першої фігури в точки X' та Y' другої так, що $XY = X'Y'$.



Теорема 1 (властивість переміщення). **Точки, що лежать на прямій, під час переміщення переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їхнього взаємного розташування.**

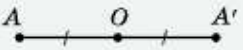
Наслідок. **Під час переміщення прямі переходять у прямі, промені – у промені, відрізки – у відрізки.**

Теорема 2 (властивість переміщення). **Під час переміщення кут переходить у рівний йому кут.**

Дві фігури називають ***рівними***, якщо при переміщенні вони переходять одна в одну.

СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ

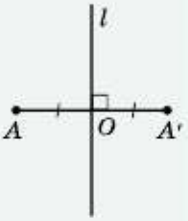
Дві точки A і A' називають ***симетричними відносно точки O***, якщо O є серединою відрізка AA'.



Теорема (про перетворення симетрії відносно точки). **Перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.**

СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ

Дві точки A і A' називають ***симетричними відносно прямої l***, якщо ця пряма є серединним перпендикуляром до відрізка AA'.

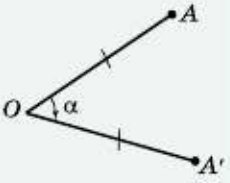


Теорема (про перетворення симетрії відносно прямої). **Перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.**

ПОВОРОТ

Поворотом навколо точки O на кут α називають перетворення, за якого точка A переходить у точку A' так, що $OA = OA'$ і $\angle AOA' = \alpha$.

Точку O називають ***центром повороту***, а кут AOA' – ***кутом повороту***.

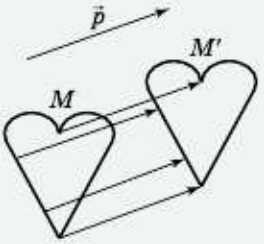


Теорема (про поворот навколо точки). **Перетворення повороту є переміщенням.**

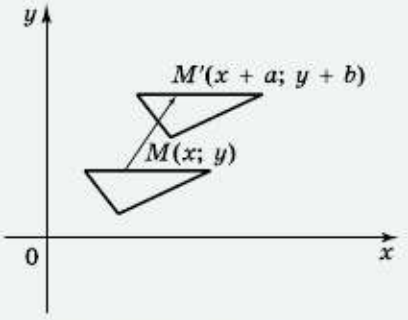
ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ

Нехай дано вектор $\vec{p}$.

Паралельним перенесенням на вектор $\vec{p}$ називають таке перетворення, за якого кожній точці M відповідає така точка M', що $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$.



Паралельним перенесенням називають таке перетворення фігури, за якого її довільна точка $M(x; y)$ переходить у точку $M'(x + a; y + b)$, де a і b – одні й ті самі для всіх точок фігури.



Формули паралельного перенесення:

$$x' = x + a,\ y' = y + b.$$

Теорема (про паралельне перенесення). **Паралельне перенесення є переміщенням.**

ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ВЛАСТИВОСТІ ПОДІБНИХ ФІГУР

Властивості перетворення подібності

Перетворення фігури F у фігуру F' називають ***перетворенням подібності***, **або** ***подібністю***, якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів.

1. Переміщення можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$.
2. При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розташування.

Наслідок. **Перетворення подібності переводить прямі у прямі, промені – у промені, відрізки – у відрізки.**

3. При перетворенні подібності кут переходить у рівний йому кут.

Дві фігури називають ***подібними***, якщо вони переходять одна в одну при перетворенні подібності.

Властивості подібних фігур

1. Кожна фігура подібна сама собі з коефіцієнтом 1.
2. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k, то фігура F подібна фігурі F' з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$.
3. Якщо фігура F' подібна фігурі F з коефіцієнтом k_1, а фігура F'' подібна фігурі F' з коефіцієнтом k_2, то фігура F'' подібна фігурі F з коефіцієнтом k_1k_2.
4. У подібних многокутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні.
5. Правильні многокутники з однаковою кількістю сторін подібні.

ПЛОЩІ ПОДІБНИХ ФІГУР

Теорема (про площі подібних многокутників). **Площі подібних многокутників відносяться як квадрати їхніх відповідних лінійних розмірів.**

Жінки в науці: краса симетрії та шлях до відкриттів

Ванєєва Олена Олександрівна – видатна українська науковиця та яскравий приклад жінки в сучасній науці. Вона є докторкою фізико-математичних наук (з 2020 р.), а також провідним науковим співробітником Інституту математики НАН України (з 2021 р.) та членом-кореспондентом НАН України (з 2024 р.).

Її досягнення були відзначені на міжнародному рівні: Олена є лауреаткою престижних премій L'OREAL-ЮНЕСКО «Для жінок у науці» (і української, і міжнародної «International Rising Talents», 2018 р.). Вона увійшла до 15-ки найвидатніших молодих талантів світу, нагороджених цією премією, та гідно представила Україну на світовій арені в штаб-квартирі ЮНЕСКО в Парижі.

Олена Ванєєва

Крім наукової діяльності, Олена Ванєєва є викладачкою редакторкою Українського математичного журналу, активною популяризаторкою математики і наставницею у проєкті STEM Girls, надихаючи дівчат обирати технічні спеціальності.

Олена Ванєєва досліджує нелінійні моделі математичної фізики та біології. Її робота пов'язана з пошуком математично красивих рівнянь та розробкою нових підходів для розв'язання складних проблем симетрійного аналізу. Тож критерієм краси рівняння для Олени Ванєєвої є саме симетрія, яка дає змогу знаходити елегантні та ефективні рішення.

Цікаво, що Олена не одразу зрозуміла, що хотіла б займатися математикою. У дитинстві їй подобалася біологія, а її твори з літератури зачитувалися у класі як зразкові. Проте приблизно з дев'ятого класу в дівчини з'явився потяг до математики, і, готуючись до іспиту, вона остаточно зрозуміла, що понад усе любить розв'язувати математичні задачі.

На початку своєї кар'єри Олена намагалася розв'язати одну складну задачу, пов'язану з рівняннями Дірака, які описують рух електронів у графені (надтонкому матеріалі з унікальними властивостями). Їй вдалося розв'язати цю задачу лише через десять років! Цим математикиня на власному прикладі показала, що здаватися не потрібно, а варто наполегливо намагатися розв'язати поставлене завдання.

У своїх інтерв'ю Олена Ванєєва щоразу наголошує, що наукою займатися слід обережно, адже виникає своєрідна залежність: «не розв'язуєш рівняння два тижні – і відчуваєш дофамінову недостатність» (дофамін – це нейромедіатор, що викликає відчуття задоволення).

Своїм прикладом Олена доводить, що, займаючись улюбленою справою, можливо досягти успіху в різних сферах, зокрема в науці. Вона є «математичною музою» для багатьох дівчат, захоплюючи їх своєю любов'ю до математики. Головне – любити те, чим займаєшся, адже це надихатиме до нових відкриттів та звершень. І тоді насправді можливо все.

ТЕМА 10

ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І СТАТИСТИКИ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **ознайомитеся** з комбінаторними правилами суми і добутку; поняттями випадкової, вірогідної, неможливої подій;
- **навчитеся** обчислювати відносну частоту та ймовірність випадкової події; обчислювати числові характеристики вибірки; подавати статистичні дані у вигляді таблиць, діаграм, графіків.

§ 46. Комбінаторні задачі. Комбінаторні правила суми і добутку

1. Комбінаторика

Комбінаторика – розділ математики, що вивчає питання вибору та розташування елементів деякої скінченної множини відповідно до заданих умов.

Розглянемо приклади задач із комбінаторики.

2. Комбінаторне правило суми

Приклад 1. Скількома способами легкоатлетка, збираючись на тренування, може обрати собі пару спортивного взуття, маючи 5 пар кросівок і 2 пари кедів?

Очевидно, що вибрати одну з пар взуття, кросівки *або* кеди, можна $5 + 2 = 7$ способами.

Узагальнюючи, отримаємо *комбінаторне правило суми*:

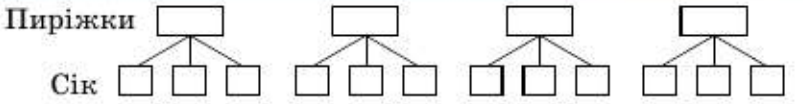
Якщо деякий елемент A можна вибрати k_1 способами, а елемент B (незалежно від вибору елемента A) – k_2 способами, то вибрати A або B можна $k_1 + k_2$ способами.

Це правило поширюється на три й більше елементів.

3. Комбінаторне правило добутку

Приклад 2. У меню шкільної їдальні є на вибір 4 види пиріжків і 3 види соку. Скільки різних варіантів вибору сніданку з одного пиріжка й однієї склянки соку є в учня цієї школи?

Пиріжок учень може вибрати 4 способами і до кожного пиріжка обрати сік 3 способами (мал. 46.1). Отже, учень має $4 \cdot 3 = 12$ варіантів вибору сніданку.



Мал. 46.1

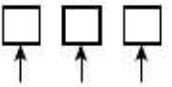
Узагальнюючи, приходимо до *комбінаторного правила добутку*:

якщо деякий елемент A можна вибрати k_1 способами і після кожного такого вибору (незалежно від вибору елемента A) інший елемент B можна вибрати k_2 способами, то пару об'єктів A і B можна вибрати $k_1 \cdot k_2$ способами.

Це правило також поширюється на три й більше елементів.

Приклад 3. Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, якщо в числі: 1) цифри не повторюються; 2) цифри повторюються?

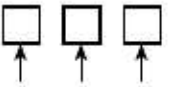
Розв'язання. 1) Маємо 4 способи для сотень числа (мал. 46.2). Після того як місце сотень заповнене (наприклад, цифрою 1), для десятків залишається 3 способи; міркуючи далі, для одиниць – 2 способи. Отже, маємо:



Мал. 46.2

4 способи, і після кожного з них – 3 способи, і після кожного з них – 2 способи. За правилом добутку маємо $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ числа.

2) Якщо цифри в числі повторюються, то кожне з трьох місць можна заповнити 4 способами (мал. 46.3), і тоді таких чисел буде $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.



Мал. 46.3

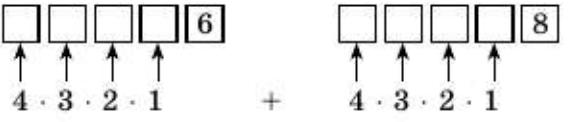
Відповідь: 1) 24 числа; 2) 64 числа.

Зауважимо, що, не користуючись комбінаторними правилами, подібні задачі ми могли б розв'язувати лише шляхом переліку всіх чисел, які задовольняють умову, а таке розв'язання є, безумовно, дуже громіздким.

4. Використання правил суми і добутку для розв'язування задач

Приклад 4. Скільки парних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 5, 6, 7, 8, 9, якщо в числі цифри не повторюються?

Розв'язання. Парне п'ятицифрове число можна отримати, якщо останньою його цифрою буде 6 або 8. Чисел, у яких останньою цифрою є 6, буде $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (мал. 46.4), а тих, у яких останньою цифрою є 8, – також 24. За комбінаторним правилом суми всього парних чисел буде $24 + 24 = 48$.



Мал. 46.4

Відповідь: 48.

Приклад 5. Абетка племені АБАБ містить лише дві літери, «а» і «б». Скільки слів у мові цього племені складаються: 1) із двох букв; 2) із трьох букв?

Розв'язання. 1) аа, ба, аб, бб (усього чотири слова); 2) ааа, ааб, аба, абб, ббб, бба, баб, баа (усього вісім слів).

Зауважимо, що знайдена кількість слів узгоджується з комбінаторним правилом добутку. Оскільки на кожне місце є два «претенденти» – «а» і «б», то слів, що містять дві літери, має бути $2 \cdot 2 = 4$, а три літери – $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Приклад 6. У футбольній команді з 11 гравців треба вибрати капітана і його заступника. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Капітаном можна обрати будь-кого з 11 гравців. Після цього його заступником – будь-кого з 10 гравців, що залишилися. Так (за правилом добутку), є $11 \cdot 10 = 110$ різних способів.

Приклад 7. У країні Дивосвіт десять міст, кожні два з яких сполучено авіалінією. Скільки авіаліній у цій країні?

Розв'язання. Оскільки кожна авіалінія сполучає два міста, то першим із них може бути будь-яке з 10 міст, а другим – будь-яке з 9, що залишилися. Отже, кількість таких авіаліній становить $10 \cdot 9 = 90$. Однак при цьому кожну з авіаліній враховано двічі. Тому всього їх буде $90 : 2 = 45$.

Комбінаторні задачі нерозривно пов'язані із задачами теорії ймовірностей, ще однієї галузі математики, яку ми розглянемо в наступних параграфах підручника.

А ще раніше...

Щось близьке до комбінаторики вперше згадано в китайських рукописах XIII–XII ст. до н. е. Деякі комбінаторні задачі розв'язували і в Давній Греції. Зокрема, Арістоксен із Тарента (IV ст. до н. е.), учень Арістотеля, перелічив різні комбінації довгих і коротких складів у віршових розмірах. А Папп Олександрійський у IV ст. н. е. з'ясовував кількість пар і трійок, які можна скласти з трьох елементів, що можуть повторюватися. Деякі елементи комбінаторики були відомі й в Індії у II ст. до н. е. Індійці вміли обчислювати числа, які зараз відомі нам як коефіцієнти формули бінома Ньютона. Пізніше, у VIII ст. н. е., араби знайшли й саму цю формулу, отже, і її коефіцієнти, які нині обчислюють за допомогою комбінаторних формул або «трикутника Паскаля».

Сучасного вигляду згадані комбінаторні формули набули завдяки середньовічному вченому Леві бен Гершону (XIV ст.) та французькому математику П'єру Ерігону (XVII ст.).

У III ст. н. е. сирійський філософ Порфирій для класифікації понять склав особливу схему, яка отримала назву «древо Порфирія». Зараз подібні дерева використовуються для розв'язування певних задач комбінаторики в різноманітних галузях знань. Деякі раніше невідомі комбінаторні задачі розглянув Леонардо Пізанський (Фібоначчі) у своїй праці «Liber Abaci» (1202 р.), зокрема про знаходження кількості гир, за допомогою яких можна відміряти масу, що

є цілим числом від 1 до 40 фунтів. Із часів грецьких математиків було відомо дві послідовності, кожен член яких отримували за певним правилом із попередніх, – арифметична і геометрична прогресії. Натомість в одній із задач Фібоначчі вперше використав формулу задання члена послідовності через два попередніх, яку назвали рекурентною. Надалі метод рекурентних формул став одним із найпотужніших для розв'язування комбінаторних задач.

Хоч як дивно, розвитку комбінаторики значною мірою посприяли азартні ігри, які набули неабиякої популярності в XVI ст. Зокрема, у той час питання визначення різноманітних комбінацій у грі в кості прискіпливо розглядали такі відомі італійські математики, як Джиролáмо Кардано, Нікколо Тарталья та ін. А найповніше це питання дослідив Галілео Галілей у XVII ст.

Сучасні комбінаторні задачі високого рівня пов'язані з об'єктами в інших галузях математики: визначниками, скінченними геометріями, групами, математичною логікою тощо.

Що вивчає комбінаторика? ○ Сформулюйте комбінаторні правила суми і добутку.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

46.1. На тарілці лежить 5 яблук і 8 слив. Скількома способами з тарілки можна взяти:

1) один фрукт; 2) одне яблуко й одну сливу?

46.2. У класі 10 юнаків і 15 дівчат. Скількома способами можна вибрати:

1) учня із цього класу; 2) пару учнів – юнака і дівчину?

46.3. Костюм складається із блузки та спідниці. Скільки різних костюмів можна скласти з 5 видів блузок і 4 видів спідниць?

46.4. У магазині є 7 видів ручок і 5 видів зошитів. Скількома способами можна обрати комплект з однієї ручки й одного зошита?

46.5. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти за допомогою цифр 5, 6, 7, 8, якщо цифри в числі не повторюються?

46.6. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, якщо цифри в числі не повторюються?

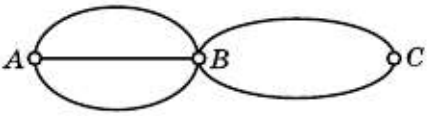
46.7. Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного й одного приголосного звуків у слові «студент»?

46.8. Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного й одного приголосного звуків у слові «функція»?

46.9. Скількома способами можна вишикувати в ряд 6 учнів?

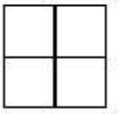
46.10. 10 учасниць шахового турніру грають у залі за 5 столиками. Скількома способами можна розмістити шахісток за столами, якщо учасниці всіх партій і колір фігур, якими вони грають, відомі?

46.11. Із села A до села B ведуть 3 дороги, а із села B до села C – 2 дороги (мал. 46.5). Скількома способами поштар може пройти від села A до села C?



Мал. 46.5

46.12. Кожну клітинку квадратної таблиці 2×2 (мал. 46.6) можна пофарбувати в зелений або червоний колір. Скільки є різних варіантів розфарбування цієї таблиці?



Мал. 46.6

46.13. Скількома способами з 5 членів президії зборів можна вибрати голову зборів і секретаря?

46.14. У секції легкої атлетики тренуються 8 спортсменів. Скількома способами між ними можна розподілити етапи естафети 4 по 100 м (тобто кожен із чотирьох атлетів, що бере участь в естафеті, має пробігти один з етапів: перший, або другий, або третій, або четвертий)?

46.15. Гральний кубик підкидають двічі. Скільки різних пар чисел можна при цьому отримати?

46.16. Монету підкидають тричі. Скільки різних послідовностей випадання аверсу та реверсу[1] можна при цьому отримати?

46.17. Скільки різних трицифрових чисел, у запису яких є тільки непарні цифри, можна скласти, якщо:

1) цифри в числі не повторюються;
2) цифри в числі можуть повторюватися?

46.18. Скільки різних двоцифрових чисел, у запису яких є цифри 1, 2, 3, 4, 5, можна скласти, якщо цифри в числі:

1) не повторюються;
2) можуть повторюватися?

46.19. Скількома способами можна скласти ряд із 2 білих кульок, чорної, червоної та зеленої, якщо білі кульки мають розташовуватися з обох кінців ряду?

46.20. Скількома способами на книжковій полиці можна розставити підручники із шести різних предметів так, щоб підручник з алгебри був крайнім ліворуч?

46.21. Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо в кожному числі цифри не повторюються?

[1] *Áверс* (просторічна назва – «орел», або «герб») – лицьовий бік монети; *рéверс* (просторічна назва – «решка») – бік монети, на якому зазвичай розміщується номінал монети.

46.22. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 2, 4, 8, якщо цифри в числі не повторюються?

46.23. Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти із чисел 2, 3, 5, 7, 12?

46.24. У турнірі «Кубок Васюків» грало 10 шахістів, кожен з яких зіграв партію з кожним із суперників. Скільки партій було зіграно в цьому турнірі?

46.25. У змаганнях паралімпійців з футболу взяли участь 16 команд, кожна з яких провела по дві зустрічі з кожною іншою командою. Скільки матчів відбулося в цих змаганнях?

46.26. Скільки різних непарних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри в числі не повторюються?

46.27. Скільки різних парних трицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі не повторюються?

Вправи для повторення

46.28. Спростіть вираз:

1) $-4x(3x + 9) + 1{,}5x(8x - 2)$; 2) $(x - 2)^2 - (x + 1)(x - 1)$.

46.29. Знайдіть координати точок параболи $y = 2x - x^2$, у яких сума абсциси й ординати дорівнює 2.

46.30. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^3 + 3x^2 - 5x = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.

46.31. Побудуйте графік рівняння $|x - y| = 3$.

Життєва математика

46.32. Майстер спорту з легкої атлетики під час тренування пробіг 400 м за 50 секунд. Знайдіть його середню швидкість на дистанції. Відповідь подайте в кілометрах за годину.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

46.33. (*Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру», 2016 рік.*) У класі 20 учнів. Усі сидять за партами по двоє. Рівно третина хлопців сидить із дівчатами, і рівно половина дівчат сидить із хлопцями. Скільки хлопців у класі?

§ 47. Випадкова подія. Частота та ймовірність випадкової події

1. Випадкові досліди. Випадкові події

Будь-яка точна наука вивчає не самі явища, що відбуваються в природі, а їхні математичні моделі. У математичних задачах часто

розглядаються явища, які, залежно від певних умов, можуть або відбутися, або не відбутися. Такі *явища* називають *випадковими*.

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ.

Нехай проводиться певний дослід (експеримент, спостереження, випробування тощо), результат якого передбачити неможливо. Такі *досліди* в теорії ймовірностей називають *випадковими*. При цьому доцільно проводити лише такі досліди, які можна повторити, хоча б теоретично, за однакових умов довільну кількість разів.

Випадковими дослідами є, наприклад, підкидання монети чи грального кубика, купівля лотерейного квитка, стрільба по мішені тощо.

Отже,

випадковий дослід **– це дослід (експеримент, спостереження, випробування), результат якого залежить від випадку і який можна повторити багато разів за однакових умов.**

Результатом випадкового досліду є *випадкова подія*.

Випадкова подія **– це подія, яка за однакових умов може відбутися, а може й не відбутися.**

Прикладами випадкових подій є «випадіння одиниці під час підкидання грального кубика», «випадіння аверсу під час підкидання монети», «виграш 10 грн під час купівлі лотерейного квитка» та ін. На противагу – такі події, як «закипання води під час її нагрівання до 100 °С» або «зменшення довжини дроту під час його охолодження», не можна назвати випадковими, бо вони є закономірними.

Випадкові події зазвичай позначають великими латинськими літерами: A, B, C, D, ...

2. Вірогідна подія. Неможлива подія

Приклад 1. У ящику є лише білі й чорні кульки. З нього навмання виймають одну кульку. Які з подій A, B, C, D при цьому можуть відбутися:

A – вийнято білу кульку; B – вийнято чорну кульку;

C – вийнято зелену кульку; D – вийнято кульку?

Розв'язання. Оскільки з ящика можна вийняти лише те, що в ньому є, то вийняти білу або чорну кульку можна, а зелену – ні. Можна також стверджувати, що будь-який предмет, який навмання виймають із ящика, буде кулькою, оскільки там немає нічого, крім кульок. Отже, події A і B можуть відбутися (а можуть і не відбутися); подія C не може відбутися, а подія D обов'язково відбудеться.

Відповідь: A, B, D.

***Подію*, яка за даних умов обов'язково відбудеться, називають *вірогідною*.**
***Подію*, яка за даних умов ніколи не відбудеться, називають *неможливою*.**

У прикладі 1 події A і B – випадкові, D – вірогідна подія, C – неможлива подія.

3. Частота події. Відносна частота події

Приклад 2. Нехай проводиться деякий випадковий дослід, наприклад паралімпійка робить постріли по мішені. Нас цікавить, як математично оцінити її шанси влучити в мішень за однакових незмінних умов.

Щоб це з'ясувати, розглянемо поняття *частоти події* та *відносної частоти події*.

Якщо за незмінних умов проведено n випадкових дослідів і в $n(A)$ випадків подія A відбулася, то число $n(A)$ називають *частотою події A*, а відношення $\frac{n(A)}{n}$ – *відносною частотою події A*.

Приклад 3. Дослід полягає в підкиданні кубика 150 разів поспіль. Нехай випадкова подія A – випадіння шістки. Під час досліду ця подія відбулася 24 рази. Число 24 є частотою події A, а відношення $\frac{24}{150} = \frac{4}{25} = 0{,}16$ є відносною частотою події A.

4. Статистична ймовірність події

Відносна частота події зміниться, якщо зміниться кількість дослідів або буде проведено іншу серію дослідів за тих самих умов.

Приклад 4. Різні вчені в різні роки проводили дослід, який полягав у багаторазовому підкиданні монети, і розглядали подію A – випадіння аверсу. Результати цих дослідів систематизовано в таблицю в порядку зростання кількості дослідів.

№ з/п	Дослідник	Роки життя	Кількість підкидань монети, n	Кількість випадіння аверсу, $n(A)$	Відносна частота, $\frac{n(A)}{n}$
1	Жорж де Бюффон	1707–1788	4040	2048	0,5069
2	Де Морган	1806–1871	4092	2048	0,5005
3	Вільям Феллер	1906–1970	10 000	4979	0,4979

Продовження таблиці

№ з/п	Дослідник	Роки життя	Кількість підкидань монети, n	Кількість випадіння аверсу, $n(A)$	Відносна частота, $\frac{n(A)}{n}$
4	Карл Пірсон	1857–1936	12 000	6019	0,5016
5	Вільям Стенлі Джевонс	1835–1882	20 480	10 379	0,5068
6	Карл Пірсон	1857–1936	24 000	12 012	0,5005
7	Всеволод Романовський	1879–1954	80 640	40 151	0,4979

Зрозуміло, що монети в дослідах різних учених були різними, але сам дослід і подію, яку вони розглядали, можна вважати однаковими. Ці досліди, проведені різними вченими в різні епохи в різних країнах, дають приблизно однаковий результат: відносна частота події A близька до числа 0,5. У цьому випадку число 0,5 називають *статистичною ймовірністю події*.

Якщо під час проведення досить великої кількості випадкових дослідів значення відносної частоти випадкової події A є близьким до деякого певного числа, то це число називають *статистичною ймовірністю події A*.

Імовірність прийнято позначати латинською літерою p (перша літера французького слова *probabilite* та латинського *probabilitas*, що перекладається як «можливість», «імовірність»). Отже, для прикладу 4 можна записати: $p(A) = 0,5$, або $p = 0,5$.

5. Знаходження ймовірності випадкової події як результату випадкового досліду

Доходимо висновку, що

імовірність випадкової події можна знайти з досить великою точністю, якщо випадковий дослід проводити велику кількість разів. Що більше проведено дослідів, то ближчим є значення відносної частоти випадкової події до ймовірності цієї події.

Повернімося до питання, сформульованого у прикладі 2, тобто до математичної оцінки шансів стрільця влучити в мішень. Тепер зрозуміло, що таку математичну оцінку дає ймовірність. Для того щоб оцінити ймовірність влучення стрільцем у мішень (подія A), необхідно, щоб він зробив достатньо велику кількість пострілів (в однакових умовах). Тоді відносну частоту події A можна буде вважати ймовірністю влучення стрільця в мішень. Нехай, наприклад, протягом певного періоду зроблено 1000 пострілів, з яких 781 виявився влучним. Тоді

відносну частоту $\frac{781}{1000} = 0{,}781$ можна вважати ймовірністю влучення цього стрільця в мішень.

Якщо відома ймовірність події A, то можна приблизно оцінити, скільки разів подія A відбудеться, якщо зробити певну кількість дослідів.

Приклад 5. Імовірність влучення лучниці в мішень дорівнює 0,781. Скільки приблизно влучних пострілів зробить лучниця в серії з 50 пострілів?

Розв'язання. Нехай у серії з 50 пострілів влучили x разів. Тоді $\frac{x}{50}$ – відносна частота влучних пострілів. Якщо вважати, що відносна частота влучень приблизно дорівнює ймовірності, то $\frac{x}{50} \approx 0{,}781$, тобто $x \approx 39$.

Відповідь: 39 влучних пострілів.

А ще раніше...

Теорію ймовірностей нерідко називають «ученням про випадкове». На багатьох прикладах можна впевнитися в тому, що масові випадкові явища теж мають свої закономірності, знання про які можна успішно використовувати у практичній діяльності людини.

Ще в давні часи люди помітили, що кілька мисливців, кинувши списи одночасно, можуть вразити звіра з більшою ймовірністю, ніж один мисливець. Цей висновок не був науковим, а ґрунтувався на спостереженнях і досвіді.

Як наука теорія ймовірностей почала формуватися в XVII ст. На її розвиток вплинули тогочасні нагальні потреби науки і практики, зокрема у справі страхування, яке поширювалося завдяки бурхливому розвитку торговельних зв'язків та подорожей. Зручною моделлю для розв'язування задач та аналізу понять теорії ймовірностей були для вчених азартні ігри. Про це зазначав Гюйгенс у своїй книзі «Про розрахунки в азартній грі» (1657 р.), яка стала першою у світі книгою з питань теорії ймовірностей. Подальшому розвитку теорії ймовірностей (XVII–XVIII ст.) сприяли праці Блеза Паскаля, Даніеля Бернуллі, Жана ле Рона д'Аламбера, Томаса Сімпсона, П'єра Ферма, Томаса Байеса та ін.

Важливий внесок у теорію ймовірностей зробив швейцарський математик Якоб Бернуллі (1654–1705): він довів закон великих чисел у найпростішому випадку незалежних випробувань у книзі «Аналітична теорія ймовірностей».

1718 р. англійський математик Абрахам де Муавр (1667–1754) опублікував книгу «Вчення про випадки», у якій дослідив закономірності, що часто можна спостерігати у випадкових явищах.

Вперше основи теорії ймовірностей виклав французький математик П'єр-Сімо́н Лаплас (1749–1827).

У подальшому теорія ймовірностей набула розвитку завдяки працям француза Сімеона-Дені Пуассона (1781–1840), а також Пафнутія Чебишова (1821–1894), Андрія Маркова (1856–1922) та Олександра Ляпунова (1857–1918).

Свій внесок у розвиток теорії ймовірностей зробили й українські математики: Борис Гнєденко (1912–1996), Йосип Гіхман (1918–1985), Анатолій Скороход (1930–2011), Михайло Ядренко (1932–2004).

Що вивчає теорія ймовірностей? ○ Що таке випадковий дослід? ○ Що таке випадкова подія? ○ Яку подію називають вірогідною, а яку – неможливою? ○ Що називають частотою і що – відносною частотою події? ○ Що називають статистичною ймовірністю події?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

47.1. (*Усно.*) Які з подій є випадковими:
1) при підкиданні грального кубика випаде 6 очок;
2) за температури 0 °С вода замерзне;
3) придбавши лотерейний квиток, виграють 200 грн;
4) наступним днем після 1 березня буде 2 березня;
5) прізвище навмання вибраного дев'ятикласника починатиметься з букви «А»;
6) довжина кола радіуса 5 см дорівнюватиме 10π см?

47.2. (*Усно.*) Які з подій вірогідні, а які – неможливі:
1) сонце зійде на сході;
2) при підкиданні грального кубика випаде кількість очок, що кратна числу 11;
3) навмання вибране трицифрове число, складене із цифр 7, 8, 9, виявиться більшим за 600;
4) двоцифрове число, складене із цифр 1 і 2, буде кратним числу 10;
5) випаде білий сніг;
6) кількість днів навмання вибраного місяця буде більшою за 31?

47.3. Які з подій випадкові, вірогідні, неможливі:
1) виграти партію в шахи у суперника свого рівня;
2) крокодил літатиме;
3) при підкиданні двох гральних кубиків з'являться очки, сума яких більша за 12;
4) запізнення поїзда Харків–Львів;
5) 5 травня наступного року буде сонячно;
6) наступним днем після п'ятниці буде субота;
7) наступним днем після понеділка буде неділя;
8) день народження людини, яку зустріли, – 30 червня;
9) день народження людини, яку зустріли, – 31 червня;
10) вийняти зелену кульку з коробки із зеленими і чорними кульками?

47.4. (*Усно.*) Наведіть по два приклади вірогідної, неможливої, випадкової події.

47.5. Випадковий дослід полягав у підкиданні грального кубика, проведеному 200 разів. Результати досліду занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту випадіння кожного окремого числа.

Число	1	2	3	4	5	6
Кількість випадіння числа	33	32	35	34	36	30
Відносна частота випадіння числа						

47.6. Було виконано п'ять серій по 50 підкидань монети в кожній. Результати досліду занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту події A в кожній із серій.

Серія	1	2	3	4	5
Випадіння аверсу (подія A)	23	26	24	25	28
Відносна частота події A					

47.7. Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного досліду вкажіть приклад вірогідної, неможливої, випадкової події.

№ з/п	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Виймання навмання кульки з коробки з білими і чорними кульками			
2	Відривання листка у відривному календарі			
3	Виймання навмання карти з колоди карт			
4	Складання двоцифрового числа із цифр 3 і 4			

47.8. Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного досліду вкажіть приклад вірогідної, неможливої та випадкової події.

№ з/п	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Витягування навмання цукерки з коробки із цукерками з білого і чорного шоколаду			
2	Складання двоцифрового числа із цифр 8 і 9			
3	Визначення дати народження деякої людини			
4	Визначення кількості днів навмання вибраного року			

47.9. Відомо, що в партії з 1000 батарейок зазвичай є 3 браковані. Яка ймовірність придбати браковану батарейку з такої партії?

47.10. У заводській партії, що налічує 10 000 деталей, 15 є бракованими. Яка ймовірність того, що взята навмання з партії деталь виявиться бракованою?

47.11. *Проєктна діяльність.* 1) Кожен зі здобувачів освіти класу має провести серію із 30 підкидань монети.

2) Складіть зведену таблицю випадіння аверсу (подія A) за зразком № 47.6.

3) Обчисліть відносну частоту події A.

4) Зробіть висновки.

3 **47.12.** (*Усно.*) Стрілець виконав два постріли по мішені: один раз влучив, а другий – ні. Чи можна стверджувати, що для цього стрільця ймовірність влучення в мішень за таких умов дорівнює 0,5? Чому?

47.13. Щоб з'ясувати, з яким кольором волосся жителів у місті найбільше, а з яким – найменше, дослідники розійшлися по різних частинах міста й записували колір волосся кожного зустрічного мешканця. Результати цього дослідження було занесено в таблицю.

Колір волосся	шатени	блондини	брюнети	руді
Кількість людей	423	238	222	87

Оцініть (із точністю до сотих) імовірність того, що обраний навмання житель міста:

1) шатен; 2) брюнет;

3) не блондин; 4) не рудий.

47.14. В умовах попередньої задачі оцініть (із точністю до сотих) імовірність того, що обраний навмання житель міста:

1) рудий; 2) блондин;

3) не шатен; 4) не брюнет.

47.15. Троє друзів прийшли в комп'ютерний клуб і здали свої капелюхи. Коли вони розходилися по домівках, раптово вимкнулося світло і кожен узяв капелюх навмання. Які з наступних подій випадкові, неможливі, вірогідні:

1) кожен узяв свій капелюх;

2) кожен вийшов з капелюхом;

3) усі надягли чужі капелюхи;

4) двоє надягли чужі капелюхи, а один – свій;

5) один надягнув чужий капелюх, а двоє – свої?

47.16. *Проєктна діяльність.* Візьміть деякий текст українською мовою, виберіть у ньому будь-яких п'ять рядків поспіль. Обчисліть відносну частоту в цих рядках кожної з букв «а» та «й» та порівняйте їх.

47.17. *Проєктна діяльність.* Візьміть деякий текст українською мовою, виберіть у ньому будь-які десять рядків поспіль. Обчисліть відносну частоту в цих рядках кожної з букв «р» і «ф» та порівняйте їх.

47.18. (*Усно.*) На основі задач 47.16–47.17 дайте відповідь на запитання: чому на клавіатурах комп'ютерів букви «а» та «р» розташовані ближче до центра, а букви «й» та «ф» – ближче до краю.

47.19. Було перевірено 1000 деталей, з яких 5 виявилися бракованими.

1) Скільки приблизно бракованих деталей буде в партії з 1800 деталей?

2) Скільки приблизно деталей було в партії, якщо серед них виявлено 12 бракованих?

47.20. Серед 200 опитаних жителів міста 198 мають мобільний телефон.

1) Скільки приблизно мобільних телефонів буде в 500 опитаних жителів цього міста?

2) Скільки приблизно було опитано жителів міста, якщо серед них тих, які мали мобільний телефон, виявилося 693?

47.21. Відомо, що деякий баскетболіст зі штрафного кидка влучає в кошик з імовірністю, більшою за 0,8, але меншою від 0,83. Скільки приблизно штрафних кидків він виконав під час тренування, якщо серед них припустився 4 промахів?

47.22. Відомо, що стрільчиня влучає в мішень з імовірністю, більшою за 0,89, але меншою від 0,9. Скільки приблизно пострілів вона виконала під час тренування, якщо серед них сталося 6 промахів?

Вправи для повторення

47.23. Виконайте дію:

1) $\dfrac{6a+7}{2a-1}+\dfrac{4a+8}{1-2a}$; 2) $32p^3n^2\cdot\dfrac{n^7}{8p^6}$.

47.24. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків рівнянь $x^2+y^2=16$ та $x-y=4$. Накресліть графіки цих рівнянь і позначте знайдені точки.

47.25. Розв'яжіть нерівність

$$15x+(4x+1)(3x-8)>(4x-5)(4x+5)+27.$$

47.26. Відомо, що x_1 та x_2 – корені рівняння $5x^2+7x-9=0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть $x_1^3x_2+x_2^3x_1$.

47.27. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{x^4-4}{x^2-2}$.

Життєва математика

47.28. 2025 року діяли такі тарифи на електроенергію для споживачів, які користуються електроопаленням:

Обсяг споживання	Тариф (грн за 1 кВт · год, із ПДВ)
– За обсяг, спожитий до 2000 кВт · год електроенергії на місяць	2,64
– За обсяг, спожитий понад 2000 кВт · год	4,32

Лічильник електроенергії на 1 листопада показував 12 615 кіловат-годин, а на 1 грудня – 14 675 кіловат-годин. Скільки треба заплатити за електроенергію за листопад? Відповідь подайте у гривнях.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

47.29. (*Задача Ейлера.*) Знайдіть число, четвертий степінь якого, поділений на половину цього числа й збільшений на 14,25, дорівнюватиме 100.

§ 48. Класичне означення ймовірності

1. Класичне означення ймовірності

Проводити численні досліди для визначення статистичної ймовірності події досить важко, а іноді – неможливо. Проте в багатьох прикладних задачах імовірність можна визначити, використовуючи *класичне означення ймовірності*.

Розглянемо приклад.

Приклад 1. У ящику лежать дві кульки: біла і чорна. З нього навмання виймають одну кульку.

Розглянемо події:

A – вийнято білу кульку;

B – вийнято чорну кульку;

C – вийнято червону кульку;

D – вийнято кульку.

Як відомо з попереднього параграфа, подія C – неможлива, подія D – вірогідна, а події A і B – випадкові.

Оскільки білих і чорних кульок у ящику порівну, то можливість витягнути чорну кульку є такою ж, як і білу. У ящику немає інших кульок, тож якщо дослід із витягуванням кульки проводити багаторазово, щоразу повертаючи кульку в ящик, можна дійти висновку, що приблизно в половині випадків буде витягнуто білу кульку, а в іншій половині – чорну.

За таких умов число 0,5 (половина) – це статистична ймовірність випадкової події «вийняти білу кульку».

Цю ймовірність можна отримати, якщо кількість білих кульок, тобто 1, поділити на кількість усіх кульок (1 + 1 = 2).

Отже, сформулюємо *класичне означення ймовірності*:

імовірність випадкової події A дорівнює відношенню кількості випадків, що сприяють появі події A, до кількості всіх можливих випадків.

У вигляді формули це означення можна записати так:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість усіх можливих випадків, m – кількість випадків, що сприяють появі події A.

Іноді ймовірність подають у відсотках, тоді $p(A) = 50\ \%$.

2. Імовірність вірогідної, неможливої, випадкової подій

Повертаючись до прикладу 1, можна легко знайти ймовірності подій B, C і D. Отже,

$$p(B) = \frac{1}{2} = 0{,}5;\ p(C) = \frac{0}{2} = 0;\ p(D) = \frac{2}{2} = 1.$$

Отже, доходимо важливого висновку:

імовірність вірогідної події дорівнює 1, імовірність неможливої події дорівнює 0; імовірність випадкової події може бути будь-яким числом від 0 до 1.

3. Рівноймовірні події

Імовірності подій A і B у цьому випробуванні однакові, бо $p(A) = p(B) = 0{,}5$. Такі події називають *рівноймовірними*.

Рівноймовірні події **– події, ймовірність яких однакова в даному випробуванні.**

Також прикладами рівноймовірних подій є події: «випадіння 1 при підкиданні грального кубика» і «випадіння 6 при підкиданні грального кубика». Імовірність кожної із цих подій дорівнює $\frac{1}{6}$.

4. Застосування формули для обчислення ймовірності до розв'язування задач

Розглянемо ще приклади.

Приклад 2. Із 30 учнів класу 12 мають з алгебри оцінки високого рівня. Яка ймовірність того, що навмання вибраний учень класу матиме з алгебри оцінку високого рівня?

Розв'язання. Маємо: $n = 30$, $m = 12$, $p = \frac{m}{n} = \frac{12}{30} = 0{,}4$.

Відповідь: 0,4.

Приклад 3. Одночасно підкинули два гральних кубики. Яка ймовірність того, що сума очок, які випадуть:
1) дорівнює 6; 2) менша ніж 5?

Розв'язання. Складемо таблицю суми очок, які можуть випасти на двох гральних кубиках під час їх одночасного підкидання. $n = 36$ – кількість усіх можливих подій.

II \ I	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1) Маємо 5 випадків, коли сума очок на обох кубиках дорівнює 6, тому $m = 5$ і $p = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$.

2) Маємо 6 випадків, коли сума очок на обох кубиках менша ніж 5. Тому $m = 6$ і $p = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Відповідь: 1) $\frac{5}{36}$; 2) $\frac{1}{6}$.

Приклад 4. У коробці 20 чорних кульок, 25 зелених, а решта – білі. Скільки білих кульок у коробці, якщо ймовірність витягнути білу кульку:
1) дорівнює $\frac{1}{4}$; 2) менша ніж $\frac{1}{5}$?

Розв'язання. Нехай у коробці x білих кульок. Тоді
$$n = 20 + 25 + x = 45 + x \text{ і } m = x.$$
Отже, ймовірність витягнути білу кульку дорівнює $\frac{x}{45 + x}$.

1) За умовою $\frac{x}{45 + x} = \frac{1}{4}$, тоді $4x = 45 + x$; тобто $x = 15$.

2) За умовою $\frac{x}{45 + x} < \frac{1}{5}$. Щоб розв'язати нерівність, помножимо її обидві частини на додатне число $5(45 + x)$. Маємо: $5x < 45 + x$, звідки $x < 11{,}25$.

Отже, якщо ймовірність витягнути білу кульку менша, ніж $\frac{1}{5}$, то в коробці не більше ніж 11 білих кульок.

Відповідь: 1) 15; 2) не більше ніж 11.

Приклад 5. Власник мобільного телефона забув дві останні цифри свого PIN-коду, але пам'ятає, що вони різні. Знайти ймовірність того, що він отримає доступ до телефона з першої спроби.

Розв'язання. Двома останніми цифрами PIN-коду можуть бути такі комбінації: 00, 01, 02, 03, ... , 97, 98, 99. Всього їх 100. Але серед них є 10 комбінацій, у яких цифри однакові: 00, 11, 22, ... , 88, 99. Оскільки власник телефона пам'ятає, що всі цифри різні, то він вибиратиме із 90 комбінацій (100 − 10 = 90). Отже, $n = 90$. Знаходимо ймовірність того, що власник отримає доступ до телефона з першої спроби, тобто $m = 1$.

Тоді $p = \frac{m}{n} = \frac{1}{90}$.

Відповідь: $\frac{1}{90}$.

Як знайти ймовірність випадкової події A? ○ Яка ймовірність у вірогідної події? У неможливої події? ○ У яких межах може змінюватися ймовірність випадкової події? ○ Які події називають рівноймовірними в такому випробуванні?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

48.1. Наведіть приклад:
1) рівноймовірних подій;
2) подій, які не є рівноймовірними в такому випробуванні.

48.2. Яка ймовірність того, що:
1) наступним днем після 30 березня буде 1 квітня;
2) наступним днем після понеділка буде вівторок?

48.3. Яка ймовірність того, що:
1) наступним днем після 30 квітня буде 1 травня;
2) наступним днем після середи буде вівторок?

48.4. На запитання вікторини було отримано 60 правильних відповідей, у тому числі й твоя. Для визначення єдиного переможця навмання витягують картку з прізвищем. Яка ймовірність того, що приз одержиш саме ти?

48.5. Із 30 екзаменаційних білетів учениця не вивчила один. Яка ймовірність того, що саме цей білет вона витягне на екзамені?

48.6. У ящику 25 білих кульок і 15 чорних. Яка ймовірність витягнути навмання з ящика:
1) білу кульку;
2) чорну кульку?

48.7. У класі 18 хлопців і 12 дівчат. Із класу вибирають навмання одного учня. Яка ймовірність того, що це буде:
1) хлопець;
2) дівчина?

48.8. Чи є рівноймовірними події:

1) A_1 – з 20 карток із числами від 1 до 20 витягнути картку із числом 1;
A_2 – з 20 карток із числами від 1 до 20 витягнути картку із числом 20;
2) B_1 – витягнути білу кульку з коробки, у якій 3 білі кульки і 7 чорних;
B_2 – витягнути чорну кульку з коробки, у якій 3 білі кульки і 7 чорних;
3) C_1 – при підкиданні грального кубика випало просте число;
C_2 – при підкиданні грального кубика випало складене число;
4) D_1 – витягнути червоний олівець із коробки, де половина олівців червоні, а половина – сині;
D_2 – витягнути синій олівець із коробки, де половина олівців червоні, а половина – сині?

48.9. Відомо, що в партії з 1000 деталей 2 браковані. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь:

1) бракована;
2) якісна?

48.10. У магазині виявилося, що в партії із 400 смартфонів 2 бракованих. Яка ймовірність того, що навмання вибраний із цієї партії смартфон:

1) бракований;
2) якісний?

48.11. У кошику 5 червоних, 3 зелених і 2 жовтих яблука. Навмання вибирають одне яблуко. Яка ймовірність того, що це яблуко виявиться:

1) червоним; 2) зеленим;
3) червоним або жовтим; 4) не червоним?

48.12. У коробці 6 червоних, 3 зелених і 1 синій олівець. Із коробки навмання виймають один олівець. Яка ймовірність того, що цей олівець:

1) зелений; 2) червоний;
3) зелений або синій; 4) не зелений?

48.13. (*Задача Д'Аламбера.*) Яка ймовірність того, що за двох підкидань монети хоча б один раз випаде аверс?

48.14. З натуральних чисел від 1 до 30 навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 30?

48.15. Яка ймовірність того, що навмання вибране натуральне число від 1 до 15 буде дільником числа 15 або простим числом?

48.16. Маємо новий відривний календар невисокосного року. Відриваємо в ньому навмання один листок. Знайдіть імовірність того, що:

1) на листку число 1;
2) на листку число 31;
3) число на листку ділиться на 5.

48.17. Маємо новий відривний календар високосного року. Відриваємо в ньому один листок. Знайдіть імовірність того, що:

1) на листку число 2; 2) на листку число 30;
3) число на листку є кратним числу 10.

48.18. Одночасно підкинули два гральних кубики. Яка ймовірність того, що на кубиках:

1) випаде однакова кількість очок;
2) сума очок дорівнюватиме 10;
3) сума очок буде не більшою за 3;
4) сума очок буде парним числом.

48.19. Одночасно підкинули два гральних кубики. Знайдіть імовірність того, що:

1) на кубиках випаде різна кількість очок;
2) сума очок на кубиках дорівнюватиме 7;
3) сума очок на кубиках буде не меншою від 11;
4) сума очок на кубиках буде непарним числом.

48.20. Складіть таблицю добутку очок, що випали на двох гральних кубиках під час їх одночасного підкидання, аналогічну до таблиці суми очок (див. **Приклад 3** цього параграфа). Знайдіть імовірність того, що добуток очок:

1) дорівнюватиме 12; 2) дорівнюватиме 11;
3) буде меншим від 5; 4) буде більшим за 26;

48.21. У коробці лежать 12 синіх олівців і кілька червоних. Скільки червоних олівців у коробці, якщо ймовірність витягнути навмання:

1) синій олівець – дорівнює 0,75;
2) червоний олівець – дорівнює $\frac{2}{5}$;
3) синій олівець – більша за 0,5;
4) червоний олівець – менша від $\frac{2}{3}$?

48.22. У коробці 6 білих і кілька чорних кульок. Скільки чорних кульок у коробці, якщо ймовірність витягнути навмання:

1) білу кульку – дорівнює 0,6;
2) чорну кульку – дорівнює 0,25;
3) білу кульку – менша від 0,5;
4) чорну кульку – більша за $\frac{1}{4}$?

48.23. У коробці 3 чорні ручки, кілька зелених та кілька червоних. Скільки зелених ручок у коробці та скільки червоних, якщо ймовірність навмання витягнути зелену ручку дорівнює 0,2, а червону – 0,5?

48.24. У шухляді 8 білих хустин, кілька червоних і кілька картатих. Скільки в шухляді червоних хустин та скільки картатих, якщо ймовірність навмання витягнути червону хустину дорівнює 0,5, а картату – 0,1?

48.25. Антон, ідучи в гості до Ярини, придбав букет із 5 білих і кількох червоних троянд. Скільки червоних троянд у букеті, якщо ймовірність вибрати з нього навмання червону троянду більша за 0,5, але менша від 0,6, при цьому квітів у букеті непарна кількість?

48.26. У мисці лежить 10 вареників з картоплею та кілька вареників з м'ясом. Скільки вареників з м'ясом у мисці, якщо ймовірність того, що один вибраний навмання вареник буде з м'ясом, більша за 0,2, але менша від 0,3?

48.27. Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число ділиться на 3?

48.28. Картки з номерами 1, 2, 3, 4 виклали в ряд. Яка ймовірність того, що картки з парними номерами опиняться поряд?

48.29. Підкидають три монети. Яка ймовірність того, що:

1) аверсів випаде більше, ніж реверсів;
2) випаде два реверси;
3) усі монети випадуть однаковою стороною;
4) аверсів випаде не більше ніж один?

Вправи для повторення

48.30. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{14p^{24}n^5}{2p^8n^{10}}$;

2) $\dfrac{9a^2 - 6a + 1}{9a^2 - 1}$.

48.31. Розв'яжіть рівняння:

1) $6x^2 + 18x = 0$;
2) $5x^2 - 20 = 0$.

48.32. Побудуйте графік функції $y = -4x + x^2$. Використовуючи графік функції, знайдіть:

1) область значень функції;
2) проміжок зростання функції.

48.33. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a - 20}{(a - 5)^2} : \left(\frac{a}{a^2 - 25} - \frac{a - 8}{a^2 - 10a + 25}\right)$$

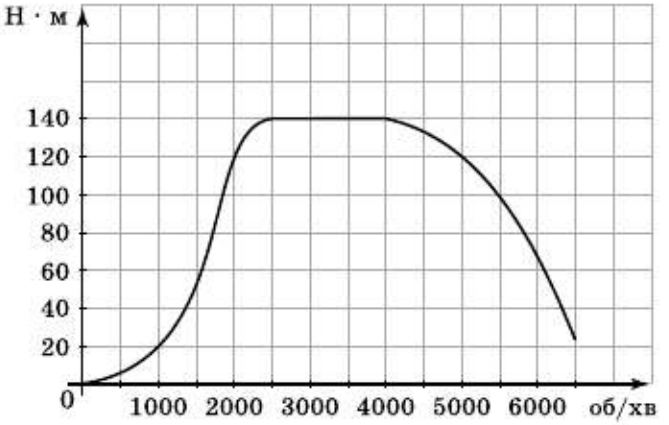
додатне, якщо $a < -5$.

48.34. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2x} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ y^2 - 5xy + 2x^2 = 32. \end{cases}$$

Життєва математика

48.35. На графіку зображено залежність крутного моменту двигуна від кількості його обертів за хвилину (мал. 48.1). На осі абсцис відкладено кількість обертів за хвилину, на осі ординат – крутний момент, Н · м. Швидкість автомобіля (у км/год) наближено обчислюють за формулою $v = 0{,}036n$, де n – кількість обертів двигуна за хвилину. З якою найменшою швидкістю має рухатися автомобіль, щоб крутний момент був не меншим ніж 120 Н · м? Відповідь подайте в кілометрах за годину.



Мал. 48.1

Цікаві задачі – поміркуй одначе

48.36. Відомо, що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має коренів і $a + b + c < 0$. Чи можна визначити знак числа c? У разі ствердної відповіді вкажіть знак числа c.

§ 49. Початкові відомості про статистику. Статистичні дані. Способи подання даних та їх обробки

1. Уявлення про математичну статистику

У практичній діяльності людям часто доводиться збирати, обробляти і досліджувати різноманітні дані, пов'язані з явищами, процесами та подіями масового характеру. Такі дані називають *статистичними*. На запитання, пов'язані зі статистичними даними, допомагає відповісти *математична статистика*.

Математична статистика **– розділ математики, що вивчає математичні методи систематизації, обробки та дослідження статистичних даних для наукових і практичних висновків.**

Назва «статистика» походить від латинського *status*, що перекладається як «стан», «становище».

Математична статистика тісно пов'язана з теорією ймовірностей. Обидві ці математичні дисципліни вивчають випадкові події. Теорія ймовірностей на основі математичної моделі робить висновки про реальні процеси, а математична статистика встановлює властивості математичної моделі, виходячи зі спостережень на основі статистичних даних.

2. Отримання та систематизація статистичних даних

Приклад 1. Під час державної підсумкової атестації з математики 50 дев'ятикласників / дев'ятикласниць отримали такі бали:

5	10	4	7	8	9	6	4	11	6
9	2	11	5	6	7	5	8	6	10
8	7	3	10	8	12	9	6	11	7
11	5	6	4	7	5	3	9	5	10
4	6	7	9	8	4	7	5	7	6

Систематизуємо ці дані за рівнями навчальних досягнень у вигляді таблиці: початковий рівень (1–3 бали), середній рівень (4–6 балів), достатній рівень (7–9 балів), високий рівень (10–12 балів). У перший стовпчик запишемо назви рівнів навчальних досягнень. Для кожної оцінки робитимемо позначку рискою в другому стовпчику, у рядку, який відповідає рівню навчальних досягнень. У третій стовпчик запишемо сумарну кількість учнів / учениць, які отримали оцінку відповідного рівня:

Рівень навчальних досягнень	Підрахунок кількості учнів / учениць	Сума
Початковий	|||	3
Середній	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20
Достатній	𝍸 𝍸 𝍸 |||	18
Високий	𝍸 ||||	9

3. Способи подання статистичних даних

Після обробки результати статистичних досліджень подають у найбільш наочному й стислому вигляді, наприклад за допомогою таблиць, графіків, діаграм[1].

[1] Лінійні та стовпчасті діаграми будували у 5 класі, а кругові – у 6 класі.

Приклад 2. Подамо результати статистичного дослідження із Прикладу 1 кількома способами.

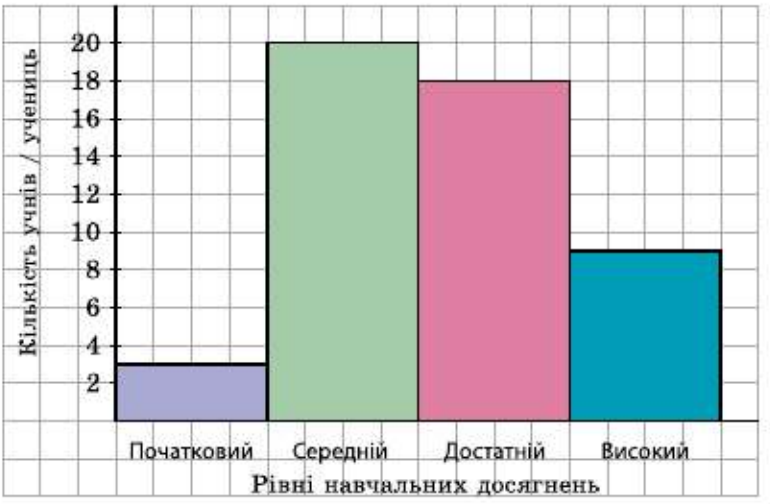
1) У вигляді *таблиці*.

Рівень навчальних досягнень	Кількість учнів / учениць
Початковий	3
Середній	20
Достатній	18
Високий	9

або

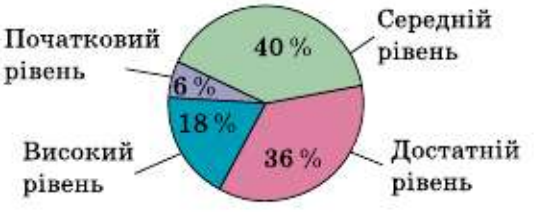
Рівень навчальних досягнень	Початковий	Середній	Достатній	Високий
Кількість учнів / учениць	3	20	18	9

2) У вигляді *стовпчастої діаграми*, яку в статистиці називають *гістограмою* (мал. 49.1).



Мал. 49.1

3) У вигляді *кругової діаграми*. На малюнку 49.2 подано кругову діаграму відсоткового розподілу кількості учнів / учениць за відповідними рівнями навчальних досягнень.



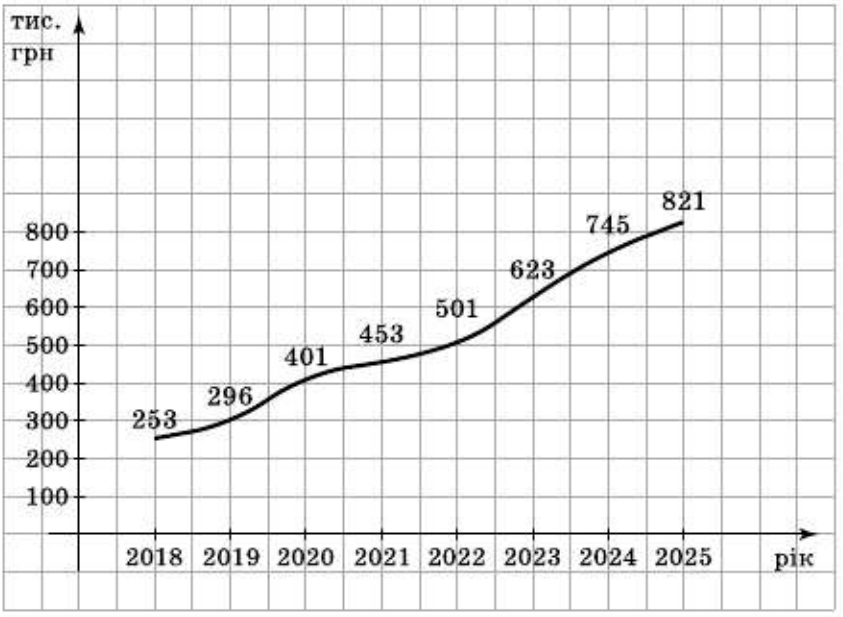
Мал. 49.2

Результати статистичних досліджень подають у вигляді графіка в разі, коли статистичні дані відображають зміни деякої величини протягом певного проміжку часу (кількох днів, місяців, років).

Приклад 3. У таблиці подано чистий прибуток ФОП (у тис. грн) по кожному з останніх восьми років.

Рік	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Прибуток, тис. грн	253	296	401	453	501	623	745	821

Подамо ці статистичні дані у вигляді *графіка* (мал. 49.3).



Мал. 49.3

Подавати результати статистичних досліджень у вигляді таблиць, діаграм, графіків можна, використовуючи на комп'ютері спеціальні програмні засоби, наприклад *Microsoft Excel* або аналогічні програми, з якими ви вже навчилися працювати на уроках інформатики.

4. Середнє значення статистичних вимірювань

Середнім значенням статистичних вимірювань **називають середнє арифметичне статистичних даних.**

Нагадаємо, для того щоб знайти середнє арифметичне кількох чисел, треба суму цих чисел поділити на кількість цих чисел.

Приклад 4. Яким є середнє значення чистого прибутку ФОП за останніх вісім років (див. **Приклад 3**)?

Розв'язання. $\dfrac{253+296+401+453+501+623+745+821}{8} =$

$= \dfrac{4093}{8} = 511{,}625$ (тис. грн)

Відповідь: 511,625 тис. грн.

Які дані називають статистичними? ○ Що вивчає математична статистика? ○ Як подають результати статистичних досліджень? ○ Що у статистиці називають гістограмою? ○ Що називають середнім значенням статистичних вимірювань?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

49.1. Під час щорічного медичного огляду виміряли (у см) зріст десяти студенток та отримали такі дані:

169; 173; 167; 169, 172; 170; 171; 175; 164; 173.

Знайдіть середнє значення цих вимірювань.

49.2. Виміряли (у м) зріст десяти дев'ятикласників, що взяли участь у конкурсі «Мужність класу», й отримали такі дані:

1,67; 1,72; 1,68; 1,70; 1,73; 1,80; 1,68; 1,81; 1,78; 1,67.

Знайдіть середнє значення цих вимірювань.

49.3. У таблиці подано статистичні дані щодо місць, які посідала футбольна команда «Зоря» протягом десяти останніх чемпіонатів України з футболу. За даними таблиці побудуйте графік.

Рік	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Місце	4	3	4	5	3	3	4	3	10	7

49.4. У таблиці подано статистичні дані щодо кількості медалей, які здобули українські спортсмени на літніх Олімпійських іграх. Побудуйте гістограму кількості золотих медалей, які здобули українські спортсмени.

Рік Олімпіади	Золоті	Срібні	Бронзові	Усього
1996	9	2	12	23
2000	3	10	10	23
2004	9	5	9	23
2008	7	5	15	27
2012	6	5	8	19
2016	2	5	4	11
2020[1]	1	6	12	19
2024	3	5	4	12

[1] – Олімпіада 2020 року відбулася 2021 року.

49.5. У таблиці подано статистичні дані щодо кількості медалей, які здобули українські школярі на міжнародних математичних олімпіадах за чотири роки поспіль. Побудуйте гістограму загальної кількості медалей, які здобули українські школярі на міжнародних математичних олімпіадах.

Рік	Золоті	Срібні	Бронзові	Усього
2013	1	3	1	5
2014	2	3	1	6
2015	2	3	1	6
2016	0	2	4	6

49.6. Використовуючи дані таблиці до задачі **49.4**, побудуйте кругову діаграму розподілу золотих, срібних та бронзових медалей на літніх Олімпійських іграх 2008 року.

49.7. Використовуючи дані таблиці до задачі **49.5**, побудуйте кругову діаграму розподілу золотих, срібних та бронзових медалей на Міжнародній математичній олімпіаді 2015 року.

Вправи для повторення

49.8. Ціна письмового стола становить 4000 грн. Якою буде ціна цього стола після:

1) зниження на 5 %; 2) підвищення на 10 %?

49.9. Відстань між селами, що дорівнює 18 км, велосипедист планував подолати за певний час. Але оскільки він рухався зі швидкістю, на 3 км/год меншою від запланованої, то витратив на дорогу на 12 хв більше, ніж планував. З якою швидкістю рухався велосипедист?

Життєва математика

49.10. Податок на додану вартість (ПДВ) у Люксембурзі становить 15 %, в Угорщині – 25 %, а в Україні – 20 % від ціни товару. Яку суму ПДВ під час купівлі планшета доведеться сплатити в кожній із цих країн, якщо його ціна (без ПДВ) в Угорщині становить 31 250 угорських форинтів, а курс угорського форинта такий: 100 угорських форинтів дорівнюють 0,32 євро або 9,17 гривні.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

49.11. (*Київська обласна олімпіада юних математиків, 2016 рік.*) Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: за будь-якої перестановки цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

§ 50. Вибірка. Числові характеристики вибірки. Графічне подання інформації про вибірку

У попередньому параграфі ми розглянули питання систематизації невеликої кількості статистичних даних. А як можна дослідити та систематизувати явища масового характеру, тобто такі, що охоплюють тисячі чи більше досліджуваних об'єктів?

1. Генеральна сукупність і вибірка

Вивчаючи різні масові явища, дослідники проводять спеціальні статистичні дослідження. Першим етапом статистичних досліджень є етап збору інформації статистичних даних.

Нехай потрібно вивчити деяку сукупність об'єктів стосовно деякої ознаки. Наприклад, якщо розглядати роботу продавця, то можна досліджувати його завантаженість протягом години, швидкість обслуговування клієнта, тип клієнта, інші критерії. Розглядаючи учнів та учениць деякого 9 класу, можна досліджувати їхній зріст, масу, розмір взуття, середню успішність та інші параметри.

Генеральна сукупність **– це сукупність усіх об'єктів, що підлягають дослідженню.**

Обсяг генеральної сукупності, тобто число об'єктів дослідження, може бути досить великим, а іноді й нескінченним[1]. Наприклад, практично неможливо виміряти зріст усіх дев'ятикласників України або розмір їхнього взуття. Але такі дані потрібні, наприклад, взуттєвій фабриці, яка хоче мати інформацію про кількість взуття кожного розміру, яке треба пошити.

У подібних випадках найкращим способом дослідження є *вибіркові спостереження*: із генеральної сукупності вибирають її деяку частину – *вибірку* і досліджують її.

Вибіркою **називають сукупність об'єктів, вибраних випадковим чином із генеральної сукупності.**

Обсяг вибірки зазвичай істотно менший, ніж обсяг генеральної сукупності.

Метод математичного дослідження, який полягає в тому, що на основі дослідження вибірки роблять висновок про всю генеральну сукупність, називають *вибірковим методом*.

Для того щоб у результаті застосування вибіркового методу отримати хороші оцінки генеральної сукупності, потрібно, щоб вибірка

[1] Часто буває неможливо дослідити всі об'єкти генеральної сукупності.

була *репрезентативною*, тобто щоб вона досить повно представляла ознаки генеральної сукупності, що вивчаються. Умовою забезпечення репрезентативної вибірки є дотримання випадковості відбору, тобто об'єкти генеральної сукупності повинні мати однакові ймовірності потрапити у вибірку.

2. Систематизація і ранжування вибірки

Другим етапом статистичних досліджень є систематизація отриманих даних (вибірки), тобто подання вибірки у зручному для подальших дій вигляді.

Приклад 1. Усі дев'ятикласники деякого району писали одну й ту саму перевірочну контрольну роботу з математики за текстом районного управління освіти. Вибірку склали 30 навмання обраних робіт цих дев'ятикласників. Нехай вибрані дев'ятикласники отримали такі оцінки.

4	8	3	7	10	6	8	5	9	7
9	2	6	1	8	4	11	7	10	12
10	5	11	4	7	6	3	8	2	9

Дані цієї вибірки можна систематизувати в таблицю за кількістю набраних балів.

Отриманий бал за контрольну роботу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість учнів	1	2	2	3	2	3	4	4	3	3	2	1

Дані вибірки можна також систематизувати за рівнями навчальних досягнень.

Рівень навчальних досягнень	Початковий рівень (1–3 бали)	Середній рівень (4–6 балів)	Достатній рівень (7–9 балів)	Високий рівень (10–12 балів)
Кількість учнів	5	8	11	6

Операцію розташування випадкових величин вибірки за принципом неспадання називають *ранжуванням* вибірки. Отже, після ранжування кожне наступне число вибірки не менше від попереднього.

Приклад 2. У результаті ранжування вибірки, розглянутої у прикладі 1, матимемо:

1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 10; 10; 11; 11; 12.

3. Вибіркові характеристики

Третім етапом статистичних досліджень є оцінювання числових характеристик вибірки, які ще називають *вибіркові характеристики*. Розглянемо деякі з них.

Розмах вибірки R **– це різниця між найбільшим і найменшим значеннями випадкової величини у вибірці.**

Для вибірки, розглянутої у прикладах 1–2, отримаємо $R = 12 - 1 = 11$.

Мода вибірки Mo **– це значення випадкової величини, що трапляється у вибірці найчастіше.**

Для вибірки, розглянутої у прикладах 1–2, є дві моди, це оцінки 7 і 8. Можна записати $Mo_1 = 7$, $Mo_2 = 8$.

Медіана вибірки Me **– це серединне значення ранжованої вибірки.**

Медіана ділить ранжовану вибірку на дві рівні за кількістю частини. Якщо у вибірці непарна кількість випадкових величин, то її медіаною є число, яке стоїть посередині. Наприклад, у ранжованій вибірці:

$$1;\ 2;\ 3;\ 3;\ \boxed{3};4;\ 5;\ 5;\ 6,$$

що складається із 9 випадкових величин, медіаною є число 3. Можна записати $Me = 3$.

Якщо у вибірці парне число випадкових величин, то його медіана – середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині. Наприклад, у ранжованій вибірці:

$$2;\ 3;\ 4;\ \boxed{4};\ \boxed{5};\ 5;\ 5;\ 6,$$

що складається з 8 випадкових величин, медіана – це середнє арифметичне чисел 4 і 5, що стоять посередині ряду. Отже, $Me = \dfrac{4+5}{2} = 4{,}5$.

Середнє значення вибірки $\bar{x}$ **– це середнє арифметичне всіх її значень x_1, x_2, x_3, ..., x_n.**

Отже, середнє значення вибірки, розглянутої у прикладах 1–2, знаходимо так:

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 2 + 6\cdot 3 + 7\cdot 4 + 8\cdot 4 + 9\cdot 3}{30} +$$

$$+ \frac{10\cdot 3 + 11\cdot 2 + 12\cdot 1}{30} = \frac{202}{30} = 6\frac{11}{15} = 6{,}73 \text{ (з точністю до сотих).}$$

4. Графічне зображення інформації про вибірку

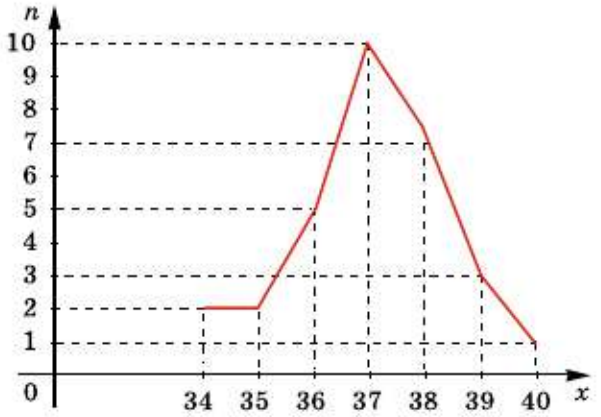
Результати статистичних досліджень після обробки можна подати в наочній і компактній формах.

Нехай дані вибірки систематизовано в таблицю, де в першому стовпці або рядку розміщено значення випадкової величини x, а в другому – відповідні їм частоти n.

Полігоном частот називають ламану лінію, відрізки якої послідовно сполучають точки з координатами $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$, де x_i – значення випадкової величини, n_i – відповідні їм частоти.

Приклад 3. У вигляді таблиці систематизовано дані вибірки про розмір взуття 30 дівчат 9 класу. Побудуємо полігон частот (мал. 50.1).

Розмір взуття, x	Частота, n
34	2
35	2
36	5
37	10
38	7
39	3
40	1



Мал. 50.1

Ви вже знаєте, як подавати результати статистичних досліджень у вигляді графіків, гістограм, кругових діаграм. Це можна робити за допомогою програмних засобів, наприклад, застосувавши програму *Excel* з офісного пакета від компанії *Microsoft* або аналогічні.

На малюнку 50.2 зображено гістограму розподілу кількості учнів залежно від отриманого бала, а на малюнку 50.3 – кругову діаграму розподілу кількості учнів залежно від рівня навчальних досягнень. Гістограму та кругову діаграму побудовано за допомогою програми *Excel*.

Мал. 50.2

Мал. 50.3

5. Застосування статистичних методів до розв'язування прикладних задач

Розглянемо, як можуть бути застосовані статистичні методи досліджень до розв'язування практичних задач.

Приклад 4. Із центральної площі невеликого міста відправляються чотири автобуси: № 1, № 2, № 3 і № 4. Місцева влада хоче з'ясувати, на якому з маршрутів має бути більше автобусів, а на якому – менше. Розв'язання цієї проблеми пов'язано з певними закономірностями та об'єктивними умовами життя мешканців міста. Звичайно, відповідь можна отримати, опитавши всіх мешканців міста, але це занадто довго і дорого.

На практиці ж роблять *вибірку*, тобто опитують вибірково кілька десятків чи сотень людей, після чого систематизують дані у вигляді таблиці. Нехай, наприклад, було опитано 200 мешканців міста, що користуються автобусами № 1, № 2, № 3 і № 4. Мешканець, який користується кількома маршрутами, мав назвати маршрут, яким користується найчастіше. Отримані статистичні дані було систематизовано у вигляді таблиці:

Маршрут	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Кількість користувачів маршруту	48	56	36	60

Таку таблицю називають *частотною*, а числа у другому її рядку – *частотами*. Ці числа показують, як часто трапляється у вибірці те чи інше значення. Суму частот усіх значень вибірки називають *обсягом вибірки*. У нашому прикладі обсягом вибірки є число 200, тобто кількість опитаних мешканців, адже $48 + 56 + 36 + 60 = 200$.

Відносною частотою значення вибірки називають записане у відсотках відношення його частоти до обсягу вибірки. Наприклад, відносна частота маршруту № 1 дорівнює $\frac{48}{200} \cdot 100\ \% = 24\ \%$.

Якщо, наприклад, місто має між маршрутами № 1, № 2, № 3 і № 4 розподілити 50 автобусів, то на маршрут № 1 доцільно виділити 12 автобусів: $50 \cdot 0{,}24 = 12$, тобто 24 % від 50. Подамо остаточні результати дослідження у вигляді таблиці:

Маршрут	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Частота	48	56	36	60
Відносна частота	24 %	28 %	18 %	30 %
Кількість автобусів, які доцільно виділити	12	14	9	15

Що таке генеральна сукупність? ○ Що називають вибіркою? ○ У чому полягає вибірковий метод? ○ Що називають розмахом вибірки? ○ Що називають модою вибірки? ○ Що називають медіаною вибірки? ○ Що таке середнє значення вибірки? ○ Що називають полігоном частот?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

50.1. Дано генеральну сукупність із 30 об'єктів:
7; 12; 11; 8; 13; 1; 9; 11; 12; 17; 20; 14; 17; 18; 20;
2; 14; 19; 20; 3; 7; 15; 19; 20; 14; 5; 4; 9; 7; 13.
Створіть вибірку цієї генеральної сукупності:
1) усіх об'єктів, що стоять на парних місцях;
2) п'яти об'єктів поспіль, починаючи з тринадцятого;
3) об'єктів, узятих через два, починаючи з третього;
4) шести об'єктів поспіль, починаючи з номера, який відповідає номеру вашого прізвища у класному журналі.

50.2. Дано генеральну сукупність із 40 об'єктів:
7; 19; 21; 14; 30; 9; 17; 22; 21; 8;
13; 17; 22; 9; 20; 3; 15; 21; 11; 1;
3; 19; 20; 24; 27; 12; 14; 19; 13; 14;
29; 17; 21; 30; 25; 13; 19; 8; 1; 5.
Створіть вибірку цієї генеральної сукупності:
1) усіх об'єктів, що стоять на непарних місцях;
2) семи об'єктів поспіль, починаючи з дванадцятого;
3) об'єктів, узятих через три, починаючи з другого;
4) п'яти об'єктів поспіль, починаючи з номера літери в українській абетці, яка відповідає першій літері вашого імені.

50.3. Стрілець у п'яти серіях по 10 пострілів у кожній влучив у мішень таку кількість разів: 7; 6; 8; 9; 6. Знайдіть для цієї вибірки:
1) розмах;
2) моду;
3) медіану;
4) середнє значення.

50.4. Баскетболістка в десяти серіях по 5 кидків у кожній влучила в кошик таку кількість разів: 2; 3; 4; 3; 3; 1; 5; 3; 2; 4. Знайдіть для цієї вибірки:
1) розмах; 2) моду;
3) медіану; 4) середнє значення.

2

50.5. 1) Проведіть ранжування генеральної сукупності об'єктів задачі 50.1.
2) Знайдіть медіану цієї генеральної сукупності.

50.6. 1) Проведіть ранжування генеральної сукупності об'єктів задачі 50.2.
2) Знайдіть медіану цієї генеральної сукупності.

50.7. 1) Заповніть таблицю за даними задачі 50.4.

Кількість влучень у серії	1	2	3	4	5
Кількість серій					

2) Побудуйте полігон частот за отриманими даними.

50.8. 1) Заповніть таблицю за даними задачі 50.3.

Кількість влучень у серії	6	7	8	9
Кількість серій				

2) Побудуйте полігон частот за отриманими даними.

50.9. Придумайте вибірку з п'яти елементів, медіаною якої є число 7.

50.10. Придумайте вибірку із семи елементів, медіаною якої є число 5.

50.11. Розмах деякої вибірки дорівнює 9, а її найбільший елемент дорівнює 17. Знайдіть найменший елемент вибірки.

50.12. Розмах деякої вибірки дорівнює 13, а її найменший елемент дорівнює 10. Знайдіть найбільший елемент вибірки.

50.13. Придумайте вибірку із семи елементів, модою якої є число 7, а медіаною – число 9.

50.14. Придумайте вибірку з п'яти елементів, модою якої є число 10, а медіаною – число 8.

50.15. Вибірка, середнє значення якої дорівнює 8,4, складається із чисел 9; a; 12; 6; $2a$. Знайдіть:

1) a; 2) медіану цієї вибірки.

50.16. Вибірка, середнє значення якої дорівнює 10,6, складається із чисел b; 7; 16; $3b$; 10. Знайдіть:

1) b; 2) медіану цієї вибірки.

50.17. На телефонній станції спостерігають за кількістю неправильних з'єднань протягом хвилини. Результати спостережень систематизовано в таблицю.

Кількість неправильних з'єднань протягом хвилини, x	0	1	2	3	4
Кількість хвилин, n	4	10	11	12	3

Знайдіть для випадкової величини x:

1) середнє значення; 2) моду;

3) медіану.

50.18. На заводі спостерігають за кількістю бракованих деталей x, виготовлених робітником протягом зміни. Результати спостережень систематизовано в таблицю.

Кількість бракованих деталей протягом зміни, x	0	1	2	3
Кількість змін, n	4	5	7	4

Знайдіть для випадкової величини x:

1) середнє значення; 2) моду; 3) медіану.

50.19. Придумайте вибірку, що складається із цілих чисел, медіаною якої є число 7,5.

50.20. *Практичне завдання.* 1) Дізнайтеся оцінки, отримані учнями та ученицями вашого класу під час останньої контрольної роботи з алгебри. За допомогою комп'ютерної програми побудуйте гістограму за цими даними.

2) Систематизуйте отримані дані за рівнями навчальних досягнень. За допомогою комп'ютерної програми побудуйте кругову діаграму за цими даними.

50.21. 1) Систематизуйте в частотну таблицю дані вибірки про розмір взуття, які отримано в результаті опитування 40 жінок.

36	38	35	37	38	39	36	38	37	38
39	34	37	38	35	36	39	37	38	39
37	39	35	38	36	38	40	35	37	36
38	37	39	36	38	35	38	37	34	36

2) Знайдіть частоти й відносні частоти значень вибірки.

Проєктна діяльність. 3) Взуттєва фабрика планує випускати 10 000 пар жіночого взуття щорічно. Яку кількість пар взуття кожного розміру доцільно випускати?

50.22. 1) Систематизуйте в частотну таблицю дані вибірки про розмір взуття, які отримано в результаті опитування 40 чоловіків.

42	39	41	43	40	42	41	44	42	43
44	42	40	38	43	41	42	44	41	43
45	41	42	40	43	39	44	41	43	42
42	43	39	42	40	44	41	42	43	40

2) Знайдіть частоти й відносні частоти значень вибірки.

Проєктна діяльність. 3) Взуттєва фабрика планує випускати 20 000 пар чоловічого взуття щорічно. Яку кількість пар кожного розміру доцільно випускати?

Вправи для повторення

50.23. Відомо, що $a < b$. Порівняйте:

1) $a + 3$ і $b + 3$;
2) $a - 7$ і $b - 7$;
3) $-a$ і $-b$;
4) $\frac{a}{3}$ і $\frac{b}{3}$;
5) $2a - 3$ і $2b - 3$;
6) $1 - 7a$ і $1 - 7b$.

50.24. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| - 2$;

3) $y = |x| + 3$; 4) $y = |x - 2|$;

5) $y = |x + 3|$; 6) $y = 2 - |x|$.

Життєва математика

50.25. Система навігації, вбудована у спинку літакового крісла, інформує пасажирів про те, що політ проходить на висоті 40 000 футів. Обчисліть висоту польоту в кілометрах. Вважайте, що 1 фут дорівнює 30,5 см.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

50.26. За яких значень a рівняння $\dfrac{ax^2 - 8x + a}{x - 2} = 0$ має єдиний розв'язок?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 10 (§§ 46–50)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** У класі 9 юнаків і 10 дівчат. Скількома способами можна вибрати старосту в цьому класі?

А. 9 **Б.** 10 **В.** 19 **Г.** 90

2. Укажіть, яка з подій є випадковою.

А. Навмання вибрана доба матиме 24 години

Б. Гральний кубик має шість граней

В. Наступним днем після п'ятниці йде субота

Г. Навмання вибране трицифрове число кратне числу 7

3. Середнє значення статистичних даних 8, 7, 9, 10 і 7 дорівнює...

А. 41 **Б.** 8,2 **В.** 7 **Г.** 10,25

2 **4.** Випадковий дослід полягав у підкиданні грального кубика, яке проведено 100 разів. Результати досліду занесено в таблицю. Якою є відносна частота випадіння числа 6?

Число	1	2	3	4	5	6
Кількість випадіння числа	18	15	16	15	19	17

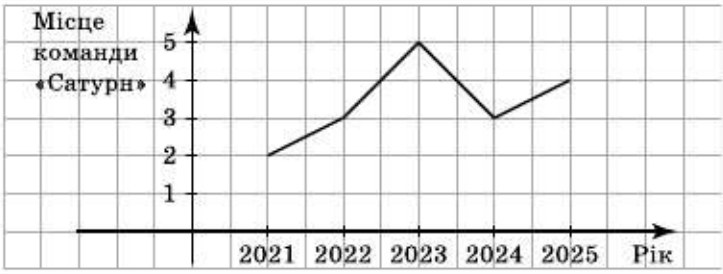
А. 0,17 **Б.** 17 **В.** 0,017 **Г.** 1,7

5. У наборі новорічних іграшок 6 червоних кульок, 3 білі й 1 жовта. Яка ймовірність того, що взята навмання з набору кулька не буде червоною?

А. 0,6 **Б.** 0,4 **В.** 0,3 **Г.** 0,1

6. На графіку (мал. 1) показано, які місця посідала волейбольна команда «Сатурн» протягом останніх п'яти чемпіонатів області з волейболу. Якого року – 2022-го чи 2024-го – команда «Сатурн» посіла більш високе місце?

А. 2022 року
Б. 2024 року
В. 2022 року і 2024 року команда «Сатурн» посіла однакове місце
Г. Неможливо визначити



Мал. 1

3 **7.** У баскетбольній команді з 5 дівчат треба вибрати капітана та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

А. 5 **Б.** 10
В. 20 **Г.** 25

8. Серед 100 опитаних жителів невеликого міста 97 мають мобільний телефон. Яке число буде найближчим до кількості мобільних телефонів, якщо опитати 200 жителів цього міста?

А. 194 **Б.** 98 **В.** 190 **Г.** 199

9. З натуральних чисел від 1 до 24 навмання називають одне. Яка ймовірність того, що це число є дільником числа 24?

А. $\frac{1}{2}$ **Б.** $\frac{7}{24}$ **В.** $\frac{3}{8}$ **Г.** $\frac{1}{3}$

4 **10.** Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 7, 9, якщо в кожному числі цифри не повторюються?

А. 256 **Б.** 24 **В.** 18 **Г.** 9

11. Відомо, що біатлоністка влучає в мішень з імовірністю, більшою за 0,8, але меншою від 0,85. Яке число найточніше відображає приблизну кількість пострілів під час тренування, якщо в них біатлоністка мала 14 влучень у мішень?

А. 17 **Б.** 20
В. 22 **Г.** 15

12. У коробці 4 чорні ручки, кілька синіх та кілька червоних. Скільки синіх ручок у коробці, якщо ймовірність навмання витягнути синю ручку дорівнює 0,5, а червону – 0,3?

А. 9 **Б.** 8
В. 12 **Г.** 10

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Вибірка, середнє значення якої дорівнює 6,2, складається із чисел 8; 5; a; $2a$; 6. Знайдіть a та установіть відповідність між вибірковою характеристикою (1–3) та її значенням (А–Г).

Вибіркова характеристика	*Значення*
1. Розмах вибірки	**А.** 4
2. Мода вибірки	**Б.** 5
3. Медіана вибірки	**В.** 6
	Г. 8

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 46–50

1 **1.** На полиці стоїть 7 збірок віршів і 3 збірки оповідань. Скількома способами з полиці можна взяти:

1) будь-яку збірку; 2) збірку віршів і збірку оповідань?

2. Які з подій є випадковими:

1) під час підкидання грального кубика випаде 5 очок;
2) площа круга, радіус якого дорівнює 8 см, дорівнюватиме 64π см^2;
3) наступним днем після 31 грудня буде 1 січня;
4) придбаний лотерейний квиток виявиться виграшним?

3. Виміряли (у см) зріст п'яти дев'ятикласників та отримали такі дані:

160, 164, 158, 161, 162.

Знайдіть для цієї вибірки:

1) розмах; 2) середнє значення.

2 **4.** Було виконано п'ять серій по 100 підкидань монети в кожній. Результати досліду занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту події A в кожній із серій.

Серія	1	2	3	4	5
Випадіння аверсу (подія A)	47	51	50	48	53
Відносна частота події A					

5. У ящику 11 білих, 4 чорні й 5 зелених кульок. Навмання виймають одну з них. Яка ймовірність того, що вона виявиться:

1) білою; 2) не зеленою?

6. У таблиці записано місця, які посідала футбольна команда «Пролісок» протягом п'яти останніх чемпіонатів області з футболу. За даними таблиці побудуйте графік.

Рік	2021	2022	2023	2024	2025
Місце	7	3	7	10	5

3 **7.** У секції плавання тренуються 7 спортсменок. Скількома способами між ними можна розподілити етапи естафети 4 по 100 м вільним стилем (тобто кожна із чотирьох плавчинь, що бере участь в естафеті, пливе свій етап: перший, або другий, або третій, або четвертий)?

8. Вибірка, середнє значення якої дорівнює 8,8, складається із чисел 4; a; 7; $3a$; 9. Знайдіть:
1) a; 2) медіану цієї вибірки.

4 **9.** У шафі лежить 10 зелених, кілька чорних і кілька сірих пар шкарпеток. Скільки чорних та скільки сірих пар шкарпеток у шафі, якщо ймовірність навмання взяти пару чорних шкарпеток дорівнює 0,3, а сірих – 0,2?

Додаткові завдання

3 **10.** Було перевірено 500 деталей, з яких 2 виявилися бракованими.
1) Скільки приблизно бракованих деталей буде в партії з 1500 деталей?
2) Скільки приблизно було деталей у партії, якщо серед них виявилося 8 бракованих?

4 **11.** Скільки різних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 3, 7, 9, якщо цифри в числі не повторюються?

12. Відомо, що баскетболістка влучає в кошик зі штрафного кидка з імовірністю, більшою за 0,7, але меншою ніж 0,75. Скільки приблизно штрафних кидків виконала вона під час тренування, якщо відбулося 12 влучень у кошик?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 10

До § 46

1 **1.** У танцювальному клубі займаються 7 юнаків і 9 дівчат. Скількома способами можна вибрати одну танцювальну пару для участі в конкурсі?

2 **2.** Скількома способами можна вибрати пару з одного голосного та одного приголосного серед звуків слова «стежка»?

3. Скількома способами можна викласти в ряд червону, білу, чорну та зелену кульки?

4. Із букв розрізної абетки складено слово «учень». Скільки різних послідовностей букв можна отримати, переставляючи букви цього слова?

3 **5.** Скільки різних трицифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри 1 і 2, якщо цифри в числі можуть повторюватися?

6. Скільки різних чотирицифрових чисел, у запису яких використовуються лише непарні цифри, можна скласти, якщо цифри в числі можуть повторюватися?

7. Скільки різних двоцифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі:
1) можуть повторюватися; 2) не можуть повторюватися?

8. Скількома способами можна вибрати старосту і його заступника в класі, де навчається 28 учнів та учениць?

9. Скількома способами можна пошити двоколірний прапор зі смужок однакової ширини, якщо є шовк восьми різних кольорів?

10. Із букв слова «сокіл» беруть деякі три і викладають у ряд. Скільки різних послідовностей букв при цьому можна отримати?

4 **11.** Скільки різних трицифрових чисел можна скласти, використовуючи цифри 0, 1, 2, 3, 4, якщо цифри в числі не повторюються?

12. Скільки існує чотирицифрових чисел, усі цифри яких парні й не повторюються?

13. Скільки є різних варіантів складання шифру із чотирьох цифр, якщо цифри в шифрі:
1) можуть повторюватися; 2) не можуть повторюватися?

14. Шкільний розклад на день містить 5 уроків. Визначте кількість різних варіантів розкладів на один день, якщо в класі вивчають 9 предметів і предмети в один день не можуть повторюватися.

15. Під час зустрічі 8 чоловіків обмінялися рукостисканнями. Скільки рукостискань було здійснено?

До § 47

1 **16.** Які з даних подій випадкові, вірогідні, неможливі:
1) програти партію в шахи рівному по силі супернику;
2) під час підкидання грального кубика випаде число 11;
3) випаде два аверси під час підкидання двох монет одночасно;
4) дата народження людини, яку зустріли, 1 вересня;
5) дата народження людини, яку зустріли, 31 вересня;
6) витягнути олівець із коробки, де лежать 6 зелених і 5 червоних олівців;
7) наступним днем після 1 грудня буде 2 грудня;
8) наступним днем після 2 грудня буде 1 грудня?

2 **17.** Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного досліду вкажіть приклад вірогідної, неможливої, випадкової події.

№ з/п	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Підкидання двох гральних кубиків одночасно			
2	Витягування хустинки з коробки, де лежать червоні та зелені хустинки			
3	Складання трицифрового числа із цифр 1, 2, 3			
4	Кількість днів навмання обраного місяця року			

18. Було виконано чотири серії по 100 підкидань монети в кожній. Результати досліду занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит та обчисліть відносну частоту події A в кожній серії.

Серія	1	2	3	4
Випадіння аверсу (подія A)	51	50	47	49
Відносна частота події A				

19. Відомо, що в партії з 10 000 тонометрів 9 є бракованими. Яка ймовірність того, що навмання вибраний із цієї партії тонометр виявиться бракованим?

3 **20.** Щоб з'ясувати, який зріст у чоловіків деякого міста трапляється частіше, а який – рідше, дослідники розійшлися по різних частинах міста й записували зріст чоловіків, яких зустрічали. Результати цього дослідження було занесено в таблицю.

Зріст, см	до 161	161–170	171–180	181–190	вище 190
Кількість опитаних	15	142	241	79	53

Оцініть (із точністю до сотих), що обраний навмання чоловік цього міста має зріст:
1) нижчий від 161 см; 2) від 171 до 180 см;
3) вищий за 180 см; 4) нижчий від 181 см.

21. *Проєктна діяльність.* Виберіть якийсь текст українською мовою, позначте в ньому будь-які шість рядків поспіль. Обчисліть відносну частоту в цих рядках букви «о» та букви «ц» і порівняйте їх.

22. У серії зі 100 пострілів стрілець влучив у ціль 84 рази.
1) Скільки приблизно влучень буде в серії зі 150 пострілів?
2) Скільки приблизно пострілів зробив стрілець, якщо серед них було 189 влучень?

4 **23.** Сергій грає в настільний теніс краще, ніж Василь, а тому виграє партію з імовірністю, більшою за 0,6, але меншою від 0,7. Скільки партій приблизно зіграли хлопці, якщо Сергій виграв 5 партій?

До § 48

2 **24.** 1) Чи всі рівноймовірні події мають імовірність, що дорівнює 0,5?
2) Наведіть приклад двох рівноймовірних подій, імовірність яких не дорівнює 0,5.

25. У лотереї з 500 квитків 50 є виграшними. Яка ймовірність виграти в цій лотереї, якщо придбати один квиток?

26. Гральний кубик підкидають один раз. Знайдіть імовірність того, що:
1) випаде число, яке є дільником числа 9;
2) випаде не більше як 2 очки;
3) випаде не менше як 2 очки;
4) випаде число, яке є квадратом натурального числа.

3 **27.** У ящику a синіх і b червоних кульок. Із нього виймають одну кульку червоного кольору й відкладають. Після цього з ящика беруть ще одну кульку. Яка ймовірність того, що вона також червона?

28. Підкидають дві однакові монети. Яка з подій більш імовірна: A – монети випадуть однаковими сторонами чи B – монети випадуть різними сторонами?

29. У коробці 25 карток, пронумерованих від 1 до 25. Із коробки навмання виймають одну картку. Яка ймовірність того, що на ній написане число:

1) 1; 2) 26;
3) парне; 4) непарне;
5) кратне числу 5; 6) просте;
7) одноцифрове; 8) двоцифрове;
9) у запису якого є цифра 2;
10) у запису якого немає цифри 1?

30. Підкинули два гральних кубики. Яка ймовірність того, що модуль різниці чисел, що випадуть, дорівнюватиме 1?

4 **31.** На десяти картках записано цифри від 0 до 9. Спочатку навмання беруть одну картку, а потім, не повертаючи її назад, – іншу. Із цих карток утворюють двоцифрове число: на першій картці – десятки цього числа, на другій – одиниці (наприклад, якщо складено число 01 – це означатиме число 1). Знайдіть імовірність того, що складуть число, яке:

1) кратне числу 3; 2) є дільником 99; 3) кратне числу 11.

32. На п'яти картках записано цифри від 1 до 5. Виймають навмання одну картку, запам'ятовують число, що на ній записано, і картку знов кладуть до інших. Потім ще раз вибирають одну картку. Знайдіть імовірність того, що:

1) обидва рази витягали однакову картку;
2) першого разу витягнули картку з більшим числом, ніж другого разу.

33. У коробці 3 білі, 5 чорних і кілька зелених кульок. Скільки зелених кульок у коробці, якщо ймовірність того, що вибрана навмання кулька є білою, більша за 0,2, а ймовірність того, що вона зелена, більша за 0,4?

До § 49

1 **34.** У таблиці подано інформацію про місця, які посідала футбольна команда «Олександрія» (м. Олександрія Кіровоградської обл.) протягом п'яти останніх чемпіонатів України з футболу.

Рік	2021	2022	2023	2024	2025
Місце	9	6	6	8	2

Яке місце в середньому посідала команда «Олександрія» протягом останніх п'яти чемпіонатів?

2 **35.** За даними таблиці попередньої задачі побудуйте графік.

3 **36.** *Проєктна діяльність.* Дізнайтеся (із газет чи інтернету) відомості про кількість м'ячів, які забивала команда вашого регіону в останніх десяти матчах чемпіонату України з футболу. Побудуйте гістограму та кругову діаграму за цими даними.

До § 50

1 **37.** Дано генеральну сукупність 50 об'єктів:
1; 7; 13; 12; 31; 15; 16; 19; 21; 40;
3; 14; 19; 21; 45; 14; 19; 29; 35; 47;
15; 17; 18; 25; 23; 15; 8; 9; 17; 1;
42; 19; 15; 19; 25; 27; 29; 4; 9; 8;
3; 4; 17; 48; 13; 29; 32; 13; 12; 5.
Створіть вибірку цієї генеральної сукупності:
1) усіх об'єктів, що стоять на парних місцях;
2) усіх об'єктів, що стоять на непарних місцях;
3) десяти об'єктів поспіль, починаючи з п'ятнадцятого;
4) об'єктів, узятих через п'ять, починаючи з першого.

38. Футболіст у п'яти серіях по 5 пенальті в кожній забив таку кількість м'ячів: 5; 4; 4; 3; 5. Знайдіть для цієї вибірки:
1) розмах;
2) моду;
3) медіану;
4) середнє значення.

2 **39.** 1) Проведіть ранжування генеральної сукупності об'єктів задачі 37.
2) Знайдіть медіану цієї генеральної сукупності.

40. 1) Заповніть таблицю за даними задачі 38.

Кількість забитих пенальті в серії	3	4	5
Кількість серій			

41. Придумайте вибірку дев'яти елементів, медіаною якої є число 10.

42. Розмах даної вибірки дорівнює 15, а найменший елемент 5. Укажіть найбільший елемент вибірки.

43. За даними задачі 49.4 побудуйте гістограму кількості бронзових медалей, що здобули українські спортсмени під час літніх Олімпійських ігор.

3 **44.** За даними задачі 49.4 побудуйте кругову діаграму кількості золотих медалей, що здобули українські спортсмени під час літніх Олімпійських ігор.

45. Придумайте вибірку з одинадцяти елементів, модою якої є число 9, а медіаною – число 5.

46. Вибірка, середнє значення якої дорівнює 5,2, складається із чисел 3; c; 7; $4c$; 6. Знайдіть:
1) c; 2) медіану цієї вибірки.

47. Самостійна робота містила 4 тестових завдання. Складено таблицю відповідності між кількістю допущених помилок X і кількістю учнів / учениць n, які припустилися такої кількості помилок.

Кількість помилок, X	0	1	2	3	4
Кількість учнів / учениць, n	2	7	6	4	1

Знайдіть для випадкової величини X:
1) середнє значення; 2) моду; 3) медіану.

Головне в темі 10

КОМБІНАТОРНЕ ПРАВИЛО СУМИ

Якщо деякий елемент A можна вибрати k_1 способами, а елемент B (незалежно від вибору елемента A) – k_2 способами, то вибрати A *або* B можна $k_1 + k_2$ способами.

КОМБІНАТОРНЕ ПРАВИЛО ДОБУТКУ

Якщо деякий елемент A можна вибрати k_1 способами i після кожного такого вибору (незалежно від вибору елемента A) інший елемент B можна вибрати k_2 способами, то пару об'єктів A i B можна вибрати $k_1 \cdot k_2$ способами.

ВИПАДКОВА ПОДІЯ. ЧАСТОТА ТА ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Випадковий дослід – це дослід (експеримент, спостереження, випробування), результат якого залежить від випадку і який можна повторити багато разів за однакових умов.

Випадкова подія – це подія, яка за однакових умов може відбутися, а може й не відбутися.

Подію, яка за даних умов обов'язково відбудеться, називають ***вірогідною***.

Подію, яка за даних умов ніколи не відбудеться, називають ***неможливою***.

Якщо за незмінних умов проведено n випадкових дослідів і в $n(A)$ випадків подія A відбулася, то число $n(A)$ називають ***частотою події A***, а відношення $\frac{n(A)}{n}$ – ***відносною частотою події A***.

КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Імовірність випадкової події A дорівнює відношенню кількості випадків, що сприяють появі події A, до кількості всіх можливих випадків:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість усіх можливих випадків, m – кількість випадків, що сприяють появі події A.

ІМОВІРНОСТІ ДЕЯКИХ ПОДІЙ

Імовірність вірогідної події дорівнює 1.

Імовірність неможливої події дорівнює 0.

Імовірність випадкової події може бути будь-яким числом від 0 до 1.

Рівноймовірні події – події, ймовірність яких однакова в даному випробуванні.

ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО СТАТИСТИКУ. СТАТИСТИЧНІ ДАНІ

Математична статистика – розділ математики, що вивчає математичні методи систематизації, обробки та дослідження статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Середнім значенням статистичних вимірювань називають середнє арифметичне статистичних даних.

ВИБІРКА. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИБІРКИ

Генеральна сукупність **– це сукупність усіх об'єктів, що підлягають дослідженню.**

Вибіркою **називають сукупність об'єктів, вибраних випадковим чином із генеральної сукупності.**

Метод математичного дослідження, який полягає в тому, що на основі дослідження вибірки роблять висновок про всю генеральну сукупність, називають *вибірковим методом*.

Розмах вибірки R **– це різниця між найбільшим і найменшим значеннями випадкової величини у вибірці.**

Мода вибірки Mo **– це значення випадкової величини, що трапляється у вибірці найчастіше.**

Медіана вибірки Me **– це серединне значення ранжованої вибірки.**

Середнє значення вибірки $\bar{x}$ **– це середнє арифметичне всіх її значень** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

ТЕМА 11

ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **згадаєте** прямокутний паралелепіпед, куб, піраміду, циліндр, конус, кулю;
- **ознайомитеся** з поняттями площини, многогранника, прямої призми;
- **дізнаєтеся** про взаємне розміщення у просторі двох прямих, прямої та площини, двох площин;
- **навчитеся** знаходити площі поверхонь та об'єми прямої призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі.

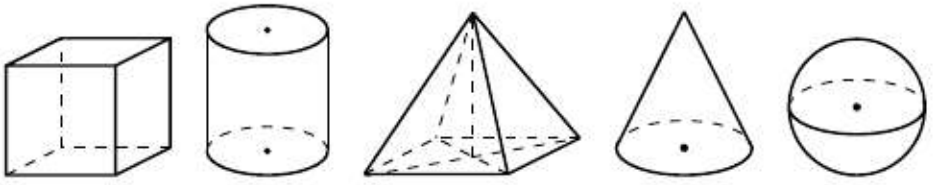
§ 51. Предмет стереометрії. Основні поняття стереометрії

1. Предмет стереометрії

Шкільний курс геометрії складається з двох частин: *планіметрії* та *стереометрії*. Слово «стереометрія» утворене від грецьких слів *stereos* – просторовий і *metreo* – міряю.

Стереометрія **– це розділ геометрії, у якому вивчаються фігури простору.**

Це такі фігури, у яких не всі точки містяться в одній площині, наприклад: куб, циліндр, піраміда, конус, куля (мал. 51.1).



Мал. 51.1

У цьому розділі розглянемо початкові відомості з курсу стереометрії. Основними фігурами стереометрії є *точка*, *пряма* і *площина*.

2. Прямі та площини у стереометрії

Нагадаємо, що уявлення про частину площини дає поверхня стола, шибки, стелі тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою, вона не має краю і не має товщини. На малюнках зображують тільки частину площини, зазвичай паралелограмом (мал. 51.2); позначають площини грецькими буквами α (альфа), β (бета), γ (гамма) й ін.

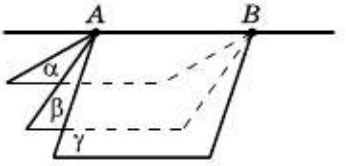
Мал. 51.2

Як і в планіметрії,

через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того тільки одну (мал. 51.3).

Мал. 51.3

Отже, дві точки A і B (мал. 51.3) визначають положення єдиної прямої, але вони не визначають положення єдиної площини. Через дві точки A і B можна провести безліч площин – площини α, β, γ (мал. 51.4).



Мал. 51.4

Єдину площину можна провести:

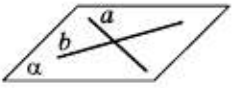
1) *через дві прямі, що перетинаються* (мал. 51.5);

2) *через дві паралельні прямі* (мал. 51.6);

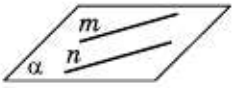
3) *через пряму і точку, що не лежить на цій прямій* (мал. 51.7);

4) *через три точки, що не лежать на одній прямій* (мал. 51.8).

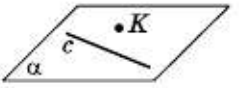
Площину, що проходить через точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, іноді називають площиною ABC.



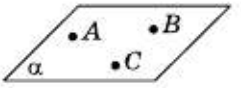
Мал. 51.5



Мал. 51.6



Мал. 51.7

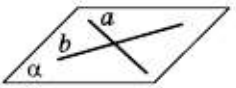


Мал. 51.8

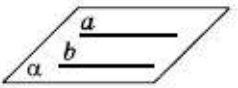
Що вивчає стереометрія? ○ Які основні фігури стереометрії? ○ Скільки прямих та скільки площин можна провести через дві точки? ○ Через які геометричні фігури можна провести єдину площину?

§ 52. Взаємне розміщення прямих у просторі

Із курсу планіметрії відомо, що дві різні прямі, які лежать в одній площині, можуть або *перетинатися* (мал. 52.1), або бути *паралельними* (мал. 52.2).

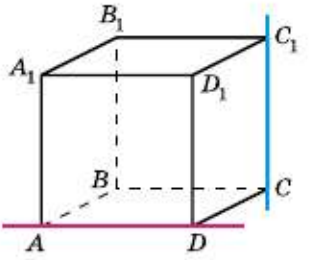


Мал. 52.1



Мал. 52.2

У стереометрії можливий і третій випадок. Розглянемо фігуру, відому нам з молодших класів, – прямокутний паралелепіпед (мал. 52.3). Прямі AD і CC_1 не перетинаються і не паралельні, вони не лежать в одній площині.



Мал. 52.3

Дві прямі, які не лежать в одній площині, називають *мимобіжними*.

На малюнку 52.3 є ще пари мимобіжних прямих: AD і BB_1, AB і CC_1, BB_1 і DC та інші.

Як і в планіметрії,

дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

На малюнку 52.3 є пари перпендикулярних прямих: $AD \perp AB$, $AD \perp AA_1$, $AB \perp AA_1$, $AD \perp DD_1$ та інші.

Приклад. Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $BD = \sqrt{281}$ см.

Розв'язання (мал. 52.4).

1) У $\triangle ABC$ ($\angle A = 90°$):

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см).

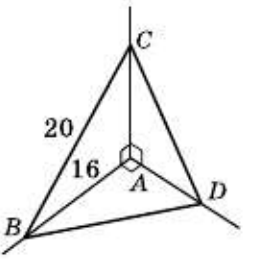
2) У $\triangle ABD$ ($\angle A = 90°$):

$AD = \sqrt{BD^2 - BA^2} = \sqrt{(\sqrt{281})^2 - 16^2} = 5$ (см).

3) У $\triangle ACD$ ($\angle A = 90°$):

$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (см).

Відповідь: 13 см.



Мал. 52.4

Як можуть бути розміщені прямі у просторі? ○ Які прямі називають мимобіжними? ○ Назвіть кілька пар мимобіжних прямих на малюнку 52.3. ○ Які прямі називають перпендикулярними? ○ Назвіть кілька пар перпендикулярних прямих на малюнку 52.3.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

52.1. На малюнку 52.3 зображено прямокутний паралелепіпед.
1) Назвіть усі ребра, паралельні ребру A_1D_1.
2) Яке взаємне розміщення прямих AB і BB_1, AB і DC, AB і CC_1?

52.2. На малюнку 52.3 зображено прямокутний паралелепіпед.
1) Назвіть усі ребра, паралельні ребру AB.
2) Яке взаємне розміщення прямих AD і A_1D_1, A_1D_1 і D_1C_1, A_1B_1 і DD_1?

52.3. Скільки різних прямих можна провести через одну точку?

52.4. Скільки різних площин можна провести через одну точку?

52.5. Намалюйте площину α, що проходить через точку B і пряму c.

52.6. Намалюйте площину β, що проходить через дві прямі m і n, які перетинаються.

52.7. (*Усно.*) З довкілля найдіть кілька прикладів:
1) паралельних прямих; 2) мимобіжних прямих;
3) перпендикулярних прямих.

52.8. (*Усно.*) Чому стілець на трьох ніжках не хитається, а стілець на чотирьох ніжках інколи буває нестійким?

52.9. Чому мотоцикл із коляскою стоїть надійно, а для його закріплення без коляски потрібна додаткова опора?

52.10. Назвіть на малюнку 52.3 три прямі, мимобіжні із прямою DD_1.

52.11. Назвіть на малюнку 52.3 три прямі, мимобіжні із прямою BC.

3 **52.12.** Прямі AB і CD мимобіжні. Доведіть, що прямі AC і BD мимобіжні.

52.13. Точка M не належить площині, що проходить через точки A, B і C, які не лежать на одній прямій. Доведіть, що прямі MA і BC мимобіжні.

52.14. Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо:

1) $AD = 6$ см, $DC = 14$ см, $AB = 3$ см;

2) $BD = 4{,}5$ см, $CD = 8$ см, $AB = 2{,}5$ см.

52.15. Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні. Знайдіть довжину відрізка BD, якщо:

1) $BC = 17$ см, $AC = 15$ см, $AD = 6$ см;

2) $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $DC = 16$ см.

4 **52.16.** Прямі a і b не лежать в одній площині, і прямі b і c не лежать в одній площині. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і c? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.

52.17. Прямі a і b паралельні. Пряма c перетинає пряму a. Яким може бути взаємне розміщення прямих c і b? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.

52.18. Скільки різних прямих визначають усі пари вершин куба?

Вправи для повторення

52.19. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 14 см і 17 см. Знайдіть периметр подібного йому трикутника, сума найбільшої та найменшої сторін якого дорівнює 70 см.

52.20. Кут, утворений медіаною і висотою, проведеними з вершини прямого кута прямокутного трикутника, дорівнює α. Знайдіть катети трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює c.

Життєва математика

52.21. Ретрансляційна вежа спирається на основу у формі кільця. Радіус зовнішнього кола дорівнює 15 м, а внутрішнього кола – 6 м. Знайдіть площу фундаменту вежі з точністю до десятих $м^2$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

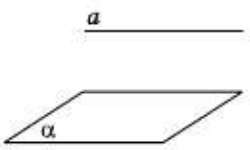
52.22. Один з кутів трикутника дорівнює 120°, а його сторони утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть відношення сторін трикутника.

§ 53. Взаємне розміщення прямої та площини. Перпендикуляр до площини

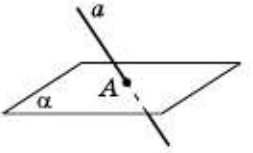
1. Взаємне розміщення прямої та площини

Існує три випадки взаємного розміщення прямої та площини.

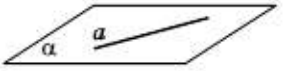
1. Пряма a не має з площиною α спільних точок (мал. 53.1). У цьому разі пряму називають *паралельною площині*. Це записують так: $a \parallel \alpha$.
2. Пряма a має з площиною α лише одну спільну точку A (мал. 53.2). У цьому разі кажуть, що пряма і площина *перетинаються в точці A*.
3. Кожна точка прямої a належить площині α (мал. 53.3). Тоді кажуть, що пряма *лежить у площині*.



Мал. 53.1



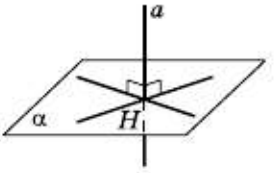
Мал. 53.2



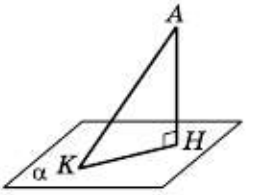
Мал. 53.3

2. Пряма і площина, перпендикулярні між собою

Якщо пряма a перетинає площину α в точці H так, що кожна пряма, яка лежить у площині α і проходить через точку H, перпендикулярна до прямої a (мал. 53.4), то кажуть, що *пряма a перпендикулярна до площини α*. Це записують так: $a \perp \alpha$.



Мал. 53.4

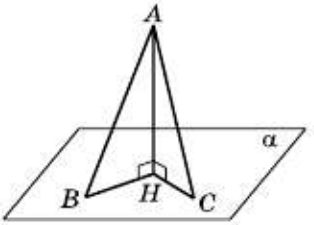


Мал. 53.5

Нехай пряма AH перпендикулярна до площини α, причому точка H належить площині α (мал. 53.5). У цьому разі відрізок AH називають *перпендикуляром*, проведеним з точки A до площини α. Довжину цього перпендикуляра називають *відстанню від точки A до площини α*.

Точку H називають *основою перпендикуляра*. Відрізок, що сполучає точку A з будь-якою іншою точкою K площини α, називають *похилою*, проведеною з точки A до площини α. Точку K називають *основою похилої*, відрізок HK називають *проєкцією похилої*.

Приклад. З точки до площини проведено дві похилі 13 см і 20 см завдовжки. Проєкція більшої похилої на площину дорівнює 16 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини та проєкцію другої похилої на цю площину.



Мал. 53.6

Розв'язання. Нехай із точки A проведено перпендикуляр AH до площини α та похилі AB і AC до цієї самої площини (мал. 53.6). За умовою $AB = 13$ см, $AC = 20$ см, $HC = 16$ см.

1) У $\triangle AHC$ ($\angle H = 90°$): $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см). Отже, відстань від точки до площини дорівнює 12 см.

2) У $\triangle AHB$ ($\angle H = 90°$): $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см). Отже, проєкція другої похилої на площину дорівнює 5 см.

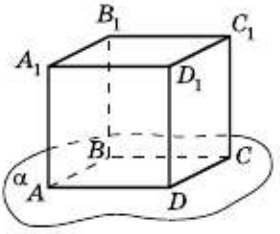
Відповідь: 12 см, 5 см.

Як можуть бути розміщені у просторі пряма і площина? ○ У якому разі кажуть, що пряма перпендикулярна до площини? ○ Поясніть, який відрізок називають перпендикуляром до площини, проведеним із даної точки. ○ Що називають основою перпендикуляра? ○ Поясніть, який відрізок називають похилою, проведеною до даної площини. ○ Що називають основою похилої? ○ Що називають проєкцією похилої?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

53.1. Покажіть на моделях із довкілля прямі та площини:
1) паралельні між собою;
2) перпендикулярні між собою.

53.2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 53.7). Назвіть дві прямі:
1) паралельні площині α;
2) які лежать у площині α;
3) перпендикулярні до площини α.

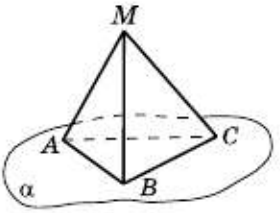


Мал. 53.7

53.3. Точки A, B і C лежать у площині α, а точка M не лежить у цій площині (мал. 53.8). Укажіть три прямі:
1) які лежать у площині α;
2) які перетинають площину α.

53.4. AH – перпендикуляр, проведений із точки A до площини α, AK – похила (див. мал. 53.5). Знайдіть KH, якщо $AH = 6$ см, $AK = 10$ см.

53.5. AH – перпендикуляр, проведений із точки A до площини α, AK – похила (див. мал. 53.5). Знайдіть AK, якщо $AH = 15$ см, $KH = 8$ см.



Мал. 53.8

2 **53.6.** Прямі a і b – паралельні. Пряма a лежить у площині α. Яким може бути взаємне розміщення прямої b і площини α?

53.7. Прямі a і b – паралельні. Пряма a перетинає площину α. Яке взаємне розміщення прямої b і площини α?

53.8. Кінці відрізка, який не перетинає площину, віддалені від неї на 5 см і 7 см. Знайдіть відстань від площини до середини відрізка.

53.9. Через точку B, яка не лежить у площині α, проведено пряму b, паралельну площині α. Скільки існує у площині α прямих, паралельних прямій b?

53.10. Точка C не належить площині α. Скільки існує прямих, які проходять через точку C і паралельні площині α?

3 **53.11.** З точки до площини проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 5 см і 7 см, а різниця проєкцій похилих – 4 см. Знайдіть проєкції похилих та відстань від цієї точки до площини.

53.12. З точки до площини проведено дві похилі, сума довжин яких дорівнює 24 см. Знайдіть довжини похилих та відстань від точки до площини, якщо проєкції цих похилих дорівнюють 10 см і 2 см.

53.13. Чи можна стверджувати, що пряма, яка паралельна даній площині, паралельна і кожній прямій цієї площини?

53.14. Чи можна стверджувати, що пряма, паралельна даній площині, паралельна нескінченній кількості прямих цієї площини?

4 **53.15.** Вершини A, B і C прямокутника $ABCD$ розміщені від площини α, яка не перетинає площину прямокутника, відповідно на відстанях 5 см, 4 см і 7 см. На яких відстанях від площини розміщені точка перетину діагоналей прямокутника і вершина D?

53.16. Вершини M, N і K квадрата $MNKL$ розміщені від площини β, яка не перетинає площину квадрата, відповідно на відстанях 1 см, 4 см і 9 см. На яких відстанях від площини розміщені точка перетину діагоналей квадрата і вершина L?

Вправи для повторення

53.17. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 16 см і 6 см, а гострий кут – 60°. Знайдіть діагональ трапеції та її площу.

53.18. Радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, дорівнює бічній стороні трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо його основа дорівнює a.

Життєва математика

53.19. Кімната у формі прямокутника має розміри 3,5 м × 5,2 м. У кімнаті є двері 80 см завширшки.

1) Скільки метрів плінтуса треба придбати для цієї кімнати, якщо магазин продає плінтус цілими метрами?

2) Якою буде вартість покупки, якщо ціна за один метр плінтуса – 80 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

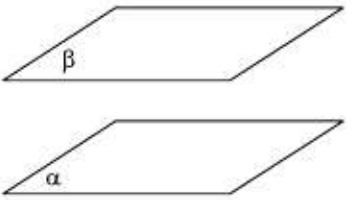
53.20. Сторони прямокутного трикутника утворюють геометричну прогресію зі знаменником q, де $q > 1$. Знайдіть q.

§ 54. Взаємне розміщення площин

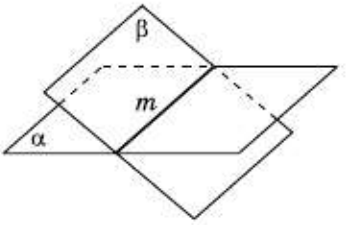
1. Паралельні площини та площини, що перетинаються

Існує два випадки взаємного розміщення двох різних площин:

1) площина α не має з площиною β спільних точок (мал. 54.1), тобто ці площини *паралельні*, і записують це так: $\alpha \parallel \beta$;
2) площини α і β *перетинаються* по прямій m (мал. 54.2).



Мал. 54.1



Мал. 54.2

У кімнаті моделлю паралельних площин є, наприклад, площини підлоги і стелі, а моделлю площин, що перетинаються, площини підлоги й однієї зі стін.

Паралельність площин важлива на практиці. Якщо підлога і стеля будівлі не паралельні між собою, то не можна будувати наступний поверх. Непаралельність протилежних стін кімнати робить її незручною, зменшує її корисний об'єм. Щоб зручніше розміщувати вантаж, протилежні стіни вагонів, стінки контейнерів, коробок тощо також роблять паралельними.

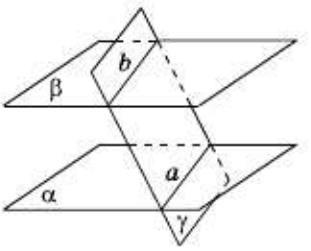
Приклад 1. (*Властивість паралельних площин*). Довести, що прямі перетину січною площиною двох паралельних площин паралельні між собою.

Доведення. Нехай січна площина γ перетинає дві паралельні площини α і β відповідно по прямих a і b (мал. 54.3).

1) Прямі a і b лежать в одній площині – площині γ, тому вони або паралельні, або перетинаються.

2) Припустимо, що a і b перетинаються. Тоді спільна точка цих прямих є також спільною точкою площин α і β. Це суперечить умові, оскільки площини α і β паралельні.

3) Отже, наше припущення неправильне. Тому $a \parallel b$. ■



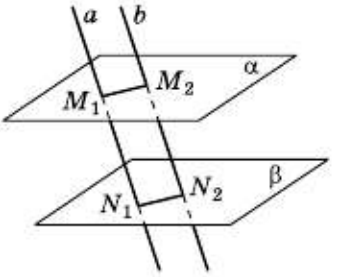
Мал. 54.3

Приклад 2. (*Властивість паралельних площин, що перетинають паралельні прямі.*) Довести, що відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні.

Доведення. Нехай $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel b$, a перетинає α і β відповідно в точках M_1 і N_1, b перетинає α і β відповідно в точках M_2 і N_2 (мал. 54.4).

1) Проведемо через a і b площину γ. Площина γ перетинає площину α по прямій M_1M_2, а площину β – по прямій N_1N_2. За попереднім прикладом $M_1M_2 \parallel N_1N_2$.

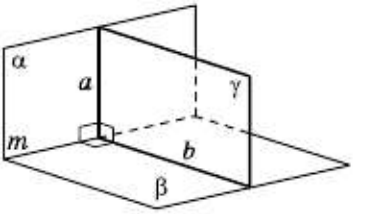
2) Тоді $M_1M_2N_2N_1$ – паралелограм, оскільки має дві пари протилежних паралельних сторін. Тому $M_1N_1 = M_2N_2$. ■



Мал. 54.4

2. Перпендикулярні площини

Нехай площини α і β перетинаються по прямій m (мал. 54.5). Якщо деяка площина γ перпендикулярна до прямої m, перетинає площини α і β по перпендикулярних прямих, то площини α і β називають *перпендикулярними*. На малюнку 54.5: $\gamma \perp m$, γ перетинає α по прямій a, а β – по прямій b; $a \perp b$. Тому площини α і β перпендикулярні, і записують це так: $\alpha \perp \beta$.



Мал. 54.5

Як можуть бути розміщені у просторі дві площини? ○ У якому разі кажуть, що площини перпендикулярні? ○ Сформулюйте властивості паралельних площин.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

54.1. Проілюструйте у класній кімнаті перпендикулярність двох площин; паралельність двох площин.

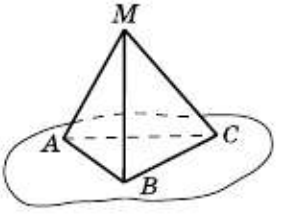
54.2. На скільки частин ділять простір дві площини, що перетинаються?

54.3. На скільки частин ділять простір дві паралельні площини?

54.4. Точка M не лежить у площині трикутника ABC (мал. 54.6).

1) Яким є взаємне розміщення площин ABC і MAB?

2) Назвіть пряму перетину площин MBC і ABC.

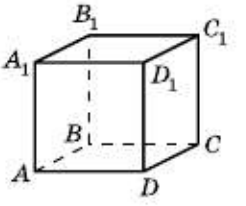


Мал. 54.6

54.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 54.7). Назвіть:

1) пару паралельних площин;

2) дві пари перпендикулярних площин.



Мал. 54.7

2 **54.6.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (див. мал. 54.7).

1) Яким є взаємне розміщення площин A_1AB і D_1CD, A_1AD і D_1CC_1?

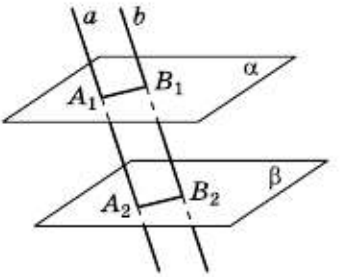
2) Назвіть пряму перетину площин $A_1B_1C_1$ і A_1AD.

3) Чи є на малюнку пара площин, які перетинаються, але не перпендикулярні?

54.7. Площини α і β паралельні площині γ. Яке взаємне розміщення площин α і β?

54.8. Площини α і β паралельні. Площина γ перетинає площину α. Яке взаємне розміщення площин β і γ?

54.9. Паралельні прямі a і b перетинають площину α відповідно в точках A_1 і B_1, а площину β, яка паралельна площині α, відповідно в точках A_2 і B_2 (мал. 54.8). Знайдіть довжини відрізків A_1B_1 і A_1A_2, якщо $A_2B_2 = 3$ см, $B_1B_2 = 10$ см.



Мал. 54.8

54.10. Паралельні площини α і β перетинаються паралельними прямими a і b так, що пряма a перетинає площини α і β відповідно в точках A_1 і A_2, а пряма b – в точках B_1 і B_2 (мал. 54.8). Знайдіть довжини відрізків A_2B_2 і B_1B_2, якщо $A_1B_1 = 2$ см, $A_1A_2 = 8$ см.

3 **54.11.** Кінець A відрізка AB належить площині α, а кінець B – площині β. Площини α і β паралельні. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Чи може відстань від точки A до площини β дорівнювати:

1) 11 см; 2) 12 см; 3) 13 см; 4) 15 см?

54.12. Кінець B відрізка BC належить площині β, а кінець C – площині γ. Площини β і γ паралельні, $BC = 10$ см. Чи може відстань від точки B до площини γ дорівнювати:

1) 11 см; 2) 10 см; 3) 9,5 см; 4) 9 см?

54.13. Площини α і β – паралельні. Пряма a належить площині α, а пряма b – площині β. Чи можуть прямі a і b:

1) бути паралельними; 2) бути мимобіжними; 3) перетинатися?

Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

54.14. Площини α і β – перетинаються. Пряма a належить площині α, а пряма b – площині β. Чи можуть прямі a і b:

1) бути паралельними; 2) бути мимобіжними; 3) перетинатися?

Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

4 **54.15.** Прямі a і b паралельні. Площина α паралельна прямій a, а площина β – прямій b. Чи можуть площини α і β:

1) бути паралельними; 2) перетинатися;

3) бути перпендикулярними?

Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

54.16. Кожна з площин α і β паралельна прямій m. Чи можуть площини α і β:
1) бути паралельними;
2) перетинатися;
3) бути перпендикулярними?
Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

54.17. Доведіть, що дві площини, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої, паралельні.

Вправи для повторення

54.18. Хорда 30 см завдовжки перпендикулярна до діаметра й ділить його на відрізки у відношенні 1 : 9. Знайдіть довжину кола.

54.19. У трапеції $ABCD$ AD і BC – основи, кути A і D – гострі. Бісектриси кутів A і D перетинаються в точці K, що належить стороні BC. $AK = \sqrt{5}$ см, $KD = \sqrt{10}$ см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 1 см.

Життєва математика

54.20. Діаметр вала колодязя становить 36 см, глибина колодязя до води – 9 м. Скільки разів треба повернути ручку вала, щоб витягти відро з водою?

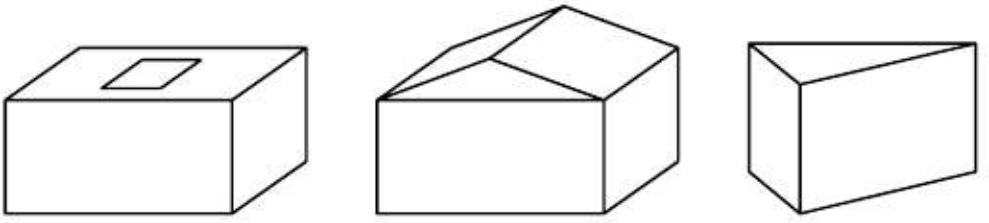
Цікаві задачі – поміркуй одначе

54.21. h_1, h_2, h_3 – висоти трикутника, $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^2 = 1$. Доведіть, що трикутник прямокутний.

§ 55. Пряма призма. Площа поверхні та об'єм призми

1. Многогранник

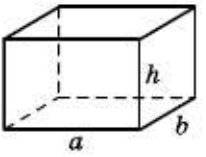
Форму многогранника мають різні вироби, деталі, будівлі тощо (мал. 55.1).



Мал. 55.1

Частину простору, обмежену скінченною кількістю многокутників, називають *многогранником* (мал. 55.2).

Мал. 55.2



Мал. 55.3

Многокутники, які обмежують многогранник, називають його *гранями*, сторони многокутників – *ребрами*, а вершини – *вершинами многогранників*.

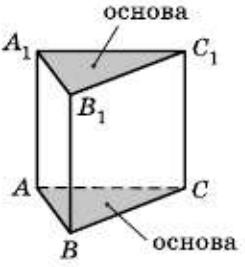
У молодших класах ви ознайомилися з видами многогранників – прямокутним паралелепіпедом та кубом. Прямокутний паралелепіпед (мал. 55.3) має 6 граней, кожна з яких є прямокутником, 12 ребер, 8 вершин.

2. Пряма призма

Розглянемо один з найпростіших многогранників – *пряму призму*.

***Прямою призмою* називають многогранник, у якого дві грані, які є рівними многокутниками, лежать у паралельних площинах, а всі ребра, які не належать цим граням, перпендикулярні до цих площин (мал. 55.4).**

Рівні многокутники називають *основами призми*, а інші грані – *бічними гранями*. На малюнку 55.4: основи призми – трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, бічні грані – прямокутники ABB_1A_1, BB_1C_1C, AA_1C_1C. Ребра призми, які не є сторонами її основ, називають *бічними ребрами* призми. На малюнку 55.4 AA_1, BB_1, CC_1 – бічні ребра. *Висотою* прямої призми є бічне ребро.



Мал. 55.4

З означення прямої призми випливає, що бічні ребра прямої призми рівні між собою як відрізки паралельних прямих, що розміщені між паралельними площинами. Отже,

кожна бічна грань будь-якої прямої призми – прямокутник.

Якщо основою призми є n-кутник, то її називають *n-кутною*. На малюнку 55.4 зображено пряму трикутну призму. Куб та прямокутний паралелепіпед є прикладами прямих чотирикутних призм.

Пряму призму, основа якої – правильний многокутник, називають *правильною*.

3. Площі бічної та повної поверхонь прямої призми

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней.

Теорема (про площу бічної поверхні прямої призми). Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на довжину бічного ребра.

Доведення. Нехай a_1, a_2, ..., a_n – сторони основ прямої призми, а h – довжина бічного ребра. Тоді площа бічної поверхні:

$$S_{\text{бічн.}} = a_1h + a_2h + ... + a_nh = h(a_1 + a_2 + ... + a_n) = Ph,$$

де $P = a_1 + a_2 + ... + a_n$ – периметр основи призми. ■

Площею повної поверхні призми називають суму всіх її граней. Позначимо: $S_{\text{п.п.}}$ – площа повної поверхні, $S_{\text{бічн.}}$ – площа бічної поверхні, $S_{\text{осн.}}$ – площа основи призми. Тоді:

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}.$$

4. Об'єм прямої призми

Кожен многогранник, і призма зокрема, має *об'єм*, який виражається додатним числом. Нагадаємо, що за одиницю об'єму приймають об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини.

Як відомо з попередніх класів, об'єм прямокутного паралелепіпеда (див. мал. 55.4) дорівнює добутку його вимірів:

$$V = abh.$$

Оскільки ab – площа основи паралелепіпеда і $S_{\text{осн.}} = ab$, h – його бічне ребро, то об'єм можна знайти також за формулою:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h.$$

За такою самою формулою можна знайти об'єм будь-якої прямої призми.

Об'єм прямої призми дорівнює добутку площі його основи на бічне ребро.

Цей факт буде доведено у старших класах.

5. Розв'язування прикладних задач на пряму призму

Формули для обчислення площ поверхонь та об'ємів використовуються під час розв'язування *прикладних задач*.

Приклад 1. Кімната має довжину 4 м, ширину 3 м та висоту 2,5 м, у кімнаті є двері 2 м заввишки і 0,8 м завширшки, а також вікно 1 м заввишки і 1,2 м завширшки. Знайти: 1) об'єм кімнати; 2) площу стін кімнати, які треба обклеїти шпалерами; 3) кількість рулонів шпалер, які потрібні для обклеювання стін кімнати, якщо кожен рулон має 10 м завдовжки та 0,53 м завширшки.

Розв'язання. 1) $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 4 \cdot 3 \cdot 2{,}5 = 30$ (м^3).

2) Площа стін, які треба обклеїти шпалерами, дорівнює різниці бічної поверхні призми, форму якої має кімната, і суми площ дверей та вікна. $S_{\text{бічн.}} = 2 \cdot (4 + 3) \cdot 2{,}5 = 35$ (м^2), площа дверей: $S_1 = 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6$ (м^2), площа вікна: $S_2 = 1 \cdot 1{,}2 = 1{,}2$ (м^2).
Тоді шукана площа S, яку потрібно обклеїти шпалерами:
$S = S_{\text{бічн.}} - (S_1 + S_2) = 35 - (1{,}6 + 1{,}2) = 32{,}2$ (м^2).

3) Площа одного рулону дорівнює $10 \cdot 0{,}53 = 5{,}3$ (м^2). Оскільки $32{,}2 : 5{,}3 \approx 6{,}1$, то для обклеювання стін кімнати потрібно 7 рулонів шпалер.

Відповідь: 1) 30 м^3; 2) 32,2 м^2; 3) 7 рулонів.

Приклад 2. Ребра пакета соку дорівнюють 6 см, 9 см і 19,5 см. Знайти загальну площу матеріалу, використаного для виготовлення пакета, та об'єм пакета.

Розв'язання. 1) $S_{\text{бічн.}} = 2 \cdot (6 + 9) \cdot 19{,}5 = 585$ (см^2); $S_{\text{осн.}} = 6 \cdot 9 = 54$ (см^2).
Тоді $S = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}} = 585 + 2 \cdot 54 = 693$ (см^2).

2) $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 54 \cdot 19{,}5 = 1053$ (см^3). Об'єм пакета трішки більший за 1 л.

Відповідь: 1) 693 см^2; 2) 1053 см^3.

Що називають многогранником? ○ Що називають гранями, ребрами, вершинами многогранника? ○ Що називають прямою призмою? ○ Що називають основами призми, бічними гранями та бічними ребрами призми? ○ Що називають правильною призмою? ○ Що називають площею бічної поверхні призми? ○ Сформулюйте і доведіть теорему про площу бічної поверхні прямої призми. ○ Як знайти площу повної поверхні призми? ○ Як знайти об'єм прямої призми?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

55.1. Знайдіть повну поверхню та об'єм куба, ребро якого дорівнює 3 см.

55.2. Знайдіть повну поверхню та об'єм куба, ребро якого дорівнює 2 дм.

55.3. Знайдіть об'єм цеглини, виміри якої становлять 25 см, 12 см, 6,5 см.

55.4. Знайдіть об'єм та повну поверхню прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 4 см і 5 см.

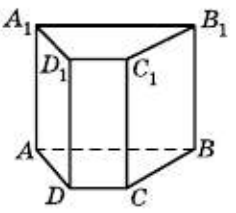
55.5. Знайдіть об'єм та повну поверхню прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 3 см, 5 см і 6 см.

55.6. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см. Бічне ребро призми дорівнює 10 см. Знайдіть бічну поверхню призми та її об'єм.

55.7. Знайдіть об'єм та площу бічної поверхні правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює 5 см, а бічне ребро – 8 см.

3

55.8. На малюнку 55.5 зображено пряму чотирикутну призму, $ABCD$ – трапеція. Запишіть:
1) три пари прямих, паралельних між собою;
2) три прямі попарно мимобіжні;
3) пряму і площину, перпендикулярні між собою;
4) прямі, паралельні площині $A_1D_1C_1$;
5) прямі, паралельні площині AA_1D;
6) прямі, що перетинають площину CC_1B;
7) паралельні площини;
8) прямі, перпендикулярні до площини ABC.



Мал. 55.5

55.9. Знайдіть об'єм та площу повної поверхні прямої призми, основа якої – рівнобічна трапеція з основами 16 см і 6 см та бічною стороною 13 см, а бічне ребро призми дорівнює 20 см.

55.10. Знайдіть об'єм та площу повної поверхні прямої призми, в основі якої лежить трикутник зі сторонами 9 см, 10 см і 17 см, а бічне ребро призми дорівнює 5 см.

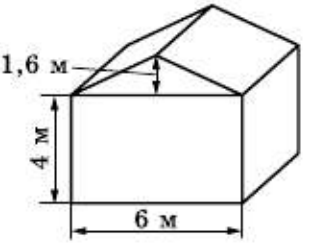
55.11. В основі прямої призми лежить ромб, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть повну поверхню та об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

4

55.12. У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Площа її бічної поверхні дорівнює 108 см^2. Знайдіть об'єм призми.

55.13. У прямій чотирикутній призмі всі ребра рівні. Площа її бічної поверхні дорівнює 256 см^2. Знайдіть об'єм призми, якщо один з гострих кутів основи дорівнює 30°.

55.14. На малюнку 55.6 зображено будівлю з двосхилим дахом, довжина якої становить 10 м, інші виміри подано на малюнку. Обчисліть: 1) площу даху будинку; 2) місткість горища; 3) місткість усієї будівлі.



Мал. 55.6

Вправи для повторення

55.15. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 40 см, а висота, проведена до основи, – 10 см. Знайдіть площу трикутника.

55.16. Побудуйте рівнобічну трапецію за більшою основою, діагоналлю і тупим кутом.

Життєва математика

55.17. На городі грядка з огірками має форму квадрата зі стороною 12 м. Скільки відер води знадобиться для поливу огірків, якщо вони потребують 4 л на один м^2, а ємність відра – 12,5 л?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

55.18. Із точки A до кола, радіус якого 35 см, проведено дві дотичні AB і AC, $BC = 56$ см. Знайдіть AB. Знайдіть кілька способів розв'язування задачі.

§ 56. Піраміда. Площа поверхні та об'єм піраміди

1. Піраміда

Розглянемо ще один вид многогранників – *піраміду*.

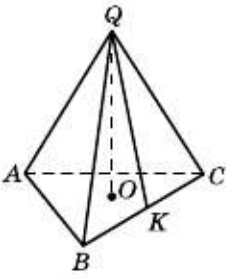
Пірамідою **називають многогранник, у якого одна грань – довільний многокутник, а всі інші – трикутники, що мають спільну вершину (мал. 56.1).**

Згаданий многокутник називають *основою піраміди*, спільну вершину трикутних граней – *вершиною піраміди*, а самі ці грані – *бічними гранями піраміди*. На малюнку 56.1: основа піраміди – чотирикутник $ABCD$, вершина – точка Q, *бічні грані* – трикутники ABQ, BCQ, CDQ і DAQ. Ребра піраміди, які не є сторонами основ, називають *бічними ребрами* піраміди. На малюнку 56.1: AQ, BQ, CQ, DQ – бічні ребра.

Висотою піраміди називають перпендикуляр, проведений із вершини піраміди до площини її основи. На малюнку 56.1 – відрізок QO – висота піраміди, точка O – *основа* цієї *висоти*.

Якщо основою піраміди є n-кутник, то її називають *n-кутною*. На малюнку 56.1 зображено чотирикутну піраміду, а на малюнку 56.2 – трикутну піраміду.

Мал. 56.1



Мал. 56.2

2. Правильна піраміда

Піраміду, основа якої – правильний многокутник, а основа висоти збігається із центром цього многокутника, називають ***правильною пірамідою*****.**

На малюнку 56.2 зображено правильну трикутну піраміду.

Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, а всі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники.

Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з вершини, називають *апофемою*. На малюнку 56.2 відрізок QK – апофема.

3. Площа бічної та повної поверхонь піраміди

Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней.

Теорема (про площу бічної поверхні правильної піраміди). *Площа бічної поверхні правильної піраміди* дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему.

Доведення. Розглянемо правильну n-кутну піраміду, всі сторони основи якої дорівнюють a, а апофема – l. Тоді площа кожної з бічних граней дорівнює $\frac{1}{2}al$, а площа бічної поверхні $S_{\text{бічн.}} = \frac{1}{2}al \cdot n = \frac{1}{2}an \cdot l$.

Оскільки $\frac{1}{2}an = p$ – півпериметр основи піраміди, то $S_{\text{бічн.}} = pl$. ■

Площею повної поверхні піраміди називають суму всіх її граней.

Позначимо: $S_{\text{п.п.}}$ – площа повної поверхні, $S_{\text{бічн.}}$ – площа бічної поверхні, $S_{\text{осн.}}$ – площа основи піраміди. Тоді:

$$S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + S_{\text{осн.}}.$$

Приклад 1. Пакетик чаю має форму трикутної піраміди, усі ребра якої дорівнюють 3,2 см. Знайти загальну площу матеріалу, необхідного для виготовлення 20 пакетиків чаю.

Розв'язання. 1) Усі грані піраміди – правильні трикутники зі стороною 3,2 см. Площа такого трикутника дорівнює $S = \frac{3,2^2\sqrt{3}}{4}$ (см^2).

2) Тоді площа повної поверхні піраміди:

$$S_{\text{п.п.}} = 4 \cdot S = 4 \cdot \frac{10,24 \cdot \sqrt{3}}{4} = 10,24\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

3) Загальна площа матеріалу, необхідного для виготовлення 20 пакетиків, дорівнює $20 \cdot S_{\text{п.п.}} = 20 \cdot 10,24\sqrt{3} = 204,8\sqrt{3} \approx 354,7$ (см^2).

Відповідь: $\approx 354,7$ см^2.

4. Об'єм піраміди

Формулу для обчислення *об'єму піраміди* буде доведено у старших класах, а поки що можна отримати її експериментально. Якщо виготовити, наприклад, із картону пряму призму й піраміду з однаковими основами й висотами і наповнити кожну з них сипким матеріалом, наприклад піском, то можна з'ясувати, що для наповнення призми

піску потрібно утричі більше, ніж для наповнення піраміди. Звідси висновок: об'єм піраміди дорівнює третині об'єму призми, тобто:

об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту піраміди:

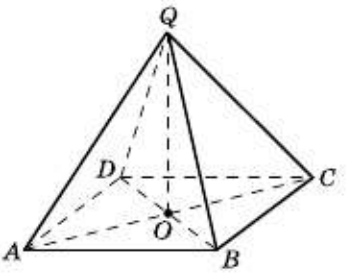
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h,$$

де $S_{\text{осн.}}$ – площа основи, h – висота.

Приклад 2. Об'єм правильної чотирикутної піраміди дорівнює 24 см^2, а висота – 4 см. Знайти бічне ребро піраміди.

Розв'язання (мал. 56.3). 1) $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$, тоді $S_{\text{осн.}} = \frac{3V}{h} = \frac{3 \cdot 24}{4} = 18$ (см^2).

2) Основою правильної чотирикутної піраміди є квадрат $ABCD$, тому $AB^2 = 18$ (см^2). $AB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (см).



Мал. 56.3

3) Основа висоти – точка O – є точкою перетину діагоналей квадрата;

$$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{18 + 18} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ (см)}.$$

4) Із $\triangle AOQ$ ($\angle O = 90°$): $AQ = \sqrt{AO^2 + OQ^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см).

Відповідь: 5 см.

Що називають пірамідою? ○ Що називають основою, вершиною піраміди? ○ Що називають бічними ребрами піраміди? ○ Що називають висотою піраміди? ○ Що називають правильною пірамідою? ○ Що називають площею бічної поверхні піраміди? ○ Сформулюйте і доведіть теорему про площу бічної поверхні правильної піраміди. ○ Як знайти площу повної поверхні піраміди? ○ Як знайти об'єм піраміди?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

56.1. На малюнку 56.2 зображено правильну трикутну піраміду.
1) Назвіть пряму перетину площин QAB і ABC.
2) Яке взаємне розміщення прямих QB і AC?
3) Яке взаємне розміщення прямої QO і площини ABC?

56.2. На малюнку 56.3 зображено правильну чотирикутну піраміду.
1) Назвіть пряму перетину площин QBC і ABC.
2) Яке взаємне розміщення прямих QA і DC?
3) Чи перетинає пряма QO площину ABC?

56.3. Площа основи піраміди дорівнює 9 см^2, а висота – 5 см. Знайдіть об'єм піраміди.

56.4. Висота піраміди дорівнює 12 см, а площа основи – 16 см^2. Знайдіть об'єм піраміди.

2 **56.5.** Піраміда Хеопса має висоту 146,6 м, а сторона її квадратної основи становить 233 м. Обчисліть об'єм піраміди Хеопса.

56.6. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 5 см і 8 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.

56.7. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см, а апофема – 5 см. Знайдіть повну поверхню піраміди.

56.8. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а апофема – 4 см. Знайдіть повну поверхню піраміди.

3 **56.9.** У правильній трикутній піраміді (див. мал. 56.2) кут $AQB = 90°$, $AQ = a$. Знайдіть:

1) бічну поверхню піраміди; 2) повну поверхню піраміди.

56.10. У правильній чотирикутній піраміді (див. мал. 56.3) $\angle AQB = 60°$, $AQ = b$. Знайдіть:

1) бічну поверхню піраміди; 2) повну поверхню піраміди.

4 **56.11.** Основою чотирикутної піраміди є прямокутник зі сторонами 12 см і 16 см. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють 26 см.

1) Доведіть, що основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей основи.

2) Знайдіть об'єм піраміди.

56.12. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а висота – 4 см. Знайдіть об'єм піраміди.

Вправи для повторення

56.13. Один з кутів паралелограма удвічі менший від іншого. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо сторони паралелограма дорівнюють 5 см і 8 см.

56.14. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a см і b см. Знайдіть відношення площ, на які ділить трикутник висота, проведена до гіпотенузи.

Життєва математика

56.15. Щоб визначити діаметр стовбура дерева, жінка-лісник виміряла обхват стовбура за допомогою мотузки й отримала 4,2 м. Який діаметр має стовбур цього дерева (результат округліть до сотих метра)?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

56.16. У прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см вписано квадрат так, що дві його вершини належать гіпотенузі, а дві інші – катетам. Знайдіть сторону квадрата.

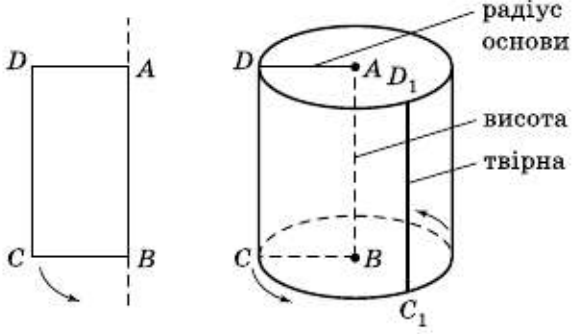
§ 57. Циліндр. Площа поверхні та об'єм циліндра

1. Циліндр

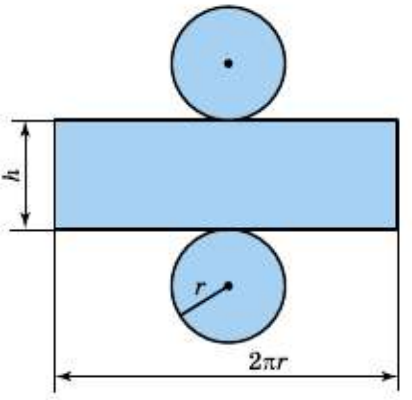
Циліндром **називають геометричне тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони** (мал. 57.1).

На малюнку 57.1 прямокутник $ABCD$ обертається навколо сторони AB. Пряму, навколо якої обертається прямокутник, називають *віссю циліндра*. Сторона DC описує у просторі *бічну поверхню циліндра*. Вона утворюється з безлічі рівних і попарно паралельних відрізків – *твірних*. Сторони прямокутника AD і BC описують круги – *основи циліндра*. На малюнку 57.1: AB – вісь циліндра, DC і D_1C_1 – твірні циліндра, точки A і B – центри основ циліндра, AD і BC – *радіуси основ циліндра* (або просто *радіуси циліндра*).

Висота циліндра – це відстань від будь-якої точки однієї основи до площини другої. Можна також сказати, що це відстань між основами циліндра. Висота циліндра дорівнює його твірній. На малюнку 57.1: AB, CD, C_1D_1 – висоти циліндра.



Мал. 57.1



Мал. 57.2

Циліндричну форму мають численні деталі машин і механізмів, наприклад: шліфувальні круги, сальники, барабани лебідок тощо. На практиці широко використовують дріт із круговим перерізом, різні колоди, труби, балки. Також циліндричну форму мають просвердлені отвори. З огляду на це важливою є задача знаходження поверхні та об'єму циліндра.

2. Площа бічної та повної поверхонь циліндра

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ та одній із твірних, а потім розгорнути на площині, то дістанемо *розгортку циліндра* (мал. 57.2). Вона складається із прямокутника, площа якого дорівнює площі бічної поверхні циліндра, і двох рівних кругів.

Позначимо радіус основи циліндра – r, а висоту – h. *В* отриманому прямокутнику одна зі сторін дорівнює висоті циліндра h, а друга – довжині кола основи, тобто $2\pi r$. Тому *площу бічної поверхні циліндра* $S_{\text{бічн.}}$ знаходять за формулою: $S_{\text{бічн.}} = 2\pi rh$.

Повна поверхня циліндра складається з бічної поверхні та двох основ – однакових кругів радіуса r. Тому $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$, де $S_{\text{п.п.}}$ – площа повної поверхні, $S_{\text{осн.}}$ – площа основи. Звідки

$$S_{\text{п.п.}} = 2\pi rh + 2\pi r^2, \text{ або } S_{\text{п.п.}} = 2\pi r(h + r).$$

3. Об'єм циліндра

Циліндр можна уявити як правильну n-кутну призму за умови, що n є нескінченно великим. Звідси висновок: об'єм циліндра можна знайти так само, як об'єм призми.

Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h.$$

Оскільки основою є круг радіуса r, то маємо: $V = \pi r^2 h$.

4. Розв'язування прикладних задач на циліндр

Розглянемо застосування цих формул до прикладних задач.

Приклад 1. Довжина нафтопроводу Одеса – Броди дорівнює 650 км, діаметр його труби – 102 см. Визначити площу поверхні нафтопроводу, взявши $\pi \approx 3{,}1416$. Відповідь округлити до одиниць квадратного метра.

Розв'язання. Шукана площа – бічна поверхня циліндра, радіус якого $r = \dfrac{1{,}02}{2} = 0{,}51$ (м), а висота $h = 650\,000$ м. Тоді

$S_{\text{бічн.}} = 2\pi rh \approx 2 \cdot 3{,}1416 \cdot 0{,}51 \cdot 650\,000 = 2\,082\,880{,}8 \approx 2\,082\,881$ (м^2).

Відповідь: $\approx 2\,082\,881$ м^2.

Приклад 2. Маса мотка мідного дроту діаметром 1,6 мм дорівнює 2,2 кг. Знайти довжину цього дроту, якщо густина міді становить 8,8 кг/дм^3. Відповідь округлити до сантиметрів.

Розв'язання. 1) Об'єм дроту $V = \dfrac{2{,}2}{8{,}8} = 0{,}25$ (дм^3).

2) Дріт можна розглядати як циліндр, радіус якого дорівнює $r = \dfrac{0{,}016}{2} = 0{,}008$ (дм), а висота h – невідома довжина мотка дроту.

Маємо $V = \pi r^2 h$, звідси $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$,

$$h = \frac{0{,}25}{3{,}1416 \cdot 0{,}008^2} \approx 1243{,}39 \text{ (дм)} \approx 12\,434 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 12 434 см.

Що називають циліндром? ○ Що називають віссю циліндра? ○ Що називають бічною поверхнею циліндра? ○ Що називають твірними циліндра, основами циліндра? ○ Що називають радіусами основ циліндра, висотою циліндра? ○ Як дістати розгортку циліндра? ○ Як знайти площу бічної поверхні циліндра та площу повної поверхні циліндра? ○ Як знайти об'єм циліндра?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

57.1. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, радіус основи якого дорівнює r, а висота – h.

1) $r = 3$ см, $h = 5$ см;

2) $r = 2$ дм, $h = 3$ дм.

57.2. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра, радіус основи якого дорівнює 8 см, а висота – 2 см.

57.3. Обчисліть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює r, висота – h, якщо:

1) $r = 2$ см, $h = 10$ см;

2) $r = 5$ дм, $h = l$ дм.

57.4. Знайдіть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 4 см, а висота – 5 см.

57.5. Резервуар має циліндричну форму без кришки, радіус його основи 4 м, а висота – 10 м. Знайдіть:

1) скільки матеріалу пішло на виготовлення резервуара;

2) об'єм резервуара.

57.6. Резервуар має циліндричну форму з кришкою, радіус його основи 5 м, а висота – 8 м. Знайдіть:

1) скільки матеріалу пішло на виготовлення резервуара;

2) об'єм резервуара.

57.7. Радіус основи циліндра збільшили у 3 рази. У скільки разів збільшився об'єм циліндра?

57.8. Висоту циліндра зменшили у 2 рази. У скільки разів зменшився об'єм циліндра?

57.9. У циліндричну мензурку, внутрішній діаметр якої дорівнює 10 см, занурили металеву деталь. При цьому рівень води в мензурці піднявся на 6 см. Обчисліть об'єм деталі.

57.10. Металеву деталь занурили у циліндричну мензурку, внутрішній діаметр якої дорівнює 12 см. Після того як деталь вийняли, рівень води в мензурці знизився на 5 см. Знайдіть об'єм деталі.

57.11. Навколо якої сторони треба обертати прямокутник зі сторонами $a = 4$ см і $b = 6$ см, щоб утворився циліндр з:

1) більшою бічною поверхнею;

2) більшою повною поверхнею;

3) більшим об'ємом?

57.12. Знайдіть площу поверхні та об'єм циліндра, утвореного обертанням прямокутника зі сторонами 4 см і 5 см навколо:

1) більшої сторони;

2) меншої сторони.

57.13. Якої довжини можна виготовити мідний дріт діаметром 4 мм зі зливка міді масою 50 кг? Густина міді становить 8,8 кг/дм^3. Результат округліть до сантиметрів ($\pi \approx 3{,}1416$).

57.14. Скільки 12-літрових відер води потрібно для того, щоб заповнити один з найбільших в Україні Севастопольський акваріум, який має форму циліндра 9,2 м діаметром, 1,5 м завглибшки ($\pi \approx 3{,}1416$)?

Вправи для повторення

57.15. Два кути одного трикутника дорівнюють відповідно двом кутам другого трикутника. Сторони першого трикутника відносяться як 3 : 4 : 5. Знайдіть сторони та площу другого трикутника, якщо його периметр дорівнює 60 см.

57.16. Медіани трикутника, довжини яких становлять 15 см і 18 см, взаємно перпендикулярні. Знайдіть площу трикутника.

Життєва математика

57.17. Дитячий майданчик прямокутної форми 8,5 м завдовжки і 6 м завширшки потрібно застелити спеціальним покриттям, що складається із квадратних фрагментів зі стороною 50 см завдовжки.

1) Скільки потрібно таких елементів?

2) Скільки грошей буде витрачено на це, якщо один фрагмент покриття коштує 60 грн, а вартість додаткових матеріалів та роботи з укладання становить 40 % від вартості покриття?

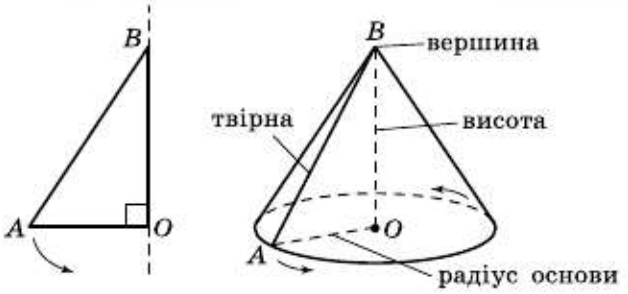
Цікаві задачі – поміркуй одначе

57.18. У $\triangle ABC$ бісектриси AK і BM перетинаються в точці I, $AI : IK = 2 : 1$, $BI : IM = 4 : 1$. Знайдіть найбільший кут трикутника ABC.

§ 58. Конус. Площа поверхні та об'єм конуса

1. Конус

Конусом **називають геометричне тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо катета** (мал. 58.1).



Мал. 58.1

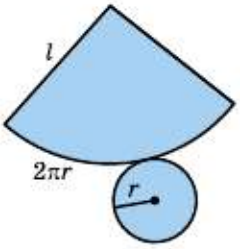
На малюнку 58.1 прямокутний трикутник AOB з прямим кутом O обертається навколо катета BO. Пряму, навколо якої обертається прямокутний трикутник, називають *віссю конуса*. Гіпотенуза BA прямокутного трикутника описує у просторі *бічну поверхню конуса*. Вона складається з безлічі рівних відрізків – *твірних*. На малюнку 58.1: пряма BO – *вісь конуса*, BA – *твірна конуса*. Катет OA описує круг, який називають *основою конуса*. Точка O – *центр цього круга*, OA – *радіус основи конуса*. Точку B називають *вершиною конуса*, а відрізок BO – *висотою конуса*.

Конічна форма є поширеною у природі й техніці. Коли насипають сипкі матеріали (пісок, щебінь, крупи), вони утворюють конус. Конічну форму мають деякі деталі, посудини, лійки, головки шліфувальних інструментів.

2. Площа бічної та повної поверхонь конуса

Для знаходження бічної поверхні конуса розріжемо конус по колу основи й одній із твірних, а потім розгорнемо на площині (мал. 58.2). Дістанемо *розгортку конуса*. Вона складається з основи – круга радіуса r і сектора, площу якого приймаємо за площу бічної поверхні конуса $S_{\text{бічн.}}$.

Позначимо радіус основи конуса – r, а твірну – l. Довжина дуги сектора дорівнює $2\pi r$, а довжина всього кола радіуса l – $2\pi l$. Площа сектора відноситься до площі круга радіуса l так само, як довжина дуги сектора до довжини всього кола радіуса l.



Мал. 58.2

Маємо $\dfrac{S_{\text{бічн.}}}{\pi l^2} = \dfrac{2\pi r}{2\pi l}$, звідки:

$$S_{\text{бічн.}} = \pi r l.$$

Повна поверхня конуса складається з бічної поверхні та основи – круга радіуса r. Тому $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + S_{\text{осн.}}$, де $S_{\text{п.п.}}$ – площа повної поверхні, $S_{\text{осн.}}$ – площа основи. Звідки:

$$S_{\text{п.п.}} = \pi r l + \pi r^2, \text{ або } S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r).$$

3. Об'єм конуса

Конус можна уявити як правильну n-кутну піраміду за умови, що n є нескінченно великим. Звідси висновок: об'єм конуса можна знайти так само, як об'єм піраміди.

Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту конуса:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h,$$

де h – висота конуса.

Оскільки основою є круг радіуса r, то маємо:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

4. Розв'язування прикладних задач на конус

Розглянемо застосування цих формул до прикладних задач.

Приклад 1. Скільки квадратних метрів тканини потрібно, щоб пошити конусоподібний намет, висота якого становить 2,7 м, а діаметр основи – 7,2 м?

Розв'язання (мал. 58.1).

1) За умовою, $BO = 2{,}7$ м, $AO = \frac{7{,}2}{2} = 3{,}6$ м.

2) У $\triangle AOB$ ($\angle O = 90°$): $AB = \sqrt{BO^2 + AO^2} = \sqrt{2{,}7^2 + 3{,}6^2} = 4{,}5$ (м).

3) Потрібна кількість тканини – площа бічної поверхні конуса $S_{\text{бічн.}} = \pi rl = \pi \cdot AO \cdot AB \approx 3{,}1416 \cdot 3{,}6 \cdot 4{,}5 \approx 50{,}9$ (м^2).

Відповідь: $\approx 50{,}9$ м^2.

Приклад 2. З алюмінію виготовлено конус, твірна якого дорівнює 20 см, а радіус основи – 12 см. Обчисліть:
1) площу повної поверхні конуса;
2) об'єм конуса;
3) масу конуса (густина алюмінію $\rho = 2{,}7$ г/см^3).

Розв'язання. (Див. мал. 58.1). За умовою $AB = l = 20$ см, $AO = r = 12$ см.

У $\triangle AOB$ ($\angle O = 90°$): $BO = h = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ (см).

1) $S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r) = \pi \cdot 12(20 + 12) = 384\pi$ (см^2).

2) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 12^2 \cdot 16 = 768\pi$ (см^3).

3) $m = \rho V = 2{,}7 \cdot 768\pi \approx 6514$ (г).

Відповідь: 1) 384π см^2;
2) 768π см^3;
3) ≈ 6514 г.

Що називають конусом? ○ Що називають віссю конуса? ○ Що називають бічною поверхнею конуса? ○ Що називають твірними конуса, основою конуса, вершиною конуса, висотою конуса? ○ Як дістати розгортку конуса? ○ Як знайти площу бічної поверхні конуса та площу повної поверхні конуса? ○ Як знайти об'єм конуса?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

58.1. Обчисліть площу бічної поверхні конуса, у якого радіус основи дорівнює r, а твірна l:
1) $r = 5$ см, $l = 8$ см; 2) $r = 3$ дм, $l = 7$ дм.

58.2. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, у якого твірна дорівнює 10 см, а радіус основи – 4 см.

58.3. Знайдіть об'єм конуса, у якого радіус основи дорівнює r, а висота – h:
1) $r = 3$ см, $h = 2$ см;
2) $r = 4$ см, $h = 6$ см.

58.4. Знайдіть об'єм конуса, радіус основи якого дорівнює 6 см, а висота – 5 см.

2

58.5. Скільки жерсті потрібно для виготовлення конусоподібної лійки, твірна якої дорівнює 20 см, а діаметр – 12 см (на шви витрачається 6 % матеріалу)?

58.6. Скільки квадратних метрів тканини треба для виготовлення конусоподібного намету, твірна якого дорівнює 5 м, а радіус основи – 3 м (на шви витрачається 2 % матеріалу)?

58.7. Знайдіть площу повної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 15 см, а висота – 9 см.

58.8. Знайдіть площу повної поверхні конуса, висота якого дорівнює 8 см, а радіус основи – 6 см.

3

58.9. Прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 8 см, а гіпотенуза – 17 см, обертається навколо меншого катета. Знайдіть об'єм утвореного конуса.

58.10. Прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 16 см, а гіпотенуза – 20 см, обертається навколо більшого катета. Знайдіть об'єм утвореного конуса.

58.11. Свинцевий конус, радіус основи якого дорівнює 15 см, переплавили у циліндр із такою самою висотою. Знайдіть радіус основи циліндра.

58.12. Свинцевий циліндр, радіус основи якого дорівнює 4 см, переплавили у конус із такою самою висотою. Знайдіть радіус основи конуса.

4

58.13. Об'єм конуса дорівнює 240π см^3. Знайдіть повну поверхню конуса, якщо його висота дорівнює 5 см.

58.14. Бічна поверхня конуса дорівнює 369π см^2. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює 41 см.

Вправи для повторення

58.15. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $45°$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$. Знайдіть:
1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a}(\vec{a} + \vec{b})$; 3) $\vec{b}(\vec{a} - \vec{b})$; 4) $\vec{a}(2\vec{a} + 5\vec{b})$.

58.16. Радіуси описаного і вписаного у прямокутний трикутник кіл відповідно дорівнюють 5 см і 2 см. Знайдіть площу трикутника.

Життєва математика

58.17. Якими плитками, що мають форму правильних многокутників, можна покрити підлогу, якщо використовують:
1) один вид плитки; 2) два види плитки?
Наведіть приклади покриття (відходами знехтувати).

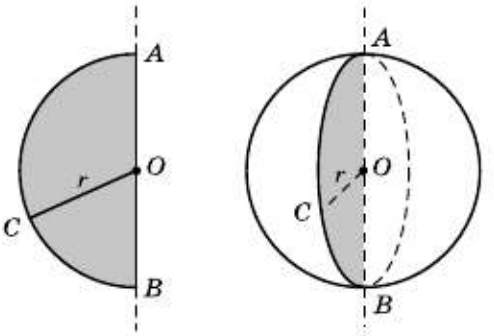
Цікаві задачі – поміркуй одначе

58.18. Сторона правильного трикутника дорівнює 6 см. Із його центра описано коло, радіус якого дорівнює 2 см. Знайдіть площу частини трикутника, що лежить поза кругом, яке обмежує описане коло.

§ 59. Куля. Площа поверхні та об'єм кулі

1. Куля

Кулею **називають геометричне тіло, утворене обертанням півкруга навколо діаметра** (мал. 59.1).



Мал. 59.1

Радіус півкруга називають *радіусом кулі*, а діаметр півкруга – *діаметром кулі*, центр півкруга – *центром кулі*. На малюнку 59.1: OA, OB, OC – радіуси кулі, AB – діаметр кулі, точка O – центр кулі.

Форму кулі мають глобус, м'яч, деякі ягоди, деталі у техніці, наприклад кульки в підшипнику.

2. Сфера. Площа поверхні кулі

Поверхню кулі називають *сферою*. Кулю не можна представити у вигляді розгортки на площині. Тому задача знаходження площі

поверхні кулі є досить складною. У старших класах буде показано, що площу поверхні кулі можна знайти за формулою:

$$S = 4\pi r^2,$$

де r – радіус кулі.

3. Об'єм кулі

Також у старших класах буде доведено, що об'єм кулі V знаходять за формулою:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

4. Прикладні задачі на кулю

Приклад 1. Діаметр футбольного м'яча дорівнює 22 см. Знайдіть площу поверхні та об'єм м'яча (взяти $\pi \approx 3{,}1416$, округлити до цілих).

Розв'язання. 1) $r = \frac{22}{2} = 11$ см;

2) $S = 4\pi r^2 \approx 4 \cdot 3{,}1416 \cdot 22^2 \approx 6082$ (см^2);

3) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx \frac{4}{3} \cdot 3{,}1416 \cdot 22^3 \approx 44\ 602$ (см^3).

Відповідь: $S \approx 6082$ см^2, $V \approx 44\ 602$ см^3.

Приклад 2. Робітник виготовив з однакового матеріалу дві кулі, причому радіус другої утричі більший за радіус першої. У скільки разів маса другої кулі більша за масу першої?

Розв'язання. 1) Нехай ρ – густина матеріалу, r – радіус першої кулі, тоді $3r$ – радіус другої, V_1 – об'єм першої кулі, V_2 – другої.

2) Маємо: $\frac{m_2}{m_4} = \frac{\rho V_2}{\rho V_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot (3r)^3}{\frac{4}{3}\pi \cdot r^3} = \frac{27r^3}{r^3} = 27$ (разів).

Відповідь: у 27 разів.

Що називають кулею? ○ Що називають радіусом, діаметром, центром кулі? ○ Що називають сферою? ○ Як знайти площу поверхні кулі? ○ Як знайти об'єм кулі?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

59.1. Знайдіть площу поверхні кулі з радіусом:
1) 2 см; 2) 5 дм.

59.2. Обчисліть площу поверхні кулі з радіусом:
1) 4 дм; 2) 7 см.

59.3. Обчисліть об'єм кулі, радіус якої дорівнює:
1) 3 дм; 2) 6 см.

59.4. Знайдіть об'єм кулі, радіус якої дорівнює:
1) 1 дм; 2) 9 см.

2 **59.5.** Площа поверхні м'яча для мотоболу дорівнює 400π см^2. Знайдіть радіус м'яча та його об'єм.

59.6. Площа поверхні м'яча для хокею з м'ячем дорівнює 9π см^2. Знайдіть радіус м'яча та його об'єм.

59.7. На фарбування 1 м^2 поверхні витрачають 25 г фарби. Скільки такої фарби знадобиться для фарбування кулі, радіус якої 25 см?

59.8. Скляна кулька має радіус 3 см. Знайдіть із точністю до десятих грама масу цієї кульки, якщо маса 1 см^3 скла дорівнює 3 г.

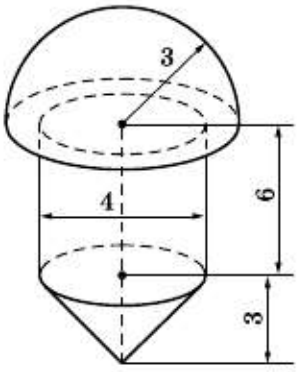
59.9. Радіус Землі $r \approx 6{,}4 \cdot 10^3$ км. Знайдіть площу поверхні та об'єм Землі.

3 **59.10.** З однакового матеріалу виготовлено дві кульки відповідно з діаметрами 4 см і 8 см. У скільки разів маса першої кульки менша від маси другої?

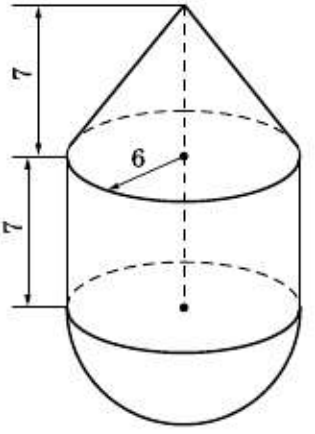
59.11. Радіуси двох куль відносяться як 3 : 4. Як відносяться:
1) поверхні куль; 2) об'єми куль?

4 **59.12.** Знайдіть об'єм деталі, зображеної на малюнку 59.2 (розміри на малюнку подано в сантиметрах).

59.13. Знайдіть об'єм деталі, зображеної на малюнку 59.3 (розміри на малюнку подано в сантиметрах).



Мал. 59.2



Мал. 59.3

Вправи для повторення

59.14. Із точки кола до діаметра проведено перпендикуляр, який ділить його на відрізки у відношенні 4 : 9. Знайдіть площу круга, обмеженого цим колом, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 12 см.

59.15. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $60°$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Знайдіть $|4\vec{a} - \vec{b}|$.

Життєва математика

59.16. Діаметр зіниці, яка має форму круга, може змінюватися від 1,5 мм до 7,5 мм. У скільки разів при цьому збільшується її площа?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

59.17. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c, а радіус вписаного кола – r. Знайдіть площу трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 11

До § 52

1. Скільки різних площин можна провести через дві прямі, що перетинаються?

2. Намалюйте:

1) площину α, яка проходить через дві паралельні прямі c і d;

2) площину β, яка проходить через три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій.

3. Щоб надати стійкого положення фотоапарату або вимірювальним приладам, їх закріплюють на штативах (триногах). Яку властивість при цьому використовують?

4. Чи можна стверджувати, що дві прямі, які не мають спільних точок, паралельні:

1) на площині; 2) у просторі?

5. Чи правильне твердження: дві прямі у просторі, перпендикулярні до третьої, паралельні між собою? Поясніть на моделі.

6. Одна пряма належить площині стелі кімнати, а друга – площині підлоги. Яким може бути взаємне розміщення цих прямих?

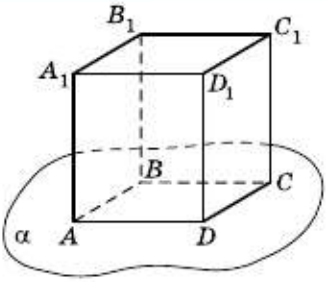
7. Прямі a і b перетинаються, і прямі b і c перетинаються. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і c? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.

До § 53

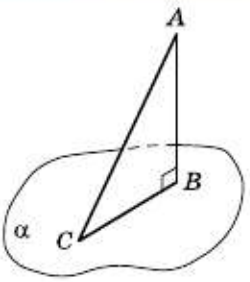
8. Проілюструйте всі можливі випадки взаємного розміщення прямої та площини на моделі куба і на малюнку.

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 1). Як розміщені площина α і пряма:

1) AB; 2) AA_1; 3) BC;
4) B_1C_1; 5) C_1C; 6) A_1D_1?



Мал. 1



Мал. 2

2 **10.** AB – перпендикуляр до площини α, AC – похила (мал. 2). Знайдіть:

1) AB і BC, якщо $AC = 15$ см, $AB : BC = 4 : 3$;

2) AB і BC, якщо $AC = 13$ см, $AB + BC = 17$ (см).

11. Чи можна стверджувати, що два перпендикуляри, проведені до площини, лежать в одній площині?

3 **12.** Із точки до площини проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 3 : 4. Знайдіть довжини похилих та відстань від точки до площини, якщо проєкції похилих дорівнюють 9 см і 16 см.

13. Площина α паралельна прямій a, пряма b також паралельна площині α. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і b?

4 **14.** Точка перетину діагоналей паралелограма розміщена на відстані 7 см від площини α, яка не перетинає площину паралелограма. Дві вершини паралелограма розміщені на відстанях 5 см та 11 см від площини α. На яких відстанях від площини α розміщені дві інші вершини паралелограма?

До § 54

1 **15.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (див. мал. 1). Назвіть:

1) площину, паралельну площині α;

2) чотири площини, перпендикулярні до площини α.

16. На скільки частин ділять простір три площини, кожні дві з яких паралельні між собою?

2 **17.** Площини α і β перетинаються. Площина γ паралельна площині β. Яке взаємне розміщення площин α і γ?

18. Пряма a належить площині α, а пряма b – площині β, a і b – не паралельні. Чи можуть бути паралельними площини α і β? Проілюструйте на моделі або на малюнку.

3 **19.** Пряма a належить площині α і паралельна прямій b, яка належить площині β. Чи можуть площини α і β:

1) бути паралельними;

2) перетинатися;

3) бути перпендикулярними?

Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

20. Пряма a належить площині α і перетинає пряму b, яка належить площині β. Чи можуть площини α і β:
1) бути паралельними;
2) перетинатися;
3) бути перпендикулярними?
Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

21. Кожна з площин α і β перпендикулярна до площини γ. Чи можуть площини α і β:
1) бути паралельними;
2) перетинатися;
3) бути перпендикулярними?
Зробіть малюнки до можливих випадків розміщення.

До § 55

22. Знайдіть об'єм прямої призми, у якої площа основи дорівнює 8 см^2, а бічне ребро – 7 см.

23. Площа повної поверхні куба дорівнює 54 см^2. Знайдіть ребро куба.

24. Знайдіть об'єм та повну поверхню призми, основа якої – квадрат зі стороною 2 см, а бічне ребро дорівнює 5 см.

25. 1) Яке найменше число граней може мати пряма призма?

2) Пряма призма має 7 граней. Який многокутник лежить в основі призми?

26. Переріз залізничного насипу має форму трапеції з основами 13 м і 5 м та 3 м заввишки, а насип має форму прямої призми. Знайдіть об'єм такого насипу 100 м завдовжки.

27. Обчисліть площу повної поверхні та об'єм правильної чотирикутної призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 240 см^2, а бічне ребро – 15 см.

28. Площа повної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 432 см^2, а бічної поверхні – 360 см^2. Обчисліть об'єм призми.

29. Рулон шпалер 10 м завдовжки має ширину 0,6 м. Кімната має 6 м завдовжки, 4 м завширшки і 2,75 м заввишки. У кімнаті два вікна розмірами 1,4 м × 0,75 м та двері розмірами 2 м × 0,8 м. Скільки рулонів шпалер знадобиться, щоб обклеїти кімнату, якщо на підклейку витрачають 1 % від площі шпалер?

До § 56

30. Скільки граней, вершин і ребер у трикутної піраміди?

31. Об'єм піраміди дорівнює 45 см^3, а площа основи – 30 см^2. Знайдіть висоту піраміди.

32. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, висота якої – 12 см, а ребро основи дорівнює 4 см.

33. Знайдіть бічну поверхню правильної чотирикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 6 см, а бічне ребро – 5 см.

3 **34.** В основі піраміди лежить ромб, сторона якого дорівнює 30 см, а діагоналі відносяться як 3 : 4. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 9 см.

35. Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, апофема якої дорівнює 8 см, а бічне ребро – 10 см.

4 **36.** Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює 4 см, а бічне ребро – 5 см. Знайдіть об'єм піраміди та площу бічної поверхні.

До § 57

1 **37.** Обчисліть площу бічної поверхні, площу повної поверхні та об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 10 см, а висота – 4 см.

38. Діаметр стовбура шахти дорівнює 8 м, а його глибина – 400 м. Знайдіть об'єм стовбура шахти.

2 **39.** У скільки разів треба збільшити:

1) радіус основи циліндра;

2) висоту циліндра, щоб об'єм циліндра збільшився у 16 разів?

3 **40.** Скільки жерсті потрібно для виготовлення погонного метра труби діаметром 16 см, якщо на шви витрачають 8 % матеріалу?

41. Радіус основи циліндра збільшили на 20 %, а висоту зменшили на 20 %. Як при цьому змінилися:

1) площа бічної поверхні циліндра;

2) об'єм циліндра?

4 **42.** Залізобетонна панель має 3 м завдовжки, 1,5 м завширшки і 0,3 м заввишки. По всій її довжині розміщено 5 наскрізних циліндричних отворів діаметром 0,4 м. Знайдіть масу панелі, якщо густина залізобетону $\rho = 2{,}5$ т/м^3.

До § 58

1 **43.** Знайдіть бічну поверхню конуса, діаметр основи якого дорівнює 8 см, а твірна – 12 см.

44. Знайдіть об'єм конуса, у якого висота й діаметр основи дорівнюють по 6 см.

2 **45.** Знайдіть об'єм і площу повної поверхні конуса, у якого твірна дорівнює 5 см, а радіус основи – 3 см.

46. Знайдіть площу основи конуса, твірна якого дорівнює 25 см, а висота – 24 см.

3 **47.** Рівнобедрений прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює $3\sqrt{2}$ см, обертається навколо одного з катетів. Знайдіть об'єм утвореного конуса.

48. Радіус основи конуса удвічі більший за радіус основи циліндра. Знайдіть відношення об'єму конуса до об'єму циліндра, якщо висоти фігур рівні.

4 **49.** Повна поверхня конуса дорівнює 588π см^2. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює 37 см.

До § 59

1 **50.** Знайдіть площу поверхні та об'єм кулі, діаметр якої дорівнює 12 см.

2 **51.** Площа поверхні баскетбольного м'яча дорівнює 144π см^2. Знайдіть радіус м'яча та його об'єм.

52. Радіус цинкової кульки становить 9 см. Знайдіть із точністю до десятих масу кульки, якщо маса 1 см^3 цинку дорівнює 7 г.

3 **53.** Поверхні двох куль відносяться як 1 : 4. Як відносяться:
1) радіуси куль; 2) об'єми куль?

54. Вісім мідних куль, радіус кожної з яких дорівнює 3 см, переплавлено в одну. Знайдіть:
1) радіус утвореної кулі;
2) площу поверхні утвореної кулі;
3) масу кулі (густина міді $\rho = 8{,}8$ г/см^3).

4 **55.** Діаметр Меркурія становить 0,39 від діаметра Землі. Знайдіть:
1) який відсоток від площі поверхні Землі становить площа поверхні Меркурія;
2) який відсоток об'єму Землі становить об'єм Меркурія.

56. Знайдіть відношення об'єму кулі радіуса r до об'єму правильної шестикутної призми, кожне ребро якої дорівнює r.

Головне в темі II

ПРИЗМА

Площа бічної поверхні призми $S_{\text{бічн.}} = Ph$,
де P – периметр основи призми, h – бічне ребро.

Площа повної поверхні призми $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$,
де $S_{\text{осн.}}$ – площа основи.

Об'єм призми $V = S_{\text{осн.}} \cdot h$.

ПІРАМІДА

Площа бічної поверхні правильної піраміди

$$S_{\text{бічн.}} = pl,$$

де p – півпериметр основи, l – апофема.

Площа повної поверхні піраміди $S_{\text{п.п.}} = S_{\text{бічн.}} + 2S_{\text{осн.}}$,
де $S_{\text{осн.}}$ – площа основи.

Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h$, де h – висота піраміди.

ЦИЛІНДР

Площа бічної поверхні циліндра

$$S_{\text{бічн.}} = 2\pi rh,$$

де r – радіус основи циліндра, h – висота циліндра.

Площа повної поверхні циліндра

$$S_{\text{п.п.}} = 2\pi rh + 2\pi r^2 \text{ або } S_{\text{п.п.}} = 2\pi r(h + r).$$

Об'єм циліндра $V = \pi r^2 h$.

КОНУС

Площа бічної поверхні конуса $S_{\text{бічн.}} = \pi rl$,
де r – радіус основи конуса, l – твірна конуса.

Площа повної поверхні конуса

$$S_{\text{п.п.}} = \pi rl + \pi r^2 \text{ або } S_{\text{п.п.}} = \pi r(l + r).$$

Об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

КУЛЯ

Площа поверхні кулі $S = 4\pi r^2$, де r – радіус кулі.

Об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС МАТЕМАТИКИ 9 КЛАСУ

АЛГЕБРА

1 **1.** Порівняйте a і b, якщо:
1) $a - b = 5$; 2) $a - b = -4{,}1$.

2. Запишіть проміжки, які зображено на малюнках 1 і 2.

Мал. 1

Мал. 2

3. Дано $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$. Знайдіть:
1) $f(0)$; 2) $f(3)$.

2 **4.** Розв'яжіть нерівність:
1) $-3x < 12$; 2) $4x - x^2 \geqslant 0$.

5. Знайдіть дев'ятий член та суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 9$, $d = -2$.

6. Відомо, що в партії з 2000 деталей 5 є бракованими. Яка ймовірність того, що навмання вибрана деталь:
1) бракована; 2) якісна?

3 **7.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = -7. \end{cases}$

8. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 4x - 5$. За графіком знайдіть:
1) область значень функції;
2) проміжок зростання функції.

4 **9.** Доведіть, що $x^2 + y^2 - 2(2x - y) + 5 \geqslant 0$ для будь-яких значень змінних x та y.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС МАТЕМАТИКИ 9 КЛАСУ

ГЕОМЕТРІЯ

1

1. Знайдіть координати середини відрізка CD, якщо $C(-2; 4)$, $D(8; 10)$.

2. Знайдіть модуль вектора $\vec{a}(-8; 15)$.

3. Сторони двох правильних п'ятикутників відносяться як $5:2$. Як відносяться їхні площі?

2

4. Дано вектори $\vec{b}(-2; 4)$ і $\vec{c}(-2; 4)$. Знайдіть координати вектора $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$.

5. Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо $\angle C = 60°$, $\angle A = 45°$, $BC = \sqrt{6}$ см.

6. Внутрішній кут правильного многокутника дорівнює $144°$. Знайдіть:

1) кількість сторін многокутника;

2) сторону многокутника, якщо його периметр дорівнює 80 см.

3

7. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2; -1)$ і утворює з додатним напрямком осі абсцис кут $135°$.

8. Знайдіть довжину кола, вписаного у трикутник зі сторонами 13 см, 4 см і 15 см.

4

9. Дві сторони трикутника дорівнюють 1 см і $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть третю сторону, якщо вона у $\sqrt{2}$ разів більша за радіус кола, описаного навколо трикутника. Скільки розв'язків має задача?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ З АЛГЕБРИ

До теми 2. Нерівності

1. Доведіть нерівність:
1) $(x^3 - y^3)(x - y) \geqslant 3xy(x - y)^2$;
2) $(x^2 - y^2)(x^4 - y^4) \leqslant (x^3 - y^3)^2$.

2. Доведіть нерівність:
1) $9x^2 + 25 \geqslant 30|x|$; 2) $x^2 - 4x + 5 \geqslant 2|x - 2|$.

3. Доведіть, що для невід'ємних значень змінних x та y справджується нерівність:
1) $x^3 + y^3 \geqslant x^2y + xy^2$; 2) $(x + y)^3 \leqslant 4(x^3 + y^3)$.

4. Доведіть, що коли $x \geqslant y$, то:
1) $x^3 - y^3 \geqslant x^2y - xy^2$; 2) $x^5 - y^5 \geqslant x^4y - xy^4$.

5. Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, справджується нерівність $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

6. Доведіть, що:

1) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3$;

2) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} < 2$.

7. Доведіть нерівність $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{120}{121} > \frac{1}{11}$.

8. Відсоток учнів 9 класу, які володіють трьома іноземними мовами (англійською, французькою та німецькою), лежить у межах від 2,9 до 3,1 %. Визначте, яка найменша кількість учнів може бути в цьому класі. Скільки учнів цього класу володіють трьома іноземними мовами?

9. Чи правильно, що коли:

1) $a^2b \leqslant 0$, то $b \leqslant 0$; 2) $\frac{a^2}{b} \geqslant 0$, то $b > 0$;

3) $a^2b > 0$, то $b > 0$; 4) $\frac{a^2}{b} < 0$, то $b < 0$?

10. Між числами $\frac{4}{7}$ і $\frac{5}{7}$ знайдіть число, що дорівнює квадрату раціонального числа. Скільки існує таких чисел?

11. Який дріб ближчий до одиниці: правильний чи обернений йому неправильний?

12. Розв'яжіть рівняння з трьома змінними

$$\frac{x + 1}{\sqrt{x}} + \frac{y + 1}{\sqrt{y}} + \frac{z + 1}{\sqrt{z}} = 6.$$

13. Доведіть нерівність

$$\left(1+\frac{x^2}{yz}\right)\left(1+\frac{y^2}{xz}\right)\left(1+\frac{z^2}{xy}\right) \geqslant 8, \text{ де } x>0,\ y>0,\ z>0.$$

14. Відомо, що $x > 0$. Знайдіть найменше значення виразу:

1) $x+\frac{4}{x}$; 2) $\frac{x^2+15x+36}{x}$.

15. Відомо, що $y > 0$. Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\frac{y}{9+y^2}$; 2) $\frac{y^2}{9y^4+4}$.

16. Доведіть, що коли $x + y + z = 7$ та $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, то $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} < 5$.

17. Знайдіть область визначення функції

$$y=\sqrt{2-\sqrt{5}(x+\sqrt{5})-2x}.$$

18. Для всіх значень параметра m розв'яжіть нерівність:
1) $3(2m - x) < mx + 1$; 2) $5(3m + x) < mx - 7$.

19. Чи існує таке значення a, щоб розв'язком системи $\begin{cases} x \leqslant 6, \\ x < a \end{cases}$ був проміжок:
1) $(-\infty; 7)$; 2) $(-\infty; 6)$; 3) $(-\infty; 6]$; 4) $(-\infty; 5)$?

До тем 4. Квадратична функція і 6. Квадратна нерівність. Система двох рівнянь з двома змінними

20. Доведіть, що графік функції $y = (x - a)(x - b) - c^2$ за будь-яких значень a, b і c має з віссю x хоча б одну спільну точку.

21. Побудуйте графік функції:
1) $y = (x^2 - 5)^2 - (x^2 - 3)^2$; 2) $y = (x - 1)^2(x - 2) - (x - 2)^2(x - 1)$.

22. Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{x^3}{(\sqrt{x})^2}-\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}-2$;

2) $y = x^2 - 2x - (\sqrt{2x-4})^2$.

23. Віссю симетрії графіка функції $y = ax^2 - (a + 6)x + 9$ є пряма $x = 2$. Побудуйте графік цієї функції.

24. За якого значення a множина значень функції $y = x^2 - 2x + a$ збігається з областю визначення функції $y = \sqrt{2x - a}$?

25. Побудуйте графік функції:

1) $y = ||x^2 - 1| - 3|$; 2) $y=\frac{|x|}{|x|-2}$.

26. Доведіть, що нерівність $\frac{x-a}{x-b} < 0$ рівносильна нерівності $(x-a)(x-b) < 0$, а нерівність $\frac{x-a}{x-b} > 0$ рівносильна нерівності $(x-a)(x-b) > 0$.

27. Використовуючи результати попередньої задачі, розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x}{x-2} > 0$; 2) $\frac{x+3}{x-1} < 0$; 3) $\frac{2x-7}{x} > 0$; 4) $\frac{2x-7}{5x+1} < 0$.

28. Розв'яжіть нерівність:

1) $|x^2+3x| > 4$; 2) $|x^2+4x| < 5$;
3) $|2x^2+5x-4| \leqslant 3$; 4) $|2+4x-3x^2| \geqslant 2$.

29. Знайдіть розв'язки нерівності:
$(x^2+4x+10)^2 - 7(x^2+4x+11) + 7 \leqslant 0$.

30. За яких значень a областю визначення функції $y = \sqrt{(a+1)x^2 - 2(a-1)x + (3a-3)}$ є множина всіх чисел?

31. За яких значень m квадратний тричлен $mx^2 - 7x + 4m$ набуває від'ємних значень для будь-яких значень x?

32. За яких значень a нерівність $\frac{x^2+ax-1}{2x^2-2x+3} < 1$ справджується для всіх значень x?

33. За яких значень b подвійна нерівність $-9 < \frac{3x^2+bx-6}{x^2-x+1} < 6$ справджується для будь-якого значення x?

34. Скільки розв'язків має система рівнянь залежно від значень a:

1) $\begin{cases} x^2+y^2 = 4, \\ x-y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2 = a^2, \\ |x| = 2? \end{cases}$

35. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |x+1| + |y+1| = 8, \\ |x+1| = 2y-5. \end{cases}$

36. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+3y-9 = 0, \\ 2x^2+2y^2+x-5y-1 = 0. \end{cases}$$

37. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} xy = 15, \\ x^2+x+y^2+y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -12, \\ x^2-x+y^2+y = 18. \end{cases}$

38. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x^3+y^3 = 9, \\ x+y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y = 2, \\ x^3-y^3 = 26. \end{cases}$

39. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16. \end{cases}$

40. Знайдіть усі розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y + xy = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x + y + xy = 23. \end{cases}$

41. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \dfrac{2y}{x} = 1, \\ x^2 + y^2 + \dfrac{4x}{y} = 22; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2} + 2xy = \dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \dfrac{21}{4}. \end{cases}$

42. За допомогою заміни $y = mx$ розв'яжіть системи рівнянь, ліві частини яких є однорідними многочленами, тобто многочленами, усі доданки яких одного і того самого степеня:

1) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$

43. Дві точки рухаються по колу. Одна з них здійснює повний оберт на 5 с швидше, ніж друга, і тому встигає зробити за 1 хв на два оберти більше. Скільки обертів за хвилину здійснює кожна з точок?

44. Дорога від пункту A до пункту B спочатку йде вгору, а потім спускається вниз (мал. 1). Туристи піднімаються зі швидкістю на 1 км/год меншою, ніж спускаються. На шлях від A до B вони витрачають 4 год, а на зворотний – 4 год 10 хв. З якою швидкістю туристи піднімаються вгору і з якою – спускаються, якщо довжина цього шляху від A до B дорівнює 14 км?

Мал. 1

45. Два поїзди, довжина яких 490 м і 210 м, рівномірно рухаються назустріч один одному паралельними коліями. Машиніст першого з них побачив зустрічний поїзд на відстані 700 м, після чого через 28 с поїзди зустрілися. Визначте швидкість кожного поїзда, якщо перший із них проїжджає повз нерухомого спостерігача на 35 с довше, ніж другий.

46. З одного місця старту в одному напрямку вирушили одночасно два мотоциклісти: один зі швидкістю 80 км/год, а другий – 60 км/год. Через пів години з того самого місця і в тому самому напрямку вирушив автомобіль, який наздогнав першого мотоцикліста через 1 год 15 хв після того, як наздогнав другого. Визначте швидкість автомобіля.

47. Дві автівки вирушили одночасно з міст A і B назустріч одна одній і після зустрічі продовжили рух у тому самому напрямку. Швидкість однієї автівки була на 30 км/год більшою за швидкість другої, тому вона прибула в пункт B через 2 год після зустрічі. Друга автівка прибула в пункт A через 4,5 год після зустрічі. Знайдіть швидкість кожної автівки.

48. Два пішоходи вийшли одночасно назустріч один одному: перший із пункту A, другий – із пункту B. Перший пішохід до зустрічі пройшов на 1 км більше за другого. Через 45 хв після зустрічі перший пішохід прийшов у пункт B. Другий пішохід прибув у пункт A через 1 год 20 хв після зустрічі. Знайдіть відстань від A до B.

49. Андрій, Петро і Сергій, працюючи разом, можуть почистити відерце картоплі за 12 хв, Андрій, Петро та Юрій – за 15 хв, а Сергій та Юрій – за 20 хв. За скільки хвилин почистять картоплю хлопці, працюючи вчотирьох?

50. Тому Соєру доручили пофарбувати паркан. Якщо він робитиме це самостійно, то закінчить фарбувати на 8 год пізніше, ніж робив би це з другом Геком. Якщо фарбуватиме тільки Гек, то виконає роботу на 4,5 год пізніше, ніж це зробили б обидва хлопці разом. За який час пофарбують паркан обидва хлопці, працюючи разом?

51. Сплавили два сорти чавуну з різним відсотковим умістом хрому. Якщо одного сорту взяти в 5 разів більше, ніж другого, то відсотковий вміст хрому в сплаві буде вдвічі більший, ніж відсотковий вміст хрому в меншій із частин, що сплавляються. Якщо узяти однакову кількість обох сортів, то сплав міститиме 8 % хрому. Визначте відсотковий вміст хрому в кожному із цих двох сортів чавуну.

52. О 17-й год зі свого будинку до стадіону на велосипеді виїхав уболівальник Сергій, який рухався із запланованою швидкістю і розраховував приїхати на футбольний матч о 18 год 30 хв, за пів години до його початку. О 17 год 20 хв брат Сергія Петро побачив, що Сергій забув квиток, і зателефонував йому на мобільний. Тоді Сергій миттєво розвернув велосипед і, збільшивши швидкість на 3 км/год, поїхав додому, а Петро зі швидкістю 5 км/год вийшов назустріч Сергію. Під час зустрічі Петро віддав Сергію квиток, і той з тією самою швидкістю вирушив на стадіон. У результаті Сергій приїхав на стадіон за 20 хв до початку матчу. Яка відстань від будинку Сергія до стадіону і з якою швидкістю він планував рухатися?

До теми 8. Числові послідовності

53. *Послідовність* називають *зростаючою*, якщо кожен її член, починаючи з другого, більший за попередній. Які з послідовностей є зростаючими:

1) $a_n = 5n - 7$; 2) $b_n = 3 - 4n$; 3) $c_n = (-1)^n$;

4) $x_n = \frac{6}{n}$; 5) $y_n = -\frac{8}{n}$; 6) $a_n = n^2 + 7n$;

7) $b_n = n^3$; 8) $c_n = n^2 - 8n$; 9) $x_n = (1 - n)^2$?

54. *Послідовність* називають *спадною*, якщо кожен її член, починаючи з другого, менший від попереднього. Які з послідовностей є спадними:

1) $c_n = \frac{1}{2}n - 8$; 2) $a_n = 4 - 5n$; 3) $b_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$;

4) $x_n = \frac{10}{n}$; 5) $y_n = -\frac{1}{n}$; 6) $c_n = -n^2 - n$;

7) $g_n = -(n + 1)^3$; 8) $b_n = -2n^2 + 10n$; 9) $x_n = \frac{1}{n^5}$?

55. Знайдіть суму n перших членів послідовності (x_n), якщо $x_n = \frac{1}{n(n + 1)}$.

56. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія з додатними членами. Доведіть, що сума n перших членів послідовності (x_n), де $x_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$, дорівнює $\frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}$.

57. Між числами –19,88 і 19,91 уставлено n таких чисел, що вони разом з даними утворюють арифметичну прогресію. За якого значення n різниця цієї прогресії належить області визначення функції $y = \sqrt{-x^2 + 7|x| - 12}$?

58. Доведіть, що коли a, b і c – три послідовних члени арифметичної прогресії, то числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$ і $b^2 + bc + c^2$ в зазначеному порядку також утворюють арифметичну прогресію.

59. Доведіть, що коли сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію, то її різниця дорівнює радіусу кола, вписаного в цей трикутник.

60. Нехай дано послідовність концентричних кіл (тобто кіл, що мають спільний центр) із центром у точці $A(-6; 8)$ таких, що радіуси цих кіл R_n утворюють арифметичну прогресію з першим членом 1,6 та різницею 0,4. Чи існує в цій послідовності коло, що проходить через початок координат? Якщо існує, то який його номер?

61. Послідовність (a_n) – арифметична прогресія. Відомо, що $a_{2m} + a_{2k} = 0$. Доведіть, що $a_{m+k} = 0$.

62. В арифметичній прогресії $S_m = S_n$, $m \neq n$. Доведіть, що $S_{m+n} = 0$.

63. Відомо, що за будь-якого значення n сума n перших членів деякої числової послідовності обчислюється за формулою $S_n = 2n^2 + 3n$. Доведіть, що ця послідовність є арифметичною прогресією, та знайдіть її різницю.

64. Послідовність чисел 1; 8; 22; 43; ... має властивість: різниці двох сусідніх чисел (наступного й попереднього) утворюють арифметичну прогресію 7; 14; 21; ... . Знайдіть номер члена послідовності, що дорівнює 35 351.

65. У зростаючій арифметичній прогресії a_1, a_2, a_3, a_4, що складається із цілих чисел, найбільший член дорівнює сумі квадратів решти членів. Знайдіть цю прогресію.

66. Доведіть, що коли сторони трикутника утворюють геометричну прогресію, то його висоти також утворюють геометричну прогресію.

67. Послідовність (b_n) – скінченна геометрична прогресія. Доведіть, що $\frac{S_n - b_n}{S_n - b_1} = \frac{1}{q}$.

68. a, b, c – послідовні члени геометричної прогресії. Доведіть, що $\frac{a^2 + b^2}{a} = \frac{b^2 + c^2}{c}$.

69. Дві геометричні прогресії складаються з однакової кількості членів. Перший член і знаменник першої прогресії дорівнюють відповідно 20 і $\frac{3}{4}$, а перший член і знаменник другої відповідно дорівнюють 4 і $\frac{2}{3}$. Якщо перемножити члени цих прогресій з однаковими номерами, то сума всіх добутків дорівнюватиме $158\frac{3}{4}$. Знайдіть, скільки членів у цих прогресіях.

70. У зростаючій геометричній прогресії сума першого й останнього членів дорівнює 257, а добуток другого і передостаннього членів дорівнює 256. Знайдіть кількість членів прогресії, якщо їхня сума дорівнює 511.

71. Знайдіть усі прогресії, які є одночасно й арифметичними, і геометричними.

72. Сума трьох послідовних членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 15. Якщо від перших двох її членів відняти по 1, а до третього додати 1, то три отриманих числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть три початкових числа.

73. Сума трьох чисел, що утворюють геометричну прогресію, дорівнює 91. Якщо до цих чисел додати відповідно 25, 27 та 1, то отримаємо три числа, що утворять арифметичну прогресію. Знайдіть сьомий член геометричної прогресії.

74. Три числа утворюють геометричну прогресію. Якщо до другого числа додати 2, то вони утворять арифметичну прогресію. Якщо після цього до третього числа додати 16, то прогресія знову стане геометричною. Знайдіть три початкових числа.

75. Підприємство два роки поспіль збільшувало обсяг своєї продукції на однаковий відсоток і за два роки збільшило виробництво вдвічі. Знайдіть відсоток, на який щорічно збільшувався обсяг продукції.

До теми 10. Основи комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики

76. На полиці стоять підряд 50 книжок, частина – з фізики, частина – з математики. Відомо, що жодна книжка з фізики не стоїть поряд з іншою книжкою з фізики, а кожна книжка з математики обов'язково стоїть поряд з іншою книжкою з математики. Якою може бути найбільша кількість книжок з фізики?

77. У квадраті 2027×2027 зафарбовано всі клітини по обох діагоналях. Навмання вибирають одну клітину. Яка ймовірність того, що вона не зафарбована?

78. Телефонний номер Миколи складається із семи різних цифр. Наталя хоче йому зателефонувати, пам'ятаючи, що всі цифри його номера різні, але забула дві останні цифри. Яка ймовірність того, що, набираючи телефонний номер навмання, Наталя з першої спроби додзвониться до Миколи?

79. Із відрізків завдовжки 1; 3; 5; 7 і 9 см вибирають навмання три. З якою ймовірністю із цих трьох відрізків можна побудувати трикутник?

80. Яка ймовірність того, що в січні вибраного навмання року буде п'ять субот?

81. У шаховому турнірі брали участь 10 гросмейстерів, двоє з яких – українці. Кожен із гросмейстерів зіграв по одній партії з кожним зі своїх суперників. Любитель шахів Олександр Семенович вирішив переглянути одну з партій турніру, вибравши її навмання. Яка ймовірність того, що в цій партії гратимуть:
1) двоє українців;
2) український гросмейстер з іноземним?

82. Учениця навмання вибирає одне із чисел від 1930 до 2029. Яка ймовірність того, що це число можна записати у вигляді $2^a - 2^b$, де a і b – натуральні числа?

83. Усі грані куба з ребром 1 м пофарбовано. Куб розпилено на 1000 кубиків з ребром 10 см. Із цих кубиків один вибирають навмання. Яка ймовірність того, що в нього:
1) пофарбовано 3 грані; 2) пофарбовано 2 грані;
3) пофарбовано 1 грань; 4) жодну з граней не пофарбовано?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ З ГЕОМЕТРІЇ

До теми 1. Метод координат на площині

1. Вершини чотирикутника $ABCD$ мають координати $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$, $D(x_4;\ y_4)$. Доведіть, що цей чотирикутник є паралелограмом тоді і тільки тоді, коли

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \text{ і } y_1 + y_3 = y_2 + y_4.$$

2. Кінці відрізка AB мають координати $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$. Точка $M(x;\ y)$ ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB} = \lambda$. Доведіть, що координати точки M можна знайти за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

3. Із фізики відомо, що центр мас однорідної трикутної пластини міститься в точці перетину медіан. Знайдіть координати центра мас – точки $M(x;\ y)$ трикутника ABC, якщо $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$.

4. Вершини трикутника ABC мають координати $A(-4;\ -1)$, $B(-1;\ 3)$, $C(2;\ -1)$. Бісектриса кута A перетинає BC у точці N. Знайдіть координати точки N.

5. Нехай точки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ і $C(x_3;\ y_3)$ лежать на одній прямій, причому $x_2 \neq x_3$ і $y_2 \neq y_3$. Доведіть, що

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}.$$

6. За якого значення a точки $A(a;\ -4)$, $B(2;\ -a)$, $C(8;\ 17)$ лежать на одній прямій?

7. Знайдіть координати третьої вершини рівностороннього трикутника ABC, якщо $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$.

8. Знайдіть невідомі координати двох вершин ромба $ABCD$ з кутом $60°$, якщо відомо координати двох його вершин $A(-1;\ 0)$ і $B(1;\ 0)$.

9. Знайдіть точку перетину прямої $4x - 5y + 3 = 0$ з перпендикуляром, проведеним до неї з точки $A(-6;\ 4)$.

10. Доведіть, що відстань від точки $A(x_0;\ y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$ можна знайти за формулою:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

11. Дві сторони квадрата лежать на прямих $5x - 12y - 65 = 0$ і $5x - 12y + 26 = 0$. Обчисліть його площу.

12. Точка $A(x_0;\ y_0)$ лежить на колі $x^2 + y^2 = r^2$. Складіть рівняння дотичної до кола, що проходить через точку A.

13. Скільки точок, обидві координати яких – цілі числа, належить колу $x^2 + y^2 = 10$?

14. Точка $A(1;\ 0)$ лежить на колі із центром у початку координат і є вершиною правильного трикутника, вписаного в це коло. Знайдіть координати двох інших вершин трикутника.

15. Складіть рівняння кола радіуса 10, що дотикається до кола $x^2 + y^2 - 10y = 0$ у точці $A(3;\ 1)$.

16. За яких значень k пряма $y = kx - 5$ і коло $x^2 + y^2 = 9$:

1) мають одну спільну точку;

2) мають дві спільні точки;

3) не мають спільних точок?

17. З точки $A(1;\ 6)$ до кола $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ проведено дотичні. Складіть рівняння цих дотичних.

18. Складіть рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, що паралельні прямій $2x + y - 7 = 0$.

19. На колі $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$ знайдіть найближчу до точки $A(3;\ 9)$ точку B. Знайдіть відстань від точки A до точки B.

20. Якого найменшого значення може набувати вираз

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25} + \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5}?$$

До теми 3. Вектори на площині

21. Дано чотирикутник $ABCD$ і точку O. Відомо, що $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

22. Дано два паралелограми $ABCD$ і $AB_1C_1D_1$, які мають спільну вершину A. Доведіть, що $CC_1 \leqslant BB_1 + DD_1$.

23. $ABCD$ – квадрат, $\overrightarrow{AB}(6;\ 8)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

24. Через точку O перетину діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ проведено пряму, паралельну основам, яка перетинає бічні сторони AD і BC у точках M і N. Доведіть, що $\overrightarrow{MN} = \dfrac{b\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{DC}}{a + b}$, де $AB = a$, $CD = b$.

25. Дано трикутник ABC, $\overrightarrow{AB}(3;\ 4)$, $\overrightarrow{BC}(-5;\ 12)$, BL – бісектриса трикутника. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{BL}$.

26. Доведіть за допомогою векторів, що три висоти трикутника (або їхні продовження) перетинаються в одній точці.

27. Доведіть за допомогою векторів, що всі медіани трикутника перетинаються в одній точці й діляться цією точкою у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.

28. Доведіть за допомогою векторів, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам трикутника.

29. Доведіть, що вектор $\vec{p} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

30. Точки M_1 і M_2 лежать на прямій $ax + by + c = 0$. Доведіть, що вектор $\overline{M_1M_2}$ перпендикулярний до вектора $\vec{p}(a;\ b)$.

31. Напишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2;\ 1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a}(4;\ 5)$.

32. Напишіть рівняння прямої, що є дотичною до кола $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$ у точці $A(-1;\ -1)$.

33. Виведіть формулу для знаходження косинуса кута між прямими $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

До теми 5. Розв'язування трикутників

34. Для сторін трикутника a, b, c виконується рівність $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}bc$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо найбільша сторона трикутника дорівнює $6\sqrt{2}$ см.

35. Медіани AM_1 і BM_2 трикутника ABC дорівнюють 9 см і 15 см відповідно, M – точка перетину медіан, $\angle AMB = 120°$. Знайдіть довжину третьої медіани.

36. Площа трикутника дорівнює S, а довжини двох його сторін – a і b. Знайдіть площі трикутників, на які він ділиться бісектрисою кута між даними сторонами.

37. Усередині рівностороннього трикутника ABC дано точку M так, що $AM = 1$ см, $BM = 2$ см, $\angle AMB = 120°$. Знайдіть CM.

38. Кут при вершині C рівнобедреного трикутника ABC у 4 рази більший за кут при основі. На стороні AB взято точку M таку, що $AM : MB = 1 : 2$. Знайдіть $\angle ACM$.

39. На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ взято відповідно точки M і N так, що $BM = \frac{1}{2}BC$ і $DN = \frac{1}{3}DC$. Доведіть, що $\angle MAN = 45°$.

40. Обчисліть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють a і b, а прилеглі до основи a гострі кути дорівнюють α і β.

41. Доведіть, що площу чотирикутника, вписаного в коло, можна обчислити за формулою $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, де a, b, c, d – сторони чотирикутника, p – його півпериметр.

42. У коло радіуса R вписано трикутник, вершини якого ділять коло на частини у відношенні $2 : 5 : 17$. Знайдіть площу трикутника.

43. (Теорема *Птолемея*.) Чотирикутник $ABCD$ є вписаним у коло. Доведіть, що $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

44. У трикутнику ABC через вершину A проведено пряму, що перетинає BC в точці D, причому $\frac{BD}{BC} = \alpha$ ($\alpha < 1$). Через точку D проведено пряму, паралельну стороні AB, яка перетинає AC в точці E. Обчисліть відношення площі трикутника ABD до площі трикутника ECD.

До теми 7. Правильні многокутники

45. Навколо круга описано рівнобічну трапецію з основами a і b. Знайдіть площу круга.

46. У коло вписано правильний трикутник ABK і квадрат $BCMN$. Знайдіть градусну міру кута ABC.

47. На сторонах правильного шестикутника зовні нього побудовано квадрати. Вершини квадратів, які не є вершинами шестикутника, сполучено послідовно відрізками.

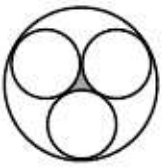
1) Доведіть, що дванадцятикутник, який при цьому утворився, є правильним.

2) Знайдіть площу дванадцятикутника, якщо сторона початкового шестикутника дорівнює α.

48. Дано прямокутний трикутник з гіпотенузою 2 і гострим кутом 60°. Знайдіть спільну частину двох кругів, що проходять через вершину прямого кута, із центрами у вершинах гострих кутів.

49. Накресліть круг, площа якого дорівнює площі кільця між двома даними концентричними колами.

50. У круг радіуса R вписано три круги однакового радіуса так, що кожен з них дотикається до двох інших (мал. 1). Обчисліть площу зафарбованої фігури.



Мал. 1

51. Центр кола, вписаного у прямокутний трикутник, лежить на відстанях $\sqrt{5}$ см і $\sqrt{10}$ см від кінців гіпотенузи. Знайдіть довжину кола.

52. На катетах прямокутного трикутника, як на діаметрах, побудовано круги. Доведіть, що сума площ частин цих кругів, які лежать поза описаним навколо цього трикутника кругом, дорівнює площі трикутника.

53. Навколо рівнобедреного трикутника з основою 6 см описано круг, довжина кола якого становить 10π см. Знайдіть відношення площі круга до площі трикутника.

54. Сторона правильного трикутника дорівнює a. Із його центра описано коло, радіус якого дорівнює $\frac{a}{3}$. Знайдіть площу тієї частини трикутника, що лежить поза колом.

До теми 9. Геометричні перетворення

55. Дано пряму, коло і точку O. Побудуйте точки, симетричні одна одній відносно центра O, одна з яких належить прямій, а інша – колу.

56. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено висоту CD. Радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і BCD, дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть радіус кола, вписаного у трикутник ABC.

57. У трикутнику ABC на сторонах AB і BC позначено точки D і E так, що $DE \parallel AC$. Площа трикутника ABC дорівнює 8 см^2, а площа трикутника DEC дорівнює 2 см^2. Знайдіть відношення відрізка DE до сторони AC.

58. Побудуйте трикутник за трьома його медіанами.

59. Діагоналі прямокутника лежать на прямих $y = -3x + 1$ та $y = 3x - 5$.

1) Складіть рівняння осей симетрії прямокутника.

2) Знайдіть координати вершин прямокутника, якщо одна з його сторін проходить через точку $(2; -1)$.

60. На кожній медіані трикутника позначено точку, що ділить медіану у відношенні $1 : 3$, починаючи від вершини трикутника. У скільки разів площа трикутника з вершинами в цих точках менша від площі початкового трикутника?

61. Складіть рівняння образу кривої $x^2 - 4x + y^2 = 0$ при повороті навколо початку координат на кут $60°$:

1) за годинниковою стрілкою; 2) проти годинникової стрілки.

62. Побудуйте квадрат із центром у даній точці так, щоб прямі, що містять дві його сусідні сторони, проходили через дві дані точки.

63. Крива, рівняння якої $x^2 + y^2 = 2(2 + 2y - x)$, при деякому паралельному перенесенні переходить у криву, рівняння якої $x^2 + y^2 = 2(2x + y - m)$.

1) Знайдіть m.

2) Напишіть рівняння образу прямої $2x - 3y + 6 = 0$ при такому перенесенні.

До теми 11. Початкові відомості зі стереометрії

64. Чи існує шестикутна піраміда, у якої всі ребра рівні?

65. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні й дорівнюють a, b, c. Знайдіть:

1) бічну поверхню піраміди;

2) об'єм піраміди;

3) площу основи;

4) висоту.

66. Основою прямої призми є паралелограм, один із кутів якого дорівнює $30°$. Площа основи дорівнює 4 дм^2. Площі двох бічних граней призми дорівнюють 6 дм^2 і 12 дм^2. Знайдіть об'єм призми.

67. Об'єм правильної восьмикутної призми дорівнює 8 м^3, а її висота дорівнює 2,2 м. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

68. Знайдіть відстань між серединами двох мимобіжних ребер куба, площа повної поверхні якого дорівнює 36 см^2.

69. Куб, ребро якого дорівнює a, зрізаний по кутах так, що від кожної грані залишився правильний восьмикутник. Знайдіть об'єм утвореного многогранника.

70. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює $\frac{269}{32}$ см. Основа піраміди – трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см.

1) Доведіть, що основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо трикутника основи.

2) Знайдіть об'єм піраміди.

71. Циліндр утворено обертанням прямокутника навколо однієї з його сторін. Визначте об'єм V циліндра через площу S цього прямокутника і довжину C кола, яке описує точка перетину його діагоналей.

72. Висота конуса дорівнює діаметру його основи. Знайдіть відношення площі його основи до площі бічної поверхні.

73. Виразіть об'єм V конуса через його бічну поверхню S та відстань r від центра основи до твірної.

74. Із сектора з радіусом 6 см і дугою 120° виготовили конус. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні конуса;
2) об'єм конуса.

75. У циліндр вписано кулю так, що вона дотикається до основ та бічної поверхні циліндра. Знайдіть відношення:
1) об'єму кулі до об'єму циліндра;
2) площі сфери до площі повної поверхні циліндра.

76. Трикутник зі сторонами 10 см, 17 см і 21 см обертається навколо більшої сторони. Обчисліть:
1) об'єм утвореної фігури обертання;
2) поверхню утвореної фігури обертання.

77. У конус вписано кулю так, що вона дотикається до основи конуса та його бічної поверхні. Доведіть, що відношення повної поверхні конуса до поверхні кулі дорівнює відношенню їхніх об'ємів.

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Тема 6

§ 26. 26.16. 1) $(-\infty; -1 - 2\sqrt{2}) \cup (-1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$; 2) $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$. **26.17.** 1) $(2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7})$; 2) $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right)$. **26.20.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $\varnothing$; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 4) $\{4\}$; 5) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; 6) $\{5\}$; 7) $(-\infty; +\infty)$; 8) $\varnothing$. **26.21.** 1) Немає розв'язків; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $\{3\}$; 4) $(-\infty; 0{,}6) \cup (0{,}6; +\infty)$; 5) $\{1\}$; 6) $(-\infty; +\infty)$; 7) $\varnothing$; 8) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$. **26.22.** 1) 1; 2) 1; 2; 3; 4. **26.23.** 1) 1; 2; 3; 2) -3; -2; -1; 0. **26.24.** 5 мов. **26.25.** 16 медалей. **26.26.** 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) немає розв'язків. **26.27.** 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) немає розв'язків. **26.29.** 1) -3; 2) -2. **26.30.** 1) 1; 2) 0. **26.31.** 1) $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$; 2) $(-\infty; -2{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$; 3) $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$; 4) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **26.32.** 1) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$; 2) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. **26.33.** 1) $[-1; 2) \cup (2; 3]$; 2) $(-\infty; -2] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$. **26.34.** 30 хв. **26.35.** 1) $(0; 1)$; 2) $(3; +\infty)$. **26.36.** 1) $(-\infty; -4{,}5]$; 2) $[8; 12)$. **26.37.** 1) 0; 1; 5; 6; 2) -3; 1; 2. **26.38.** 1) 0; 1; 3; 4; 5; 2) 1; 2; 3. **26.39.** 1) $[3; 4) \cup (4; 5]$; 2) $(-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$. **26.40.** $[3; 4)$. **26.41.** $(4; 5]$. **26.42.** 1) $-2 < a < 6$; 2) $0 < a < \frac{12}{13}$. **26.43.** 1) $a < 2$ або $a > 6$; 2) $a < 0$ або $0 < a < 0{,}4$, або $a > 2$. **26.44.** 1) $-7 < a < 5$; 2) $a < 0$ або $0 < a < \frac{1}{4}$. **26.45.** 1) $0 < m < 28$; 2) $m < -4$. **26.48.** $x_2 = 1$; $x_3 = 2$. **26.49.** 9 упаковок. **26.54.** Так.

§ 27. 27.11. 1) $(2; 1)$, $(2; -1)$; 2) немає розв'язків. **27.12.** 1) $(3; 1)$, $(-3; 1)$; 2) немає розв'язків. **27.13.** 1) $(-1; 6)$; $(2; 3)$; 3) 5 медалей. **27.14.** 1) $(-2; 6)$; $(3; 11)$; 3) 29 років. **27.15.** 1) $(-4; 0)$, $(-1; -3)$; 2) $(0; 2)$. **27.16.** 1) $(-6; 0)$, $(-1; -5)$; 2) $(0; 3)$. **27.17.** 1) Один розв'язок; 2) чотири розв'язки. **27.18.** 1) $(3; 2)$, $(-42; 11)$; 2) $(5; 0)$, $(3; 4)$; 3) $(-2; 4)$, $(2; 2)$; 4) $(4; 3)$, $\left(\frac{3}{7}; -\frac{4}{7}\right)$. **27.19.** 1) $(-1; -1)$, $(5; 2)$; 2) $(3; 2)$, $(-1{,}2; 3{,}4)$; 3) $(3; -1)$, $(-3; 2)$; 4) $(2; 3)$, $(15; -10)$. **27.20.** 1) $(3; 2)$, $(-4; 9)$; 2) $(3; 5)$, $(5; 3)$, $(-3; -5)$, $(-5; -3)$. **27.21.** 1) $\left(3{,}5; \frac{3}{7}\right)$; 2) $(2; 5)$, $(2; -5)$, $(-2; 5)$, $(-2; -5)$; 3) $(1; 4)$, $(-1; -4)$; 4) $(1; 5)$, $(-1; -5)$. **27.22.** 1) $\left(5; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(1; 2)$, $(1; -2)$, $(-1; 2)$, $(-1; -2)$; 3) $(2; 1)$, $(-2; -1)$; 4) $(-3; 1)$, $(3; -1)$. **27.23.** 1) $(2; 3)$, $(-2{,}5; -1{,}5)$; 2) $(4; -1)$, $(2; -3)$. **27.24.** 1) $(2; 1)$, $\left(-1\frac{1}{3}; -2\frac{1}{3}\right)$; 2) $(-1; -8)$, $\left(-4\frac{1}{3}; 2\right)$. **27.25.** 1) $(2; 1)$, $(1; 2)$; 2) $(3; 2)$, $(-2; -3)$;

3) (1; 0), (−1,5; 2,5); 4) (2; −1), $\left(\frac{21}{53};\ \frac{15}{53}\right)$. **27.26.** 1) (3; 2), (−10; 15); 2) (−1,5; 0,5), (0,5; 2,5). **27.27.** 1) $a = 2$; 2) $a = -2$. **27.28.** [−11,5; 9]. **27.29.** 2 км/год. **27.31.** 5000. **27.32.** 1) Зошит – 9 грн, олівець – 6 грн; 2) 18 км/год; 2 км/год.

§ 28. 28.2. −7 і 4. **28.3.** 4 і −3. **28.4.** −2 і −5. **28.5.** 6 і 4. **28.6.** 20 м і 30 м. **28.7.** 8 см і 10 см. **28.8.** 5 см і 12 см. **28.9.** 6 см і 8 см. **28.10.** 5 і 10 або 30 і −15. **28.11.** 6 і 3 або 1 і −2. **28.12.** 24. **28.13.** 48. **28.14.** 8 с./хв і 10 с./хв. **28.15.** Яна – 6 задач, Олег – 5 задач. **28.16.** 5 м і 8 м або 19,5 м і 22,5 м. **28.17.** 21 ряд. **28.18.** 60 км/год і 80 км/год. **28.19.** 12 км/год і 18 км/год. **28.20.** 3 км/год і 12 км/год. **28.21.** 28 см. **28.22.** 30 см^2. **28.23.** 6 год і 3 год. **28.24.** Батько за 10 днів, син – за 15 днів. **28.25.** 4 км/год і 5 км/год. **28.26.** 12 км/год і 18 км/год. **28.27.** 20 км/год і 2 км/год. *Порада.* Для розв'язування отриманої системи використати метод заміни змінної. **28.28.** 18 км/год і 12 км/год. *Порада.* Нехай швидкість велосипедиста, що їхав з A до B, – x км/год, а велосипедистки – y км/год. За умовою задачі матимемо систему рівнянь $\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{9}{10}y = 18, \\ \frac{18}{y} - \frac{18}{x} = \frac{9}{10} - \frac{2}{5}. \end{cases}$ **28.31.** [−3; 2) ∪ (2; 3]. **28.32.** 8. **28.33.** Наталка живе у третьому під'їзді на 5 поверсі, Сергій – у п'ятому під'їзді на 7 поверсі. **28.34.** 2027^{10}.

Вправи для повторення теми 6

7. 1), 3), 4) Так; 2) ні. **8.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 6) $(2; 5) \cup (5; +\infty)$; 7) $x = 0$; 8) $x = -1$; 9) $x = 0$. **9.** 1) 0; 2) 0; 3) [0; 2]; 4) (0; 1]; 5) $[-2; +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{4}\right]$. **13.** 1) Не існують; 2) 1; 3) 10. **14.** 1) $(-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2)$. **20.** 1) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$; 2) $x = 0$; 3) немає таких проміжків; 4) $(-\infty; -3)$ і $(-3; +\infty)$; 5) $-3 < x < 0$; 6) $x < -3$ або $x > 0$. **21.** $a = 2$. **28.** $c = 9$. **29.** $a = -2$. **30.** 1) [0; 8]; 2) [−27; 0]. **31.** (−1; 4), (5; 10). **32.** $p = -5$; $q = 8$. **34.** $x = 4$. **35.** 1) −0,5; 2) −1. **36.** 1) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D = 0$; 2) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$, $D > 0$; 3) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $D < 0$; 4) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$, $D > 0$. **38.** $a > \frac{8}{7}$. **44.** 1) $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$; 2) [3; 6]; 3) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. **45.** Менша від 5 см. **46.** $0 < x \leqslant 7$. **47.** $-1{,}5 \leqslant x \leqslant -\frac{4}{3}$. **48.** 1) $c = 16$; 2) $c = 9$. **49.** 1) $[-2; -1) \cup (1; 2]$; 2) $[-3; -1) \cup (0; 2]$. **50.** $a = -2$. **51.** $m < -\frac{1}{7}$ або $m > 1$. **52.** Якщо $a \leqslant -6$ або $a \geqslant -1$, то $x_{1,2} = a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 7a + 6}$; якщо $-6 < a < -1$, то розв'язків немає. **53.** 1) Якщо $a < 2$, то $-2 < x < -a$; якщо $a = 2$, то розв'язків немає; якщо

$a > 2$, то $-a < x < -2$; 2) якщо $a < -1$, то $x \leqslant 2a$ або $x \geqslant -a - 3$; якщо $a = -1$, то x – будь-яке число; якщо $a > -1$, то $x \leqslant -a - 3$ або $x \geqslant 2a$. **54.** 1) Якщо $m \leqslant -2$, то $x < m$; якщо $-2 < m \leqslant 3$, то $x \leqslant -2$; якщо $m > 3$, то $x \leqslant -2$ або $3 \leqslant x < m$; 2) якщо $m \leqslant -4$, то $-4 < x < 2$; якщо $-4 < m < 2$, то $m \leqslant x < 2$; якщо $m \geqslant 2$, то система не має розв'язків. **58.** 1) (2; 5); 2) система не має розв'язків. **59.** 1) (6; 2), (2; 6); 2) (3; −4), (−3; 4), (−4; 3), (4; −3). **60.** 1) (3; 2), (−3; 2), (−3; −2), (3; −2); 2) (3; −2), (−3; −2); 3) (2; −1), (−2; 1); 4) (6; 10). **61.** 1) (4; 1); 2) (−1; 0), (0; −1), (1; 0). **62.** 1) (−1; −2), (−2,5; −1); 2) (3; 1), (−3; −1). **63.** 1) (6; 2), $\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$; 2) (2; 1), $\left(\frac{126}{11}; -\frac{54}{11}\right)$. **64.** 5 і 2 або −2 і −5. **65.** 5 і 7. **66.** 4 см і 8 см. **67.** 4 і 5 або 15 і $\frac{4}{3}$. **68.** 12 см і 9 см. **69.** 4 см і 5 см. **70.** 35. **71.** 28 см або 26 см. **72.** 90 км/год і 80 км/год. **73.** 8. **74.** 7. **75.** 25 або 85. **76.** 100 м × 80 м. **77.** 20 год і 30 год. **78.** 20 іграшок.

Тема 7

§ 29. **29.13.** 1) 24; 2) 24 серпня – День Незалежності України. **29.14.** 2) V ст. **29.24.** 12. **29.25.** 18. **29.26.** 9. **29.27.** 10. **29.28.** 4 см. **29.29.** 8 см. **29.32.** $n = 4$, $a_4 = 12\sqrt{2}$ см. **29.33.** $n = 6$, $a_6 = 4$ см. **29.34.** $32\sqrt{2}$ см^2. **29.35.** 27 см^2. **29.36.** $\sqrt{2}$ см. **29.39.** 1) 6 см, 6 см; 2) 2 см, 18 см. **29.40.** 432 см^2. **29.42.** 1) 4 банки; 2) 1480 грн. **29.43.** 45 см.

§ 30. **30.7.** 2) 4 м. **30.17.** 18 см. **30.18.** 27 см. **30.19.** 40°. **30.20.** 72°. **30.21.** 6,54 м. **30.22.** 8. **30.23.** 6. **30.24.** 12π см. **30.25.** 16π см. **30.26.** 4π см. **30.27.** 10π см. **30.28.** 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{9}$. **30.29.** 1) 6 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $3\sqrt{3}$ см. **30.30.** 12π см. **30.31.** 20π см. **30.32.** $\frac{725\pi}{24}$ см. **30.35.** 1) 96 см^2; 2) 24 см, $7\frac{5}{13}$ см, 6,4 см; 3) 3 см; 4) 16,25 см. **30.36.** $3a$ см. **30.37.** 8 м.

§ 31. **31.18.** 1) ≈ 16,1 кг; 2) 7245 грн. **31.19.** 1) 680 троянд; 2) 5440 грн. **31.20.** 16π см^2. **31.21.** π см^2. **31.22.** 2π см^2. **31.23.** 6π см^2. **31.24.** 21π см^2. **31.25.** (50π − 100) см^2. **31.26.** (100π − 96) см^2. **31.27.** 1) ≈ 0,8 кг, ≈ 1,7 кг; 2) 1080 грн. **31.28.** 30 см. **31.29.** 6 см. **31.30.** 1) $(12\pi - 36)$ см^2; 2) $(48\pi - 36\sqrt{3})$ см^2; 3) $(90\pi + 36\sqrt{2})$ см^2. **31.31.** 1) $(4{,}5\pi - 9\sqrt{2})$ см^2; 2) $(9\pi - 18)$ см^2; 3) $(21\pi + 9)$ см^2. **31.32.** $(12\pi - 9\sqrt{3})$ см^2, $(24\pi + 9\sqrt{3})$ см^2. **31.33.** $(24\pi - 36\sqrt{3})$ см^2, $(120\pi + 36\sqrt{3})$ см^2. **31.34.** $\frac{15\pi}{4}$ см^2. **31.35.** $128\sqrt{3}$ см^2. **31.36.** $\frac{a^2(4-\pi)}{4}$, $\frac{a^2(4-\pi)}{2}$, $\frac{a^2(\pi-2)}{2}$. **31.38.** 9. **31.39.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. **31.41.** Тарас на 1 хв 34 с. **31.42.** $\sqrt{7}$.

Вправи для повторення теми 7

8. 30. **9.** 12 см. **10.** $8\sqrt{3}$ см. **11.** 60°. **12.** $r = (48 - 24\sqrt{3})$ см, $R = (32\sqrt{3} - 48)$ см. **14.** $\frac{r(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$ або $\frac{r(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$. **15.** 8 : $3\sqrt{3}$: $6\sqrt{3}$. **16.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **17.** *Порада.* По-

будуйте спочатку рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого a, його гіпотенуза – сторона правильного шестикутника. **18.** $8R^2$. **24.** На 4 см. **25.** 24 см. **26.** ≈ 36,2 км/год. **27.** 12 см. **28.** $\frac{\sqrt{3}\pi a}{6}$. **29.** $\frac{25}{3}\pi$ см. **30.** 13π см. **31.** ≈ 16,4 см. **32.** 1) $\frac{\pi a\sqrt{2+\sqrt{3}}}{6}$; 2) $\frac{5\pi a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{6}$. **33.** 1) $\frac{4l}{3\pi}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}l}{4\pi}$. **34.** $\frac{\pi r}{2}, \frac{2\pi r}{3}, \frac{5\pi r}{6}$. **41.** 1 : 9. **42.** 3π см². **43.** π : 2. **44.** 4 см. **45.** 1) $(54\pi - 81\sqrt{3})$ см²; 2) $(121{,}5\pi - 81\sqrt{2})$ см²; 3) $(135\pi - 81)$ см²; 4) $(216\pi + 81\sqrt{3})$ см²; 5) $(270\pi + 81\sqrt{3})$ см²; 6) $(297\pi + 81)$ см². **46.** $(16\pi - 32)$ см²; $(48\pi + 32)$ см². **47.** $\frac{3\pi r^2}{2}$ см². **48.** $\pi r^2(3 + 2\sqrt{2})$. **49.** $\frac{C_1^2 - C_2^2}{4\pi}$. **50.** $\frac{R^2}{2}(\pi + \sqrt{3})$.

Тема 8

§ 32. 32.8. 2) 10 м. **32.11.** 1) $y_9 = 7$; 2) $y_3 = y_6 = -29$; 3) не є членом послідовності; 4) $y_{12} = 79$. **32.12.** 1) $x_{10} = 69$; 2) не є членом послідовності; 3) $x_2 = 5$; 4) $x_1 = x_3 = 6$. **32.13.** 1) $c_1 = 8$, $c_2 = 3$, $c_3 = -2$, $c_4 = -7$, $c_5 = -12$; 2) $c_1 = -3$, $c_2 = -3$, $c_3 = -3$, $c_4 = -3$, $c_5 = -3$; 3) $c_1 = -2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $c_4 = 4$, $c_5 = 5$; 4) $c_1 = 0$, $c_2 = -5$, $c_3 = -5$, $c_4 = 1{,}25$, $c_5 = -0{,}3125$. **32.14.** 1) $y_1 = 5$, $y_2 = 3$, $y_3 = -1$, $y_4 = -9$, $y_5 = -25$; 2) $y_1 = 16$, $y_2 = 1$, $y_3 = 8$, $y_4 = \frac{1}{16}$, $y_5 = 64$. **32.15.** 1) $a_1 = 25$; 2) $b_4 = 32$; 3) $c_{2k} = 1$, де k – натуральне число; 4) $y_2 = y_3 = 6$. **32.16.** 1) $x_1 = -1$; 2) $a_4 = -21$. **32.19.** −7. **32.20.** (0; 2), (0; −2), (−3; −1), (3; 1). **32.21.** Через 5 місяців. **32.24.** (1; 2; 3); (−1; −2; −3).

§ 33. 33.7. 1) 673; 2) 2019 р. **33.17.** 1) 5; 2) $4\frac{1}{3}$; $5\frac{2}{3}$; 3) 4; 5; 6. **33.18.** 18; 21; 24; 27. **33.19.** 1) $a_n = -x + 3xn$; 2) $a_n = \frac{m-2}{m} + \frac{1}{m}n$. **33.20.** 1) $a_1 = 39$, $d = -2$; 2) $a_1 = 5$, $d = 2$. **33.21.** 1) $c_1 = -45$, $d = 3$; 2) $c_1 = -1$, $d = -3$. **33.22.** 1) $C = 50 + 8s$; 2) так; 3) 146 грн; 4) 15 км. **33.23.** 1) $C = 800 + 600n$; 2) так; 3) 3800 грн; 4) 8 діб. **33.24.** 1) Так; 2) ні. **33.25.** 1) Ні; 2) так. **33.26.** 32. **33.27.** 27. **33.28.** 1) $d = 5$; 2) 69. **33.29.** $x = 1$ або $x = 6$. **33.30.** $y_1 = -1$ або $y = 4$. **33.31.** $m = 1$. **33.32.** 1) −37; 2) 2,5. **33.33.** 1) −25; 2) 5,4. **33.37.** 1) −1; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 2) $1 \pm \sqrt{2}$. **33.38.** Так. **33.39.** $[-10; 0) \cup (0; 1]$. **33.40.** 96 000 грн.

§ 34. 34.13. 1) 42 653; 2) 12 425; 3) 12 402; 4) 1635. **34.14.** 1) 12 810; 2) 123 525. **34.15.** 1) −44; 2) 98. **34.16.** 1) −275; 2) 192,5. **34.17.** 4. **34.18.** 4. **34.19.** 100. **34.20.** −100. **34.21.** 15. **34.22.** 6000 МВт. **34.23.** −197,4. **34.24.** 484. **34.25.** 1) 15; 2) −3 або 6. **34.26.** 1) 12; 2) −37. **34.27.** 610. **34.28.** 6 год. **34.29.** 66 990 грн. **34.32.** $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$. **34.34.** 10 Ом. **34.37.** 6 або $-\frac{6}{19}$.

§ 35. 35.13. 1) 24; 2) 1992 р. **35.17.** $x_1 = 12$, $q = 4$. **35.18.** 1) $q = 2$ або $q = -2$; 2) $q = 3$; 3) $q = \frac{3}{4}$ або $q = -\frac{3}{4}$; 4) $q_1 = -1$. **35.19.** 1) $q = 3$ або $q = -3$; 2) $q = \frac{1}{3}$.

35.20. 2,5; −5; 10; −20; 40. **35.21.** $-\frac{5}{4}$; 5; −20; 80; −320; 1280. **35.22.** $x_5 = \frac{1}{32}$. **35.23.** $b_1 = \frac{1}{1000}$ або $b_1 = -\frac{1}{1000}$. **35.24.** 1) $c_1 = 1000$; 2) $c_6 = 64$ або $c_6 = -64$. **35.25.** 10 клітин; 40 клітин; 320 клітин. **35.26.** 1) 864 клієнти; 2) так. **35.27.** 1) 72 900 грн; 2) ні. **35.28.** 1) 1; 8; 64 або 1; −8; 64; 2) 1; 4; 16; 64. **35.29.** $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_5 = 8$. **35.30.** 4; 2; 1, якщо $x = 1$, і −9; −24; −64, якщо $x = -12$. **35.31.** −1; 1; −1, якщо $y = -1$. **35.34.** 8 см². **35.36.** 1) $a_1 = 3$, $d = 2$; 2) $a_1 = 5$, $d = -1$. **35.38.** −10,008. **35.40.** На 0,85 м. **35.43.** $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

§ 36. 36.1. 1) 136 763,1 грн; 168 505,82 грн; 2) 36 763,1 грн; 68 505,82 грн. **36.2.** 1) 250 880 грн; 314 703,87 грн; 2) 50 880 грн; 114 703,87 грн. **36.3.** 80 000$(1{,}09^n - 1)$; 15 048 грн; 23 602,32 грн. **36.4.** ≈ 80 000 грн. **36.5.** 58 000 грн. **36.6.** 80 000 грн. **36.7.** 1) 1825,35 грн; 2) 1665,94 грн. **36.8.** 1) 47 550 осіб; 2) 45 219 осіб. **36.9.** 20 %. **36.10.** 6. **36.11.** (4; 2), (−4; −2). **36.12.** Купити у другого продавця 2200 кг пластмаси. **36.13.** (0; 1), (0; −1). *Порада.* Доведіть, що для $x > 0$ та $x \leqslant -2$ рівняння розв'язків у цілих числах не має.

§ 37. 37.10. 211. **37.11.** 67,1 см. **37.12.** 1) 625 лайків; 2) 1015 лайків. **37.13.** 1) 189; 2) −409,5. **37.14.** 1) 682; 2) 183. **37.15.** 1) $1\frac{127}{128}$; 2) 605; 3) −10; 4) 635. **37.16.** 1) $1\frac{364}{729}$; 2) 2295; 3) −104; 4) 364. **37.17.** 1) 5; 2) 27. **37.18.** 1) 3; 2) 81. **37.19.** 1) $\frac{1}{x^2-1}$; 2) $-\frac{1}{x+1}$. **37.20.** 781 або −521. **37.21.** 364 або 182. **37.22.** Чоловік, котрий запропонував угоду. Багатій отримав 3 000 000 крб., а заплатив 10 737 418,23 крб. **37.23.** 728. **37.24.** −22. **37.25.** 1) Павло отримав на 27 000 грн більший прибуток, ніж Марічка; 2) Марічка отримала на 5000 грн більший прибуток, ніж Павло. **37.26.** 1) 6; 2) 7; 3) 5. **37.28.** −31,2. **37.29.** 252. **37.30.** 20 000 грн під 10 % річних і 40 000 грн під 7 % річних. **37.32.** (2; −2); (−2; 2). **37.33.** У салоні «Гамма», 5510 грн. **37.34.** Легковик за 2 год, мотоцикліст за 4 год.

§ 38. 38.11. 1) $10(\sqrt{2}+1)$; 2) $\frac{3\sqrt{2}+4}{4}$. **38.12.** 1) $\frac{9(\sqrt{3}+1)}{2}$; 2) $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$. **38.13.** 1) 160; 2) $-20\frac{1}{4}$. **38.14.** 1) $121\frac{1}{2}$; 2) 9. **38.15.** 1) $\frac{1}{1-x}$; 2) $\frac{x}{1+x^2}$. **38.16.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{5}{33}$; 3) $3\frac{1}{9}$; 4) $7\frac{13}{33}$; 5) $\frac{19}{30}$; 6) $7\frac{25}{99}$. **38.17.** 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{2}{11}$; 3) $5\frac{2}{9}$; 4) $4\frac{14}{33}$; 5) $\frac{49}{90}$; 6) $4\frac{28}{99}$. **38.18.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) −8. **38.19.** 1) $\frac{4}{5}$; 2) −40. **38.20.** $10\frac{2}{3}$ або $2\frac{2}{3}$. **38.21.** 4,5. **38.22.** $6a$ см. **38.23.** $2c^2$ см². **38.24.** 1) $3\frac{41}{150}$; 2) $6\frac{133}{330}$. **38.25.** 1) $4\frac{173}{300}$; 2) $5\frac{101}{3300}$. **38.26.** 1) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{7}{9}$; $\frac{1}{2}$. **38.28.** 45 045. **38.29.** 1) $(-\infty; -2]$; 2) $(-\infty; 1]$. **38.30.** $x_2 = 25$. **38.31.** 14 875 осіб. **38.32.** 1.

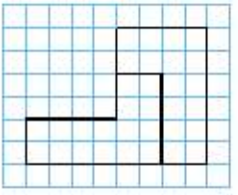
Вправи для повторення теми 8

3. 7. **4.** $x_{22} = -\frac{1}{3}$. **5.** $b_1 = -1$. **6.** 1) $a_n = 2n - 1$; 2) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 3) $a_n = n^2$; 4) $a_n = 2^n$; 5) $a_n = (-1)^n$; 6) $a_n = (-1)^n + 2$. **7.** 5. **14.** 1) −5,5; 2) −200. **15.** 27. **16.** $a_{45} = -0{,}1$. **17.** Так; середня сторона дорівнює 13 см. **19.** 16; 25 або 4; 1. **25.** 1) −420; 2) −615. **26.** 1) 3; 2) 7. **27.** 9 днів. **28.** $a_1 = 8$, $d = 2$. **29.** 1) 81; 2) 105. **30.** 3750. **31.** 1) $p^{\frac{n-n^2}{2}}$; 2) $c^{\frac{n^2+n}{2}}$. **36.** 2; −4; 8; −16; 32. **37.** $-\frac{8}{3}$. **38.** $c_8 = \frac{1}{5}$, $c_9 = \frac{1}{25}$. **39.** −18. **40.** 9. **41.** 1; −3; 9, якщо $x = 2$. **42.** 1) $b_1 = 1{,}2$, $q = 2$; 2) $b_1 = 3$, $q = 2$. **43.** Можуть, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}}$. **44.** 1) 194 490 грн; ≈ 253 340 грн; 2) 44 940 грн; ≈ 103 340 грн. **45.** ≈ 45 320 грн. **46.** 1) 7290 хворих; 2) ≈ 5905 хворих. **50.** 3069 см^2. **51.** 781,2. **52.** 61. **53.** 765. **54.** 510 або $15\frac{15}{16}$. **55.** $b_1 = 3$, $q = -2$, $n = 6$. **56.** 1; 4; 16; 64; 256; 1024. **57.** О 10 год 30 хв. **62.** *Порада.* $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \ldots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) + \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \ldots\right)$. **63.** Так, якщо $-1 < q < 0$. **64.** $21\frac{1}{3}$. **65.** 1) $\frac{19}{33}$; 2) $\frac{11}{45}$; 3) $4\frac{17}{99}$; 4) $5\frac{2}{15}$. **66.** 1) $10\frac{1}{8}$; 2) $3\frac{3}{8}$. **67.** 240. **68.** 1) 162 або −81; 2) $341\frac{1}{3}$ або $204\frac{4}{5}$. **69.** $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$.

Тема 9

§ 39. **39.9.** Так. **39.10.** Так. **39.11.** Ні. **39.12.** Ні. **39.13.** Так. *Порада.* Радіуси кіл рівні. **39.14.** Ні. *Порада.* Радіуси кіл різні. **39.15.** Див. малюнок 1. **39.16.** Див. малюнок 2. **39.19.** 12 см. **39.20.** 72°. **39.21.** 1) 11 рулонів.

Мал. 1



Мал. 2

§ 40. **40.9.** 1) $x = 9$, $y = 5$; 2) у 14 років. **40.10.** 1) $x = -11$, $y = 15$; 2) 4 нагороди. **40.14.** 1) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$; 2) $(x + 4)^2 + (y - 13)^2 = 16$. **40.15.** 1) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 9$; 2) $(x - 5)^2 + (y + 11)^2 = 9$. **40.16.** 1) $2x - y - 5 = 0$; 2) $2x - y - 3 = 0$. **40.17.** 1) $x + 2y + 3 = 0$; 2) $x + 2y + 13 = 0$. **40.20.** 45°, 45°. **40.21.** 105°. **40.22.** $AC = 5$ см, $AB = \sqrt{41}$ см або $AB = \sqrt{137}$ см.

§ 41. **41.11.** 1) $x = 3$, $y = 2$; 2) $x = -3$, $y = -2$. **41.12.** 1) $x = -5$, $y = -6$; 2) $x = 5$, $y = 6$. **41.17.** 1) $2x + 3y - 6 = 0$; 2) $2x + 3y + 6 = 0$. **41.18.** 1) $4x + y + 8 = 0$; 2) $4x + y - 8 = 0$. **41.21.** $3\sqrt{3}$: 8. **41.22.** ≈ 17,17 м. **41.23.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

§ 42. **42.13.** На 90° за або проти годинникової стрілки. **42.14.** 1) $m = -4$, $n = -3$. **42.15.** 1) $m = 3$, $n = 4$. **42.16.** $A'(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. **42.17.** $B'(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. **42.18.** *Порада*. Побудуйте рівносторонній трикутник, тоді буде отримано кут 60°. **42.24.** 143,6 см.

§ 43. **43.10.** 1) Ні; 2) так. **43.11.** 1) Ні; 2) так. **43.12.** $(x + 8)^2 + (y - 9)^2 = 15$. **43.13.** $(x - 8)^2 + (y + 6)^2 = 7$. **43.14.** $x + 2y - 1 = 0$. **43.15.** $3x - y + 3 = 0$. **43.16.** 1) $2x - 5y = 0$; 2) $2x - 5y - 9 = 0$. **43.17.** 1) $3x - 2y = 0$; 2) $3x - 2y - 14 = 0$. **43.20.** 128 см^2. **43.24.** $2r^2(2\sqrt{3} + 3)$.

§ 44. **44.20.** Ні. **44.21.** Ні. **44.22.** 1) 6 см, 8 см, 10 см, 12 см; 2) 18 см, 24 см, 30 см, 36 см; 3) 15 см, 20 см, 25 см, 30 см. **44.23.** 1) 15 см, 20 см, 25 см, 30 см, 35 см; 2) 24 см, 32 см, 40 см, 48 см, 56 см; 3) 6 см, 8 см, 10 см, 12 см, 14 см. **44.25.** 18 см або 8 см. **44.26.** 9 см або 36 см. **44.28.** $\frac{b^2}{a}$. **44.30.** Так. **44.32.** 4 см, 4 см, 6 см, 8 см, 12 см і 6 см, 6 см, 9 см, 12 см, 18 см. **44.33.** 8 см, 8 см, 12 см, 20 см і 6 см, 6 см, 9 см, 15 см. **44.38.** $(588 - 392\sqrt{2})$ см^2. **44.41.** 24.

§ 45. **45.9.** 2 : 1. **45.10.** 4 : 3. **45.11.** 108 см^2. **45.12.** 6 см. **45.13.** 18 см^2 і 32 см^2. **45.14.** 125 см^2 і 80 см^2. **45.15.** 1 : 10 000. **45.16.** 10^6. **45.17.** 4 см. **45.18.** 6 см. **45.20.** 12 см, 21 см, 24 см і 20 см, 35 см, 40 см. **45.21.** 10,5 м. **45.22.** 2 см і $\sqrt{2}$ см, або $(4 + 2\sqrt{3})$ см і $(2\sqrt{2} + \sqrt{6})$ см.

Вправи для повторення теми 9

5. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні. **6.** Ні. **8.** Так. **17.** Ні. **18.** *Порада*. Побудувати пряму, симетричну одній з даних відносно заданої точки. **29.** *Порада*. Розглянути точку перетину прямої AB' з прямою l, де B' – точка, симетрична точці B відносно прямої l. **34.** 60°. **35.** $C'(1; \sqrt{3})$. *Порада*. Точка C' належить прямій $y = \sqrt{3}x$. **36.** 1) $x + 2y - 1 = 0$; 2) $x + 2y + 1 = 0$. **45.** *Порада*. Образом є коло $x^2 + y^2 = 5$. **46.** $(-0{,}5; -1)$. **53.** Так. **54.** Ні. **55.** Ні. **57.** 1) Ні; 2) ні. **58.** Ні. **59.** $\sqrt{ab}$. **65.** 256 см^2 або 81 см^2. **66.** 1 : 3. **67.** 12 см і 8 см. **68.** 600 м^2. **69.** Зменшиться в 9 разів. **70.** 4 : 3. **71.** 4 : 5. **72.** 5 см. **73.** *Порада*. Сторони шуканого чотирикутника у 1,5 раза більші за сторони заданого, а відповідні кути рівні між собою.

Тема 10

§ 46. **46.9.** 720. **46.10.** 120. **46.11.** 6. **46.12.** 16. **46.13.** 20. **46.14.** 1680. **46.15.** 36. **46.16.** 8. **46.17.** 1) 60; 2) 125. **46.18.** 1) 20; 2) 25. **46.19.** 6. **46.20.** 120. **46.21.** 600. **46.22.** 18. **46.23.** 8. **46.24.** 45. **46.25.** 240. **46.26.** 48. **46.27.** 24. **46.29.** (1; 1), (2; 0). **46.30.** 1) $-2{,}5$; 0; 1; 2) -2; 2; 3. **46.32.** 28,8 км/год. **46.33.** 12.

§ 47. **47.12.** Ні. **47.13.** 1) $\approx 0{,}44$; 2) $\approx 0{,}23$; 3) $\approx 0{,}75$; 4) $\approx 0{,}91$. **47.14.** 1) $\approx 0{,}09$; 2) $\approx 0{,}25$; 3) $\approx 0{,}56$; 4) $\approx 0{,}77$. **47.15.** 1), 3), 4) Випадкова; 2) вірогідна; 5) неможлива. **47.19.** 1) 9; 2) 2400. **47.20.** 1) 495; 2) 700. **47.21.** Або 21, або 22, або 23. **47.22.** Від 55 до 59 пострілів. **47.25.** $(-2{,}5; -1)$. **47.26.** $-10{,}008$. **47.28.** 5539 грн. **47.29.** 3,5.

§ 48. **48.13.** $\frac{3}{4}$. **48.14.** $\frac{4}{15}$. **48.15.** $\frac{8}{15}$. **48.16.** 1) $\frac{12}{365}$; 2) $\frac{7}{365}$; 3) $\frac{71}{365}$. **48.17.** 1) $\frac{2}{61}$;

2) $\frac{11}{366}$; 3) $\frac{35}{366}$. **48.18.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{2}$. **48.19.** 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{1}{2}$. **48.20.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 0; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{1}{12}$. **48.21.** 1) 4; 2) 8; 3) менше від 12; 4) менше від 24. **48.22.** 1) 4; 2) 2; 3) більше за 6; 4) більше за 2. **48.23.** Зелених – 2 ручки, червоних – 5. **48.24.** 10 червоних хустин і 2 картаті. **48.25.** 6 червоних троянд. **48.26.** 3 або 4 вареники. **48.27.** $\frac{1}{3}$. **48.28.** $\frac{1}{2}$. **48.29.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{2}$. **48.34.** (2; –2), (–2; 2). **48.35.** 72 км/год. **48.36.** $c < 0$.

§ 49. 49.9. 15 км/год. **49.10.** У Люксембурзі – 15 євро, в Угорщині – 7812,5 форинтів, в Україні – 573,13 грн. **49.11.** 8 чисел.

§ 50. 50.15. 1) $a = 5$; 2) $Me = 9$. **50.16.** 1) $b = 5$; 2) $Me = 10$. **50.17.** 1) $\overline{x} = 2$; $Mo = 3$; 3) $Me = 2$. **50.18.** 1) $\overline{x} = 1{,}55$; 2) $Mo = 2$; 3) $Me = 2$. **50.25.** 12,2 км. **50.26.** –4; 0; 3,2; 4.

Вправи для повторення теми 10

4. 120. **5.** 8. **6.** 625. **7.** 1) 25; 2) 20. **8.** 756. **9.** 56. **10.** 60. **11.** 48. **12.** 96. **13.** 1) 10 000; 2) 5040. **14.** 15 120. **15.** 28. **20.** 1) 0,03; 2) 0,45; 3) 0,25; 4) 0,75. **22.** 1) 126; 2) 225. **23.** 8 партій. **27.** $\frac{b-1}{a+b-1}$. **28.** Рівноймовірні події. **29.** 1) $\frac{1}{25}$; 2) 0; 3) $\frac{12}{25}$; 4) $\frac{13}{25}$; 5) $\frac{1}{5}$; 6) $\frac{9}{25}$; 7) $\frac{9}{25}$; 8) $\frac{16}{25}$; 9) $\frac{8}{25}$; 10) $\frac{13}{25}$. **30.** $\frac{5}{18}$. **31.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{30}$; 3) 0. **32.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{2}{5}$. **33.** 6. **46.** 1) 2; 2) 6. **47.** 1) 1,75; 2) 1; 3) 2.

Тема 11

§ 52. 52.14. 1) 13 см; 2) 7,5 см. **52.15.** 1) 10 см; 2) 15 см. **52.16.** Паралельні, мимобіжні або перетинаються. **52.17.** Мимобіжні або перетинаються. **52.18.** 28. **52.19.** 105 см. **52.20.** $c\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$, $c\cos\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$. **52.21.** $\approx 593{,}5$ м^2. **52.22.** 3 : 5 : 7.

§ 53. 53.11. 1 см, 5 см, $2\sqrt{6}$ см. **53.12.** 14 см, 10 см, $4\sqrt{6}$ см. **53.13.** Ні. **53.14.** Так. **53.15.** 6 см, 8 см. **53.16.** 5 см, 6 см. **53.17.** 14 см, $55\sqrt{3}$ см^2. **53.18.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **53.19.** 1) 17 м; 2) 1360 грн. **53.20.** $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

§ 54. 54.11. 1), 2) Так; 3), 4) ні. **54.12.** 1) Ні; 2), 3), 4) так. **54.13.** 1), 2) Так; 3) ні. **54.14.** 1), 2), 3) Так. **54.15.** 1), 2), 3) Так. **54.16.** 1), 2), 3) Так. **54.17.** *Порада.* Якщо дві площини α і β перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої m, мають спільну точку K, то із цієї точки можна провести два перпендикуляри до прямої m, що неможливо. **54.18.** 50π см. **54.19.** $10\frac{5}{6}$ см. **54.20.** 8 разів.

§ 55. 55.9. 2640 см^3, 1224 см^2. **55.10.** 180 см^3, 252 см^2. **55.11.** 248 см^2, 240 см^3. **55.12.** $54\sqrt{3}$ см^3. **55.13.** 256 см^3. **55.14.** 1) 68 см^2; 2) 48 м^3; 3) 288 м^3. **55.15.** 75 см^2. **55.16.** *Порада.* Оскільки відомий тупий кут трапеції, то можна знайти гострий. **55.17.** ≈ 46 відер. **55.18.** $46\frac{2}{3}$ см.

§ 56. **56.9.** 1) $1{,}5a^2$; 2) $\frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3})$. **56.10.** 1) $\sqrt{3}b^2$; 2) $b^2(\sqrt{3}+1)$. **56.11.** 2) 1536 см^3. **56.12.** $9\sqrt{3}$ см^3. **56.13.** 7 см. **56.14.** $a^2 : b^2$. **56.15.** $\approx 1{,}34$ м. **56.16.** $1\frac{23}{37}$ см.

§ 57. **57.11.** 1) Результат буде однаковим в обох випадках; 2) навколо сторони a; 3) навколо сторони a. **57.13.** 45 214 см. **57.14.** $\approx$ 8310 відер. **57.15.** 15 см, 20 см, 25 см, 150 см^2. **57.16.** 180 см^2. **57.17.** 1) 204 елементи; 2) 17 136 грн. **57.18.** 120°.

§ 58. **58.9.** 600π см^3. **58.10.** 768π см^3. **58.11.** $5\sqrt{3}$ см. **58.12.** $4\sqrt{3}$ см. **58.13.** 300π см^2. **58.14.** 1080π см^3. **58.16.** 24 см^2. **58.18.** $2(3\sqrt{3}-\pi)$ см^2.

§ 59. **59.10.** У 8 разів. **59.11.** 1) 9 : 16; 2) 27 : 64. **59.12.** 46π см$^3 \approx 144{,}5$ см^3. **59.13.** 480π см$^3 \approx 1508$ см^3. **59.14.** 169π см^2. **59.15.** 7. **59.16.** У 25 разів. **59.17.** $r^2 + cr$.

Вправи для повторення теми 11

6. Мимобіжні або паралельні. **7.** Паралельні, мимобіжні або перетинаються. **12.** 15 см, 20 см, 12 см. **13.** Паралельні, мимобіжні або перетинаються. **14.** 9 см і 3 см. **19.** 1), 2), 3) Так. **20.** 1) Ні; 2), 3) так. **21.** 1), 2), 3) Так. **27.** 272 см^2, 240 см^3. **28.** 540 см^3. **29.** 9 рулонів. **34.** 2592 см^3. **35.** 336 см^2. **36.** $12\sqrt{3}$ см^3, $12\sqrt{21}$ см^2. **40.** $\approx 54{,}26$ м^2. **41.** 1) Зменшилася на 4 %; 2) збільшилася на 15,2 %. **42.** $\approx 2{,}9$ т. **47.** 9π см^3. **48.** 4 : 3. **49.** 1680π см^3. **53.** 1) 1 : 2; 2) 1 : 8. **54.** 1) 6 см; 2) 144π см^2; 3) ≈ 7962 г. **55.** 1) 15,21 %; 2) 5,9319 %. **56.** $8\pi\sqrt{3} : 27$.

Задачі підвищеної складності з алгебри

2. 2) *Порада.* $x^2 - 4x + 5 - 2|x-2| = (x-2)^2 - 2|x-2| + 1 = (|x-2|-1)^2 \geqslant 0$. **5.** *Порада.* Розгляньте різницю квадратів лівої та правої частин. **6.** 1) *Порада.* Замініть останнє число 6 у лівій частині нерівності на 9. **7.** *Порада.* Розгляньте $x = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{120}{121}$ та $y = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{119}{120}$. Доведіть, що $x > y$, а тому $x^2 > xy$. **8.** 33 учні, з яких 1 володіє трьома іноземними мовами. **9.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так. **10.** Наприклад $\frac{16}{25}$. Існує безліч таких чисел. **11.** Правильний. **12.** $x = y = z = 1$. **14.** 1) 4; 2) 27. *Порада.* Використайте нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним. **15.** 1) $\frac{1}{6}$. *Порада.* $\frac{9+y^2}{2} \geqslant 3y$. Тому $\frac{y}{9+y^2} \leqslant \frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$. **16.** *Порада.* $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 = x+y+z+2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}) \leqslant \leqslant 7 + 2\left(\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2}\right)$. **17.** $x \leqslant 3(2-\sqrt{5})$. **18.** 1) Якщо $m < -3$, то $x < \frac{6m-1}{m+3}$; якщо $m = -3$, то x – будь-яке число; якщо $m > -3$, то $x > \frac{6m-1}{m+3}$;

2) якщо $m < 5$, то $x < \frac{15m + 7}{m - 5}$; якщо $m = 5$, то нерівність не має розв'язків; якщо $m > 5$, то $x > \frac{15m + 7}{m - 5}$. **19.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) так. **20.** *Порада.* $y = x^2 - (a + b)x + (ab - c^2)$. Дискримінант квадратного тричлена $x^2 - (a + b)x + (ab - c^2)$ дорівнює $(a - b)^2 + 4c^2$. **23.** *Порада.* $a = 2$. **24.** $a = 2$. **27.** 1) $x < 0$ або $x > 2$; 2) $-3 < x < 1$; 3) $x < 0$ або $x > 3{,}5$; 4) $-\frac{1}{5} < x < 3{,}5$. **28.** 1) $x < -4$ або $x > 1$; 2) $-5 < x < 1$; 3) $-3{,}5 \leqslant x \leqslant -\frac{5 + \sqrt{33}}{4}$ або $\frac{\sqrt{33} - 5}{4} \leqslant x \leqslant 1$; 4) $x \leqslant -\frac{2}{3}$, або $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$, або $x \geqslant 2$. **29.** $-3 \leqslant x \leqslant -1$. **30.** $a \geqslant 1$. **31.** $m < -\frac{7}{4}$. **32.** $-6 < a < 2$. **33.** $-3 < b < 6$. **34.** 1) Якщо $|a| > 2\sqrt{2}$, система не має розв'язків; якщо $|a| = 2\sqrt{2}$, система має єдиний розв'язок; якщо $|a| < 2\sqrt{2}$, система має два розв'язки; 2) якщо $|a| < 2$, система не має розв'язків; якщо $|a| = 2$, система має два розв'язки; якщо $|a| > 2$, система має чотири розв'язки. **35.** (2; 4), (−4; 4). **36.** (1; 2), $\left(-\frac{239}{146}; \frac{117}{146}\right)$. **37.** 1) Система не має розв'язків; 2) (4; −3), (3; −4). **38.** 1) (2; 1), (1; 2); 2) (3; 1), (−1; −3). **39.** $x = y = 4$, $z = -4$. **40.** 1) (3; 1), (1; 3). *Порада.* Заміна $x + y = u$, $xy = v$; 2) (3; 5), (5; 3). **41.** 1) (3; 1), (−3; −1), $\left(\frac{14\sqrt{106}}{53}; \frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$, $\left(-\frac{14\sqrt{106}}{53}; -\frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$; 2) (2; 1), (1; 2), (−1; −2), (−2; −1), $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$. **42.** 1) (3; 2), (−3; −2), $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$; 2) (2; 1), (−2; −1). **43.** 6 і 4. **44.** 3 км/год і 4 км/год. **45.** 10 м/с і 15 м/с. **46.** 100 км/год. **47.** 90 км/год, 60 км/год. **48.** 7 км. **49.** 10 хв. **50.** 6 год. **51.** 11 %; 5 %. **52.** 18 км; 12 км/год. *Порада.* Нехай x км/год – запланована Сергієм швидкість, а y км – відстань від дому до стадіону. Тоді маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 1{,}5x, \\ \frac{1}{3} + \frac{x}{3(x + 8)} + \frac{y - \frac{5x}{3(x + 8)}}{x + 3} = 1\frac{2}{3}. \end{cases}$$

53. 1), 5), 6), 7), 9). **54.** 2), 4), 6), 7), 9). **55.** $\frac{n}{n + 1}$. **57.** 9; 10; 11; 12. **60.** Так; $n = 22$. **63.** $d = 4$. **64.** 101. **65.** −1; 0; 1; 2. **69.** 7. **70.** 9. **71.** Тільки послідовності однакових, відмінних від нуля, чисел. **72.** 3; 5; 7. **73.** 5103 або $\frac{7}{81}$. **74.** 1;

3; 9 або $\frac{1}{9}$; $-\frac{5}{9}$; $\frac{25}{9}$. **75.** $\approx 41{,}4\ \%$. **76.** 17. **77.** $\left(\frac{2026}{2027}\right)^2$. **78.** $\frac{1}{20}$. **79.** 0,3. **80.** $\frac{3}{7}$. **81.** 1) $\frac{1}{45}$; 2) $\frac{16}{45}$. **82.** 0,02. **83.** 1) $\frac{1}{125}$; 2) $\frac{12}{125}$; 3) $\frac{48}{125}$; 4) $\frac{64}{125}$.

Задачі підвищеної складності з геометрії

2. *Порада.* Спроєктувати точки A, B і M на вісь x. Матимемо $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$. **3.** $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. **4.** $\left(\frac{4}{11}; 1\frac{2}{11}\right)$. *Порада.* $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC}$. **6.** $a = -10$ або $a = 1$. **7.** $C(0; \sqrt{3})$ або $C(0; -\sqrt{3})$. *Порада.* $AB = BC = CA$. Нехай $C(x; y)$. Тоді $\begin{cases}(x+1)^2 + y^2 = 4,\\ (x-1)^2 + y^2 = 4.\end{cases}$ **8.** Таких ромбів шість: ABC_1D_1, де $D_1(0; \sqrt{3})$, $C_1(2; \sqrt{3})$; ABD_2C_2, де $D_2(0; \sqrt{3})$, $C_2(-2; \sqrt{3})$; ABC_3D_3, де $D_3(0; -\sqrt{3})$, $C_3(2; -\sqrt{3})$; ABD_4C_4, де $D_4(0; -\sqrt{3})$, $C_4(-2; -\sqrt{3})$; AC_5BD_5, де $C_5(0; \sqrt{3})$, $D_5(0; -\sqrt{3})$; AC_6BD_6, де $C_6\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $D_6\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. **9.** $(-2; -1)$. **11.** 49. **12.** $x_0x + y_0y = r^2$. **13.** 8. **14.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **15.** $(x - 9)^2 + (y + 7)^2 = 100$ або $(x + 3)^2 + (y - 9)^2 = 100$. **16.** 1) $k = \pm\frac{4}{3}$; 2) $k < -\frac{4}{3}$ або $k > \frac{4}{3}$; 3) $-\frac{4}{3} < k < \frac{4}{3}$. **17.** $2x + y - 8 = 0$ та $x - 2y + 11 = 0$. **18.** $2x + y - 1 = 0$ і $2x + y + 19 = 0$. **19.** $B\left(9\frac{7}{13}; -6\frac{9}{13}\right)$; $AB = 17$. **20.** $2\sqrt{13}$. *Порада.* Поданий вираз представити у вигляді $\sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$, який є сумою відстаней від точки $M(x; y)$ до точок $A(3; -4)$ і $B(-1; 2)$. Вона буде найменшою, якщо M належить відрізку AB. **21.** Паралелограм. **22.** *Порада.* $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, тоді $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AD}$, тому $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{DD_1}$. **23.** $\overrightarrow{BC}(8; -6)$, $\overrightarrow{CD}(-6; -8)$, $\overrightarrow{DA}(-8; 6)$ або $\overrightarrow{BC}(-8; 6)$, $\overrightarrow{CD}(-6; -8)$, $\overrightarrow{DA}(8; -6)$. **24.** *Порада.* Використати: $\triangle ABO \sim \triangle CDO$, $\triangle ADB \sim \triangle MDO$, $\triangle DBC \sim \triangle OBN$. **25.** $\overrightarrow{BL}\left(-3\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)$. **29.** *Порада.* Розглянути скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{p}$. **30.** Нехай $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, тоді $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ і $\begin{cases}ax_1 + by_1 + c = 0,\\ ax_2 + by_2 + c = 0;\end{cases}$ звідки $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$. **31.** $4x + 5y + 3 = 0$. **32.** $4x - 3y + 1 = 0$. **33.** $\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$. **34.** 6 см. **35.** $3\sqrt{19}$ см. *Порада.* Розглянути $\triangle AMB$ і знайти його медіану

MM_3. **36.** $\frac{aS}{a+b}$ і $\frac{bS}{a+b}$. *Порада.* Нехай S_1 і S_2 – шукані площі, тоді $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$ і $S_1 + S_2 = S$. **37.** $\sqrt{3}$ см. *Порада.* Позначимо $\angle BAM = \alpha$, тоді і $\angle CBM = \alpha$. **38.** 30°. *Порада.* $\angle ACB = 120°$, $\angle A = \angle B = \angle 30°$. Позначити $AC = CB = x$, тоді $AB = x\sqrt{3}$, $AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. **40.** $\frac{(a^2 - b^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **41.** *Порада.* Використовуючи теорему косинусів, доведіть, що синус кута між сторонами a і b дорівнює $\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd}$. **42.** $\frac{R^2}{4}$. **43.** *Порада.* Використовуючи теорему косинусів, виразити діагоналі чотирикутника через його сторони. **44.** $\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$. *Порада.* $\angle ABC = \angle EDC$, $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ECD}} = \frac{AB \cdot BD}{DE \cdot DC}$. Далі використати подібність трикутників ABC і EDC. **45.** $\frac{\pi ab}{4}$. **46.** 15° або 75°. **47.** 2) $3a^2(\sqrt{3}+2)$. **48.** $\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$. **49.** *Порада.* Нехай r_1 і r_2 – радіуси кіл ($r_1 > r_2$), тоді площа кільця $\pi(r_1^2 - r_2^2)$. Тому радіус шуканого кола r дорівнює $\sqrt{r_1^2 - r_2^2}$. **50.** $r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$, де $r = R(2\sqrt{3} - 3)$. **51.** 2π см. **52.** *Порада.* Позначте катети трикутника через a і b. Доведіть, що шукана площа дорівнює $\frac{ab}{2}$. **53.** $25\pi : 3$ або $25\pi : 27$. **54.** $\frac{a^2(3\sqrt{3} - \pi)}{18}$. **55.** *Порада.* Розглянути точку перетину прямої, симетричної даній відносно точки O і кола. **56.** 5 см. **57.** 1 : 2. **58.** *Порада.* Нехай M – точка перетину медіан шуканого трикутника ABC, а точка M_1 – точка, симетрична точці M відносно середини сторони AB. Спочатку побудувати трикутник AMM_1. **59.** 1) $x = 1$, $y = -2$; 2) (2; −5), (2; 1), (0; 1), (0; −5). **60.** У 2,56 раза. **61.** $(x-1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 4$; 2) $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 4$. **62.** *Порада.* Використати поворот навколо центра на 90°. **63.** 1) $m = -2$; 2) $2x - 3y - 3 = 0$. **64.** Ні. **65.** 1) $\frac{1}{2}(ab + bc + ca)$; 2) $\frac{1}{6}abc$; 3) $\frac{\sqrt{a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2}}{2}$; 4) $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + c^2b^2 + a^2c^2}}$. **66.** 12 дм³. **67.** $16\sqrt{2,2(\sqrt{2}-1)}$ м². **68.** 3 см. **69.** $\frac{7a^3(\sqrt{2}-1)}{3}$. **70.** 60,375 см³. **71.** $V = SC$. **72.** $\sqrt{5} : 5$. **73.** $\frac{1}{3}Sr$. **74.** 1) 12π см²; 2) $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$ см³. **75.** 1) 2 : 3; 2) 2 : 3. **76.** 1) 448π см³; 2) 216π см². **77.** *Порада.* Нехай r – радіус вписаної кулі, R – радіус основи конуса, l – твірна, h – висота конуса. Доведіть, що відношення і поверхонь, і об'ємів дорівнює $\frac{R^2h}{4r^3}$.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	Б	Б	Г	А	В	Г	А	В	Б	А	Г	Г	1–В, 2–А, 3–Г
7	В	Б	Г	В	А	Б	Б	Г	В	В	Г	Б	1-Б, 2-А, 3-В
8	Б	А	В	Б	Г	А	В	В	Б	Б	В	Г	1–В, 2–Г, 3–А
9	В	Б	Г	А	Г	В	В	Б	Г	А	Б	В	1-В, 2-Г, 3-А
10	В	Г	Б	А	Б	В	В	А	Г	В	А	Г	1–А, 2–Г, 3–В

Вибірка 193
Випадкова подія 172
Випадковий дослід 172
Відносна частота значення вибірки 197
– – події 173
Вірогідна подія 173
Властивості арифметичної прогресії 76, 77
– геометричної прогресії 90

Генеральна сукупність 193
Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь 15

Заміна змінних у системах рівнянь 17
Знаменник геометричної прогресії 88

Класичне означення ймовірності 180
Комбінаторика 166
Комбінаторне правило добутку 167
Комбінаторне правило суми 166

Математична статистика 187
Медіана вибірки 195
Мода вибірки 195

Наступний член послідовності 69
Неможлива подія 173
Нерівність квадратна 5
Нескінченна числова послідовність 69

Обсяг вибірки 197

Подання статистичних даних у вигляді графіків 190
– діаграм 189
– таблиць 189
Полігон частот 196
Попередній член послідовності 69
Послідовність 69
Прогресія арифметична 74
– геометрична 88

Рекурентна формула 70
Рівноймовірні події 181
Рівняння першого степеня з двома змінними 15
Різниця арифметичної прогресії 74
Розв'язок системи рівнянь 14
Розмах вибірки 195

Середнє значення вибірки 195
– – статистичних вимірювань 190
Скінченна числова послідовність 69
Спосіб додавання 17
– підстановки 16
Статистична ймовірність події 174
Статистичні дані 187
Сума нескінченної геометричної прогресії 105

Теорія ймовірностей 172

Формула n-го члена арифметичної прогресії 75
– – – геометричної прогресії 88
– – – послідовності 69
– складних відсотків 96
– суми n перших членів арифметичної прогресії 82
– – – – – геометричної прогресії 99

Частота події 173
Числові послідовності 69
Члени послідовності 69

Бічна поверхня конуса 234
– – циліндра 230
Бічні грані піраміди 226
– – призми 222
Бічні ребра піраміди 226
– – призми 222

Вершина конуса 234
– многогранника 222
– піраміди 226
Висота конуса 234
– піраміди 226
– призми 222
– циліндра 230
Відстань від точки до площини 215
Вісь конуса 234
– симетрії 131
– циліндра 230
Властивості паралельних площин 218, 219
– переміщення 122
– перетворення подібності 144
– подібних фігур 145, 146

Грань многогранника 222

Діаметр кулі 237
Довжина кола 48

Коефіцієнт подібності 144
Конус 233
Круг 54
Куля 237
Кут повороту 135

Мимобіжні прямі 212
Многогранник 222
Об'єм конуса 235
– кулі 238
– піраміди 227
– прямої призми 223
– циліндра 231
Образ точки 121
Основа висоти піраміди 226
– конуса 234
– перпендикуляра 216
– піраміди 228
– похилої 216
– призми 222
– циліндра 230
Осьова симетрія 131
Паралельне перенесення 139
Паралельні площини 218
Переміщення 122
Перетворення подібності 143
– симетрії 126
– фігури 121
Перпендикуляр, проведений з точки до площини 215
Перпендикулярні площини 219
– прямі 213
Піраміда 226
– n-кутна 226
Площа бічної поверхні конуса 234
– – – піраміди 226
– – – призми 223
– – – циліндра 231
– поверхні кулі 238
– повної поверхні конуса 234
– – – піраміди 226
– – – призми 223
– – – циліндра 231
Площина 211
Площини, що перетинаються 218
Поворот 135
Подібні фігури 145
Похила 216
Правильна піраміда 226
– призма 223
Правильний многокутник 39
Призма n-кутна 222
Проєкція похилої 216
Прообраз точки 121
Пряма 211
– і площина, паралельні між собою 215
Пряма призма 222
Пряма, що лежить у площині 215
–, що перетинає площину 215
–, перпендикулярна до площини 215

Радіус кулі 237
– основи конуса 234
Радіуси основ циліндра 230
Ребра многогранника 222
Рівність фігур 123
Розгортка конуса 234
– циліндра 230

Сегмент 56
Сектор 56
Симетрія відносно прямої 130
– – точки 126
Стереометрія 211
Сфера 237

Твірна конуса 234
– циліндра 230
Теорема про відношення довжини кола до його діаметра 49
– – коло, описане навколо правильного многокутника, і коло, вписане в нього 40
– – паралельне перенесення 140
– – перетворення симетрії відносно прямої 131
– – – – – точки 127
– – поворот навколо точки 136
– – площі подібних многокутників 150
– – – бічної поверхні правильної піраміди 227
– – – – – прямої призми 223
– – площу круга 55
Точка 211

Формула довжини дуги кола 51
– площі сегмента 57
– – сектора 56
Формули, які задають паралельне перенесення 140

Центр кулі 237
– повороту 135
– правильного многокутника 41
– симетрії 126
Центральний кут правильного многокутника 41
Центрально-симетричні фігури 126
Циліндр 230

ЗМІСТ

Шановні дев'ятикласники та дев'ятикласниці! 3
Шановні вчителі та вчительки! 4
Шановні дорослі! 4

Тема 6. КВАДРАТНА НЕРІВНІСТЬ. СИСТЕМА ДВОХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

§ 26. Квадратна нерівність 5
§ 27. Розв'язування систем рівнянь другого степеня з двома змінними 14
§ 28. Система двох рівнянь із двома змінними як математична модель текстових і прикладних задач 24
Домашня самостійна робота № 6 (§§ 26–28) 30
Завдання для перевірки знань до §§ 26–28 31
Вправи для повторення теми 6 32
Головне в темі 6 37

Тема 7. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. ДОВЖИНА КОЛА. ПЛОЩА КРУГА

§ 29. Правильні многокутники 39
§ 30. Довжина кола. Довжина дуги кола 48
§ 31. Площа круга та його частин 54
Домашня самостійна робота № 7 (§§ 29–31) 61
Завдання для перевірки знань до §§ 29–31 62
Вправи для повторення теми 7 63
Головне в темі 7 67

Тема 8. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

§ 32. Числові послідовності 69
§ 33. Арифметична прогресія, її властивості. Формула n-го члена арифметичної прогресії 74
§ 34. Сума n перших членів арифметичної прогресії 82
§ 35. Геометрична прогресія, її властивості. Формула n-го члена геометричної прогресії 87
§ 36. Формула складних відсотків 95
§ 37. Сума n перших членів геометричної прогресії 99
§ 38. Нескінченна геометрична прогресія та її сума 105
Домашня самостійна робота № 8 (§§ 32–38) 111
Завдання для перевірки знань до §§ 32–38 112
Вправи для повторення теми 8 113
Головне в темі 8 118
Жінки в науці: як хвилі океану допомагають вивчати математику 120

Тема 9. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕМІЩЕННЯ

§ 39. Переміщення (рух) та його властивості. Рівність фігур 121
§ 40. Симетрія відносно точки 126
§ 41. Симетрія відносно прямої 130
§ 42. Поворот 135

§ 43. Паралельне перенесення 139
§ 44. Перетворення подібності та його властивості. Подібність фігур 143
§ 45. Площі подібних фігур 150
Домашня самостійна робота № 9 (§§ 39–45) 154
Завдання для перевірки знань до §§ 39–45 155
Вправи для повторення теми 9 156
Головне в темі 9 162
Жінки в науці: краса симетрії та шлях до відкриттів 165

Тема 10. ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І СТАТИСТИКИ

§ 46. Комбінаторні задачі. Комбінаторні правила суми і добутку 166
§ 47. Випадкова подія. Частота та ймовірність випадкової події 171
§ 48. Класичне означення ймовірності 180
§ 49. Початкові відомості про статистику. Статистичні дані. Способи подання даних та їх обробки 187
§ 50. Вибірка. Числові характеристики вибірки. Графічне подання інформації про вибірку 193
Домашня самостійна робота № 10 (§§ 46–50) 201
Завдання для перевірки знань до §§ 46–50 203
Вправи для повторення теми 10 204
Головне в темі 10 209

Тема 11. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

§ 51. Предмет стереометрії. Основні поняття стереометрії 211
§ 52. Взаємне розміщення прямих у просторі 212
§ 53. Взаємне розміщення прямої та площини. Перпендикуляр до площини 215
§ 54. Взаємне розміщення площин 218
§ 55. Пряма призма. Площа поверхні та об'єм призми 221
§ 56. Піраміда. Площа поверхні та об'єм піраміди 226
§ 57. Циліндр. Площа поверхні та об'єм циліндра 230
§ 58. Конус. Площа поверхні та об'єм конуса 233
§ 59. Куля. Площа поверхні та об'єм кулі 237
Вправи для повторення теми 11 240
Головне в темі 11 245
Завдання для перевірки знань за курс алгебри 9 класу 246
Завдання для перевірки знань за курс геометрії 9 класу 247
Задачі підвищеної складності з алгебри 248
Задачі підвищеної складності з геометрії 256
Відповіді та поради до вправ 262
Предметний покажчик (алгебра) 275
Предметний покажчик (геометрія) 276

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович,
ІСТЕР Дмитро Олександрович

МАТЕМАТИКА

Підручник інтегрованого курсу для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

(у 2-х частинах)

Частина 2

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику використано ілюстративний матеріал з відкритих джерел інтернету, зокрема сайтів *vecteezy.com*, *depositphotos.com*. Усі матеріали в підручнику використано з навчальною метою відповідно до законодавства України про авторське право і суміжні права.

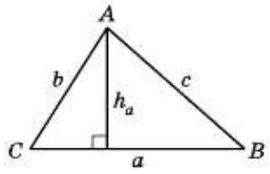
Редактор *Наталія Дашко*
Обкладинка *Олександра Павленка*
Макет, художнє оформлення *Василя Марущинця*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректори *Олена Симонова, Ірина Хмельовська*

Формат 70×100/16.
Ум. друк. арк. 22,75. Обл.-вид. арк. 18,07.
Тираж 14 766 пр. Вид. № 0127.
Зам. № 26-04-1002.

ТОВ «Генеза»,
вул. Генерала Алмазова, 18/7 (літ. В), офіс 404, м. Київ, 01133, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Максиміліанівська, 17, м. Харків, 61024, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 6847 від 19.07.2019.

Площа трикутника



$$S = \frac{1}{2}ah_a$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

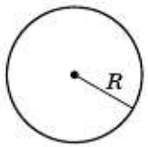
$S = \dfrac{abc}{4R}$, де R – радіус описаного кола

$S = pr$, де r – радіус вписаного кола

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – формула Герона,

де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – півпериметр

Довжина кола і площа круга

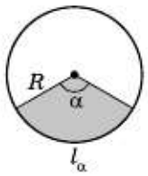


$$C = 2\pi R$$

$C = \pi d$, де d – діаметр

$$S = \pi R^2$$

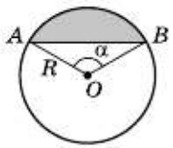
Довжина дуги кола і площа сектора



$$l_\alpha = \frac{\pi R\alpha}{180}$$

$$S_\alpha = \frac{\pi R^2\alpha}{360}$$

Площа сегмента



$$S = \frac{\pi R^2\alpha}{360} \pm S_{\Delta AOB}$$

АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ (a_n)

(a_1 – перший член; d – різниця; n – кількість членів;
a_n – n-й член; S_n – сума n перших членів)

$d = a_{n+1} - a_n$ $a_n = a_1 + d(n-1)$ $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ (b_n)

(b_1 – перший член; q – знаменник; n – кількість членів;
b_n – n-й член; S_n – сума n перших членів)

$q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $b_n = b_1 q^{n-1}$ $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$	$S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$

КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Ймовірність випадкової події A дорівнює відношенню кількості випадків, що сприяють появі події A, до кількості всіх можливих випадків.

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

де n – кількість усіх можливих випадків;
m – кількість випадків, що сприяють появі події A.