

Гене́за

НОВА УКРАЇНЬСЬКА
ШКОЛА

Олександр ІСТЕР, Дмитро ІСТЕР

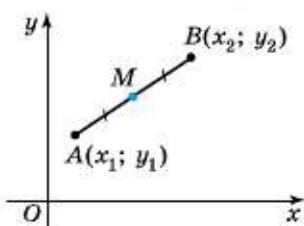
МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРОВАНІЙ КУРС
ЧАСТИНА 1



ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Координати середини відрізка $M(x_M; y_M)$

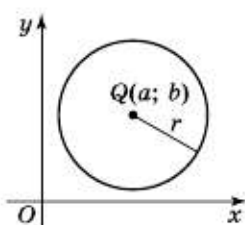


$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



Рівняння кола

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$,
де $Q(a; b)$ – центр кола,
 r – радіус кола

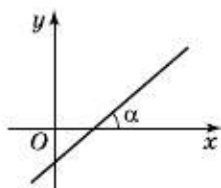
Рівняння прямої

Загальне рівняння прямої:

$$ax + by + c = 0$$

Рівняння прямої, що проходить
через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$:

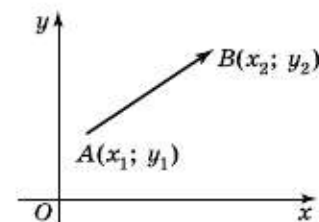
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



Рівняння прямої
з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + l, \text{ де } k = \operatorname{tg} \alpha$$

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ



Координати вектора

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

Модуль вектора $\vec{a}(x; y)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Додавання, віднімання векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$,
множення вектора $\vec{a}(x_1; y_1)$ на число λ

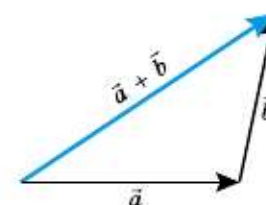
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2);$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{d}(x_1 - x_2; y_1 - y_2);$$

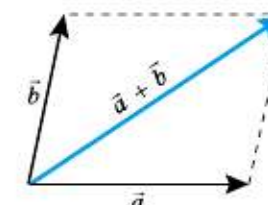
$$\vec{m} = \lambda \vec{a}, \quad \vec{m}(\lambda x_1; \lambda y_1)$$

Додавання векторів

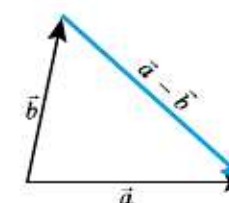
правило трикутника



правило паралелограма



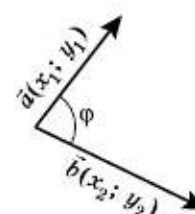
Віднімання векторів



Скалярний добуток векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$



ОЛЕКСАНДР ІСТЕР,
ДМИТРО ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

Підручник інтегрованого курсу для 9 класу
закладів загальної середньої освіти
(у 2-х частинах)

Частина 1

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*



Київ
«Генеза»
2026

УДК 51(075.3)

I-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 27.01.2026 р. № 110)

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Відповідає модельній навчальній програмі
«Математика (інтегрований курс). 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.)

Інтерактивний електронний додаток до підручника

<https://cutt.ly/MtS5o3KF>



Інтерактивні методичні матеріали до підручника

<https://faino.school/>



Істер О. С.

I-89 Математика : підруч. інтегр. курсу для 9-го кл. закл.
заг. серед. освіти. (У 2 ч.). Ч. 1 / Олександр Семенович
Істер, Дмитро Олександрович Істер. — Київ : Генеза,
2026. — 272 с. : іл.

ISBN 978-617-8468-41-5

ISBN 978-617-8468-55-2 (Ч.1).

УДК 51(075.3)

ISBN 978-617-8468-41-5

ISBN 978-617-8468-55-2 (Ч.1)

© Істер О. С., Істер Д. О., 2026

© «Генеза», оригінал-макет, 2026

**Шановні дев'ятикласники
та дев'ятикласниці!**

Продовжуємо вивчати курс математики, який міститиме дві складові частини – *алгебру* і *геометрію*. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках.

У цьому підручнику використано такі умовні позначення:



– пригадай (раніше вивчене);



– зверни особливу увагу;



– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;



1.13 – завдання для класної та 1.15 – домашньої роботи;



– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв'язування інших задач);



– рубрика «Україна – це ми»;



– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;



– рубрика «Життєва математика»;



– рубрика «Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»;



– рубрика «Вправи для повторення»;



– рубрика «А ще раніше...»;



– рубрика «Головне в темі».

Текст, надрукований **жирним** шрифтом, звертає вашу увагу на нове поняття або таке, яке треба пригадати.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки  починаються вправи початкового рівня;

з позначки  починаються вправи середнього рівня;

з позначки  починаються вправи достатнього рівня;

з позначки  починаються вправи високого рівня;

з позначки  починаються вправи підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «*Домашньої самостійної роботи*», які подано в тестовій формі, та «*Завдання для перевірки знань*». Після кожної теми наведено вправи для її повторення, основний теоретичний матеріал (рубрика «*Головне в темі*»), а в кінці підручника – «*Завдання для перевірки знань за курс математики 9 класу*». «*Задачі підвищеної складності*» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики.

Автори намагалися подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість із них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У рубриці «*Життєва математика*» зібрано задачі, які часто доводиться розв'язувати в повсякденному житті.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів та розвитку математики як науки ви знайдете в рубриці «*А ще раніше...*».

Бажаємо успіхів в опануванні математики!

Шановні вчителі та вчительки!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів / учениць, диференціації навчання та інших критеріїв.

Додаткові вправи в «*Завданнях для перевірки знань*» призначено для учнів / учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Чи правильно їх розв'язано, учитель / учителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення тем можна запропонувати учням / ученицям, наприклад, під час узагальнювальних уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

У рубриці «*Життєва математика*» зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, а в рубриці «*Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу*» – задачі, що допоможуть актуалізувати відповідні знання.

«*Задачі підвищеної складності*», які розміщено в кінці підручника, допоможуть підготувати учнів / учениць до різноманітних математичних змагань і підвищити їхню цікавість до математики.

«*Завдання для перевірки знань за курс математики 9 класу*», які також розміщено в кінці підручника, можна запропонувати учням / ученицям для підготовки до річної контрольної роботи.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього потрібно розв'язати вправи, що посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж курсу математики 9 класу, який опрацьовує дитина, ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

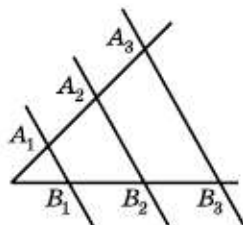
Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині виконати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на *«Задачі підвищеної складності»*, які розміщено в кінці підручника.

ПОВТОРЮЄМО ГЕОМЕТРІЮ ЗА 8 КЛАС

Чотирикутники

1. (Усно.) Чи існує чотирикутник з кутами:
1) $80^\circ, 90^\circ, 90^\circ$ і 110° ; 2) $70^\circ, 80^\circ, 100^\circ$ і 110° ?
2. Чи можна навколо чотирикутника $ABCD$ описати коло, якщо:
1) $\angle A = 20^\circ, \angle C = 140^\circ$;
2) $\angle B = 80^\circ, \angle D = 100^\circ$?
3. Чи можна навколо чотирикутника $KLMN$ описати коло, якщо:
1) $\angle K = 60^\circ, \angle M = 120^\circ$;
2) $\angle L = 70^\circ, \angle N = 130^\circ$?
4. (Усно.) На малюнку 1: $A_1A_2 = A_2A_3, A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3, B_1B_2 = 4$ см. Знайдіть B_2B_3 і B_1B_3 .
5. На малюнку 1: $B_1B_2 = B_2B_3, A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3, A_1A_2 = 7$ см. Знайдіть A_2A_3 і A_1A_3 .



Мал. 1

6. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, відтак дізнаєтесь, який позивний був у Героя України Дмитра Коцюбайла. Дізнайтеся з інтернету про життєвий шлях захисника України.

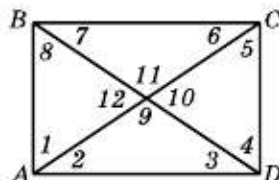


Знайдіть кути A і B паралелограма $ABCD$, якщо:	$\angle A$	$\angle B$
$\angle A + \angle C = 140^\circ$	В	І
кут A на 80° більший за кут B	Ч	Д
$\angle A : \angle B = 1 : 2$	А	Н

50°	60°

70°	110°	120°	130°	110°

7. Знайдіть усі кути паралелограма, якщо:
1) сума двох із них дорівнює 260° ;
2) один із них на 20° менший від іншого;
3) один із них утричі більший за інший.
8. $ABCD$ – прямокутник (мал. 2). Знайдіть:
1) $\angle 3$, якщо $\angle 8 = 40^\circ$;
2) $\angle 2$, якщо $\angle 9 = 110^\circ$;
3) $\angle 10$, якщо $\angle 1 = 35^\circ$.
9. $ABCD$ – прямокутник (мал. 2). Знайдіть:
1) $\angle 7$, якщо $\angle 4 = 50^\circ$;
2) $\angle 6$, якщо $\angle 11 = 120^\circ$;
3) $\angle 12$, якщо $\angle 5 = 46^\circ$.



Мал. 2

- 

Мал. 3

- 2) на 20° менший від кута між діагоналями, який лежить проти меншої сторони.

19. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, різниця яких дорівнює 20° .
20. Знайдіть кути ромба, сторона якого утворює з діагоналями кути, які відносяться як $1 : 4$.
21. У рівнобічній трапеції діагональ дорівнює більшій основі й утворює з нею кут 20° . Знайдіть кути цієї трапеції.
22. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює меншій основі, а діагональ утворює із цієї основою кут 25° . Знайдіть кути трапеції.
23. Сторони трикутника відносяться як $4 : 2 : 3$. Знайдіть ці сторони, якщо периметр трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника, дорівнює 45 см.
24. Периметр трикутника дорівнює 32 см. Сторони трикутника, утвореного середніми лініями даного, відносяться як $4 : 7 : 5$. Знайдіть сторони заданого трикутника.
25. Два кути паралелограма відносяться як $4 : 5$. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута.
26. Один із кутів паралелограма на 40° більший за інший. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута.
27. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $CKLM$ так, що прямий кут у них спільний, а точка L належить стороні AB . Катет трикутника дорівнює 4 см. Знайдіть периметр квадрата.
28. У рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $KLMN$ так, що точки K і L належать гіпотенузі трикутника, а точки M і N – катетам. Периметр квадрата дорівнює 20 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.
29. Основи трапеції дорівнюють 12 см і 20 см. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три частини. Знайдіть довжини цих частин.

Подібність трикутників

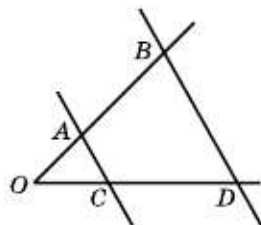
30. (Усно.) $\triangle ABC \sim \triangle DKM$. Заповніть пропуски:
 1) $\angle A = \dots$; 2) $\angle K = \dots$; 3) $\angle C = \dots$.
31. Дано: $\triangle ABC \sim \triangle KMN$, $\frac{AB}{KM} = 3$. Заповніть пропуски:
 1) $\frac{BC}{MN} = \dots$; 2) $\frac{KN}{AC} = \dots$.
32. За яких умов $\triangle ABC \sim \triangle DEF$:
 1) $\angle B = \angle E$;
 2) $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, $\angle D = 40^\circ$, $\angle E = 70^\circ$;
 3) $AB = 3DE$, $BC = 3EF$;
 4) $\angle A = \angle D = 50^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $\angle F = 90^\circ$?

33. За яких умов $\triangle ABC \sim \triangle MNK$:

- 1) $AB = MN = 40$ см, $BC = NK = 25$ см;
- 2) $\angle A = \angle M$, $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MK}$;
- 3) $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle M = 90^\circ$, $\angle N = 30^\circ$?
- 4) $\angle C = \angle K$, $CB = 6$, $CA = 4$, $KN = 3$, $KM = 2$?

2 34. На малюнку 4 прямі AC і BD паралельні, $OA = 2$ см, $OC = 3$ см, $AB = 5$ см. Знайдіть CD .

35. На малюнку 4 прямі AC і BD паралельні, $OC = 3$ см, $CD = 6$ см, $AB = 4$ см. Знайдіть OA .



Мал. 4

36. O – точка перетину діагоналей трапеції, у якій $AB \parallel CD$, $AB = 20$ см, $CD = 10$ см, $DO = 6$ см. Знайдіть OB .

37. O – точка перетину діагоналей трапеції ($AB \parallel CD$) поділяє діагональ BD на відрізки $DO = 4$ см, $OB = 12$ см. Знайдіть AB , якщо $CD = 5$ см.

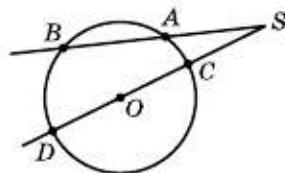
38. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його проекція на гіпотенузу дорівнює 2 см, а гіпотенуза – 8 см.

39. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а його проекція на гіпотенузу – 9 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

40. AM – бісектриса трикутника ABC , $AB = 6$ см, $AC = 9$ см. Менший з відрізків, на які бісектриса AM ділить сторону BC , дорівнює 3 см. Знайдіть BC .

41. У трикутнику ABC : $AB = 9$ см, $BC = 15$ см. Більший з відрізків, на які бісектриса BK ділить сторону AC , дорівнює 5 см. Знайдіть AC .

42. Січна, що проходить через точку S , перетинає коло в точках A і B , а друга січна, що проходить через точки S і центр кола O , – у точках C і D (мал. 5), $SA = 3$ см, $SB = 8$ см, $SC = 2$ см. Знайдіть радіус кола.



Мал. 5

43. Січна, що проходить через точку S , перетинає коло в точках A і B , а друга січна, що проходить через точки S і центр кола O , – у точках C і D (мал. 5), $SA = 5$ см, $SB = 12$ см, $SC = 4$ см. Знайдіть діаметр кола.

3 44. Прямі MN паралельна стороні AB трикутника ABC , $M \in AC$, $N \in BC$, $AB = 5$ см, $MN = 2$ см, $AM = 1$ см. Знайдіть довжину сторони AC .

45. Прямі KL паралельна стороні BC трикутника ABC , $K \in AB$, $L \in AC$, $KB = 3$ см, $BC = 6$ см, $KL = 4,5$ см. Знайдіть довжину сторони AB .

46. AL – бісектриса трикутника ABC , $AB = 8$ см, $AC = 10$ см, $BC = 9$ см. Знайдіть BL і LC .

47. Бісектриса трикутника ділить сторону на відрізки, різниця довжин яких 2 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо дві інші його сторони дорівнюють 8 см і 12 см.

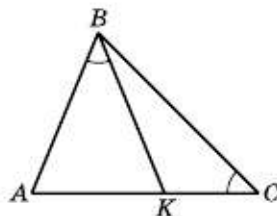
48. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, відтак дізнаєтеся ім'я та прізвище першої жінки – Герої України, котрій це звання присвоїли посмертно. Дізнайтеся в інтернеті відомості про неї.

У трикутнику ABC : $AB : BC : CA = 3 : 5 : 6$. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо його:	A_1B_1	B_1C_1	C_1A_1
менша сторона дорівнює 6 см	Н	С	Е
більша сторона на 7 см більша за середню	У	І	О
периметр дорівнює 70 см	Р	В	А

35 см	6 см	6 см	30 см

	12 см	15 см	21 см	10 см	42 см	25 см	30 см
Д							

49. Сторони трикутника відносяться як $4 : 7 : 9$. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо його:
- 1) більша сторона дорівнює 18 см;
 - 2) менша сторона на 9 см менша від середньої;
 - 3) периметр дорівнює 100 см.
50. Хорди кола AB і CD перетинаються в точці Q , $AQ : QB = 1 : 2$, $CD = 17$ см, $CQ = 8$ см. Знайдіть AB .
51. Через точку M , що розміщена всередині кола, проведено дві хорди AB і CD , $AM = MB$, $CM = 8$ см, $DM : MC = 1 : 4$. Знайдіть AB .
52. На стороні AC трикутника ABC позначено точку K так, що $\angle ABK = \angle C$ (мал. 6), $AK = 4$ см, $AB = 6$ см. Знайдіть KC .
53. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 6 см і 10 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

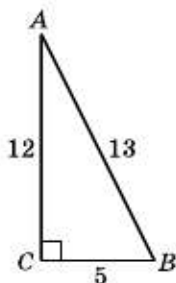


Мал. 6

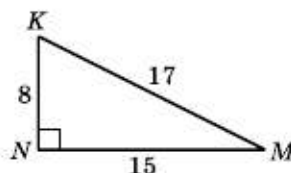
Розв'язування прямокутних трикутників

54. Нехай a і b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза. Знайдіть:
- 1) c , якщо $a = 12$ см, $b = 5$ см;
 - 2) a , якщо $c = 17$ дм, $b = 15$ дм;
 - 3) b , якщо $a = 35$ см, $c = 37$ см.
55. Нехай a і b – катети прямокутного трикутника, c – його гіпотенуза. Знайдіть:
- 1) a , якщо $b = 6$ см, $c = 10$ см;
 - 2) b , якщо $c = 25$ дм, $a = 7$ дм;
 - 3) c , якщо $a = 11$ см, $b = 60$ см.

56. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки до прямої, дорівнює 8 см, а довжина похилої, проведеної із цієї самої точки, – 10 см. Знайдіть проекцію похилої на цю пряму.
57. Перпендикуляр, проведений з точки до прямої, дорівнює 5 см. Із цієї самої точки до прямої проведено похилу, проекція якої на пряму дорівнює 12 см. Знайдіть довжину похилої.
58. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$ (мал. 7). Знайдіть:
1) $\sin A$; 2) $\cos B$; 3) $\operatorname{tg} A$; 4) $\cos A$; 5) $\operatorname{tg} B$; 6) $\sin B$.



Мал. 7



Мал. 8

59. Дано: $\triangle KMN$, $\angle N = 90^\circ$ (мал. 8). Знайдіть:
1) $\cos K$; 2) $\sin M$; 3) $\operatorname{tg} M$; 4) $\sin K$; 5) $\operatorname{tg} K$; 6) $\cos M$.
- 2** 60. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи, – 8 см. Знайдіть основу трикутника.
61. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а висота, проведена до основи, – 40 см. Знайдіть периметр трикутника.
62. Діагоналі ромба дорівнюють 14 см і 48 см. Знайдіть периметр ромба.
63. Сторона ромба дорівнює 17 см, а одна з діагоналей – 30 см. Знайдіть іншу діагональ ромба.
64. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 10 см, а її проекція – 6 см. Знайдіть проекцію другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 45° .
65. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 16 см і утворює з прямою кут 30° . Знайдіть довжину іншої похилої, якщо її проекція на пряму – 6 см.
66. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:
1) AB , якщо $AC = 6$ см, $\cos A = \frac{2}{3}$;
2) AC , якщо $BC = 8$ см, $\operatorname{tg} B = 0,5$;
3) BC , якщо $AB = 12$ см, $\angle A = 60^\circ$.
67. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:
1) AB , якщо $BC = 12$ см, $\sin A = \frac{3}{4}$;
2) BC , якщо $AC = 8$ см, $\operatorname{tg} B = 0,25$;
3) AC , якщо $AB = 16$ см, $\angle A = 45^\circ$.

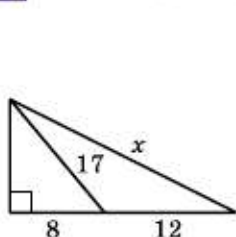
68. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$ (сторони трикутника в задачах 3) і 4) знайдіть з точністю до сотих сантиметра) за двома елементами:

- 1) $AC = 8$ см, $\angle A = 45^\circ$; 2) $AB = 12$ см, $\angle B = 60^\circ$;
3) $BC = 10$ см, $\angle A = 27^\circ$; 4) $AB = 16$ см, $\angle A = 80^\circ$.

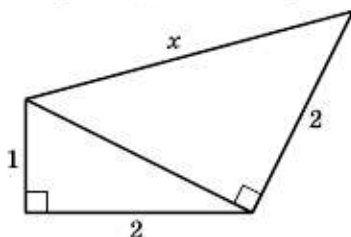
69. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$ (сторони трикутника в задачах 3) і 4) знайдіть з точністю до сотих сантиметра) за двома елементами:

- 1) $BC = 9$ см, $\angle B = 30^\circ$; 2) $AB = 8$ см, $\angle A = 45^\circ$;
3) $AC = 12$ см, $\angle B = 70^\circ$; 4) $AB = 10$ см, $\angle B = 35^\circ$.

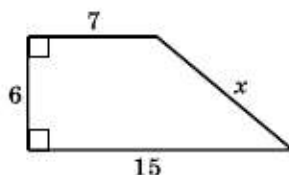
3 70. Знайдіть довжину невідомого відрізка x на малюнках 9–11.



Мал. 9



Мал. 10



Мал. 11

71. З точки, що розміщена на відстані 12 см від прямої, проведено дві похилі завдовжки 13 см і 15 см. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки випадків слід розглянути?

72. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AC = 12$ см, $\cos B = 0,8$.

73. У $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AB = 34$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{8}{15}$.

74. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$ (невідому сторону знайдіть з точністю до сотих сантиметра, кути – з точністю до градусів) за двома сторонами:

- 1) $AB = 6$ см, $AC = 5$ см; 2) $AC = 8$ см, $BC = 3$ см.

75. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$ (невідому сторону знайдіть з точністю до сотих сантиметра, кути – з точністю до градусів) за двома сторонами:

- 1) $BC = 5$ см, $AB = 9$ см; 2) $BC = 7$ см, $AC = 2$ см.

4 76. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки завдовжки 5 см і 13 см. Знайдіть периметр трикутника.

77. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 30 см і 40 см. Знайдіть периметр трикутника.

78. Сторони прямокутника дорівнюють 12 см і 20 см. Знайдіть гострий кут між діагоналями прямокутника з точністю до градуса.

Многокутники. Площа многокутників

- 1** 79. Площа паралелограма дорівнює 35 см^2 , а одна зі сторін – 7 см . Знайдіть висоту паралелограма, проведену до цієї сторони.
80. Площа паралелограма – 24 см^2 , а одна з його висот – 3 см . Знайдіть довжину сторони, до якої проведено цю висоту.
81. Нехай a і b – основи трапеції, h – її висота. Знайдіть площу трапеції, якщо:
- 1) $a = 6 \text{ см}$, $b = 3 \text{ см}$, $h = 4 \text{ см}$; 2) $a = 1 \text{ дм}$, $b = 8 \text{ см}$, $h = 30 \text{ мм}$.
82. Нехай a і b – основи трапеції, h – її висота. Знайдіть площу трапеції, якщо:
- 1) $a = 4 \text{ см}$, $b = 9 \text{ см}$, $h = 5 \text{ см}$; 2) $a = 80 \text{ мм}$, $b = 5 \text{ см}$, $h = 1 \text{ дм}$.
- 2** 83. Обчисліть суму кутів опуклого n -кутника, якщо:
- 1) $n = 8$; 2) $n = 15$.
84. Обчисліть суму кутів опуклого n -кутника, якщо:
- 1) $n = 6$; 2) $n = 12$.
85. Квадрат і прямокутник мають однакові площі. Сторони прямокутника дорівнюють 8 см і 2 см . Знайдіть периметр квадрата.
86. Прямокутник і квадрат мають однакові площі. Сторона квадрата дорівнює 6 см , а одна зі сторін прямокутника – 9 см . Знайдіть периметр прямокутника.
87. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см , а висота, проведена до другої сторони, – 4 см . Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює 28 см^2 .
88. Площа паралелограма дорівнює 40 см^2 . Одна з його сторін – 10 см , а одна з висот – 5 см . Знайдіть периметр паралелограма.
89. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см , а висота, проведена до основи, – 6 см . Знайдіть площу трикутника.
90. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 30 см , а бічна сторона – 17 см . Знайдіть площу трикутника.
91. Площа трапеції дорівнює 24 см^2 , одна з її основ – 7 см , а висота – 4 см . Знайдіть іншу основу трапеції.
92. Основи трапеції дорівнюють 11 см і 19 см , а її площа – 45 см^2 . Знайдіть висоту трапеції.
- 3** 93. Знайдіть кути опуклого п'ятикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як $4 : 5 : 6 : 6 : 6$.
94. Знайдіть кути опуклого шестикутника, якщо кожен з них, починаючи з другого, менший від попереднього на 2° .
95. Бісектриса AK кута прямокутника $ABCD$ поділяє сторону BC на відрізки $BK = 7 \text{ см}$, $KC = 3 \text{ см}$. Знайдіть площу прямокутника.
96. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см , а його гострий кут – 30° . Знайдіть площу паралелограма.
97. Периметр ромба дорівнює 40 см , а один з його кутів – 150° . Знайдіть площу ромба.

98. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а інший – на 4 см менший від гіпотенузи. Знайдіть площу трикутника.
99. Один з катетів прямокутного трикутника на 7 см більший за інший, а гіпотенуза дорівнює 13 см. Знайдіть площу трикутника.
100. Площа прямокутної трапеції – 34 см^2 , її периметр – 26 см, а менша бічна сторона – 4 см. Знайдіть більшу бічну сторону.
101. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 40 см, її бічна сторона – 10 см, а площа – 60 см^2 . Знайдіть висоту трапеції.
-  102. Дві сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 6 см, а сума двох його висот, проведених з однієї вершини, – 8 см. Знайдіть площу паралелограма.
103. Дві висоти паралелограма дорівнюють 3 см і 4 см, а сума двох суміжних сторін – 14 см. Знайдіть площу паралелограма.
104. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4 см і 6 см. Знайдіть площу трикутника.
105. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить катет на відрізки завдовжки 3 см і 9 см. Знайдіть площу трикутника.
-  106. Основа трапеції дорівнює 12 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 2 см і 3 см. Знайдіть площу трапеції.

ТЕМА 1

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** все, що вивчали раніше про координатну площину;
- **дізнаєтеся**, як знаходити синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180° , координати середини відрізка та відстань між двома точками координатної площини, рівняння кола і прямої;
- **навчитеся** розв'язувати геометричні задачі на площині за допомогою методу координат.

§ 1. Координатна площина

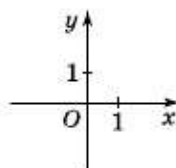
1. Поняття про прямокутну систему координат



З поняттям *координатної площини* ми ознайомилися в курсі математики 6 класу, а в курсі алгебри використовували його для побудови графіків функцій.

Пригадаємо, як задають координатну площину.

Нехай на площині вибрано дві взаємно перпендикулярні прямі x та y , що перетинаються в точці O (мал. 1.1). Ці прямі називають *осями координат*, а точку їхнього перетину – *початком координат*. Вісь x (зазвичай вона горизонтальна) називають *віссю абсцис*, вісь y – *віссю ординат*.



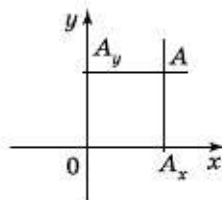
Мал. 1.1

Початок координат розбиває кожну з осей на дві півосі. Одну з них прийнято називати додатною та зображати зі стрілочкою, а другу – від'ємною. На кожній з осей координат вибирають одиничний відрізок. Початок відліку кожної з осей – число 0 – збігається з точкою O . У такому разі кажуть, що на площині задано *прямокутну систему координат*.

Площину, на якій задано прямокутну систему координат, називають *координатною площиною*.

2. Координати точки

Кожній точці A координатної площини можна поставити у відповідність пару чисел – *координати точки*. Для цього через точку A потрібно провести пряму, паралельну осі y , і пряму, паралельну осі x , які перетнуть осі x та y в деяких точках A_x і A_y відповідно (мал. 1.2). *Абсцисою* точки A називають



Мал. 1.2

число x , модуль якого дорівнює відстані від точки O до точки A_x . Причому якщо A_x належить додатній півосі, то $x > 0$, а якщо A_x належить від'ємній півосі, то $x < 0$. Якщо точка A лежить на осі y , то її абсциса дорівнює нулю. *Ординатою* точки A називають число y , модуль якого дорівнює відстані від точки O до точки A_y . Причому якщо A_y належить додатній півосі, то $y > 0$, а якщо A_y належить від'ємній півосі, то $y < 0$. Якщо точка A лежить на осі x , то її ордината дорівнює нулю.

Координати точки записують у дужках поряд з назвою точки: $A(x; y)$. На першому місці завжди пишуть абсцису, на другому – ординату. Абсцису точки A можна позначати x_A , а ординату – y_A . Ці позначення зручно використовувати під час розв'язування задач, де кожен координату знаходять окремо. Якщо, наприклад, $A(-2; 3)$, то $x_A = -2$, $y_A = 3$.

Уведені на площині координати x та y називають *декартовими* на честь французького математика Рене Декарта (1596–1650), якому належить ідея введення і застосування координат у математиці.

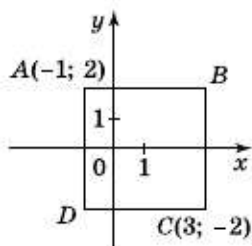
Приклад 1. Сторони прямокутника $ABCD$ паралельні осям координат. Знайти координати точок B і D , якщо $A(-1; 2)$, $C(3; -2)$.

Розв'язання. Розглянемо малюнок 1.3.

1) Оскільки пряма AB паралельна осі абсцис, то ординати точок A і B однакові: $y_A = y_B = 2$. Аналогічно, оскільки пряма BC паралельна осі ординат, то абсциси точок B і C однакові: $x_B = x_C = 3$. Отже, $B(3; 2)$.

2) Міркуючи у той самий спосіб, отримаємо: $D(-1; -2)$.

Відповідь: $B(3; 2)$, $D(-1; -2)$.

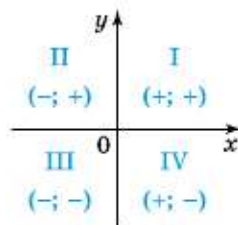


Мал. 1.3

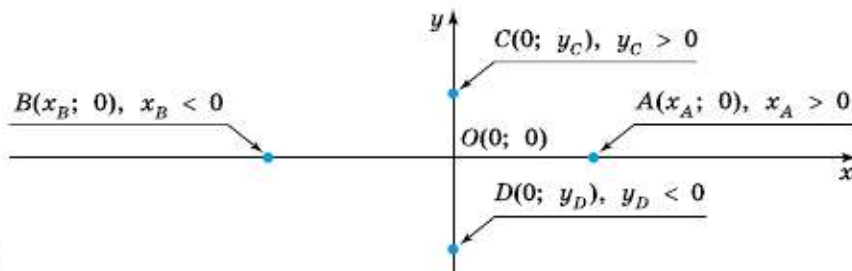
3. Координатні чверті

Осі координат розбивають площину на чотири частини, кожен з яких називають *координатною чвертю*, або *координатним кутом* (мал. 1.4). У межах однієї координатної чверті знаки кожної з координат не змінюються. Знаки координат та загальноприйняту нумерацію координатних кутів показано на малюнку 1.4.

На малюнку 1.5 вказано координати точок, які належать осям координат, та координати точки O .



Мал. 1.4



Мал. 1.5

Приклад 2. У яких координатних чвертях може лежати точка B , якщо добуток її абсциси й ординати є числом:

- 1) додатним; 2) від'ємним?

Розв'язання. Нехай маємо точку $B(x; y)$.

1) $xy > 0$, отже, x та y – числа одного знака, тобто $x > 0$ і $y > 0$ або $x < 0$ і $y < 0$. Тому точка B лежить у першій або третій чверті.

2) $xy < 0$, отже, x та y – числа різних знаків, тобто $x > 0$ і $y < 0$ або $x < 0$ і $y > 0$. Тому точка B лежить у другій або четвертій чверті.

Відповідь: 1) у першій або третій чверті; 2) у другій або четвертій чверті.

А ще раніше...

Ідея введення координат на площині прийшла до нас із давнини. Перші застосування координат були пов'язані з астрономією і географією, тобто з необхідністю визначати положення світил на небі й точок на поверхні Землі, що використовувалося для складання календарів, зоряних та географічних карт. Відомий давньогрецький астроном, географ та математик Клавдій Птолемей уже на той час використовував довготу та широту як географічні координати. Ідеї прямокутних координат у вигляді прямокутної сітки (палетки) було знайдено у гробниці батька Рамзеса II – фараона Сеті I (котрий помер близько 1279 р. до н. е.). За допомогою палетки можна було переносити зображення у збільшеному вигляді. Починаючи з XV ст., прямокутну сітку використовували також художники епохи Відродження.

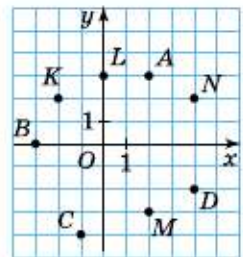
Термін *абсциса* походить від латинського *abscissus* – той, що відсікається (відрізок на осі x); *ордината* – від латинського *ordinatus* – упорядкований, оскільки ординатами спочатку називали відрізки, паралельні осі y . Ці терміни були вперше застосовані в латинському перекладі праць відомого давньогрецького математика Аполлонія, їх також запропонував у 70–80-х роках XVII ст. Готфрід Лейбніц, після чого вони стали загальноживаними. Лейбніц запропонував абсцису разом з ординатою називати координатами.

- Що називають осями координат? Початком координат? Як знаходять координати точки? Назвіть абсцису й ординату точки $P(-2; 5)$. Які знаки в координаті точки, якщо вона лежить у першій (другій, третій, четвертій) координатній чверті? Чому дорівнює абсциса точки, яка належить осі y ? Чому дорівнює ордината точки, яка належить осі x ?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1.1. Знайдіть координати точок A, B, C, D на малюнку 1.6.
- 1.2. Знайдіть координати точок K, L, M, N (мал. 1.6).
- 1.3. Позначте на координатній площині точки $E(-2; 1), F(0; -3), P(4; -2), T(-5; -1)$.
- 1.4. Позначте на координатній площині точки $A(2; -3), B(5; 0), C(4; 1), D(-2; 4)$.
- 1.5. Які з точок $A(0; -2), B(4; -3), C(2; 0), D(0; 19), E(2; 2), F(-14; 0)$ належать осі абсцис, а які – осі ординат?



Мал. 1.6

- 1.6. Які з точок $P(2; -17)$, $T(5; 0)$, $F(0; -2)$, $N(-4; 0)$, $M(-1; -1)$, $K(0; 17)$ належать осі абсцис, а які – осі ординат?
- 1.7. Не виконуючи побудови, укажіть, у яких чвертях лежать точки $M(2; -3)$, $N(-4; -5)$, $L(1; 2)$, $K(-9; 4)$.
- 1.8. Не виконуючи побудови, укажіть, у яких чвертях лежать точки $A(-2; -3)$, $B(4; 5)$, $C(1; -5)$, $D(-4; 1)$.
- 2** 1.9. (Усно.) На малюнку 1.6 знайдіть точки, у яких однакові:
1) абсциси; 2) ординати.
- 1.10. На прямій, паралельній осі x , узято дві точки. Одна з них має ординату $y = -3$. Яка ордината у другої точки?
- 1.11. На прямій, паралельній осі y , узято дві точки. Одна з них має абсцису $x = 2$. Яка абсциса у другої точки?
- 1.12. З точки $M(-5; 3)$ проведено перпендикуляри до осей координат. Знайдіть координати основ перпендикулярів.
- 1.13. З точки $N(2; -3)$ проведено перпендикуляри до осей координат. Знайдіть координати основ цих перпендикулярів.
- 3** 1.14. Сторони прямокутника $KLMN$ паралельні осям координат, $K(4; 5)$, $M(-2; -3)$. Знайдіть координати вершин L і N прямокутника.
- 1.15. Катети прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) паралельні осям координат. Знайдіть координати вершини C , якщо $A(2; -3)$, $B(7; 4)$.
- 1.16. Що можна сказати про координати точки A , якщо вона належить бісектрисі:
1) першого координатного кута; 2) другого координатного кута?
- 1.17. 1) Знайдіть відстані від точок $A(2; -3)$ і $B(-2; -5)$ до координатних осей.
2) Зробіть узагальнення щодо відстаней від точки $M(x; y)$ до координатних осей.
- 1.18. Знайдіть відстані від точок $C(-1; 5)$ і $D(3; 4)$ до координатних осей.
- 1.19. Точка перетину діагоналей ромба збігається з початком координат, а діагоналі ромба лежать на осях координат. Довжина однієї діагоналі дорівнює 10 одиниць, а другої – 8 одиниць. Знайдіть координати вершин ромба. Скільки розв'язків має задача?
- 1.20. Центр кола, радіус якого дорівнює 3 одиниці, збігається з початком координат. Які координати мають точки перетину кола з осями координат?
- 4** 1.21. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює 2 одиниці, а його сторони паралельні осям координат. Знайдіть координати вершин квадрата, якщо $A(3; 3)$. Розгляньте всі можливі випадки.
- 1.22. Знайдіть геометричне місце точок $(x; y)$ координатної площини, для яких $|x| = 3$.

- 1.23. Знайдіть геометричне місце точок $(x; y)$ координатної площини, для яких $|y| = 2$.



Вправи для повторення

- 1.24. Знайдіть площу трапеції, середня лінія якої дорівнює 7 см, а висота – 8 см.
- 1.25. Дві сторони трикутника дорівнюють 4,3 см і 1,2 см, а довжина третьої сторони дорівнює цілому числу сантиметрів. Якого найменшого та якого найбільшого значень може набувати периметр цього трикутника?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 1.26. Знайдіть за допомогою калькулятора, таблиць або комп'ютера:
- | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1) $\sin 18^\circ$; | 2) $\sin 26^\circ 30'$; | 3) $\cos 83^\circ$; |
| 4) $\cos 30^\circ 15'$; | 5) $\lg 70^\circ$; | 6) $\lg 19^\circ 45'$. |
- 1.27. Відомо, що α – гострий кут прямокутного трикутника. Знайдіть α , якщо:
- | | | |
|----------------------------------|---|------------------------------|
| 1) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; | 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; | 3) $\lg \alpha = \sqrt{3}$. |
|----------------------------------|---|------------------------------|
- 1.28. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Знайдіть:
- | | | |
|---------------|---------------|--------------|
| 1) $\sin A$; | 2) $\cos A$; | 3) $\lg A$; |
| 4) $\sin B$; | 5) $\cos B$; | 6) $\lg B$. |



Життєва математика

- 1.29. Грядка полуниці має прямокутну форму 30 м завдовжки і 10 м завширшки. Скільки відер води знадобиться для її поливу, якщо на кожен квадратний метр цієї грядки потрібно 20 л води, а відро вміщує 12 л?



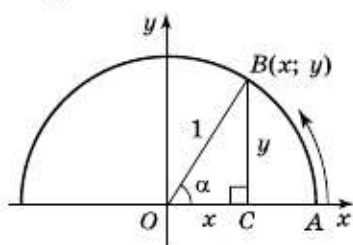
Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 1.30. (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2015 р.) З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ проведено перпендикуляр BO до сторони AD . Коло із центром у точці A проходить через вершину B і перетинає сторону AD у точці K . Відомо, що $AK = 8$ см, $KD = 6$ см, $AO = 7$ см.
- 1) Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$ (у см).
 - 2) Обчисліть довжину діагоналі BD (у см).

§ 2. Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180° . Тригонометричні тотожності

1. Означення синуса, косинуса і тангенса для будь-якого кута від 0° до 180°

Досі ми розглядали синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника як відношення певних його сторін. Тепер сформулюємо означення синуса, косинуса і тангенса для будь-якого кута від 0° до 180° .



Мал. 2.1

Уведемо на площині прямокутну систему координат і проведемо в її першому і другому координатних кутах півколо радіуса 1, центр якого збігається з початком координат (мал. 2.1). Назвемо його *одиничним півколом*. Позначимо буквою A точку перетину цього півкола з додатним напрямком осі x і домовимося відкладати від променя OA кути проти руху годинникової стрілки. Нехай $\angle AOB = \alpha$ – гострий кут, точка B

належить півколу. Проведемо з точки B перпендикуляр BC до осі x . Утворився прямокутний трикутник OBC з гіпотенузою OB , де $OB = 1$.

Значення синуса, косинуса, тангенса гострого кута α виразимо через координати точки B :

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y; \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Так само будемо знаходити синус, косинус і тангенс інших кутів від 0° до 180° . Нехай $B_1(x_1; y_1)$ – точка одиничного півкола, що лежить у другій чверті (мал. 2.2).

Тоді $\angle B_1OA$ – тупий. Маємо:

$$\sin \alpha = \frac{y_1}{1} = y_1; \quad \cos \alpha = \frac{x_1}{1} = x_1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_1}.$$

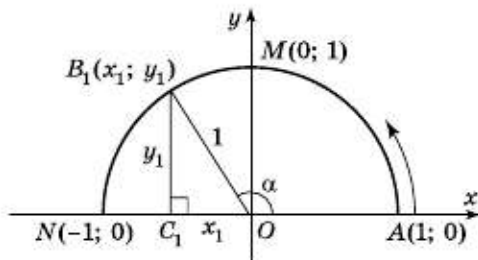
Оскільки координати $(x; y)$ точок одиничного півкола змінюються в межах $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$, то для довільного α такого, що $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, справджуються нерівності:

$$0 \leq \sin \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1.$$

Але якщо:

$$\alpha - \text{гострий, то } \sin \alpha = y > 0; \cos \alpha = x > 0; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} > 0;$$

$$\alpha - \text{тупий, то } \sin \alpha = y > 0; \cos \alpha = x < 0; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} < 0.$$



Мал. 2.2

Крім того, якщо кут α збільшується від 0° до 90° , то його синус збільшується від 0 до 1, а косинус зменшується від 1 до 0. Якщо кут α збільшується від 90° до 180° , то його синус зменшується від 1 до 0, а косинус зменшується від 0 до -1 .

Знайдемо значення синуса, косинуса і тангенса кутів 0° , 90° і 180° .

На малюнку 2.2 куту 0° відповідає точка $A(1; 0)$. Тому $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$. Куту 90° відповідає точка $M(0; 1)$, тому $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, але $\operatorname{tg} 90^\circ$ – не існує, оскільки на нуль ділити не можна. Куту 180° відповідає точка $N(-1; 0)$, тому $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$.

Отже,

якщо $B(x; y)$ – точка одиничного півкола, що відповідає куту α (мал. 2.1), то

$$\sin \alpha = y; \cos \alpha = x; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Із цього означення випливає, що $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Оскільки кожному куту α від 0° до 180° відповідає єдине значення синуса, косинуса і тангенса, то можна вважати синус, косинус і тангенс функціями з аргументом α . Ці функції ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$) називають *тригонометричними* і вивчають у курсі алгебри старших класів.

2. Тригонометричні тотожності

Розглянемо деякі залежності між функціями одного й того самого аргументу, які називають *тригонометричними тотожностями*.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

Доведення. Розглянемо $\triangle BOC$ (див. мал. 2.1). За теоремою Піфагора: $BC^2 + OC^2 = OB^2$, тобто $y^2 + x^2 = 1$. Тому $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$. Вираз $(\sin \alpha)^2$ та аналогічні йому для зручності прийнято записувати без дужок, наприклад $\sin^2 \alpha$. Отже, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. ■

Рівність $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ називають *основною тригонометричною тотожністю*. Із цієї тотожності можна виразити синус кута через його косинус:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

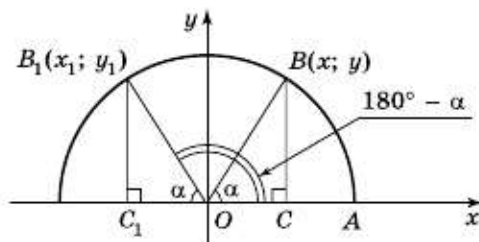
та косинус кута через його синус:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

В останній формулі знак « $\pm$ » пишуть, якщо кут α – тупий або розгорнутий.

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad (2)$$

Доведення. Розглянемо точки $B(x; y)$ і $B_1(x_1; y_1)$ одиничного півкола, що відповідають кутам α і $180^\circ - \alpha$ (мал. 2.3).



Мал. 2.3

Оскільки $\angle B_1OA = 180^\circ - \alpha$, то $\angle B_1OC_1 = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$. Отже, $\triangle OBC = \triangle OB_1C_1$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $BC = B_1C_1$ і $OC = OC_1$. Звідки випливає, що абсциси точок B і B_1 є протилежними, а їхні ординати – однаковими: $x = -x_1$, $y = y_1$.

Ураховуючи, що $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$, $\sin(180^\circ - \alpha) = y_1$, $\cos(180^\circ - \alpha) = x_1$, матимемо:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha. \quad \blacksquare$$

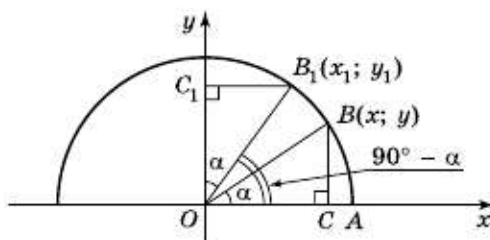
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

Доведення. Ураховуючи тотожність (2), маємо:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha. \quad \blacksquare$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (4)$$

Доведення. Розглянемо точки $B(x; y)$ і $B_1(x_1; y_1)$ одиничного півкола, що відповідають кутам α і $90^\circ - \alpha$ (мал. 2.4).



Мал. 2.4

Оскільки $\angle B_1OA = 90^\circ - \alpha$, то $\angle B_1OC_1 = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$. Тому $\triangle OBC = \triangle OB_1C_1$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Маємо $OC = OC_1$, $BC = B_1C_1$, тобто $x = y_1$ і $y = x_1$.

Ураховуючи, що $\sin \alpha = y$, $\cos \alpha = x$, $\sin(90^\circ - \alpha) = y_1$, $\cos(90^\circ - \alpha) = x_1$, матимемо:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha. \quad \blacksquare$$

Приклад 1. Спростити: 1) $\sin^2(90^\circ - \alpha) + \sin^2(180^\circ - \alpha)$;

$$2) \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} - \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha).$$

Розв'язання.

$$1) \sin^2(90^\circ - \alpha) + \sin^2(180^\circ - \alpha) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$2) \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} - \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} - (-\operatorname{tg} \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Відповідь: 1) 1; 2) 0.

3. Синус, косинус і тангенс табличних кутів

Використовуючи формули (2) і (3), можна виразити синус, косинус і тангенс тупого кута $180^\circ - \alpha$ через синус, косинус і тангенс гострого кута α .



Приклад 2. Знайти синус, косинус і тангенс кутів 120° , 135° і 150° .

$$\text{Розв'язання. } \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3};$$

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1;$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Систематизуємо відомості з 8 класу та отримані в цьому параграфі у вигляді таблиці.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Кути $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ прийнято називати *табличними кутами*.

3. Обчислення нетабличних значень синуса, косинуса і тангенса

Синус, косинус і тангенс інших кутів можна знаходити за допомогою таблиць, калькулятора або комп'ютера. Для обчислень використовуємо клавіші калькулятора $\sin$, $\cos$, tg (на деяких калькуляторах $\tan$). Наприклад, $\sin 124^\circ \approx 0,8290$; $\cos 157^\circ \approx -0,9205$; $\operatorname{tg} 178^\circ \approx -0,0349$.

За допомогою таблиць або калькулятора можна за даними значеннями $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ або $\operatorname{tg} \alpha$ знаходити значення кута α . Для обчислення на калькуляторі використовуємо клавіші $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ і tg^{-1} (на деяких калькуляторах $\tan^{-1}$) або послідовне натискання клавіші arc та однієї з клавіш $\sin$, $\cos$ або tg ($\tan$).

Приклад 3. Знайти α , якщо:

- 1) $\cos \alpha = -0,3584$; 2) $\sin \alpha = 0,2588$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = -2,1445$.

Розв'язання. 1) $\cos \alpha = -0,3584$. За допомогою калькулятора знаходимо значення кута α у градусах: $\alpha \approx 111^\circ$.

2) $\sin \alpha = 0,2588$. За допомогою калькулятора знаходимо значення кута α у градусах: $\alpha \approx 15^\circ$. Але $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, тому $\sin(180^\circ - 15^\circ) \approx 0,2588$, тобто $\sin 165^\circ \approx 0,2588$. Отже, існують два таких кути, синус яких дорівнює 0,2588, а саме: $\alpha \approx 15^\circ$ і $\alpha \approx 165^\circ$.

3) Використовуючи калькулятор, отримуємо $\alpha \approx -65^\circ$. До числа -65° треба додати 180° , щоб отримати тупий кут, тангенс якого дорівнює числу $-2,1445$. (Формулу $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha)$ буде доведено у старших класах.) Маємо $\alpha \approx -65^\circ + 180^\circ = 115^\circ$.

Відповідь: 1) 111° ; 2) 15° або 165° ; 3) 115° .

? Поясніть, як знаходять синус, косинус і тангенс кутів від 0° до 180° . **○** Сформулюйте і доведіть основну тригонометричну тотожність. **○** Доведіть, що

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha; \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha; \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

2.1. Знайдіть за допомогою калькулятора:

- 1) $\sin 92^\circ$; 2) $\cos 108^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 157^\circ$;
 4) $\sin 118^\circ 6'$; 5) $\cos 175^\circ 30'$; 6) $\operatorname{tg} 129^\circ 24'$.

2.2. Знайдіть за допомогою калькулятора:

- 1) $\cos 110^\circ$; 2) $\sin 116^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 138^\circ$;
 4) $\cos 120^\circ 30'$; 5) $\sin 125^\circ 18'$; 6) $\operatorname{tg} 120^\circ 6'$.

2.3. (Усно.) Який із записів правильний:

- 1) $\sin 140^\circ = \sin 40^\circ$ чи $\sin 140^\circ = -\sin 40^\circ$;
 2) $\cos 140^\circ = \cos 40^\circ$ чи $\cos 140^\circ = -\cos 40^\circ$?

2.4. (Усно.) 1) Чи може абсциса точки одиничного півкола дорівнювати числу $0,5$; $-3,8$; $\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8}$; $1\frac{3}{4}$?

2) Чи може ордината точки одиничного півкола дорівнювати числу $0,2$; 5 ; $2,03$; $-0,3$; $\frac{1}{7}$?

2.5. Обчисліть: 1) $\sin 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$; 2) $\cos 150^\circ \cdot \sin 120^\circ$.2.6. Обчисліть: 1) $\operatorname{tg} 135^\circ - \cos 120^\circ$; 2) $\sin 135^\circ : \cos 135^\circ$.

2

2.7. Чи існує кут α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, для якого:

- 1) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$; 2) $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$; 3) $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$;
 4) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$; 5) $\cos \alpha = 1,2$; 6) $\sin \alpha = 1,2$?

2.8. Чи існує кут β , де $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$, для якого:

- 1) $\cos \beta = -\frac{4}{9}$; 2) $\sin \beta = -\frac{4}{9}$; 3) $\cos \beta = \frac{4}{9}$;
 4) $\sin \beta = \frac{4}{9}$; 5) $\cos \beta = -1,3$; 6) $\sin \beta = -1,3$?

2.9. Кут β – гострий. Знайдіть:

- 1) $\cos \beta$, якщо $\sin \beta = \frac{4}{5}$; 2) $\sin \beta$, якщо $\cos \beta = \frac{5}{13}$.

2.10. Кут α – гострий. Знайдіть:

- 1) $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,6$; 2) $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{8}{17}$.

2.11. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць гострий кут α , якщо: 1) $\sin \alpha = 0,2756$; 2) $\operatorname{tg} \alpha = 0,5498$.

2.12. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць гострий кут β , якщо: 1) $\cos \beta = 0,6691$; 2) $\operatorname{tg} \beta = 2,0965$.

2.13. Обчисліть значення виразу $4\sin 90^\circ - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} 120^\circ$ та дізнаєтеся, у якому столітті було засновано місто Володимир-Волинський (Волинська обл.).

2.14. Знайдіть значення виразу $8\sin 150^\circ - \sqrt{3}\operatorname{tg} 150^\circ$ та дізнаєтесь, яке місце посідає Україна в Європі за кількістю населення.



2.15. Спростіть вираз:

1) $1 - \sin^2 \alpha$;

2) $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$;

3) $\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha)$;

4) $\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)}$.

2.16. Спростіть вираз:

1) $1 - \cos^2 \alpha$;

2) $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$;

3) $\cos(90^\circ - \alpha) + \sin(180^\circ - \alpha)$;

4) $\frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)}$.

3 **2.17.** Побудуйте гострий кут:

1) синус якого дорівнює $\frac{1}{3}$;

2) тангенс якого дорівнює $\frac{4}{5}$.

2.18. Побудуйте гострий кут:

1) косинус якого дорівнює $\frac{1}{5}$;

2) тангенс якого дорівнює $\frac{3}{4}$.

2.19. Запишіть у порядку зростання:

1) $\cos 137^\circ$; $\cos 125^\circ$; $\cos 142^\circ$;

2) $\sin 118^\circ$; $\sin 127^\circ$; $\sin 119^\circ$.

2.20. Запишіть у порядку спадання:

1) $\sin 142^\circ$; $\sin 148^\circ$; $\sin 138^\circ$;

2) $\cos 119^\circ$; $\cos 137^\circ$; $\cos 109^\circ$.

2.21. Знайдіть:

1) $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,6$;

2) $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{2}$.

2.22. Знайдіть:

1) $\sin \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,28$;

2) $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.23. Доведіть тригонометричну тотожність:

1) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1$;

2) $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha) = 1 - 2\cos^2 \alpha$.

2.24. Обчисліть:

1) $\cos^2 150^\circ - \sin^2 120^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$;

2) $\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 120^\circ + \sin 120^\circ$.

2.25. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin^2 150^\circ + \cos^2 120^\circ - \operatorname{tg}^2 150^\circ$;

2) $\frac{\sin 150^\circ}{\operatorname{tg} 150^\circ} - \cos 150^\circ$.

2.26. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць значення кута α , якщо:

1) $\operatorname{tg} \alpha = -1,8807$;

2) $\sin \alpha = 0,9272$.

2.27. Знайдіть за допомогою калькулятора або таблиць значення кута β , якщо:

1) $\operatorname{tg} \beta = -0,7002$; 2) $\sin \beta = 0,9848$.

4 2.28. Побудуйте кут α , якщо:

1) $\cos \alpha = -\frac{3}{7}$; 2) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

2.29. Побудуйте кут α , якщо:

1) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{5}$; 2) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

2.30. Знайдіть суму косинусів усіх кутів трапеції.

2.31. Обчисліть: 1) $\sin^2 37^\circ + \sin^2 53^\circ$; 2) $5 - \cos 137^\circ - \cos 43^\circ$.

2.32. Обчисліть: 1) $\cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ$; 2) $6 + \sin 42^\circ - \sin 138^\circ$.



Вправи для повторення

2.33. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 6 см, а висота, проведена до другої сторони, – 3 см. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює 24 см^2 .

2.34. Бісектриса трикутника ділить сторону на відрізки, різниця яких 2 см. Знайдіть периметр трикутника, якщо дві його інші сторони дорівнюють 9 см і 6 см.

2.35. Коло, вписане у трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки завдовжки a см і b см. Знайдіть висоту трапеції.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.36. Знайдіть відстань між точками A і B координатної прямої, якщо:
1) $A(7)$, $B(4)$; 2) $A(-2)$, $B(9)$; 3) $A(-9)$, $B(-12)$; 4) $A(x_1)$, $B(x_2)$.

2.37. 1) Побудуйте точки $A(1; 4)$, $B(5; 1)$, $C(1; 1)$ на координатній площині, одиничний відрізок якої дорівнює 1 см.

2) Знайдіть довжини відрізків AB , AC , BC за допомогою лінійки.

3) Як за допомогою обчислень знайти довжину відрізка AB , якщо довжини відрізків AC і BC відомі?

2.38. 1) Побудуйте на координатній площині точки $A(-2; 4)$ і $B(6; 2)$.

2) Знайдіть, використовуючи лінійку з поділками, координати точки M – середини відрізка AB .

3) Порівняйте координати точки M із середнім арифметичним відповідних координат точок A і B .



Життєва математика

2.39. 1) Ділянку у формі прямокутного трикутника з катетами 24 м і 18 м потрібно по периметру обсадити кущами жасмину так,

щоб у кожній вершині ділянки був кущ. Скільки знадобиться таких кущів, якщо відстань між ними на кожній стороні трикутника має дорівнювати 3 м?

2) *Проектна діяльність.* Дізнайтеся (наприклад, з інтернету) скільки коштує кущ жасмину (або інший декоративний кущ) та визначте, яку суму потрібно заплатити за ці кущі.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

2.40. Бічні сторони трапеції дорівнюють 6 см і 8 см, а відстань між серединами її діагоналей дорівнює 5 см. Знайдіть відстань між серединами основ трапеції.

§ 3. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами

1. Метод координат

Кожній точці координатної площини відповідає єдина пара чисел $(x; y)$, і навпаки, кожній парі чисел $(x; y)$ відповідає єдина точка координатної площини. У такому разі кажуть, що існує взаємно однозначна відповідність між точками координатної площини та їхніми координатами $(x; y)$. Це дає можливість розв'язувати деякі задачі *методом координат*, тобто подавати геометричні співвідношення розташування точок та фігур через алгебраїчні співвідношення між їхніми координатами. Розділ геометрії, що вивчає такі методи розв'язування, називають *аналітичною геометрією*.

Аналітична геометрія – розділ геометрії, у якому досліджують геометричні фігури та їхні властивості засобами алгебри на основі *методу координат*.

Далі розглянемо найпростіші задачі аналітичної геометрії, повний курс якої вивчають у закладах вищої освіти.

2. Координати середини відрізка

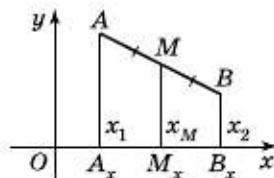
Приклад 1. Дано точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Точка M – середина відрізка AB . Знайти координати точки M .

Розв'язання. 1) Розглянемо спочатку випадок, коли відрізок AB не паралельний осі y , тобто $x_1 \neq x_2$. Проведемо через точки A, B і M прямі, паралельні осі y (мал. 3.1). Вони перетинають вісь x у точках $A_x(x_1; 0)$, $B_x(x_2; 0)$ і $M_x(x_M; 0)$.

Оскільки прямі AA_x , BB_x і MM_x паралельні між собою і M – середина AB , то, за теоремою Фалеса, M_x – середина A_xB_x .

Маємо $A_xM_x = M_xB_x$, тобто $|x_1 - x_M| = |x_M - x_2|$.

Тому $x_1 - x_M = x_M - x_2$ або $x_1 - x_M = -(x_M - x_2)$.



Мал. 3.1

З першої рівності маємо формулу $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, а друга – не має змісту, оскільки $x_1 \neq x_2$.

2) Якщо відрізок AB паралельний осі y , то $x_1 = x_2 = x_M$ і формула $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ також справджується.

3) Аналогічно доводимо, що $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Отже,

координати точки M – середини відрізка AB , де $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, знаходимо за формулами: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Приклад 2. Знайти координати точки M – середини відрізка, кінцями якого є точки $A(-5; 8)$ і $B(3; -12)$.

Розв'язання. $x_M = \frac{-5 + 3}{2} = -1$, $y_M = \frac{8 + (-12)}{2} = -2$.

Відповідь: $M(-1; -2)$.

Приклад 3. Точка C – середина відрізка AB . Знайти координати точки A , якщо $B(-2; 4)$, $C(8; 0)$.

Розв'язання. 1) Нехай $C(x_C; y_C)$. Тоді $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$, тобто $8 = \frac{x_A - 2}{2}$, звідки $x_A = 18$.

2) Аналогічно, $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$, тобто $0 = \frac{y_A + 4}{2}$, звідки $y_A = -4$.

3) Отже, $A(18; -4)$.

Відповідь: $A(18; -4)$.

Приклад 4. Довести, що чотирикутник з вершинами в точках $A(5; -4)$, $B(-4; 1)$, $C(-3; 2)$ і $D(6; -3)$ – паралелограм.

Розв'язання. 1) Нехай точка O – середина діагоналі AC чотирикутника $ABCD$. Тоді $x_O = \frac{5 + (-3)}{2} = 1$; $y_O = \frac{-4 + 2}{2} = -1$. Отже, $O(1; -1)$.

2) Нехай точка Q – середина діагоналі BD чотирикутника $ABCD$. Тоді

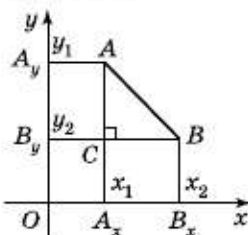
$$x_Q = \frac{-4 + 6}{2} = 1, y_Q = \frac{1 + (-3)}{2} = -1. \text{ Отже, } Q(1; -1).$$

3) Маємо, що середини діагоналей чотирикутника $ABCD$ збігаються і точка $O(1; -1)$ ділить кожну з діагоналей навпіл. Отже, діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Тому $ABCD$ – паралелограм. ■

3. Відстань між двома точками

Приклад 5. Знайти відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$.

Розв'язання. 1) Розглянемо спочатку випадок, коли відрізок AB не паралельний жодній з осей координат, тобто $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$. Проведемо через точки A і B прямі, паралельні осям координат (мал. 3.2). Вони перетинають вісь x у точках $A_x(x_1; 0)$ і $B_x(x_2; 0)$, а вісь y у точках $A_y(0; y_1)$ і $B_y(0; y_2)$.



Мал. 3.2

Оскільки $A_x B_x B C$ – прямокутник, то

$$BC = A_x B_x = |x_1 - x_2|.$$

Аналогічно $AC = A_y B_y = |y_1 - y_2|$.

У прямокутному трикутнику ABC за теоремою Піфагора знайдемо гіпотенузу AB : $AB^2 = BC^2 + AC^2$, тому $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

2) Якщо відрізок AB паралельний осі y , то $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ і $AB = |y_1 - y_2|$. Той самий результат матимемо і за отриманою в попередньому пункті формулою:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = |y_1 - y_2|.$$

3) Якщо відрізок AB паралельний осі x , то $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$ і $AB = |x_1 - x_2|$. Той самий результат матимемо і за наведеною для AB формулою.

4) Якщо точки A і B збігаються, тобто $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, то $AB = 0$ і отримана формула для AB знову справджується. ■

Отже,

відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ можна знайти за формулою

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Приклад 6. Знайти відстань між точками A і B , якщо:

- 1) $A(4; -2)$, $B(1; 2)$; 2) $A(3; 5)$, $B(7; -1)$.

Розв'язання. 1) $AB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$;

2) $AB = \sqrt{(3 - 7)^2 + (5 - (-1))^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = 2\sqrt{13}$.

Відповідь: 1) 5; 2) $2\sqrt{13}$.

Приклад 7. Знайти на осі абсцис точку, яка рівновіддалена від точок $A(2; 7)$ і $B(6; 1)$.

Розв'язання. Нехай $C(x; 0)$ – шукана точка.

1) Оскільки за умовою $AC = BC$, то $AC^2 = BC^2$. Маємо: $AC^2 = (2 - x)^2 + (7 - 0)^2 = 53 - 4x + x^2$; $BC^2 = (6 - x)^2 + (1 - 0)^2 = 37 - 12x + x^2$.

2) Враховуючи, що $AC^2 = BC^2$, маємо рівняння: $53 - 4x + x^2 = 37 - 12x + x^2$, звідки $x = -2$. Отже, шуканою є точка $C(-2; 0)$.

Відповідь: $(-2; 0)$.

А ще раніше...

Метод координат у математиці запропонували французькі математики П. Ферма та Р. Декарт у XVII ст.

Про перше наукове пояснення координатного методу стало відомо 1637 р. завдяки праці Рене Декарта «Геометрія». Саме тому описану Декартом систему координат почали називати декартовою, а координати точок у цій системі – декартовими координатами.



Р. Декарт (1596–1650)



П. Ферма (1601–1665)

У своїй праці Декарт навів велику кількість прикладів, що ілюстрували дієвість методу координат для розв'язування геометричних задач, та отримав результати, про які не знали давні математики. Декарт також висунув припущення про можливість застосування координатного методу не тільки на площині, а й у просторі, проте саме цій ідеї не надав подальшого розвитку.

Аналітичний метод, який запропонував Декарт, узяли на озброєння ван Схоутен, Валліс та багато інших математиків. Вони коментували «Геометрію» Декарта, виправляли його помилки, застосовували метод координат для розв'язування нових математичних задач, у тому числі й у тривимірному просторі. Так, наприклад, Валліс 1655 р. вперше розглянув конічні перерізи як плоскі криві.

Приблизно в той самий час, коли Декарт опублікував працю «Геометрія», П'єр Ферма оприлюднив мемуари «Вступ до вивчення плоских і тілесних місць», де, зокрема, описав рівняння кривих 2-го порядку (тобто кривих, рівняння яких містять одночлени 2-го степеня відносно x та y), та використав революційний на той час метод перетворення координат для спрощення вигляду рівнянь. Проте робота Ферма не набула такої популярності, як «Геометрія» Декарта, яка повніше розвивала ті самі ідеї.

Видатний математик та вчений Ісаак Ньютон спирався на координатний метод у своїх роботах з математичного аналізу та геометрії, у яких продовжив дослідження Декарта і Ферма. Зокрема, Ньютон запровадив у науковий обіг класифікацію кривих 3-го порядку, а для кожної кривої 2-го порядку визначив такі характеристики, як діаметр, вісь симетрії, вершини, центр, асимптота, особливі точки тощо.

? У чому полягає суть координатного методу? ○ Запишіть і доведіть формули координат середини відрізка. ○ Запишіть і доведіть формулу відстані між двома точками на координатній площині.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



3.1. Знайдіть координати середини відрізка CD , якщо:

- 1) $C(-5; 4)$, $D(7; 0)$;
- 2) $C(2; -8)$, $D(-2; 6)$.

- 3.2.** Знайдіть координати середини відрізка MN , якщо:
 1) $M(4; -5)$, $N(2; 1)$;
 2) $M(7; -3)$, $N(-1; 3)$.
- 3.3.** Знайдіть відстань від початку координат до точки:
 1) $A(3; -4)$; 2) $B(5; 12)$.
- 3.4.** Знайдіть відстань від початку координат до точки:
 1) $P(-6; 8)$; 2) $M(8; 15)$.
- 2** **3.5.** M – середина відрізка AB . Знайдіть координати:
 1) точки B , якщо $A(-2; 5)$, $M(4; -7)$;
 2) точки A , якщо $B(0; -2)$, $M(5; 1)$.
- 3.6.** D – середина відрізка AB . Знайдіть координати:
 1) точки A , якщо $B(4; 5)$, $D(-1; 7)$;
 2) точки B , якщо $A(3; 0)$, $D(4; -2)$.
- 3.7.** Знайдіть відстань між точками A і B , якщо:
 1) $A(-2; 4)$, $B(4; 12)$;
 2) $A(4; -5)$, $B(6; -11)$.
- 3.8.** Знайдіть відстань між точками A і B , якщо:
 1) $A(4; -1)$, $B(1; -5)$;
 2) $A(1; 7)$, $B(-5; 1)$.
- 3.9.** Нехай l – відстань між точками $A(-3; 3)$ і $B(4; 27)$. Знайдіть значення виразу $49l$, відтак дізнаєтеся довжину (в метрах) київського Хрещатика – найкоротшої з-поміж головних вулиць столиць світу.
- 3.10.** Яка відстань більша, AB чи AC , якщо:
 1) $A(4; -3)$, $B(0; 0)$, $C(2; -1)$;
 2) $A(2; 5)$, $B(8; -3)$, $C(-6; -1)$?
- 3.11.** Яка відстань більша, MN чи ML , якщо:
 1) $M(2; -3)$, $N(2; 2)$, $L(-2; 0)$;
 2) $M(3; -1)$, $N(1; 0)$, $L(5; -1)$?
- 3.12.** Знайдіть периметр трикутника LMN , якщо $L(4; -3)$, $M(4; 5)$, $N(1; 1)$.
- 3.13.** Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $A(0; -2)$, $B(0; -8)$, $C(4; -5)$.
- 3** **3.14.** $A(-1; 2)$, $B(0; 6)$, $C(-5; 3)$ – вершини трикутника ABC . Доведіть, що трикутник ABC – рівнобедрений.
- 3.15.** $K(-2; 2)$, $L(3; -4)$, $M(4; 7)$ – вершини трикутника KLM . Доведіть, що трикутник рівнобедрений.
- 3.16.** Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(2; -5)$, $B(-7; 0)$, $C(-6; 1)$, $D(3; -4)$ – паралелограм.
- 3.17.** Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ з вершинами в точках $K(-2; 8)$, $L(3; -3)$, $M(6; 2)$, $N(1; 13)$ – паралелограм.
- 3.18.** Точки $K(-4; 2)$, $L(3; 5)$, $M(2; 8)$ – вершини паралелограма $KLMN$. Знайдіть координати його четвертої вершини.

- 3.19. Точки $A(3; -8)$, $B(0; 11)$, $C(1; -12)$ – вершини паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати його четвертої вершини.
- 3.20. Чи є чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо:
 1) $A(-7; -2)$, $B(-5; 4)$, $C(5; 2)$, $D(3; -4)$;
 2) $A(2; 6)$, $B(3; 1)$, $C(-3; 0)$, $D(-4; 4)$?
- 3.21. У трикутнику ABC $A(-4; 2)$, $B(4; 7)$, $C(-2; 12)$. Знайдіть довжину середньої лінії, яка паралельна стороні AC .
- 3.22. У трикутнику PLK $P(4; -6)$, $L(2; -11)$, $K(6; -7)$. Знайдіть довжину середньої лінії, яка паралельна стороні KL .
- 3.23. Знайдіть довжину відрізка AB , кінці якого лежать на осях координат, а серединою його є точка $N(-5; 12)$.
- 3.24. Знайдіть довжину відрізка MN , кінці якого лежать на осях координат, а серединою його є точка $A(8; -15)$.
- 3.25. Знайдіть довжину медіани AM трикутника ABC , якщо $A(6; 0)$, $B(-3; 4)$, $C(7; 2)$.
- 3.26. Знайдіть довжину медіани BN трикутника ABC , якщо $A(2; -1)$, $B(-9; 0)$, $C(4; 11)$.
- 3.27. $ABCD$ – квадрат, $A(-2; 4)$, $C(4; 10)$. Знайдіть периметр квадрата.
- 3.28. $ABCD$ – квадрат, $A(4; 5)$, $B(10; -3)$. Знайдіть довжину діагоналі квадрата.
- 3.29. Відстань між точками $A(5; 7)$ і $B(-3; y)$ дорівнює 17. Знайдіть y .
- 3.30. Відстань між точками $M(3; 0)$ і $N(x; 24)$ дорівнює 25. Знайдіть x .
- 3.31. Знайдіть на осі абсцис точку, рівновіддалену від точок $M(2; 5)$ і $N(4; 1)$.
- 3.32. Знайдіть на осі ординат точку, рівновіддалену від точок $A(3; 1)$ і $B(7; 5)$.
- 4** 3.33. Дано точки $A(2; 3)$ і $B(8; 11)$. Знайдіть координати точки N , яка ділить відрізок AB у відношенні $1 : 3$, починаючи від точки A .
- 3.34. Дано точки $P(5; 0)$ і $N(13; 6)$. Знайдіть координати точки D , яка ділить відрізок PN у відношенні $3 : 1$, починаючи від точки P .
- 3.35. Доведіть, що точки $A(-1; -2)$, $B(3; 2)$ і $C(8; 7)$ лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими?
- 3.36. Доведіть, що точки $P(-1; -5)$, $L(4; 5)$ і $M(2; 1)$ лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими?
- 3.37. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-4; -1)$, $B(-1; 2)$, $C(3; -2)$ і $D(0; -5)$ – прямокутник.
- 3.38. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(1; 3)$, $B(-1; 9)$, $C(5; 7)$ і $D(7; 1)$ – ромб.
- 3.39. Знайдіть значення x , за якого трикутник з вершинами $A(-4; 0)$, $B(0; 4)$, $C(x; -x)$ – рівносторонній.
- 3.40. Доведіть, що трикутник ABC з вершинами в точках $A(-4; 16)$, $B(6; -4)$, $C(3; -5)$ – прямокутний. Знайдіть гострі кути трикутника з точністю до мінути.

- 3.41. Доведіть, що трикутник KLM з вершинами в точках $K(6; -1)$, $L(9; -4)$ і $M(12; 5)$ – прямокутний. Знайдіть гострі кути трикутника з точністю до мінути.



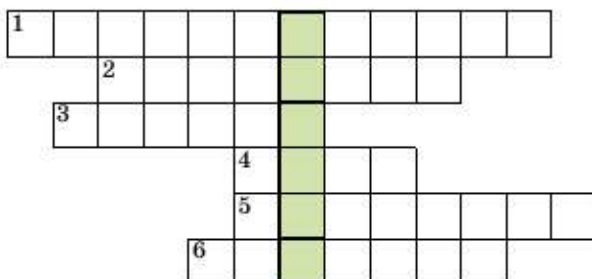
Вправи для повторення

- 3.42. Знайдіть периметр і площу прямокутника, одна зі сторін якого дорівнює 8 см, а діагональ – 17 см.
- 3.43. Основи рівнобічної трапеції з кутом при основі 60° дорівнюють 16 см і 6 см. Знайдіть діагональ трапеції.
- 3.44. Хорда 30 см завдовжки перпендикулярна до діаметра і ділить його на відрізки, різниця між якими 40 см. Знайдіть діаметр кола.
- 3.45. Одна зі сторін трикутника та висота, проведена до неї, дорівнюють по 20 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо висота, проведена до однієї з них, дорівнює 16 см.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 3.46. Видатні українці й українки. Запишіть по горизонталі прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу та інтернет) та отримаєте у виділеному стовпчику назву геометричної фігури, з якою ви ознайомитеся в наступних темах.



- Видатний український футбольний тренер, багаторічний наставник команди «Динамо» (Київ).
- Видатна українська письменниця та поетеса, лауреатка Шевченківської премії, премії Антоновичів, премії Петrarки.
- Український композитор і поет, один із засновників української естрадної музики.
- Український поет, перекладач, прозаїк, літературознавець, правозахисник.
- Українська легкоатлетка, багаторазова призерка Літніх Паралімпійських ігор 2008, 2012 та 2020 років, прототип героїні фільму «Пульс».
- Українська художниця, одна з представниць андеграунду (underground), авторка монументальних панно, унікальних мозаїк, що прикрашають публічні простори нашої країни. Активна діячка правозахисного руху 1960-х в Україні.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 3.47. Виділіть квадрат двочлена у виразі:
 1) $x^2 + 6x - 7$; 2) $x^2 - 4x$; 3) $y^2 - 8y + 13$; 4) $y^2 + 3y - 1$.

- 3.48. Точка Q – центр кола, точка A – належить цьому колу. Знайдіть радіус кола, якщо:
- 1) $Q(0; 0)$, $A(-3; 0)$; 2) $Q(-2; 3)$, $A(2; 6)$.
- 3.49. Відрізок MN – діаметр кола, $M(-4; 2)$, $N(8; 10)$. Знайдіть координати центра кола.



Життєва математика

- 3.50. Дослідна ділянка має форму прямокутника, розміри якого 12 м і 15 м. Посередині ділянки зробили грядку так, що навколо неї утворилася доріжка однакової ширини. Знайдіть ширину доріжки, якщо площа грядки становить 154 м^2 .

§ 4. Рівняння кола

1. Графік функції та рівняння з двома змінними в алгебрі



Під час вивчення алгебри ми будували графіки деяких функцій у прямокутній системі координат. Наприклад, графіком функції $y = 2x - 7$ є пряма, графіком функції $y = x^2$ – парабола, а графіком функції $y = -\frac{6}{x}$ – гіпербола. Також відомо, що графіком лінійного рівняння з двома змінними, тобто рівняння вигляду $ax + by = c$, є пряма, якщо хоча б один з коефіцієнтів a чи b відмінний від нуля.

2. Рівняння фігури

Розглянемо поняття рівняння для геометричної фігури.

Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними x та y , якщо виконуються такі дві умови:

- 1) координати будь-якої точки фігури задовольняють це рівняння;
- 2) будь-яка пара чисел $(x; y)$, що задовольняє це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

3. Рівняння кола

Знайдемо формулу, що задає коло радіуса r із центром у точці $Q(a; b)$ (мал. 4.1).

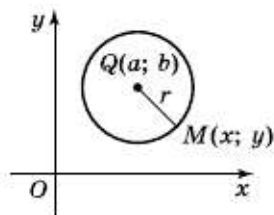
- 1) Нехай $M(x; y)$ – довільна точка кола.

Відстань QM записуємо за формулою відстані між двома точками:

$$QM = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Оскільки точка M лежить на колі, то $QM = r$, а $QM^2 = r^2$. Тому $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Отже, координати x та y кожної точки $M(x; y)$ цього кола задовольняють отримане рівняння.



Мал. 4.1

2) Розглянемо деяку точку $N(x; y)$, координати якої задовольняють рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Із цієї рівності випливає, що відстань між точками Q і N дорівнює r . Тому точка N належить колу.

Отже,

рівняння кола із центром у точці $Q(a; b)$ і радіусом r має вигляд:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Зокрема, рівняння кола радіуса r із центром у початку координат має вигляд:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Приклад 1. Знайти координати центра і радіус кола, заданого рівнянням $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Розв'язання. Маємо $(x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 5^2$. Отже, центром кола є точка $Q(-2; 3)$, а радіус кола $r = 5$.

Відповідь: $Q(-2; 3)$, $r = 5$.

Приклад 2. Довести, що рівняння $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 10 = 0$ є рівнянням кола. Знайти координати центра кола та його радіус.

Розв'язання. 1) Виділимо квадрати двочленів у лівій частині цього рівняння:

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) - 16 - 9 - 10 = 0,$$

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 35,$$

$$(x - 4)^2 + (y - (-3))^2 = (\sqrt{35})^2.$$

2) Отже, задане рівняння є рівнянням кола із центром у точці $Q(4; -3)$ і радіусом $r = \sqrt{35}$.

Відповідь: $(4; -3)$, $\sqrt{35}$.

Приклад 3. Скласти рівняння кола з діаметром AB , якщо $A(-5; 7)$, $B(3; 11)$.

Розв'язання. 1) Нехай точка Q – центр кола. Тоді Q – середина AB . Маємо:

$$x_Q = \frac{-5 + 3}{2} = -1, \quad y_Q = \frac{7 + 11}{2} = 9.$$

2) Радіус кола – це відрізок QA :

$$QA = \sqrt{(-1 - (-5))^2 + (9 - 7)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}.$$

3) Знайдемо рівняння шуканого кола:

$$(x - (-1))^2 + (y - 9)^2 = (\sqrt{20})^2,$$

$$(x + 1)^2 + (y - 9)^2 = 20.$$

Відповідь: $(x + 1)^2 + (y - 9)^2 = 20$.



Що називають рівнянням фігури на координатній площині? ○ Доведіть, що рівняння кола із центром у точці $(a; b)$ і радіусом r має вигляд $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 4.1. (Усно.) Які з рівнянь є рівняннями кола:
- 1) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$; 2) $x^2 + y^3 = 8$;
 - 3) $x^2 + y^2 = 8$; 4) $(x - 2)^2 - (y + 3)^2 = 7$;
 - 5) $x^2 + (y - 2)^2 = 25$; 6) $-x^2 + y^2 = 16$?
- 4.2. Знайдіть координати центра та радіус кола, заданого рівнянням:
- 1) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 100$; 2) $x^2 + (y - 4)^2 = 25$;
 - 3) $(x + 4)^2 + y^2 = 1$; 4) $x^2 + y^2 = 9$.
- 4.3. Знайдіть координати центра та радіус кола, заданого рівнянням:
- 1) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$; 2) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$;
 - 3) $x^2 + (y + 2)^2 = 81$; 4) $x^2 + y^2 = 49$.
- 4.4. Складіть рівняння кола із центром у точці Q і радіусом r , якщо:
- 1) $Q(1; 4)$, $r = 3$; 2) $Q(0; -2)$, $r = 5$;
 - 3) $Q(8; 0)$, $r = 1$; 4) $Q(0; 0)$, $r = 11$.
- 4.5. Складіть рівняння кола із центром у точці Q і радіусом r , якщо:
- 1) $Q(2; -3)$, $r = 4$; 2) $Q(0; 3)$, $r = 2$;
 - 3) $Q(-7; 0)$, $r = 10$; 4) $Q(0; 0)$, $r = 7$.
- 2** 4.6. Складіть рівняння кола із центром у точці Q , діаметр якого дорівнює d , якщо:
- 1) $Q(-7; 8)$, $d = 9$; 2) $Q(4; -19)$, $d = \sqrt{34}$.
- 4.7. Складіть рівняння кола із центром у точці Q , діаметр якого дорівнює d , якщо:
- 1) $Q(4; 7)$, $d = 13$; 2) $Q(-2; -11)$, $d = \sqrt{26}$.
- 4.8. Побудуйте на координатній площині коло, задане рівнянням:
- 1) $x^2 + y^2 = 16$; 2) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$;
 - 3) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$; 4) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.
- 4.9. Побудуйте на координатній площині коло, задане рівнянням:
- 1) $(x + 3)^2 + y^2 = 36$; 2) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.
- 4.10. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 = 25$. Чи належить цьому колу точка:
- 1) $A(5; 0)$; 2) $B(4; -1)$; 3) $C(-3; 4)$;
 - 4) $D(0; -5)$; 5) $M(4; -3)$; 6) $N(-1; 5)$?
- 4.11. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 = 100$. Чи належить цьому колу точка:
- 1) $A(0; -10)$; 2) $B(9; 4)$; 3) $C(6; -8)$;
 - 4) $D(-7; -2)$; 5) $T(-6; 8)$; 6) $P(10; 0)$?
- 4.12. Складіть рівняння кола із центром у точці $Q(-3; 4)$, яке проходить через точку $M(5; -2)$.
- 4.13. Складіть рівняння кола із центром у точці $Q(1; 2)$, яке проходить через точку $P(5; 5)$.
- 4.14. Складіть рівняння кола, для якого AB є діаметром, якщо $A(3; -5)$, $B(-3; 3)$.

- 4.15. Складіть рівняння кола, для якого AB є діаметром, якщо $A(-1; 8)$, $B(11; -8)$.
- 4.16. На колі $x^2 + y^2 = 169$ знайдіть точки:
- 1) з абсцисою 12;
 - 2) з ординатою -5;
 - 3) які лежать на осі абсцис;
 - 4) які лежать на осі ординат.
- 4.17. На колі $x^2 + y^2 = 289$ знайдіть точки:
- 1) з абсцисою -8;
 - 2) з ординатою 15;
 - 3) які лежать на осі абсцис;
 - 4) які лежать на осі ординат.
- 4.18. У Європейських математичних олімпіадах серед дівчат бере участь команда із 4 учасниць від кожної країни. Нехай $O(x_1; y_1)$ – центр кола, заданого рівнянням $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 5 = 0$. Знайдіть координати точки O , відтак дізнаєтеся: x_1 – кількість золотих медалей, y_1 – кількість срібних медалей, які здобула збірна України на олімпіаді 2024 р.
- 3** 4.19. Знайдіть центр і радіус кола, заданого рівнянням:
- 1) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$;
 - 2) $x^2 + 10x + y^2 - 12y = 0$.
- 4.20. Знайдіть центр і радіус кола, заданого рівнянням:
- 1) $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$;
 - 2) $x^2 - 12x + y^2 - 5 = 0$.
- 4.21. Знайдіть відстань між центрами кіл, які задано рівняннями $x^2 + y^2 - 4y = 0$ і $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 7 = 0$.
- 4.22. Знайдіть відстань між центрами кіл, які задано рівняннями $x^2 + 8x + y^2 - 16y = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x + 1 = 0$.
- 4.23. Складіть рівняння кола радіуса 10, що проходить через точку $A(5; -8)$ і центр якого лежить на осі абсцис.
- 4.24. Складіть рівняння кола радіуса 5, що проходить через точку $B(-4; 2)$ і центр якого лежить на осі ординат.
- 4.25. Коло із центром у точці $Q(2; -1)$ проходить через точку $A(4; 0)$. Чи проходить це коло через точку:
- 1) $B(0; 2)$;
 - 2) $C(1; 1)$?
- 4.26. Коло із центром у точці $Q(-3; 1)$ проходить через точку $M(-2; 5)$. Чи проходить це коло через точку:
- 1) $N(1; 2)$;
 - 2) $K(4; 4)$?
- 4.27. Коло задано рівнянням $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 16$. Не виконуючи малюнка, визначте, які з точок $A(4; -2)$, $B(-3; -5)$, $C(-2; -7)$, $D(5; 1)$ лежать:
- 1) усередині круга, обмеженого цим колом;
 - 2) на колі;
 - 3) поза кругом, обмеженим цим колом.
- 4** 4.28. Складіть рівняння кола із центром, який лежить на бісектрисі другого координатного кута і радіусом 13 та яке проходить через точку $A(1; -8)$.
- 4.29. Складіть рівняння кола, що проходить через точку $B(-2; 0)$, центр якого лежить на бісектрисі першого координатного кута, а радіус дорівнює 10.

- 4.30. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл (дотик, перетин чи немає спільних точок):
 1) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ та $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 9$;
 2) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ та $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 25$.
- 4.31. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл (дотик, перетин чи немає спільних точок):
 1) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ та $x^2 + y^2 = 16$;
 2) $(x + 1)^2 + (y - 7)^2 = 49$ та $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$.
- 4.32. Складіть рівняння кола, вписаного у трикутник ABC , якщо $A(0; 3)$, $B(4; 0)$, $C(0; 0)$.



Вправи для повторення

- 4.33. Середня лінія трапеції дорівнює 16 см. Знайдіть основи трапеції, якщо:
 1) вони відносяться як 1 : 3;
 2) одна з них на 4 см більша за другу.
- 4.34. Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону у відношенні 1 : 2, починаючи від найближчої до цього кута вершини. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 см.
- 4.35. Знайдіть площу прямокутного трикутника, у якому висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 4 см і 9 см.
- 4.36. Визначте координати кінців A і B відрізка AB , якщо точки $M(3; 3)$ і $N(2; 6)$ ділять його на три рівні частини.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 4.37. 1) Що є графіком функції вигляду $y = kx + l$?
 2) Побудуйте графіки функцій $y = 2x - 3$; $y = \frac{1}{3}x + 2$; $y = -x + 5$;
 $y = -0,5x - 1$.
- 4.38. 1) Що є графіком рівняння вигляду $ax + by = c$, де a і b одночасно не дорівнюють нулю?
 2) Побудуйте графіки рівнянь $x - y = 6$; $2x + 3y = 5$; $x = -2$; $y = 5$.
- 4.39. Чи належить точка $M(-1; 2)$:
 1) графіку функції $y = x + 1$; $y = 1 - x$; $y = -2x$; $y = -1$;
 2) графіку рівняння $x + y = 1$; $2x + y = 4$; $3x - 2y = 7$; $4y - x = 9$?



Життєва математика

- 4.40. Урожайність часнику – 120 кг з однієї сотки (100 м^2) за умови посадки 10 кг насіння на цій площі. Фермерка має ділянку 50 м завдовжки і 40 м завширшки.
 1) Скільки кг насіння потрібно заготовити фермерці?
 2) Скільки витратить фермерка на закупівлю насіння, якщо 1 кг насіння коштує 55 грн?

- 3) Скільки кг часнику збере фермерка із цієї ділянки?
- 4) Який виторг отримає фермерка, якщо продасть часник за гуртовою ціною 70 грн за кг?
- 5) Яким є дохід фермерки?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

4.41. (Задача Стенфордського університету.) Точка лежить у внутрішній області рівностороннього трикутника. Відстані від цієї точки до сторін трикутника дорівнюють a , b і c , а висота трикутника – h . Доведіть, що $a + b + c = h$.

§ 5. Рівняння прямої

Із курсу алгебри ви знаєте, що пряма є графіком лінійної функції $y = kx + l$ та графіком лінійного рівняння $ax + by = c$, якщо хоча б один з коефіцієнтів a чи b відмінний від нуля. Розглянемо рівняння прямої в геометрії.

1. Загальне рівняння прямої

Нехай a – довільна пряма на координатній площині (мал. 5.1).

1) Виберемо дві точки $A_1(a_1; b_1)$ і $A_2(a_2; b_2)$ так, щоб пряма a була серединним перпендикуляром до відрізка A_1A_2 .

Нехай точка $M(x; y)$ – довільна точка прямої a . За властивістю серединного перпендикуляра маємо:

$$MA_1 = MA_2, \text{ а отже, } MA_1^2 = MA_2^2.$$

Тому для точки $M(x; y)$ справджується рівність:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2. \quad (1)$$

Розкривши дужки та звівши подібні доданки, матимемо:

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0.$$

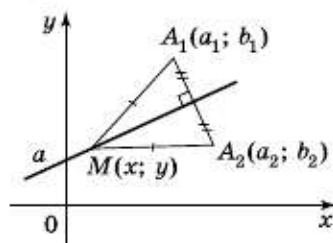
Уведемо позначення $2(a_2 - a_1) = a$, $2(b_2 - b_1) = b$, $a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = c$, отримаємо, що будь-яка точка прямої a задовольняє рівняння

$$ax + by + c = 0. \quad (2)$$

Оскільки $A_1(a_1; b_1)$ і $A_2(a_2; b_2)$ – різні точки, то хоча б один із виразів $(a_2 - a_1)$ або $(b_2 - b_1)$ відмінний від нуля. Отже, хоча б один із коефіцієнтів a або b у рівнянні (2) відмінний від нуля.

2) Розглянемо деяку точку $N(x; y)$, координати якої задовольняють рівняння (2). Виконавши алгебраїчні перетворення, які є досить громіздкими, можна переконатися, що координати точки N задовольняють також рівняння (1). Тому точка N рівновіддалена від точок A_1 і A_2 .

Отже, точка N належить прямій, яка є серединним перпендикуляром до відрізка A_1A_2 , а тому належить прямій a .



Мал. 5.1

Рівняння прямої у прямокутній системі координат має вигляд

$$ax + by + c = 0,$$

де a, b, c – числа, причому a і b одночасно не дорівнюють нулю.

Рівняння $ax + by + c = 0$ ще називають загальним рівнянням прямої.

Приклад 1. Знайти точки перетину прямої $3x - 5y - 15 = 0$ з осями координат.

Розв'язання. 1) Нехай точка $A(x; 0)$ – точка перетину прямої з віссю абсцис. Тоді $3x - 5 \cdot 0 - 15 = 0$, звідки $x = 5$. Отже, $A(5; 0)$ – точка перетину прямої з віссю абсцис.

2) Нехай точка $B(0; y)$ – точка перетину прямої з віссю ординат. Тоді $3 \cdot 0 - 5y - 15 = 0$, звідки $y = -3$. Отже, $B(0; -3)$ – точка перетину прямої з віссю ординат.

Відповідь: $A(5; 0)$, $B(0; -3)$.

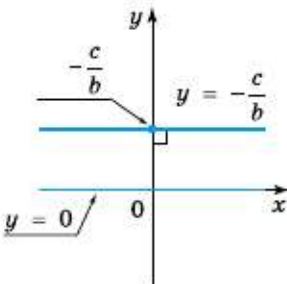
2. Розташування прямої відносно системи координат

Розглянемо розташування прямої відносно системи координат у деяких окремих випадках.

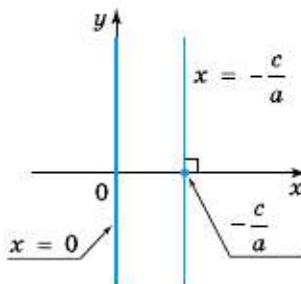
1) $a = 0, b \neq 0$. Маємо $by + c = 0, y = -\frac{c}{b}$. Усі точки прямої мають одну й ту саму ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$. Тому пряма $y = -\frac{c}{b}$ паралельна осі x (мал. 5.2).

Зокрема, якщо $c = 0$, то пряма $y = 0$ збігається з віссю x .

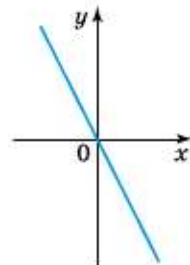
2) $b = 0, a \neq 0$. Маємо $ax + c = 0, x = -\frac{c}{a}$. Точки прямої мають одну й ту саму абсцису $\left(-\frac{c}{a}\right)$. Тому пряма $x = -\frac{c}{a}$ паралельна осі y (мал. 5.3).



Мал. 5.2



Мал. 5.3

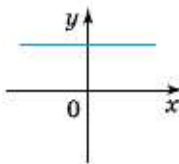
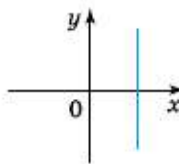
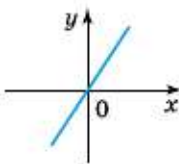


Мал. 5.4

Зокрема, якщо $c = 0$, то пряма $x = 0$ збігається з віссю y .

3) $c = 0$. Координати точки $(0; 0)$ задовольняють рівняння прямої. Тому пряма проходить через початок координат (мал. 5.4).

Систематизуємо отримані результати в таблицю.

Часткові випадки розташування прямої $ax + by + c = 0$ в декартовій системі координат		
$a = 0, b \neq 0$	$a \neq 0, b = 0$	$a \neq 0, b \neq 0, c = 0$
$y = -\frac{c}{b}$	$x = -\frac{c}{a}$	$y = -\frac{a}{b}x$
		

3. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

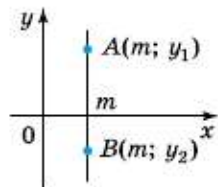
Складемо рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Розглянемо випадки.

1) $x_1 = x_2 = m$. Усі точки прямої мають одну й ту саму абсцису, що дорівнює m (мал. 5.5). Рівняння прямої має вигляд:

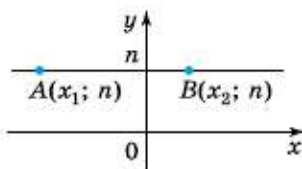
$$x = m.$$

2) $y_1 = y_2 = n$. Усі точки прямої мають одну й ту саму ординату, що дорівнює n (мал. 5.6). Рівняння прямої має вигляд:

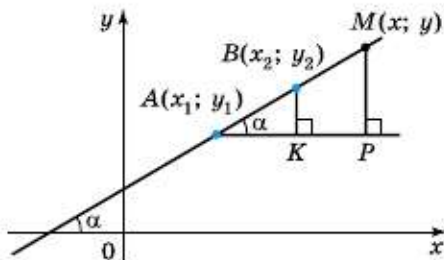
$$y = n.$$



Мал. 5.5



Мал. 5.6



Мал. 5.7

3) $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$. Нехай $M(x; y)$ – деяка точка прямої. Через точку A проведемо пряму, паралельну осі x , а через точки M і B – прямі, паралельні осі y . Тоді $BK \perp AP$ і $MP \perp AP$ (мал. 5.7). Позначимо $\angle BAK = \alpha$.

У трикутнику BAK : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BK}{AK}$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

У трикутнику MAP : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MP}{AP}$, тобто $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_1}{x - x_1}$.

Отже, маємо: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$, тобто $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. (3)

Після застосування основної властивості пропорції та спрощення рівняння (3) зводиться до вигляду $ax + by + c = 0$.

Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, має вигляд:

- $x = m$, якщо $x_1 = x_2 = m$;
- $y = n$, якщо $y_1 = y_2 = n$;
- $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, якщо $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $A(2; -3)$ і $B(4; -5)$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (3), маємо:

$$\frac{x - 2}{4 - 2} = \frac{y - (-3)}{-5 - (-3)}; \text{ тобто } \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 3}{-2},$$

звідки $-1(x - 2) = y + 3$, остаточно отримаємо:

$$x + y + 1 = 0.$$

Відповідь: $x + y + 1 = 0$.

Відповідь легко перевірити, підставивши в отримане рівняння координати кожної із заданих точок.

4. Кутовий коефіцієнт прямої

Якщо в загальному рівнянні прямої $ax + by + c = 0$ коефіцієнт b не дорівнює нулю, то, виразивши із цього рівняння y , матимемо:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = l$, отримаємо:

$$y = kx + l.$$

Отже, доходимо висновку, що пряму можна задавати і рівнянням $ax + by + c = 0$, і рівнянням $y = kx + l$ (якщо $b \neq 0$), оскільки кожне з них є рівнянням прямої.

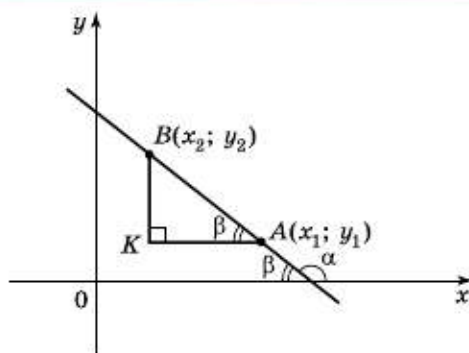
З'ясуємо геометричний зміст коефіцієнта k у рівнянні прямої. Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, де $x_1 < x_2$ — дві точки прямої. Оскільки координати точок задовольняють рівняння $y = kx + l$, то $y_1 = kx_1 + l$ і $y_2 = kx_2 + l$. Віднімемо почленно від другого рівняння перше, матимемо:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

$$\text{звідки } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Але вище ми вже довели, що $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha$ (с. 42, мал. 5.7). Оскільки пряма AP паралельна осі x , то α — це кут, який утворює пряма AB з додатним напрямком осі x .

Отже, якщо кут α — гострий, то $k = \operatorname{tg} \alpha$.



Мал. 5.8

Розглянемо випадок, коли пряма утворює з додатним напрямком осі x тупий кут (мал. 5.8). Маємо:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BK}{KA} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Але $\alpha + \beta = 180^\circ$, тоді $\beta = 180^\circ - \alpha$ і $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

За відомою формулою $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$. Тоді $-\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$;

з огляду на те, що $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, знову отримаємо, що $k = \operatorname{tg} \alpha$, де кут α – тупий.

Отже, приходимо до висновку про геометричний зміст коефіцієнта k у рівнянні прямої.

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + l$ дорівнює тангенсу кута, який утворює ця пряма з додатним напрямком осі x .

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + l$ називають *кутовим коефіцієнтом прямої*. Причому $k > 0$, якщо пряма утворює гострий кут з додатним напрямком осі x , $k < 0$, якщо цей кут – тупий, і $k = 0$, якщо пряма паралельна осі x .



Приклад 3. Довести, що рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k , яка проходить через точку $A(x_0; y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Розв'язання. Запишемо загальний вигляд прямої з кутовим коефіцієнтом k : $y = kx + l$. Знайдемо коефіцієнт l .

1) Оскільки пряма проходить через точку $A(x_0; y_0)$, то координати цієї точки задовольняють рівняння прямої, тобто:

$$y_0 = kx_0 + l, \text{ звідки } l = y_0 - kx_0.$$

2) Підставимо значення l в рівняння $y = kx + l$, матимемо:

$$y = kx + (y_0 - kx_0), \text{ тобто } y - y_0 = k(x - x_0). \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(-3; 5)$ і утворює з додатним напрямком осі абсцис кут 135° .

Розв'язання. 1) Оскільки $k = \operatorname{tg} \alpha$, то $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$.

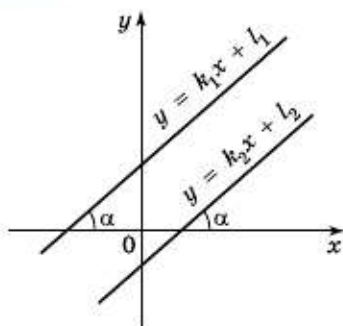
2) Узявши до уваги, що $y - y_0 = k(x - x_0)$, маємо: $y - 5 = -1(x - (-3))$, тобто $y - 5 = -x - 3$, отже, маємо рівняння: $x + y - 2 = 0$.

Відповідь: $x + y - 2 = 0$.

5. Умова паралельності прямих

Якщо прямі $y = k_1x + l_1$ та $y = k_2x + l_2$ паралельні, то кути, які вони утворюють з додатним напрямком осі x , між собою рівні (мал. 5.9). Тоді й тангенси цих кутів також рівні, а тому $k_1 = k_2$.

І навпаки, якщо $k_1 = k_2$, то тангенси кутів, які утворюють прямі з додатним напрямком осі x , рівні, а тому прямі паралельні.



Мал. 5.9

Прямі $y = k_1x + l_1$ та $y = k_2x + l_2$ паралельні тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$, $l_1 \neq l_2$.

Наприклад, паралельними є прямі $y = 0,1x + 5$ і $y = \frac{1}{10}x - 7$, у яких

$k = 0,1$ і $k = \frac{1}{10}$ відповідно, тобто $k_1 = k_2$.

6. Координати точки перетину двох прямих

Нехай дано рівняння двох прямих у загальному вигляді:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ та } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Знайдемо координати $(x; y)$ точки їхнього перетину. Оскільки ця точка належить кожній з прямих, то її координати задовольняють кожне з двох рівнянь. Тому координати точки перетину є розв'язком системи рівнянь, якими задано ці прямі.

Приклад 5. Знайти точку перетину прямих

$$2x - y - 5 = 0 \text{ і } 4x + 3y - 15 = 0.$$

Розв'язання. Розв'язавши систему $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0, \\ 4x + 3y - 15 = 0, \end{cases}$ отримаємо $x = 3$,

$y = 1$. Отже, $(3; 1)$ – точка перетину прямих.

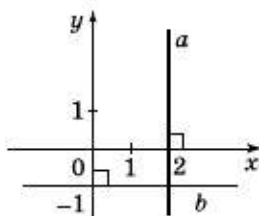
Відповідь: $(3; 1)$.

- ?** Покажіть, як скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. **?** Як розташована пряма $ax + by + c = 0$ у координатній площині, якщо $a = 0$? $b = 0$? $c = 0$? **?** Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$? **?** Що таке кутовий коефіцієнт прямої та який його геометричний зміст? **?** За якої умови прямі $y = k_1x + l_1$ та $y = k_2x + l_2$ будуть паралельними? **?** Як знайти координати точки перетину прямих, які задано в загальному вигляді?

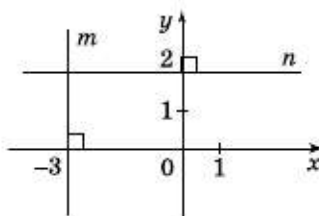


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 5.1. (Усно.) Яке з рівнянь є рівнянням прямої:
 1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $2x - 3y + 7 = 0$; 3) $x^3 - 2y - 13 = 0$;
 4) $x - 2y = 0$; 5) $2x - 9 = 0$; 6) $x + y^2 = 0$?
- 5.2. Яке з рівнянь є рівнянням прямої:
 1) $2x - 3y = 0$; 2) $4x^2 - 9y^2 = 5$; 3) $2x - y^4 - 15 = 0$;
 4) $3x + 7y - 10 = 0$; 5) $3y - 12 = 0$; 6) $2x^2 - y = 0$?
- 5.3. Чи належить прямій $x + y - 7 = 0$ точка:
 1) $A(3; 4)$; 2) $B(5; 1)$;
 3) $C(2; 5)$; 4) $D(0; 8)$?
- 5.4. Чи належить прямій $x - y = 0$ точка:
 1) $M(5; 5)$; 2) $N(-4; 4)$; 3) $L(0; 0)$; 4) $K(-2; -2)$?
- 5.5. Яка з прямих проходить через початок координат:
 1) $2x - 3y = 0$; 2) $3x - 2y - 5 = 0$;
 3) $3x + 2y = 0$; 4) $2x + 3y - 7 = 0$?
- 5.6. (Усно.) Чи перетинаються прямі:
 1) $y = 2x - 7$ і $y = 2x + 3$; 2) $y = 3x + 7$ і $y = 4x - 9$?
- 5.7. Чи паралельні прямі:
 1) $y = 3x - 7$ і $y = -2x + 9$; 2) $y = -4x + 3$ і $y = -4x$?
- 2** 5.8. Запишіть рівняння прямих a і b (мал. 5.10).
- 5.9. Запишіть рівняння прямих m і n (мал. 5.11).



Мал. 5.10



Мал. 5.11

- 5.10. Знайдіть координати точок перетину прямої $2x - 5y - 10 = 0$ з осями координат.
- 5.11. Знайдіть координати точок перетину прямої $3x - 4y + 12 = 0$ з осями координат.
- 5.12. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2; 3)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) осі ординат.
- 5.13. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $B(4; -1)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) осі ординат.
- 5.14. Які з точок належать прямій $y = 7$:
 1) $A(7; 1)$; 2) $B(1; 7)$; 3) $C(2; 5)$; 4) $D(-10; 7)$?
- 5.15. Які з точок належать прямій $x = 3$:
 1) $K(1; 3)$; 2) $L(3; 1)$; 3) $M(1; 2)$; 4) $N(3; -8)$?

- 5.16. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої MN , якщо:
 1) $M(-1; 2)$, $N(0; 9)$; 2) $M(1; 4)$, $N(-1; 6)$.
- 5.17. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої AB , якщо:
 1) $A(3; -1)$, $B(5; -7)$; 2) $A(2; 9)$, $B(3; 4)$.
- 5.18. Запишіть рівняння прямої у вигляді $y = kx + l$ та знайдіть її кутовий коефіцієнт:
 1) $2x - y - 5 = 0$; 2) $4x + 3y + 7 = 0$.
- 5.19. Запишіть рівняння прямої у вигляді $y = kx + l$ та знайдіть її кутовий коефіцієнт:
 1) $3x + y + 7 = 0$;
 2) $5x - 2y - 9 = 0$.
- 3** 5.20. Складіть рівняння прямої, що проходить через точки:
 1) $A(2; 7)$ і $B(-3; 7)$; 2) $M(-2; 1)$ і $N(-2; -5)$;
 3) $C(3; 8)$ і $D(1; 6)$; 4) $K(-2; 5)$ і $L(3; -1)$.
- 5.21. Складіть рівняння прямої, що проходить через точки:
 1) $A(4; 7)$ і $B(4; 0)$; 2) $C(5; -2)$ і $D(7; -2)$;
 3) $M(-1; 2)$ і $N(-3; 4)$; 4) $K(-1; 5)$ і $L(7; 1)$.
- 5.22. Складіть рівняння прямої, яка містить медіану AM трикутника ABC , якщо $A(0; -2)$, $B(-7; 5)$, $C(9; 11)$.
- 5.23. Складіть рівняння прямої, яка містить медіану CN трикутника ABC , якщо $A(2; -3)$, $B(8; -7)$, $C(4; 0)$.
- 5.24. Знайдіть точку перетину прямих $2x - 3y = 0$ і $3x + 4y + 17 = 0$.
- 5.25. Знайдіть точку перетину прямих $5x - 4y = 0$ і $2x + 3y + 23 = 0$.
- 5.26. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(2; -1)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює:
 1) 3; 2) -2; 3) 0; 4) $\frac{1}{7}$.
- 5.27. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3; 2)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює:
 1) 4; 2) -1; 3) 0; 4) $\frac{1}{5}$.
- 5.28. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $N(-4; -1)$ і утворює з додатним напрямком осі абсцис кут: 1) 135° ; 2) 60° .
- 5.29. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $B(2; 5)$ і утворює з додатним напрямком осі абсцис кут: 1) 45° ; 2) 120° .
- 5.30. Серед даних прямих укажіть пари паралельних:
 1) $2x - 3y + 7 = 0$; 2) $3x - y + 9 = 0$;
 3) $x + 2y - 19 = 0$; 4) $6x - 2y + 5 = 0$;
 5) $4x - 6y + 9 = 0$; 6) $4x + 8y - 1 = 0$.
- 5.31. Серед даних прямих укажіть пари паралельних:
 1) $3x + y + 7 = 0$; 2) $2x - y + 7 = 0$;
 3) $x - 5y - 1 = 0$; 4) $6x - 3y - 1 = 0$;
 5) $9x + 3y - 11 = 0$; 6) $2x - 10y - 3 = 0$.

- 4** 5.32. За якого значення a точки $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$ і $C(a; 4)$ лежать на одній прямій?
- 5.33. За якого значення b точки $M(4; -1)$, $K(5; 2)$ і $N(3; b)$ лежать на одній прямій?
- 5.34. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1; 2)$ паралельно прямій $4x - 2y + 7 = 0$.
- 5.35. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $N(2; -3)$ паралельно прямій $6x + 2y - 5 = 0$.
-  5.36. Доведіть, що прямі $y = k_1x + l_1$ та $y = k_2x + l_2$ взаємно перпендикулярні тоді й тільки тоді, якщо $k_1k_2 = -1$ (умова перпендикулярності прямих).
- 5.37. Використавши результат задачі № 5.36, складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 3)$ перпендикулярно до прямої $y = \frac{1}{2}x - 7$.
- 5.38. Використавши результат задачі № 5.36, складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(2; -1)$ перпендикулярно до прямої $y = -\frac{1}{3}x + 8$.



Вправи для повторення

- 5.39. Обчисліть:
 1) $\lg^2 30^\circ + \cos 60^\circ$; 2) $\sin 30^\circ + \cos^2 45^\circ$.
- 5.40. Чи є чотирикутник з вершинами в точках $A(-3; 4)$, $B(5; 2)$, $C(7; -4)$, $D(-1; -2)$ паралелограмом?
- 5.41. Складіть рівняння кола радіуса 13, що проходить через точку $A(-7; 5)$, якщо його центр належить осі абсцис.
- 5.42. Чи дотикаються кола $(x - 2)^2 + y^2 = 16$ і $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 1$?



Життєва математика

- 5.43. Жінка-агроном, не вимірюючи кутів чотирикутної земельної ділянки, може з'ясувати, що вона квадратна. Поясніть, як вона це робить, якщо користується досить довгою мотузкою.



Цікаві задачі – поміркуй окремо

- 5.44. (Київська міська математична олімпіада, 1990 р.). Бісектриси AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці O . Доведіть, що коли кут C дорівнює 60° , то $OA_1 = OB_1$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1 (§§ 1–5)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. Точка $M(-1; -2)$ лежить у ... координатній чверті:
 А. Першій Б. другій В. третій Г. четвертій
2. $\sin 150^\circ + \cos 60^\circ = \dots$
 А. 2 Б. 1 В. 0 Г. -1
3. Укажіть рівняння, що є рівнянням прямої.
 А. $x^2 + y^2 = 9$ Б. $x - y^3 = 5$
 В. $x + xy + y = 0$ Г. $2x - 3y + 9 = 0$
- 2** 4. Точки $A(-2; 6)$ і $B(4; 11)$ – кінці відрізка, N – його середина. Укажіть координати точки N .
 А. (1; 8,5) Б. (2; 17) В. (8,5; 1) Г. (-3; -2,5).
5. Знайдіть довжину відрізка KL , якщо $K(-1; 2)$, $L(3; -1)$.
 А. 3 Б. 4 В. 5 Г. 6
6. Знайдіть координати точки перетину прямої $4x - 5y - 20 = 0$ з віссю ординат.
 А. (0; 4) Б. (0; -4) В. (5; 0) Г. (0; -5)
- 3** 7. Знайдіть відстань від точки $A(-3; 7)$ до осі абсцис.
 А. 3 Б. 4 В. 7 Г. $\sqrt{58}$
8. $A(-2; 3)$, $B(4; 7)$, $C(-6; -3)$ – вершини паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершини D .
 А. (-4; 0) Б. (-8; 0) В. (-12; -3) Г. (-12; -7)
9. Визначте радіус кола, якщо воно задано рівнянням

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 7 = 0.$$

 А. 7 Б. $2\sqrt{5}$ В. 20 Г. $\sqrt{5}$
- 4** 10. Знайдіть значення виразу $7 - \cos 110^\circ - \cos 70^\circ$.
 А. 6 Б. 7
 В. 8 Г. 9
11. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл, заданих рівняннями

$$(x + 2)^2 + y^2 = 16 \text{ та } (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

 А. Перетинаються
 Б. Мають внутрішній дотик
 В. Мають зовнішній дотик
 Г. Не перетинаються
12. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3; -1)$ паралельно прямій $4x - 2y + 7 = 0$.
 А. $2x + y - 5 = 0$ Б. $2x - y + 5 = 0$
 В. $2x - y - 7 = 0$ Г. $2x - y + 7 = 0$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

- 3** 13. На площині задано вершини трикутника ABC – точки $A(-2; 3)$, $B(6; -3)$, $C(0; -15)$.
Установіть відповідність між відрізками (1–3) та їхніми довжинами (А–Г).

Відрізок

Довжина

1. Сторона трикутника AB
2. Медіана AM
3. Середня лінія MN , де N – середина AB

- А. 5
- Б. 10
- В. 13
- Г. $\sqrt{82}$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–5

- 1** 1. У якій координатній чверті лежить точка:
1) $M(-2; 7)$; 2) $K(4; -1)$?
2. Обчисліть:
1) $\sin 30^\circ + \cos 120^\circ$; 2) $\sqrt{3} \operatorname{tg} 60^\circ$.
3. Яке з рівнянь є рівнянням прямої, а яке – рівнянням кола:
1) $(x - 2)^2 + y^2 = 16$; 2) $4x - 2y - 17 = 0$?
- 2** 4. Точки $A(-3; 4)$ і $B(1; 7)$ – кінці відрізка, M – його середина.
1) Знайдіть довжину відрізка AB .
2) Чи належить точка M осі ординат?
5. Знайдіть координати точок перетину прямої $3x - 4y - 24 = 0$ з осями координат.
6. Побудуйте на координатній площині коло, задане рівнянням $(x + 3)^2 + y^2 = 16$.
- 3** 7. Складіть рівняння кола радіуса 10, яке проходить через точку $A(8; -1)$ і центр якого лежить на осі ординат.
8. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2; 3)$, $B(4; -3)$, $C(2; 7)$, $D(-4; 13)$ є паралелограмом.
- 4** 9. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 5)$ і паралельна прямій $6x - 3y + 9 = 0$.

Додаткові завдання

- 4** 10. Знайдіть значення виразу:
1) $\sin^2 23^\circ + \sin^2 67^\circ$; 2) $4 - \cos 118^\circ - \cos 62^\circ$.
11. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл:
 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ та $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 1

До § 1

- 1** 1. Дано точки $A(0; -2)$, $B(-3; 4)$, $C(4; 5)$, $D(-2; 9)$, $E(5; 0)$, $F(0; 5)$, $G(2; -3)$, $H(-2; -2)$, $K(-5; 0)$, $L(4; -1)$, $M(1; 3)$, $N(-5; 1)$. Випишіть із них ті, які належать:

- 1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) I чверті;
4) II чверті; 5) III чверті; 6) IV чверті.

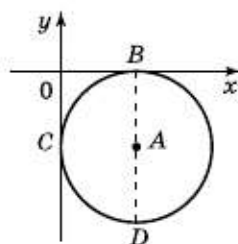
- 2** 2. На прямій, перпендикулярній до осі y , узято дві точки. Одна з них має ординату $y = 5$. Яка ордината другої точки?

3. Через точку $P(-3; -2)$ проведено прямі, паралельні осям координат. Знайдіть координати точок перетину цих прямих з осями координат.

- 3** 4. Які особливості взаємного розташування двох точок, якщо у них:

- 1) абсциси однакові, а ординати – різні;
2) ординати однакові, а абсциси – різні?

5. На малюнку 1 радіус кола дорівнює R . Знайдіть координати точок A , B , C і D .



Мал. 1

6. Чи правильне твердження:

- 1) якщо точки M і N рівновіддалені від осі абсцис, то вони мають рівні між собою ординати;
2) якщо точки M і N мають рівні між собою ординати, то вони однаково віддалені від осі абсцис.

7. Дано точку $A(-3; y)$.

- 1) Чи може точка A належати осі ординат?
2) За якої умови вона може належати осі абсцис?
3) У яких координатних кутах може лежати точка A залежно від знака y ?

8. Дано точки $A(-2; 5)$ і $B(4; 7)$. Чи перетинає відрізок AB :

- 1) вісь абсцис; 2) вісь ординат?

Відповідь обґрунтуйте.

- 4** 9. Знайдіть геометричне місце точок координатної площини, для яких:

- 1) $(|x| - 2)(|y| + 1) = 0$; 2) $(|x| - 5)(|y| - 1) = 0$.

До § 2

- 1** 10. Обчисліть:

- 1) $\sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ$; 2) $\cos 180^\circ + \sin 90^\circ$;
3) $\cos 120^\circ + \sin 30^\circ$; 4) $\cos 135^\circ \cdot \sin 135^\circ$.

11. Чи правильно, що:

- 1) $\operatorname{tg} 45^\circ = -\operatorname{tg} 135^\circ$; 2) $\sin 30^\circ = -\sin 150^\circ$;
3) $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$; 4) $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$?

2 12. Порівняйте:

1) $\sin 15^\circ$ і $\sin 43^\circ$;

2) $\cos 18^\circ$ і $\cos 37^\circ$;

3) $\sin 91^\circ$ і $\sin 120^\circ$;

4) $\cos 100^\circ$ і $\cos 170^\circ$.

13. Обчисліть:

1) $\sin^2 17^\circ + \cos^2 17^\circ$;

2) $9 - \cos^2 27^\circ - \sin^2 27^\circ$.

14. Знайдіть знак виразу:

1) $\sin 18^\circ$;

2) $\sin 125^\circ$;

3) $\cos 137^\circ$;

4) $\cos 81^\circ$;

5) $\operatorname{tg} 78^\circ$;

6) $\operatorname{tg} 92^\circ$.

15. Знайдіть $\cos \alpha$, якщо:

1) $\sin \alpha = 0,8$ і $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

2) $\sin \alpha = \frac{7}{25}$ і $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

3 16. Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$;

2) $1 - \cos^2 (90^\circ - \alpha)$.

17. Визначте знак різниці:

1) $\cos 127^\circ - \cos 118^\circ$;

2) $\sin 152^\circ - \sin 148^\circ$.

18. Відомо, що $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ і $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$. Чи можна стверджувати, що $\alpha = \beta$, якщо:

1) $\cos \alpha = \cos \beta$;

2) $\sin \alpha = \sin \beta$;

3) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$?

19. $ABCD$ – паралелограм. Доведіть, що $\sin A = \sin B$.

4 20. Знайдіть суму квадратів синусів гострих кутів прямокутного трикутника.

21. Доведіть тригонометричну тотожність:

$$\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \right)^2 - \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = \frac{2}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$



22. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого синус кута при вершині дорівнює 0,4.

До § 3

1 23. Знайдіть координати середини відрізка KL , якщо:

1) $K(0; 4)$, $L(6; -2)$;

2) $K(-3; 5)$, $L(3; -5)$.

2 24. Знайдіть довжину відрізка AB , якщо:

1) $A(-1; 12)$, $B(6; -12)$;

2) $A(2; -7)$, $B(-2; -11)$.

25. Точки $C_1(2; -3)$ і $B_1(3; -1)$ – відповідно середини сторін AC і AB трикутника ABC . Вершина A має координати $(3; -5)$. Знайдіть координати вершин B і C .

3 26. Визначте вид трикутника ABC за сторонами (рівнобедрений, рівносторонній чи різносторонній), якщо:

1) $A(1; 4)$, $B(2; 8)$, $C(-3; 5)$;

2) $A(-2; 0)$, $B(4; 0)$, $C(1; 3\sqrt{3})$;

3) $A(2; 3)$, $B(-3; 1)$, $C(4; 5)$.

27. $ABCD$ – паралелограм, $O(4; 7)$ – точка перетину його діагоналей. Знайдіть координати вершин C і D , якщо відомо координати вершин $A(-2; 5)$ і $B(3; -4)$.

28. Знайдіть довжини середніх ліній трикутника ABC , якщо: $A(2; -3)$, $B(6; -1)$, $C(5; -7)$.

29. Знайдіть довжини медіан трикутника ABC , якщо: $A(0; 2)$, $B(6; 0)$, $C(-4; -6)$.

30. На осях координат знайдіть точки, які розміщені на відстані 5 від точки $A(-3; 4)$.

31. Знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(-5; 2)$ і $B(1; 4)$, якщо її абсциса й ордината між собою рівні.

4 32. Дано точки $A(-2; 5)$ і $B(6; 13)$. Знайдіть координати точки F , яка ділить відрізок AB у відношенні $7:1$, починаючи від точки A .

33. Точки $M(-2; 5)$, $N(4; -3)$, $P(0; 1)$ – середини сторін трикутника. Знайдіть координати його вершин.

34. Чи лежать точки A , B і C на одній прямій, якщо:

1) $A(3; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(-6; -5)$; 2) $A(0; 3)$, $B(4; 8)$, $C(1; 2)$?

Якщо відповідь ствердна, то визначте, яка з точок лежить між двома іншими.

35. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(4; -4)$, $C(8; -1)$ і $D(5; 3)$ є квадратом.

36. Знайдіть точку перетину серединного перпендикуляра до відрізка AB з віссю ординат, якщо $A(-4; 2)$, $B(0; -2)$.

37. Доведіть, що всі кути трикутника з вершинами в точках $A(0; 4)$, $B(2; 3)$ і $C(1; 5)$ гострі.

38. Обчисліть кути трикутника з вершинами в точках $A(4; -1)$, $B(-1; 0)$, $C(2; 2)$.

До § 4

1 39. Які з рівнянь є рівняннями кола? Знайдіть для цих кіл координати центра та радіус:

1) $x^3 + y = 4$; 2) $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 9$;

3) $x^2 + y^2 = 1$; 4) $x^2 - y^2 = 1$;

5) $x^2 + (y - 9)^2 = 25$; 6) $(x + 7)^2 + y^2 = 16$.

2 40. Складіть рівняння кола із центром у точці Q , діаметр якого дорівнює d :

1) $Q(0; -17)$, $d = 0,6$; 2) $Q(-4; 5)$, $d = 4\sqrt{5}$.

41. Коло задано рівнянням $(x - 1)^2 + y^2 = 16$. Чи належить цьому колу точка:

1) $A(5; 0)$; 2) $B(-2; 3)$; 3) $C(1; 4)$;

4) $D(0; -3)$; 5) $M(-3; 0)$; 6) $N(1; -4)$?

42. Точка Q – центр кола, а QA – його радіус. Складіть рівняння кола, якщо $Q(0; 4)$, $A(5; 16)$.

43. Складіть рівняння кола із центром у точці $(-3; -4)$, яке проходить через початок координат.

44. Складіть рівняння кола із центром у початку координат, яке проходить через точку $(-3; -4)$.

3 45. Які з точок належать колу із центром $Q(2; -1)$, радіус якого дорівнює 5:

- 1) $A(3; -8)$; 2) $B(5; -5)$; 3) $C(0; 4)$; 4) $D(6; -4)$?

46. У яких точках коло $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$ перетинає:

- 1) вісь абсцис; 2) вісь ординат?

47. Складіть рівняння кола із центром $A(-4; 5)$, яке дотикається:

- 1) до осі абсцис; 2) до осі ординат.

48. Коло дотикається до координатних осей. Складіть рівняння цього кола, якщо до осі абсцис воно дотикається в точці $A(2; 0)$.

4 49. Знайдіть координати центра кола, радіус якого дорівнює 3 і яке дотикається до осей координат. Скільки розв'язків має задача?

50. Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і проходить через точку $A(2; 1)$.

51. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(0; -3)$ і $B(9; 0)$, якщо центр кола лежить на осі абсцис.

52. На осі абсцис знайдіть точки, з яких відрізок AB видно під прямим кутом, якщо $A(6; 0)$, $B(14; 6)$.



53. Знайдіть геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до трьох точок $A(0; 0)$, $B(1; 1)$ і $C(2; 2)$ дорівнює 7.

54. З'ясуйте взаємне розташування двох кіл (дотик, перетин чи немає спільних точок):

1) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ та $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ та $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$.

До § 5

1 55. Чи належить прямій $2x + y = 0$ точка:

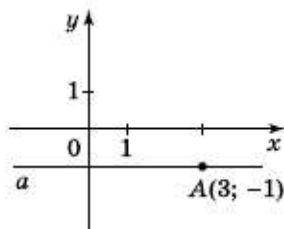
- 1) $A(2; 1)$; 2) $B(-1; 2)$; 3) $C(0; 0)$; 4) $D(1; -3)$?

56. Назвіть кутовий коефіцієнт прямої:

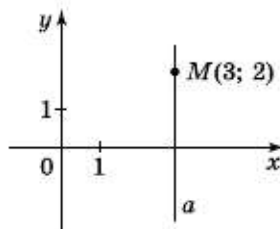
1) $y = 2x - 7$; 2) $y = -x + 3$;

3) $y = \frac{1}{2}x - 17$; 4) $y = -0,01x$.

2 57. Запишіть рівняння прямої a (мал. 2 і 3).



Мал. 2



Мал. 3

58. Знайдіть кутовий коефіцієнт прямої, якщо вона утворює з додатним напрямком осі абсцис кут: 1) 45° ; 2) 120° .

59. Наведіть приклад рівняння прямої, яка:

- 1) паралельна прямій $y = 2x - 7$;
- 2) перетинає пряму $y = -3x + 5$;
- 3) паралельна прямій $2x - y - 9 = 0$;
- 4) перетинає пряму $3x + 2y - 15 = 0$.

60. Запишіть рівняння прямих, кожна з яких паралельна осі ординат і відтинає на осі абсцис відрізок, довжина якого дорівнює 2.

3 61. Складіть рівняння прямих, що містять сторони трикутника, вершинами якого є точки $A(2; -3)$, $B(2; -5)$, $C(3; 7)$.

62. Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку:

- 1) $A(0; 7)$; 2) $B(-2; 0)$; 3) $C(-3; 4)$; 4) $D(-1; -8)$.

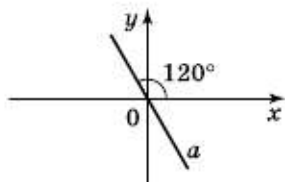
63. Визначте коефіцієнти a і b у рівнянні прямої $ax + by - 1 = 0$, яка проходить через точки $(3; 2)$ і $(2; 3)$.

64. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $C(2; -1)$ і:

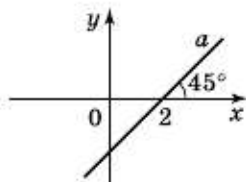
- 1) має кутовий коефіцієнт $-\frac{1}{3}$;
- 2) утворює з додатним напрямком осі абсцис кут 30° .

65. Чи проходить пряма $x - 2y = 0$ через точку перетину прямих $2x + y - 5 = 0$ та $x - y - 1 = 0$?

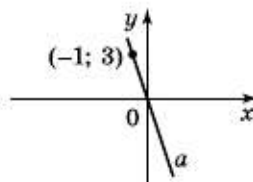
66. Складіть рівняння прямої a (мал. 4–6).



Мал. 4



Мал. 5



Мал. 6

67. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2; 3)$ і паралельна прямій $y = 3x + 7$.

4 68. Знайдіть периметр трикутника, обмеженого віссю абсцис і прямими $4x - 3y = 0$ і $8x - 15y + 72 = 0$.

69. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-1; 2)$ паралельно прямій MN , де $M(1; 4)$, $N(3; 6)$.

70. Складіть рівняння прямих, що містять сторони ромба, якщо його діагоналі завдовжки 8 і 4 лежать на осях координат, причому більша діагональ лежить на осі абсцис.

71. Складіть рівняння дотичних до кола радіуса 5 із центром у точці $Q(-2; 1)$, які паралельні осі абсцис.

72. Три вершини прямокутника містяться в точках $(0; 4)$, $(8; 4)$ і $(8; -2)$. У яких точках коло $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ перетинає сторони прямокутника?

73. Використовуючи результат задачі № 5.36 (с. 48), складіть рівняння прямої, що проходить через точку $B(1; -1)$ перпендикулярно до прямої:

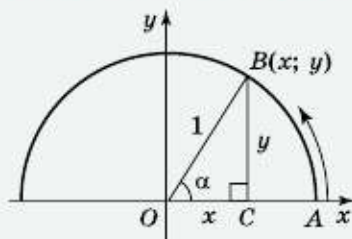
1) $2x - y + 7 = 0$; 2) MN , де $M(0; 2)$, $N(-2; 4)$.

74. Складіть рівняння прямої, що містить висоту AH трикутника з вершинами в точках $A(0; 3)$, $B(1; -3)$, $C(4; -9)$.



Головне в темі 1

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС КУТІВ ВІД 0° ДО 180° . ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ



Якщо $B(x; y)$ – точка одиничного півкола, що відповідає куту α (див. мал.), то

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Координати середини відрізка

Координати точки M – середини відрізка AB , де $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, знаходимо за формулами:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Відстань між двома точками

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ можна знайти за формулою

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

РІВНЯННЯ КОЛА

Рівняння кола із центром у точці $Q(a; b)$ і радіусом r має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

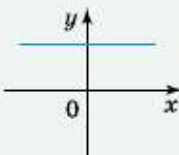
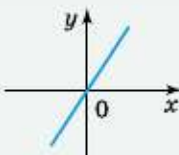
РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Рівняння прямої у прямокутній системі координат має вигляд

$$ax + by + c = 0,$$

де a, b, c – числа, причому a і b одночасно не дорівнюють нулю.

**Часткові випадки розташування прямої $ax + by + c = 0$
в декартовій системі координат**

$a = 0, b \neq 0$	$a \neq 0, b = 0$	$a \neq 0, b \neq 0, c = 0$
$y = -\frac{c}{b}$	$x = -\frac{c}{a}$	$y = -\frac{a}{b}x$
		

Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, має вигляд:

- $x = m$, якщо $x_1 = x_2 = m$;
- $y = n$, якщо $y_1 = y_2 = n$;
- $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, якщо $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$.

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + l$ дорівнює тангенсу кута, який утворює ця пряма з додатним напрямком осі x .

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k , яка проходить через точку $A(x_0; y_0)$, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Умова паралельності прямих

Прямі $y = k_1x + l_1$ та $y = k_2x + l_2$ паралельні тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$.

ПОВТОРЮЄМО АЛГЕБРУ ЗА 8 КЛАС

Раціональні вирази

1 1. Скоротіть дроб:

1) $\frac{7x}{7y}$; 2) $\frac{2x}{10m}$; 3) $\frac{mc}{xm}$; 4) $\frac{p^2}{pa}$; 5) $\frac{4ab}{7bc}$; 6) $\frac{6ay}{6by}$.

2. Скоротіть дроб:

1) $\frac{9a}{9b}$; 2) $\frac{5t}{15a}$; 3) $\frac{ad}{dm}$; 4) $\frac{c^2}{5c}$; 5) $\frac{7xy}{9yt}$; 6) $\frac{4xp}{4yp}$.

3. Виконайте дію:

1) $\frac{x+y}{5} - \frac{x}{5}$; 2) $\frac{4m^2}{5} + \frac{m^2}{5}$; 3) $\frac{12}{x^2} \cdot \frac{x}{3}$; 4) $\frac{a^2}{3} : \frac{a}{15}$.

4. Виконайте дію:

1) $\frac{a-b}{3} + \frac{b}{3}$; 2) $\frac{7a^2}{6} - \frac{a^2}{6}$; 3) $\frac{y}{4} \cdot \frac{16}{y^2}$; 4) $\frac{m^2}{5} : \frac{m}{10}$.

2 5. Скоротіть дроб:

1) $\frac{16m^2p}{20mb}$; 2) $\frac{ab^2(x+2)}{a^2b(x+2)^2}$; 3) $\frac{5m-15}{10}$; 4) $\frac{a+2b}{a^2+2ab}$.

6. Скоротіть дроб:

1) $\frac{15a^2x}{25ay}$; 2) $\frac{m^2c(a-2)^2}{mc^2(a-2)}$; 3) $\frac{4x+12}{16}$; 4) $\frac{m-3p}{m^2-3mp}$.

7. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{x+2y}{5} + \frac{4x-7y}{5}$; 2) $\frac{x-y}{x^2-4} - \frac{y-2}{x^2-4}$; 3) $\frac{4-2m}{m} - \frac{5-2p}{p}$;
4) $\frac{m}{m-4} - \frac{m^2}{m^2-8m+16}$; 5) $\frac{p^2-p}{3py} \cdot \frac{3p}{p^2-1}$; 6) $10x^2 : \left(-\frac{5x}{m}\right)$.

8. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{a+3b}{4} + \frac{3a-7b}{4}$; 2) $\frac{m-b}{m^2-1} - \frac{b-1}{m^2-1}$; 3) $\frac{5-3y}{y} - \frac{2-3x}{x}$;
4) $\frac{b}{b+2} - \frac{b^2}{b^2+4b+4}$; 5) $\frac{c^2-2c}{5ma} \cdot \frac{5m}{c^2-4}$; 6) $\frac{4a^2}{p} : (-8a)$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-6}{x+3} = 0$; 2) $2 - \frac{x+4}{x} = 0$; 3) $\frac{x}{x-2} = \frac{7}{5}$; 4) $\frac{3x^2-9}{x+1} = 3x$.

10. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+4}{x-2} = 0$; 2) $3 - \frac{x+8}{x} = 0$; 3) $\frac{x}{x+1} = \frac{4}{5}$; 4) $\frac{2x^2+8}{x-1} = 2x$.

11. Обчисліть:

- 1) 9^{-2} ; 2) $(-4)^{-3}$; 3) $(-1)^{-7}$; 4) 14^{-1} ;
 5) $2^9 \cdot 2^{-10}$; 6) $5 : 5^{-1}$; 7) $\frac{4^{-3}}{4^{-2}}$; 8) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{-2}$.

12. Обчисліть:

- 1) 2^{-3} ; 2) $(-5)^{-2}$; 3) $(-1)^{-11}$; 4) 15^{-1} ;
 5) $4^8 \cdot 4^{-10}$; 6) $7^{-1} : 7$; 7) $\frac{9^{-4}}{9^{-5}}$; 8) $\left(\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}\right)^{-1}$.

13. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $(1,8 \cdot 10^{-5}) \cdot (3 \cdot 10^9)$; 2) $(1,7 \cdot 10^4) : (3,4 \cdot 10^{-3})$;
 3) $3,2 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-3}$; 4) $5,42 \cdot 10^8 - 4,3 \cdot 10^8$.

14. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $(5 \cdot 10^8) \cdot (2,4 \cdot 10^{-3})$; 2) $(7 \cdot 10^8) : (3,5 \cdot 10^{-1})$;
 3) $4,9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4$; 4) $4,42 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$.

15. Побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = -\frac{10}{x}$.

16. Побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = \frac{12}{x}$; 2) $y = -\frac{4}{x}$.

3 17. Виконайте дію:

- 1) $\frac{2a^2 - 2a}{4a^2 - b^2} + \frac{b(a-1)}{b^2 - 4a^2}$; 2) $\frac{x+3}{xy-x^2} + \frac{y+3}{xy-y^2}$;
 3) $\frac{x^2+x-3}{x^2-9} - \frac{3}{2x-6} - 1$; 4) $\frac{ax-2x}{3y+6} : \frac{4-a^2}{y^2+4y+4}$.

18. Виконайте дію:

- 1) $\frac{3x(x-1)}{9x^2-y^2} + \frac{xy-y}{y^2-9x^2}$; 2) $\frac{a-5}{ab-a^2} - \frac{5-b}{ab-b^2}$;
 3) $\frac{x^2+x-2}{x^2-4} - \frac{2}{3x-6} - 1$; 4) $\frac{m^2-9}{a^2+6a+9} : \frac{12-4m}{ap+3p}$.

19. 7 липня 2024 року українська легкоатлетка Ярослава Магучіх установила новий світовий рекорд зі стрибків у висоту – 2 м 10 см.



Знайдіть значення виразу $\left(\frac{a}{a+6} + \frac{a^2+36}{a^2-36} - \frac{a}{a-6}\right) : \frac{a-6}{a^2+12a+36}$,

якщо $a = 31$, відтак дізнаєтеся, скільки років тримався попередній світовий рекорд у цій дисципліні.

20. Доведіть тотожність $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} - \frac{x^2+1}{1-x^2}\right) \cdot \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{x+1}$.

21. Розв'яжіть рівняння



$$2 + \frac{1}{x-20} = \frac{x-18}{20-x} \text{ і } \frac{4}{y+1} + \frac{3y-7}{y-2} = 3.$$

Знайдіть значення виразу $100x + 18y$ та дізнайтеся, якого року українка Катерина Логвинівна Ющенко розробила концепцію першої у світі формальної мови адресного програмування.

22. Національний університет «Острозька академія» – один із найстаріших навчальних закладів Європи і найстаріший в Україні.



Розв'яжіть рівняння

$$3 + \frac{1}{x-16} = \frac{x-13}{16-x} \text{ і } \frac{5}{y+1} + \frac{2y-1}{y+3} = 2$$

та знайдіть значення виразу $100x + 19y$, відтак дізнаєтеся рік заснування цього університету.

23. Обчисліть, використовуючи властивості степенів:

1) $(4^{-3})^7 \cdot (((4^{-2})^3))^{-4}$; 2) $\frac{10^{-5} \cdot (10^{-7})^4}{(10^{-11})^3}$;

3) $4^{-5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$; 4) $243^{-2} \cdot (3^{-7})^{-2}$;

5) $\frac{(-5)^{-4} \cdot 25^{-2}}{(-125)^{-3}}$; 6) $0,01^{-3} \cdot 10^{-8}$.

24. Обчисліть, використовуючи властивості степенів:

1) $(5^{-2})^5 \cdot ((5^{-1})^{-3})^3$; 2) $\frac{7^{-4} \cdot (7^{-2})^5}{(7^3)^{-5}}$;

3) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-7} \cdot 36^{-4}$; 4) $16^{-5} \cdot (2^{-3})^{-7}$;

5) $\frac{(-3)^{-5} \cdot 27^{-3}}{(-9)^{-6}}$; 6) $0,2^{-8} \cdot 25^{-4}$.

25. Доведіть, що значення виразу $\frac{3ab - a^2}{a^2 - 9b^2} - \frac{3b^2}{ab + 3b^2}$ не залежить від значення змінних.

26. Чи існує така пара значень $(x; y)$, що вираз $\frac{4y^2}{xy + 4y^2} - \frac{4xy - x^2}{x^2 - 16y^2}$ набуває від'ємного значення?

27. Обчисліть значення виразу $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{1 - x^2} : \frac{x^2 + 2x + 1}{3 - 3x}$, якщо



$x = 2026$, відтак дізнаєтеся, скільки разів українські футболісти здобували «Золотий м'яч» – нагороду найкращому футболісту Європи. З інтернету дізнаєтеся прізвища цих футболістів.

28. У перших Зимових Олімпійських іграх 1924 року брав участь американець українського походження Валентин Білас. Він був учасником змагань із ковзанярського спорту на дистанції 5000 м.

Знайдіть значення виразу $-\frac{6-6y^2}{y^3-3y^2+3y-1} : \frac{y+1}{y^2-2y+1}$, якщо $y = 2027$, відтак дізнаєтеся, яке підсумкове місце він зайняв.

29. 1) Знайдіть цілі корені рівняння $\frac{8}{|x|} = 6 - x$, використовуючи графічний спосіб розв'язування.
2) Спробуйте розв'язати рівняння аналітично та знайти його нецілий корінь.

30. Розв'яжіть графічно рівняння $\frac{6}{|x|} = 2x - 4$.

Квадратні корені. Дійсні числа

31. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y , що відповідає значенням $x = -2$; 0; 7.

32. Чи має корені рівняння:

- 1) $x^2 = 4$; 2) $x^2 = -4$;
3) $x^2 = 0$; 4) $x^2 = 10$?

33. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{0,09}$; 3) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; 4) $\sqrt{64} - 2\sqrt{0,04}$;
5) $-5\sqrt{0,16}$; 6) $4\sqrt{20\frac{1}{4}}$; 7) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; 8) $\sqrt{2(0,3^2 + 0,41)}$.

34. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{36}$; 2) $\sqrt{0,49}$; 3) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{100} + 5\sqrt{0,64}$;
5) $-10\sqrt{0,09}$; 6) $8\sqrt{3\frac{1}{16}}$; 7) $\sqrt{15^2 - 9^2}$; 8) $\sqrt{8(0,4^2 + 0,34)}$.

35. Знайдіть наближене значення виразу $\sqrt{13} + 6,79$, округливши значення кореня до сотих. Відтак дізнаєтеся загальну площу лісових ділянок (у млн га), що належать до лісового фонду України.

36. Знайдіть наближене значення виразів, округливши значення кореня до тисячних:

- 1) $\sqrt{15} + 7,383$; 2) $13 - \sqrt{26}$; 3) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

37. Обчисліть:

- 1) $(-\sqrt{17})^2$; 2) $2,9 + (\sqrt{3})^2$; 3) $\sqrt{100 \cdot 64}$; 4) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$;
5) $\sqrt{\frac{121}{169}}$; 6) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$; 7) $-3\sqrt{(-7)^2}$; 8) $\sqrt{3^6}$.

38. Обчисліть:

- 1) $(\sqrt{19})^2$; 2) $3,7 - (-\sqrt{2})^2$; 3) $\sqrt{25 \cdot 10\,000}$; 4) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$;
 5) $\sqrt{\frac{64}{81}}$; 6) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; 7) $-2\sqrt{5^2}$; 8) $\sqrt{(-11)^4}$.

39. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 = 49$; 2) $x^2 = -49$; 3) $x^2 + 0,07 = 0,08$; 4) $2x^2 = 12$;
 5) $\sqrt{x} = 3$; 6) $\sqrt{x} = 0$; 7) $\sqrt{x} + 3 = 8$; 8) $-\frac{1}{3}\sqrt{x} = 5$.

40. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 = 64$; 2) $x^2 = -64$; 3) $x^2 + 5 = 7$; 4) $\frac{1}{4}x^2 = 0$;
 5) $\sqrt{x} = 1$; 6) $\sqrt{x} = -8$; 7) $\sqrt{x} - 2 = 3$; 8) $4\sqrt{x} = 8$.

41. Внесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{200}$; 2) $\sqrt{75}$; 3) $\sqrt{5^4 \cdot 2}$; 4) $\sqrt{7^3 \cdot 2^6}$.

42. Внесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{20}$; 2) $\sqrt{45}$; 3) $\sqrt{11^2 \cdot 3}$; 4) $\sqrt{2^4 \cdot 5^3}$.

43. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $4\sqrt{3}$; 2) $-2\sqrt{7}$; 3) $\frac{1}{3}\sqrt{3m}$; 4) $-0,3\sqrt{2a}$.

44. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $3\sqrt{11}$; 2) $-3\sqrt{5}$; 3) $-\frac{1}{2}\sqrt{8x}$; 4) $0,1\sqrt{200m}$.

3 45. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $4\sqrt{x} - 12 = 0$; 2) $\frac{20}{\sqrt{x} - 3} = 10$; 3) $(x - 5)^2 = 36$;
 4) $(x - 9)^2 = -4$; 5) $\frac{x - 1}{5} = \frac{7}{x + 1}$; 6) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2 = 18$.

46. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $5\sqrt{x} + 15 = 0$; 2) $\frac{15}{\sqrt{x} + 2} = 3$; 3) $(x + 9)^2 = 0$;
 4) $(x - 3)^2 = 49$; 5) $\frac{3}{x - 2} = \frac{x + 2}{4}$; 6) $(3x + 1)^2 + (3x - 1)^2 = 56$.

47. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{9 \frac{49}{64} \cdot 6 \frac{3}{121}}$; 2) $\sqrt{4 \frac{1}{4} \cdot 3 \frac{13}{17}}$; 3) $\sqrt{80} \cdot \sqrt{605}$; 4) $\sqrt{36^3}$.

48. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{4 \frac{33}{64} \cdot 4 \frac{21}{25}}$; 2) $\sqrt{3 \frac{4}{5} \cdot 6 \frac{11}{19}}$; 3) $\sqrt{175} \cdot \sqrt{28}$; 4) $\sqrt{25^3}$.

49. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{a + 5\sqrt{a}}{a - 25};$$

$$2) \frac{x - 4y}{x + 4\sqrt{x}\sqrt{y} + 4y};$$

$$3) \frac{\sqrt{21} - 3}{7 - \sqrt{21}}.$$

50. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{y - 36}{y - 6\sqrt{y}};$$

$$2) \frac{a - 6\sqrt{a}\sqrt{b} + 9b}{a - 9b};$$

$$3) \frac{\sqrt{26} + 13}{2 + \sqrt{26}}.$$

51. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) x^2 = 3x;$$

$$2) \sqrt{x} = 3 - 0,25x.$$

52. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) x^2 = -2x;$$

$$2) \sqrt{x} = 5 - 4x.$$

4 53. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{|2x + 1|} = 3;$$

$$2) \sqrt{2 + \sqrt{x^2 + 2}} = 2;$$

$$3) 3|x^2 - 2| + 1 = 4.$$

54. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{|2x - 1|} = 5;$$

$$2) \sqrt{3 + \sqrt{x^2 + 3}} = 3;$$

$$3) 5|x^2 - 2| - 2 = 8.$$

55. Обчисліть:

$$1) (\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}})^2;$$

$$2) \frac{4}{8 - 3\sqrt{7}} + \frac{4}{8 + 3\sqrt{7}}.$$

56. Обчисліть:

$$1) (\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}})^2;$$

$$2) \frac{2}{9 + 4\sqrt{5}} + \frac{2}{9 - 4\sqrt{5}}.$$

57. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} 3 - 2x, & \text{якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1; \end{cases}$$

$$2) y = \frac{3\sqrt{x} - x}{3 - \sqrt{x}}.$$

58. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} 6 - x, & \text{якщо } x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 4; \end{cases}$$

$$2) y = \frac{2\sqrt{x} - x}{2 - \sqrt{x}}.$$

Квадратні рівняння

1 59. Випишіть коефіцієнти a , b і c квадратного рівняння:

$$1) 3x^2 + 4x - 7 = 0;$$

$$2) 4x^2 + 8 = 0;$$

$$3) 4x - x^2 + 9 = 0;$$

$$4) 5x^2 = 0;$$

$$5) 9x - x^2 = 0;$$

$$6) 9 + 8x - x^2 = 0.$$

60. Знайдіть, використовуючи теорему Вієта, суму і добуток коренів рівняння:

$$1) x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$2) x^2 - 2x = 0;$$

$$3) -x^2 + 9x - 8 = 0;$$

$$4) 2x^2 - 4x - 7 = 0;$$

$$5) 5x^2 - 8x + 1 = 0;$$

$$6) 6x^2 - 12 = 0.$$

2 61. Розв'яжіть неповні квадратні рівняння:

- 1) $7x^2 - 28 = 0$; 2) $4x^2 - 8x = 0$; 3) $9x^2 = 0$;
 4) $2x^2 + 18 = 0$; 5) $-4x^2 - 2x = 0$; 6) $0,2x^2 + 0,6x = 0$.

62. Розв'яжіть неповні квадратні рівняння:

- 1) $4x^2 + 12x = 0$; 2) $4x^2 - 36 = 0$; 3) $-x^2 + 2x = 0$;
 4) $-7x^2 = 0$; 5) $3x^2 + 27 = 0$; 6) $0,3x^2 - 3x = 0$.

63. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 4x + 3 = 0$; 2) $3x^2 + 2x - 5 = 0$; 3) $x^2 - 10x + 25 = 0$;
 4) $2x^2 = 4 - 7x$; 5) $x^2 = 5x - 7$; 6) $2x = x^2 - 8$.

64. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - x - 2 = 0$; 2) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; 3) $x^2 + 12x + 36 = 0$;
 4) $3x = 5x^2 - 2$; 5) $x^2 + 2 = 3x$; 6) $3x = x^2 + 7$.

65. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 96 см^2 , а одна зі сторін на 4 см більша за другу.66. Ділянку землі прямокутної форми, одна зі сторін якої на 5 см більша за другу, потрібно обнести парканом. Знайдіть довжину паркана, якщо площа ділянки становить 300 м^2 .

67. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

- 1) $x^2 - 7x + 6$; 2) $2x^2 + 5x + 2$; 3) $-3x^2 - 5x + 2$.

68. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

- 1) $x^2 - 5x - 6$; 2) $3x^2 - 4x + 1$; 3) $-2x^2 + 7x - 3$.

69. Розв'яжіть бікватратне рівняння:

- 1) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; 2) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$; 3) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

70. Знайдіть корені бікватратного рівняння:

- 1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; 2) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$; 3) $x^4 + 10x^2 + 25 = 0$.

71. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x^2 + x - 2}{x - 3} = 0$; 2) $\frac{x^2 + 4x - 5}{x - 1} = 0$; 3) $\frac{x^2}{x - 2} = \frac{2x}{x - 2}$;
 4) $\frac{x^2 - 2x}{x - 3} = \frac{1}{3 - x}$; 5) $\frac{x - 3}{8} = \frac{x}{x + 3}$; 6) $\frac{4}{x} = x + 3$.

72. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x^2 - 2x - 8}{x + 1} = 0$; 2) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} = 0$; 3) $\frac{x^2}{x + 4} = \frac{16}{x + 4}$;
 4) $\frac{x^2 - 3x}{x - 5} = \frac{2}{5 - x}$; 5) $\frac{x + 2}{x} = \frac{3}{x - 2}$; 6) $\frac{5}{x} = 6 - x$.

3 73. За яких значень коефіцієнтів a і b , числа -1 і 3 є коренями рівняння $ax^2 + bx - 6 = 0$?74. За яких значень коефіцієнтів b і c , числа -3 і 2 є коренями рівняння $3x^2 + bx + c = 0$?

75. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)(x - 4) = -12$;

2) $(2x - 1)^2 = (x - 2)^2$;

3) $(2x - 3)(2x + 3) = 3x + 1$;

4) $x(x - 3) - (x + 2)^2 = x^2 - 3x$.

76. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 6)(x - 2) = -12$;

2) $(3x - 1)^2 = (x - 3)^2$;

3) $(3x + 2)(3x - 2) = x + 6$;

4) $x(x - 2) - (x + 1)^2 = x^2 - 2x$.

77. Розв'яжіть рівняння:


 1) $\frac{x^2 + 2x}{8} = \frac{2x - 1}{3}$; 2) $\frac{y + 3}{5} - \frac{y^2 - 1}{10} = \frac{2}{5}$;

3) Нехай x – найбільший корінь першого рівняння, y – найбільший корінь другого рівняння. Знайдіть значення виразу $600y + 2x$, відтак дізнаєтеся рік заснування Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.



78. Розв'яжіть рівняння:


 1) $\frac{x^2 + 5}{6} = \frac{4x + 5}{5}$; 2) $\frac{x^2 + 2}{4} + \frac{x - 3}{5} = \frac{13}{10}$;

3) Знайдіть суму всіх коренів обох рівнянь, відтак дізнаєтеся, яке місце у світі посідає Україна за кількістю громадян з вищою освітою.

79. Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 + px - 6 = 0$ задовольняють умову $2x_1 + 3x_2 = 0$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт p .

80. Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 - 3x + q = 0$ задовольняють умову $2x_1 + 3x_2 = 5$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт q .

81. Скоротіть дроб:

1) $\frac{4x - 12}{x^2 - 2x - 3}$;

2) $\frac{x^2 - 4}{2x^2 - 5x + 2}$;

3) $\frac{2x^2 + 5x - 3}{3x - 2x^2 - 1}$.

82. Скоротіть дроб:

1) $\frac{x^2 - x - 6}{2x + 4}$;

2) $\frac{3x^2 - 8x - 3}{x^2 - 9}$;

3) $\frac{2x^2 - 3x - 2}{x + 1 - 2x^2}$.

83. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x^2 + 11x - 3}{1 - 4x} = 7$;

2) $\frac{x + 4}{x - 2} + \frac{x - 3}{x + 2} = 7$;

3) $\frac{3x + 2}{x + 1} + \frac{x + 4}{x - 3} = \frac{3x^2 + 1}{(x + 1)(x - 3)}$;

4) $\frac{2x - 2}{x + 3} - \frac{x - 6}{x - 3} = \frac{18}{x^2 - 9}$.

84. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{6x^2 + 5x - 4}{1 - 2x} = 2$;

2) $\frac{x + 4}{x + 1} + \frac{x - 4}{x - 1} = 1$;

3) $\frac{2x - 7}{x + 4} + \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{2x^2 + 4x - 11}{(x + 4)(x - 1)}$;

4) $\frac{x - 4}{x + 2} - \frac{x + 4}{x - 2} = \frac{24}{x^2 - 4}$.

85. З міста A в місто B , відстань між якими 360 км, одночасно виїхали два авто. Швидкість одного з них була на 10 км/год більша за швидкість другого, тому перше авто прибуло у місто B на 30 хв раніше, ніж друге. Знайдіть швидкість кожного авто.

86. З одного села в інше, відстань між якими 24 км, виїхав велосипедист. Через 30 хв у тому самому напрямку виїхала велосипедистка, швидкість якої на 4 км/год більша за швидкість велосипедиста. Знайдіть швидкості велосипедистів, якщо до пункту призначення вони прибули одночасно.



4 87. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = 2x(2x - 1)(2x + 1) + x^2 - 3$;
- 2) $(\sqrt{x} - 3)(x^2 + 2x - 3) = 0$;
- 3) $x|x| - 3x - 4 = 0$.

88. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) = 3x(3x - 1)(3x + 1) + x - x^2$;
- 2) $(\sqrt{x} - 2)(2x^2 + 3x - 5) = 0$;
- 3) $x|x| + 5x - 6 = 0$.

89. За яких значень a рівняння має лише один корінь:

- 1) $4x^2 + x - a = 0$;
- 2) $ax^2 - 8x - 4 = 0$?

90. За яких значень b рівняння має лише один корінь:

- 1) $x^2 + bx + 4 = 0$;
- 2) $bx^2 + 6x - 1 = 0$?

91. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 1)^4 - 3(x + 1)^2 - 4 = 0$;
- 2) $(x^2 + x)^2 - 4x^2 - 4x - 12 = 0$.

92. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x - 2)^4 + 4(x - 2)^2 - 5 = 0$;
- 2) $(x^2 - x)^2 - 5x^2 + 5x + 6 = 0$.

ТЕМА 2

НЕРІВНОСТІ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** числові нерівності, подвійні нерівності;
- **ознайомитеся** з поняттями об'єднання і перетину проміжків, лінійними нерівностями з однією змінною та їхніми системами;
- **дізнаєтеся** про властивості числових нерівностей;
- **навчитися** розв'язувати лінійні нерівності з однією змінною та системи лінійних нерівностей з однією змінною.

§ 6. Числові нерівності. Доведення нерівностей

1. Числові нерівності



У попередніх класах ви навчилися порівнювати будь-які числа та записувати результат порівняння у вигляді рівності або нерівності, використовуючи знаки $=$, $>$, $<$.

Наприклад: $0,4 = \frac{2}{5}$, $-2 > -11$, $5 < 7$.

Вираз, який записано ліворуч від знака нерівності, називають *лівою частиною нерівності*, а вираз, який записано праворуч, – *правою частиною нерівності*. Так, в останній нерівності лівою частиною нерівності є число 5, а правою – число 7.

Нерівність, обидві частини якої – числа або числові вирази, називають *числовою нерівністю*.

Наприклад:

$$1,2 > -0,8; \sqrt{2} < 2; 0,1 < \frac{1}{9}; \sqrt{7} + 2 > \sqrt{8}.$$

2. Загальне означення порівняння чисел

Для двох довільних чисел a і b правильним є одне й тільки одне зі співвідношень: $a > b$, $a < b$ або $a = b$. Раніше ми використовували те чи інше правило порівняння чисел залежно від виду чисел (натуральні числа, десяткові дробі, звичайні дробі з однаковими або різними знаменниками). Але зручно було б мати універсальне правило порівняння.

Відомо, що $5 > 2$. Розглянемо різницю лівої та правої частин цієї нерівності: $5 - 2 = 3 > 0$, різниця є додатною. Розглядаючи різницю лівої та правої частин нерівності $3 < 7$, матимемо: $3 - 7 = -4 < 0$, різниця є від'ємною. У рівності $4 = 4$, розглянувши різницю лівої та правої частин, отримаємо: $4 - 4 = 0$, тобто різниця дорівнює нулю.

Приходимо до означення порівняння чисел.

$$\begin{aligned} a &> b, \text{ якщо } a - b > 0; \\ a &< b, \text{ якщо } a - b < 0; \\ a &= b, \text{ якщо } a - b = 0. \end{aligned}$$

Приклад 1. Порівняти $\frac{5}{9}$ і 0,6.

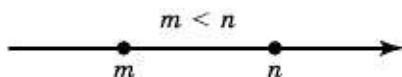
Розв'язання. Розглянемо різницю чисел $\frac{5}{9}$ і 0,6:

$$\frac{5}{9} - 0,6 = \frac{5}{9} - \frac{3}{5} = \frac{25 - 27}{45} = -\frac{2}{45} < 0.$$

Різниця є від'ємною, тому $\frac{5}{9} < 0,6$.

Відповідь: $\frac{5}{9} < 0,6$.

Нагадаємо, що на координатній прямій меншому числу відповідає точка, що лежить зліва від точки, що відповідає більшому числу. На малюнку 6.1 точка, що відповідає числу m , лежить зліва від точки, що відповідає числу n , тому $m < n$.



Мал. 6.1

Числові нерівності бувають *правильні* та *неправильні*. Наприклад,

$$\frac{5}{9} < 0,6; \sqrt{2} > 1 - \text{правильні числові нерівності};$$

$$1,8 > 2; \frac{3}{8} < -0,1 - \text{неправильні числові нерівності}.$$

Крім знаків $>$ і $<$, які називають *знаками строгої нерівності*, у математиці також використовують знаки $\leq$ (читають: «менше або дорівнює», або «не більше») і $\geq$ («більше або дорівнює», або «не менше»). Знаки $\geq$ і $\leq$ називають *знаками нестрогой нерівності*.

Нерівності, які містять знак $>$ або $<$, називають *строгими нерівностями*, а ті, що містять знак $\geq$ або $\leq$, – *нестрогими нерівностями*.

З означення співвідношень «більше», «менше» і «дорівнює» доходимо висновку, що $a \geq b$, якщо $a - b \geq 0$, і $a \leq b$, якщо $a - b \leq 0$.

3. Доведення нерівностей

Розглянемо, як за допомогою означення порівняння чисел можна доводити нерівності.

Приклад 2. Довести, що для будь-якого значення a справджується нерівність $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$.

Доведення. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності та спростимо її: $(a - 3)^2 - (a - 2)(a - 4) = a^2 - 6a + 9 - (a^2 - 2a - 4a + 8) = a^2 - 6a + 9 - a^2 + 6a - 8 = 1 > 0$.

Оскільки $(a - 3)^2 - (a - 2)(a - 4) > 0$ за будь-якого значення a , то за будь-якого значення a справджується нерівність $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$. ■

Умову для прикладу 2 можна було сформулювати коротше, наприклад: довести нерівність $(a - 3)^2 > (a - 2)(a - 4)$.

Приклад 3. Довести нерівність $2(x - 8) \leq x(x - 6)$.

Доведення. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності та спростимо її: $2(x - 8) - x(x - 6) = 2x - 16 - x^2 + 6x = -x^2 + 8x - 16 = -(x^2 - 8x + 16) = -(x - 4)^2$.

Оскільки $(x - 4)^2 \geq 0$ за будь-якого значення x , то $-(x - 4)^2 \leq 0$. Отже, за означенням, нерівність $2(x - 8) \leq x(x - 6)$ є правильною за будь-якого x . ■

Приклад 4. Довести нерівність $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$.

Доведення. У виразі, який записано в лівій частині нерівності, виділимо квадрати двочленів:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 15 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 2.$$

Для будь-яких значень x та y : $(x + 2)^2 \geq 0$ і $(y - 3)^2 \geq 0$.

Тому $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 \geq 0$, а $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 2 > 0$.

Отже, $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 15 > 0$. ■

4. Нерівність Коші для середнього арифметичного та середнього геометричного

Нагадаємо, що число $\frac{a + b}{2}$ називають *середнім арифметичним*

чисел a і b . Для невід'ємних чисел a і b число $\sqrt{ab}$ називають їх *середнім геометричним*.

Приклад 5. Довести, що середнє арифметичне двох невід'ємних чисел a і b не менше від їхнього середнього геометричного (нерівність Коші):

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ де } a \geq 0, b \geq 0.$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності та перетворимо її, урахувавши, що $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ для $a \geq 0, b \geq 0$.

$$\text{Матимемо: } \frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \text{ для всіх } a \geq 0 \text{ і } b \geq 0. \text{ Отже, } \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ для}$$

будь-яких $a \geq 0, b \geq 0$. ■

Зауважимо, що знак рівності в нерівності Коші можливий тоді й тільки тоді, коли $a = b$.

Якщо $a \neq b$, то $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Розглянемо застосування нерівності Коші для доведення нерівностей.

Приклад 6. Довести, що $\frac{16a}{5b} + \frac{5b}{4a} \geq 4$, якщо $a > 0$ і $b > 0$.

Розв'язання. Оскільки $a > 0$ і $b > 0$, то $\frac{16a}{5b} > 0$ і $\frac{5b}{4a} > 0$. Тоді, за нерівністю Коші, маємо:

$$\frac{\frac{16a}{5b} + \frac{5b}{4a}}{2} \geq \sqrt{\frac{16a}{5b} \cdot \frac{5b}{4a}}; \quad \frac{16a}{5b} + \frac{5b}{4a} \geq 2\sqrt{4}; \quad \frac{16a}{5b} + \frac{5b}{4a} \geq 4. \quad \blacksquare$$

А ще раніше...

Поняття «більше» й «менше» виникли одночасно з поняттям «дорівнювати». Адже ще з давніх часів у практичній діяльності людини виникла потреба порівнювати кількість предметів, довжини відрізків, площі ділянок тощо. Так, наприклад, кілька нерівностей є й у видатній праці «Начала» давньогрецького математика Евкліда (бл. 356–300 до н. е.). Зокрема, він наводить доведення нерівності $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для додатних чисел a і b геометричним методом.

Інший давньогрецький фізик і математик Архімед (бл. 287–212 до н. е.), щоб оцінити значення відношення довжини кола C до його діаметра d (пізніше назване числом π), використовує нерівність: $3\frac{10}{71} < \frac{C}{d} < 3\frac{1}{7}$.

Звичні нам символи для запису нерівностей з'явилися лише в XVII–XVIII ст. Знаки строгої нерівності ($>$ і $<$) уперше вжив англійський математик Томас Гарріот (1560–1621) у праці «Практика аналітичного мистецтва», що вийшла друком 1631 р. А знаки нестрогої нерівності ($\geq$ і $\leq$) – 1734 р. французький математик та астроном П'єр Бугер (1698–1758).

З відомих нерівностей, крім нерівності Коші, зазначимо такі:

1) Нерівність Бернуллі.

$$(1+x)^a \geq 1+ax, \text{ де } x \geq -1, a - \text{ціле число.}$$

2) Нерівність Чебишова.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n},$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – додатні числа і $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$.

3) Нерівність Коші – Буняковського.

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2,$$

де $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ – довільні числа.

Останню нерівність довів французький математик О.Л. Коші (1789–1857) та наш земляк В.Я. Буняковський.

Віктор Якович Буняковський (1804–1889) народився в містечку Бар (нині – Вінницька обл.). Навчався він здебільшого за кордоном, в основному у Франції, де його найближчим наставником був сам Коші. 1825 р. у Паризькому університеті Буняковський захистив дисертацію і здобув ступінь доктора наук. Його дослідження стосувалися галузі прикладної математики та математичної фізики. 1826 р. він повертається з Парижа до Петербурга та починає викладати математику і механіку у відомих на той час навчальних закладах. Тоді ж він перекладав праці Коші з французької.



В. Я. Буняковський

- ? Назвіть ліву і праву частини нерівності $-5 > -10$. ○ Наведіть приклади числових нерівностей. ○ Сформулюйте означення порівняння чисел. ○ Які нерівності називають строгими? Нестрогими? ○ Сформулюйте та доведіть нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним двох невід'ємних чисел (нерівність Коші).



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 6.1. Порівняйте числа:

- 1) $0,8$ і $0,7$; 2) $-1,2$ і $-1,25$; 3) $1\frac{2}{3}$ і $\frac{2}{3}$;
4) $-\frac{4}{7}$ і $-\frac{3}{7}$; 5) π і 3 ; 6) $-2,31$ і 0 .

6.2. Порівняйте числа:

- 1) $1,8$ і $1,9$; 2) $-1,3$ і $-1,27$; 3) $\frac{4}{5}$ і $2\frac{4}{5}$;
4) $-\frac{5}{8}$ і $-\frac{7}{8}$; 5) 4 і π ; 6) 0 і $-3,71$.

6.3. (Усно.) Які із числових нерівностей правильні:

- 1) $2,7 > -3,1$; 2) $0,5 < -3,17$; 3) $7,8 > 7,08$;
4) $4,1 < 4\frac{1}{10}$; 5) $-7,1 > -7,19$; 6) $5,05 < 5,5$?

6.4. Порівняйте числа a і b , якщо:

- 1) $a - b = 5$; 2) $a - b = 0$; 3) $a - b = -7$.

6.5. Порівняйте числа m і n , якщо різниця $m - n$ дорівнює:

- 1) -18 ; 2) $1,7$; 3) 0 .

2 6.6. Яке із чисел x чи y менше, якщо:

- 1) $x + 4 = y$; 2) $y - 2 = x$; 3) $y + 2 = x$; 4) $x - 3 = y$?

6.7. Яке із чисел a чи b більше, якщо:

- 1) $a - 7 = b$; 2) $a + 3 = b$; 3) $b + 2 = a$; 4) $b - 5 = a$?

6.8. Позначте на координатній прямій точки, що відповідають числам m , n і p , якщо $m < n$ і $p > n$.

6.9. 1) Запишіть у порядку зростання числа:



$\frac{4}{5}$ (Й); $-\frac{3}{7}$ (О); $\frac{3}{8}$ (Н); 0 (О); -0,1 (Р); -1,2 (В); 0,7 (И).

2) Прочитайте прізвище видатного українського математика, професора Варшавського університету.

3) Дізнайтеся з інтернету про його здобутки.

6.10. 1) Запишіть у порядку спадання числа:



-1,2 (Р); $\frac{3}{4}$ (І); 0 (О); -0,99 (У); 0,8 (Б); -0,6 (К); 0,51 (Л).

2) Прочитайте прізвище української художниці, творами якої захоплювався Пабло Пікассо.

3) Дізнайтеся з інтернету про її творчий доробок та назву відомої картини на ілюстрації.



Пабло Пікассо:
Якби ми мали художницю
такого рівня майстерності,
то змусили б заговорити
про неї цілий світ!

6.11. Укажіть серед даних нерівностей ті, що є правильними за будь-якого значення x :

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| 1) $x^2 > 0$; | 2) $x^2 \geq 0$; |
| 3) $x + 1 > 0$; | 4) $x^2 + 1 > 0$; |
| 5) $(x - 3)^2 \geq 0$; | 6) $(x + 4)^2 > 0$; |
| 7) $x > -x$; | 8) $-x \leq x$. |

6.12. Доведіть нерівність:

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| 1) $3m + 5 > 3(m - 1)$; | 2) $p(p - 2) < p^2 - 2p + 7$; |
| 3) $(a + 1)(a - 1) < a^2$; | 4) $x(x + 2) > 2x - 1$. |

6.13. Доведіть нерівність:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 1) $2a - 3 < 2(a - 1)$; | 2) $c(c + 2) > c^2 + 2c - 3$; |
| 3) $(x + 2)(x - 2) + 5 > x^2$; | 4) $3m - 2 < m(m + 3)$. |

6.14. Доведіть нерівність:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1) $x^2 + y^2 \geq -2xy$; | 2) $p(p - 6) \geq -9$; |
| 3) $a(a + b) \geq ab$; | 4) $m^2 + 5m + 4 \geq m$. |

6.15. Доведіть нерівність:

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1) $m^2 + n^2 \geq 2mn$; | 2) $t(t + 2) \geq -1$; |
| 3) $c(c - d) \geq -cd$; | 4) $p^2 - 11p + 36 \geq p$. |

3 6.16. Порівняйте числа:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sqrt{5} - 2$ і $\frac{1}{\sqrt{5} + 2}$; | 2) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ і $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$. |
|--|--|

6.17. Порівняйте числа:

- | | |
|--|--|
| 1) $\sqrt{3} - 1$ і $\frac{1}{\sqrt{3} + 1}$; | 2) $4 + \sqrt{15}$ і $\frac{1}{4 - \sqrt{15}}$. |
|--|--|

6.18. Доведіть нерівність:

1) $a^2 + 10a + 26 > 0$; 2) $8a < a^2 + 20$.

6.19. Доведіть нерівність:

1) $b^2 - 4b + 7 > 0$; 2) $-2b < b^2 + 2$.

6.20. Нехай x – довільне число. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $x^2 + 5$; 2) $-(x - 1)^2 - 3$; 3) $(x - 7)^2$;
4) $-(x + 9)^2$; 5) $9 + (x - 1)^2$; 6) $(x - 1)^2 + (x - 2)^2$.

6.21. Доведіть, що:

1) $x^3 - 3x^2 + x - 3 \geq 0$, якщо $x \geq 3$;
2) $\frac{3}{a+3} > \frac{1}{a+1}$, якщо a – додатне число.

6.22. Доведіть, що:

1) $m^3 + m^2 + 5m + 5 \geq 0$, якщо $m \geq -1$;
2) $\frac{p}{p+7} < \frac{p+1}{p+8}$, якщо p – додатне число.

4 6.23. Доведіть нерівність:

1) $m^2 + 4m + p^2 + 2p + 5 \geq 0$;
2) $a^2 + b^2 \geq 4(a + b) - 8$;
3) $m^2 + n^2 + 1 \geq m + n + mn$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 > 2(a + b + c) - 4$.

6.24. Для кожного додатного значення a доведіть, що:

1) $a^3 + 2a^2 + a > 0$; 2) $a^3 + 1 \geq a^2 + a$;
3) $(a + 1)^3 \leq 4(a^3 + 1)$; 4) $a^6 - a^5 + a^4 > 0$.

6.25. Для кожного від'ємного значення p доведіть, що:

1) $p^3 + 10p^2 + 25p \leq 0$; 2) $1 - p^3 > p - p^2$.

6.26. Доведіть, що:

1) $\frac{7a}{2b} + \frac{8b}{7a} \geq 4$, якщо a і b – числа одного знака;
2) $\frac{3m}{5n} + \frac{5n}{12m} \leq -1$, якщо m і n – числа різних знаків.

6.27. Доведіть, що:

1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, якщо $a > 0$, $b > 0$;
2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$, якщо $a < 0$, $b > 0$.

6.28. Порівняйте значення виразів $m^3 + n^3$ і $mn(m + n)$, якщо m і n – додатні числа, $m \neq n$.

6.29. До кожного із чисел 2, 3, 4, 5 додали одне й те саме число a . Порівняйте добуток першого й четвертого виразів, що утворилися, з добутком другого й третього.

6.30. Дві школи закупили бейджики (*badge*) для перших класів на однакову суму грошей. Перша школа закупила на половину коштів бейджів по 4 грн, а на іншу половину – по 6 грн. Друга школа на всі кошти закупила бейджі по 5 грн. Яка зі шкіл закупила більше бейджів, якщо обидві школи витратили всі кошти?

6.31. Софія і Поліна купили однакову кількість зошитів. Софія всі зошити купила за ціною 30 грн, а Поліна – третину зошитів за ціною 24 грн, а решту – за ціною 32 грн. Котра з дівчат витратила на покупку менше грошей?



Вправи для повторення

6.32. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; 2) $5x^2 - 2x - 3 = 0$.

6.33. Побудуйте графік функції:

1) $y = 3x - 5$; 2) $y = 7$; 3) $y = -0,2x$.

6.34. Трактористи мали зорати поле площею 40 га. Щодня вони орали на 1 га більше, ніж планували, а тому закінчили оранку на 2 дні раніше визначеного терміну. За скільки днів трактористи зорали поле?

6.35. Обчисліть значення суми:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{49} + \sqrt{45}}.$$



Життєва математика

6.36. Для будівництва гаража можна використати один із двох типів фундаменту: бетонний або з піноблоків. Для фундаменту з піноблоків потрібно 3 кубометри піноблоків та 6 мішків цементу. Для бетонного фундаменту потрібно 3 тонни щебеню і 30 мішків цементу. Кубометр піноблоків коштує 1560 грн, щебінь – 370 грн за тонну, а мішок цементу коштує 130 грн. Скільки коштуватиме матеріал, якщо вибрати найдешевший тип фундаменту?



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

6.37. Прочитайте запис:

1) $a \leq 7$; 2) $b > -8$; 3) $x < -2$; 4) $m \geq 0$;
5) $-2 < x \leq 3$; 6) $0 < p < 5$; 7) $3 \leq c \leq 5$; 8) $-5 \leq y < 7$.

6.38. Чи правильне твердження:

- 1) якщо $a = b$, то $b = a$;
- 2) якщо $a = b$, $b = c$, то $a = c$;
- 3) якщо $a = b$ і p – будь-яке число, то $a + p = b + p$;
- 4) якщо $a = b$ і p – будь-яке число, то $a - p = b - p$?

6.39. Порівняйте числа x та y , якщо:

- 1) $x < 0, y > 0$; 2) $x \geq 0, y < 0$;
 3) $x > 0, y \leq 0$; 4) $x \leq 0, y > 0$.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

6.40. Водійка планувала їхати з міста A в місто B зі швидкістю 60 км/год, а повертатися назад зі швидкістю 80 км/год. Та, повертаючись назад, проїхала половину шляху із запланованою швидкістю і зупинилася на ночівлю. Яка середня швидкість водійки за описаний проміжок часу?

§ 7. Основні властивості числових нерівностей

1. Властивості числових нерівностей та їхні наслідки

Розглянемо властивості числових нерівностей.

Властивість 1. Якщо $a > b$, то $b < a$;
 якщо $a < b$, то $b > a$.

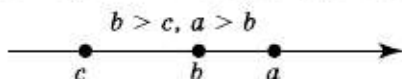
Доведення. Оскільки $a > b$, то $a - b > 0$. Тоді $-(a - b) < 0$, але $-(a - b) = b - a$, тому $b - a < 0$. Отже, $b < a$. Аналогічні міркування можна провести, якщо $a < b$. ■

Властивість 2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$;
 якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

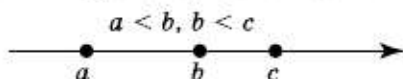
Доведення. За умовою $a > b$ і $b > c$. Тому $a - b > 0$ і $b - c > 0$, тобто $a - b$ і $b - c$ – додатні числа. Розглянемо різницю $a - c$. Маємо: $a - c = a - c - b + b = (a - b) + (b - c) > 0$ (оскільки $a - b$ і $b - c$ – додатні числа). Тому $a > c$. ■

Аналогічні міркування можна провести, якщо $a < b$ і $b < c$.

Геометричні ілюстрації до властивості 2 подано на малюнках 7.1 і 7.2.



Мал. 7.1



Мал. 7.2

Властивість 3. Якщо $a > b$ і p – будь-яке число, то $a + p > b + p$.

Доведення. За умовою $a > b$, тому $a - b > 0$. Розглянемо різницю $(a + p) - (b + p)$ та перетворимо її:

$$(a + p) - (b + p) = a + p - b - p = a - b > 0.$$

Тому $a + p > b + p$. ■



Наслідок. Якщо $a > b + m$, то $a - m > b$.

Доведення. Оскільки $a > b + m$, то $a - (b + m) > 0$, тобто $a - b - m > 0$. Але $a - b - m = (a - m) - b$, тому $(a - m) - b > 0$. Отже, $a - m > b$. ■

Із цього наслідку випливає:

якщо деякий доданок перенести з однієї частини правильної нерівності у другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Властивість 4. Якщо $a > b$ і $p > 0$, то $ap > bp$;
якщо $a > b$ і $p < 0$, то $ap < bp$.

Доведення. Нехай $a > b$, тоді $a - b > 0$. Розглянемо різницю $ap - bp$ і перетворимо її: $ap - bp = p(a - b)$.

Якщо $p > 0$, то $p(a - b) > 0$, тому $ap > bp$;

якщо $p < 0$, то $p(a - b) < 0$, тому $ap < bp$. ■

Оскільки ділення можна замінити множенням на число, обернене до дільника $\left(\frac{a}{q} = a \cdot \frac{1}{q}\right)$, то аналогічна властивість справджується і в разі ділення обох частин нерівності на відмінне від нуля число q .

Отже,

якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність;

якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число та змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.



Наслідок. Якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Доведення. Поділимо ліву і праву частини нерівності $a > b$ на додатне число ab . Матимемо:

$$\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}; \frac{1}{b} > \frac{1}{a}, \text{ тобто } \frac{1}{a} < \frac{1}{b}. \quad \blacksquare$$

2. Застосування властивостей числових нерівностей до порівняння виразів

Приклад 1. Дано: $m > n$. Порівняти:

- 1) $m + 1$ і $n + 1$; 2) $n - 5$ і $m - 5$; 3) $1,7m$ і $1,7n$;
 4) $-m$ і $-n$; 5) $-10n$ і $-10m$; 6) $\frac{m}{8}$ і $\frac{n}{8}$.

Розв'язання. 1) Якщо до обох частин правильної нерівності $m > n$ додамо число 1, то за властивістю 3 матимемо: $m + 1 > n + 1$.

2) Якщо до обох частин правильної нерівності $m > n$ додамо число -5 , то за властивістю 3 матимемо правильну нерівність $m - 5 > n - 5$, тобто $n - 5 < m - 5$ (властивість 1).

3) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на додатне число 1,7, то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $1,7m > 1,7n$.

4) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на від'ємне число -1 , то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $-m < -n$.

5) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ помножимо на від'ємне число -10 , то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $-10m < -10n$, тобто $-10n > -10m$ (властивість 1).

Записати розв'язання таких вправ можна й коротше:

$$\begin{aligned} m &> n \mid \cdot (-10) \\ -10m &< -10n; \\ -10n &> -10m. \end{aligned}$$

6) Якщо обидві частини правильної нерівності $m > n$ поділимо на додатне число 8, то за властивістю 4 матимемо правильну нерівність $\frac{m}{8} > \frac{n}{8}$.

Відповідь: 1) $m + 1 > n + 1$; 2) $n - 5 < m - 5$; 3) $1,7m > 1,7n$;
 4) $-m < -n$; 5) $-10n > -10m$; 6) $\frac{m}{8} > \frac{n}{8}$.

3. Застосування властивостей числових нерівностей до подвійних числових нерівностей



Нагадаємо, що в математиці трапляються також *подвійні числові нерівності*: $a < b < c$, $a \leq b < c$, $a < b \leq c$, $a \leq b \leq c$. Наприклад, подвійна нерівність $a < b < c$ означає, що одночасно справджуються нерівності $a < b$ і $b < c$.

Оскільки $a < b$ і $b < c$, то для будь-якого числа p за властивістю 3 справджуються нерівності:

$$a + p < b + p \text{ і } b + p < c + p, \text{ тобто } a + p < b + p < c + p.$$

Отже, якщо до всіх частин правильної подвійної нерівності додати одне й те саме число, то одержимо правильну подвійну нерівність.

Міркуючи аналогічно, матимемо:

якщо $a < b < c$ і $p > 0$, то $ap < bp < cp$;

якщо $a < b < c$ і $p < 0$, то $ap > bp > cp$, тобто $cp < bp < ap$;

якщо a, b, c – додатні числа і $a < b < c$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$, тобто $\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

4. Оцінювання значення виразу

Властивості числових нерівностей, які ми розглянули, можна використовувати для оцінювання значення виразу.

Приклад 2. Оцінити периметр квадрата зі стороною a см, якщо $3,2 < a < 3,9$.

Розв'язання. Оскільки периметр P квадрата обчислюють за формулою $P = 4a$, то всі частини нерівності $3,2 < a < 3,9$ помножимо на 4.

Матимемо: $3,2 \cdot 4 < 4a < 3,9 \cdot 4$, тобто $12,8 < P < 15,6$.

Отже, периметр квадрата більший за 12,8 см, але менший від 15,6 см.

Відповідь: $12,8 < P < 15,6$.

Приклад 3. Дано: $1 < x < 5$. Оцінити значення виразу:

1) $x + 2$; 2) $x - 3$; 3) $6x$; 4) $-x$;

5) $\frac{x}{15}$; 6) $-\frac{x}{10}$; 7) $3x - 1$; 8) $\frac{1}{x}$.

Розв'язання. Використаємо форму запису, запропоновану в завданні 5 прикладу 1.

$$\begin{aligned} 1) \quad & 1 < x < 5 \quad | + 2 \\ & 1 + 2 < x + 2 < 5 + 2; \\ & 3 < x + 2 < 7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & 1 < x < 5 \quad | \cdot 6 \\ & 1 \cdot 6 < 6x < 5 \cdot 6; \\ & 6 < 6x < 30; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad & 1 < x < 5 \quad | : 15 \\ & \frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{5}{15}; \\ & \frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad & 1 < x < 5 \quad | \cdot 3 \\ & 1 \cdot 3 < 3x < 5 \cdot 3 \quad | - 1 \\ & 3 - 1 < 3x - 1 < 15 - 1; \\ & 2 < 3x - 1 < 14; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 1 < x < 5 \quad | - 3 \\ & 1 - 3 < x - 3 < 5 - 3; \\ & -2 < x - 3 < 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & 1 < x < 5 \quad | \cdot (-1) \\ & 1 \cdot (-1) > x \cdot (-1) > 5 \cdot (-1); \\ & -5 < -x < -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & 1 < x < 5 \quad | : (-10) \\ & \frac{1}{-10} > \frac{x}{-10} > \frac{5}{-10}; \\ & -\frac{1}{2} < -\frac{x}{10} < -\frac{1}{10}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \quad & 1 < x < 5 \\ & \frac{1}{1} > \frac{1}{x} > \frac{1}{5}; \\ & \frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 1. \end{aligned}$$

- Відповідь: 1) $3 < x + 2 < 7$; 2) $-2 < x - 3 < 2$;
 3) $6 < 6x < 30$; 4) $-5 < -x < -1$;
 5) $\frac{1}{15} < \frac{x}{15} < \frac{1}{3}$; 6) $-\frac{1}{2} < -\frac{x}{10} < -\frac{1}{10}$;
 7) $2 < 3x - 1 < 14$; 8) $\frac{1}{5} < \frac{1}{x} < 1$.

 Сформулюйте й доведіть властивості числових нерівностей та наслідки з них.
 Наведіть приклади подвійних числових нерівностей.  Сформулюйте властивості подвійних числових нерівностей.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 7.1. Запишіть правильну нерівність, яку отримаємо, якщо:
 1) до обох частин нерівності $-2 < 5$ додамо -5 ;
 2) від обох частин нерівності $7 > 3$ відніmemo 1;
 3) обидві частини нерівності $-2 < 9$ помножимо на 3;
 4) обидві частини нерівності $-5 > -10$ помножимо на -2 ;
 5) обидві частини нерівності $8 > 4$ поділимо на 2;
 6) обидві частини нерівності $3 < 18$ поділимо на -3 .
- 7.2. Запишіть правильну нерівність, яку отримаємо, якщо:
 1) до обох частин нерівності $7 > 5$ додамо 8;
 2) від обох частин нерівності $0 < 8$ відніmemo 6;
 3) обидві частини нерівності $12 > 4$ помножимо на 3; на -1 ;
 4) обидві частини нерівності $15 < 18$ поділимо на 3; на -3 .
- 7.3. (Усно.) Порівняйте x та y , якщо:
 1) $x < 5$, $5 < y$; 2) $x > 2$, $2 > y$.
- 2** 7.4. Покажіть на координатній прямій розташування точок, що відповідають числам a , b , c , d , e , якщо: $a > b$, $b > c$, $d < c$, $a < e$.
- 7.5. Відомо, що $m > n$, $p < n$, $t > m$. Порівняйте:
 1) p і m ; 2) p і t ; 3) n і t .
- 7.6. Порівняйте число a з нулем, якщо:
 1) $a > b$, $b \geq 1$; 2) $a < b$, $b < -2$.
- 7.7. Порівняйте число x із нулем, якщо:
 1) $x < y$, $y \leq -3$; 2) $x > y$, $y > 5$.
- 7.8. Відомо, що $x > y$. Яким знаком ($>$ чи $<$) треба замінити «зірочку», щоб утворилася правильна нерівність:
 1) $x + 2 * y + 2$; 2) $x - 3 * y - 3$; 3) $1,8x * 1,8y$;
 4) $-x * -y$; 5) $-2,7x * -2,7y$; 6) $\frac{x}{3} * \frac{y}{3}$?
- 7.9. Дано: $a < b$. Порівняйте:
 1) $a - 7$ і $b - 7$; 2) $a + 3$ і $b + 3$; 3) $1,9a$ і $1,9b$;

$$4) -a \text{ і } -b; \quad 5) -0,8a \text{ і } -0,8b; \quad 6) \frac{a}{5} \text{ і } \frac{b}{5}.$$

7.10. Відомо, що $1 < p < 2$. Оцініть значення виразу:

$$1) p + 3; \quad 2) p - 4; \quad 3) 12p; \quad 4) \frac{p}{2}; \quad 5) -p; \quad 6) -3p.$$

7.11. Відомо, що $2 < m < 10$. Оцініть значення виразу:

$$1) m + 1; \quad 2) m - 2; \quad 3) 3m; \quad 4) \frac{m}{5}; \quad 5) -m; \quad 6) -7m.$$

7.12. Порівняйте числа:

$$1) \frac{1}{a} \text{ і } \frac{1}{b}, \text{ якщо } a > 0, b > 0 \text{ і } a < b;$$

$$2) \frac{1}{m} \text{ і } \frac{1}{n}, \text{ якщо } m > n, m \text{ і } n - \text{додатні числа.}$$

7.13. Порівняйте числа:

$$1) \frac{1}{x} \text{ і } \frac{1}{5}, \text{ якщо } x > 5; \quad 2) \frac{1}{b} \text{ і } \frac{1}{2}, \text{ якщо } 0 < b < 2.$$

7.14. Порівняйте числа:

$$1) \frac{1}{a} \text{ і } \frac{1}{9}, \text{ якщо } 0 < a < 9; \quad 2) \frac{1}{c} \text{ і } \frac{1}{3}, \text{ якщо } c > 3.$$

7.15. Оцініть значення виразу $\frac{1}{a}$, якщо $10 < a < 20$.

7.16. Оцініть значення виразу $\frac{1}{x}$, якщо $5 < x < 10$.

3 7.17. Порівняйте число a з нулем, якщо:

$$1) a + 2 > b + 2 \text{ і } b \geq 0,3; \quad 2) a - 3 < p - 3 \text{ і } p < -0,7;$$

$$3) 7a > 7x \text{ і } x > 8; \quad 4) -9a < -9b \text{ і } b \geq 13.$$

7.18. Порівняйте число x із нулем, якщо:

$$1) x - 5 < y - 5 \text{ і } y < -1; \quad 2) x + 7 > a + 7 \text{ і } a \geq 1;$$

$$3) 2x > 2p \text{ і } p > 0,17; \quad 4) -x > -t \text{ і } t \leq -2,5.$$

7.19. Чи правильне твердження:

$$1) \text{ якщо } a > 5, \text{ то } \frac{1}{a} < \frac{1}{5}; \quad 2) \text{ якщо } a < 5, \text{ то } \frac{1}{a} > \frac{1}{5}?$$

7.20. Відомо, що $x > y$. Порівняйте, якщо це можливо:

$$1) x + 2 \text{ і } y; \quad 2) y - 3 \text{ і } x; \quad 3) -x + 1 \text{ і } -y + 1;$$

$$4) -x \text{ і } -y + 8; \quad 5) -(x + 1) \text{ і } -y; \quad 6) x - 1 \text{ і } y + 2.$$

7.21. Відомо, що $a < b$. Порівняйте, якщо це можливо:

$$1) a - 2 \text{ і } b; \quad 2) b + 3 \text{ і } a; \quad 3) -a + 2 \text{ і } -b + 2;$$

$$4) -b - 7 \text{ і } -a; \quad 5) -a \text{ і } -(b + 3); \quad 6) a + 3 \text{ і } b - 1.$$

7.22. Відомо, що $1,2 < x < 1,5$. Оцініть значення виразу:

- 1) $2x + 0,7$; 2) $5 - x$; 3) $\frac{x}{3} - 1$; 4) $2 - 10x$.

7.23. Відомо, що $0,8 < a < 1,2$. Оцініть значення виразу:

- 1) $3a - 0,2$; 2) $4 - a$; 3) $\frac{a}{2} + 3$; 4) $10 - 5a$.

7.24. Оцініть значення виразу:

- 1) $\frac{20}{a}$, якщо $2 < a < 5$; 2) $\frac{1}{3a + 4}$, якщо $-1 < a < 2$.

7.25. Оцініть значення виразу:

- 1) $\frac{100}{x}$, якщо $5 < x < 10$; 2) $\frac{1}{2x - 3}$, якщо $2 < x < 4$.

7.26. Ділянка землі має форму рівностороннього трикутника, периметр якого дорівнює P м. Оцініть сторону a (у м), якщо $126 < P < 150$.

7.27. Маса чотирьох однакових мішків із цукром дорівнює m кг. Оцініть масу p (у кг) одного такого мішка, якщо $192 < m < 204$.

4 7.28. Порівняйте x та y , якщо:

- 1) $x + 2 > m > y + 3$; 2) $x - 2 < p < y - 3$.

7.29. Порівняйте a і b , якщо:

- 1) $a + 3 < c < b + 2$; 2) $a - 7 > d > b - 5$.

7.30. Відомо, що $1 < a < 2$. Оцініть значення виразу $\frac{12}{7 - 3a}$.

7.31. Відомо, що $2 < b < 5$. Оцініть значення виразу $\frac{27}{13 - 2b}$.

7.32. Дано $-2 < x < 2$. Оцініть значення виразу $\frac{6}{x}$.

Вправи для повторення

7.33. Виконайте дії:

- 1) $\frac{x + 3y}{3x} - \frac{x + 2y}{2x}$; 2) $\frac{1}{m(m + n)} + \frac{1}{n(m + n)}$;
3) $\frac{3p^2}{p - 2} - 3p$; 4) $\frac{a}{a - 5} + \frac{5}{5 - a}$.

7.34. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x + 3}{x + 1} - \frac{x + 2}{1 - x} = \frac{x + 5}{x^2 - 1}$; 2) $\frac{3}{x} - \frac{x}{2 - x} = \frac{x + 2}{x^2 - 2x}$.

7.35. Доведіть, що значення виразу $8^{15} - 2^{40}$ кратне числу 31.

4 7.36. Відомо, що x_1 та x_2 – корені рівняння $2x^2 - 3x - 10 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $x_1^2 + x_2^2$.



Життєва математика

7.37. Незалежна експертна лабораторія визначає рейтинг R побутових приладів на підставі коефіцієнта цінності, у якому враховують 0,01 від середньої ціни P , показники функціональності F , якості Q та дизайну D . Кожен із показників оцінюють цілим числом від 0 до 4. Підсумковий рейтинг обчислюють за формулою $R = 4(2F + 2Q + D) - 0,01P$.

У таблиці подано середню ціну та оцінку кожного з показників для кількох моделей блендерів.

Визначте моделі з найвищим і найнижчим рейтингами серед тих, які подано в таблиці.

Модель блендера	Середня ціна, P (грн)	Функціональність, F	Якість, Q	Дизайн, D
А	2800	3	2	4
Б	3000	3	3	3
В	3150	4	2	4
Г	3400	4	3	2

Додаткове завдання. Спробуйте розв'язати задачу, використовуючи електронні таблиці, наприклад *Excel*.



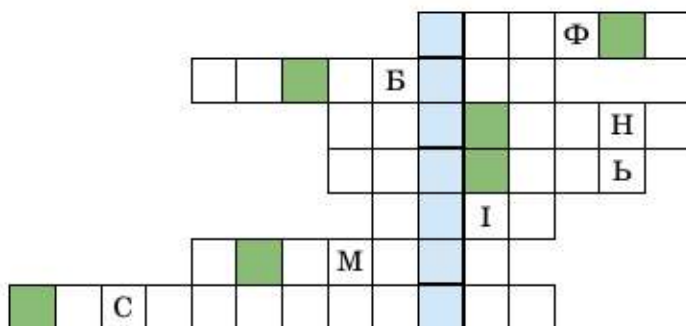
Цікаві задачі – поміркуй одначе

7.38. 1) Пригадайте алгебраїчні поняття та впишіть їх у рядки кросворда, деякі літери до якого вже внесено.



Якщо назви понять запишете правильно, то у виділеному стовпчику отримаєте назву гори – найвищої точки України, а з літер у зафарбованих клітинках можна буде скласти назву річки, що протікає територією України. Знайдіть ці назви.

2) Користуючись додатковими джерелами інформації, зокрема інтернетом, знайдіть відомості про ці географічні об'єкти.



§ 8. Почленне додавання і множення числових нерівностей

1. Почленне додавання числових нерівностей

Продовжимо розглядати властивості нерівностей.

Нехай маємо дві правильні нерівності одного й того самого знака: $2 < 5$ і $3 < 7$. Додамо їхні ліві частини, їхні праві частини й між результатами запишемо той самий знак: $2 + 3 < 5 + 7$. Отримаємо правильну числову нерівність, адже, справді, $5 < 12$. Дію, яку ми виконали, називають *почленним додаванням нерівностей*. Зауважимо, що почленно додавати можна лише нерівності одного знака.

Властивість 5 (про почленне додавання нерівностей).
Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Доведення. До обох частин нерівності $a < b$ додамо число c , а до обох частин нерівності $c < d$ – число b , отримаємо дві правильні нерівності: $a + c < b + c$ і $c + b < d + b$, тому $a + c < b + d$. ■

Аналогічно можна довести, якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.

Зауважимо, що властивість 5 справджується і для більш ніж двох нерівностей.

Приклад 1. Сторони деякого трикутника дорівнюють a см, b см і c см. Оцінити периметр трикутника P (у см), якщо $2,1 < a < 2,3$; $2,5 < b < 2,7$; $3,1 < c < 3,5$.

Розв'язання. Наведемо скорочений запис розв'язання:

$$\begin{array}{r} 2,1 < a < 2,3 \\ + \\ 2,5 < b < 2,7 \\ + \\ 3,1 < c < 3,5 \\ \hline 7,7 < a + b + c < 8,5. \end{array}$$

Отже, $7,7 < P < 8,5$.

Відповідь: $7,7 < P < 8,5$.

2. Почленне множення числових нерівностей

Аналогічна до почленного додавання двох і більше нерівностей властивість справджується і для *множення*. Почленно помноживши правильні нерівності $2 < 7$ і $3 < 4$, одержимо правильну нерівність $2 \cdot 3 < 7 \cdot 4$, адже $6 < 28$. Якщо почленно помножити правильні нерівності $-2 < -1$ і $2 < 8$, то одержимо $-4 < -8$ – неправильну нерівність. Зауважимо, що в першому випадку обидві частини нерівностей були додатними (2 і 7 ; 3 і 4), а у другому – деякі були від'ємними (-2 і -1).

Властивість 6 (про почленне множення нерівностей).
Якщо $a < b$ і $c < d$, де a, b, c, d – додатні числа, то $ac < bd$.

Доведення. Помножимо обидві частини нерівності $a < b$ на додатне число c , а обидві частини нерівності $c < d$ – на додатне число b , одержимо дві правильні нерівності: $ac < bc$ і $bc < bd$. Тоді $ac < bd$ (за властивістю 2). ■

Аналогічно можна довести, якщо $a > b$ і $c > d$, де a, b, c, d – додатні числа, то $ac > bd$.

Зауважимо, що властивість 6 справджується і для більш ніж двох нерівностей.



Наслідок. Якщо a і b – додатні числа і $a < b$, то $a^n < b^n$, де n – натуральне число.

Доведення. Перемноживши почленно n правильних нерівностей $a < b$, де a і b – додатні числа, отримаємо $a^n < b^n$. ■

3. Оцінювання значень виразів

За допомогою властивостей, які ми розглянули, можна оцінювати суму, різницю, добуток і частку чисел.

Приклад 2. Дано: $10 < a < 12$, $2 < b < 5$. Оцінити:

- 1) суму $a + b$; 2) добуток ab ; 3) різницю $a - b$; 4) частку $\frac{a}{b}$.

Розв'язання. 1) $10 < a < 12$

$$+ \quad 2 < b < 5$$

$$12 < a + b < 17$$

2) $10 < a < 12$

$$\times \quad 2 < b < 5$$

$$20 < ab < 60$$

3) Щоб оцінити різницю $a - b$, подамо її у вигляді суми $a - b = a + (-b)$ та оцінимо спочатку вираз $-b$.

Оскільки $2 < b < 5$, то, помноживши обидві частини нерівності на число -1 і змінивши знаки нерівності на протилежні, матимемо $-2 > -b > -5$, тобто $-5 < -b < -2$. Отже,

$$+ \quad 10 < a < 12$$

$$+ \quad -5 < -b < -2$$

$$5 < a - b < 10$$

4) Щоб оцінити частку $\frac{a}{b}$, подамо її у вигляді добутку: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

Оцінимо вираз $\frac{1}{b}$. Якщо $2 < b < 5$, то $\frac{1}{2} > \frac{1}{b} > \frac{1}{5}$, тобто $\frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$.

Отже,

$$\times \quad 10 < a < 12$$

$$\times \quad \frac{1}{5} < \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$$

$$2 < \frac{a}{b} < 6$$

Відповідь: 1) $12 < a + b < 17$; 2) $5 < a - b < 10$;

3) $20 < ab < 60$; 4) $2 < \frac{a}{b} < 6$.

4. Застосування властивостей до доведення нерівностей

За допомогою властивостей, які ми розглянули, можна також доводити нерівності.

Приклад 3. Довести, що $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$.

Доведення. Застосуємо до кожного множника лівої частини нерівності нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним (нерівність Коші). Матимемо:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{і} \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}.$$

Обидві частини кожної із цих нерівностей за властивістю 4 помножимо на 2, отримаємо:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad \text{і} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}}.$$

Перемножимо ці нерівності почленно:

$$\begin{array}{r} x + y \geq 2\sqrt{xy} \\ \times \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}} \\ \hline (x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4\sqrt{xy} \cdot \sqrt{\frac{1}{xy}}. \end{array}$$

Отже, $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$. ■

? Що мають на увазі під почленным додаванням нерівностей? **○** Сформулюйте й доведіть властивість про почленне додавання нерівностей. **○** Що мають на увазі під почленным множенням нерівностей? **○** Сформулюйте й доведіть властивість про почленне множення нерівностей. **○** Сформулюйте наслідок із властивості про почленне множення нерівностей.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 8.1. Додайте почленно нерівності:

1) $3 < 9$ і $10 < 14$; 2) $-2 > -5$ і $3 > 0$.

8.2. Додайте почленно нерівності:

1) $8 > 3$ і $10 > 7$; 2) $-3 < -1$ і $-5 < 1$.

8.3. Перемножте почленно нерівності:

1) $3 > 1$ і $5 > 2$;
2) $7 < 10$ і $2 < 5$.

8.4. Перемножте почленно нерівності:

1) $5 < 7$ і $1 < 10$; 2) $7 > 3$ і $5 > 1$.

8.5. (Усно.) Чи отримаємо правильну нерівність, перемноживши почленно нерівності:

1) $-2 < -1$ і $5 < 17$; 2) $0 > -3$ і $1 > -5$?

2 8.6. Оцініть значення виразу $a + b$, якщо:

1) $-3 < a < 5$ і $0 < b < 7$; 2) $2 < a < 7$ і $-10 < b < -8$.

8.7. Оцініть значення виразу $m + n$, якщо:

1) $3 < m < 7$ і $0 < n < 2$; 2) $-3 < m < -2$ і $-5 < n < -1$.

8.8. Оцініть значення виразу xy , якщо:

1) $1 < x < 2$ і $5 < y < 10$; 2) $3 < x < 4,5$ і $1 < y < 10$.

8.9. Оцініть значення виразу cd , якщо:

1) $2 < c < 10$ і $1,5 < d < 2,5$; 2) $\frac{1}{3} < c < 1$ і $3 < d < 8$.

8.10. Відомо, що $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$; $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$. Оцініть:

1) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; 2) $\sqrt{10}$.

8.11. 1) Оцініть значення виразу $3a + b$, де $-1 < a < 10$, $2 < b < 16$.

 2) Найбільше ціле значення виразу вкаже кількість перемог, які здобув український боксер Віталій Кличко за роки професійної кар'єри.

8.12. 1) Оцініть значення виразу $2x + y$, де $-2 < x < 1$, $2 < y < 7$.

 2) Найбільше ціле значення виразу вкаже кількість медалей, які здобула жіноча збірна України із шахів на всесвітніх шахових олімпіадах.

8.13. Оцініть значення виразу p^2 , якщо $2 < p < 3$.

8.14. Оцініть значення виразу m^2 , якщо $1 < m < 5$.

8.15. Відомо, що $x > 3$, $y > 4$. Чи правильне твердження:

1) $x + y > 7$; 2) $x + y > 6$; 3) $x + y > 8$;
4) $xy > 12$; 5) $xy > 13$; 6) $xy > 10$?

3 8.16. Відомо, що $x < 3$, $y < 4$. Чи можна стверджувати, що $xy < 12$?

8.17. Відомо, що $-3 < x < 4$, $1 < y < 4$. Оцініть значення виразу:

1) $x - y$; 2) $3x - y$;
3) $2y - x$; 4) $2x - 3y$.

8.18. Відомо, що $-2 < a < 0$, $3 < b < 5$. Оцініть значення виразу:

1) $a - b$; 2) $2a - b$;
3) $3b - a$; 4) $4a - 5b$.

8.19. Дано: $5 < a < 10$, $1 < b < 2$. Оцініть значення виразу:

1) $\frac{a}{b}$; 2) $\frac{4b}{3a}$.

8.20. Дано: $2 < x < 4$, $1 < y < 5$. Оцініть значення виразу:

1) $\frac{x}{y}$; 2) $\frac{5y}{2x}$.

8.21. Поле має форму прямокутника зі сторонами a км і b км. Оцініть периметр P поля, якщо $2,3 < a < 2,5$, $3,1 < b < 3,7$.



8.22. Уляна вирізала елемент одягу для ляльки-мотанки, що має форму рівнобедреного трикутника з основою x см і бічною стороною y см. Оцініть, скільки тасьми (у см) знадобиться дівчині, щоб обшити цей елемент одягу, якщо $10 < x < 12$, $9 < y < 11$.



8.23. Оцініть міру кута A трикутника ABC , якщо $50^\circ < \angle B < 52^\circ$, $60^\circ < \angle C < 65^\circ$.



8.24. Дано: $a > 4$, $b < -3$. Доведіть, що:

1) $a - b > 7$; 2) $2a - b > 11$;
3) $5b - a < -19$; 4) $6b - 11a < -60$.

8.25. Дано: $m > 6$, $n < -1$. Доведіть, що:

1) $m - n > 7$; 2) $3m - n > 13$;
3) $2n - m < -8$; 4) $4n - 5m < -34$.

8.26. Доведіть нерівність:

1) $(x^3 + y)(x + y^3) \geq 4x^2y^2$, якщо $x \geq 0$, $y \geq 0$;
2) $(m + 6)(n + 3)(p + 2) \geq 48\sqrt{mnp}$, якщо $m \geq 0$, $n \geq 0$, $p \geq 0$;
3) $(a + 1)(b + 1)(c + 1) > 32$, якщо $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $abc = 16$.

8.27. Доведіть нерівність:

1) $(mn + 1)(m + n) \geq 4mn$, якщо $m \geq 0$, $n \geq 0$;
2) $(a + 2c)(b + 2a)(c + 2b) \geq 16\sqrt{2}abc$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$;
3) $(x + 3)(y + 3)(z + 3) > 72$, якщо $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ і $xyz = 3$.

8.28. Доведіть нерівність:

1) $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \geq 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$;
2) $\left(1 + x + \frac{1}{x}\right)\left(1 + y + \frac{1}{y}\right) \geq 9$, якщо $x > 0$, $y > 0$.

8.29. Маса однієї цукерки з білого шоколаду дорівнює m_1 г, а із чорного – m_2 г. Пакет містить 10 цукерок з білого шоколаду і 12 – із чорного. Оцініть (у г) масу M п'яти таких пакетів, якщо маса самого пакета 5 г і $24,5 < m_1 < 25,2$, $26 < m_2 < 26,5$.



Вправи для повторення

8.30. Виконайте дії:

1) $\frac{4c^2 - 4c + 1}{5c + 5} \cdot \frac{c + 1}{2c - 1}$; 2) $\frac{p - 2}{m^2 + 2m} : \frac{p - 2}{5m + 10}$.

8.31. Після того як змішали 6-відсотковий і 3-відсотковий розчини солі, отримали 300 г 4-відсоткового розчину. По скільки грамів кожного розчину змішали?

8.32. Обчисліть: $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$.

8.33. Побудуйте графік функції $y = \frac{12 - 6x}{x^2 - 2x}$.



Життєва математика

8.34. 1) Олена Семенівна придбала американський позашляховик, спідометр якого показує швидкість у милях за годину. Американська миля дорівнює 1609 м. Знайдіть швидкість позашляховика в кілометрах за годину в момент, коли спідометр показує 60 миль за годину. Відповідь округліть до десятих км/год.

2) Щоб спростити обчислення, Олена Семенівна для визначення швидкості в км/год вирішила множити показники спідометра на число 1,6. Знайдіть абсолютну похибку (у км/год) такого обчислення, якщо спідометр показує 70 миль за годину.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

8.35. Чи є число 2 розв'язком рівняння:

- | | |
|---------------------------|---------------------------------|
| 1) $2x - 1 = 5$; | 2) $x^2 + x = 6$; |
| 3) $3x - 7 = -1$; | 4) $x^2 + x + 9 = 2x + 7$; |
| 5) $x^3 + x^2 + x = 14$; | 6) $\frac{x + 8}{x - 1} = 10$? |

8.36. Чи правильна нерівність $25 - x > 20$, якщо $x = -5$; 3; 5; 11?

8.37. До кожної нерівності доберіть два таких значення x , щоб для кожного з них вона була правильною:

- | | |
|------------------|---------------------|
| 1) $x \geq 5$; | 2) $x < -2$; |
| 3) $x + 7 > 9$; | 4) $x - 3 \leq 0$; |
| 5) $2x \geq 9$; | 6) $-3x < -12$. |

8.38. Які із запропонованих виразів є додатними для всіх значень змінної, а які – невід'ємними:

- | | |
|------------------|-----------------------|
| 1) x^2 ; | 2) $(x - 3)^2 + 1$; |
| 3) $(x + 5)^2$; | 4) $(x + 7)^2 + 11$? |



Цікаві задачі – поміркуй одначе

8.39. (Українська математична олімпіада, 1962 р.). Знайдіть значення виразу

$$a^3 + b^3 + 3(a^3b + ab^3) + 6(a^3b^2 + a^2b^3),$$

де a і b – корені рівняння $x^2 - x + q = 0$.

§ 9. Нерівності зі змінними. Розв'язок нерівності

Розглянемо нерівність $2x + 1 > 11$. Це нерівність зі змінною. За одних значень змінної x вона перетворюється на правильну числову нерівність, а за інших – на неправильну. Справді, якщо замість x підставити, наприклад, число 8, то матимемо нерівність $2 \cdot 8 + 1 > 11$, що є правильною, якщо підставити число 4, то матимемо нерівність $2 \cdot 4 + 1 > 11$, що є неправильною. У такому разі кажуть, що число 8 є *розв'язком нерівності* $2x + 1 > 11$ (або число 8 *задовольняє нерівність* $2x + 1 > 11$), а число 4 – не є розв'язком цієї нерівності (або число 4 *не задовольняє нерівність* $2x + 1 > 11$).

Також розв'язками нерівності $2x + 1 > 11$ є, наприклад, числа 34; 5,5; $\sqrt{90}$; $7\frac{1}{8}$ тощо.

Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її у правильну числову нерівність.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Приклад. Розв'язати нерівності:

$$1) \sqrt{x} > 0; \quad 2) \frac{1}{x^2 + 1} \leq 0.$$

Розв'язання. 1) $\sqrt{x}$ набуває невід'ємних значень для всіх $x \geq 0$, причому $\sqrt{x} = 0$ тоді й тільки тоді, якщо $x = 0$. Отже, розв'язком нерівності є будь-яке додатне число, тобто $x > 0$.

2) Оскільки $x^2 \geq 0$ для будь-якого значення x , то $x^2 + 1 > 0$ для будь-якого x . Тому значення виразу $\frac{1}{x^2 + 1}$ також є додатним

для будь-якого x . Отже, нерівність $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 0$ є неправильною для кожного значення x , тобто не має розв'язків.

Відповідь: 1) $x > 0$; 2) нерівність не має розв'язків.

 Наведіть приклад нерівності з однією змінною.  Що називають розв'язком нерівності з однією змінною?  Що означає розв'язати нерівність?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 9.1. (Усно.) Чи є розв'язком нерівності $x > 3$ число:

- 1) -2; 2) 5; 3) 2,7;
4) 0; 5) 3,01; 6) 17?

9.2. Чи є розв'язком нерівності $x < 7$ число:

- 1) 8; 2) -2; 3) 0; 4) 4,7; 5) 8,1; 6) 13?

9.3. Запишіть три будь-яких розв'язки нерівності $x \leq -2$.

9.4. Запишіть три будь-яких розв'язки нерівності $x \geq 4$.

2 9.5. Які із чисел є розв'язками нерівності $x^2 + 3x \leq 3 + x$:

- 1) 2; 2) 0; 3) -4;
4) 1; 5) 3; 6) -3?

9.6. Які із чисел є розв'язками нерівності $x^2 + 4x \geq 6 + 3x$:

- 1) 4; 2) 0; 3) -3;
4) 1; 5) 2; 6) -1?

9.7. Запишіть два будь-яких розв'язки нерівності $\sqrt{x-1} > 3$.

9.8. Запишіть два будь-яких розв'язки нерівності $\sqrt{x+2} < 7$.

9.9. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності $15\frac{1}{3} < x \leq 19$.

3 9.10. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності $\frac{20}{x} < -8$.

9.11. Знайдіть усі цілі розв'язки нерівності $-\frac{30}{x} < -7$.

9.12. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $x^2 > 0$; 2) $-x^2 < 0$; 3) $x^2 \geq 0$;
4) $x^2 \leq 0$; 5) $(x-1)^2 > 0$; 6) $(x-1)^2 \geq 0$;
7) $(x-1)^2 < 0$; 8) $(x-1)^2 \leq 0$; 9) $x^2 + 9 < 0$.

9.13. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $(x+2)^2 \geq 0$; 2) $(x+2)^2 > 0$; 3) $(x+2)^2 < 0$;
4) $(x+2)^2 \leq 0$; 5) $\frac{1}{x^2} + 13 < 0$; 6) $x^2 + 5 \geq 0$.

4 9.14. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{x+2}{x+2} > 0,5$; 2) $\frac{x-3}{x-3} \leq 0,7$; 3) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \geq 0$;
4) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 > 0$; 5) $\frac{(x+3)^2}{x} > 0$; 6) $\frac{(x-1)^2}{x} \leq 0$.

9.15. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{x-3}{x-3} > -2$; 2) $\frac{x+7}{x+7} < -1$; 3) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \geq 0$;
4) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 > 0$; 5) $\frac{(x-3)^2}{x} > 0$; 6) $\frac{(x+1)^2}{x} \leq 0$.



Вправи для повторення

9.16. Спростіть вираз:

1) $(3 + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2 - 9$.

9.17. Доведіть тотожність:

$$\frac{x^2 + x}{(x - 1)^2} : \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right) = \frac{x}{x - 1}.$$

9.18. Побудуйте графік рівняння $|x - y| = 3$.

Життєва математика

9.19. Діагональ екрана телевізора дорівнює 48 дюймів. Запишіть довжину діагоналі екрана в сантиметрах, якщо в одному дюймі 2,54 см. Результат округліть до цілого числа сантиметрів.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

9.20. Де на координатній прямій містяться числа, якщо вони:

- 1) більші за число 5; 2) менші від числа 3;
3) більші за число 5, але менші від числа 9?

9.21. Укажіть кілька значень змінної, які задовольняють нерівність:

- 1) $x < -2$; 2) $x > 3$; 3) $-2 \leq x \leq 3$; 4) $-2 < x < 3$.

9.22. Між якими цілими числами міститься число:

- 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{13}$; 4) $-\sqrt{3}$?

9.23. Укажіть елементи множини:

- 1) $A = \{4; 7; 10\}$; 2) $B = \{\Delta; \square; !\}$.

9.24. 1) Наведіть приклади скінченних множин та нескінченних множин.

2) Як називають множину дійсних розв'язків рівняння $|x| = -4$?9.25. Назвіть спільні елементи множин $A = \{1; 3; 5; 7\}$ і $B = \{2; 3; 4; 5\}$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

9.26. Першу половину шляху пішохід рухався зі швидкістю, на 25 % більшою від запланованої. На скільки відсотків меншою від запланованої може бути тепер його швидкість на другій половині шляху, щоб прибути до пункту призначення вчасно?

§ 10. Числові проміжки

1. Поняття про числовий проміжок

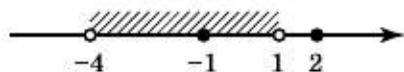
Множину розв'язків нерівності зручно записувати за допомогою числових проміжків.

Приклад 1. Розглянемо подвійну нерівність з однією змінною $-4 < x < 1$. Цю нерівність задовольняють усі числа, які більші за -4 і менші від 1 , тобто ті числа, що на координатній прямій містяться між числами -4 і 1 . Множину всіх чисел, що задовольняють нерівність $-4 < x < 1$, називають *числовим проміжком*, або просто *проміжком*, від -4 до 1 і позначають: $(-4; 1)$ (читають: «проміжок від -4 до 1 »). Щоб показати на координатній прямій множину всіх чисел, що належать проміжку $(-4; 1)$, його виділяють штриховкою, як показано на малюнку 10.1. При цьому точки -4 і 1 зображують «порожніми» або «виколотими».



Мал. 10.1

Число -1 задовольняє нерівність $-4 < x < 1$, а число 2 їй не задовольняє. У такому разі кажуть, що число -1 належить проміжку $(-4; 1)$, а число 2 йому не належить (мал. 10.2). Отже, кожне число, що задовольняє нерівність $-4 < x < 1$, належить проміжку $(-4; 1)$, і, навпаки, кожне число, що належить проміжку $(-4; 1)$, задовольняє нерівність $-4 < x < 1$.



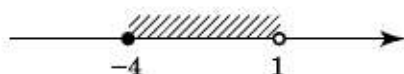
Мал. 10.2

Приклад 2. Подвійну нерівність $-4 \leq x \leq 1$ задовольняють не тільки всі числа, які більші за -4 і менші від 1 , а й самі числа -4 і 1 . Множину цих чисел позначають $[-4; 1]$ (читають: «проміжок від -4 до 1 , включаючи -4 і 1 »). У такому разі на координатній прямій виділяють проміжок між числами -4 і 1 разом із цими числами (мал. 10.3).



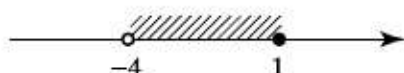
Мал. 10.3

Приклад 3. Множину чисел, що задовольняє подвійну нерівність $-4 \leq x < 1$, позначають: $[-4; 1)$ (читають: «проміжок від -4 до 1 , включаючи -4 »). Цей проміжок зображено на малюнку 10.4.



Мал. 10.4

Приклад 4. Множину чисел, що задовольняє подвійну нерівність $-4 < x \leq 1$, позначають: $(-4; 1]$ (читають: «проміжок від -4 до 1 , включаючи 1 »). Цей проміжок зображено на малюнку 10.5.



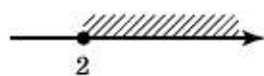
Мал. 10.5

Приклад 5. Нерівність $x > 2$ задовольняють усі числа, які більші за 2 , тобто ті числа, що на координатній прямій лежать праворуч від числа 2 . Множину цих чисел позначають $(2; +\infty)$ (читають: «проміжок від 2 до плюс нескінченності») і зображують променем, що виходить із «порожньої» точки з координатою 2 (мал. 10.6).



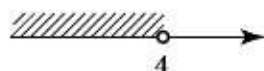
Мал. 10.6

Приклад 6. Нерівність $x \geq 2$ задовольняють усі числа, які більші за 2, і саме число 2. Множину цих чисел позначають $[2; +\infty)$ (читають: «проміжок від 2 до плюс нескінченності, включаючи 2») і зображують променем, що лежить праворуч від точки з координатою 2, включаючи цю точку (мал. 10.7).



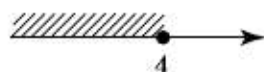
Мал. 10.7

Приклад 7. Множину чисел, що задовольняють умову $x < 4$, записують так: $(-\infty; 4)$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до 4»). Множину зображено на малюнку 10.8.



Мал. 10.8

Приклад 8. Множину чисел, що задовольняють умову $x \leq 4$, записують так: $(-\infty; 4]$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до 4, включаючи 4»), її зображено на малюнку 10.9.



Мал. 10.9

Отже, якщо кінець проміжка включається у проміжок (наприклад, коли нерівність нестрога), то біля цього кінця записують квадратну дужку, в усіх інших випадках записують круглу дужку.



Множину всіх чисел зображують усією координатною прямою та позначають проміжком $(-\infty; +\infty)$. Множину, яка не містить жодного числа, позначають $\emptyset$ і називають *порожньою множиною*.

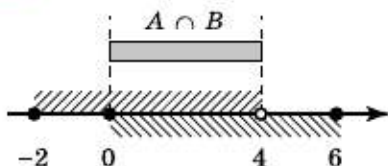
2. Операції над числовими проміжками

Над числовими проміжками можна виконувати певні дії (*операції*). Розглянемо дві з них: *перетин* та *об'єднання*.

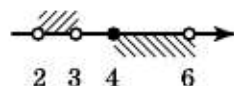
Перетин записують за допомогою символу $\cap$.

Перетином числових проміжків називають множину, що містить усі числа, які належать кожному із цих проміжків.

Приклад 9. $[-2; 4) \cap [0; 6] = [0; 4)$ (мал. 10.10).



Мал. 10.10

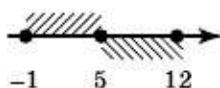


Мал. 10.11

Зауважимо, що перетин проміжків не завжди є проміжком. Це може бути і точка, і порожня множина.

Приклад 10. Проміжки $(2; 3)$ і $[4; 6)$ не мають спільних точок (мал. 10.11), тому їх перетином є порожня множина. Записати це можна так: $(2; 3) \cap [4; 6) = \emptyset$.

Приклад 11. Проміжки $[-1; 5]$ і $[5; 12]$ мають лише одну спільну точку (мал. 10.12). Записують це так: $[-1; 5] \cap [5; 12] = \{5\}$.

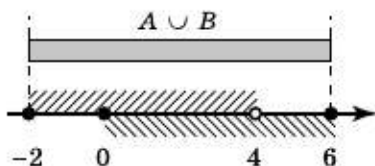


Мал. 10.12

Об'єднанням числових проміжків називають множину, що складається з усіх чисел, які належать хоча б одному із цих проміжків.

Об'єднання записують за допомогою символу $\cup$.

Приклад 12. $[-2; 4] \cup [0; 6] = [-2; 6]$ (мал. 10.13).



Мал. 10.13

Зауважимо, що об'єднання проміжків не завжди є проміжком. Наприклад, множина $(2; 3) \cup [4; 6]$ не є проміжком (мал. 10.11).

? Наведіть приклади числових проміжків різних видів, запишіть їх та зобразіть на координатній прямій. **○** Що називають перетином числових проміжків? **○** Що називають об'єднанням числових проміжків?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 10.1. Зобразіть на координатній прямій проміжок:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1) $(-2; 1)$; | 2) $(-4; 2]$; | 3) $[1; 5)$; | 4) $[3; 7]$; |
| 5) $(-\infty; 3)$; | 6) $[4; +\infty)$; | 7) $(-\infty; 0]$; | 8) $(5; +\infty)$. |

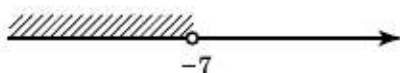
10.2. Зобразіть на координатній прямій проміжок:

- | | | | |
|----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| 1) $[4; 6)$; | 2) $(-1; 7)$; | 3) $[3; 4]$; | 4) $(0; 2]$; |
| 5) $(-3; +\infty)$; | 6) $(-\infty; 4]$; | 7) $[0; +\infty)$; | 8) $(-\infty; -1)$. |

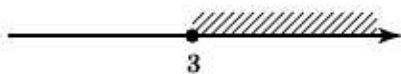
10.3. Запишіть проміжки, які зображено на малюнках 10.14–10.17.



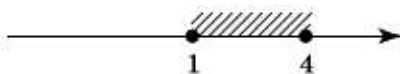
Мал. 10.14



Мал. 10.15

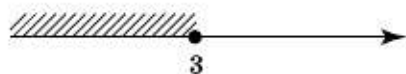


Мал. 10.16

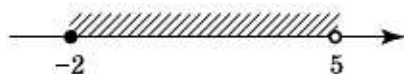


Мал. 10.17

10.4. Запишіть проміжки, які зображено на малюнках 10.18–10.21.



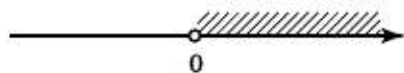
Мал. 10.18



Мал. 10.19



Мал. 10.20



Мал. 10.21

10.5. Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задано нерівністю:

- 1) $x > 3$; 2) $x \leq -8$; 3) $x \geq -1$;
 4) $x < 2$; 5) $1,8 \leq x < 2$; 6) $2,5 \leq x \leq 3\frac{1}{8}$;
 7) $3,9 < x < 4$; 8) $7 < x \leq 7,01$.

10.6. Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задано нерівністю:

- 1) $x \geq 5$; 2) $x < 4,5$;
 3) $1,8 \leq x < 5$; 4) $1,9 < x < 4$.

10.7. (Усно.) Чи належить проміжку $[-1,01; 1,02]$ число:

- 1) $-1,1$; 2) $0,9$; 3) $1,03$;
 4) $-1,11$; 5) $1,015$; 6) $-1,009$?

10.8. Запишіть усі цілі числа, що належать проміжку:

- 1) $(-2; 1)$; 2) $[-1,8; 2]$;
 3) $(3; 4)$; 4) $(-2,6; 1,6)$.

10.9. Які натуральні числа належать проміжку:

- 1) $(-0,1; 4,9)$; 2) $[1; \sqrt{5})$; 3) $(-3; 0,7]$; 4) $[2; 3,99)$?

10.10. Запишіть два додатних і два від'ємних числа, що належать проміжку:

- 1) $(-2; 7)$; 2) $[-1; 1]$.

10.11. Знайдіть найменше ціле число, що належить проміжку:

- 1) $(0; 8)$; 2) $(-5; 2)$;
 3) $[4; 7)$; 4) $(0,5; +\infty)$.

10.12. Знайдіть найбільше ціле число, що належить проміжку:

- 1) $(-2; 9)$; 2) $(-\infty; 4,5)$; 3) $[0; 17,2]$; 4) $(-1; 0,99)$.

10.13. 1) Знайдіть найбільше і найменше натуральні числа, що належать проміжку $[\sqrt{5}; \sqrt{39})$.

2) Знайдіть добуток цих чисел, відтак дізнаєтеся, скільки медалей Паралімпійських ігор має українка Олена Юрковська.

10.14. Чи належить проміжку $(1,6; 4,5]$ число:

- 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{12}$; 4) $\sqrt{21}$?

10.15. Чи належить проміжку $[2,5; 6,1)$ число:

- 1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{15}$; 4) $\sqrt{39}$?

10.16. Зобразіть проміжки на координатній прямій і запишіть їх перетин:

- 1) $[-2; 3]$ і $[0; 4]$; 2) $[-5; 4]$ і $(-2; 1)$;
3) $(-\infty; 2)$ і $(-\infty; 3]$; 4) $(-\infty; 4)$ і $[0; +\infty)$;
5) $[2; 3]$ і $(2; 8)$; 6) $(-2; 1)$ і $(2; 5)$.

10.17. Зобразіть проміжки на координатній прямій і запишіть їх перетин:

- 1) $(-1; 8)$ і $(0; 9)$; 2) $(-2; 4]$ і $[1; 2)$;
3) $(-\infty; 1)$ і $(-2; 3)$; 4) $[1; 5)$ і $[6; +\infty)$.

10.18. Зобразіть проміжки на координатній прямій і запишіть їх об'єднання:

- 1) $(-3; 1)$ і $(0; 4]$; 2) $[0; 1)$ і $[-2; 1]$;
3) $[3; 8)$ і $[4; 5]$; 4) $(-\infty; 3)$ і $[2,8; 4)$;
5) $[1; 3)$ і $[3; 5]$; 6) $(0; 1)$ і $(2; +\infty)$.

10.19. Зобразіть проміжки на координатній прямій і запишіть їх об'єднання:

- 1) $[-2; 3)$ і $(2; 5]$; 2) $(2; 4)$ і $[2; 10)$;
3) $(-\infty; 0)$ і $[0; 1]$; 4) $(-\infty; 4)$ і $(3; +\infty)$.



Вправи для повторення

10.20. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{m^2 - 5}{m + \sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{m - 2\sqrt{mn} + n}$.

10.21. Доведіть нерівність $(x + 5)(x - 9) < (x - 2)^2$.

10.22. На перегоні 120 км завдовжки поїзд рухався зі швидкістю на 10 км/год меншою, ніж зазвичай за розкладом, тому запізнився на 24 хв. З якою швидкістю мав рухатися поїзд за розкладом?

10.23. Знайдіть значення виразу $x + \frac{1}{x}$, якщо $x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

10.24. Знайдіть корені лінійного рівняння:

- 1) $2x = 6$; 2) $6x = -12$; 3) $-4x = 160$;
4) $-5x = -20$; 5) $0x = 7$; 6) $0x = 0$.

10.25. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2x - 3 = 3x + 7$; 2) $2(x - 3) = 7(x + 2) - 1$;
3) $2(x - 3) - (x + 2) = 1 - 3x$; 4) $\frac{x + 1}{2} - \frac{x - 2}{3} = 2$.

10.26. Чи є рівносильними рівняння:

1) $-3x = 12$ та $x + 7 = 3$;

2) $2x = 18$ та $x + 1 = -8$?

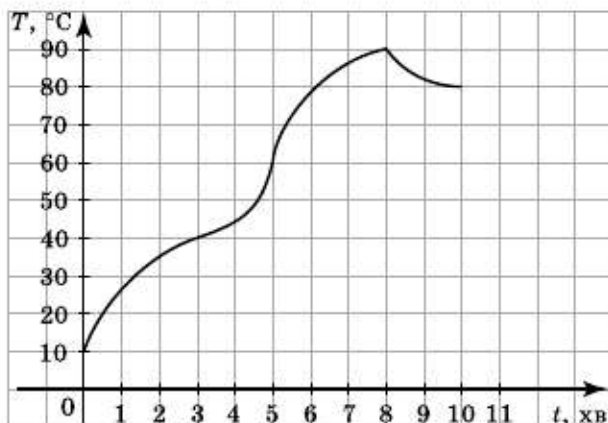


Життєва математика

10.27. На малюнку зображено графік процесу розігрівання двигуна легкового автомобіля. На осі абсцис відкладено час у хвилинах, що минув від запуску двигуна, на осі ординат – температуру двигуна у градусах Цельсія.

За графіком визначте:

- 1) на якій хвилині температура двигуна досягла значення 60°C ;
- 2) скільки хвилин двигун нагрівався від температури 40°C до температури 90°C ;
- 3) скільки хвилин двигун охолоджувався від температури 90°C до температури 80°C ;
- 4) на скільки градусів нагрівся двигун за перші три хвилини.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

10.28. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{x^2 + x + 2}{3x^2 + 5x - 14} = \frac{x^2 + x + 6}{3x^2 + 5x - 10}$$

§ 11. Лінійні нерівності з однією змінною. Рівносильні нерівності

1. Лінійна нерівність з однією змінною та її розв'язування

Нерівності вигляду $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$, де x – змінна, a і b – деякі числа, називають **лінійними нерівностями з однією змінною**.

Якщо $a \neq 0$, то обидві частини нерівності можна поділити на a , урахувавши при цьому властивість числових нерівностей, тобто якщо $a > 0$, то знак нерівності залишаємо без змін; якщо $a < 0$, то знак нерівності змінюємо на протилежний.

Приклад 1. Розв'язати нерівність:

1) $2x \geq 18$; 2) $-3x > -15$.

Розв'язання. 1) Поділивши обидві частини нерівності на 2, отримаємо: $x \geq 9$. Отже, розв'язком нерівності є проміжок $[9; +\infty)$.

2) Поділивши обидві частини нерівності на -3 та змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, отримаємо: $x < 5$, тобто $x \in (-\infty; 5)$.

Відповідь: 1) $[9; +\infty)$; 2) $(-\infty; 5)$.

Зауважимо, що відповідь можна було записати й так:

1) $x \geq 9$; 2) $x < 5$.

2. Рівносильні нерівності. Властивості нерівностей зі змінними

Нерівності, що мають одні й ті самі розв'язки, називають *рівносильними*. Нерівності, що не мають розв'язків, також є *рівносильними*.

Для нерівностей зі змінними справджуються *властивості*, подібні до тих, що справджуються і для рівнянь:

- 1) якщо в будь-якій частині нерівності розкрити дужки або звести подібні доданки, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- 2) якщо в нерівності перенести доданок з однієї її частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- 3) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній; якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

3. Розв'язування нерівностей, що зводяться до лінійних

Щоб розв'язати рівняння, ми зводимо його до рівносильного йому простішого рівняння. Аналогічно, користуючись властивостями нерівностей, можна розв'язувати й нерівності, замінюючи їх простішими нерівностями, їм рівносильними.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{x+2}{2} - \frac{x+6}{3} \geq \frac{x}{6}$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини нерівності на найменший спільний знаменник дробів – число 6, далі спростимо її ліву частину та перенесемо доданки зі змінною в ліву частину нерівності, а без змінної – у праву.

$$\frac{6(x+2)}{2} - \frac{6(x+6)}{3} \geq \frac{6 \cdot x}{6};$$

$$3(x+2) - 2(x+6) \geq x;$$

$$3x + 6 - 2x - 12 \geq x;$$

$$3x - 2x - x \geq 12 - 6;$$

$$0x \geq 6.$$

Отримали нерівність, рівносильну початковій. Вона не має розв'язків, оскільки за будь-якого значення x ліва частина нерівності дорівнюватиме нулю, а нерівність $0 \geq 6$ є неправильною.

Відповідь: розв'язків немає.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $(x+3)^2 - x^2 < 6x + 10$.

Розв'язання. Розкривши дужки, маємо:

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 < 6x + 10;$$

$$6x - 6x < 10 - 9;$$

$$0x < 1.$$

Остання нерівність рівносильна початковій і є правильною за будь-якого значення x , оскільки за будь-якого значення x її ліва частина дорівнюватиме нулю, а нерівність $0 < 1$ є правильною. Отже, розв'язком нерівності є будь-яке число, тобто множиною розв'язків є проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

З прикладів 2 і 3 можна дійти висновку, що

нерівності вигляду $0x > b$, $0x \geq b$, $0x < b$, $0x \leq b$ або не мають розв'язків, або їх розв'язком є будь-яке число.

Приклад 4. Для будь-якого значення m розв'язати нерівність

$$mx - m^2 < x - 1, \text{ де } x - \text{змінна.}$$

Розв'язання. Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину нерівності, інші – у праву частину, щоб звести нерівність до вигляду лінійної:

$$mx - x < m^2 - 1;$$

$$(m-1)x < m^2 - 1.$$

Значення виразу $m-1$ для різних значень m може бути додатним, від'ємним або нулем, тому розглянемо кожен із цих випадків окремо:

$$1) m-1 > 0; \quad 2) m-1 = 0; \quad 3) m-1 < 0.$$

- 1) Якщо $m - 1 > 0$, тобто $m > 1$, то, поділивши ліву і праву частини нерівності на додатне число $m - 1$, матимемо:

$$x < \frac{m^2 - 1}{m - 1};$$

$$x < \frac{(m - 1)(m + 1)}{m - 1};$$

$$x < m + 1.$$

- 2) Якщо $m - 1 = 0$, тобто $m = 1$, отримаємо нерівність $0 \cdot x < 0$, яка розв'язків не має.

- 3) Якщо $m - 1 < 0$, тобто $m < 1$, то, поділивши ліву і праву частини нерівності на від'ємне число $m - 1$ і змінивши знак нерівності на протилежний, отримаємо:

$$x > \frac{m^2 - 1}{m - 1};$$

$$x > m + 1.$$

Відповідь: якщо $m < 1$, то $x > m + 1$; якщо $m = 1$, то розв'язків немає; якщо $m > 1$, то $x < m + 1$.



Які нерівності називають лінійними нерівностями з однією змінною? Наведіть приклади таких нерівностей. Які нерівності називають рівносильними? Сформулюйте властивості нерівностей, які використовують для розв'язування нерівностей. Що можна сказати про розв'язки нерівностей вигляду $0x > b$; $0x \geq b$; $0x < b$; $0x \leq b$?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 11.1. (Усно.) Які з нерівностей є лінійними:

1) $\frac{1}{3}x > -5$; 2) $2x^2 - 3 \geq 0$; 3) $-3x \leq 6$; 4) $\frac{1}{x} < 3$?

- 11.2. (Усно.) Чи рівносильні нерівності:

1) $2x - 7 > 4$ і $2x > 4 + 7$; 2) $3x > 9$ та $x < 3$?

- 11.3. Чи рівносильні нерівності:

1) $3x + 2 > 5$ і $3x > 5 + 2$; 2) $5x \leq 10$ та $x \leq 2$?

- 2** 11.4. Розв'яжіть нерівність і зобразіть множину її розв'язків на координатній прямій:

1) $x + 7 \geq 3$; 2) $x - 5 < 2$;
3) $x + 9 \leq -17$; 4) $x - 7 > -8$.

- 11.5. Розв'яжіть нерівність і зобразіть множину її розв'язків на координатній прямій:

1) $x - 5 \leq 6$; 2) $x + 7 > -9$;
3) $x - 7 \geq 12$; 4) $x + 7 < -5$.

- 11.6. Знайдіть розв'язки нерівності:

1) $4x > 8$; 2) $8x \leq 72$; 3) $-9x \geq -63$; 4) $-x < 5$;
5) $5x \geq 11$; 6) $6x < 1,2$; 7) $-18x > -27$; 8) $-3x \leq 0$.

11.7. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $6x > 12$; 2) $7x < 42$; 3) $-x \geq -8$; 4) $-12x \leq 24$;
 5) $7x \leq 13$; 6) $4x > 1,6$; 7) $12x < -18$; 8) $-9x \geq 0$.

11.8. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{1}{3}x \geq -2$; 2) $\frac{2}{9}x < 10$; 3) $-\frac{1}{4}x \leq -6$; 4) $-\frac{3}{7}x > -21$.

11.9. Знайдіть розв'язки нерівності:

- 1) $\frac{1}{6}x < -3$; 2) $\frac{2}{3}x \geq 18$; 3) $-\frac{3}{8}x \leq -12$; 4) $-\frac{7}{6}x > 42$.

11.10. Розв'яжіть нерівність і вкажіть три будь-яких числа, що є її розв'язками:

- 1) $-3x < 12$; 2) $2x \geq 0$; 3) $-5x > -35$; 4) $4x \leq -13$.

11.11. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $0,2x \geq 8$; 2) $-0,7x < 1,4$; 3) $10x \leq -1$; 4) $-8x > 0$.

11.12. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $0,3x > 15$; 2) $-0,2x \leq 1,8$; 3) $100x \geq -2$; 4) $-5x < 0$.

11.13. Чи рівносильні нерівності:

- 1) $2x \geq 8$ та $-x \leq -2$; 2) $3x < 6$ та $x + 1 < 3$?

11.14. Чи рівносильні нерівності:

- 1) $5x \leq 5$ та $-x \geq -1$; 2) $2x > 8$ та $x - 1 < 5$?

11.15. За яких значень x функція $y = -4x$ набуває значень, які:

- 1) більші за -8 ; 2) менші від 12 ?

11.16. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $1 + 2x > 7$; 2) $3 - 5x \leq 2$; 3) $3x + 8 < 0$;
 4) $9 - 12x \geq 0$; 5) $6 + x < 3 - 2x$; 6) $4x + 19 \leq 5x - 2$.

11.17. Знайдіть розв'язки нерівності:

- 1) $1 + 6x \leq 7$; 2) $6x + 1 > -3$; 3) $3 - 2x \geq 0$;
 4) $6 - 15x < 0$; 5) $4 + x > 1 - 2x$; 6) $4x + 7 \leq 6x + 1$.

11.18. За яких значень x функція $y = 2x - 3$ набуває від'ємних значень?

11.19. За яких значень x функція $y = 5 - 2x$ набуває додатних значень?

11.20. Знайдіть розв'язки нерівності:

- 1) $4 - x > 3(2 + x)$; 2) $3(1 - x) \geq 2(2x - 2)$;
 3) $2(3 + x) + (4 - x) \leq 0$; 4) $-(2 - 3x) + 4(x + 6) < 1$.

11.21. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $4(1 + x) < x - 2$; 2) $2 + x \geq 6(2x - 1)$;
 3) $-(2x + 1) > 3(x + 2)$; 4) $5(x + 8) + 4(1 - x) \leq 0$.

11.22. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt{x + 2}$; 2) $y = \frac{1}{\sqrt{x - 3}}$.

11.23. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{x-1}; \quad 2) y = \frac{1}{\sqrt{x+4}}.$$

11.24. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{3x}{4} - x < 2; \quad 2) \frac{5x}{3} + x \geq 16.$$

3 **11.25.** За яких значень a нерівність $ax < 4$ має ту саму множину розв'язків, що й нерівність:

$$1) x < \frac{4}{a}; \quad 2) x > \frac{4}{a}?$$

11.26. За яких значень b нерівність $bx \geq 7$ має ту саму множину розв'язків, що й нерівність:

$$1) x \geq \frac{7}{b}; \quad 2) x \leq \frac{7}{b}?$$

11.27. Складіть таку нерівність вигляду $ax > b$, щоб множиною її розв'язків був проміжок:

$$1) (3; +\infty); \quad 2) (-\infty; 1).$$

11.28. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності:

$$1) x(x+2) - x^2 > 4x - 7; \quad 2) (x+5)(x-5) \leq x^2 - 5x.$$

11.29. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності:

$$1) (x+1)^2 - x^2 \geq 6x - 9; \quad 2) (x-1)(x+2) < x^2 - 3x + 11.$$

11.30. Нехай x_0 – найбільший натуральний розв'язок нерівності

 $(x-3)^2 - (x+1)^2 > 2x - 43$. Знайдіть добуток $377x_0$, відтак дізнається рік заснування національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».

11.31. Нехай x_0 – найменший натуральний розв'язок нерівності

 $(x-2)^2 - (x-1)^2 < x - 52$. Знайдіть добуток $90x_0$, відтак дізнається, якого року було ухвалено «Конституцію прав і свобод війська Запорозького» Пилипа Орлика – першу конституцію у світовій історії.

11.32. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

$$1) \frac{x+3}{4} - \frac{x}{3} \leq 0; \quad 2) \frac{x+1}{2} - \frac{1-5x}{5} > x.$$

11.33. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

$$1) \frac{x+2}{7} - \frac{x}{5} \geq 0; \quad 2) \frac{x-1}{3} - \frac{1-4x}{2} < x.$$

11.34. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$\begin{aligned} 1) 2(3x+1) - 3x > 3x; & \quad 2) x + \frac{x}{2} \geq \frac{3x}{2} + 2; \\ 3) 4(x+1) \geq 2(x+2) + 2x; & \quad 4) 3(x-1) - 2x < x-3. \end{aligned}$$

11.35. Розв'яжіть нерівність:

1) $3(2x + 1) - 6x \geq 5$;

2) $4(x + 1) - 3x > -(2 - x)$;

3) $x - \frac{x}{3} < \frac{2x}{3} - 1$;

4) $6(x + 1) - 3(x + 2) \leq 3x$.

11.36. Довжина однієї сторони прямокутника дорівнює 8 см. Якою має бути довжина другої сторони прямокутника, щоб його площа була меншою від 96 см^2 ?

4 11.37. За яких значень a коренем рівняння:

1) $4x - 7 = a$ є число додатне;

2) $5 + 2x = 3 - a$ є число від'ємне?

11.38. Чи існує таке значення a , за якого:

1) нерівність $ax > 2$ не має розв'язків;

2) розв'язком нерівності $(a - 3)x < 7$ є будь-яке число?

У разі ствердної відповіді вкажіть це значення a .

11.39. За яких значень b рівняння:

1) $x^2 + 6x - 2b = 0$ не має коренів;

2) $bx^2 - 4x - 1 = 0$ має два різних корені?

11.40. За яких значень a рівняння:

1) $x^2 + 8x - 4a = 0$ має два різних корені;

2) $ax^2 - 6x + 1 = 0$ не має коренів?

11.41. Два натуральних числа відносяться як $2 : 5$, а їхня сума менша від числа 171. Якого найбільшого значення може набувати менше із цих чисел?

11.42. Два натуральних числа відносяться як $3 : 2$, а їхня сума більша за 83. Якого найменшого значення може набувати більше із цих чисел?

11.43. Зал для хореографії має площу 510 м^2 . Третину зали пофарбовано у жовтий колір, а решту потрібно пофарбувати у блакитний. Витрати фарби становлять 120 г/м^2 , а банка фарби має масу 1 кг. Яку найменшу кількість банок із блакитною фарбою потрібно купити, щоб виконати таке завдання?

11.44. Резервуар місткістю 1 м^3 на три чверті заповнено водою. Яку найбільшу цілу кількість відер води можна долити у цей резервуар, якщо відро містить 12 л?

***** 11.45. Розв'яжіть нерівність для всіх значень a :

1) $ax > 3$; 2) $ax \geq 0$;

3) $ax < 0$; 4) $-ax < 5$.

Вправи для повторення

11.46. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{8})$;

2) $\sqrt{5^2 \cdot 2^4}$;

3) $(\sqrt{10} - \sqrt{7})(\sqrt{10} + \sqrt{7})$.

11.47. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x + y = 8, \\ 2x - y = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3y - x = 1, \\ 2x + 5y = 20. \end{cases}$$

11.48. Туристка пропливла 5 км на моторному човні проти течії річки, а назад повернулася на плоту. Знайдіть швидкість течії, якщо на плоту туристка пливла на 2 год довше, ніж на човні, а власна швидкість човна дорівнює 12 км/год.

11.49. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{1}{a^2 - 4a + 4} + \frac{1}{a^2 - 4} \right) : \frac{2}{(a - 2)^2} - \frac{a}{a + 2}$$

не залежить від значення змінної.

11.50. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 8, & \text{якщо } x < 1, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 4, \\ x - 2, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$



Життєва математика

11.51. Родина із чотирьох осіб планує подорож із Києва до Львова або поїздом, або на власному авто. Квиток на поїзд на одну особу коштує 600 грн у вагоні-купе. Автомобіль витрачає 8 літрів пального на 100 кілометрів шляху, відстань по шосе між містами дорівнює 540 км, а ціна пального становить 55 грн за літр. Скільки коштуватиме родині найдешевший варіант такої подорожі?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

11.52. Знайдіть перетин проміжків:

- 1) $(-\infty; 5]$ і $[3; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3]$ і $[5; +\infty)$;
3) $(-\infty; 3)$ і $(-\infty; 5]$; 4) $[3; +\infty)$ і $(5; +\infty)$.

11.53. Укажіть три значення x , які одночасно є розв'язками кожної з двох нерівностей:

- 1) $x \leq 2$ та $x \geq -3$; 2) $x > -5$ та $x > 7$;
3) $x < 0$ та $x \geq -7$; 4) $x \leq 2$ та $x \leq 4$.



Цікаві задачі – поміркуй окремо

11.54. У чемпіонаті з баскетболу взяли участь 6 команд, кожна з яких зіграла по 4 зустрічі з кожною командою-учасницею. Нічийних у баскетболі не буває. Відомо, що п'ять команд мали відповідно 80 %, 60 %, 55 %, 40 % та 35 % перемог (від своєї загальної кількості ігор). Яке місце посіла шоста команда і який у неї відсоток перемог?

§ 12. Системи лінійних нерівностей з однією змінною, їх розв'язування

1. Поняття про систему лінійних нерівностей з однією змінною та її розв'язок

Розглянемо задачу. Велосипедистка за 2 год долає відстань, більшу ніж 24 км, а за 3 год – відстань, меншу ніж 39 км. Знайти швидкість велосипедистки.

Розв'яжемо її. Нехай швидкість велосипедистки дорівнює x км/год, тоді за 2 год вона долає $2x$ км, а за 3 год – $3x$ км. За умовою задачі $2x > 24$ і $3x < 39$.

Маємо знайти такі значення x , для яких буде правильною і нерівність $2x > 24$, і нерівність $3x < 39$, тобто знайдемо спільні розв'язки обох цих нерівностей. У такому разі кажуть, що потрібно *розв'язати систему нерівностей*, і об'єднують нерівності в систему:

$$\begin{cases} 2x > 24, \\ 3x < 39. \end{cases}$$

Оскільки обидві нерівності є лінійними, то маємо *систему лінійних нерівностей з однією змінною*.

Розв'язавши кожен з нерівностей системи, отримаємо: $\begin{cases} x > 12, \\ x < 13. \end{cases}$

Тобто значення x має задовольняти умову: $12 < x < 13$.

Отже, швидкість велосипедистки більша за 12 км/год, але менша від 13 км/год.

Число 12,6 задовольняє кожен з нерівностей системи

$$\begin{cases} 2x > 24, \\ 3x < 39. \end{cases}$$

Справді, кожна з нерівностей $2 \cdot 12,6 > 24$ та $3 \cdot 12,6 < 39$ є правильною числовою нерівністю. У такому разі кажуть, що число 12,6 є розв'язком цієї системи нерівностей.

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, за якого правильною є кожна з нерівностей системи.

Розв'язати систему – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

2. Розв'язування систем лінійних нерівностей з однією змінною

Щоб розв'язати систему нерівностей, доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

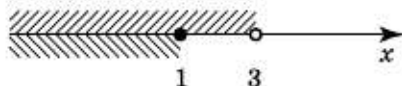
- 1) розв'язати кожну з нерівностей системи;
- 2) зобразити множину розв'язків кожної з нерівностей на координатній прямій;
- 3) знайти перетин цих множин, який і буде множиною розв'язків системи;
- 4) записати відповідь.

Приклад 1. Розв'язати систему нерівностей:
$$\begin{cases} 3x + 2 < 11, \\ 4x - 5 \leq -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Поступово замінюючи кожну з нерівностей системи її рівносильною простішою, матимемо:

$$\begin{cases} 3x + 2 < 11, & \begin{cases} 3x < 9, \\ 4x - 5 \leq -1; \end{cases} & \begin{cases} x < 3, \\ x \leq 1. \end{cases} \end{cases}$$

Позначимо на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність $x < 3$, і множину чисел, які задовольняють нерівність $x \leq 1$ (мал. 12.1). Множиною розв'язків системи є перетин цих множин, тобто проміжок $(-\infty; 1]$.



Мал. 12.1

Відповідь: $(-\infty; 1]$.

Відповідь до системи можна записати й так: $x \leq 1$.

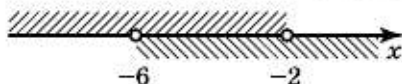
Приклад 2. Знайти всі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$\begin{cases} (x + 1)^2 - x(x + 4) > 5, \\ \frac{x}{2} + \frac{x}{3} > -5. \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо всі розв'язки системи:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x > 5, & \begin{cases} -2x > 4, \\ 5x > -30; \end{cases} & \begin{cases} x < -2, \\ x > -6. \end{cases} \end{cases}$$

Маємо, що розв'язком системи є проміжок $(-6; -2)$ (мал. 12.2).



Мал. 12.2

Тепер знайдемо всі цілі числа, що належать цьому проміжку. Ними будуть -5 ; -4 ; -3 . Отже, цілими розв'язками системи є числа -5 ; -4 ; -3 .

Відповідь: -5 ; -4 ; -3 .

Приклад 3. Розв'язати систему нерівностей: $\begin{cases} 0,2x - 5 \geq 0, \\ 0,3x - 6 < 0. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} 0,2x - 5 \geq 0, \\ 0,3x - 6 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0,2x \geq 5, \\ 0,3x < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 25, \\ x < 20. \end{cases}$

Зобразивши отримані розв'язки нерівностей системи на координатній прямій (мал. 12.3), бачимо, що спільних розв'язків вони не мають, тобто перетин проміжків є порожньою множиною. Отже, система розв'язків не має.



Мал. 12.3

Відповідь: розв'язків немає.

4. Розв'язування подвійних нерівностей

Розглянемо способи розв'язування подвійних нерівностей.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $5 < 2x - 7 \leq 9$.

Розв'язання. Перепишемо подвійну нерівність у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} 2x - 7 > 5, \\ 2x - 7 \leq 9. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{cases} 2x > 12, \\ 2x \leq 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 6, \\ x \leq 8; \end{cases} \quad \text{отже, } 6 < x \leq 8, \text{ тобто } x \in (6; 8].$$

Відповідь: $(6; 8]$.

Розв'язання можна подати і в іншому вигляді:

$$\begin{array}{rcl} 5 < 2x - 7 \leq 9 & | + 7 \\ 12 < 2x \leq 16 & | : 2 \\ 6 < x \leq 8. \end{array}$$

Відповідь можна записати ще й так: $6 < x \leq 8$.

? Наведіть приклад системи лінійних нерівностей з однією змінною. **○** Що називають розв'язком системи нерівностей з однією змінною? **○** Що означає розв'язати систему нерівностей з однією змінною?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 12.1. (Усно.) Чи є числа $-2; -1; 0; 1; 2$ розв'язками системи:

$$1) \begin{cases} x < 2, \\ x < 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 3, \\ x \geq -1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \geq -2, \\ x > 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 7, \\ x > 8; \end{cases}$$

12.2. (Усно.) Чи є число 2 розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} 2x > 3, \\ x < 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \geq 2, \\ 3x < 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x < 0, \\ 3x \geq 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x \geq -9, \\ 5x < 11? \end{cases}$$

12.3. Чи є число -1 розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} x > 0, \\ x < 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \leq 0, \\ x > -2; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \geq -1, \\ x < 3; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < -1, \\ x > 3? \end{cases}$$

2 12.4. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 4, \\ x > 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 4, \\ x < 8; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x < 4, \\ x < 8; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 4, \\ x > 8. \end{cases}$$

12.5. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 3, \\ x > 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 3, \\ x < 5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x < 3, \\ x < 5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 3, \\ x > 5. \end{cases}$$

12.6. Знайдіть розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} 3x > 6, \\ -4x > -12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x \leq 21, \\ -3x \geq -6; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 0,2x \geq 1, \\ 0,5x < 1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{1}{4}x < 2, \\ \frac{1}{3}x \leq 5. \end{cases}$$

12.7. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 5x < 15, \\ -4x < 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x < -5, \\ -7x > -28; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 0,1x > 3, \\ 0,2x \leq 5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{1}{3}x \leq 2, \\ \frac{1}{8}x < 5. \end{cases}$$

12.8. Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x - 3 > 1, \\ x - 6 < 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 7 < -2, \\ x - 2 > 8; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x + 2 \leq -7, \\ -2x \geq -14. \end{cases}$$

12.9. Розв'яжіть систему нерівностей і вкажіть два числа, що є її розв'язками:

$$1) \begin{cases} 3x + 1 > 5x, \\ 5,2 - 2x < 0,6x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 1,5x + 1 > 3x - 2, \\ x - 2 < 4 - 2x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 9 - x < 6x + 2, \\ x + 8 < 11; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 4(x + 2) < 5x, \\ x - 3 > 4,2. \end{cases}$$

12.10. Розв'яжіть систему нерівностей і вкажіть два числа, що є її розв'язками:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x + 4 > 3x, \\ 1,4 - 0,2x > 0,5x; \end{cases} & 2) \begin{cases} 6x - 1 < 7x + 2, \\ x + 1,8 > 2; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 1,5x - 1 > 6,5x - 2, \\ x + 6 > 2 - 3x; \end{cases} & 4) \begin{cases} 3(x + 2) < 4x, \\ x - 2,7 > 3,3. \end{cases} \end{array}$$

12.11. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) 3 < 3x \leq 9; & 2) -1 \leq \frac{x}{2} \leq 4; \\ 3) 0 \leq x - 1 \leq 5; & 4) 11 < x + 7 < 13. \end{array}$$

12.12. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) 2 \leq 2x < 10; & 2) -2 < \frac{x}{5} \leq 1; \\ 3) 10 < x - 5 < 12; & 4) 7 \leq x + 1 \leq 8. \end{array}$$

12.13. Знайдіть усі цілі розв'язки подвійної нерівності:

$$1) -2 \leq 2x < 4; \quad 2) 1,3 < x - 2 \leq 2,7.$$

3 **12.14.** Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2,6 + x > 5(x + 1) - 6, \\ 2(x - 0,4) - x < 3x - 0,5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 1,2(3 - x) - 6 > 0,8x, \\ -2(1 - 4x) - x < 5x. \end{cases}$$

12.15. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2(x + 3) - 4 < x - 8, \\ 6x + 1 > 3(x + 1); \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -(x - 2) - 3(x - 1) < 2x, \\ 12 - (x - 3) \leq 5x + 5. \end{cases}$$

12.16. За яких значень x кожна з функцій $y = 0,3x - 1,8$ та $y = 0,2x - 1,2$ набуває невід'ємних значень?

12.17. Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{5} > \frac{x + 1}{6}, \\ 2(x + 1) + 5 > 3(x - 5) + 14; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{5x + 3}{2} \leq 3x + 1, \\ (x + 1)x - 2 \leq x(x - 3) + 6. \end{cases}$$

12.18. Знайдіть усі цілі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{2} > \frac{x - 3}{3}, \\ 3(x + 1) - 5 < 2(x - 3) + 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{3x - 1}{4} \leq x - 2, \\ (x - 2)x - 5 \geq x(x + 1) - 29. \end{cases}$$

12.19. Знайдіть суму всіх цілих розв'язків системи нерівностей



$$\begin{cases} x(x - 2) > x^2 - 45, \\ \frac{x}{3} < \frac{2x}{5} - \frac{6}{5}, \end{cases}$$

відтак дізнаєтеся, скільки медалей здобула команда України на Паралімпійських іграх 2024 року в Парижі.

12.20. Знайдіть найменше ціле число, що є розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} 5(2x - 1) + 3 > 2(x - 1) + 7x, \\ 6(1 - x) + 2 \geq 3(x + 1) - 7x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{3x + 2}{2} \geq 2(2x + 1), \\ (x + 5)(x - 3) \geq x(x - 1) - 21. \end{cases}$$

12.21. Знайдіть найбільше ціле число, що є розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} 3(2x - 2) + 7 > 4(x - 1) - 13, \\ 5(1 - x) + 3 \geq 2(x + 1) - 2x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{5x + 1}{3} \geq 4(2x + 1), \\ (x + 2)(x - 5) \geq x(x + 1) - 10. \end{cases}$$

12.22. Український борець греко-римського стилю  Жан Беленюк має унікальну колекцію нагород з міжнародних турнірів. Розв'яжіть систему

нерівностей $\begin{cases} x(x - 1) - (x - 1)^2 > 3 - x, \\ (2x - 9)(2x + 9) < (2x - 1)^2. \end{cases}$ Знайдіть

добуток $101x_0$, де x_0 – найбільший цілий розв'язок системи нерівностей, відтак дізнаєтеся, якого року Жан здобув свою найвищу нагороду – став олімпійським чемпіоном.



12.23. Знайдіть область допустимих значень змінної у виразі:

$$1) \sqrt{2x + 7} + \sqrt{1 - 5x}; \quad 2) \sqrt{0,3x - 6} + \frac{1}{\sqrt{4x - 8}}.$$

12.24. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{10 - 2x} + \sqrt{3x + 18}; \quad 2) y = \frac{1}{\sqrt{2x - 0,8}} + \sqrt{3x + 0,06}.$$

12.25. Знайдіть множину розв'язків подвійної нерівності:

$$1) 0 < \frac{x}{3} - 1 \leq 2; \quad 2) -2 < -\frac{x}{2} + 3 < 4;$$

$$3) -5 < \frac{2x + 1}{3} < -1; \quad 4) 0 \leq \frac{1 - 2x}{3} \leq 8.$$

12.26. Розв'яжіть подвійну нерівність:

$$1) -1 < \frac{x}{3} + 1 \leq 0; \quad 2) 3 < -\frac{x}{5} + 1 \leq 7;$$

$$3) 4 \leq \frac{3x - 1}{2} \leq 5; \quad 4) 2 < \frac{1 - 5x}{4} < 9.$$

4 12.27. Розв'яжіть систему нерівностей:

- 1)
$$\begin{cases} 2(x-1) - 3(x-2) + x < 0, \\ 1,3x(x-2) - 0,4 < x(1,3x-3); \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} 2,5x - 0,5(8-x) - 1,6 < x, \\ x + 2,1 > 1,5(2x-1) - 2x; \end{cases}$$
- 3)
$$\begin{cases} 2-x > 2x(x-3) - x(2x-5), \\ 5-10x < 3x(2x-4) - x(6x-2); \end{cases}$$
- 4)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 7 > \frac{5x}{6}, \\ x - \frac{7x}{8} < \frac{x}{8} + 4. \end{cases}$$

12.28. Розв'яжіть систему нерівностей:

- 1)
$$\begin{cases} 4(x-3) - (x+5) > 3(x-2), \\ 2(x+3) - 5(x-6) > 4(x-2); \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} 6(x-1) - 3 < 2(3x-4), \\ x(x-2) > (x+3)(x-3) - 11. \end{cases}$$

12.29. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{7-x}} + \frac{1}{x^2-25};$
- 2) $y = \sqrt{2x-8} + \frac{x}{\sqrt{10-x}} + \frac{7}{\sqrt{0,2x-1}}.$

12.30. Знайдіть область допустимих значень змінної у виразі:

- 1) $\sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{6-x}} + \frac{1}{x^2-16};$
- 2) $\sqrt{3x-6} + \frac{5}{\sqrt{8-x}} + \frac{x}{\sqrt{0,5x-1,5}}.$

12.31. Одна сторона трикутника дорівнює 4 см, а друга – 5 см. Якою завдовжки може бути третя сторона трикутника за умови, що його периметр менший від 15 см?

12.32. На одну машину навантажили 2 ящики з огірками по 24 кг кожен та 8 ящиків із помідорами. При цьому загальна маса була не більшою, ніж 260 кг. На другу машину навантажили 3 ящики із цибулею по 18 кг і 7 ящиків із помідорами – таких самих, як на першу машину. При цьому загальна маса була не меншою, ніж 230 кг.



- 1) Складіть систему нерівностей для визначення маси одного ящика із помідорами, позначивши її через x (у кг).
- 2) Знайдіть x , вважаючи, що x дорівнює цілому числу кілограмів.

12.33. Аліса купила записник за 80 грн і 5 ручок, заплативши за всю покупку менше, ніж 114 грн. Аліна купила скетчбук (*sketchbook*) для малювання за 72 грн і 4 такі самі ручки, як і Аліса, заплативши за всю покупку більше, ніж 92 грн.



1) Складіть систему нерівностей для визначення ціни однієї ручки, позначивши її через x (у грн).

2) Знайдіть x , вважаючи, що x дорівнює цілому числу гривень.



12.34. За яких значень a обидва корені рівняння

$$x^2 - (a + 1)x - (a + 2a^2) = 0$$

менші від числа 1?

12.35. За яких значень a обидва корені рівняння

$$x^2 - (2a + 1)x + (a^2 + a) = 0$$

більші за число 3?



Вправи для повторення

12.36. Відомо, що $a > b$. Порівняйте:

1) $a - 2$ і $b - 2$; 2) $2,1a$ і $2,1b$;

3) $-a$ і $-b$; 4) $-8a$ і $-8b$.

12.37. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $-5x \geq 15$; 2) $7 - x < 11 - 3x$.

12.38. Доведіть нерівність $x^2 - 8x + 19 > 0$.

12.39. Дано: $10 < x < 20$; $2 < y < 5$. Оцініть значення виразу:

1) $2x - y$; 2) $\frac{x}{y}$.

12.40. За яких значень m рівняння $mx^2 + 4x - 8 = 0$ не має розв'язків?



Життєва математика

12.41. Яринка та Яся разом можуть прополоти грядку за 24 хвилини, а Яся самостійно – за 40 хвилин. За скільки хвилин самостійно може прополоти цю грядку Яринка?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

12.42. (Національна олімпіада США, 1979 р.). Розв'яжіть рівняння $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_{14}^4 = 1599$ у цілих числах.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2 (§§ 6–12)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.



1. Яке із чисел є розв'язком нерівності $3x > 7$?

А. -2

Б. 0

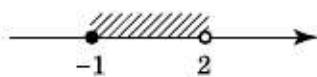
В. 5

Г. 2

2. Укажіть проміжок, зображений на малюнку 1.

А. $[-1; 2]$ Б. $[-1; 2)$

В. $(-1; 2)$ Г. $(-1; 2]$



Мал. 1

3. Яка з нерівностей є лінійною з однією змінною?

А. $3x^2 > 7$

Б. $2 + 1 > 0$

В. $\frac{1}{2x+7} < 3$

Г. $-3x > 8$

4. Відомо, що $a > b$. Укажіть правильну нерівність.

А. $\frac{a}{7} < \frac{b}{7}$

Б. $a + 3 < b + 3$

В. $-a > -b$

Г. $-2a < -2b$

5. Розв'яжіть нерівність $-3x \leq -15$.

А. $[5; +\infty)$

Б. $(-\infty; 5]$

В. $[-5; +\infty)$

Г. $(-\infty; -5]$

6. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x - 2 < 7, \\ 2x \geq -4. \end{cases}$

А. $[-2; 3)$

Б. $[-2; 9)$

В. $(-\infty; -2]$

Г. $(9; +\infty)$

7. Укажіть вираз, що набуває додатних значень за будь-якого значення x .

А. $-x^2$

Б. x^2

В. $x^2 + 2$

Г. $(x + 2)^2$

8. Відомо, що $2 < a < 5$ і $1 < b < 3$. Оцініть значення виразу $4a - b$.

А. $5 < 4a - b < 19$

Б. $7 < 4a - b < 17$

В. $-1 < 4a - b < 4$

Г. $9 < 4a + b < 23$

9. Укажіть число, що не належить проміжку $[2, 5; 3, 6]$.

А. $\sqrt{7}$

Б. $\sqrt{14}$

В. $2\frac{1}{2}$

Г. $\sqrt{11}$

10. Відомо, що $1 < x < 2$. Оцініть значення виразу $\frac{30}{5 - 2x}$.

А. $3\frac{1}{3} < \frac{30}{5 - 2x} < 4\frac{2}{7}$

Б. $\frac{30}{5 - 2x} > 0$

В. $15 < \frac{30}{5 - 2x} < 30$

Г. $10 < \frac{30}{5 - 2x} < 30$

11. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{x - 2} + \frac{1}{\sqrt{8 - x}} + \frac{1}{x^2 - 9}.$$

А. $[2; 8)$

Б. $[2; 3) \cup (3; 8]$

В. $[2; 3) \cup (3; 8)$

Г. $(2; 3) \cup (3; 8)$

12. За яких значень c рівняння $2x^2 + 4x - c = 0$ не має розв'язків?

А. Таких значень c не існує

Б. $c < -2$

В. $c \leq -2$

Г. $c > -2$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

- 3** 13. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною всіх її розв'язків (А–Г).

Нерівність

1. $x(x + 2) - x^2 > 4x - 8$

2. $\frac{x+2}{6} - \frac{x}{4} < 0$

3. $2(x + 3) - x > x$

Множина всіх розв'язків нерівності

А. $(-\infty; +\infty)$

Б. $(-\infty; 4)$

В. $(-\infty; -4)$

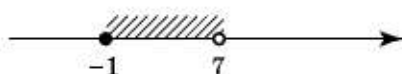
Г. $(4; +\infty)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 6–12

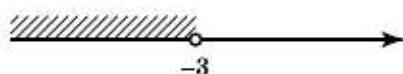
- 1** 1. Чи є розв'язком нерівності $x + 2 > 7$ число:

- 1) 6; 2) -2; 3) 0; 4) 10?

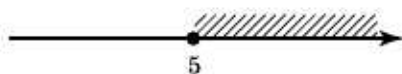
2. Запишіть проміжки, зображені на малюнках 1–4:



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

3. Які з нерівностей є лінійними з однією змінною:

- 1) $-2x^2 > 6$; 2) $-2x > 6$; 3) $2 + 3 < 6$; 4) $\frac{1}{-2x} > 6$?

- 2** 4. Відомо, що $x > y$. Порівняйте:

- 1) $x + 2$ та $y + 2$; 2) $2x$ і $2y$;
3) $-x$ і $-y$; 4) $-4x$ і $-4y$.

5. Розв'яжіть нерівність:

- 1) $-2x \geq 8$; 2) $3x - 4 > x + 8$.

6. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x + 3 < 5, \\ 4x \geq -4. \end{cases}$

- 3** 7. Дано: $5 < a < 10$ і $2 < b < 4$. Оцініть значення виразу:

- 1) $3a - b$; 2) $\frac{a}{b}$.

8. Доведіть нерівність: $a^2 + 6a + 10 > 0$.

- 4 9. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{7-x}} + \frac{1}{x^2-4}.$$

Додаткові завдання

- 4 10. Доведіть нерівність $(a+1)(b+4)(a+b) \geq 16ab$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$.

11. За яких значень a рівняння $ax^2 - 2x - 8 = 0$ не має коренів?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 2

До § 6

- 1 1. Відомо, що $m < n$. Чи може різниця $m - n$ дорівнювати:

- 1) 2,7; 2) π ; 3) 0; 4) -3,8?

- 2 2. Доведіть нерівність:

- 1) $5(m-3) > 5m-16$; 2) $x(x+10) + 2 > 10x$;
 3) $(a-7)(a+10) < (a+4)(a-1)$; 4) $p(p-6) < (p-3)^2$;
 5) $(m-2)^2 > -4m$; 6) $p+1 \leq \frac{(p+2)^2}{4}$.

- 3 3. Які з нерівностей є правильними за будь-якого значення a :

- 1) $(2a+3)(2a-3) < 4a^2 + 2a$; 2) $(3a-2)(3a+2) < 49a^2 + 0,6$;
 3) $(3a-1)^2 > 3a(3a-2)$; 4) $7 > (3-a)(3+a)$?

4. Доведіть нерівність:

- 1) $(m+1)^2 \geq 4m$; 2) $(4b-1)^2 > -8b$;
 3) $\frac{a^2+1}{2} \geq a$; 4) $\frac{m}{m^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

5. Порівняйте число m з нулем, якщо:

- 1) $2m < 3m$; 2) $m > 5m$; 3) $-m < -3m$; 4) $-4m > -5m$.

- 4 6. Доведіть нерівність:

- 1) $m^2 + n^2 - 2m - 4n + 5 \geq 0$; 2) $2x^2 - 10xy + 25y^2 \geq 0$.

7. Порівняйте вирази:

- 1) $a^3 - b^3$ і $ab(b-a)$, якщо $a \geq b$;
 2) $m^2 + n^2$ і $\frac{1}{2}$, якщо $m+n=1$.

8. Відстань від села до міста 20 км. Одна з велосипедисток проїхала із села в місто й повернулася назад зі сталою швидкістю. Друга велосипедистка їхала із села в місто зі швидкістю, на 1 км/год більшою за швидкість першої, а поверталася назад зі швидкістю, на 1 км/год меншою від швидкості першої. Котра з велосипедисток витратила менше часу на дорогу?

9. Порівняйте площу квадрата, сторона якого дорівнює 6 см, із площею довільного прямокутника, що має такий самий периметр, як у квадрата.

До § 7

10. У яких нерівностях правильно перенесено доданок з однієї частини у другу:

$$1) m + 2 > 5, \quad 2) p - 7 \leq 2, \quad 3) 9 > t - 7, \quad 4) 10 \leq a + 5, \\ m > 5 + 2; \quad p \leq 2 + 7; \quad 9 + 7 > t; \quad 10 - 5 \leq a?$$

11. Замініть «зірочку» знаком $>$ чи $<$ так, щоб твердження було правильним:

$$1) \text{ якщо } p > -2, \text{ то } -2 * p; \quad 2) \text{ якщо } 2 < a, a < b, \text{ то } 2 * b.$$

12. Порівняйте числа:

$$1) x + 5 \text{ та } y + 5, \text{ якщо } x < y; \quad 2) m - 2 \text{ і } p - 2, \text{ якщо } p > m;$$

$$3) -m \text{ і } -n, \text{ якщо } m > n; \quad 4) 12a \text{ і } 12b, \text{ якщо } a \geq b;$$

$$5) -3k \text{ і } -3p, \text{ якщо } p < k; \quad 6) \frac{c}{5} \text{ і } \frac{d}{5}, \text{ якщо } d \geq c.$$

13. Відомо, що $a > b$. Розмістіть у порядку зростання числа: $a + 3$, $b - 3$, $a + 1$, a , $b - 1$, b .

14. Відомо, що $x > y > 0$. Порівняйте:

$$1) 8x \text{ і } 5y; \quad 2) 3x \text{ та } y; \quad 3) -3x \text{ і } -y; \quad 4) -5x \text{ і } -2y.$$

15. Оцініть значення виразу, якщо $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$:

$$1) -2\sqrt{3}; \quad 2) 3 + \sqrt{3}; \quad 3) 4 - 5\sqrt{3}; \quad 4) \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.$$

16. Відомо, що $a > 5$. Порівняйте з нулем значення виразу:

$$1) 2a - 10; \quad 2) 35 - 7a.$$

17. Оцініть значення виразу $|x|$, якщо:

$$1) -3 < x < -1; \quad 2) -7 < x < 1.$$

До § 8

18. Виконайте почленне додавання нерівностей:

$$1) x < 3 \text{ та } y < -3; \quad 2) a > 5 \text{ і } b > 7.$$

19. Виконайте почленне множення нерівностей:

$$1) m > 2 \text{ і } n > 1; \quad 2) 0 < p < 3 \text{ і } 0 < q < 5.$$

20. Оцініть значення виразу:

$$1) ab + 2, \text{ якщо } 1 < a < 5 \text{ і } 2 < b < 7;$$

$$2) p^2 - 3, \text{ якщо } 2 < p < 4.$$

21. Чи правильне твердження:

$$1) \text{ якщо } x > 2, \text{ то } x^2 > 4; \quad 2) \text{ якщо } x < 2, \text{ то } x^2 < 4;$$

$$3) \text{ якщо } x > 2, \text{ то } \frac{1}{x} < \frac{1}{2}; \quad 4) \text{ якщо } x < 2, \text{ то } \frac{1}{x} > \frac{1}{2}?$$

22. Оцініть площу S квадрата з периметром P см, якщо $36 < P < 40$.
23. Порівняйте, якщо можливо:
- 1) $3m + 2n$ і 12 , якщо $m > 3$, $n > 2$;
 - 2) $b - 3a$ і 0 , якщо $a > 8$, $b < 6$;
 - 3) $x - 3y$ і 1 , якщо $x < 8$, $y < 0$;
 - 4) $p - 4q$ і 9 , якщо $p < 8$, $q > 1$.
24. Оцініть значення виразу:
- 1) $a^2 + 2a + 5$, якщо $0 < a < 1$;
 - 2) $x^2 - 4x$, якщо $1 < x < 2$;
 - 3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, якщо $10 < a < 20$, $5 < b < 10$;
 - 4) $\frac{1}{mn} - 7$, якщо $1 < m < 2$, $0,3 < n < 0,5$.
25. Порівняйте x та y , якщо $x > a^2 + b^2$, $y < 2ab$.
26. Оцініть площу S прямокутника з периметром P см і стороною a см, якщо $20 < P < 30$, $5 < a < 6$.
27. Доведіть нерівність:
- 1) $(x + 2y)\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$;
 - 2) $\left(\frac{1}{m^2} + pn\right)\left(\frac{4}{p^2} + mn\right)\left(\frac{9}{n^2} + pm\right) \geq 48$, якщо $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$.

До § 9

28. Які із чисел -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 є розв'язками нерівності:
- 1) $x < 1$; 2) $x \leq 1$; 3) $x > 1$; 4) $x \geq 1$?
29. Запишіть три числа, які є розв'язками і нерівності $x \leq 5$, і нерівності $x > 3$.
30. Які із чисел -1 ; 0 ; 3 ; 5 ; 7 задовольняють нерівність:
- 1) $\frac{1}{x} + x > 2$; 2) $\sqrt{x+2} < 3$?
31. Знайдіть усі натуральні розв'язки нерівності $1 < \frac{10}{x} \leq 5$.
32. Які з розв'язків рівняння $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ є розв'язками нерівності $x^2 + 4x + 3 \leq 0$?

До § 10

33. Запишіть будь-які три числа, що належать проміжку:
- 1) $(-4; 5)$; 2) $[-2; 7)$; 3) $[3; +\infty)$;
 - 4) $(-\infty; 7)$; 5) $[1; 17]$; 6) $(-\infty; -1)$;
 - 7) $(4; 9]$; 8) $(5; +\infty)$; 9) $[-10; -9]$.

- 2** 34. Знайдіть найменше і найбільше цілі числа, що належать проміжку:
 1) $(-7; 8)$; 2) $[-2; 3,8)$;
 3) $(-0,2; 4]$; 4) $(-2,99; 1,98)$.

- 3** 35. Запишіть три числа проміжку $\left[-\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right]$.

36. Чи можна знайти найменше і найбільше числа, що належали б проміжку $[1,6; 1,8)$?

До § 11

- 1** 37. Розв'яжіть нерівність:
 1) $x - 3 \geq 0$; 2) $x + 5 < 0$; 3) $x + 2 > 0$; 4) $x - 6 < 0$.

- 2** 38. Розв'яжіть нерівність і вкажіть два будь-яких цілих числа, що є її розв'язками:
 1) $-4x > 12$; 2) $3x < 0$; 3) $-5x \leq -15$; 4) $2x \geq -7$.

39. Знайдіть множину розв'язків нерівності:
 1) $1 + 8x < 9$; 2) $4x - 7 > 0$;
 3) $2 + 6x \leq 5 + 7x$; 4) $4x + 7 \geq 6x + 1$;
 5) $3x \geq 5x + 1$; 6) $4 + 11x < 5 + 12x$.

40. Розв'яжіть нерівність:
 1) $\frac{2x}{5} < 1$; 2) $\frac{x}{7} \geq 0$; 3) $\frac{4x}{3} > 2$;
 4) $\frac{5x}{8} \leq 0$; 5) $\frac{x+2}{20} \geq 1$; 6) $\frac{3-x}{2} \leq 1$.

41. За яких значень x значення виразу $2x + 3$ менше від відповідного значення виразу $4x - 7$?

42. За яких значень y сума дробів $\frac{y}{2}$ та $\frac{y}{3}$ більша за 10?

- 3** 43. Розв'яжіть нерівність:
 1) $6x^2 \geq 48 + 3x(2x + 4)$; 2) $(x + 6)(3x - 8) > 20 + 3(x^2 - 1)$;
 3) $\frac{x-2}{4} - \frac{x+1}{3} \leq \frac{5x}{12}$; 4) $x - 1 < \frac{3x-1}{3} + \frac{x+1}{2}$.

44. Знайдіть найменше ціле значення x , за якого значення дробу $\frac{3x+5}{2}$ менше від значення дробу $\frac{5x-7}{3}$.

45. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{\frac{2}{3}}(x+1) - 8; \quad 2) y = \frac{\sqrt{x-5}}{x-7}.$$

46. Довжина однієї сторони прямокутника дорівнює 6 см. Якою має бути довжина другої сторони, щоб периметр прямокутника був більшим за 30 см?

47. Спортсмен-паралімпієць зробив 10 пострілів по мішені. За кожний влучний постріл йому нараховують 3 очки, а в разі промаху віднімають від результату 1 очко. Відомо, що паралімпієць набрав більше, ніж 17 очок. Якою може бути кількість його влучних пострілів?



48. За яких значень a рівняння:
- 1) $ax^2 + 2(a + 1)x + (a + 3) = 0$ не має коренів;
 - 2) $ax^2 - (2a + 1)x + (a + 2) = 0$ має два різних корені?
49. Розв'яжіть нерівність для всіх значень a :
- 1) $5 + ax \geq a - 3x$; 2) $3(a - x) < 9 - ax$;
 - 3) $(a + 1)x > a^2 - 1$; 4) $(a^2 - 4)x \leq a - 2$.

До § 12

50. Чи є розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} 2x > 4, \\ 3x < 12 \end{cases}$ число:

1) 3; 2) 2,7; 3) 1,7; 4) -1,8; 5) 3,9; 6) 4?

51. Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x - 3 \geq 0, \\ x + 5 \geq 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 7 < 0, \\ x + 8 > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x \geq -4, \\ 2x < 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{8}x > 1, \\ \frac{1}{7}x \leq 1. \end{cases}$

52. Розв'яжіть систему нерівностей та вкажіть три числа, що є її розв'язками:

1) $\begin{cases} 3x + 2 > x + 4, \\ \frac{x}{3} < -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 2 \geq x - 1, \\ 3x - 1 < 1 - 2x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{2x - 1}{2} \leq 5, \\ \frac{x}{7} < 1. \end{cases}$

53. Розв'яжіть подвійну нерівність:

1) $4 \leq 8x < 24$; 2) $1 \leq \frac{x}{10} < 2$;

3) $0,1 < x + 1 < 1,1$; 4) $7,9 < x - 2 < 8,1$.

54. Знайдіть натуральні розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} \frac{2x + 3}{5} > \frac{3x + 4}{8}, \\ 3 - 2x > 5(x - 5); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(x - 1) > (x + 1)^2, \\ \frac{x}{4} + \frac{x}{3} > -7. \end{cases}$

55. За яких значень x :

1) значення двочлена $2x - 5$ належить проміжку $[-4; 2)$;

2) значення дробу $\frac{1 - 3x}{2}$ належить проміжку $[0; 4]$?

56. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 4x - 1 < 0, \\ -2 \leq 2x \leq 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -9 \leq -x \leq -5, \\ 5 \leq \frac{2x - 1}{3} \leq 10. \end{cases}$$

57. Сума натурального числа та подвоєного наступного за ним числа більша за 57. Сума цього самого числа і потроєного попереднього числа менша від 74. Знайдіть це натуральне число.

58. Знайдіть усі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 7, \\ x > 8, \\ x \leq 11; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x > 8, \\ 3x < 36, \\ -x < -5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - 7 > 0, \\ -x > -8, \\ 2x - 15 \geq 0. \end{cases}$$

4 59. За яких значень a система нерівностей має розв'язки:

$$1) \begin{cases} 3x > 15, \\ x < a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + a \geq 0, \\ 3x \leq -6? \end{cases}$$

60. Кількість одиниць деякого двоцифрового числа на 1 більша за кількість його десятків. Знайдіть це число, якщо воно більше за 45, але менше від 66.

***** 61. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 2, \\ x < a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 6, \\ x > a. \end{cases}$$

62. Знайдіть значення a , за яких один із коренів рівняння

$$x^2 + x + (a - a^2) = 0$$

менший від нуля, а другий – більший за 0,5.

63. Знайдіть, за яких значень a обидва корені квадратного рівняння $6x^2 + (5a + 2)x + (a^2 + a) = 0$ належать проміжку $[-4; 0]$.



Головне в темі 2

ЧИСЛОВІ НЕРІВНОСТІ

 $a > b$, якщо $a - b > 0$;

 $a < b$, якщо $a - b < 0$;

 $a = b$, якщо $a - b = 0$.

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Властивість 1. Якщо $a > b$, то $b < a$;
якщо $a < b$, то $b > a$.

Властивість 2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$;
якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Властивість 3. Якщо $a > b$ і p – будь-яке число,
то $a + p > b + p$.

Наслідок. Якщо $a > b + t$, то $a - t > b$.

Якщо деякий доданок перенести з однієї частини правильної нерівності у другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Властивість 4. Якщо $a > b$ і $p > 0$, то $ap > bp$;
якщо $a > b$ і $p < 0$, то $ap < bp$.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то одержимо правильну нерівність;

якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число та змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність.

Наслідок. Якщо $ab > 0$, тобто a і b – числа одного знака,
і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Властивість 5 (про почленне додавання нерівностей). Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

Властивість 6 (про почленне множення нерівностей). Якщо $a < b$ і $c < d$, де a, b, c, d – додатні числа, то $ac < bd$.

Наслідок. Якщо a і b – додатні числа і $a < b$, то $a^n < b^n$, де n – натуральне число.

НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННИМИ

Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її у правильну числову нерівність.

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

ЧИСЛОВІ ПРОМІЖКИ

Перетином числових проміжків називають множину, що містить усі числа, які належать кожному із цих проміжків.

Об'єднанням числових проміжків називають множину, що складається з усіх чисел, які належать хоча б одному із цих проміжків.

ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ. РІВНОСИЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Нерівності вигляду $ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$, де x – змінна, а a і b – деякі числа, називають *лінійними нерівностями з однією змінною*.

Нерівності, що мають одні й ті самі розв'язки, називають *рівносильними*. Нерівності, що не мають розв'язків, також є *рівносильними*.

Для нерівностей зі змінними справджуються *властивості*, подібні до тих, що справджуються і для рівнянь:

- 1) якщо в будь-якій частині нерівності розкрити дужки або звести подібні доданки, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- 2) якщо в нерівності перенести доданок з однієї її частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній;
- 3) якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній; якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Нерівності вигляду $0x > b$, $0x \geq b$, $0x < b$, $0x \leq b$ або не мають розв'язків, або їхнім розв'язком є будь-яке число.

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, за якого правильною є кожна з нерівностей системи.

Розв'язати систему нерівностей – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕРІВНОСТЕЙ

Щоб розв'язати систему нерівностей, доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) розв'язати кожен з нерівностей системи;
- 2) зобразити множину розв'язків кожної з нерівностей на координатній прямій;
- 3) знайти перетин цих множин, який і буде множиною розв'язків системи;
- 4) записати відповідь.

Фіскальна математика¹

Державний бюджет України – це план формування та використання фінансових ресурсів для забезпечення завдань і функцій держави, які вона здійснює через органи державної влади та місцевого самоврядування протягом бюджетного періоду. Основним джерелом формування держбюджету, зокрема наповнення його дохідної частини, є податки.

Податки – це обов’язкові платежі, які мають сплачувати фізичні та юридичні особи до державного бюджету. Розмір і терміни сплати податків установлюються законодавчо та періодично переглядаються. Розмір податкових нарахувань (*ставка податку*) може встановлюватися і у відсотках, і в абсолютній сумі. Найбільш вагомими для дохідної частини бюджету є *податок на додану вартість* (ПДВ) та *єдиний соціальний внесок* (ЄСВ). ПДВ сплачує покупець за ставкою 20 % від вартості товару (послуги), але облік та перерахування ПДВ до державного бюджету здійснює продавець (податковий агент). ЄСВ стягується з роботодавців за ставкою 22 % від фонду заробітної плати². Дохідна частина державного бюджету залежить також від інших видів податку, зокрема податку на доходи фізичних осіб, акцизного податку, мита, податку на прибуток підприємств, транспортного та земельного податків тощо (знайдіть детальну інформацію про різні види податків в Україні самостійно).

Спробуйте самостійно розв’язати кілька задач, пов’язаних з оподаткуванням.

1. В Україні 2015 року оподаткуванню підлягали 15 888 автомобілів, а 2016-го – 138 249 автомобілів. Ставка транспортного податку на кожне авто становила 25 000 грн на рік. На скільки більше надходжень за рахунок транспортного податку отримав державний бюджет України 2016 року порівняно з 2015 роком?

2. Ставка податку на землю 2016 року становила 3,66 грн за 1 м², але в деяких населених пунктах цей податок може нараховуватися з певним коефіцієнтом, наприклад у курортній місцевості Карпат, уздовж узбереж Чорного й Азовського морів, у густонаселених обласних центрах тощо. На скільки більшим буде розмір земельного податку в Києві, ніж в Одесі, за земельну ділянку площею 250 м², якщо в Києві й Одесі для ставки земельного податку діють коефіцієнти підвищення: коефіцієнт 3 – для Києва і коефіцієнт 2 – для Одеси?

3. За використаний у садовому будиночку газ родина Василенків сплатила суму, яку зазначено в договорі з підприємством, що надає послуги з газопостачання. Розмір ПДВ при цьому склав 670 грн. Яку суму (без ПДВ) зазначено в договорі на газопостачання для садового будиночка цієї родини?

¹ Та, що має стосунок до податкової політики держави.

² Ставки податків указано станом на 2025 рік.

4. Родина Бойчуків за листопад 2025 року отримала від «Укртелекому» рахунок у розмірі 480 грн. Скільки коштів буде перераховано як ПДВ після сплати родиною цього рахунку?

5. Військовий збір 2025 року склав 5 % від заробітної плати. Усі троє членів деякої родини працюють і отримують заробітну плату. Заробітна плата батька становить 14 000 грн, матері – 15 000 грн, а сина – 11 000 грн.

- 1) Яку загальну суму військового збору сплатять члени цієї родини за місяць?
- 2) Яку загальну суму військового збору сплатить родина протягом усього 2025 року, якщо їхня зарплата за цей період не змінювалася?

6. Сплативши 18 % податку на доходи фізичних осіб та 5 % військового збору від своєї заробітної плати, охоронець супермаркету отримав 9240 грн.

- 1) Який розмір заробітної плати в охоронця?
- 2) Скільки ЄСВ на місяць платить власник цього супермаркету до державного бюджету за охоронців, якщо в нього працюють три охоронці та начальник охорони, заробітна плата якого в 1,5 раза більша за заробітну плату охоронця?

ТЕМА 3

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **ознайомитеся** з поняттями векторної величини і вектора;
- **дізнаєтеся** про модуль, напрямок і координати вектора, колінеарність векторів;
- **навчитися** будувати вектор, який дорівнює даному вектору, сумі або різниці векторів, добутку вектора на число; знаходити модуль вектора за його координатами; координати вектора, який є сумою або різницею даних векторів; скалярний добуток векторів.

§ 13. Вектор. Модуль і напрямок вектора. Колінеарні вектори. Рівність векторів

1. Скалярні та векторні величини. Вектор

Є величини, які цілком характеризуються своїм числовим значенням. Прикладами таких величин є довжина, площа, маса, час, температура тощо. Такі величини називають *скалярними величинами*, або, коротше, *скалярами*.

Проте є величини, які, крім числового значення, задаються ще й напрямком. Такими є, наприклад, фізичні величини: сила, переміщення матеріальної точки, швидкість, прискорення. Щоб схарактеризувати рух автомобіля, часто недостатньо знати, з якою швидкістю він рухається; треба знати також, у якому напрямку.

Величини, що характеризуються не тільки числовим значенням, а й напрямком, називають *векторними величинами*, або *векторами*.

Зображають вектори в математиці напрямленим відрізком.

Відрізок, для якого визначено напрямок, називають *направленим відрізком*, або *вектором*.

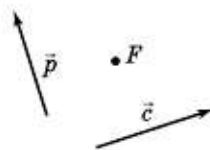
Вектор зручно зображувати відрізком зі стрілкою, яка показує напрямок вектора (мал. 13.1). Вектор позначають двома великими латинськими літерами, першу з яких вважають *початком* вектора, а другу – його *кінцем*, та стрілкою над ними.

Вектор, зображений на малюнку 13.1, записують так: $\overrightarrow{AB}$. Літера A – початок вектора $\overrightarrow{AB}$, літера B – його кінець.

Іноді вектори позначають однією малою латинською літерою, наприклад вектори $\vec{p}$ і $\vec{c}$ (мал. 13.2).



Мал. 13.1



Мал. 13.2

2. Нульовий вектор

Вектор, у якого початок та кінець збігаються, називають *нульовим вектором*, або *нуль-вектором*. Такий вектор зображують точкою. Якщо, наприклад, точку, що зображує нульовий вектор, позначити літерою F , то цей нульовий вектор можна називати $\overrightarrow{FF}$ (мал. 13.2). Нульовий вектор позначають ще символом $\vec{0}$. Нульовий вектор напрямку не має.

3. Модуль вектора

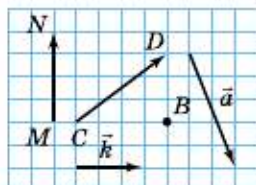
Модулем (довжиною або абсолютною величиною) вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB .

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають: $|\overrightarrow{AB}|$, вектора $\vec{p}$: $|\vec{p}|$. Довжина нульового вектора дорівнює нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Приклад 1. Знайти модулі векторів, зображених на малюнку 13.3, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.

Розв'язання. $|\overrightarrow{MN}| = 4$; $|\vec{k}| = 3$; $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$;

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$; $|\overrightarrow{BB}| = |\vec{0}| = 0$.



Мал. 13.3

4. Колінеарні вектори

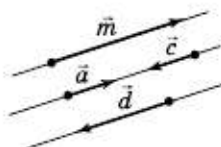
Колінеарними називають два ненульових вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Наприклад, на малюнку 13.4 колінеарними є пари векторів $\vec{a}$ і $\vec{m}$, $\vec{a}$ і $\vec{c}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ тощо.

Для колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{m}$ використовують запис: $\vec{a} \parallel \vec{m}$.

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Колінеарні вектори бувають *співнапрямленими*, тобто мають однаковий напрямок (вектори $\vec{a}$ і $\vec{m}$ на мал. 13.4), або *протилежно напрямленими* (вектори $\vec{a}$ і $\vec{d}$ на мал. 13.4). Записують так: $\vec{a} \uparrow \vec{m}$, $\vec{a} \downarrow \vec{d}$.

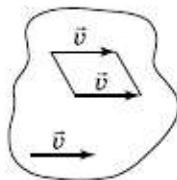


Мал. 13.4

5. Рівність векторів

Розглянемо поняття рівності векторів.

Нехай тіло рухається з певною швидкістю в певному напрямку (мал. 13.5). Тоді всі точки цього тіла рухаються із цією швидкістю в цьому напрямку. Тому всі



Мал. 13.5

напрявлені відрізки (вектори) $\vec{v}$, якими зображено швидкості цих точок, є співнапрявленими і мають однакові модулі. Такі вектори називають *рівними*.

Два вектори називають *рівними*, якщо вони співнапрявлені і їхні модулі між собою рівні.

Рівність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MN}$ записують так: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

Приклад 2. $ABCD$ – ромб (мал. 13.6). Чи рівні вектори:

1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CB}$; 4) $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{CK}$?

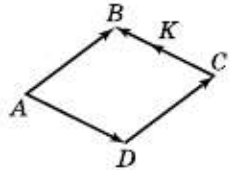
Розв'язання. 1) Так, оскільки $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$.

2) Оскільки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ не є співнапрявленими, то вони не є рівними.

3) $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CB}$ також не є рівними, оскільки не є співнапрявленими.

4) $\overrightarrow{CB} \uparrow \overrightarrow{CK}$, але $|\overrightarrow{CB}| \neq |\overrightarrow{CK}|$, тому вектори $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{CK}$ теж не є рівними.

Відповідь: 1) так; 2) ні; 3) ні; 4) ні.

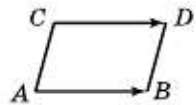


Мал. 13.6



Приклад 3. Точки A, B, C і D не лежать на одній прямій. Тоді, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $ABDC$ – паралелограм. І навпаки, якщо $ABDC$ – паралелограм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Доведіть.

Доведення. 1) Нехай $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ та $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ не лежать на одній прямій (мал. 13.7). Тоді $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$ і $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.



Мал. 13.7

За ознакою паралелограма, ураховуючи, що точки B і D лежать по один бік від прямої AC , отримуємо, що $ABDC$ – паралелограм.

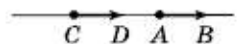
2) Нехай $ABDC$ – паралелограм, тоді $AB \parallel CD$ і $AB = CD$ (мал. 13.7). Тому $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$ і $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. Отже, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. ■

6. Відкладання вектора від заданої точки, що дорівнює заданому

Розглянемо, як від заданої точки відкласти вектор, що дорівнює даному. Якщо дано вектор $\overrightarrow{AB}$ і точку C , то відкласти вектор $\overrightarrow{AB}$ від точки C означає побудувати вектор $\overrightarrow{CD}$ такий, що $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

Приклад 4. Від точки C відкласти вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$.

Розв'язання. 1-й випадок. Точка C лежить на прямій AB (мал. 13.8). Відкладемо від точки C у тому самому напрямку, що й у вектора $\overrightarrow{AB}$, відрізок CD (точка D належить прямій AB), який дорівнює відрізку AB . Тоді $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.



Мал. 13.8

- 2-й випадок. Точка C не лежить на прямій AB (мал. 13.7). Будуємо паралелограм $ABDC$. Тоді $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ (див. доведення попередньої задачі). Зауважимо, в обох випадках побудована точка D є єдиною.

А ще раніше...



Евдокс
Кнідський

Цікавість до векторів з'явилась у математиків XIX ст. у зв'язку з розвитком механіки й фізики, проте витoki числення з напрямленими відрізками виникли в далекому минулому.

Математики часів Піфагора та математики пізніших часів намагалися зводити розв'язання питань арифметики й алгебри до розв'язування задач геометричним шляхом. Так було покладено початок геометричній теорії відношень Евдокса (408–355 рр. до н. е.), а пізніше – геометричній алгебри.

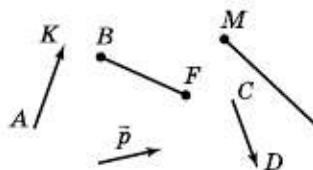
Сам термін *вектор* (від латинського *vector*, що можна перекласти як «той, що веде», «той, що переносить») запропонував Гамільтон. Він же описав і деякі операції векторного аналізу. Незабаром, завдяки роботам Геббса (кінець XIX ст.) та Хевісайда (початок XX ст.), векторний аналіз як частина математики набув сучасного вигляду.

- Які величини називають скалярними? Які величини називають векторними?
 Що називають вектором? Яка точка є початком вектора $\overrightarrow{MN}$, а яка – кінцем цього вектора? Як позначають вектори? Що називають модулем вектора $\overrightarrow{AB}$?
 Які вектори називають колінеарними? Якими можуть бути колінеарні вектори?
 Які вектори називають рівними? Що означає відкласти вектор $\overrightarrow{CD}$ від точки X ?

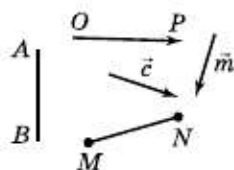


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 13.1. Запишіть вектори, зображені на малюнку 13.9.



Мал. 13.9



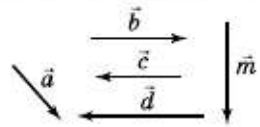
Мал. 13.10

- 13.2. Запишіть вектори, зображені на малюнку 13.10.
- 13.3. Позначте в зошиті точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CA}$.
- 13.4. Позначте в зошиті точки P , L і K , що не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overrightarrow{PL}$, $\overrightarrow{PK}$ і $\overrightarrow{KL}$.
- 13.5. За малюнком 13.11 запишіть усі пари:
 1) колінеарних векторів;

- 2) співнаправлених векторів;
- 3) протилежно напрямлених векторів.

13.6. За малюнком 13.12 запишіть усі пари:

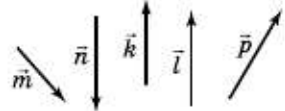
- 1) колінеарних векторів;
- 2) співнаправлених векторів;
- 3) протилежно напрямлених векторів.



Мал. 13.11

2 13.7. Накресліть довільний вектор $\overline{MN}$.

Накресліть вектор $\overline{AB}$, співнаправлений з вектором $\overline{MN}$, та вектор $\overline{CD}$, протилежно напрямлений вектору $\overline{MN}$.



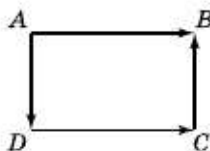
Мал. 13.12

- 1) Виконайте відповідні записи за допомогою символів.
- 2) Чи є колінеарними вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$?
- 3) Співнаправленими чи протилежно напрямленими є вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$?

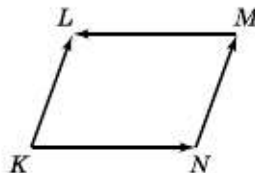
13.8. Накресліть довільний вектор $\vec{a}$. Накресліть вектор $\vec{b}$, співнаправлений з вектором $\vec{a}$, та вектор $\vec{c}$, протилежно напрямлений вектору $\vec{a}$.

- 1) Виконайте відповідні записи за допомогою символів.
- 2) Чи є колінеарними вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$?
- 3) Співнаправлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$?

13.9. На малюнку 13.13 $ABCD$ – прямокутник. Укажіть рівні вектори та вектори, що мають однакові модулі. Виконайте відповідні записи.



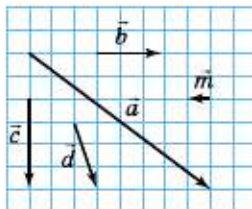
Мал. 13.13



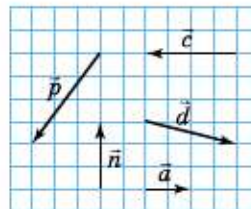
Мал. 13.14

13.10. На малюнку 13.14 $KLMN$ – паралелограм. Укажіть рівні вектори та вектори, що мають однакові модулі. Виконайте відповідні записи.

13.11. Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 13.15, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.



Мал. 13.15



Мал. 13.16

13.12. Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 13.16, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.

13.13. Накресліть два вектори, що:

- 1) мають рівні модулі та неколінеарні;
- 2) мають рівні модулі та співнапрямлені;
- 3) мають рівні модулі та протилежно напрямлені.

У якому випадку накреслені вектори рівні?

13.14. Дано вектор $\overrightarrow{CD}$. Від точки A відкладіть вектор $\overrightarrow{AB}$ такий, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

13.15. Дано вектор $\overrightarrow{AB}$. Від точки M відкладіть вектор $\overrightarrow{MN}$ такий, що $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

3 13.16. $KLMN$ – ромб, O – точка перетину його діагоналей. Укажіть вектор, рівний вектору:

- 1) $\overrightarrow{LM}$; 2) $\overrightarrow{KL}$; 3) $\overrightarrow{OK}$; 4) $\overrightarrow{NO}$.

13.17. $ABCD$ – квадрат, O – точка перетину його діагоналей. Укажіть вектор, що дорівнює вектору:

- 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{DA}$; 3) $\overrightarrow{BO}$; 4) $\overrightarrow{OA}$.

13.18. (Усно.) Чи можуть бути рівними вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, якщо точки A і B різні?

13.19. Дано точки $A(-2; 1)$, $B(0; 2)$, $M(1; -1)$. Відкладіть від точки M вектор $\overrightarrow{MN}$, що дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$. Якими є координати точки N ?

13.20. Дано точки $C(1; -3)$, $D(-1; -2)$, $P(3; -1)$. Відкладіть від точки P вектор $\overrightarrow{PK}$, рівний вектору $\overrightarrow{CD}$. Якими є координати точки K ?

13.21. У прямокутнику $ABCD$: $AB = 3$, $BC = 4$, M – середина BC . Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AM}$.

13.22. У квадраті $ABCD$ діагональ AC дорівнює $4\sqrt{2}$, N – середина AD . Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{BN}$.

13.23. (Усно.) Чи правильне твердження:

- 1) якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; 2) якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$;
- 3) якщо $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$; 4) якщо $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$;
- 5) якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$?

4 13.24. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо:

- 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$; 2) $\overrightarrow{BC} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ – неколінеарні.

13.25. У чотирикутнику $ABCD$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, точка E – середина BC . Прямая AE перетинає промінь DC у точці F . Серед векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$ укажіть усі пари:

- 1) колінеарних векторів; 2) співнапрямлених векторів;
- 3) протилежно напрямлених векторів;
- 4) рівних векторів; 5) векторів, що мають рівні модулі.

13.26. У чотирикутнику $ABCD$ $\overline{AB} = \overline{DC}$. Через точку O перетину його діагоналей проведено пряму, що перетинає сторони BC та AD у точках E і F відповідно, причому $BE \neq EC$. Серед векторів $\overline{AE}$, $\overline{EC}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{CF}$ укажіть усі пари:

- 1) колінеарних векторів;
- 2) співнаправлених векторів;
- 3) протилежно направлених векторів;
- 4) рівних векторів;
- 5) векторів, що мають рівні модулі.



Вправи для повторення

13.27. Точка M – середина відрізка AB . Знайдіть координати точки:

- 1) A , якщо $M(-2; 5)$, $B(0; -7)$;
- 2) B , якщо $A(7; -1)$, $M(1,5; 2,5)$.

13.28. Знайдіть на осі абсцис точку A , відстань від якої до точки $B(7; 5)$ дорівнює 13.

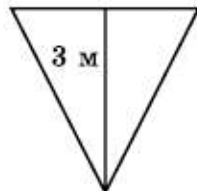
13.29. Дано відрізки a і b ($a > b$). Використовуючи метричні співвідношення у прямокутному трикутнику, побудуйте відрізок:

- 1) $x = \sqrt{ab}$;
- 2) $y = \sqrt{a(a-b)}$.



Життєва математика

13.30. Канал, який має в перерізі форму трикутника, 3 м завглибшки перегороджено вертикально щитом у формі рівностороннього трикутника. Щоб визначити гідростатичний тиск на цей щит, потрібно знати його площу. Обчисліть площу щита (з точністю до сотих м^2).



Цікаві задачі – поміркуй одначе

13.31. Якого найменшого значення може набувати вираз $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$? За яких значень x та y досягається це значення?

§ 14. Координати вектора

1. Означення координат вектора

Якщо на площині ввести систему координат, то кожен вектор можна задати парою чисел – *координатами вектора*.

Координатами вектора $\overline{AB}(x; y)$ з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$ та $y = y_2 - y_1$.

Записують вектор $\overline{AB}$, указуючи його координати, так: $\overline{AB}(x; y)$. Наприклад, $\overline{KL}(3; -4)$, $\vec{a}(0; -2)$.

Приклад 1. Знайти координати вектора $\overline{AB}$, якщо:

- 1) $A(-2; 5)$, $B(7; 3)$; 2) $A(-4; 8)$, $B(-4; 10)$.

Розв'язання. 1) За означенням координат вектора маємо:

$$x = 7 - (-2) = 9; y = 3 - 5 = -2, \text{ отже, } \overline{AB}(9; -2).$$

- 2) Аналогічно, $x = -4 - (-4) = 0$; $y = 10 - 8 = 2$, отже, $\overline{AB}(0; 2)$.

Відповідь: 1) $(9; -2)$; 2) $(0; 2)$.

Координатами вектора можуть бути будь-які дійсні числа. Обидві координати нуль-вектора дорівнюють нулю: $\vec{0}(0; 0)$.

2. Модуль вектора, що задано координатами

Відстань AB між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ знаходять за формулою $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Оскільки $x_2 - x_1 = x$ і $y_2 - y_1 = y$, то

модуль вектора $\overline{AB}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\text{Отже, } |\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Приклад 2. Знайти модуль вектора: 1) $\overline{MN}(3; -4)$; 2) $\overline{CD}(4; -1)$.

Розв'язання.

$$1) |\overline{MN}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5; \quad 2) |\overline{CD}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}.$$

Відповідь: 1) 5; 2) $\sqrt{17}$.

Приклад 3. Модуль вектора $\vec{p}(-6; y)$ дорівнює 10. Знайти y .

$$\text{Розв'язання. } 1) |\vec{p}| = \sqrt{(-6)^2 + y^2} = \sqrt{36 + y^2}.$$

$$2) \text{ За умовою } \sqrt{36 + y^2} = 10; \text{ тобто } 36 + y^2 = 100.$$

Розв'язавши отримане рівняння, матимемо $y_{1,2} = \pm 8$.

Відповідь: 8 або -8.

3. Рівність векторів, що задано координатами



Теорема (про рівність векторів). У рівних векторів відповідні координати рівні, і навпаки, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.

Доведення. Розглянемо вектор $\overline{AB}$, де $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, тоді $\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

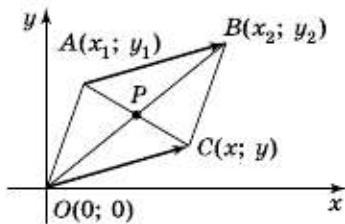
1) Нехай вектор $\overline{AB}$ не лежить на жодній з координатних осей (мал. 14.1). Відкладемо від точки $O(0; 0)$ вектор $\overline{OC} = \overline{AB}$, де $C(x; y)$. Тоді $\overline{OC}(x; y)$. У паралелограмі $ABCO$ точка $P(x_0; y_0)$ – точка перетину діагоналей. Тоді за формулою координат середини відрізка:

$$x_0 = \frac{x_1 + x}{2} = \frac{x_2 + 0}{2} \text{ і } y_0 = \frac{y_1 + y}{2} = \frac{y_2 + 0}{2}.$$

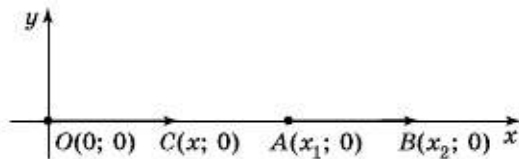
Звідки маємо: $x_1 + x = x_2$, $y_1 + y = y_2$, а тому $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, тобто $\overline{OC}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Отже, відповідні координати векторів $\overline{OC}$ і $\overline{AB}$ рівні.

Якщо вектор $\overline{AB}$ лежить на осі x (мал. 14.2), то $x - 0 = x_2 - x_1$, тобто $x = x_2 - x_1$, отже, відповідні координати векторів $\overline{OC}$ і $\overline{AB}$ рівні.

Аналогічно доводимо у разі, якщо $\overline{AB}$ лежить на осі y .



Мал. 14.1



Мал. 14.2

2) Нехай відповідні координати векторів $\overline{AB}$ та $\overline{OC}$ рівні (мал. 14.1), тобто $x = x_2 - x_1$; $y = y_2 - y_1$. Тому $x + x_1 = x_2$; $y + y_1 = y_2$.

У чотирикутнику $ABCO$ точка P_1 – середина AC ; $x_{P_1} = \frac{x_1 + x}{2}$; $y_{P_1} = \frac{y_1 + y}{2}$; точка P_2 – середина BO ; $x_{P_2} = \frac{x_2}{2}$; $y_{P_2} = \frac{y_2}{2}$.

Але $x + x_1 = x_2$ і $y + y_1 = y_2$, тому точки P_1 і P_2 збігаються, тобто середини діагоналей чотирикутника $ABCO$ збігаються. При цьому точка P_1 ділить кожну з них навпіл. Отже, $ABCO$ – паралелограм, а тому $\overline{AB} = \overline{OC}$.

Якщо вектори $\overline{OC}$ і $\overline{AB}$ лежать на осі x і $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ (мал. 14.2), то очевидно, що $|\overline{OC}| = |\overline{AB}|$, а тому й $\overline{OC} = \overline{AB}$, оскільки вектори $\overline{OC}$ і $\overline{AB}$ співнаправлені.

Аналогічно доводимо у разі, якщо $\overline{OC}$ і $\overline{AB}$ лежать на осі y . ■

Приклад 4. Дано точки $M(-3; 4)$, $N(5; -7)$, $C(4; -2)$, $D(x; y)$. Знайти x та y , якщо $\overline{MN} = \overline{CD}$.

Розв'язання. 1) $\overline{MN}(5 - (-3); -7 - 4)$, тобто $\overline{MN}(8; -11)$, $\overline{CD}(x - 4; y - (-2))$, тобто $\overline{CD}(x - 4; y + 2)$.

2) Але $\overline{MN} = \overline{CD}$, тому $x - 4 = 8$ і $y + 2 = -11$, тобто $x = 12$, $y = -13$.

Відповідь: $x = 12$, $y = -13$.



Що таке координати вектора? Як знайти модуль вектора $\overline{AB}(x; y)$? Доведіть, що рівні вектори мають рівні координати, а вектори з відповідно рівними координатами – рівні.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

- 1** 14.1. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$, якщо:
1) $A(-3; 5)$, $B(4; -7)$; 2) $A(2; -7)$, $B(2; 3)$.
- 14.2. Знайдіть координати вектора $\overline{CD}$, якщо:
1) $C(4; -7)$, $D(8; -2)$; 2) $C(5; -1)$, $D(1; -1)$.
- 14.3. Знайдіть модуль вектора:
1) $\vec{a}(-3; 4)$; 2) $\vec{b}(12; 5)$.
- 14.4. Знайдіть модуль вектора:
1) $\vec{m}(6; -8)$; 2) $\vec{n}(8; 15)$.
- 14.5. Дано: $\vec{m}(x; -5)$, $\vec{n}(4; y)$, $\vec{m} = \vec{n}$. Знайти: x та y .
- 14.6. Дано: $\vec{a}(7; y)$, $\vec{b}(x; -2)$, $\vec{a} = \vec{b}$. Знайти: x та y .
- 2** 14.7. Знайдіть координати вектора $\overline{CD}$ та його модуль:
1) $C(5; -4)$, $D(4; -7)$; 2) $C(-2; 5)$, $D(0; 8)$.
- 14.8. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$ та його модуль:
1) $A(7; -2)$, $B(6; 0)$; 2) $A(2; 7)$, $B(4; 11)$.
- 14.9. Чи рівні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{MN}$, якщо:
1) $A(5; 7)$, $B(6; -1)$, $M(8; -2)$, $N(9; -10)$;
2) $A(6; -1)$, $B(0; -2)$, $M(4; 5)$, $N(-2; 6)$?
- 14.10. Чи рівні вектори $\overline{CD}$ і $\overline{PK}$, якщо:
1) $C(4; -2)$, $D(8; -5)$, $P(7; -1)$, $K(3; -4)$;
2) $C(0; 4)$, $D(7; 0)$, $P(-3; 2)$, $K(4; -2)$?
- 14.11. Порівняйте модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
1) $\vec{a}(4; 1)$, $|\vec{b}| = 4$; 2) $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(-1; 2)$.
- 14.12. Порівняйте модулі векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:
1) $|\vec{c}| = 3$, $\vec{d}(-3; 1)$; 2) $\vec{c}(-1; 4)$, $\vec{d}(4; 1)$.
- 14.13. Задано вектори $\vec{a}(-6; 8)$ і $\vec{b}(-12; -5)$. Знайдіть значення $|\vec{a}| + |\vec{b}|$, відтак дізнаєтеся, скільки загалом нагород здобула збірна України на перших літніх Олімпійських іграх 1996 р. Дізнайтеся з інтернету про інші досягнення українських спортсменів на олімпійських іграх.
- 14.14. Задано вектори $\vec{c}(12; -16)$ і $\vec{d}(8; 15)$. Знайдіть значення $|\vec{c}| - |\vec{d}|$, відтак дізнаєтеся, яке загальнокомандне місце посіла паралімпійська збірна України на іграх 2016 р., здобувши 41 золоту, 37 срібних і 39 бронзових нагород. Дізнайтеся з інтернету про героїв тієї Олімпіади.

14.15. Дано точки $C(2; -3)$, $D(4; -5)$, $M(3; 5)$, $N(x; y)$. Знайдіть x та y , якщо $\vec{CD} = \vec{MN}$.

14.16. Дано точки $A(2; -5)$, $B(3; -6)$, $C(x; y)$, $D(0; 5)$. Знайдіть x та y , якщо $\vec{AB} = \vec{CD}$.

3 14.17. Вектор $\vec{a}(4; -7)$ відкладено від точки $P(-2; 5)$. Знайдіть координати кінця вектора.

14.18. Вектор $\vec{b}(-3; 2)$ відкладено від точки $M(4; -1)$. Знайдіть координати кінця вектора.

14.19. Точка $A(-2; 7)$ – кінець вектора $\vec{c}(7; -5)$. Знайдіть координати початку вектора.

14.20. Точка $B(1; -8)$ – кінець вектора $\vec{d}(-3; 0)$. Знайдіть координати початку вектора.

14.21. Знайдіть координати вершини B паралелограма $ABCO$ (мал. 14.3).

14.22. Сторона квадрата дорівнює 6 (мал. 14.4). Знайдіть координати вектора $\vec{AM}$, де M – середина BC .

14.23. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, якщо $A(2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; -2)$, $D(4; -5)$.

14.24. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $KLMN$ є паралелограмом, якщо $K(0; -2)$, $L(3; 0)$, $M(7; 2)$, $N(4; 0)$.

14.25. Модуль вектора $\vec{a}(x; -3)$ дорівнює 5. Знайдіть x .

14.26. Модуль вектора $\vec{b}(-8; y)$ дорівнює 10. Знайдіть y .

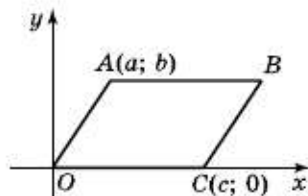
4 14.27. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(4; 2)$, $B(5; 5)$, $C(4; 8)$ і $D(3; 5)$ – ромб.

14.28. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(-1; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(4; 0)$ і $D(4; 4)$ – прямокутник.

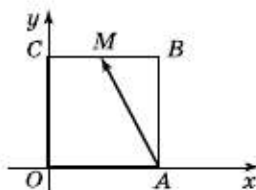
14.29. Модуль вектора $\vec{a}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{10}$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо координата x цього вектора на 2 більша за координату y .

14.30. Модуль вектора $\vec{b}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{5}$. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, якщо їхня сума дорівнює 1.

14.31. Знайдіть рівняння координат усіх таких точок B , що вектор $\vec{AB}$ має той самий модуль, що і вектор $\vec{a}(2; -3)$, якщо $A(4; 5)$.



Мал. 14.3



Мал. 14.4

Вправи для повторення

14.32. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційні числам:
1) 5, 7, 2; 2) 5, 6, 7; 3) 11, 8, 2?

- 14.33. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 14 см і 17 см. Знайдіть периметр подібного йому трикутника, сума найбільшої та найменшої сторін якого дорівнює 70 см.
- 14.34. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, у відношенні 5:3. Знайдіть периметр трикутника, якщо його бічна сторона на 3 см менша від основи.



Життєва математика

- 14.35. Щоб засіяти 1 м² землі, потрібно 40 г насіння газонної трави. Кілограм такого насіння коштує 180 грн. Скільки коштів знадобиться, щоб засіяти газонною травою клумбу прямокутної форми зі сторонами 30 м і 20 м?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 14.36. Дано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC . Бісектриса кута ABC перетинає середню лінію трапеції в точці N , а основу AD – у точці K . Чи можна знайти градусну міру кута ANB ? У разі ствердної відповіді знайдіть градусну міру цього кута.

§ 15. Додавання та віднімання векторів

1. Додавання векторів, що задані координатами. Властивості додавання векторів

Як і числа, вектори можна додавати й віднімати. Результатом додавання або віднімання векторів є вектор.

Сумою векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ називають вектор $\vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

Наприклад, сумою векторів $\vec{a}(-5; 2)$ і $\vec{b}(4; -11)$ є вектор $\vec{c}(-5 + 4; 2 + (-11))$, тобто $\vec{c}(-1; -9)$.

Для суми векторів справджуються рівності:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переставна властивість додавання);
 $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (сполучна властивість додавання).

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати, що стоять у лівій і правій частинах рівностей. Ці координати рівні між собою, а вектори з відповідно рівними координатами рівні.

Приклад 1. За якого значення x модуль вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ буде найменшим, якщо $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(x; 4)$, $\vec{c}(3; 8)$?

Розв'язання. 1) Нехай $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Тоді $\vec{d}(-2 + x + 3; 3 + 4 + 8)$, тобто $\vec{d}(x + 1; 15)$.

2) Знайдемо його модуль: $|\vec{d}| = \sqrt{(x + 1)^2 + 15^2}$. Модуль вектора $\vec{d}$ буде найменшим, коли вираз $(x + 1)^2$ набудатиме найменшого значення. Це значення дорівнює 0 і досягається, якщо $x = -1$.

Відповідь: $x = -1$.

2. Правило трикутника додавання векторів

Теорема (правило трикутника додавання векторів). Хоч які були б точки A , B і C , справджується рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

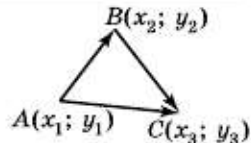
Доведення. Нехай $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ – дані точки (мал. 15.1). Тоді $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\overrightarrow{BC}(x_3 - x_2; y_3 - y_2)$, $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1; y_3 - y_1)$. Позначимо $\vec{m} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, маємо:

$$\vec{m}(x_2 - x_1 + x_3 - x_2; y_2 - y_1 + y_3 - y_2) = \vec{m}(x_3 - x_1; y_3 - y_1).$$

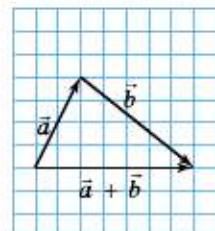
Отже, $\vec{m} = \overrightarrow{AC}$, тому $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. ■

Отже, приходимо до правила побудови суми двох довільних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – *правила трикутника* (мал. 15.2):

- 1) від кінця вектора $\vec{a}$ відкладаємо вектор $\vec{b}$;
- 2) будуємо вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$; цей вектор і є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Мал. 15.1



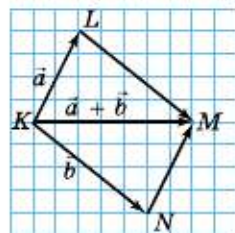
Мал. 15.2

3. Правило паралелограма додавання векторів

Суму двох векторів можна знаходити і за *правилом паралелограма* (мал. 15.3):

- 1) відкладаємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від спільного початку (точки K);
- 2) будуємо на цих векторах паралелограм;
- 3) будуємо вектор, що є діагоналлю паралелограма, яка виходить із точки K ; цей вектор і буде сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Справді $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KM}$, але $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{KN}$, тому $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KM}$; $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{KM}$.



Мал. 15.3

Зауважимо, що за правилом трикутника можна знайти суму будь-яких двох векторів, а за правилом паралелограма – лише неколінеарних.

4. Віднімання векторів, що задані координатами

Різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ називають вектор $\vec{d}(x_3; y_3)$ такий, що $\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$.

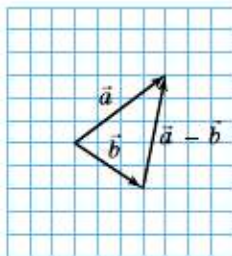
Маємо: $x_3 + x_2 = x_1$, $y_3 + y_2 = y_1$. Тоді $x_3 = x_1 - x_2$, $y_3 = y_1 - y_2$.
Отже,

різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ буде вектор $\vec{d}(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

5. Побудова різниці двох векторів

Оскільки $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (мал. 15.1), то $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Звідси отримуємо правило побудови різниці двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 15.4):

- 1) відкладаємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від спільного початку;
- 2) будуємо вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{a}$, що і є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Мал. 15.4

Приклад 2. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (мал. 15.5), $\overrightarrow{BO} = \vec{m}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{n}$. Виразити вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{DC}$ через вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$.

Розв'язання.

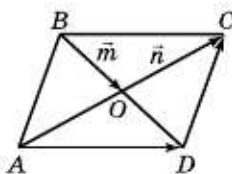
$$1) \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BC} = \vec{m} + \vec{n}.$$

Але $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, тому $\overrightarrow{AD} = \vec{m} + \vec{n}$.

$$2) \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC}, \text{ звідси } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}.$$

Але $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$, тому $\overrightarrow{DC} = \vec{n} - \vec{m}$.

Відповідь: $\overrightarrow{AD} = \vec{m} + \vec{n}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{n} - \vec{m}$.



Мал. 15.5

А ще раніше...

У «Началах» Евкліда дії додавання та віднімання зводилися до додавання та віднімання відрізків, а дія множення – до побудови прямокутника на відрізках, довжини яких дорівнюють довжинам множників.

1587 р. голландською мовою було опубліковано трактат фламандського вченого С. Стевена «Початки статки». У ньому автор розглянув додавання двох взаємно перпендикулярних сил та прийшов до висновку, що для розв'язування цієї задачі необхідно скористатися «паралелограмом сил». Також С. Стевен упровадив стрілки для позначення сил.

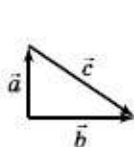
Значно пізніше французький математик Луї Пуансо (1777–1859) у праці «Елементи статистики», яка вийшла 1803 р., розробив теорію векторів, що відповідають силам, які діють у різних напрямках.

- Який вектор називають сумою векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$? Сформулюйте і доведіть теорему про правило трикутника додавання векторів. Сформулюйте правило трикутника для додавання векторів. Сформулюйте правило паралелограма для додавання векторів. Що називають різницею двох векторів? Як знайти різницю векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$? Сформулюйте правило побудови різниці двох векторів.

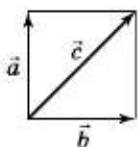


Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

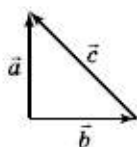
- 1** 15.1. Знайдіть суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
 1) $\vec{a}(2; -5)$, $\vec{b}(4; 7)$; 2) $\vec{a}(-3; 8)$, $\vec{b}(3; -11)$.
- 15.2. Знайдіть суму $\vec{c} + \vec{d}$, якщо:
 1) $\vec{c}(4; -7)$, $\vec{d}(-2; 5)$; 2) $\vec{c}(4; -7)$, $\vec{d}(-6; 7)$.
- 15.3. Знайдіть різницю $\vec{c} - \vec{d}$, якщо:
 1) $\vec{c}(8; -5)$, $\vec{d}(4; 0)$; 2) $\vec{c}(2; -3)$, $\vec{d}(5; -2)$.
- 15.4. Знайдіть різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
 1) $\vec{a}(4; -2)$, $\vec{b}(5; -7)$;
 2) $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(4; 0)$.
- 15.5. (Усно.) На яких із малюнків 15.6–15.10 вектор $\vec{c}$ є сумою $\vec{a} + \vec{b}$, а на яких – різницею $\vec{a} - \vec{b}$?



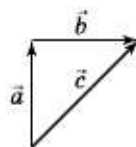
Мал. 15.6



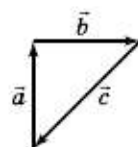
Мал. 15.7



Мал. 15.8



Мал. 15.9



Мал. 15.10

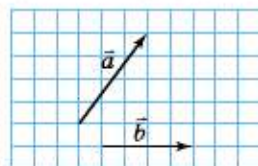
- 2** 15.6. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 15.11). Побудуйте вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

- 15.7. Накресліть два неколінеарних вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Побудуйте вектор $\vec{m} = \vec{c} + \vec{d}$.

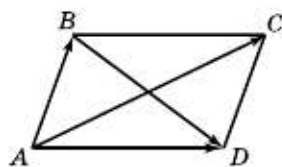
- 15.8. Накресліть два неколінеарних вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$. Побудуйте вектор $\vec{p} = \vec{m} - \vec{n}$.

- 15.9. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 15.11). Побудуйте вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

- 15.10. Дано паралелограм $ABCD$ (мал. 15.12). Виразіть вектори $\vec{AC}$ і $\vec{BD}$ через вектори $\vec{AB}$ і $\vec{AD}$.



Мал. 15.11



Мал. 15.12

15.11. Дано: $\vec{a}(2; 1)$, $\vec{b}(x; y)$, $\vec{c}(-2; 8)$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Знайти: $x + y$. Дізнається, скільки разів українські атлети ставали призерами змагань із силової атлетики «Найсильніша людина світу» (*World's Strongest Man*).

15.12. Дано: $\vec{a}(3; -1)$, $\vec{b}(x; y)$, $\vec{c}(0; 2)$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$. Знайти: x та y .

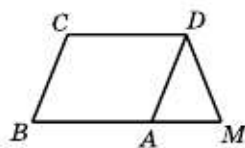
3 15.13. $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть суму:

- 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$; 4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$.

15.14. $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть суму:

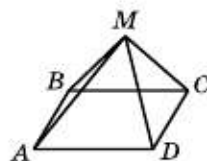
- 1) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$.

15.15. $ABCD$ – паралелограм (мал. 15.13). Доведіть, що $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CB}$.



Мал. 15.13

15.16. $ABCD$ – паралелограм (мал. 15.14). Доведіть, що $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AM}$.



Мал. 15.14

15.17. Доведіть, що для будь-яких точок K, L, M, T справджується рівність $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LT} + \overrightarrow{TK}$.

15.18. Дано точки $A(0; -8)$ і $B(10; 0)$. Знайдіть координати точки K такої, що $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

15.19. Дано точки $C(6; 0)$ і $D(0; -18)$. Знайдіть координати точки A такої, що $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

4 15.20. Дано вектори $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(3; -4)$, $\vec{c}(x; 8)$. За якого значення x модуль вектора $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ буде найменшим?

15.21. Дано вектори $\vec{p}(4; -3)$, $\vec{m}(9; y)$, $\vec{n}(-2; 5)$. За якого значення y модуль вектора $\vec{p} + \vec{m} - \vec{n}$ буде найменшим?

Вправи для повторення

15.22. $ABCD$ – трапеція з основами AB і CD . Укажіть усі пари:

- 1) співнаправлених векторів;
2) протилежно направлених векторів.

15.23. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см, а висота, проведена до меншої сторони, дорівнює 4 см. Знайдіть висоту, проведenu до більшої сторони.

15.24. Знайдіть значення виразу $\frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \sin \alpha + \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 5$.

Життєва математика

15.25. Брус, поперечним перерізом якого є прямокутник, має найбільшу міцність тоді, коли перпендикуляри, проведені з протилежних вершин цього прямокутника до його діагоналі, ділять її на три рівні частини. Визначте з точністю до десятих см, яких максимальних розмірів можна випилити брус із колоди циліндричної форми діаметром 36 см. *Примітка.* Врахуйте максимальні розміри бруса.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

15.26. (Національна олімпіада Швеції, 1982 р.) Доведіть, що коли для деякої точки O , яка лежить у внутрішній області чотирикутника $ABCD$, площі трикутників ABO , BCO , CDO і DAO рівні між собою, то ця точка належить хоча б одній з діагоналей AC або BD .

§ 16. Множення вектора на число

1. Множення вектора, який задано координатами, на число.

Властивості множення вектора на число

Знаючи, що таке сума векторів, можна розглядати суми вигляду $\vec{a} + \vec{a}$, $\vec{m} + \vec{m} + \vec{m}$ тощо. Такі суми, як і в алгебрі, будемо записувати у вигляді добутків $2\vec{a}$, $3\vec{m}$ тощо.

Результатом множення вектора на число є вектор.

Добутком вектора $\vec{a}(x; y)$ на число λ називають вектор $\lambda\vec{a}(\lambda x; \lambda y)$.

Наприклад, добутком вектора $\vec{a}(-5; 4)$ на число -1 є вектор $-\vec{a}(5; -4)$, на число 2 – вектор $2\vec{a}(-10; 8)$, на число 3 – вектор $3\vec{a}(-15; 12)$.

Для добутку вектора на число справджуються *властивості*:

для будь-яких вектора $\vec{a}$ та чисел α і β

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a};$$

для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та числа α

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати лівої та правої частин рівностей. Ці координати між собою рівні, а отже, рівні й вектори.

За означенням суми, різниці векторів та добутку вектора на число можна визначити координати будь-якого вектора, записаного у вигляді алгебраїчної суми векторів, координати яких відомо.

Приклад 1. Дано вектори $\vec{a}(2; -5)$ і $\vec{b}(-4; 1)$. Знайти координати вектора: 1) $\vec{m} = 2\vec{a} + 7\vec{b}$; 2) $\vec{n} = 9\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання. Розв'язання зручно записати так:

$$\begin{array}{rcl} 1) & 2\vec{a}(4; -10) & 2) & 9\vec{a}(18; -45) \\ & + 7\vec{b}(-28; 7) & & - \vec{b}(-4; 1) \\ \hline & \vec{m}(-24; -3) & & \vec{n}(22; -46) \end{array}$$

Відповідь: 1) $\vec{m}(-24; -3)$;

2) $\vec{n}(22; -46)$.

2. Теорема про добуток вектора на число

Т Теорема (про добуток вектора на число). Модуль вектора $\lambda \vec{a}$ дорівнює $|\lambda| |\vec{a}|$. Вектор $\lambda \vec{a}$ співнапрямлений з вектором $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежно напрямлений вектору $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.

Доведення. Побудуємо в координатній площині вектори $\vec{OA}$ та $\vec{OB}$, що відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\lambda \vec{a}$, де точка O – початок координат (мал. 16.1).

Нехай вектор $\vec{a}$ має координати $\vec{a}(x_0; y_0)$, тоді маємо: $\lambda \vec{a}(\lambda x_0; \lambda y_0)$, $A(x_0; y_0)$, $B(\lambda x_0; \lambda y_0)$.

Складемо рівняння прямої OA :

$$\frac{x - 0}{x_0 - 0} = \frac{y - 0}{y_0 - 0},$$

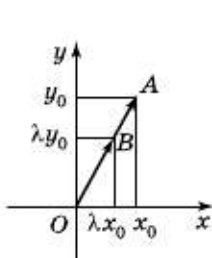
спростивши яке, отримаємо:

$$y_0 x - x_0 y = 0.$$

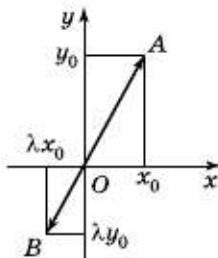
Координати точки B задовольнятимуть це рівняння. Справді:

$$y_0 \cdot \lambda x_0 - x_0 \cdot \lambda y_0 = 0.$$

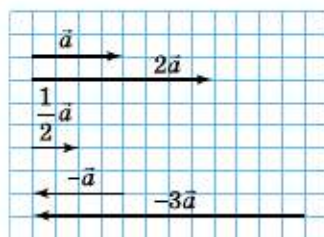
Це означає, що точка B належить прямій OA . У разі, коли вона належить променю OA , її координати λx_0 і λy_0 мають відповідно ті самі знаки, що й координати x_0 та y_0 точки A (мал. 16.1). У разі, коли точка B лежить на доповняльному до OA промені, її координати λx_0 і λy_0 матимуть знаки, протилежні до знаків координат x_0 та y_0 точки A (мал. 16.2).



Мал. 16.1



Мал. 16.2



Мал. 16.3

Якщо $\lambda > 0$, то точка B лежатиме на промені OA , а якщо $\lambda < 0$, то точка B лежатиме на доповняльному до OA промені. Тому якщо $\lambda > 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\lambda \vec{a}$ – співнапрямлені, а якщо $\lambda < 0$, то вони – протилежно напрямлені.

Знайдемо модуль вектора $\lambda \vec{a}$:

$$|\lambda \vec{a}| = \sqrt{(\lambda x_0)^2 + (\lambda y_0)^2} = \sqrt{\lambda^2(x_0^2 + y_0^2)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = |\lambda| |\vec{a}|. \quad \blacksquare$$

На малюнку 16.3 для даного вектора $\vec{a}$ побудовано вектори $2\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$.

3. Умова колінеарності векторів

Із прикладу вище та доведеної теореми випливає важливий висновок:

вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна подати у вигляді $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, де $\lambda \neq 0$, і навпаки, якщо $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, $\lambda \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні.

Нехай дано вектори $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$. Якщо вони колінеарні, то $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, $x_2 = \lambda x_1$ і $y_2 = \lambda y_1$. Тоді (якщо $x_1 \neq 0$ і $y_1 \neq 0$) маємо, що $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$ і $\lambda = \frac{y_2}{y_1}$, тому $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$, тобто координати колінеарних векторів пропорційні.

Отже, приходимо до умови колінеарності векторів:

Нехай $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ – довільні вектори. Тоді, якщо:

1) $x_1 = x_2 = 0$, то вектори $\vec{a}(0; y_1)$ і $\vec{b}(0; y_2)$ – колінеарні; причому, якщо $\frac{y_2}{y_1} > 0$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; а якщо $\frac{y_2}{y_1} < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$;

2) $y_1 = y_2 = 0$, то вектори $\vec{a}(x_1; 0)$ і $\vec{b}(x_2; 0)$ – колінеарні; причому, якщо $\frac{x_2}{x_1} > 0$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; а якщо $\frac{x_2}{x_1} < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$;

3) $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \lambda$, причому, якщо $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; а якщо $\lambda < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

Приклад 2. За якого значення x вектори $\vec{a}(2; -7)$ і $\vec{b}(x; 21)$ колінеарні? Співнаправлені чи протилежно направлені ці вектори?

Розв'язання. 1) Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тоді $\frac{x}{2} = \frac{21}{-7}$, звідки $x = -6$.

2) Оскільки $\frac{-6}{2} = \frac{21}{-7} = -3 < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

Відповідь: $x = -6$; протилежно направлені.

? Який вектор називають добутком вектора $\vec{a}(x; y)$ на число λ ? **○** Сформулюйте і доведіть теорему про добуток вектора на число. **○** Сформулюйте умови колінеарності векторів.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 16.1. Дано: $\vec{a}(2; -4)$. Знайдіть:

- 1)
- $2\vec{a}$
- ; 2)
- $-3\vec{a}$
- ; 3)
- $4\vec{a}$
- ; 4)
- $-\vec{a}$
- ; 5)
- $0,5\vec{a}$
- ; 6)
- $-10\vec{a}$
- .

16.2. Дано: $\vec{b}(-6; 2)$. Знайдіть:

- 1)
- $3\vec{b}$
- ; 2)
- $-2\vec{b}$
- ; 3)
- $\frac{1}{2}\vec{b}$
- ; 4)
- $-\vec{b}$
- ; 5)
- $10\vec{b}$
- ; 6)
- $-5\vec{b}$
- .

16.3. Співнаправлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

- 1)
- $\vec{a} = 2\vec{b}$
- ; 2)
- $\vec{b} = -3\vec{a}$
- ?

16.4. Співнаправлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:

- 1)
- $\vec{n} = -2\vec{m}$
- ; 2)
- $\vec{m} = 3\vec{n}$
- ?

2 16.5. Накресліть вектор $\vec{b}$. Побудуйте вектор:

- 1)
- $2\vec{b}$
- ; 2)
- $-\vec{b}$
- ; 3)
- $\frac{1}{2}\vec{b}$
- ; 4)
- $-3\vec{b}$
- ; 5)
- $2,5\vec{b}$
- ; 6)
- $-1,5\vec{b}$
- .

16.6. Накресліть вектор $\vec{a}$. Побудуйте вектор:

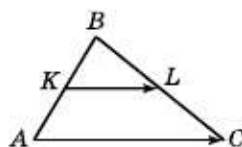
- 1)
- $3\vec{a}$
- ; 2)
- $-\vec{a}$
- ; 3)
- $-\frac{1}{2}\vec{a}$
- ; 4)
- $2\vec{a}$
- ; 5)
- $-3,5\vec{a}$
- ; 6)
- $1,5\vec{a}$
- .

16.7. На малюнку 16.4 KL – середня лінія трикутника ABC . Виразіть:

- 1)
- $\overrightarrow{AC}$
- через
- $\overrightarrow{KL}$
- ; 2)
- $\overrightarrow{KL}$
- через
- $\overrightarrow{AC}$
- .

16.8. Дано вектори $\vec{m}(-1; 2)$ і $\vec{n}(3; 1)$. Знайдіть координати вектора:

- 1)
- $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$
- ; 2)
- $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$
- ;
-
- 3)
- $\vec{c} = 2\vec{m} + 5\vec{n}$
- ; 4)
- $\vec{d} = 5\vec{m} - 3\vec{n}$
- .



Мал. 16.4

16.9. Дано вектори $\vec{a}(1; -5)$ і $\vec{b}(4; -1)$. Знайдіть координати вектора:

- 1)
- $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$
- ; 2)
- $\vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}$
- ; 3)
- $\vec{k} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$
- ; 4)
- $\vec{l} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$
- .

16.10. Чи колінеарні вектори:

- 1)
- $\vec{a}(2; -3)$
- і
- $\vec{b}(6; -9)$
- ; 2)
- $\vec{a}(-1; 5)$
- і
- $\vec{b}(2; 10)$
- ?

16.11. Чи колінеарні вектори:

- 1)
- $\vec{m}(-3; 1)$
- і
- $\vec{n}(9; 3)$
- ; 2)
- $\vec{m}(4; -1)$
- і
- $\vec{b}(8; -2)$
- ?

16.12. Дано вектор $\vec{a}(-6; 8)$. Знайдіть модуль вектора: 1) $-\vec{a}$; 2) $3\vec{a}$.16.13. Дано вектор $\vec{b}(3; -4)$. Знайдіть модуль вектора: 1) $-\vec{b}$; 2) $4\vec{b}$.16.14. (Усно.) Чи завжди колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$?16.15. Серед векторів $\vec{a}(1; -2)$, $\vec{b}(-2; 4)$, $\vec{c}(4; -8)$, $\vec{d}(-0,2; 0,4)$ знайдіть пари співнаправлених і пари протилежно напрямлених векторів.16.16. Серед векторів $\vec{m}(-1; 3)$, $\vec{n}(3; -9)$, $\vec{k}(-0,1; 0,3)$, $\vec{l}(30; -90)$ знайдіть пари співнаправлених і пари протилежно напрямлених векторів.**3** 16.17. Дано: $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(-5; 1)$. Знайдіть модуль вектора:

- 1)
- $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$
- ; 2)
- $\vec{d} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$
- .

16.18. Дано: $\vec{c}(-1; 4)$, $\vec{d}(-6; 7)$. Знайдіть модуль вектора:

1) $\vec{a} = 2\vec{c} + \vec{d}$; 2) $\vec{b} = 3\vec{c} - 2\vec{d}$.

16.19. 1) Дано: $\vec{a}(4; -6)$, $\vec{b}(-2; 0)$, $\vec{c}(-7; -1)$. Знайдіть координати векто-

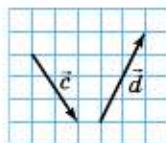


ра $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$.

2) Знайдіть $|\vec{m}|$, відтак дізнаєтеся, скільки разів жіноча збірна України із шахів була призеркою чемпіонатів Європи.

16.20. Дано вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (мал. 16.5). Побудуйте вектор

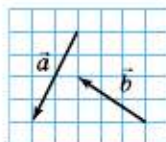
$$\vec{a} = 2\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}.$$



Мал. 16.5

16.21. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 16.6). Побудуйте вектор

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}.$$



Мал. 16.6

16.22. За якого значення m колінеарні вектори:

1) $\vec{a}(-4; 5)$ і $\vec{b}(-12; m)$;

2) $\vec{c}(m; -1)$ і $\vec{d}(-4; 2)$?

Співнаправлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

16.23. За якого значення n колінеарні вектори:

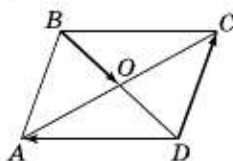
1) $\vec{a}(1; n)$ і $\vec{b}(-4; 8)$; 2) $\vec{c}(12; 9)$ і $\vec{d}(n; 3)$?

Співнаправлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

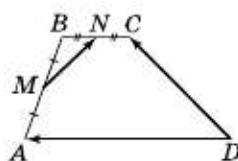
16.24. За якого значення p вектори $\vec{a}(1; p)$ і $\vec{b}(p; 16)$ протилежно напрямлені?

16.25. За якого значення t вектори $\vec{c}(t; 4)$ і $\vec{d}(1; t)$ співнаправлені?

16.26. Дано паралелограм $ABCD$ (мал. 16.7). Виразіть вектор $\vec{BO}$ через вектори $\vec{DA}$ і $\vec{DC}$.



Мал. 16.7



Мал. 16.8

16.27. M і N – середини сторін AB і BC трапеції $ABCD$ (мал. 16.8). Доведіть, що $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{DC} - \vec{DA})$.

4 16.28. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, колінеарного вектору $\vec{b}(-8; 6)$, якщо $|\vec{a}| = 5$.

16.29. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}(5; -12)$, якщо $|\vec{b}| = 26$.

16.30. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-1; 4)$, $B(5; 7)$, $C(5; 2)$, $D(-3; -2)$ є трапецією.

16.31. Доведіть, що точки $A(5; -1)$, $B(6; 2)$ і $C(8; 8)$ лежать на одній прямій.

16.32. На колі $x^2 + y^2 = 1$ знайдіть таку точку A , щоб вектор $\overrightarrow{OA}$, де O – початок координат, був співнапрямлений з вектором $\vec{c}(3; -4)$.



Вправи для повторення

16.33. AB – діаметр кола, радіус якого дорівнює 5 см, точка C належить колу. Знайдіть довжину медіани CM трикутника ABC .

16.34. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 16 см, а гострий кут – 60° . Знайдіть діагональ трапеції та її площу.

16.35. Хорда AB ділить коло у відношенні 2 : 3. У точці A до кола проведено дотичну. Знайдіть менший кут між дотичною і хордою.



Життєва математика

16.36. Юля на міському велосипеді проїхала 3,6 км. Діаметри його переднього і заднього коліс дорівнюють відповідно 80 см і 60 см. На скільки більше обертів зробило заднє колесо порівняно з переднім? (Прийміть $\pi \approx 3$.)



Цікаві задачі – поміркуй одначе

16.37. До катетів прямокутного трикутника провели медіани 3 см і 4 см завдовжки. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

§ 17. Скалярний добуток векторів

1. Означення скалярного добутку векторів та його властивості

Розглянемо ще одну операцію з векторами – скалярний добуток векторів.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ називають число $x_1x_2 + y_1y_2$.

Позначають скалярний добуток векторів так само, як добуток чисел або змінних: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-2; 7)$ і $\vec{b}(4; 1)$; 2) $\vec{c}(0; 8)$ і $\vec{d}(-2; 5)$.

Розв'язання. 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 4 + 7 \cdot 1 = -1$;

2) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \cdot (-2) + 8 \cdot 5 = 40$.

Відповідь: 1) -1 ; 2) 40 .

З означення скалярного добутку векторів випливають такі *властивості*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

Для доведення цих властивостей достатньо порівняти числа, яким відповідно дорівнюватимуть ліва і права частини рівностей.

2. Скалярний квадрат вектора

Знайдемо скалярний добуток рівних між собою векторів. Нехай дано вектор $\vec{a}(x_1; y_1)$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1 x_1 + y_1 y_1 = x_1^2 + y_1^2 = (\sqrt{x_1^2 + y_1^2})^2 = |\vec{a}|^2.$$

Скалярний добуток вектора самого на себе $\vec{a} \cdot \vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають *скалярним квадратом вектора*.

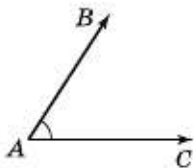
Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

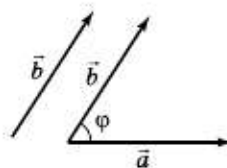
З останньої рівності випливає, що $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

3. Поняття про кут між векторами

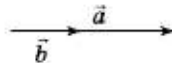
Кутом між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ називають кут BAC (мал. 17.1). Кутом між двома ненульовими векторами, які не мають спільного початку, називають кут між векторами, що дорівнюють даним і мають спільний початок (мал. 17.2).



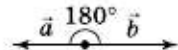
Мал. 17.1



Мал. 17.2



Мал. 17.3



Мал. 17.4

Кут між співнаправленими векторами дорівнює нулю (мал. 17.3), кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180° (мал. 17.4).

4. Теорема про скалярний добуток векторів і наслідки з неї



Теорема (про скалярний добуток векторів). Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їхніх модулів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Доведення. Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – задані вектори, а φ – кут між ними. Доведемо, що

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Розглянемо скалярний квадрат вектора $\vec{a} + \vec{b}$. Враховуючи властивості скалярного добутку векторів, матимемо:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b})\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \\ = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2.$$

Враховуючи властивості скалярного квадрата, отримаємо:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2; \text{ звідки } \vec{a}\vec{b} = \frac{|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{2},$$

тобто скалярний добуток векторів залежить від довжини векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{a} + \vec{b}$, а тому не залежить від вибору системи координат.

Виберемо таку систему координат, щоб додатний напрямок осі абсцис збігався з напрямком вектора $\vec{a}$. Тоді $\vec{a}(|\vec{a}|; 0)$.

Якщо $\varphi = 0^\circ$ (мал. 17.5), то $\vec{b}(|\vec{b}|; 0)$ і тоді

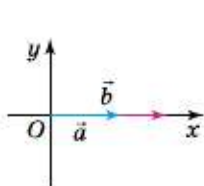
$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| + 0 \cdot 0 = |\vec{a}||\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0^\circ.$$

Нехай $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ (мал. 17.6). Тоді $MK = |\vec{b}|\sin\varphi$, $OK = |\vec{b}|\cos\varphi$, а тому $\vec{b}(|\vec{b}|\cos\varphi; |\vec{b}|\sin\varphi)$. Маємо:

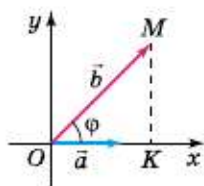
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 0 \cdot |\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Якщо $\varphi = 90^\circ$ (мал. 17.7), то

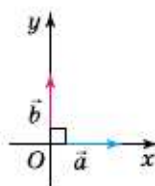
$$\vec{b}(0; |\vec{b}|) \text{ і } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot 0 + 0 \cdot |\vec{b}| = 0 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ.$$



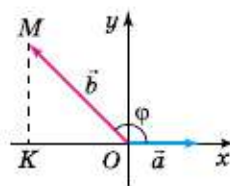
Мал. 17.5



Мал. 17.6



Мал. 17.7



Мал. 17.8

Якщо $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ (мал. 17.8), то

$$MK = |\vec{b}|\sin(180^\circ - \varphi) = |\vec{b}|\sin\varphi, OK = |\vec{b}|\cos(180^\circ - \varphi) = -|\vec{b}|\cos\varphi.$$

Оскільки друга координата вектора $\vec{b}$ дорівнює числу, протилежному довжині відрізка OK , то координатами вектора $\vec{b}$ є пара чисел $(|\vec{b}|\cos\varphi; |\vec{b}|\sin\varphi)$, а тому

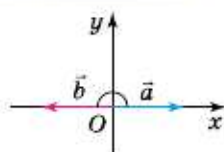
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 0 \cdot |\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Якщо $\varphi = 180^\circ$ (мал. 17.9), то координатами вектора $\vec{b}$ є пара чисел $(-|\vec{b}|; 0)$. Тому

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot (-|\vec{b}|) + 0 \cdot 0 = -|\vec{a}||\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 180^\circ.$$

Отже, для будь-яких значень $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi. \quad \blacksquare$$



Мал. 17.9



Наслідок 1. Якщо вектори перпендикулярні, то їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Наслідок 2. Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони перпендикулярні.

Домовимося кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначати так:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) \text{ або } (\vec{a}, \vec{b}).$$

Приклад 2. За якого значення x вектори $\vec{a}(x; -3)$ і $\vec{b}(6; 10)$ взаємно перпендикулярні?

Розв'язання. Щоб вектори були взаємно перпендикулярними, їхній скалярний добуток має дорівнювати нулю. Маємо: $6x + (-3) \cdot 10 = 0$, звідки $x = 5$.

Відповідь: $x = 5$.

Приклад 3. Дано: $|\vec{c}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{c}, \vec{b}) = 120^\circ$.

Знайти: $|4\vec{c} - 3\vec{b}|$.

Розв'язання. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то

$$\begin{aligned} |4\vec{c} - 3\vec{b}| &= \sqrt{(4\vec{c} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{16\vec{c}^2 - 24\vec{c}\vec{b} + 9\vec{b}^2} = \\ &= \sqrt{16|\vec{c}|^2 - 24\vec{c} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2} = \sqrt{16|\vec{c}|^2 - 24|\vec{c}||\vec{b}| \cos 120^\circ + 9|\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{16 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \cdot 2^2} = \sqrt{252} = 2\sqrt{63}. \end{aligned}$$

Відповідь: $2\sqrt{63}$.

5. Знаходження кута між векторами

Скалярний добуток векторів дає змогу знайти косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$. Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, то

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$; $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, то

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

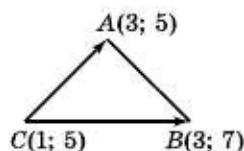
Косинус кута φ між ненульовими векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ можна обчислити за формулою

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

За косинусом кута між векторами можна знайти і градусну міру кута (за таблицями або за допомогою калькулятора).

Приклад 4. Знайти градусну міру кута C трикутника ABC , якщо $A(3; 5)$, $B(3; 7)$, $C(1; 5)$.

Розв'язання. 1) Кут C трикутника ABC збігається з кутом між векторами $\vec{CA}$ і $\vec{CB}$ (мал. 17.10), тобто $\angle C = \angle(\vec{CA}, \vec{CB})$.



Мал. 17.10

2) Маємо:

$\vec{CA}(3 - 1; 5 - 5)$, тобто $\vec{CA}(2; 0)$;

$\vec{CB}(3 - 1; 7 - 5)$, тобто $\vec{CB}(2; 2)$.

3) Тоді $\cos C = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{2 \cdot 2 + 0 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 0^2} \sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

звідки $\angle C = 45^\circ$.

Відповідь: 45° .



Що називають скалярним добутком векторів? Що називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$? Чому він дорівнює? Що називають кутом між векторами $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$? Сформулюйте і доведіть теорему про скалярний добуток векторів. Сформулюйте наслідки із цієї теореми. Як знайти косинус кута між векторами?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

17.1. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-2; 1)$ і $\vec{b}(0; 3)$; 2) $\vec{c}(1; -3)$ і $\vec{d}(-2; 1)$.

17.2. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(1; -4)$ і $\vec{b}(5; 0)$; 2) $\vec{c}(2; -1)$ і $\vec{d}(1; 3)$.

17.3. Знайдіть $\vec{m}^2$, якщо: 1) $\vec{m}(-1; -2)$; 2) $\vec{m}(4; 1)$.

17.4. Знайдіть $\vec{n}^2$, якщо: 1) $\vec{n}(3; -1)$; 2) $\vec{n}(0; -5)$.

17.5. Дано: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{d} = 5$. Який з векторів $\vec{b}$, $\vec{c}$ або $\vec{d}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$?

17.6. Використовуючи транспортир, накресліть два вектори, що мають спільний початок і кут між якими дорівнює 140° .

17.7. Використовуючи транспортир, накресліть два вектори, які мають спільний початок і кут між якими дорівнює 50° .

2 17.8. Дано $\vec{c}(-2; 5)$ і $\vec{d}(x; 4)$. За якого значення x $\vec{c} \cdot \vec{d} = 16$?

17.9. Дано вектори $\vec{a}(3; y)$ і $\vec{b}(-1; 5)$. За якого значення y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$?

17.10. Дано: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

- | | |
|---|--|
| 1) $ \vec{a} = 5, \vec{b} = 2, \varphi = 30^\circ;$ | 2) $ \vec{a} = 4, \vec{b} = 1, \varphi = 60^\circ;$ |
| 3) $ \vec{a} = 2, \vec{b} = 1, \varphi = 135^\circ;$ | 4) $ \vec{a} = 10, \vec{b} = 5, \varphi = 180^\circ.$ |

17.11. Дано: $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = \varphi$. Знайдіть $\vec{c} \cdot \vec{d}$, якщо:

- | | |
|---|---|
| 1) $ \vec{c} = 2, \vec{d} = 4, \varphi = 0^\circ;$ | 2) $ \vec{c} = 1, \vec{d} = 6, \varphi = 45^\circ;$ |
| 3) $ \vec{c} = 2, \vec{d} = 1, \varphi = 120^\circ;$ | 4) $ \vec{c} = 3, \vec{d} = 8, \varphi = 150^\circ.$ |

17.12. Доведіть, що вектори $\vec{m}(-1; 10)$ і $\vec{n}(20; 2)$ взаємно перпендикулярні.

17.13. Доведіть, що вектори $\vec{p}(4; -3)$ і $\vec{q}(6; 8)$ взаємно перпендикулярні.

17.14. Чи є взаємно перпендикулярними вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:

- 1) $\vec{c}(1; 5), \vec{d}(-5; -1);$
- 2) $\vec{c}(2; 3), \vec{d}(-6; 4)?$

17.15. Чи є взаємно перпендикулярними вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

- 1) $\vec{a}(2; -1), \vec{b}(1; 2);$
- 2) $\vec{a}(0; 4), \vec{b}(2; 3)?$

3 17.16. За якого значення x вектори $\vec{a}(-2; 5)$ і $\vec{b}(x; 4)$ взаємно перпендикулярні?

17.17. За якого значення y вектори $\vec{a}(10; y)$ і $\vec{b}(-4; 5)$ взаємно перпендикулярні?

17.18. Дано вектори $\vec{a}(3; 0)$ і $\vec{b}(2; 2)$. Обчисліть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

17.19. Дано вектори $\vec{a}(1; 0)$ і $\vec{b}(-2; 2)$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

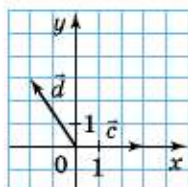
17.20. Знайдіть кути трикутника, вершинами якого є точки $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$ і $C(4; 1)$. З'ясуйте вид трикутника.

17.21. Знайдіть косинуси кутів трикутника KLM , де $K(0; 6)$, $L(-8; 0)$ і $M(3; 2)$. З'ясуйте вид трикутника.

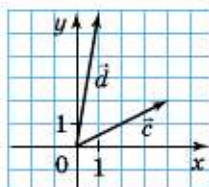
17.22. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – два ненульових вектори. Знайдіть кут між ними, якщо:

- | | |
|--|--|
| 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} ;$ | 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} ;$ |
| 3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = - \vec{a} \cdot \vec{b} ;$ | 4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} .$ |

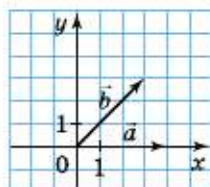
17.23. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (мал. 17.11 і 17.12).



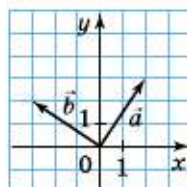
Мал. 17.11



Мал. 17.12



Мал. 17.13



Мал. 17.14

17.24. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на малюнках 17.13 і 17.14.

17.25. Дано: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$. Знайти:

- 1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $(\vec{a} - \vec{b})\vec{a}$; 3) $\vec{b}(\vec{a} + \vec{b})$; 4) $\vec{a}(3\vec{a} - 4\vec{b})$.

17.26. Дано: $\angle(\vec{c}, \vec{d}) = 60^\circ$, $|\vec{c}| = 6$, $|\vec{d}| = 1$. Знайти:

- 1) $\vec{c}\vec{d}$; 2) $\vec{c}(\vec{c} + \vec{d})$; 3) $(\vec{d} - \vec{c})\vec{d}$; 4) $\vec{c}(4\vec{c} + 3\vec{d})$.

17.27. Паралімпієць-візочник, українець Олег Іваненко, проплив 62 км Ла-Маншем. Знайдіть скалярний добуток $(\vec{a} + \vec{b})(13\vec{a} - \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, відтак дізнаєтеся, за скільки годин спортсмен проплив цю небезпечну протоку.

17.28. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Чи може $\vec{a}\vec{b}$ дорівнювати:

- 1) -12; 2) -6; 3) -14; 4) 0; 5) 11; 6) $12\frac{1}{2}$?

17.29. Дано: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$. Знайти:

- 1) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$.

17.30. Дано: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Знайти:

- 1) $|\vec{a} + \vec{b}|$; 2) $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$.

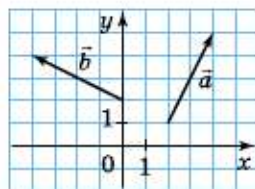
17.31. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, а вектори $\vec{a} + 2\vec{b}$ і $\vec{a}$ взаємно перпендикулярні. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

17.32. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Доведіть, що вектори $\vec{a}$ і $2\vec{b} - \vec{a}$ взаємно перпендикулярні.

17.33. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, колінеарного вектору $\vec{b}(-1; 4)$, якщо $\vec{a}\vec{b} = -34$.

17.34. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}(3; -1)$, якщо $\vec{a}\vec{b} = 30$.

17.35. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на малюнку 17.15.



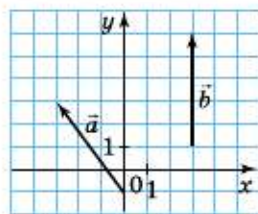
Мал. 17.15

17.36. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на малюнку 17.16.

17.37. Знайдіть координати вектора $\vec{d}$, перпендикулярного до вектора $\vec{c}(-2; 1)$, якщо $|\vec{d}| = 3|\vec{c}|$.

17.38. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, перпендикулярного до вектора $\vec{d}(1; -5)$, модуль якого дорівнює модулю вектора $\vec{d}$.

17.39. Відомо, що $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 1$. Обчисліть скалярний добуток векторів $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ і $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Мал. 17.16



Вправи для повторення

17.40. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{CD}$ та його модуль, якщо:

1) $C(5; -2)$, $D(-1; -10)$; 2) $C(0; -5)$, $D(7; 0)$.

17.41. За якого значення m вектори $\vec{a}(m; -2)$ і $\vec{b}(-8; m)$ колінеарні?

17.42. Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(3; 1)$, $B(7; 4)$, $C(4; 0)$, $D(0; -3)$.

17.43. Чи лежать точки $A(-2; 3)$, $B(0; 4)$ і $C(8; 8)$ на одній прямій?



Життєва математика

17.44. Дві водопровідні труби однакового діаметра d потрібно замінити однією трубою з такою самою пропускною здатністю. Яким має бути діаметр цієї труби порівняно з діаметром кожної із заміняємих труб?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

17.45. Точки K і L – середини сторін AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$, $KL = \frac{AD + BC}{2}$. Доведіть, що $AD \parallel BC$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3 (§§ 13–17)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.



1. Дано: $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(4; 1)$, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Які координати у вектора $\vec{c}$?

А. $(-6; 4)$ Б. $(-2; 6)$ В. $(2; 6)$ Г. $(2; 4)$

2. Дано: $\vec{c}(5; -1)$, $\vec{d}(2; 3)$, $\vec{m} = \vec{c} - \vec{d}$. Які координати у вектора $\vec{m}$?

А. $(3; 2)$ Б. $(3; -4)$ В. $(-3; -4)$ Г. $(7; -4)$

3. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\vec{a}(2; -5)$ і $\vec{b}(1; -2)$?

А. -4 Б. 0 В. -8 Г. 12

- 2 4. Знайдіть модуль вектора $\overline{AB}$, якщо $A(-4; 6)$, $B(0; 9)$.
 А. 5 Б. 6 В. 8 Г. 9

5. Укажіть вектор, що є сумою векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$, зображених на малюнку 1.



А.



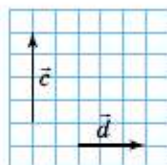
Б.



В.



Г.



Мал. 1

6. Знайдіть координати вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2; 4)$, $\vec{b}(3; 7)$.
 А. $(-5; -3)$ Б. $(-3; 19)$ В. $(-15; -9)$ Г. $(-9; 5)$

- 3 7. Дано вектори $\vec{a}(x; -2)$ і $\vec{b}(6; 12)$. За якого значення x вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні?

А. 4 Б. -1 В. 1 Г. -4

8. Дано вектори $\vec{c}(3; -8)$ і $\vec{d}(12; y)$. За якого значення y вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ перпендикулярні?

А. 4,5 Б. 32 В. -32 Г. -4,5

9. Дано вектори $\vec{a}(-2; 0)$ і $\vec{b}(3; -3)$. Знайдіть $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

А. 45° Б. 60° В. 120° Г. 135°

- 4 10. Модуль вектора $\vec{p}(x; y)$ дорівнює 5. Знайдіть координати вектора $\vec{p}$, якщо координата x цього вектора на 1 менша від координати y .

А. $(3; 4)$ Б. $(3; 4)$ або $(-4; -3)$ В. $(-4; -3)$ Г. $(4; 3)$

11. Чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(7; 15)$, $B(5; 9)$, $C(7; 3)$, $D(9; 9)$ є...

А. квадратом Б. трапецією В. ромбом Г. прямокутником

12. Дано: $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Знайти: $|2\vec{a} - \vec{b}|$.

А. 5 Б. 4 В. $4\sqrt{2} - 1$ Г. 3

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

- 3 13. Дано вектори $\vec{a}(5; -4)$, $\vec{b}(2; -14)$, $\vec{c}(x; -8)$. Установіть відповідність між характеристиками векторів, або результатами дій над ними (1-3), та їхніми числовими значеннями (А-Г).

Характеристики векторів
або результати дій над ними

Числове
значення

1. Модуль вектора $\vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

А. 5

Б. 6

2. $\vec{a} \cdot \vec{m}$

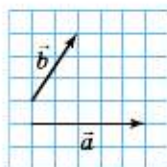
В. 7

3. Значення x , за якого $\vec{m} \perp \vec{c}$

Г. 8

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 13–17

1. Позначте в зошиті точки A , K і L , що не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AL}$.
2. Дано вектори $\vec{a}(-2; 4)$ і $\vec{b}(7; 1)$. Знайдіть координати вектора:
- 1) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.
3. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(4; -7)$ і $\vec{b}(2; 1)$.
4. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$ та його модуль, якщо $A(-2; 4)$, $B(2; 1)$.
5. Дано вектори $\vec{m}(-1; 4)$ і $\vec{n}(4; 5)$. Знайдіть координати вектора $\vec{p} = 3\vec{m} - 5\vec{n}$.
6. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 1). Побудуйте вектори:
- 1) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$.
7. Дано вектори $\vec{a}(x; -2)$ і $\vec{b}(5; 10)$. За якого значення x вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$:
- 1) колінеарні; 2) перпендикулярні?
8. Дано вектори $\vec{a}(0; -3)$ і $\vec{b}(1; -1)$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
9. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник з вершинами в точках $A(4; 8)$, $B(10; 10)$, $C(16; 8)$, $D(10; 6)$ – ромб.



Мал. 1

Додаткові завдання

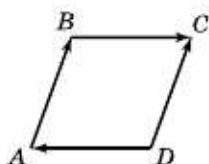
10. Доведіть, що точки $A(5; -7)$, $B(6; -9)$ і $C(3; -3)$ лежать на одній прямій.
11. Відомо, що $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Знайдіть $|4\vec{a} - 3\vec{b}|$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 3

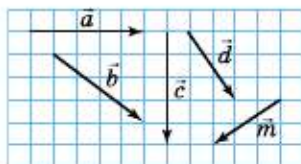
До § 13

1. Укажіть початок і кінець вектора:
- 1) $\overrightarrow{MN}$; 2) $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{PP}$.
2. Позначте три точки A , B і K , що не лежать на одній прямій. Накресліть деякі три вектори, початок і кінець яких збігаються з якими-небудь двома із цих точок. Запишіть усі вектори, що утворилися, і назвіть початок і кінець кожного з них.
3. Накресліть два протилежно напрямлених вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, вектор $\vec{c}$, співнаправлений з вектором $\vec{a}$, та вектор $\vec{d}$, співнаправлений з вектором $\vec{b}$.
- 1) Виконайте відповідні записи за допомогою символів $\uparrow\uparrow$ і $\uparrow\downarrow$.
- 2) Чи є колінеарними вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$?
- 3) Співнаправлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$?

4. На малюнку 1 $ABCD$ – ромб. Укажіть рівні вектори та вектори, що мають рівні модулі. Виконайте відповідні записи.



Мал. 1



Мал. 2

5. 1) Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 2, якщо сторона клітинки дорівнює одиниці вимірювання відрізків.

2) Які з них мають однакові модулі? Виконайте відповідні записи.

3 6. $ABCD$ – паралелограм, O – точка перетину його діагоналей. Укажіть вектор, що дорівнює вектору:

- 1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{OA}$; 4) $\overrightarrow{DO}$.

7. $ABCD$ – прямокутна трапеція ($\angle A = \angle B = 90^\circ$), $\angle C = 45^\circ$, $AB = 5$, $BC = 12$. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

8. 1) Чи правильне твердження: «Якщо вектори не є рівними, то їхні модулі також не є рівними»?

2) Чи правильне обернене твердження?

9. ABC – прямокутний трикутник ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 45^\circ$. Чи правильне твердження:

- 1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; 2) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}|$; 3) $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$; 4) $|\overrightarrow{BC}| < |\overrightarrow{AB}|$?

4 10. $ABCD$ – ромб, $|\overrightarrow{AC}| = 12$, $|\overrightarrow{BD}| = 16$. Від вершини A відкладено вектор $\overrightarrow{AE}$ так, що $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$. Знайдіть $|\overrightarrow{EC}|$.

До § 14

1 11. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо:

- 1) $M(2; -5)$, $N(4; -1)$; 2) $M(-3; 5)$, $N(-2; 0)$.

12. Знайдіть модуль вектора:

- 1) $\vec{c}(-4; -3)$; 2) $\vec{d}(-12; 5)$.

2 13. Чи рівні вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\vec{b}$, якщо:

- 1) $C(-2; 3)$, $D(4; 7)$, $\vec{b}(6; -4)$; 2) $C(0; 5)$, $D(4; 4)$, $\vec{b}(4; -1)$?

14. Серед векторів $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(1; 4)$, $\vec{c}(\sqrt{3}; \sqrt{6})$, $\vec{d}(-5; 2)$, $\vec{e}(3; 0)$, $\vec{f}(-4; 1)$ знайдіть ті, що мають рівні модулі.

15. Дано точки $K(5; -7)$, $L(4; 0)$, $M(x; 5)$, $N(0; y)$. Знайдіть x та y , якщо $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{MN}$.

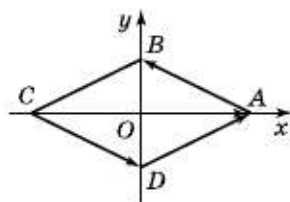
- 3 16. Дано точки $A(-2; 3)$ і $B(4; -5)$. Знайдіть координати точки C такої, що:

1) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

17. У ромбі $ABCD$ $AC = 8$, $BD = 6$ (мал. 3).

Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{CA}$.

18. Дано три вершини $A(2; -3)$, $B(4; -7)$ і $C(-5; 3)$ паралелограма $ABCD$. Знайдіть за допомогою векторів координати вершини D .



Мал. 3

19. Модуль вектора $\vec{m}(x; x)$ дорівнює $3\sqrt{2}$. Знайдіть x .

- 4 20. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник з вершинами $A(5; 7)$, $B(6; 4)$, $C(3; 3)$, $D(2; 6)$ – квадрат.

21. Модуль вектора $\vec{c}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{17}$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо його координата y в 4 рази більша за координату x .

До § 15

- 1 22. Знайдіть $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(4; 0)$, $\vec{b}(0; -5)$; 2) $\vec{a}(2; -3)$, $\vec{b}(4; 3)$.

- 2 23. Накресліть два неколінеарних вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$. Знайдіть їхню суму за правилом: 1) трикутника; 2) паралелограма.

24. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AK}$. Побудуйте різницю цих векторів.

25. Дано: $\vec{a}(2; -1)$, $\vec{b}(3; 5)$, $\vec{c}(x; y)$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Знайти: x, y .

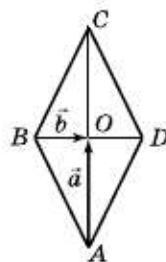
- 3 26. $ABCD$ – ромб (мал. 4), O – точка перетину його діагоналей. Виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$ через вектори $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

27. Не виконуючи малюнка, знайдіть суму:

1) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.

- 4 28. Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють:

1) 3; 7; 10; 2) 2; 9; 10; 3) 13; 5; 6?



Мал. 4

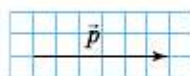
До § 16

- 1 29. Дано: $\vec{c}(9; -3)$. Знайдіть координати вектора:

1) $2\vec{c}$; 2) $-\vec{c}$; 3) $\frac{1}{3}\vec{c}$;
4) $-4\vec{c}$; 5) $10\vec{c}$; 6) $-0,1\vec{c}$.

- 2 30. На малюнку 5 задано вектор $\vec{p}$. Побудуйте вектор:

1) $0,5\vec{p}$; 2) $-\vec{p}$; 3) $1,5\vec{p}$;
4) $-2\vec{p}$; 5) $3\vec{p}$; 6) $-\frac{1}{3}\vec{p}$.



Мал. 5

31. Дано вектори $\vec{c}(-1; 2)$ і $\vec{d}(0; -1)$. Знайдіть координати вектора:
 1) $\vec{c} + 10\vec{d}$; 2) $5\vec{c} - \vec{d}$; 3) $7\vec{c} + 2\vec{d}$; 4) $3\vec{c} - 4\vec{d}$.

3 32. Дано: $\vec{a}(-2; 3)$, $\vec{b}(4; 2)$. Порівняйте модулі векторів $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{d} = 2\vec{a} - 0,5\vec{b}$.

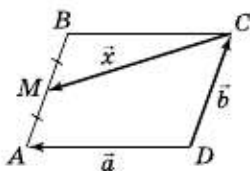
33. За яких значень x вектори $\vec{a}(1; x)$ і $\vec{b}(x; 9)$ колінеарні? Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

34. AM – медіана трикутника ABC . Доведіть, що

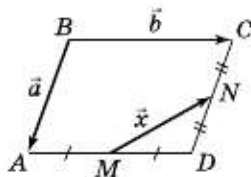
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

35. На площині задано вектор $\vec{a}$. Відомо, що $|\vec{a}| = 10$. На яке число потрібно помножити цей вектор, щоб отримати протилежно напрямлений йому вектор, модуль якого дорівнює 5?

36. $ABCD$ – паралелограм (мал. 6 і 7). Виразіть вектор $\vec{x}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Мал. 6



Мал. 7

37. Дано ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, причому $2\vec{a} - 3\vec{b} = 4\vec{a} - 9\vec{b}$. Доведіть, що $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні.

4 38. Відомо, що $\vec{a} = 3\vec{c} - 5\vec{d}$, $\vec{b} = 2\vec{c} - 3\vec{d}$. Знайдіть координати векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо $\vec{a}(-3; 8)$, $\vec{b}(-1; 6)$.

39. Доведіть, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, де M – точка перетину медіан трикутника ABC .

40. За якого значення x точки $A(1; -2)$, $B(3; -8)$ і $C(x; -14)$ лежать на одній прямій?

До § 17

1 41. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-2; 3)$ і $\vec{b}(6; 4)$; 2) $\vec{c}(-2; 1)$ і $\vec{d}(0; 4)$.

У якій із цих пар вектори є взаємно перпендикулярними?

42. Знайдіть $\vec{p}^2$, якщо:

1) $\vec{p}(-2; 0)$; 2) $\vec{p}(1; 5)$.

43. Використовуючи транспортер, накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, кут між якими дорівнює 80° .

2 44. Дано: $\vec{a}(m; 2)$, $\vec{b}(-3; m)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$. Знайти m .

45. Нехай $\varphi = \angle(\vec{p}, \vec{q})$. Знайдіть $\vec{p} \cdot \vec{q}$, якщо:

- 1) $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 6$, $\varphi = 60^\circ$; 2) $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 9$, $\varphi = 135^\circ$.

46. Доведіть, що ненульові вектори $\vec{a}(m; n)$ і $\vec{b}(-n; m)$ взаємно перпендикулярні.

3 47. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{c}(3; -4)$ і $\vec{d}(15; 8)$.

48. Дано вектори $\vec{a}(2; y)$ і $\vec{b}(4; -1)$. За яких значень y кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

- 1) гострий; 2) прямий; 3) тупий?

49. Знайдіть кути трикутника з вершинами в точках $A(-1; 2)$, $B(-1; 5)$ і $C(3; 2)$.

50. Відомо, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 40^\circ$. Знайдіть кут між векторами:

- 1) $4\vec{a}$ і $5\vec{b}$; 2) $-\vec{a}$ і $7\vec{b}$;
3) $\frac{1}{10}\vec{a}$ і $-\frac{1}{8}\vec{b}$; 4) $-13\vec{a}$ і $-2017\vec{b}$.

51. Дано: $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

- 1) $\vec{a}\vec{b} = 2$; 2) $\vec{a}\vec{b} = 1$; 3) $\vec{a}\vec{b} = 0$;
4) $\vec{a}\vec{b} = -\sqrt{3}$; 5) $\vec{a}\vec{b} = -1$; 6) $\vec{a}\vec{b} = -2$.

4 52. Відомо, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ і $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Знайдіть $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 7\vec{b})$.

53. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ і $(\vec{a} + 2\vec{b})(4\vec{a} + 3\vec{b}) = 5$.

54. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{q} - 2\vec{p}$, якщо $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$ і $\vec{p} \perp \vec{q}$.



Найвеличніший арифметик своєї епохи

Понад тридцять років тому в науковій термінології набули широкого вжитку такі терміни, як «діаграма Вороного», «клітина Вороного», «розбиття Вороного», «мозаїка Вороного». В Англії поняття «Voronoi diagram» уведене у шкільну програму.

Георгій Феодосійович Вороний – один із найвидатніших представників України в історії математики кінця XIX – початку XX ст. Його наукові праці присвячені теорії чисел у всіх її трьох напрямках: аналітичному, алгебраїчному та геометричному. Вороного справедливо вважають найвеличнішим арифметиком своєї епохи, а його працю про кількість точок під гіперболою (1903 р.) – віхою, з якої почалася сучасна аналітична теорія чисел. Із часом з'ясувалося, що його дослідження знайшли



застосування в різних галузях прикладних наук: кристалографії, фізиці, астрономії, хімії, мікробіології, комп'ютерній графіці, проблемах штучного інтелекту, офтальмології.

Народився Георгій Вороний 28 квітня 1868 р. у с. Журавка Полтавської губернії (нині Чернігівська обл.). Його батько був магістром філології, викладачем, просвітитником. Мати викладала в жіночій гімназії та недільній школі.

Середню освіту Георгій здобув у гімназії, а 1885 р. вступив на математичне відділення Петербурзького університету. Після складання на «відмінно» 1889 р. випускних іспитів його залишили при університеті для здобуття звання професора. 1894 р. Вороний захистив магістерську дисертацію і став професором Варшавського університету, а 1897 р. блискуче захистив докторську дисертацію. Ці дослідження було відзначено премією імені академіка В. Я. Буняковського. Пропрацював Г. Вороний як науковець і педагог у стінах Варшавського університету аж до останніх днів свого життя.

Творчу і педагогічну діяльність Георгія Феодосійовича високо оцінили математики, обравши його 1898 р. членом Математичного товариства. 1904 р., виступивши з доповідями на Міжнародному конгресі математиків у м. Хейдельберг (Німеччина), Вороний стає знаним у світі.

1907 р. Вороного обирають членом-кореспондентом Імператорської академії наук. Але на той час він був уже невиліковно хворим, і невдовзі (20 листопада 1908 р.) пішов із життя. За заповітом його поховали в рідній Журавці.

Упродовж усього свого життя Г. Ф. Вороний не поривав зв'язків з батьковою хатою, часто приїздив у рідні краї. Ще й дотепер можна почути приємні спогади односельців про сердечну й дуже порядну родину Вороних.

Інститут математики НАН України, починаючи з 1993 р., раз на п'ять років проводить міжнародні конференції, присвячені сучасному стану розвитку напрямів науки, закладених у працях Вороного, а ще раніше видав у трьох томах повне зібрання наукових праць Георгія Вороного.

Пишаймося тим грандіозним внеском, який зробив український математик Г. Ф. Вороний в одне з найоригінальніших творінь людського духу – математику. Його основоположні праці з теорії чисел увійшли у світову математичну скарбницю як символ честі й доблесті людського розуму.



Головне в темі 3

**ВЕКТОР. МОДУЛЬ І НАПРЯМОК ВЕКТОРА.
КОЛІНЕАРНІ ВЕКТОРИ. РІВНІСТЬ ВЕКТОРІВ**

Відрізок, для якого визначено напрямок, називають **напрямленим відрізком**, або **вектором**.

Вектор, зображений на малюнку, записують так: $\overrightarrow{AB}$. Літера A – початок вектора $\overrightarrow{AB}$, літера B – його кінець.



Модулем (довжиною або абсолютною величиною) вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB .

Колінеарними називають два ненульових вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Два вектори називають **рівними**, якщо вони співнаправлені і їхні модулі між собою рівні.

КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}(x; y)$ з початком $A(x_1; y_1)$ та кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$ та $y = y_2 - y_1$.

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}(x; y)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Теорема (про рівність векторів). У рівних векторів відповідні координати рівні, і навпаки, якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.

ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ ВЕКТОРІВ

Сумою векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ називають вектор

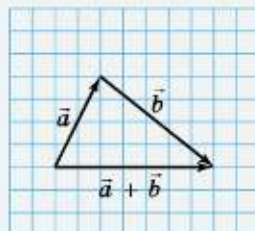
$$\vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$

Теорема (правило трикутника додавання векторів). Хоч які були б точки A, B і C , справджується рівність:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Суму двох векторів можна знаходити за **правилом трикутника**:

- 1) від кінця вектора $\vec{a}$ відкладаємо вектор $\vec{b}$;
- 2) будуємо вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$; цей вектор і є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

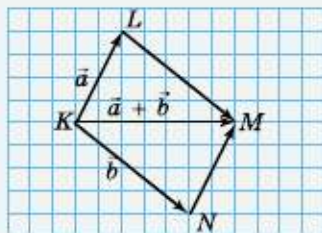


Суму двох векторів можна знаходити і за **правилом паралелограма**:

1) відкладаємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від спільного початку (точки K);

2) будуємо на цих векторах паралелограм;

3) будуємо вектор, що є діагоналлю паралелограма, яка виходить з точки K ; цей вектор і буде сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

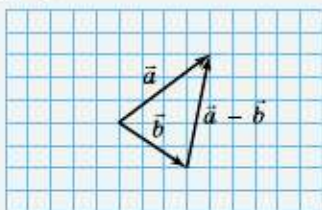


Різницею векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ буде вектор $\vec{a}(x_1 - x_2; y_1 - y_2)$.

Правило **побудови різниці двох векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) відкладаємо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від спільного початку;

2) будуємо вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{a}$, що і є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



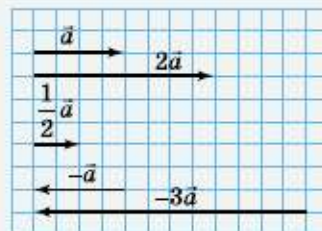
МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Добутком вектора $\vec{a}(x; y)$ на число λ називають вектор $\lambda\vec{a}(\lambda x; \lambda y)$.

Теорема (про добуток вектора на число). Модуль вектора $\lambda\vec{a}$ дорівнює $|\lambda||\vec{a}|$. Вектор $\lambda\vec{a}$ співнапрямлений з вектором $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежно напрямлений вектору $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$.

На малюнку для вектора $\vec{a}$ побудовано вектори $2\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$.

Вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна подати у вигляді $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, де $\lambda \neq 0$, і навпаки, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\lambda \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – **колінеарні**.



Умова колінеарності векторів:

Нехай $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ – довільні вектори. Тоді якщо:

1) $x_1 = x_2 = 0$, то вектори $\vec{a}(0; y_1)$ і $\vec{b}(0; y_2)$ – колінеарні;

причому, якщо $\frac{y_2}{y_1} > 0$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$;

а якщо $\frac{y_2}{y_1} < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$;

2) $y_1 = y_2 = 0$, то вектори $\vec{a}(x_1; 0)$ і $\vec{b}(x_2; 0)$ – колінеарні;
причому, якщо $\frac{x_2}{x_1} > 0$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$;

а якщо $\frac{x_2}{x_1} < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$;

3) $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, якщо $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \lambda$, причому, якщо $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; а якщо $\lambda < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$.

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ називають число $x_1x_2 + y_1y_2$.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Т е о р е м а (про скалярний добуток векторів). Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їхніх модулів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Наслідок 1. Якщо вектори перпендикулярні, то їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Наслідок 2. Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони перпендикулярні.

Косинус кута φ між ненульовими векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2)$ можна обчислити за формулою

$$\cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

ТЕМА 4

КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- ознайомитеся з квадратичною функцією;
- дізнаєтеся, що таке нулі функції, проміжки знакосталості, зростання і спадання функції; найбільше та найменше значення функції;
- навчитеся виконувати перетворення графіків функції; будувати графік квадратичної функції; розв'язувати квадратні нерівності та системи двох рівнянь другого степеня з двома змінними.

§ 18. Функція. Область визначення, область значень і графік функції

1. Означення функції



У 7 класі ви почали вивчати одне з найважливіших математичних понять – поняття функції.

Нагадаємо, що

функцією (або функціональною залежністю) називають таку залежність, за якої кожному значенню незалежної змінної з деякої множини відповідає єдине значення залежної змінної.

Незалежну змінну ще називають *аргументом*, а про залежну змінну кажуть, що вона є *функцією* від цього аргументу (або просто функцією). Наприклад, якщо $y = x^2 + 2x - 3$, то y є функцією від аргументу x .

Залежність змінної y від змінної x записують так: $y = f(x)$ (читають: « y дорівнює f від x »). Символом $f(x)$ позначають значення функції для значення аргументу, що дорівнює x .

Приклад 1. Розглянемо функцію $y = 5x + 2$. Можна записати, що $f(x) = 5x + 2$. Знайдемо, наприклад, значення функції для $x = -3$, тобто знайдемо $f(-3)$. Маємо: $f(-3) = 5 \cdot (-3) + 2 = -13$. Знайдемо значення цієї функції в точках, що дорівнюють 0; a ; $b - 1$. Матимемо:

- $f(0) = 5 \cdot 0 + 2 = 2$;
- $f(a) = 5a + 2$;
- $f(b - 1) = 5(b - 1) + 2 = 5b - 3$.

Зауважимо, що в запису вигляду $y = f(x)$ замість f можна використовувати й інші букви: g , φ , ψ тощо.

2. Область визначення та область значень функції. Найбільше і найменше значення функції

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють **область визначення функції**.

Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють **область значень функції**.

Найбільшим значенням функції називають найбільше число з області значень функції, а **найменшим значенням функції** – відповідно найменше таке число.

Область визначення функції $y = f(x)$ зазвичай позначають через $D(f)$, а область значень – через $E(f)$.

Якщо функцію задано формулою і не зазначено її область визначення, то вважатимемо, що ця область складається з усіх значень аргументу, за яких формула функції має зміст.

Приклад 2. Знайти область визначення функції:

$$1) f(x) = x^2 - 2x + 3; \quad 2) g(x) = \frac{1}{x - 8}.$$

Розв'язання. 1) Вираз $x^2 - 2x + 3$ має зміст за будь-якого значення x , тому областю визначення функції $f(x) = x^2 - 2x + 3$ є множина всіх чисел, тобто проміжок $(-\infty; +\infty)$.

2) Вираз $\frac{1}{x - 8}$ має зміст за будь-якого значення x , крім числа 8,

тому областю визначення функції $g(x) = \frac{1}{x - 8}$ є множина $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Відповідь: 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$.

Відповідь можна записати ще й так:

$$1) D(f) = (-\infty; +\infty); \quad 2) D(g) = (-\infty; 8) \cup (8; +\infty).$$

Приклад 3. Знайти область визначення та область значень функції:

$$1) f(x) = 2 - x^2; \quad 2) g(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x}.$$

Розв'язання. 1) Областю визначення функції $f(x) = 2 - x^2$ є проміжок $(-\infty; +\infty)$. Щоб знайти область значень функції, оцінимо вираз $2 - x^2$ для всіх значень x . Маємо:

$$x^2 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$-x^2 \leq 0 \quad | + 2$$

$$2 - x^2 \leq 2.$$

Отже, $f(x) \leq 2$ за будь-якого значення x , тобто областю значень функції $f(x) = 2 - x^2$ є проміжок $(-\infty; 2]$.

- 2) Область визначення функції $g(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$ складається з таких значень x , для яких вирази $x-2$ і $2-x$ одночасно набувають невід'ємних значень. Отже, щоб знайти ці значення, треба розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 2-x \geq 0; \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Очевидно, що розв'язком системи є $x = 2$. Отже, область визначення функції $g(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$ містить лише число 2. Щоб знайти область значень цієї функції, достатньо обчислити $g(2)$. Маємо: $g(2) = \sqrt{2-2} + \sqrt{2-2} = 0$.

Відповідь: 1) область визначення: $(-\infty; +\infty)$, область значень: $(-\infty; 2]$; 2) область визначення: число 2, область значень: число 0.

Відповідь можна записати й коротше:

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; 2]$;

2) $D(g) = \{2\}$; $E(g) = \{0\}$.

Зауважимо, що найбільшим значенням функції $f(x) = 2 - x^2$ є число 2, а найменшого значення в цієї функції не існує.

3. Графік функції



Нагадаємо, що

графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

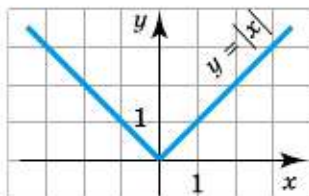
Приклад 4. Побудувати графік функції $f(x) = |x|$. За графіком знайти найбільше і найменше значення функції.

Розв'язання. Областю визначення функції $f(x) = |x|$ є множина всіх чисел. За означенням модуля числа маємо: $|x| = x$, якщо $x \geq 0$, і $|x| = -x$, якщо $x < 0$. Отже, функцію $f(x) = |x|$ можна записати так:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Графік цієї функції на проміжку $[0; +\infty)$ збігається із графіком функції $y = x$, а на проміжку $(-\infty; 0]$ — із графіком функції $y = -x$. Графік функції $f(x) = |x|$ зображено на малюнку 18.1. Очевидно, що найменшим значенням цієї функції є число 0, а найбільшого значення не існує.

Відповідь: найменше значення функції — 0, найбільшого не існує.



Мал. 18.1

А ще раніше...

Починаючи із XVII ст. функція є одним з основних математичних і загальнонаукових питань. Це поняття і донині відіграє значну роль у розумінні реального світу.

Ідея функціональної залежності прийшла з давнини. Її зміст можна знайти в перших математичних співвідношеннях між величинами, у перших правилах дій над числами, у перших формулах для знаходження площ та об'ємів. Так, вавилонські вчені ще 4–5 тисяч років тому експериментальним шляхом установили, що площа круга є функцією від його радіуса, й дізналися її наближену формулу: $S = 3r^2$.

Прикладами таблично заданих функцій є астрономічні таблиці вавилонян, античних греків та індійців, таблиці квадратів і кубів чисел, які також застосовували вавилоняни.

Починаючи лише з XVIII ст. у зв'язку із проникненням у математику ідеї змінних поняття функції стало застосовуватися цілком свідомо. У «Геометрії» Декарта і в роботах Ферма, Ньютона, Лейбніца поняття функції мало інтуїтивний характер і було пов'язане або з геометричним, або з механічним уявленням: ординати точок кривих – функції від абсцис, шлях і швидкість – функції від часу тощо.



Рене Декарт
(1596–1650)



П'єр Ферма
(1601–1665)



Ісаак Ньютон
(1643–1727)



Готфрід
Лейбніц
(1646–1716)

Чіткого уявлення поняття функції в XVII ст. ще не було, проте шлях до такого поняття проклав Рене Декарт. У своїй «Геометрії» 1637 р. він систематично розглядав лише ті криві, які можна було задати за допомогою рівнянь, притому переважно алгебраїчних. Так з'явилася можливість записувати загальні формули.

Термін *функція* (від латинського *functio* – вчинення, виконання) 1694 р. запровадив німецький математик Готфрід Лейбніц. Функціями він назвав абсциси, ординати й інші відрізки, пов'язані з точкою, що рухається вздовж певної лінії. Термін «функція від x » стали вживати Г. Лейбніц та Й. Бернуллі; починаючи з 1698 р. Г. Лейбніц запровадив у науковий обіг також терміни *змінна* і *константа*. Для позначення довільної функції від x Йоганн Бернуллі застосовував знак φ_x , називаючи φ характеристикою функції. Г. Лейбніц застосовував позначення x^1 , x^2 замість сучасних $f_1(x)$, $f_2(x)$, Л. Ейлер позначав функцію як $f:(x)$ замість сучасного $f(x)$, а Д'Аламбер писав так: $f x$ або $f(x)$, тобто прийшов до сучасного позначення функції.

Явне означення поняття функції вперше дав 1718 р. один з учнів Г. Лейбніца, видатний швейцарський математик Йоганн Бернуллі: «Функцією змінної величини називають кількість, утворену будь-яким способом із цієї змінної величини і констант».

Остаточне означення функції сформулював у своїй праці «Введення в аналіз нескінченних» (1748 р.) видатний учень Йоганна Бернуллі Леонард Ейлер, який дещо змінив означення свого вчителя. Означив Л. Ейлер функцію так: «Функція змінної кількості є аналітичним виразом, який складено деяким чином із цієї кількості та чисел або сталих кількостей». Так розуміли функцію протягом майже всього XVIII ст.



Йоганн
Бернуллі
(1667–1748)



Леонард
Ейлер
(1707–1783)



Бернард
Больцано
(1781–1848)



П'єр Густав
Діріхле
(1805–1859)

У XIX ст. ідеї Леонарда Ейлера набули подальшого розвитку. Поняття функції як залежності однієї змінної від іншої запровадив у науковий обіг чеський математик Б. Больцано, а узагальнив – німецький математик П. Г. Діріхле. 1837 р. він так сформулював загальне означення поняття функції: « y є функцією змінної x (на відрізок $a \leq x \leq b$), якщо кожному значенню x (на цьому відрізок) відповідає цілком визначене значення y , причому неважливо, у який спосіб встановлено цю відповідність – аналітичною формулою, графіком, таблицею або просто словами».

Скорочене й осучаснене саме таке означення функції трапляється в більшості шкільних підручників, у тому числі й у цьому.



Що називають функцією? ○ Яку змінну називають незалежною змінною (аргументом), а яку – залежною? ○ Що називають областю визначення функції? ○ Що називають областю значень функції? ○ Що називають графіком функції?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



18.1. (Усно.) Функцію задано формулою $y = 3x - 7$. Назвіть її незалежну змінну; залежну змінну.

18.2. Знайдіть:

1) $f(2)$, $f(0)$, $f(-1)$, якщо $f(x) = 2x - 3$;

2) $g(0)$, $g(2)$, якщо $g(x) = x^2 + x$;

3) $\varphi(-2)$, $\varphi(3)$, якщо $\varphi(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

18.3. Знайдіть: 1) $g(1)$, $g(0)$, $g(-3)$, якщо $g(x) = -x + 1$;

2) $f(0)$, $f(-1)$, якщо $f(x) = x^2 - x$;

3) $\psi(3)$, $\psi(-1)$, якщо $\psi(x) = \frac{x+2}{x-2}$.

- 2 18.4. Нехай $t(x) = x^2 - x + 9$. Знайдіть $t(-1) + t(0) + t(1)$, відтак дізнаєтеся, скільки медалей здобули паралімпійці України на зимових іграх 2022 року.



- 18.5. Нехай $g(x) = 2x^2 + 3$. Знайдіть $g(0) + g(1) + g(2)$, відтак дізнаєтеся, у якому віці Леся Українка написала підручник «Стародавня історія східних народів».

- 18.6. Дано: $f(x) = \sqrt{x} + x$, $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$. Порівняйте:
1) $f(0)$ і $g(1)$; 2) $f(4)$ і $g(3)$.

- 18.7. Дано: $f(x) = x - \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. Обчисліть:
1) $f(1) + g(3)$; 2) $f(9) - g(1)$.

- 18.8. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $f(x) = 5 - 3x$; 2) $g(x) = \frac{30}{x}$; 3) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$;
4) $g(x) = \sqrt{x} + 9$; 5) $f(x) = \frac{3}{x - 5}$; 6) $\psi(x) = \frac{7}{2x + 8}$.

- 18.9. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $g(x) = 3x + 1$; 2) $f(x) = -\frac{60}{x}$; 3) $t(x) = 7 - \sqrt{x}$;
4) $f(x) = x^2 - 3x - 19$; 5) $g(x) = \frac{x}{x + 3}$; 6) $\varphi(x) = \frac{9}{3x - 9}$.

- 18.10. Знайдіть значення x , за якого значення функції $y = \frac{1}{3}x - 5$ дорівнює:

- 1) 4; 2) -5; 3) 0; 4) -1.

- 18.11. За якого значення x значення функції $y = 7 - 3x$ дорівнює:

- 1) 1; 2) 7; 3) 0; 4) -5?

- 18.12. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 2x - 7$; 2) $y = 3$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = \sqrt{x}$.

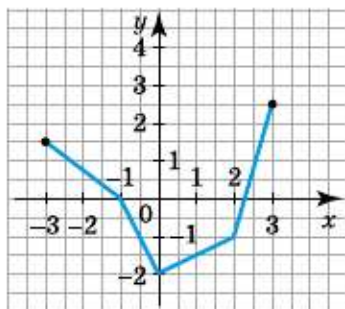


18.13. Побудуйте графік функції:

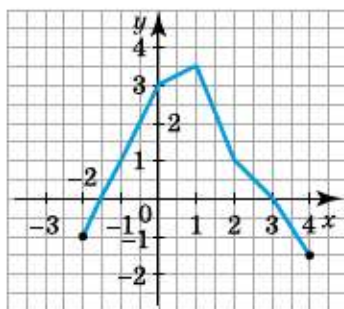
- 1) $y = 3x - 5$; 2) $y = \frac{4}{x}$; 3) $y = -2$; 4) $y = x^2$.

18.14. На малюнку 18.2 побудовано графік функції $y = f(x)$, областю визначення якої є проміжок $[-3; 3]$. Знайдіть:

- 1) $f(-3)$, $f(-1)$, $f(2)$;
- 2) значення x , якщо $f(x) = -1$, $f(x) = 2,5$;
- 3) найбільше і найменше значення функції;
- 4) область значень функції.



Мал. 18.2



Мал. 18.3

18.15. На малюнку 18.3 побудовано графік функції $y = g(x)$, областю визначення якої є проміжок $[-2; 4]$. Знайдіть:

- 1) $g(-2)$, $g(0)$, $g(3)$;
- 2) значення x , якщо $g(x) = 1$, $g(x) = -1,5$;
- 3) найбільше і найменше значення функції;
- 4) область значень функції.

18.16. Побудуйте графік деякої функції, визначеної на проміжку $[-4; 4]$, найменшим значенням якої є -2 , а найбільшим 5 .

3 18.17. Чи проходить графік функції $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x - 1}$ через точку:

- 1) $A(0; 5)$; 2) $B(1; -2)$; 3) $C(2; 7)$; 4) $D(-1; -3)$?

18.18. Чи належить графіку функції $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x + 1}$ точка:

- 1) $A(2; 2)$; 2) $B(0; -5)$; 3) $C(-1; -7)$; 4) $D\left(1; \frac{1}{2}\right)$?

18.19. Знайдіть область визначення функції:

1) $g(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$;

2) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}$;

3) $p(x) = \frac{5}{x^2 - 3x}$;

4) $t(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{2x - 7}$;

5) $g(x) = \frac{3}{x^2 + 2x - 3}$;

6) $f(x) = \frac{x}{|x| - 1}$;

$$7) \varphi(x) = \frac{x}{|x| + 2};$$

$$8) t(x) = \frac{5}{|x - 2| - 3};$$

$$9) f(x) = \sqrt{3x - 6};$$

$$10) f(x) = \frac{10}{\sqrt{4x + 10}}.$$

18.20. Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \frac{3}{x^2 - 4};$$

$$2) g(x) = \frac{x}{x^2 + 1};$$

$$3) \varphi(x) = \frac{4}{x^2 + 2x};$$

$$4) \psi(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{3x + 6};$$

$$5) p(x) = \frac{5}{x^2 - x - 2};$$

$$6) f(x) = \frac{2x}{|x| - 4};$$

$$7) g(x) = \frac{x}{|x| + 1};$$

$$8) f(x) = \frac{4}{|x + 1| - 2};$$

$$9) f(x) = \sqrt{2x + 6};$$

$$10) f(x) = \frac{8}{\sqrt{2x - 7}}.$$

$$18.21. \text{ Дано функцію } f(x) = \begin{cases} 5 - x, & \text{якщо } x < -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 \leq x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

Знайдіть $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.

18.22. Відомо, що $g(x) = kx + l$, причому $g(2) = -1$, $g(-4) = 17$. Знайдіть k і l .

18.23. Відомо, що $f(x) = kx + l$, причому $f(1) = -4$, $f(-2) = -13$. Знайдіть k і l .

4 18.24. Знайдіть область значень функції:

$$1) f(x) = \sqrt{x} - 5; \quad 2) g(x) = 3 - \sqrt{x};$$

$$3) t(x) = |x| + 2; \quad 4) g(x) = |x| - 3;$$

$$5) f(x) = x^2 + 5; \quad 6) \varphi(x) = 9 - x^4.$$

18.25. Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = \begin{cases} -x - 2, & \text{якщо } x < -3, \\ 1, & \text{якщо } -3 \leq x \leq 2, \\ x - 1, & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{6}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 1,5x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{6}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

18.26. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{якщо } x < -2, \\ 3, & \text{якщо } -2 \leq x < 3, \\ 6 - x, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$

18.27. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3};$

2) $g(x) = \frac{6x + 12}{x^2 + 2x};$

3) $\varphi(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2};$

4) $\psi(x) = \frac{|x| - 2}{|x| + 2}.$

18.28. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1};$

2) $g(x) = \frac{16 - 8x}{x^2 - 2x}.$

Вправи для повторення

18.29. Обчисліть:

1) $6^8 : 6^5 : 36;$

2) $(7^5 \cdot 49^2) : 7^{10};$

3) $10^{-6} : 100^{-2}.$

18.30. Число -3 є коренем рівняння $x^2 + 2x - c = 0$. Знайдіть c і другий корінь рівняння.

18.31. Спростіть вираз $\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : \sqrt{\frac{b}{a}}.$

18.32. Скільки коренів рівняння $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ є розв'язками нерівності $x^2 - 4 < 0$?

Життєва математика

18.33. У 2025 році податок на прибуток із заробітної плати становив 18 % – крім того, із заробітної плати утримували 5 % військового збору. У деякій компанії зарплата HR-менеджерки (Human Resources) становила 16 400 грн. Яку суму коштів отримувала менеджерка після сплати податку на прибуток і військового збору?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

18.34. Знайдіть нулі функції:

1) $y = 2x - 6;$

2) $y = 3x + 24;$

3) $y = \frac{x + 1}{7};$

4) $y = \frac{7}{x + 1}.$

18.35. Яка фігура є графіком функції:

1) $y = 4x;$

2) $y = \frac{4}{x};$

3) $y = 3x - 7;$

4) $y = x^2;$

5) $y = -3;$

6) $y = \sqrt{x}?$

18.36. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = -3x$; 2) $y = \frac{6}{x}$; 3) $y = 2$;
 4) $y = -\frac{8}{x}$; 5) $y = x^2$; 6) $y = \sqrt{x}$.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

18.37. Загадали деяке натуральне двоцифрове число. З правого боку до нього приписали таке саме число і від числа, що при цьому отримали, відняли квадрат числа, яке загадали. Потім цю різницю поділили на 4 % від квадрата числа, яке загадали, унаслідок чого неповна частка й остача виявилися рівними відповідно половині числа, яке загадали, та числу, яке загадали. Знайдіть, яке число загадали.

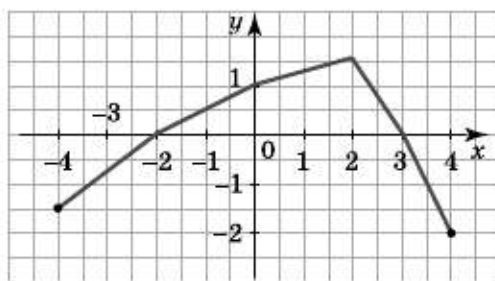
§ 19. Властивості функції

1. Нулі функції



Нагадаємо відоме із 7 класу поняття нулів функції.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 19.1. Якщо $x = -2$ або $x = 3$, то значення функції дорівнює нулю, тобто $f(-2) = f(3) = 0$. Такі значення аргументу називають *нулями функції*.



Мал. 19.1

Значення аргументу, за якого значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції.



Нулі функції є абсцисами точок перетину графіка функції з віссю абсцис, а ординати цих точок дорівнюють нулю, адже точки належать осі абсцис.

Тому, щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, треба розв'язати рівняння $f(x) = 0$.

Приклад 1. Знайти нулі функції $h(x) = x^2 - 2x - 8$.

- *Розв'язання.* Маємо рівняння: $x^2 - 2x - 8 = 0$, звідки $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.
- Отже, -2 і 4 – нулі функції.
- *Відповідь:* -2 ; 4 .

2. Перетин графіка функції з віссю ординат

Графік, зображений на малюнку 19.1, перетинає вісь абсцис у точках $(-2; 0)$ і $(3; 0)$.

Цей графік перетинає також вісь ординат у точці $(0; 1)$. Абсциса цієї точки дорівнює нулю, адже точка належить осі ординат. Отже, ордината точки перетину графіка функції $y = f(x)$ із віссю ординат дорівнює числу $f(0)$, тобто значенню функції для значення аргумента, яке дорівнює нулю.

Приклад 2. Знайти точки перетину графіка функції $h(x) = x^2 - 2x - 8$ з осями координат.

- *Розв'язання.* Оскільки -2 і 4 – нулі функції $y = h(x)$, то її графік перетинає вісь абсцис у точках $(-2; 0)$ і $(4; 0)$.
- Оскільки $h(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8$, то графік функції $y = h(x)$ перетинає вісь ординат у точці $(0; -8)$.
- *Відповідь:* $(-2; 0)$, $(4; 0)$, $(0; -8)$.

3. Проміжки знакосталості функції

Нулі функції $y = f(x)$ (мал. 19.1) розбивають її область визначення – проміжок $[-4; 4]$ – на три проміжки: $[-4; -2)$, $(-2; 3)$ і $(3; 4]$. Для значень x із проміжку $(-2; 3)$ точки графіка лежать вище від осі абсцис, а для значень x із проміжків $[-4; -2)$ і $(3; 4]$ – нижче від осі абсцис. Отже, на проміжку $(-2; 3)$ функція набуває додатних значень, тобто $f(x) > 0$ для $x \in (-2; 3)$, а на кожному з проміжків $[-4; -2)$ і $(3; 4]$ – від'ємних значень, тобто $f(x) < 0$ для $x \in [-4; -2)$ або $x \in (3; 4]$.

Проміжок, на якому функція зберігає свій знак, називають *проміжком знакосталості функції*.

Проміжки $[-4; -2)$, $(-2; 3)$ і $(3; 4]$ є проміжками знакосталості функції $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 19.1.

4. Зростання та спадання функції

Розглянемо, як змінюється (збільшується чи зменшується) значення цієї функції зі зміною значення x від -4 до 4 .

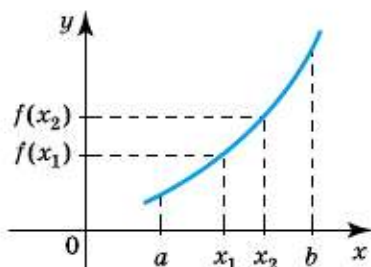
За графіком бачимо, що зі збільшенням значень x від -4 до 2 значення y збільшується (графік «прямує» вгору), а зі збільшенням значень x від 2 до 4 значення y зменшується (графік «прямує» вниз). Кажуть, що на проміжку $[-4; 2]$ функція *зростає* (або є *зростаючою*), а на проміжку $[2; 4]$ функція *спадає* (або є *спадною*).

Функцію називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

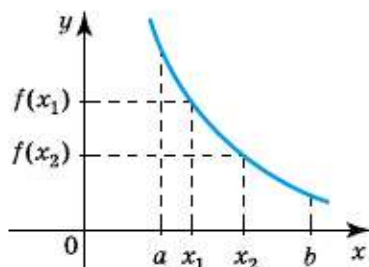
Функцію називають **спадною** на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Отже, за означенням, функцію $y = f(x)$ називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 та x_2 із цього проміжку, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність: $f(x_2) > f(x_1)$.

На малюнку 19.2 зображено графік функції $y = f(x)$, яка зростає на проміжку $[a; b]$. При цьому проміжок $[a; b]$ називають *проміжком зростання функції*.



Мал. 19.2



Мал. 19.3

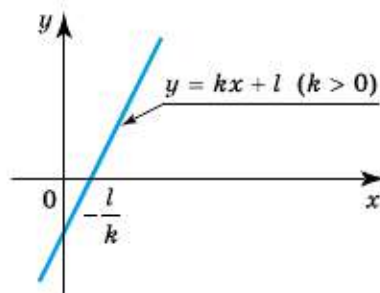
Так само, за означенням, функцію $y = f(x)$ називають спадною на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 та x_2 із цього проміжку, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

На малюнку 19.3 зображено графік функції $y = f(x)$, яка спадає на проміжку $[a; b]$. При цьому проміжок $[a; b]$ називають *проміжком спадання функції*.

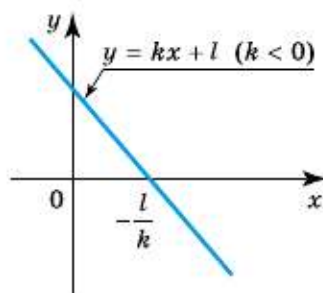
5. Властивості деяких елементарних функцій

З'ясуємо властивості деяких вивчених раніше функцій.

Приклад 3. Розглянемо властивості функції $y = kx + l$, де $k \neq 0$ та її графік (мал. 19.4 і 19.5).



Мал. 19.4



Мал. 19.5

1) Областю визначення та областю значень функції є множина всіх чисел.

2) Знайдемо нулі функції. Для цього розв'яжемо рівняння $kx + l = 0$, звідки $x = -\frac{l}{k}$ – єдиний нуль функції.

3) Знайдемо проміжки знакосталості функції.

Нехай $k > 0$. Розв'яжемо нерівність $kx + l > 0$, звідки $x > -\frac{l}{k}$. Отже, $y > 0$, коли $x > -\frac{l}{k}$.

Розв'яжемо нерівність $kx + l < 0$, звідки $x < -\frac{l}{k}$. Отже, $y < 0$, коли $x < -\frac{l}{k}$.

Нехай $k < 0$. Розв'яжемо нерівність $kx + l > 0$, звідки $x < -\frac{l}{k}$. Отже, $y > 0$, коли $x < -\frac{l}{k}$.

Розв'яжемо нерівність $kx + l < 0$, звідки $x > -\frac{l}{k}$. Отже, $y < 0$, коли $x > -\frac{l}{k}$.

4) Перевіримо функцію $f(x) = kx + l$ на зростання та спадання.

Нехай $k > 0$ і $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + l) - (kx_1 + l) = k(x_2 - x_1) > 0$, адже $k > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$.

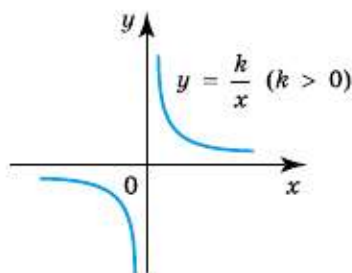
Отже, коли $k > 0$, функція $y = kx + l$ зростає на $(-\infty; +\infty)$.

Нехай $k < 0$ і $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$. Тоді $f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + l) - (kx_1 + l) = k(x_2 - x_1) < 0$, адже $k < 0$ і $x_2 - x_1 > 0$.

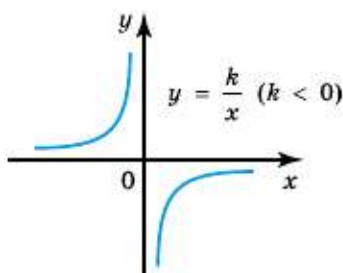
Отже, коли $k < 0$, функція $y = kx + l$ спадає на $(-\infty; +\infty)$.

5) Найбільшого і найменшого значень функція не має.

Приклад 4. Розглянемо властивості функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$ (мал. 19.6 і 19.7).



Мал. 19.6



Мал. 19.7

1) Областю визначення та областю значень функції є множина всіх чисел, крім нуля.

2) Оскільки рівняння $\frac{k}{x} = 0$, де $k \neq 0$, не має розв'язків, то функція $y = \frac{k}{x}$ нулів не має.

3) Нехай $k > 0$. Тоді $\frac{k}{x} > 0$, коли $x > 0$, і $\frac{k}{x} < 0$, коли $x < 0$. Отже, $y > 0$, коли $x > 0$, і $y < 0$, коли $x < 0$.

Нехай $k < 0$. Тоді $\frac{k}{x} > 0$, коли $x < 0$, і $\frac{k}{x} < 0$, коли $x > 0$. Отже, $y > 0$, коли $x < 0$, і $y < 0$, коли $x > 0$.

4) Якщо $k > 0$, то функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Якщо $k < 0$, то функція $y = \frac{k}{x}$ зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

5) Найбільшого і найменшого значень у функції не існує.

Приклад 5. Розглянемо властивості функції $y = x^2$ (мал. 19.8).

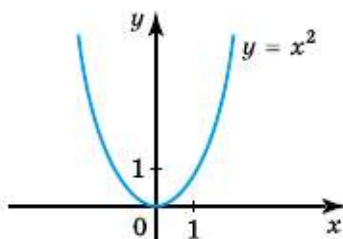
1) Область визначення функції – множина всіх чисел. Область значень – проміжок $[0; +\infty)$.

2) Рівняння $x^2 = 0$ має єдиний розв'язок: $x = 0$. Отже, число 0 – єдиний нуль функції.

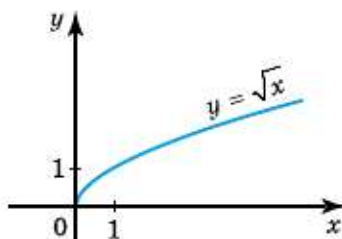
3) $x^2 > 0$, коли $x \neq 0$, тобто $y > 0$ для $x \in (-\infty; 0)$ або $x \in (0; +\infty)$. Зауважимо, що немає таких значень x , за яких $y < 0$, оскільки нерівність $x^2 < 0$ не має розв'язків.

4) Функція $y = x^2$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

5) Найменше значення функції дорівнює нулю, найбільшого – не існує.



Мал. 19.8



Мал. 19.9

Приклад 6. Розглянемо властивості функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 19.9).

1) Область визначення та область значень функції: $[0; +\infty)$.

2) Рівняння $\sqrt{x} = 0$ має єдиний розв'язок – число 0, яке є нулем функції.

- 3) $\sqrt{x} > 0$, коли $x > 0$, тобто $y > 0$, коли $x \in (0; +\infty)$. Немає таких значень x , щоб виконувалася нерівність $y < 0$, оскільки нерівність $\sqrt{x} < 0$ не має розв'язків.
- 4) Функція $y = \sqrt{x}$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$.
- 5) Найменше значення функції – число 0, найбільшого – не існує.

Систематизуємо властивості цих функцій у таблицю.

Властивості деяких елементарних функцій						
Функція \ Властивість	$y = kx + l$		$y = \frac{k}{x}$		$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$
	$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$		
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$		$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$		R	$[0; +\infty)$
Область значень	$(-\infty; +\infty)$		$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$		$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Нулі функції	$x = -\frac{l}{k}$		не існують		$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості, $y > 0$	$x > -\frac{l}{k}$	$x < -\frac{l}{k}$	$x > 0$	$x < 0$	$x < 0$, $x > 0$	$x > 0$
Проміжки знакосталості, $y < 0$	$x < -\frac{l}{k}$	$x > -\frac{l}{k}$	$x < 0$	$x > 0$	–	–
Зростає на проміжку	R	–	–	$(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$
Спадає на проміжку	–	R	$(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$	–	$(-\infty; 0]$	–
Найбільше значення функції, $y_{\max}$	–		–		–	–
Найменше значення функції, $y_{\min}$	–		–		0	0

- Що називають нулями функції? Що називають проміжками знакосталості функції? Яку функцію називають зростаючою на проміжку, а яку – спадною? Використовуючи малюнок 9.1, поясніть, як за графіком функції знайти нулі функції, проміжки знакосталості та проміжки зростання і спадання функції. Сформулюйте властивості функцій $y = kx + l$ ($k \neq 0$), $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

19.1. Знайдіть нулі функції:

1) $y = 2x$; 2) $y = 2 - 5x$; 3) $y = x(x - 2)$; 4) $y = \frac{x}{x + 1}$.

19.2. Знайдіть нулі функції:

1) $y = 3x$; 2) $y = 5x + 4$; 3) $y = x(x + 3)$; 4) $y = \frac{x - 1}{x}$.

19.3. (Усно.) Зростаючою чи спадною на своїй області визначення є функція:

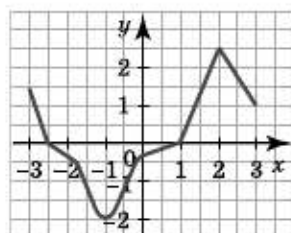
1) $y = 2x + 7$; 2) $y = -3x$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \frac{1}{3}x$?

19.4. Зростаючою чи спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$ є функція:

1) $y = -2x - 5$; 2) $y = \frac{4}{5}x$; 3) $y = -0,01x$; 4) $y = 5x + 13$?

2 19.5. Областю визначення функції $y = f(x)$, графік якої зображено на малюнку 19.10, є проміжок $[-3; 3]$. За графіком знайдіть:

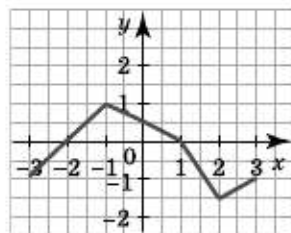
- 1) нулі функції;
- 2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і проміжки, на яких вона набуває від'ємних значень;
- 3) проміжки, на яких функція зростає, і проміжки, на яких вона спадає;
- 4) значення x , за якого функція набуває найбільшого значення, та найбільше значення функції; значення x , за якого функція набуває найменшого значення, та найменше значення функції.



Мал. 19.10

19.6. Областю визначення функції $y = g(x)$, графік якої зображено на малюнку 19.11, є проміжок $[-3; 3]$. За графіком знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і проміжки, на яких вона набуває від'ємних значень;
- 3) проміжки, на яких функція зростає, і проміжки, на яких вона спадає;
- 4) значення x , за якого функція набуває найбільшого значення, та найбільше значення функції; значення x , за якого функція набуває найменшого значення, та найменше значення функції.



Мал. 19.11

19.7. Знайдіть нулі функції (якщо вони існують):

1) $y = 5(x^2 + 1)$; 2) $y = \sqrt{x - 2}$;
3) $y = \sqrt{9 - x^2}$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 5}$.

19.8. Знайдіть нулі функції (якщо вони існують):

1) $y = 4(x^2 + 9)$; 2) $y = \sqrt{3 + x}$;
3) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 4}$.

19.9. Накресліть схематично графік функції $y = g(x)$, областю визначення якої є проміжок $[-3; 5]$, так, щоб:

- 1) нулем функції було число 2;
- 2) нулями функції були числа -1 і 4 ;
- 3) функція зростала на проміжку $[-3; 2]$ і спадала на проміжку $[2; 5]$.

19.10. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

$$1) y = 2x - 4; \quad 2) y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності визначених властивостей функції.

19.11. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

$$1) y = -3x + 6; \quad 2) y = \frac{1}{3}x - 1.$$

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності визначених властивостей функції.

3 **19.12.** Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину з осями координат графіка функції:

$$\begin{aligned} 1) y &= \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}; & 2) y &= \sqrt{x + 2}; \\ 3) y &= \frac{|x| - 1}{x + 1}; & 4) y &= \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x}. \end{aligned}$$

19.13. Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину з осями координат графіка функції:

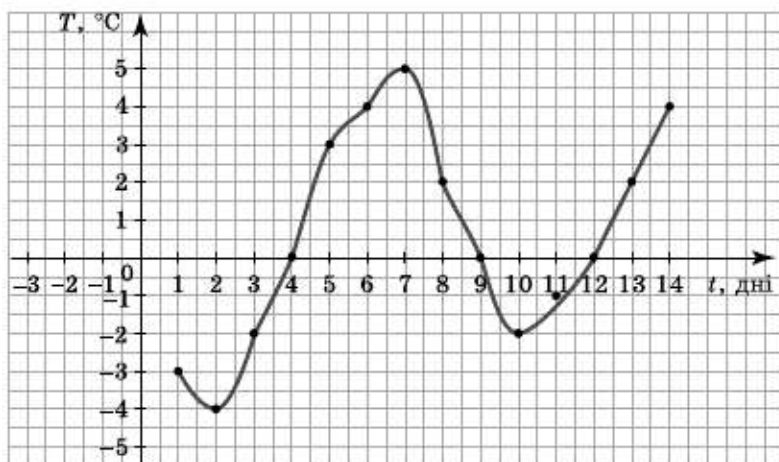
$$\begin{aligned} 1) y &= \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}; & 2) y &= \sqrt{x + 9}; \\ 3) y &= \frac{|x| - 2}{x - 2}; & 4) y &= \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x}. \end{aligned}$$

19.14. На малюнку 19.12 зображено зміни температури повітря T (у $^{\circ}\text{C}$) протягом перших тижнів березня. Значення температури, що спостерігалася щодня о 8:00, позначено точками і для точності сполучено плавною лінією. Використовуючи графік, дайте відповіді на запитання:



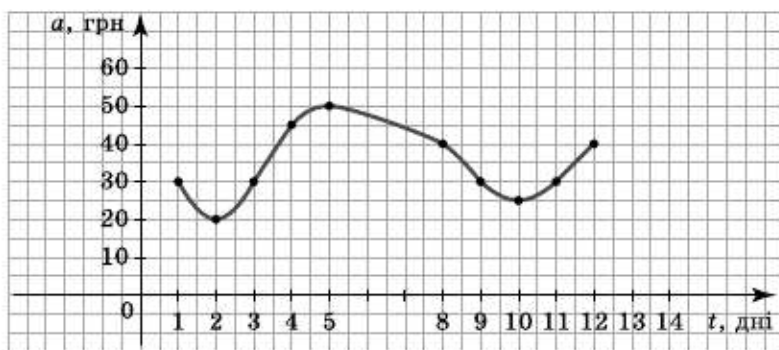
- 1) якою була температура повітря 3 березня; 8 березня;
- 2) у які дні температура була 0°C ; 2°C ;
- 3) у які дні температура була нижчою за 0°C ; у які – вищою;
- 4) якою була найвища температура повітря протягом цих двох тижнів; у який день вона спостерігалася;
- 5) якою була найнижча температура повітря протягом цих двох тижнів; у який день вона спостерігалася;
- 6) протягом яких днів температура повітря знижувалася, протягом яких – підвищувалася.

Придумайте ще кілька запитань за графіком, обміняйтеся ними в парах або в групах і дайте на них відповіді.



Мал. 19.12

19.15. На малюнку 19.13 подано жирними точками ціна однієї акції банку «Чудовий» (у грн) на момент закриття біржових торгів у всі робочі дні з 1 до 12 вересня 2025 року. По горизонталі зазначено числа місяця, по вертикалі – ціну однієї акції у грн. Для наочності жирні точки на малюнку сполучено плавною лінією.



Мал. 19.13

Використовуючи графік, дайте відповіді на запитання:

- 1) якою була ціна акцій 4 вересня; 8 вересня;
- 2) у які дні ціна акцій була 30 грн за одну акцію;
- 3) якою була найвища ціна акцій у ці дні; у який день це було;
- 4) якою була найнижчою ціна акцій у ці дні; у який день це було;
- 5) протягом яких днів ціна акцій знижувалася; протягом яких підвищувалася.

Проектна діяльність. Знайдіть в інтернеті інформацію про динаміку цін на деякий товар (послугу) протягом певного часу. Побудуйте графік, що відповідає цим даним. Підготуйте запитання за графіком для однокласників / однокласниць.

19.16. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

$$1) y = \frac{6}{x};$$

$$2) y = -\frac{8}{x}.$$

19.17. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

$$1) y = \frac{4}{x};$$

$$2) y = -\frac{10}{x}.$$

4 **19.18.** Скільки нулів має функція:

$$1) f(x) = x(x^2 - 1)\sqrt{|x| + 2};$$

$$2) g(x) = (x^2 - 4)\sqrt{|x| - 3}?$$

19.19. Скільки нулів має функція:

$$1) f(x) = x(x^2 - 9)\sqrt{|x| - 4};$$

$$2) g(x) = (x^2 - 9)\sqrt{|x| + 2}?$$

19.20. Побудуйте графік функції та опишіть її властивості:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 2x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x > 2; \end{cases} \quad 2) g(x) = x + |x|.$$

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності визначених властивостей функції.

19.21. Побудуйте графік функції та сформулюйте її властивості:

$$1) g(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ -1,5x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x > 2; \end{cases} \quad 2) f(x) = x - |x|.$$

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності визначених властивостей функції.



Вправи для повторення

19.22. Порівняйте числа:

$$1) 2\sqrt{3} \text{ і } \sqrt{13};$$

$$2) 3\sqrt{2} \text{ і } 2\sqrt{3};$$

$$3) 3\sqrt{7} \text{ і } 8.$$

19.23. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{2-x}{10} + \frac{3-x}{5} < \frac{5x-3}{4};$$

$$2) 3 < \frac{1-2x}{3} \leq 7.$$

19.24. Із Херсона до Житомира виїхали одночасно дві автівки. Одна з них рухалася зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж друга, а тому прибула в Житомир на 1 год раніше. Знайдіть швидкість кожної автівки, якщо відстань між містами становить 560 км.

19.25. Корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 - 5x + c = 0$ задовольняють умову $3x_1 = 2x_2$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт c .



Життєва математика

19.26. На рахунку мобільного телефона Богдана було 82 грн. Перебуваючи за кордоном, хлопець скористався роумінгом. Після розмови з Оленкою на його рахунку залишилося 71 грн 50 коп. Скільки хвилин тривала розмова, якщо вартість однієї хвилини розмови в роумінгу становить 1 грн 50 коп.?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

19.27. 1) Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 2x$, $y = 2x - 3$ та $y = 2x + 4$.

2) Чи паралельні ці графіки?

3) Як із графіка функції $y = 2x$ отримати графік функції $y = 2x - 3$?

4) Як із графіка функції $y = 2x$ отримати графік функції $y = 2x + 4$?



Цікаві задачі – поміркуй окремо

19.28. Порівняйте дробі $\frac{222\ 221}{333\ 332}$ і $\frac{444\ 443}{666\ 663}$.

§ 20. Найпростіші перетворення графіків функцій

Раніше ви будували лише графіки функцій вигляду $y = kx + l$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ та $y = |x|$.

Розглянемо деякі перетворення графіка функції $y = f(x)$, що значно збільшить перелік функцій, графіки яких ми зможемо будувати.

1. Побудова графіка функції $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$

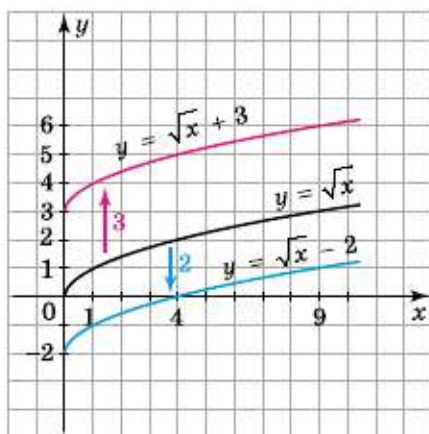
Приклад 1. Побудувати в одній системі координат графіки функцій

$y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} - 2$ та $y = \sqrt{x} + 3$.

Розв'язання. Спочатку складемо таблицю значень кожної із цих функцій для кількох значень аргументу:

$y \backslash x$	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x} - 2$	-2	-1	0	1	2
$y = \sqrt{x} + 3$	3	4	5	6	7

З таблиці зрозуміло, що для одного й того самого значення x значення функції $y = \sqrt{x} - 2$ на 2 менше, а значення функції $y = \sqrt{x} + 3$ на 3 більше за відповідне значення функції $y = \sqrt{x}$. Тому графік функції $y = \sqrt{x} - 2$ можна побудувати шляхом перенесення кожної точки графіка функції $y = \sqrt{x}$ вздовж осі y на 2 одиниці вниз, а графік функції $y = \sqrt{x} + 3$ – шляхом перенесення кожної точки графіка функції $y = \sqrt{x}$ вздовж осі y на 3 одиниці вгору (мал. 20.1).



Мал. 20.1

Отже,

для побудови графіка функції $y = f(x) + n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць угору; для побудови графіка функції $y = f(x) - n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць униз.

Зауваження. Замість перенесення графіка функції вгору (униз), можна перенести вісь x на ту саму відстань у протилежному напрямку.

2. Побудова графіка функції $y = f(x \pm t)$, де $t > 0$

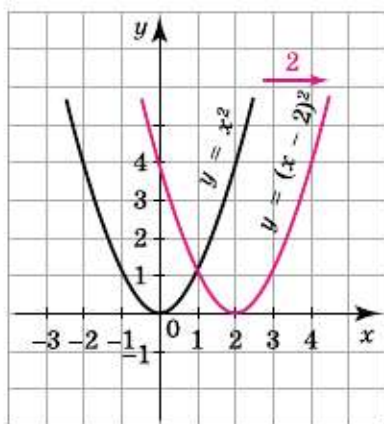
Приклад 2. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = (x - 2)^2$.

Розв'язання. Спочатку складемо таблицю значень кожної із цих функцій для кількох значень аргументу:

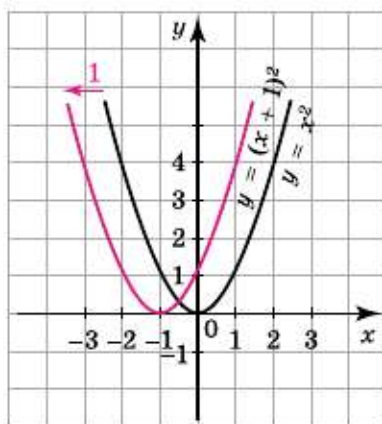
$y \backslash x$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9	16
$y = (x - 2)^2$	25	16	9	4	1	0	1	4

Для кожного $x = x_0$ значення функції $y = (x - 2)^2$ дорівнює значенню функції $y = x^2$ для $x = x_0 - 2$. У таблиці цю відповідність показано стрілками для значень функцій $y = (x - 2)^2$ для $x = -1; 0; 1; 2; 3; 4$ та $y = x^2$ відповідно для $x = -3; -2; -1; 0; 1; 2$.

Отже, якщо всі точки графіка функції $y = x^2$ перенести вздовж осі x на 2 одиниці вправо, то отримаємо графік функції $y = (x - 2)^2$ (мал. 20.2).



Мал. 20.2



Мал. 20.3

Приклад 3. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = (x + 1)^2$.

Розв'язання. Спочатку складемо таблицю значень кожної із цих функцій для кількох значень аргументу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$y = (x + 1)^2$	4	1	0	1	4	9	16

Міркуючи, як у прикладі 2, дійдемо висновку, що графік функції $y = (x + 1)^2$ можна отримати, перенісши графік функції $y = x^2$ вздовж осі x на 1 одиницю вліво (мал. 20.3).

Отже,

для побудови графіка функції $y = f(x - t)$, де $t > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на t одиниць управо; для побудови графіка функції $y = f(x + t)$, де $t > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на t одиниць уліво.

Зауваження. Замість перенесення графіка функції вліво (вправо) можна перенести вісь y на ту саму відстань у протилежному напрямку.

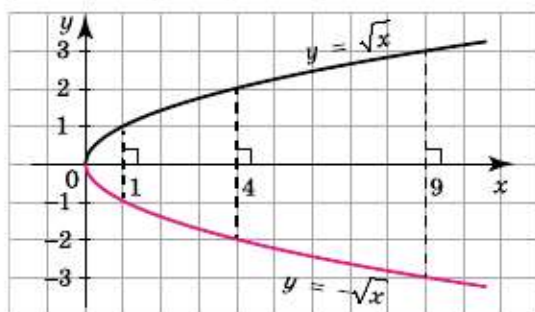
3. Побудова графіка функції $y = -f(x)$ **Приклад 4.** Побудувати в одній системі координат графіки функцій

$$y = \sqrt{x} \text{ та } y = -\sqrt{x}.$$

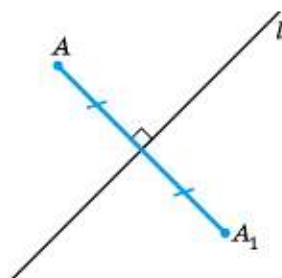
Розв'язання. Складемо таблицю значень цих функцій для кількох значень аргументу:

$y \backslash x$	0	1	4	9	16
$y = \sqrt{x}$	0	1	2	3	4
$y = -\sqrt{x}$	0	-1	-2	-3	-4

З таблиці бачимо, що значення функції $y = -\sqrt{x}$ для одних і тих самих значень x протилежні відповідним значенням функції $y = \sqrt{x}$. Графіки цих функцій зображено на малюнку 20.4.



Мал. 20.4



Мал. 20.5

Якщо провести відрізки, що сполучають точки графіків функцій $y = \sqrt{x}$ та $y = -\sqrt{x}$ для одного і того самого значення x (на мал. 20.4 їх показано пунктиром для $x = 1$, $x = 4$ та $x = 9$), то вісь x для цих відрізків буде серединним перпендикуляром. У такому разі кажуть, що графіки *симетричні* відносно осі x .

Точки A і A_1 називають *симетричними* відносно прямої l , якщо пряма l є серединним перпендикуляром до відрізка AA_1 (мал. 20.5).

Отже,

графіки функцій $y = -f(x)$ та $y = f(x)$ симетричні відносно осі x .

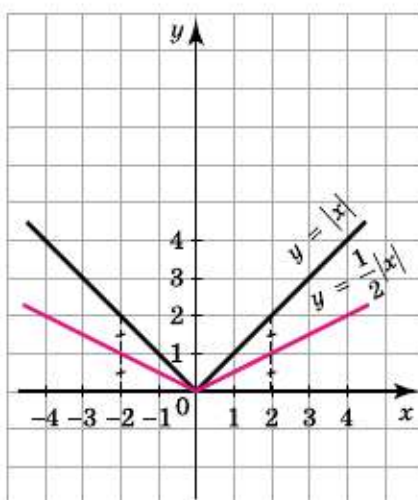
4. Побудова графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$ **Приклад 5.** Побудувати в одній системі координат графіки функцій

$$y = |x|, y = \frac{1}{2}|x| \text{ та } y = 2|x|.$$

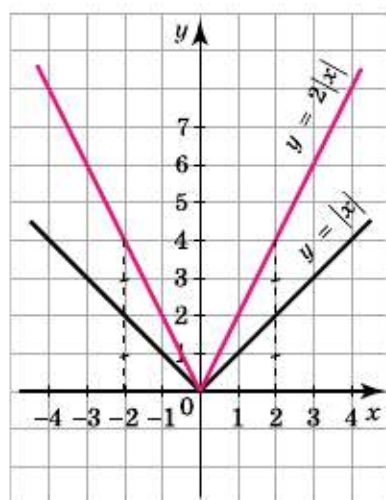
Розв'язання. Складемо таблицю значень кожної із цих функцій для кількох значень аргументу:

$y \backslash x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x $	3	2	1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2} x $	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$y = 2 x $	6	4	2	0	2	4	6

Для будь-якого значення x значення функції $y = \frac{1}{2}|x|$ удвічі менше від відповідного значення функції $y = |x|$, а значення функції $y = 2|x|$ удвічі більше за відповідне значення функції $y = |x|$. Тому графік функції $y = \frac{1}{2}|x|$ можна отримати, стиснувши графік функції $y = |x|$ у 2 рази до осі x (мал. 20.6), а графік функції $y = 2|x|$ – розтягнувши графік функції $y = |x|$ у 2 рази від осі x (мал. 20.7).



Мал. 20.6



Мал. 20.7

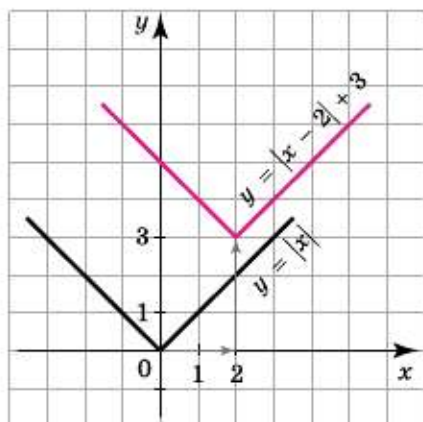
Отже,

для побудови графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$, достатньо графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його до осі x у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$.

Виконуючи послідовно два й більше перетворень, можна будувати графіки функцій $y = f(x + m) + n$, $y = -kf(x)$, де $k > 0$, та інших.

Приклад 6. Побудувати графік функції $y = |x - 2| + 3$.

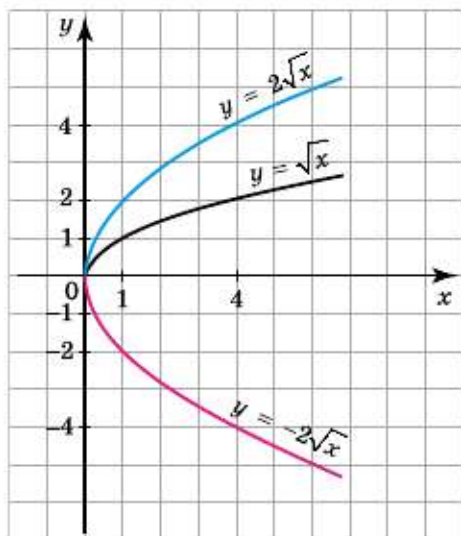
Розв'язання. Графік функції $y = |x - 2| + 3$ можна отримати, перенісши графік функції $y = |x|$ уздовж осі x на 2 одиниці вправо, а потім уздовж осі y на 3 одиниці вгору. Графік зображено на малюнку 20.8.



Мал. 20.8

Приклад 7. Побудувати графік функції $y = -2\sqrt{x}$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$. Далі, розтягнувши його у 2 рази від осі x , отримаємо графік функції $y = 2\sqrt{x}$. Графік функції $y = -2\sqrt{x}$ є симетричним графіку функції $y = 2\sqrt{x}$ відносно осі x . Побудову зображено на малюнку 20.9.



Мал. 20.9



5. Побудова графіка функції $y = |f(x)|$

За означенням модуля числа маємо:

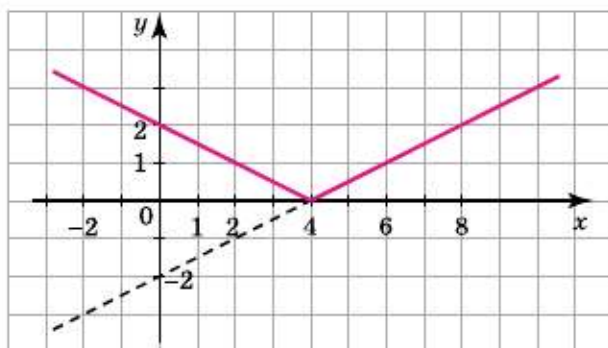
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отже, для тих значень x , за яких $f(x) \geq 0$, відповідні значення функцій $y = f(x)$ та $y = |f(x)|$ між собою рівні, а тому за таких значень x графіки цих функцій збігаються. Для тих значень x , за яких $f(x) < 0$, відповідні значення функцій $y = f(x)$ та $y = |f(x)|$ є протилежними числами, тому для таких значень x графіки цих функцій є симетричними відносно осі x .

Для побудови графіка функції $y = |f(x)|$ достатньо побудувати графік функції $y = f(x)$ і ту його частину, яка лежить нижче від осі x , симетрично відобразити відносно цієї осі.

Приклад 8. Побудувати графік функції $y = |0,5x - 2|$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y = 0,5x - 2$. Далі ту частину графіка, яка лежить нижче від осі x , симетрично відображаємо відносно цієї осі. Графік зображено на малюнку 20.10.



Мал. 20.10

? Як, користуючись графіком функції $y = f(x)$, побудувати графіки функцій $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$; $y = f(x \pm m)$, де $m > 0$; $y = -f(x)$; $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 20.1. (Усно.) Які перетворення графіка функції $y = x^2$ треба виконати, щоб отримати графік функції:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $y = x^2 + 2$; | 2) $y = x^2 - 3$; |
| 3) $y = (x - 2)^2$; | 4) $y = (x + 1)^2$; |
| 5) $y = -x^2$; | 6) $y = 2x^2$? |

2 20.2. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y = -x$, $y = -x + 3$ та $y = -x - 2$;

2) $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x - 2}$ та $y = \sqrt{x + 3}$.

20.3. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y = x$, $y = x + 2$ та $y = x - 3$;

2) $y = |x|$, $y = |x - 1|$ та $y = |x + 3|$.

20.4. На малюнку 20.11 зображено графік функції $y = x^3$. Перенесіть його в зошит і в тій самій системі координат побудуйте олівцями різного кольору графіки функцій:

1) $y = x^3 + 1$;

2) $y = x^3 - 2$;

3) $y = (x - 3)^3$;

4) $y = (x + 2)^3$.

20.5. На малюнку 20.11 зображено графік функції $y = x^3$. Перенесіть його в зошит і в тій самій системі координат побудуйте олівцями різного кольору графіки функцій:

1) $y = x^3 + 3$;

2) $y = x^3 - 1$;

3) $y = (x - 2)^3$;

4) $y = (x + 1)^3$.

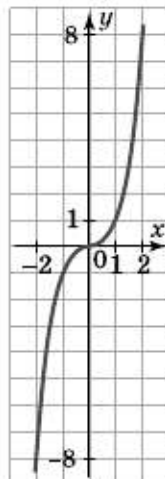
20.6. (Усно.) Який із графіків на малюнку 20.12 відповідає функції:

1) $y = \sqrt{x - 4}$;

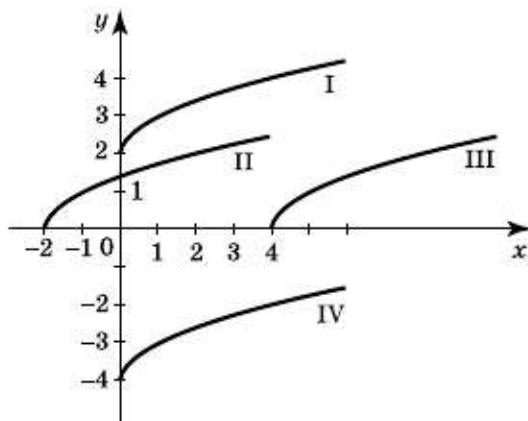
2) $y = \sqrt{x + 2}$;

3) $y = \sqrt{x} - 4$;

4) $y = \sqrt{x} + 2$?



Мал. 20.11



Мал. 20.12

3 20.7. Побудуйте графік функції:

1) $y = (x - 1)^2 + 3$;

2) $y = 4 - x^2$;

3) $y = (x + 2)^2 - 5$;

4) $y = (x + 3)^2 + 1$;

5) $y = -3 + (x - 2)^2$;

6) $y = -x^2 - 1$.

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності побудови.

20.8. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{x-2} + 1$; 2) $y = 2 - \sqrt{x}$; 3) $y = -2 + \sqrt{x+1}$;
4) $y = \sqrt{x+4} + 2$; 5) $y = \sqrt{x-1} - 3$; 6) $y = -\sqrt{x} - 1$.

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності побудови.

20.9. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 3|x|$; 2) $y = -4|x|$; 3) $y = \frac{1}{3}|x|$; 4) $y = -0,5|x|$.

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності побудови.

20.10. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 3x^2$; 2) $y = -2x^2$; 3) $y = 0,25x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності побудови.

20.11. (Усно.) Який із графіків на малюнку 20.13 відповідає функції:

- 1) $y = -2x^2$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^2$; 4) $y = 2x^2$?

20.12. Побудуйте графік функції:

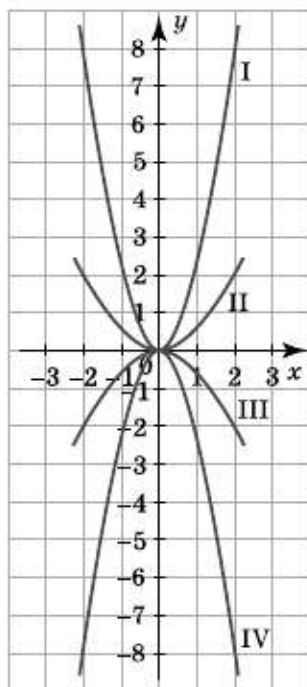
- 1) $y = \frac{6}{x} - 1$; 2) $y = \frac{6}{x-1}$.

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності побудови.

20.13. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 1 + \frac{8}{x}$; 2) $y = \frac{8}{x+1}$.

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності побудови.



Мал. 20.13

20.14. Дано параболу $y = x^2$. Напишіть рівняння параболі, яку можна отримати з даної перенесенням:

- 1) на 3 одиниці вгору; 2) на 4 одиниці вниз;
3) на 2 одиниці вліво; 4) на 5 одиниць управо;
5) на 2 одиниці вправо і на 3 одиниці вгору;
6) на 1 одиницю вліво і на 4 одиниці вгору;
7) на 3 одиниці вправо і на 1 одиницю вниз;
8) на 5 одиниць уліво і на 5 одиниць униз.

20.15. Побудуйте графік функції $y = (x + 1)^2 - 4$. За графіком знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) область значень функції;
- 3) значення x , за яких функція набуває від'ємних значень;
- 4) проміжок зростання функції.

20.16. Побудуйте графік функції $y = (x - 2)^2 - 1$. За графіком знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) область значень функції;
- 3) значення x , за яких функція набуває додатних значень;
- 4) проміжок спадання функції.



20.17. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $1 + \frac{5}{x} = \sqrt{x - 1}$;



2) $|x - 1| = (x + 1)^2$.

20.18. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x + 1} = \frac{9}{x} - 1$;



2) $(x - 2)^2 = |x + 4|$.

20.19. Побудуйте графік функції $y = \frac{x + 4}{x - 2}$. За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності побудови.

20.20. Побудуйте графік функції $y = \frac{x + 5}{x + 1}$. За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності побудови.



20.21. 1) Побудуйте графік функції $y = |x^2 - 4|$.

2) Використовуючи графік, знайдіть усі значення a , за яких рівняння $|x^2 - 4| = a$ має рівно три корені.



Вправи для повторення

20.22. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 3x - 4$;

2) $2x^2 - x - 10$;

3) $-x^2 - 2x + 8$;

4) $-3x^2 + x + 2$.

20.23. Розв'яжіть систему нерівностей

$$\begin{cases} (x + 4)(x - 4) - (x - 3)(x + 1) < -3, \\ \frac{2x - 5}{9} \geq -1. \end{cases}$$

20.24. x_1 та x_2 – корені рівняння $x^2 - 6x + 3 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.



Життєва математика

20.25. Автомобіль, рухаючись на момент початку відліку часу зі швидкістю $v_0 = 28$ м/с, почав гальмувати зі сталим прискоренням $a = 7$ м/с². Через t секунд після початку гальмування він

подолав відстань $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Визначте час, за який від початку гальмування автомобіль подолав 42 м.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

20.26. Виділіть квадрат двочлена із квадратного тричлена:

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 1) $x^2 - 4x + 3$; | 2) $x^2 + 2x$; |
| 3) $-x^2 - 2x - 1$; | 4) $x^2 + 6x - 2$. |

20.27. Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $x^2 - 2x = 0$; | 2) $4x^2 - 36 = 0$; |
| 3) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; | 4) $3x^2 + 2x - 5 = 0$. |

20.28. Для функції $f(x) = x^2 + 4x - 5$ знайдіть:

- | | |
|--------------|--------------|
| 1) $f(-2)$; | 2) $f(-1)$; |
| 3) $f(0)$; | 4) $f(1)$. |

20.29. Закінчіть речення:

- 1) «Графіком функції $y = x^2$ є ...».
- 2) «Гілки параболи $y = x^2$ спрямовані ...».
- 3) «Функція $y = x^2$ спадає на проміжку ...».
- 4) «Функція $y = x^2$ зростає на проміжку ...».



Цікаві задачі – поміркуй одначе

20.30. Відомо, що $x - \frac{1}{x} = 1$. Знайдіть значення виразу:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1) $x^3 - \frac{1}{x^3}$; | 2) $x^4 + \frac{1}{x^4}$. |
|----------------------------|----------------------------|

§ 21. Функція $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Її графік і властивості

1. Означення квадратичної функції

Однією з найважливіших функцій у курсі математики є *квадратична функція*.

Функцію вигляду $y = ax^2 + bx + c$, де x – змінна, a , b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають *квадратичною функцією*.

Математичні моделі багатьох реальних процесів у різноманітних сферах діяльності людини є квадратичними функціями. Насамперед це стосується науки, зокрема фізики та економіки, а також техніки.

Приклад 1. Тіло рухається з прискоренням a м/с² і до початку відліку часу t с пройшло шлях s_0 м, маючи в цей момент швидкість v_0 м/с. Тоді залежність відстані s (у метрах), яку пододало тіло, від часу t (у секундах) під час рівноприскореного руху задають формулою:

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0t + s_0.$$

Наприклад, якщо $a = 6$, $v_0 = 2$, $s_0 = 10$, то $s = 3t^2 + 2t + 10$.

Приклад 2. Залежність між площею використаних земель і валовим прибутком з розрахунку на 10 га сільськогосподарських угідь у деякому фермерському господарстві задається функцією $y \approx -1,5x^2 + 9x + 9$, де x – площа сільськогосподарських угідь (у га), y – валовий прибуток (у тис. грн) на 10 га сільськогосподарських угідь. З якої площі господарство матиме найбільший валовий прибуток на 10 га сільськогосподарських угідь? Яким буде цей прибуток?

Розв'язання. У формулі функції виділимо повний квадрат:

$$-1,5x^2 + 9x + 9 = -1,5(x^2 - 6x - 6) = -1,5(x^2 - 6x + 9 - 9 - 6) = -1,5((x - 3)^2 - 15) = 22,5 - 1,5(x - 3)^2, \text{ тому } y \approx 22,5 - 1,5(x - 3)^2.$$

Вираз, який ми отримали, набуватиме найбільшого значення для $x = 3$.

Отже, господарство матиме найбільший прибуток із площі розміром 3 га.

Цей прибуток є значенням функції $y = 22,5 - 1,5(x - 3)^2$ для $x = 3$, тобто $y = y(3) = 22,5 - 1,5(3 - 3)^2 = 22,5$ (тис. грн). Отже, найбільший прибуток складе 22,5 тис. грн.

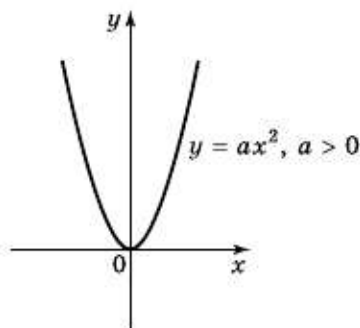
Відповідь: 3 га; 22,5 тис. грн.

2. Графік і властивості функції $y = ax^2$

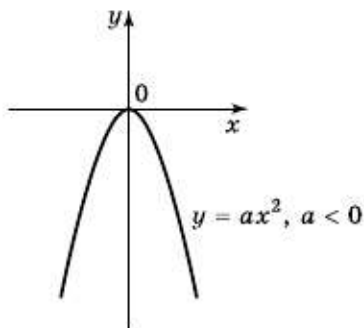
Розглянемо графік і властивості квадратичної функції. Почнемо з її часткового випадку.

Нехай у формулі квадратичної функції $b = c = 0$, тоді маємо функцію $y = ax^2$.

Графіком функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$, є парабола з вершиною в початку координат, гілки якої спрямовані вгору, якщо $a > 0$ (мал. 21.1), і вниз, якщо $a < 0$ (мал. 21.2). Значення $y = 0$ є для функції $y = ax^2$ найменшим, якщо $a > 0$, та найбільшим, якщо $a < 0$.



Мал. 21.1



Мал. 21.2

Систематизуємо властивості у вигляді таблиці.

Властивості функції $y = ax^2, a \neq 0$		
	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Область значень	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Графік	парабола з вершиною $(0; 0)$	
Напрямок гілок	угору	униз
Нулі функції	$x = 0$	
Проміжки знакосталості, $y > 0$	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	–
Проміжки знакосталості, $y < 0$	–	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$
Зростає на проміжку	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$
Найбільше значення функції	–	0
Найменше значення функції	0	–

3. Побудова графіка функції $y = ax^2 + bx + c$

Тепер розглянемо квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Виділимо у тричлені $ax^2 + bx + c$ квадрат двочлена:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = \\
 &= a \left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

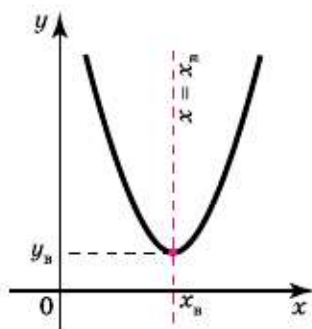
$$\text{Позначимо } x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}, y_{\text{в}} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$$\text{Тоді } y = a(x - x_{\text{в}})^2 + y_{\text{в}}.$$

Отже, графік функції $y = ax^2 + bx + c$ можна отримати з графіка функції $y = ax^2$ за допомогою двох перетворень – перенесень уздовж координатних осей.

Графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола з вершиною в точці $(x_{\text{в}}; y_{\text{в}})$, де $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$,

$$y_{\text{в}} = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ (мал. 21.3).}$$



Мал. 21.3

Якщо $a > 0$, гілки параболи спрямовані вгору, якщо $a < 0$ – униз. Гілки параболи симетричні відносно прямої $x = x_v$. У цьому разі кажуть, що пряма $x = x_v$ є *віссю симетрії* параболи (мал. 21.3).

Зауважимо, що абсцису x_v вершини параболи зручно знаходити за формулою $x_v = -\frac{b}{2a}$, а ординату y_v – підставивши знайдене значення абсциси у формулу $y = ax^2 + bx + c$, тобто $y_v = y(x_v)$.

Будуючи графік функції $f(x) = ax^2 + bx + c$, слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) знайти координати вершини параболи $x_v = -\frac{b}{2a}$, $y_v = f(x_v)$ і позначити її на координатній площині;
- 2) побудувати ще кілька точок параболи і стільки ж точок, симетричних їм відносно прямої $x = x_v$;
- 3) сполучити отримані точки плавною лінією.

4. Властивості функції $y = ax^2 + bx + c$

Систематизуємо властивості у вигляді таблиці.

Властивості функції $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$		
	$a > 0$	$a < 0$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	
Область значень	$[y_v; +\infty)$	$(-\infty; y_v]$
Графік	парабола з вершиною $(x_v; y_v)$	
Напрямок гілок	угору	униз
Нулі функції	корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	
Зростає на проміжку	$[x_v; +\infty)$	$(-\infty; x_v]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; x_v]$	$[x_v; +\infty)$
Найбільше значення функції	–	y_v
Найменше значення функції	y_v	–

Приклад 3. Побудувати графік функції $f(x) = x^2 - 4x - 5$ та описати її властивості.

Розв'язання. Графіком функції є парабола, гілки якої спрямовані вгору. Знайдемо координати її вершини:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2, \quad y_v = f(x_v) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = -9.$$

Отже, точка $(2; -9)$ – вершина параболи, позначимо її на координатній площині. Тоді пряма $x = 2$ є віссю симетрії параболи.

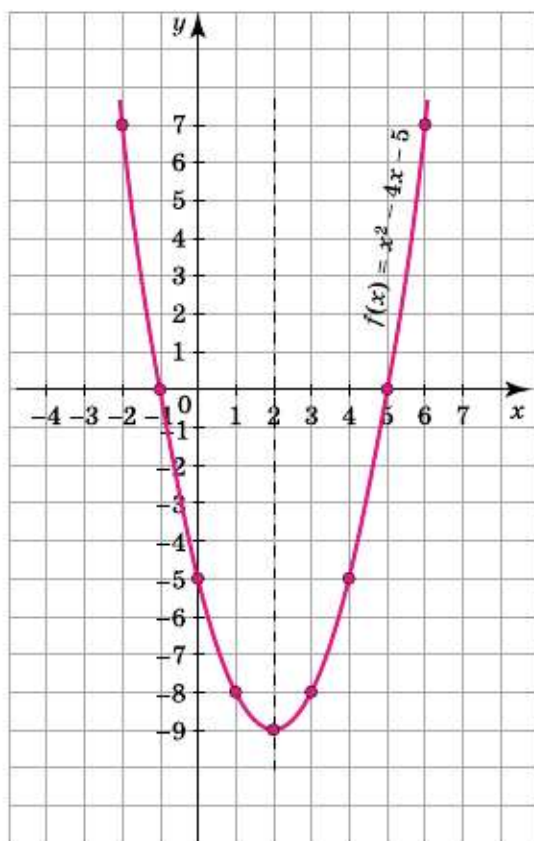
Складемо таблицю значень функції для кількох точок параболи, симетричних відносно її осі симетрії (завдяки симетрії графіка ординати в кожній парі симетричних точок будуть однаковими).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

Позначимо вершину параболи і точки з таблиці на координатній площині. Сполучимо їх плавною лінією та отримаємо графік функції $f(x) = x^2 - 4x - 5$ (мал. 21.4).

Опишемо властивості цієї функції:

- 1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
- 2) $E(f) = [-9; +\infty)$;
- 3) нулі функції: $x = -1$ і $x = 5$;
- 4) $y > 0$, якщо $x < -1$ або $x > 5$; $y < 0$, якщо $-1 < x < 5$;
- 5) функція зростає на проміжку $[2; +\infty)$, спадає на проміжку $(-\infty; 2]$;
- 6) найменше значення функції: $y_{\min} = -9$.



Мал. 21.4

5. Задачі, пов'язані з графіком квадратичної функції

Приклад 4. Вершиною параболи $y = ax^2 + 8x + c$ є точка $A(-2; 4)$.

Знайти a і c .

Розв'язання. Оскільки $x_v = -\frac{b}{2a}$, а за умовою $x_v = -2$, то $-2 = -\frac{8}{2a}$, звідки $a = 2$. Оскільки графік функції проходить через точку $A(-2; 4)$, то, підставивши координати точки у формулу функції, одержимо правильну рівність:

$$4 = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + c, \text{ звідки } c = 12.$$

Відповідь: $a = 2, c = 12$.



Яку функцію називають квадратичною? Сформулюйте властивості функції $y = ax^2$. Що є графіком квадратичної функції? Як його будують? Сформулюйте властивості функції $y = ax^2 + bx + c$.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 21.1. (Усно.) Яка з функцій є квадратичною:

1) $y = -2x^2$;

2) $y = -2x + 5$;

3) $y = 5x^2 - 3x$;

4) $y = \frac{1}{3x^2 - 2x + 5}$;

5) $y = 3x^3 - 2x^2 + 5$;

6) $y = 2x^2 + 3x - 9$?

21.2. Випишіть функції, що є квадратичними:

1) $y = 4x - 7$;

2) $y = 4x^2 - 7x + 5$;

3) $y = 3x^2$;

4) $y = 2x^3 - 3x + 5$;

5) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{7}$;

6) $y = 9x^2 - 7$.

21.3. Графіком якої з наведених функцій є парабола? Укажіть напрямки її гілок.

1) $y = \frac{6}{x}$;

2) $y = 6x^2 - 7$;

3) $y = 6x - 7$;

4) $y = -6x^2 + 5x + 5$;

5) $y = 0,01x^2$;

6) $y = -0,2x^2 - 5x$.

21.4. Чи належить графіку функції $y = x^2 - 3x$ точка:

1) $A(0; 0)$;

2) $B(1; 2)$;

3) $C(2; -3)$;

4) $D(-1; 4)$?

21.5. Чи належить графіку функції $y = x^2 + x$ точка:

1) $A(0; 1)$;

2) $B(2; 6)$;

3) $C(1; 2)$;

4) $D(-1; 1)$?

21.6. Покажіть схематично, як розташовується в координатній площині графік функції:

1) $y = 10x^2$;

2) $y = -15x^2$.

21.7. Покажіть схематично, як розташовується в координатній площині графік функції:

1) $y = -7x^2$;

2) $y = 5x^2$.

- 21.8.** Дано функцію $f(x) = \frac{1}{5}x^2$. 1) Заповніть у зошиті таблицю (за потреби використовуйте табличний процесор, наприклад *Excel*, *Google Sheets*):

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
$f(x)$						

- 2) побудуйте графік функції;
 3) знайдіть за графіком $f(-1,5)$, $f(2,5)$, $f(4,5)$;
 4) знайдіть за графіком такі значення x , що $f(x) = 1$, $f(x) = 3,5$;
 5) знайдіть проміжок зростання і проміжок спадання функції.

- 21.9.** Дано функцію $g(x) = \frac{1}{4}x^2$. 1) Заповніть у зошиті таблицю (за потреби використовуйте табличний процесор, наприклад *Excel*, *Google Sheets*):

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$g(x)$					

- 2) побудуйте графік функції;
 3) знайдіть за графіком $g(-2,5)$, $g(1,5)$, $g(3,5)$;
 4) знайдіть за графіком такі значення x , що $g(x) = 1$, $g(x) = 2,5$;
 5) знайдіть проміжок зростання і проміжок спадання функції.

- 21.10.** Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = -2x^2$ із прямою:

- 1) $y = -8$; 2) $y = 10$; 3) $y = 4x$; 4) $y = -6x$.

- 21.11.** Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = 5x^2$ із прямою:

- 1) $y = 20$; 2) $y = -5$; 3) $y = 10x$; 4) $y = -5x$.

- 21.12.** Визначте напрямок гілок, знайдіть координати вершини та побудуйте схематично графік квадратичної функції:

- 1) $y = x^2 - 8x + 7$; 2) $y = -x^2 + 2x - 3$;
 3) $y = 0,2x^2 - 0,4x + 2$; 4) $y = -2x^2 + 6x - 3$.

- 21.13.** Визначте напрямок гілок, знайдіть координати вершини та побудуйте схематично графік квадратичної функції:

- 1) $y = 3x^2 - 12x + 7$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

- 21.14.** Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка квадратичної функції з осями координат:

- 1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = 2x^2 - x - 3$;
 3) $y = -x^2 + 8x + 9$; 4) $y = -3x^2 - 5x + 2$.

- 21.15.** Не виконуючи побудови, знайдіть точки перетину графіка квадратичної функції з осями координат:

- 1) $y = x^2 + 4x - 5$; 2) $y = -5x^2 - 6x - 1$.

21.16. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 2x$; 2) $y = -x^2 + 6x$;
 3) $y = x^2 + 4x + 5$; 4) $y = -x^2 + 2x + 3$.

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності побудови.

21.17. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 + 4x$; 2) $y = -x^2 + 2x$;
 3) $y = x^2 + 2x + 3$; 4) $y = -x^2 + 4x - 3$.

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності побудови.

3 **21.18.** Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 + 2x - 3$. За графіком знайдіть:

- 1) $f(1)$, $f(-2,5)$, $f(1,5)$;
 2) значення x , за яких $f(x) = 5$, $f(x) = -4$, $f(x) = -2$;
 3) нулі функції;
 4) розв'язки нерівностей: $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$;
 5) найбільше та найменше значення функції;
 6) область значень функції;
 7) проміжки зростання та проміжки спадання функції.

21.19. Побудуйте графік функції $g(x) = -x^2 + 6x - 5$. За графіком знайдіть:

- 1) $g(1)$, $g(2,5)$, $g(4,5)$;
 2) значення x , за яких $g(x) = 4$, $g(x) = -5$, $g(x) = 2$;
 3) нулі функції;
 4) розв'язки нерівностей: $g(x) > 0$, $g(x) \leq 0$;
 5) найбільше та найменше значення функції;
 6) область значень функції;
 7) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

21.20. Графіком квадратичної функції є парабола з вершиною в початку координат, яка проходить через точку $A\left(-2; \frac{1}{3}\right)$. Задайте цю функцію формулою.

21.21. Побудуйте графік квадратичної функції та за графіком знайдіть область значень функції, нулі функції, проміжки знакосталості та проміжки зростання і спадання функції:

- 1) $y = -4x^2 + 8x$; 2) $y = 2x^2 - 8x + 6$;
 3) $y = (x - 1)(x - 5)$; 4) $y = 2(x + 1)(x - 3)$.

21.22. Побудуйте графік квадратичної функції та за графіком знайдіть область значень функції, нулі функції, проміжки знакосталості та проміжки зростання і спадання функції:

- 1) $y = 2x^2 - 6x$; 2) $y = -3x^2 + 12x - 9$.

21.23. Графік функції $y = ax^2 + 2x + 3$ проходить через точку $B(1; -5)$. Знайдіть коефіцієнт a .

21.24. Графік функції $y = 2x^2 + bx + 5$ проходить через точку $A(1; 9)$. Знайдіть коефіцієнт b .

21.25. За яких значень b віссю симетрії параболи $y = x^2 + bx + c$ є пряма:

- 1) $x = -1$; 2) $x = 5$?

Чи впливає на відповідь значення коефіцієнта c ?

21.26. За якого значення a віссю симетрії параболи $y = ax^2 - 6x + 7$ є пряма $x = -1$?

21.27. Знайдіть такі точки параболи:

- 1) $y = x^2 - 6x + 10$, у яких абсциса дорівнює ординаті;
2) $y = x^2 - 7x + 8$, у яких абсциса й ордината – протилежні числа.

21.28. Знайдіть такі точки параболи:

- 1) $y = x^2 - 5x$, у яких абсциса дорівнює ординаті;
2) $y = x^2 + 2x - 10$, у яких абсциса й ордината – протилежні числа.

21.29. Доведіть, що всі точки параболи:

- 1) $y = x^2 - 2x + 3$ лежать вище від осі x ;
2) $y = -x^2 - 4x - 5$ лежать нижче від осі x .

21.30. Знайдіть точки перетину параболи $y = 2x^2 - 7x + 13$ з прямою $y = 2x + 3$.

21.31. Знайдіть точки перетину параболи $y = 5x^2 - 7x - 3$ з прямою $y = -x - 4$.

21.32. Тіло, що падає на землю, за t с долає відстань s м, де $s = \frac{gt^2}{2}$,



$g \approx 10$ м/с². Через який час тіло досягне поверхні землі, якщо в початковий момент воно перебуває на висоті 560 м?



21.33. Із лука випущено стрілу вертикально вгору з початковою швидкістю 50 м/с. Залежність відстані s (у метрах) від стріли до землі від часу польоту t (у секундах) задається формулою $s = 50t - 5t^2$. Побудуйте схематично графік цієї залежності та за ним знайдіть:

- 1) якої найбільшої висоти сягне стріла;
2) проміжок часу, протягом якого вона летіла вгору, та проміжок часу, протягом якого вона падала вниз;
3) через скільки секунд після пуску стріла впала на землю.

21.34. М'яч підкинуто вертикально вгору з початковою швидкістю



15 м/с. Залежність відстані h (у метрах) від м'яча до землі від часу польоту t (у секундах) задається формулою $h = 15t - 5t^2$. Побудуйте схематично графік цієї залежності та за ним знайдіть:

- 1) якої найбільшої висоти сягне м'яч;
2) проміжок часу, протягом якого він рухався вгору, та проміжок часу, протягом якого він падав вниз;
3) через скільки секунд після підкидання м'яч упав на землю.

21.35. За яких значень b і c точка $N(5; 7)$ є вершиною параболи $y = x^2 + bx + c$?

21.36. За яких значень a і c точка $M(-3; -13)$ є вершиною параболи $y = ax^2 + 12x + c$?

21.37. Точка $M(3; -2)$ є вершиною параболи $y = ax^2 + bx + c$, яка перетинає вісь ординат у точці $N(0; 7)$. Знайдіть значення коефіцієнтів a , b і c .

21.38. У боковій стінці високого циліндричного бака біля самого дна закріплено кран. Після його відкриття вода починає витікати з бака, при цьому висота стовпа води в ньому, що виражена в метрах, змінюється за законом $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, де t – час у секундах, що минув з моменту відкриття крана, $H_0 = 5$ м – початкова висота стовпа води, $k = \frac{1}{50}$ – відношення

площ поперечного перерізу крана і бака, $g \approx 10$ м/с² – прискорення вільного падіння. Через скільки секунд після відкриття крана:

- 1) висота стовпа води в баку буде 1,25 м;
- 2) вода з бака повністю витече?

21.39. У боковій стінці високого циліндричного бака біля самого дна закріплено кран. Після його відкриття вода починає витікати з бака, при цьому висота стовпа води в ньому, що виражена в метрах, змінюється за законом $H(t) = at^2 + bt + H_0$, де $H_0 = 8$ м – початковий рівень води, $a = \frac{1}{50}$ м/хв², $b = -\frac{4}{5}$ м/хв – сталі для цього бака. Через скільки секунд після відкриття крана:

- 1) висота стовпа води в баку буде 4,5 м;
- 2) вода з бака повністю витече?

21.40. За якого значення c найбільше значення функції $y = -x^2 + 6x + c$ дорівнює 16?

21.41. За якого значення c найменше значення функції $y = x^2 - 4x + c$ дорівнює 4?

21.42. За яких значень c функція $y = x^2 + 8x + c$ для всіх значень x набуває лише додатних значень?

21.43. За яких значень c функція $y = -x^2 + 2x + c$ для всіх значень x набуває лише від'ємних значень?



21.44. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 6|x| + 5$;
- 2) $y = |x^2 - 6x + 5|$.

21.45. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 4|x| + 3$;
- 2) $y = |x^2 - 4x + 3|$.



Вправи для повторення

21.46. Побудуйте графік функції: 1) $y = \sqrt{x+2}$; 2) $y = \sqrt{x} + 2$.

21.47. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

- 1) $f(x) = 3x^2$ і $g(x) = -6x$;
- 2) $\varphi(x) = x^2 + x$ і $\psi(x) = 2$.

21.48. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{3 + x}{3x^2 + 2x - 5};$$

$$2) y = \sqrt{x - 5}.$$

21.49. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = \frac{6}{x}$ та $y = x + 1$. Накресліть графіки цих функцій і позначте на них знайдені точки.

21.50. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x + 3} = \frac{4}{x} - 2$. За допомогою програми для побудови графіків перевірте правильність розв'язування.

21.51. Знайдіть нулі функції:

$$1) f(x) = (x - 1)(x + 2)\sqrt{|x| - 3};$$

$$2) g(x) = x(x - 3)\sqrt{|x| - 2}.$$



Життєва математика

21.52. В одній із секцій національного мультипредметного тесту (НМТ) із математики, який відбувся 2024 року, взяло участь 20 206 осіб. Завдання № 21 правильно розв'язали лише 5,1 % від кількості учасників. Скільки учасників НМТ правильно розв'язали завдання № 21?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

21.53. Які із чисел $-2, -1, 0, 1, 2$ є розв'язками нерівності:

$$1) x^2 + 2x - 3 > 0;$$

$$2) x^2 + x - 2 \leq 0;$$

$$3) x^2 + x \geq 0;$$

$$4) x^2 - 3x < 0?$$

21.54. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^2 - 3x - 4 = 0;$$

$$2) -2x^2 + 3x + 5 = 0;$$

$$3) x^2 + 18x = 0;$$

$$4) 4x^2 - 9 = 0.$$



Цікаві задачі – поміркуй одначе

21.55. На яке натуральне число слід поділити число 180, щоб остача від ділення становила 25 % від частки?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4 (§§ 18–21)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Дано $f(x) = x^2 - x$. Знайдіть $f(-1)$.

А. -2

Б. 0

В. 2

Г. 1

2. Щоб побудувати графік функції $y = x^2 + 2$, треба графік функції $y = x^2$ перенести на 2 одиниці...

А. вліво

Б. вгору

В. вниз

Г. вправо

3. Укажіть функцію, що є квадратичною:

- А. $y = -2x^2 + 3x + 7$ Б. $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 5}$
 В. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ Г. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

2 4. Знайдіть нулі функції $y = x^2 - 4x$.

- А. 0 Б. 4
 В. 0; -4 Г. 0; 4

5. Укажіть значення x , за якого значення функції $y = 2x + 5$ дорівнюватиме 7.

- А. 7 Б. -1 В. 1 Г. 0

6. Не виконуючи побудови, знайдіть усі точки перетину графіків функцій $y = -3x^2$ та $y = 9x$.

- А. (0; 0) Б. (0; 0), (-3; -27)
 В. (0; 0), (-3; 0) Г. (0; 0), (3; 27)

3 7. Побудуйте схематично графік функції $y = -x^2 + 2x - 3$ та вкажіть область значень цієї функції.

- А. $(-\infty; -2)$ Б. $[-2; +\infty)$
 В. $(-\infty; -2]$ Г. $(-\infty; 2]$

8. Побудуйте схематично графік функції $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$ та вкажіть проміжок зростання цієї функції.

- А. $(-\infty; 4]$ Б. $[-8; +\infty)$
 В. $[-4; +\infty)$ Г. $[4; +\infty)$

9. Укажіть область визначення функції $y = \frac{5}{|x-1|-3}$.

- А. $(-\infty; -2) \cup (-2; 4) \cup (4; +\infty)$
 Б. $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$
 В. $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$
 Г. $(-\infty; +\infty)$

4 10. Укажіть область значень функції $y = 4 - \frac{1}{2}|x|$.

- А. $(-\infty; 4)$ Б. $[4; +\infty)$
 В. $(-\infty; 4]$ Г. $(-\infty; +\infty)$

11. За яких значень a і c точка $M(-1; 4)$ є вершиною параболи $y = ax^2 + 2x + c$?

- А. $a = 1, c = 3$ Б. $a = 1, c = 5$
 В. $a = 1, c = -5$ Г. $a = -1, c = 7$

12. Скільки нулів має функція $y = \frac{(x^2 - 9)\sqrt{|x| - 4}}{x}$?

- А. 1 Б. 2 В. 3 Г. 4

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

- 13.** Установіть відповідність між функцією (1–3) та областю її визначення (А–Г).

Функція

Область визначення функції

1. $y = \frac{15}{1-x^2}$

А. $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

2. $y = \frac{4}{x^2 - 2x - 3}$

Б. $(-1; +\infty)$

В. $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

3. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

Г. $(-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 18–21

- 1.** Для функції $f(x) = x^2 + x$ знайдіть:

1) $f(0)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(-3)$.

- 2.** Як із графіка функції $y = x^2$ отримати графік функції:

1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = (x + 5)^2$?

- 3.** Які з функцій є квадратичними:

1) $y = x^2 - 4x$;

2) $y = \frac{1}{x^2 - 4x}$;

3) $y = x^3 + x + 3$;

4) $y = x^2 + x + 3$?

- 4.** Знайдіть нулі функції:

1) $y = -2x + 7$;

2) $y = x^2 - 5x + 6$.

- 5.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x - 3}$;

2) $y = \sqrt{x} - 3$.

- 6.** Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = -4x^2$ та $y = 2x$.

- 7.** Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{15x}{2x^2 + 3x - 5}$;

2) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{8 - 2x}}$.

- 8.** Побудуйте графік функції $y = x^2 - 2x - 3$. За графіком знайдіть:

1) область значень функції;

2) проміжок зростання і проміжок спадання функції.

- 9.** За яких значень b і c точка $A(2; -1)$ є вершиною параболи $y = 2x^2 + bx + c$?

Додаткові завдання

10. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2} = \frac{6}{x} + 1$ графічно.

11. Скільки нулів має функція $f(x) = x(x^2 - 1)\sqrt{|x| - 2}$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 4

До § 18

1. Знайдіть:

- 1) $f(1)$, $f(2)$, $f(-4)$, якщо $f(x) = x^2 - 1$;
 2) $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$, якщо $g(x) = x^3 + 8$.

2. Укажіть таке значення x (якщо воно існує), за якого значення функції $g(x) = \frac{6}{x}$ дорівнює:

- 1) 6; 2) 1; 3) 0; 4) -100.

3. Чи належить графіку функції $y = 5x - 7$ точка:

- 1) $A(5; -18)$; 2) $B(0; -7)$; 3) $C(-1; -12)$; 4) $D(1; 2)$?

4. Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x^2 + 1}$, де $-3 \leq x \leq 3$, попередньо заповнивши в зошиті таблицю значень:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

5. Наведіть приклад функції, областю визначення якої є:

- 1) множина всіх чисел;
 2) множина всіх чисел, крім числа 3;
 3) множина всіх чисел, крім чисел 2 і 9;
 4) множина всіх чисел, не менших від числа 5.

6. Тіло рухалося прямолінійно. Залежність відстані s (у км), яку воно пододало, від часу t (у год) задано так:

$$s(t) = \begin{cases} 4t, & \text{якщо } 0 \leq t \leq 2; \\ 8, & \text{якщо } 2 < t < 3; \\ 3t - 1, & \text{якщо } 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Знайдіть $s(1)$, $s(2)$, $s(2,5)$, $s(3)$, $s(4)$.

7. Чи належить області значень функції $y = x^2 + 2x$ число:

- 1) 0; 2) -3; 3) -1; 4) 8?

8. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{3}{2|x| + x^2}$; 2) $g(x) = \frac{7x}{2 - \frac{1}{x}}$; 3) $\varphi(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$;

$$4) g(x) = \frac{7}{1 - \frac{1}{|x|}}; \quad 5) \psi(x) = \frac{3}{1 + \frac{1}{|x|}}; \quad 6) p(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{x-5};$$

$$7) \varphi(x) = \sqrt{-x^2}; \quad 8) f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x - 1}; \quad 9) g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}.$$

9. Знайдіть область значень функції:

$$1) f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}; \quad 2) g(x) = \sqrt{-(x-1)^2}; \quad 3) \varphi(x) = \sqrt{4-x^2};$$

$$4) g(x) = \frac{1}{x^2+1}; \quad 5) t(x) = \sqrt{x^2+9} - 5; \quad 6) f(x) = \frac{1}{x^2+2x+5}.$$

10. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

$$1) f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{2x^2 - 2}; \quad 2) g(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}.$$

До § 19

11. Зростаючою чи спадною на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є функція:

$$1) y = \frac{8}{x}; \quad 2) y = -\frac{6}{x}; \quad 3) y = -\frac{0,01}{x}; \quad 4) y = \frac{7,51}{x}?$$

12. Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину графіка функції з осями координат:

$$1) f(x) = 2x - 4; \quad 2) g(x) = \frac{1}{3}x - 6;$$

$$3) \varphi(x) = x^2 - 2x - 3; \quad 4) \psi(x) = \frac{x-1}{x+2}.$$

13. Знайдіть нулі функції (якщо вони існують):

$$1) y = \frac{x-1}{x^2+2x-3}; \quad 2) y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}; \quad 3) y = x\sqrt{x-10}.$$

14. Знайдіть проміжок, на якому функція $f(x) = 3x + 6$ набуває:

1) додатних значень; 2) від'ємних значень.

15. Побудуйте графік функції та вкажіть її властивості:

$$1) g(x) = \frac{8}{|x|}; \quad 2) f(x) = 2|x| - 6.$$

До § 20

16. Як із графіка функції $y = |x|$ отримати графік функції:

$$1) y = |x| + 4; \quad 2) y = |x| - 3; \quad 3) y = |x + 2|;$$

$$4) y = |x - 3|; \quad 5) y = -|x|; \quad 6) y = 3|x|?$$

17. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

$$1) y = 2x, y = 2x - 3, y = 2x + 3;$$

$$2) y = x^2, y = (x-2)^2, y = (x+2)^2.$$

3 18. Побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = |x - 1| + 2$; 2) $y = 3 - |x|$; 3) $y = |x + 2| - 1$;
 4) $y = -|x| - 1$; 5) $y = -4 + |x - 2|$; 6) $y = |x + 1| + 3$.

За допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності побудови.

19. Побудуйте графіки функцій:

- 1) $y = 3\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$; 3) $y = -3\sqrt{x}$; 4) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

4 20. Побудуйте графік функції $y = \frac{12}{x+3} - 4$. За графіком знайдіть:

- 1) область значень функції; 2) нулі функції;
 3) проміжки зростання функції;
 4) проміжки спадання функції;
 5) значення x , за яких функція набуває додатних значень;
 6) значення x , за яких функція набуває від'ємних значень;
 7) за допомогою програми для побудови графіків переконайтеся в правильності визначених властивостей функції.



21. 1) Побудуйте графік функції $y = ||x - 1| - 2|$.

2) Використовуючи графік, знайдіть такі значення a , за яких рівняння $||x - 1| - 2| = a$ має рівно три корені.

3) За допомогою програми для побудови графіків перевірте правильність розв'язування.

До § 21

1 22. Угору чи вниз спрямовані гілки параболи:

- 1) $y = 3x^2 - 2x + 7$; 2) $y = -x^2 + 5x + 9$;
 3) $y = -5x^2$; 4) $y = 0,01x^2 + 5$?

2 23. Чи належить графіку функції $y = 20x^2$ точка:

- 1) $A(\sqrt{2}; 40)$; 2) $B(-0,1; 2)$; 3) $C(-\sqrt{5}; -100)$; 4) $D\left(\frac{1}{2}; 5\right)$?

24. Знайдіть координати вершини параболи:

- 1) $y = x^2 + 2x - 7$; 2) $y = -3x^2 + 9x + 4$.

25. Знайдіть нулі квадратичної функції:

- 1) $y = x^2 + 4x + 3$; 2) $y = -2x^2 - 3x - 1$;
 3) $y = x^2 + 2x - 8$; 4) $y = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

26. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = 2x - x^2$;
 3) $y = x^2 - 2x + 3$; 4) $y = -x^2 + 6x - 8$.

3 27. Побудуйте графік функції $f(x) = 2x^2 + 4x$. За графіком знайдіть:

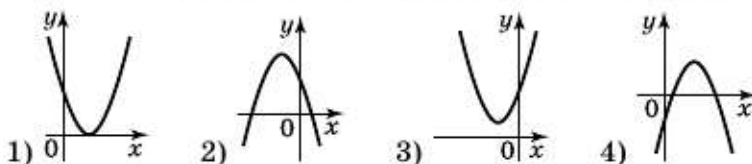
- 1) $f(1)$, $f(-0,5)$, $f(-2,5)$;
 2) значення x , за яких $f(x) = 6$, $f(x) = -2$, $f(x) = 2$;

- 3) нулі функції; 4) розв'язки нерівностей $f(x) < 0$ і $f(x) > 0$;
 5) найбільше і найменше значення функції;
 6) область значень функції;
 7) проміжок зростання і проміжок спадання функції.
28. Графіку функції $y = -2x^2 + 3x + c$ належить точка $A(-1; 4)$. Знайдіть коефіцієнт c .
29. За якого значення a вісь симетрії параболи $y = ax^2 + 8x + 1$ проходить через точку $A(2; -3)$?
30. Знайдіть область значень функції:
 1) $y = \frac{1}{2}x^2$, якщо $x \in [-2; 4]$; 2) $y = -\frac{1}{3}x^2$, якщо $x \in [-9; 3]$.
31. На параболі $y = x^2 - 3x$ знайдіть такі точки, у яких різниця ординати й абсциси дорівнює 5.
32. За яких p і q графік функції $y = x^2 + px + q$ проходить через точки $A(-2; 22)$ і $B(1; 4)$?

4 33. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} -x^2, & \text{якщо } x < -2, \\ 2x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ x^2, & \text{якщо } x > 2; \end{cases} \quad 2) y = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x}.$$

34. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 - 4x + 3 = \frac{12}{x}$. За допомогою програми для побудови графіків перевірте правильність розв'язування.
35. Знайдіть найбільше значення функції $y = -2x^2 + 6x - 5$, областю визначення якої є проміжок: 1) $[0; 2]$; 2) $[2; 4]$.
36. На малюнку 1 зображено графік функції $y = ax^2 + bx + c$. Використовуючи малюнок, для кожного з випадків (1–4) укажіть знаки коефіцієнтів a , b , c та дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.



Мал. 1

37. D – дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Зобразіть схематично графік функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:
 1) $a > 0, b > 0, c > 0, D > 0$; 2) $a < 0, c = 0, -\frac{b}{2a} > 0, D > 0$;
 3) $a < 0, -\frac{b}{2a} < 0, D = 0$; 4) $a > 0, b < 0, D < 0$.
38. За яких значень a функція $y = (a - 1)x^2 + 2x + 7$ набуває додатних значень для будь-якого значення x ?



Головне в темі 4

ФУНКЦІЯ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ І ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Функцією (або **функціональною залежністю**) називають таку залежність, за якої кожному значенню незалежної змінної з деякої множини відповідає єдине значення залежної змінної.

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють **область визначення функції**.

Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють **область значень функції**.

Найбільшим значенням функції називають найбільше число з області значень функції, а **найменшим значенням функції** – відповідно найменше таке число.

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

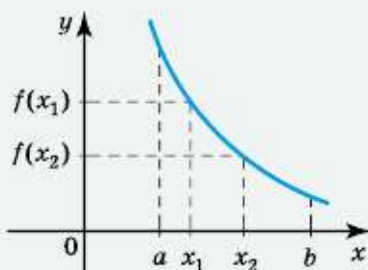
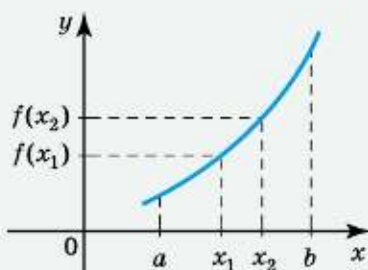
ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ

Значення аргументу, за якого значення функції дорівнює нулю, називають **нулем функції**.

Проміжок, на якому функція зберігає свій знак, називають **проміжком знакосталості функції**.

Функцію називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію називають **спадною** на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.



НАЙПРОСТІШІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Побудова графіка функції $y = f(x) \pm n$, де $n > 0$

Для побудови графіка функції $y = f(x) + n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць угору;

для побудови графіка функції $y = f(x) - n$, де $n > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі y на n одиниць униз.

Побудова графіка функції $y = f(x \pm m)$, де $m > 0$

Для побудови графіка функції $y = f(x - m)$, де $m > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на m одиниць управо;

для побудови графіка функції $y = f(x + m)$, де $m > 0$, достатньо графік функції $y = f(x)$ перенести вздовж осі x на m одиниць уліво.

Побудова графіка функції $y = -f(x)$

Графіки функцій $y = -f(x)$ та $y = f(x)$ симетричні відносно осі x .

Побудова графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$

Для побудови графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, $k \neq 1$, достатньо графік функції $y = f(x)$ розтягнути від осі x у k разів, якщо $k > 1$, або стиснути його до осі x у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$.

ФУНКЦІЯ $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

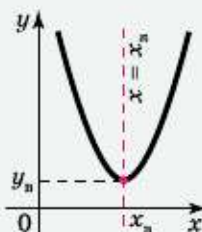
Функцію вигляду $y = ax^2 + bx + c$, де x – змінна, a , b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$, називають **квадратичною функцією**.

Будуючи графік функції $f(x) = ax^2 + bx + c$, слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) знайти координати вершини параболи $x_v = -\frac{b}{2a}$, $y_v = f(x_v)$ і позначити її на координатній площині;

2) побудувати ще кілька точок параболи і стільки ж точок, симетричних їм відносно прямої $x = x_v$;

3) сполучити отримані точки плавною лінією.



ТЕМА 5

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **дізнаєтеся** про теорему косинусів і теорему синусів; про існування різних формул для знаходження площ трикутника і паралелограма;
- **навчитеся** розв'язувати трикутники та прикладні задачі; знаходити площі трикутника, паралелограма, ромба, використовуючи різні формули.

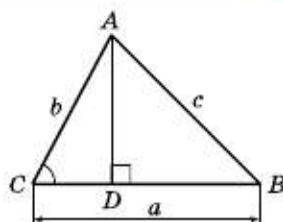
§ 22. Теорема косинусів

1. Теорема косинусів

Доведемо одну з найважливіших теорем про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

Т **Теорема косинусів.** Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC : $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (мал. 22.1). Доведемо, що

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$


Мал. 22.1

Очевидно, що $\angle C$ може бути прямим, гострим або тупим. Розглянемо всі три випадки.

1) Нехай $\angle C$ – прямий. Тоді $\cos C = 0$ і формула, яку потрібно довести, набуває вигляду: $c^2 = a^2 + b^2$, тобто маємо теорему Піфагора для трикутника ABC .

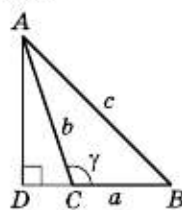
2) Нехай $\angle C$ – гострий. Тоді у трикутнику ABC є ще хоча б один гострий кут, нехай це буде $\angle B$. Проведемо у трикутнику ABC висоту AD . Оскільки кути B і C – гострі, то точка D належить стороні BC . Тоді у прямокутному трикутнику ADC : $AD = b \sin C$, $CD = b \cos C$, а $BD = BC - CD = a - b \cos C$.

У прямокутному трикутнику ADB (за теоремою Піфагора):

$$\begin{aligned} c^2 &= AB^2 = AD^2 + DB^2 = (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2 \\ &= b^2 \sin^2 C + a^2 - 2ab \cos C + b^2 \cos^2 C = \\ &= a^2 + b^2 (\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab \cos C. \end{aligned}$$

Але $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, тому $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

3) Нехай кут $\angle C$ – тупий (мал. 22.2). Позначимо $\angle ACB = \gamma$. Проведемо у трикутнику ABC висоту AD . У цьому разі точка D лежатиме на продовженні променя BC , тому $\angle ACD = 180^\circ - \gamma$.



Мал. 22.2

У прямокутному трикутнику ADC :

$$AD = b \sin ACD = b \sin (180^\circ - \gamma) = b \sin \gamma;$$

$$DC = b \cos ACD = b \cos (180^\circ - \gamma) = -b \cos \gamma.$$

Маємо: $BD = BC + CD = a - b \cos \gamma$. Далі доводимо так, як у разі, коли $\angle C$ – гострий. ■

Зауважимо, що теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів для прямокутного трикутника, тому її інколи називають *узагальненою теоремою Піфагора*.

Отже, у довільному трикутнику ABC виконуються рівності:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C, & b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

2. Використання теореми косинусів для знаходження сторін трикутника

За допомогою теореми косинусів можна, наприклад, знайти невідому сторону трикутника, якщо відомо дві його інші сторони й один з кутів.

Приклад 1. Дано: $\triangle ABC$, $AC = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle C = 60^\circ$.

Знайти: AB .

Розв'язання. Нехай $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ (мал. 22.1).

За теоремою косинусів маємо: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. Тоді

$$c = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{49} = 7 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 7 см.

Приклад 2. Дано: $\triangle ABC$, $AB = 7$ см, $BC = 5$ см, $\angle C = 120^\circ$.

Знайти: AC .

Розв'язання. Нехай $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (мал. 22.2).

1) За теоремою косинусів маємо: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, тобто $7^2 = 5^2 + b^2 - 2 \cdot 5 \cdot b \cdot \cos 120^\circ$.

2) Спростивши останню рівність, отримаємо квадратне рівняння $b^2 + 5b - 24 = 0$, розв'язавши яке, матимемо: $b_1 = 3$, $b_2 = -8$.

Число -8 не задовольняє змісту задачі, оскільки $b > 0$. Отже, $AC = 3$ см.

Відповідь: 3 см.

3. Використання теореми косинусів для знаходження кутів трикутника

Якщо відомо три сторони трикутника, то за теоремою косинусів можна знайти косинус будь-якого з його кутів, а отже, і сам кут.

Наприклад, косинус кута C можна знайти за формулою, виразивши $\cos C$ із формули теореми косинусів:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Приклад 3. Знайти міру найбільшого з кутів трикутника, довжини сторін якого дорівнюють $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ і 4 см.

Розв'язання. 1) Оскільки у трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, то найбільшим кутом трикутника буде кут, що лежить проти сторони 4 см завдовжки.

2) Нехай $a = \sqrt{2}$ см, $b = \sqrt{8}$ см, $c = 4$ см.

Тоді за формулою косинуса кута маємо:

$$\cos C = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{8})^2 - 4^2}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = -\frac{3}{4}.$$

3) Використовуючи калькулятор (або таблиці), знайдемо, що $\angle C \approx 138^\circ 35'$.

Відповідь: $138^\circ 35'$.

Отже, теорема косинусів допомагає розв'язувати трикутники.

4. Використання теореми косинусів для визначення виду трикутника відносно кутів

Теорема косинусів є зручною і для визначення виду трикутника. Щоб установити гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник, досить знайти знак косинуса його найбільшого кута. З формули косинуса кута зрозуміло, що знак косинуса кута залежить від знака чисельника дробу, оскільки знаменник завжди додатний. Тому знак виразу $a^2 + b^2 - c^2$ дає змогу визначити знак косинуса кута трикутника, а отже, і вид цього кута (гострий, прямий чи тупий).

Якщо c – найбільша сторона трикутника, то для з'ясування виду трикутника достатньо порівняти з нулем значення виразу $a^2 + b^2 - c^2$. Отже,

якщо c – найбільша сторона трикутника і

$a^2 + b^2 - c^2 > 0$, то $\angle C$ – гострий, а трикутник – гострокутний;

$a^2 + b^2 - c^2 = 0$, то $\angle C$ – прямий, а трикутник – прямокутний;

$a^2 + b^2 - c^2 < 0$, то $\angle C$ – тупий, а трикутник – тупокутний.

Приклад 4. Визначити вид трикутника зі сторонами $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 7$ см.

Розв'язання. $a^2 + b^2 - c^2 = 4^2 + 6^2 - 7^2 = 3 > 0$, отже, трикутник гострокутний.

Відповідь: гострокутний.

5. Властивість сторін і діагоналей паралелограма

Розглянемо важливу властивість сторін і діагоналей паралелограма.



Приклад 5. Довести, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Доведення. Нехай $ABCD$ – паралелограм, $AB = a$, $AD = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$ (мал. 22.3).

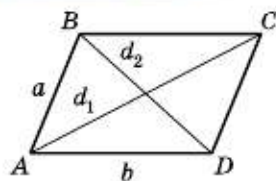
1) З трикутника ABD за теоремою косинусів:

$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle BAD.$$

2) З трикутника ABC за теоремою косинусів:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ABC = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \angle BAD) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \angle BAD.$$

3) Додавши почленно ці дві рівності, маємо: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. ■



Мал. 22.3

6. Формула для знаходження довжини медіани через сторони трикутника



Приклад 6. AM – медіана трикутника ABC . Довести формулу медіани трикутника:

$$AM = m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Розв'язання. 1) Продовжимо медіану AM на відрізок $MD = AM$ (мал. 22.4).

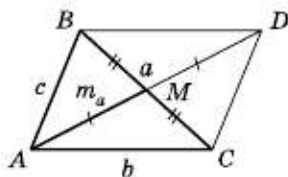
2) Оскільки в чотирикутнику $ABDC$ $AM = MD$ (за побудовою) і $BM = MC$ (за умовою), то $ABDC$ – паралелограм (за ознакою). Тоді $AD = 2m_a$.

3) За доведеною вище властивістю діагоналей паралелограма маємо: $AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$, тобто $(2m_a)^2 + a^2 = 2(c^2 + b^2)$.

Звідки: $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$, тоді $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Отже,

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \quad \blacksquare$$



Мал. 22.4

Зауважимо, що в деяких задачах, зокрема тих, розв'язування яких зводиться до розв'язування рівнянь, доцільно використовувати формулу медіани трикутника у вигляді:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

А ще раніше...

Можна вважати, що теорему косинусів було доведено ще в «Началах» Евкліда. У 12-му та 13-му реченнях другої книги Евклід узагальнює теорему Піфагора і виводить формулу, якою записує квадрат сторони, яка лежить проти гострого або тупого кута трикутника. Ці формули для кожної зі сторін, які довів Евклід, еквівалентні формулам теореми косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Формули, подібні до цих, використовували також александрійські математики Герон (I ст.) і Пап (III ст.), учені Індії (Брахмагупта, Бхаскара) та країн Близького та Середнього Сходу (Аль-Біруні), а також деякі європейські математики XIII–XV ст., зокрема Леонардо Пізанський (Фібоначчі).

Уперше теорему косинусів сформулював словами видатний математик Франсуа Вієт у своїй праці «Математичні таблиці» (1579 р.). У сучасних же позначеннях відповідну формулу Вієта можна записати так:

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{\sin(90^\circ - C)}.$$

Сучасного вигляду теоремі косинусів 1801 р. надав французький математик Лазар Карно (1753–1823).

- ? Сформулюйте і доведіть теорему косинусів. ○ Запишіть рівності, що випливають із теореми косинусів. ○ Як знайти косинус кута трикутника, якщо відомо три його сторони? ○ Як визначити вид трикутника, якщо відомо три його сторони?



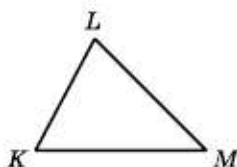
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 22.1. Запишіть теорему косинусів для:

- 1) сторони MN трикутника MNL ;
- 2) сторони PF трикутника PFT .

22.2. На малюнку 22.5 зображено $\triangle KLM$. Які з рівностей є правильними:

- 1) $LM^2 = KL^2 + KM^2 + 2KL \cdot KM \cdot \cos K$;
- 2) $KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2KL \cdot LM \cdot \cos L$;
- 3) $KL^2 = KM^2 + ML^2 - 2KM \cdot ML \cdot \cos K$;
- 4) $LM^2 = KL^2 + KM^2 - 2KL \cdot KM \cdot \cos K$?



Мал. 22.5

22.3. Запишіть формули для обчислення косинусів кутів K і M трикутника KLM (мал. 22.5), вважаючи, що його сторони відомо.

2 22.4. Знайдіть сторону AB трикутника ABC , якщо:

1) $AC = 13$ см, $BC = 4$ см, $\cos C = -\frac{5}{13}$; **Б**

2) $AC = 7$ см, $BC = 3$ см, $\cos C = \frac{1}{3}$; **О**

3) $BC = 10$ см, $CA = 16$ см, $\angle C = 60^\circ$; **Л**

4) $BC = 7\sqrt{3}$ см, $CA = 1$ см, $\angle C = 150^\circ$. **Г**

Підставте отримані літери в таблицю, відтак дізнаєтеся прізвище письменника українського походження, продовжувача давнього козацького роду. Дізнайтеся про його внесок в українську літературу, культуру та фольклор.



13 см	$2\sqrt{11}$ см	13 см	$2\sqrt{11}$ см	14 см	15 см

22.5. Знайдіть сторону BC трикутника ABC , якщо:

1) $AC = 11$ см, $AB = 20$ см, $\cos A = \frac{4}{5}$;

2) $AC = 4$ см, $AB = 3$ см, $\cos A = -\frac{1}{4}$;

3) $AC = 5\sqrt{3}$ см, $AB = 13$ см, $\angle A = 30^\circ$;

4) $AC = 3$ см, $AB = 5$ см, $\angle A = 120^\circ$.

22.6. Сторони паралелограма дорівнюють 4 см і 5 см, а кут між ними – 60° . Знайдіть діагоналі паралелограма.

22.7. Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 4 см, а кут між ними – 120° . Знайдіть діагоналі паралелограма.

22.8. Знайдіть косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, 6 см і 7 см.

22.9. Знайдіть косинуси кутів трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 5 см і 8 см.

22.10. У трикутнику ABC $AB = 1$ см, $BC = 2$ см, $AC = \sqrt{3}$ см. Знайдіть градусну міру кожного з кутів трикутника.

22.11. У трикутнику ABC $AB = \sqrt{2}$ см, $BC = 2$ см, $AC = \sqrt{10}$ см. Знайдіть градусну міру найбільшого кута трикутника.

22.12. Знайдіть градусну міру найменшого кута трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 8 см і $4\sqrt{3}$ см.

22.13. Визначте вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), якщо відомо три його сторони:

1) 4 см, 5 см і 6 см; 2) 6 см, 8 см і 10 см;

3) 7 см, 8 см і 13 см; 4) 5 см, 5 см і 8 см.

22.14. Визначте вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), якщо відомо три його сторони:

1) 2 см, 8 см і 9 см; 2) 7 см, 24 см і 25 см;

3) 4 см, 7 см і 8 см; 4) 5 см, 5 см і 6 см.

22.15. Дві сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 7 см, а одна з діагоналей – 8 см. Знайдіть другу діагональ паралелограма.

22.16. Діагоналі паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см, а одна зі сторін – 4 см. Знайдіть другу сторону паралелограма.

22.17. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 24 см і 26 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до більшої сторони.

22.18. Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 6 см і 7 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до меншої сторони.

3 22.19. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см. Дві інші його сторони утворюють кут 60° , а їхня різниця дорівнює 3 см. Знайдіть периметр трикутника.

22.20. Сторони трикутника, одна з яких на 4 см більша за другу, утворюють кут 120° , а третя сторона дорівнює 14 см. Знайдіть периметр трикутника.

- 22.21.** Дві сторони трикутника відносяться як 3:5, а кут між ними дорівнює 120° . Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.
- 22.22.** Периметр трикутника дорівнює 60 см. Дві його сторони відносяться як 5:8, а кут між ними дорівнює 60° . Знайдіть сторони трикутника.
- 22.23.** Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 8 см, а кут проти меншої з них – 60° . Знайдіть третю сторону трикутника.
- 22.24.** Дві сторони трикутника дорівнюють $3\sqrt{2}$ см і 5 см, а кут проти більшої з них – 45° . Знайдіть третю сторону трикутника.
- 22.25.** Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо вони відносяться як 4:7, а сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 9 см.
- 22.26.** Знайдіть сторони паралелограма, якщо вони відносяться як 2:3, а діагоналі паралелограма дорівнюють 17 см і 19 см.
- 22.27.** Діагоналі паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а одна зі сторін на 1 см більша за другу. Знайдіть периметр паралелограма.
- 22.28.** Одна з діагоналей паралелограма на 2 см більша за другу. Знайдіть ці діагоналі, якщо сторони паралелограма дорівнюють 7 см та 11 см.
- 22.29.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см, а медіана, проведена до неї, – 3 см. Знайдіть основу трикутника.
- 22.30.** Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 4 см. Знайдіть третю сторону трикутника.
- 22.31.** Доведіть, що коли для трикутника ABC справджується рівність $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, то $\angle A = 60^\circ$.
- 22.32.** Доведіть, що коли для трикутника ABC справджується рівність $b^2 = a^2 + c^2 + ac$, то $\angle B = 120^\circ$.
- 22.33.** Одна зі сторін трикутника дорівнює 13 см. Сума двох інших сторін дорівнює 23 см. Знайдіть ці сторони, якщо вони утворюють кут 60° .
- 22.34.** Середня за довжиною сторона трикутника на 1 см більша за меншу сторону і на 1 см менша від більшої сторони. Косинус середнього за величиною кута трикутника дорівнює $\frac{2}{3}$. Знайдіть периметр трикутника.
- 4** **22.35.** Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 12 см, а синус кута між ними дорівнює 0,6. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?
- 22.36.** Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 7 см, а синус кута між ними дорівнює 0,8. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?
- 22.37.** Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см та 11 см, а медіана, проведена до третьої сторони, на 8 см менша від цієї сторони. Знайдіть периметр трикутника.

- 22.38. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см, а медіана, проведена до третьої сторони, відноситься до цієї сторони як 2 : 7. Знайдіть периметр трикутника.
- 22.39. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см. На сторонах AB і AC узяті такі точки M і N відповідно, що $AM = 3$ см, $AN = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка MN .
- 22.40. У трикутнику KLM $KL = 7$ см, $KM = 9$ см, $LM = 11$ см. На сторонах KL і KM узяті такі точки A і B відповідно, що $KA = 2$ см, $KB = 3$ см. Знайдіть довжину відрізка AB .
- 22.41. У трикутнику ABC $AB = 20$ см, AP і BN – медіани трикутника, $AP = 42$ см, $BN = 36$ см. Знайдіть третю медіану трикутника.
- 22.42. Більша діагональ ромба дорівнює d , а один з його кутів дорівнює 60° . Знайдіть периметр ромба.



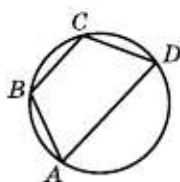
Вправи для повторення

- 22.43. $\triangle ABC$ – прямокутний ($\angle C = 90^\circ$). Знайдіть невідомі сторони (з точністю до сотих сантиметра) та кути трикутника, якщо:
- 1) $AB = 12$ см, $\angle A = 37^\circ$;
 - 2) $BC = 16$ см, $\angle B = 49^\circ$.
- 22.44. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Знайдіть:
- 1) $\vec{a}\vec{b}$;
 - 2) $\vec{a}(\vec{a} + \vec{b})$;
 - 3) $\vec{b}(\vec{a} - \vec{b})$;
 - 4) $\vec{a}(2\vec{a} + 5\vec{b})$.
- 22.45. Хорда 30 см завдовжки перпендикулярна до діаметра й ділить його на відрізки у відношенні 1 : 9. Знайдіть радіус кола.
- 22.46. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 40 см, а висота, проведена до основи, – 10 см. Знайдіть площу трикутника.
- 22.47. Кут між медіаною і висотою, проведеними з вершини прямого кута прямокутного трикутника, дорівнює α . Знайдіть катети трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює c .

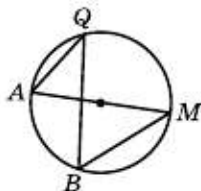


Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

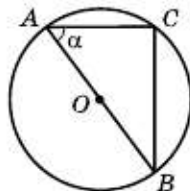
- 22.48. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло (мал. 22.6). Знайдіть $\angle A$, якщо $\angle C = 130^\circ$.
- 22.49. На малюнку 22.7 $\angle AQB = 40^\circ$. Знайдіть $\angle AMB$.



Мал. 22.6



Мал. 22.7



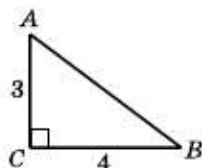
Мал. 22.8

- 22.50. AB – діаметр кола, $\angle BAC = \alpha$, $OB = R$ (мал. 22.8). Знайдіть BC .

22.51. Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$ (мал. 22.9). Знайти:

- 1) AB ;
- 2) $\sin A$, $\sin B$;
- 3) радіус описаного кола R ;
- 4) відношення $\frac{AB}{\sin C}$, $\frac{AC}{\sin B}$, $\frac{BC}{\sin A}$.

Переконайтеся, що $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R$.



Мал. 22.9



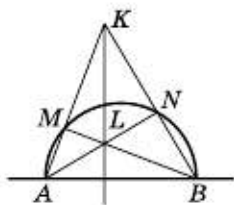
Життєва математика

- 22.52. 1) Скільки гумових плиток, що мають форму квадрата зі стороною 0,5 м, потрібно для покриття підлоги в тренажерному залі, що має форму прямокутника 8,5 м завдовжки і 4,5 м завширшки?
- 2) Скільки потрібно заплатити за цю плитку, якщо ціна однієї плитки 124 грн?



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 22.53. На відрізку AB , як на діаметрі, побудовано півколо (мал. 22.10). Промені AK і BK перетинають півколо відповідно в точках M і N , AN і BM перетинаються в точці L . Знайдіть кут між прямими KL і AB .



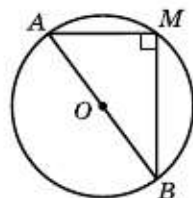
Мал. 22.10

§ 23. Теорема синусів

1. Теорема синусів та її наслідок

Лема. Якщо AB – хорда кола, радіус якого дорівнює R , а M – будь-яка точка кола, то

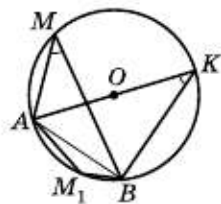
$$\frac{AB}{\sin \angle AMB} = 2R.$$



Мал. 23.1

Доведення. 1) Якщо $AB = 2R$ – діаметр кола (мал. 23.1), то $\angle AMB = 90^\circ$ для будь-якого розташування точки M на колі. Тоді, урахувавши співвідношення у прямокутному трикутнику,

$$\frac{AB}{\sin \angle AMB} = \frac{2R}{\sin 90^\circ} = 2R.$$



Мал. 23.2

2) Нехай AB – не є діаметром кола, а M – точка, що належить більшій дузі кола (мал. 23.2). Проведемо діаметр AK . Тоді $\angle AMB = \angle AKB$ (як вписані, що спи-

раються на одну й ту саму дугу). $\angle ABK = 90^\circ$ (як кут, що спирається на діаметр).

У трикутнику ABK ($\angle B = 90^\circ$):

$$\sin \angle AKB = \frac{AB}{AK}, \text{ тому } \sin \angle AMB = \frac{AB}{2R}, \text{ звідки } \frac{AB}{\sin \angle AMB} = 2R.$$

3) Нехай AB – не є діаметром, а точка M_1 належить меншій дузі кола, тоді $\angle M + \angle M_1 = 180^\circ$. Маємо:

$$\angle AM_1B = 180^\circ - \angle AMB,$$

$$\text{тому } \sin \angle AM_1B = \sin(180^\circ - \angle AMB) = \sin \angle AMB.$$

Отже, у цьому разі також справджується рівність

$$\frac{AB}{\sin \angle AMB} = 2R. \quad \blacksquare$$

Тепер доведемо важливу теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.



Теорема синусів. Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних до них кутів.

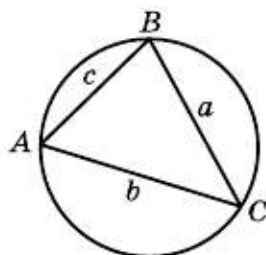
Доведення. Нехай ABC – довільний трикутник, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (мал. 23.3). Доведемо, що

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Опишемо коло радіуса R навколо цього трикутника. За доведеною лемою:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$\text{Отже, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad \blacksquare$$



Мал. 23.3



Наслідок (узагальнена теорема синусів). У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного їй кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = D.$$

Скориставшись теоремою синусів, можна довести відоме з курсу геометрії 7 класу твердження:

У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона.

Доведіть це твердження самостійно.

2. Знаходження елементів трикутника за допомогою теореми синусів

За допомогою теореми синусів можна знаходити невідомі елементи трикутника. Наприклад, за двома даними кутами трикутника і стороною, що лежить проти одного з них, можна знайти сторону, що лежить проти другого кута.

Приклад 1. Дано: $\triangle ABC$ $BC = 7\sqrt{2}$ см, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Знайти сторону AC .

Розв'язання. За теоремою синусів маємо (мал. 23.3):

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}, \text{ тобто } \frac{7\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ};$$

$$\text{звідки } AC = \frac{7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 7\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $7\sqrt{3}$ см.

Також за двома сторонами трикутника і кутом, що лежить проти однієї з них, можна знайти кут, що лежить проти другої сторони.

Приклад 2. У трикутнику ABC : $AB = 1$ см, $BC = \sqrt{2}$ см. Знайти $\angle A$, якщо: 1) $\angle C = 45^\circ$; 2) $\angle C = 30^\circ$.

Розв'язання. Позначимо $AB = c$, $BC = a$.

1) За теоремою синусів маємо:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \text{ тобто } \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A},$$

звідки $\sin A = \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 1$. Тоді $\angle A = 90^\circ$.

$$2) \text{ Аналогічно } \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \text{ тобто } \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin A},$$

$$\text{звідки } \sin A = \sqrt{2} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Маємо: $\angle A = 45^\circ$ або $\angle A = 135^\circ$. Зауважимо, що в обох випадках $\angle A + \angle C < 180^\circ$, тому задача має два розв'язки.

Відповідь: 1) 90° ; 2) 45° або 135° .

3. Застосування узагальненої теореми синусів для знаходження радіуса кола, описаного навколо трикутника

Задачі, у яких потрібно знайти радіус кола, описаного навколо трикутника, часто можна розв'язати за допомогою наслідку з теореми синусів (узагальненої теореми синусів).

Приклад 3. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 5 см, $\sqrt{7}$ см і $2\sqrt{3}$ см.

Розв'язання. Нехай $a = 5$ см, $b = \sqrt{7}$ см, $c = 2\sqrt{3}$ см.

1) Знайдемо косинус кута B :

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тому $\angle B = 30^\circ$.

2) За узагальненою теоремою синусів $\frac{b}{\sin B} = 2R$, тому

$$R = \frac{\sqrt{7}}{2 \sin 30^\circ} = \sqrt{7} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $\sqrt{7}$ см.

А ще раніше...

Індійські вчені, як і вчені з мусульманських країн, у IX–X ст. зводили розв'язування трикутників до розв'язування прямокутних трикутників, отже, не мали потреби в теоремі синусів, тому і не знали її. Теорему синусів довів лише в XI ст. математик та астроном Аль-Біруні. А вже з XVI ст. її починають використовувати європейські математики.

1799 р. французький математик Жан-Луї Лагранж (1736–1813) вивів теорему синусів із теореми косинусів. Інший французький математик Огюстен-Луї Коші (1789–1857) у своїй праці «Курс аналізу», що була опублікована 1821 р., вивів теорему косинусів із теореми синусів.



Аль-Біруні
(973–1048)

? Сформулюйте і доведіть лему, подану в цьому параграфі. **○** Сформулюйте і доведіть теорему синусів. **○** Сформулюйте наслідок із теореми синусів.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 23.1. У трикутнику проти сторони a лежить кут 50° , а проти сторони b – кут 40° . Які з рівностей правильні:

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{a}{\cos 50^\circ} = \frac{b}{\cos 40^\circ};$ | 2) $\frac{a}{\sin 50^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ};$ |
| 3) $\frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{b}{\sin 50^\circ};$ | 4) $\frac{a}{b} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 40^\circ}?$ |

23.2. У трикутнику проти сторони b лежить кут 80° , а проти сторони c – кут 70° . Заповніть порожні клітинки:

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{b}{\sin \square} = \frac{c}{\sin \square};$ | 2) $\frac{b}{c} = \frac{\sin \square}{\sin \square}.$ |
|---|---|

- 23.3. У трикутнику ABC $\sin A = 0,2$, $\sin B = 0,4$, $a = 10$ см. Знайдіть b .
- 23.4. У трикутнику ABC $a = 2$ см, $b = 6$ см, $\sin A = 0,3$. Знайдіть $\sin B$.
- 2** 23.5. У трикутнику ABC $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Знайдіть відношення сторони BC до сторони AC .
- 23.6. У трикутнику ABC $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Знайдіть відношення сторони AC до сторони AB .
- 23.7. У трикутнику OKP $OP = 3\sqrt{2}$ см, $\angle K = 30^\circ$, $\angle P = 45^\circ$. Знайдіть OK .
- 23.8. У трикутнику OKP $OK = 4\sqrt{3}$ см, $\angle K = 60^\circ$, $\angle P = 30^\circ$. Знайдіть OP .
- 23.9. У трикутнику ABC $AB = \sqrt{2}$ см, $\angle A = 15^\circ$, $\angle C = 135^\circ$. Знайдіть AC .
- 23.10. У трикутнику ABC $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 15^\circ$, $BC = 8\sqrt{3}$ см. Знайдіть AB .
- 23.11. У трикутнику ABC $AB = 7\sqrt{3}$ см, $\angle C = 120^\circ$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.
- 23.12. У трикутнику ABC $BC = 6$ см, $\angle A = 30^\circ$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.
- 23.13. За допомогою наслідку з теореми синусів знайдіть радіус кола, описаного навколо:
- 1) рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює a ;
 - 2) прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c .
- 23.14. За допомогою наслідку з теореми синусів знайдіть сторони рівностороннього трикутника за радіусом R описаного кола.
- 23.15. Доведіть, що в будь-якому трикутнику сторона, що лежить проти кута 30° , дорівнює радіусу кола, описаного навколо цього трикутника.
- 23.16. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 18 см, а прилеглий до нього кут – 30° .
- 3** 23.17. У трикутнику ABC $AB = \sqrt{2}$ см, $AC = 1$ см, $\angle C = 45^\circ$. Знайдіть $\angle B$.
- 23.18. У трикутнику ABC $AB = 1$ см, $BC = \sqrt{2}$ см, $\angle A = 135^\circ$. Знайдіть $\angle C$.
- 23.19. У трикутнику ABC $BC = \sqrt{3}$ см, $AB = \sqrt{2}$ см, $\angle C = 45^\circ$. Знайдіть $\angle A$.
- 23.20. У трикутнику ABC $AC = 2$ см, $BC = \sqrt{2}$ см, $\angle A = 30^\circ$. Знайдіть $\angle B$.
- 23.21. Сторона трикутника відноситься до радіуса описаного навколо трикутника кола як $\sqrt{2}:1$. Знайдіть кут, що лежить проти цієї сторони.
- 23.22. Сторона трикутника дорівнює радіусу описаного навколо нього кола. Знайдіть кут, що лежить проти цієї сторони.
- 23.23. Радіус описаного навколо рівнобічної трапеції кола дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину діагоналі трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 135° .

- 23.24. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 8 см, а кут між ними – 60° . Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.
- 23.25. Дві сторони трикутника дорівнюють $2\sqrt{3}$ см і 4 см, а кут між ними – 30° . Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.
-  23.26. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, у якого кут при основі дорівнює 30° , а основа більша за бічну сторону на 2 см.
- 23.27. Сторона AB трикутника ABC на 1 см більша за сторону AC . Знайдіть сторони AB і AC , якщо $\angle C = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.
- 23.28. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 8 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо вона відноситься до радіуса описаного кола як $\sqrt{3} : 1$. Скільки розв'язків має задача?
- 23.29. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює d і ділить його кут на частини, міри яких дорівнюють α і β . Знайдіть периметр паралелограма.
- 23.30. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює m , а кут при основі – α . Знайдіть довжину бісектриси кута при основі.
- 23.31. У прямокутному трикутнику довжина гіпотенузи дорівнює c , а градусна міра одного з гострих кутів – α . Знайдіть довжину бісектриси трикутника, що виходить з вершини прямого кута.



Вправи для повторення

- 23.32. Два кути трикутника дорівнюють 37° і 62° . Знайдіть усі зовнішні кути трикутника.
- 23.33. Один з кутів паралелограма вдвічі менший від іншого. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 5 см і 8 см.
- 23.34. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює a , а одна з діагоналей – d .
- 23.35. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a см і b см. Знайдіть відношення площ, на які ділить трикутник висота, проведена до гіпотенузи.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 23.36. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$. Розв'яжіть трикутник, якщо:
- 1) $AB = 8$ см, $\angle A = 30^\circ$;
 - 2) $AC = 4$ см, $\angle B = 45^\circ$;
 - 3) $AC = 10$ см, $\angle A = 60^\circ$;
 - 4) $AC = 2$ см, $BC = 2\sqrt{3}$ см;
 - 5) $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{3}$ см;
 - 6) $AC = 3$ см, $AB = 6$ см.

23.37. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$. Розв'яжіть цей трикутник (сторони в завданнях 1)–3) знайдіть із точністю до сотих сантиметра, гострі кути у завданнях 4)–6) – із точністю до градуса).

1) $AB = 10$ см, $\angle B = 37^\circ$;

2) $BC = 7$ см, $\angle A = 83^\circ$;

3) $BC = 6$ см, $\angle B = 18^\circ$;

4) $AC = 10$ см, $BC = 6$ см;

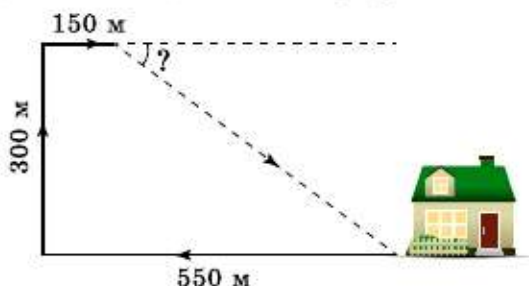
5) $AB = 8$ см, $AC = 5$ см;

6) $BC = 3$ см, $AB = 7$ см.



Життєва математика

23.38. Яся на моноколесі від будинку в напрямку на захід пройшла 550 м. Потім повернула на північ і пройшла 300 м. Після цього повернула на схід і подолала ще 150 м. Під яким кутом до напрямку на схід вона має рухатися, щоб повернутися додому? У відповіді вкажіть ціле число градусів.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

23.39. (Всеукраїнська математична олімпіада, 1965 р.) З деякої точки кола, описаного навколо прямокутника, проведено перпендикуляри до його діагоналей. Довести, що відстань між основами цих перпендикулярів не залежить від положення точки на колі.

§ 24. Розв'язування трикутників. Прикладні задачі

1. Розв'язування трикутників. Загальні формули та факти

Нагадаємо, що розв'язати трикутник – означає знайти невідомі його сторони і кути за якими-небудь відомими сторонами і кутами. Раніше ми розв'язували прямокутні трикутники.

Під час розв'язування довільного трикутника ABC , де $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (мал. 24.1), використовують такі співвідношення:

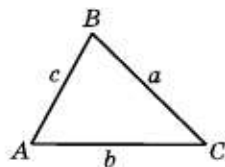
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ;$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ (теорема косинусів);}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ (теорема синусів).}$$



Мал. 24.1

Розглянемо чотири види задач на розв'язування трикутників. Невідомі сторони будемо знаходити з точністю до сотих, а невідомі кути – із точністю до мінути.

2. Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом між ними

Приклад 1. Дано сторони трикутника a і b та кут C між ними. Знайти сторону c та кути A і B .

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
<p>Дано: $a, b, \angle C$. Знайти: $c, \angle A, \angle B$. Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. <p>Далі знаходимо кут A за допомогою калькулятора або таблиць.</p> <ol style="list-style-type: none"> $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$. 	<p>Дано: $a = 4, b = 7, \angle C = 40^\circ$. Знайти: $c, \angle A, \angle B$. Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $c = \sqrt{4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cos 40^\circ} \approx 4,70$. $\cos A \approx \frac{7^2 + 4,7^2 - 4^2}{2 \cdot 7 \cdot 4,7} \approx 0,8372$, $\angle A \approx 33^\circ 09'$. $\angle B \approx 180^\circ - (33^\circ 09' + 40^\circ) = 106^\circ 51'$.

3. Розв'язування трикутників за стороною і двома кутами

Приклад 2. Дано сторону трикутника a і кути B і C . Знайти сторони трикутника b і c і кут A .

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
<p>Дано: $a, \angle B, \angle C$. Знайти: $\angle A, b, c$. Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)$. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$; $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$. $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$. 	<p>Дано: $a = 8, \angle B = 40^\circ, \angle C = 80^\circ$. Знайти: $\angle A, b, c$. Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $\angle A = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$. $b = \frac{8 \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 5,94$. $c = \frac{8 \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 9,10$.

4. Розв'язування трикутників за трьома сторонами

Приклад 3. Дано три сторони a , b і c трикутника ($|b - c| < a < b + c$). Знайти три кути A , B і C трикутника.

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
<p>Дано: a, b, c. Знайти: $\angle A, \angle B, \angle C$. Розв'язання.</p> <p>1. $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Далі знаходимо кут A за допомогою калькулятора або таблиць.</p> <p>2. $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Далі знаходимо кут B за допомогою калькулятора або таблиць.</p> <p>3. $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$.</p>	<p>Дано: $a = 7, b = 8, c = 9$. Знайти: $\angle A, \angle B, \angle C$. Розв'язання.</p> <p>1. $\cos A = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2}{3}$; $\angle A \approx 48^\circ 11'$.</p> <p>2. $\cos B = \frac{7^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{11}{21}$; $\angle B \approx 58^\circ 25'$.</p> <p>3. $\angle C \approx 180^\circ - (48^\circ 11' + 58^\circ 25') = 73^\circ 24'$.</p>

5. Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них

Приклад 4. Дано сторони трикутника a, b і кут A . Знайти сторону c трикутника та кути B і C .

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
<p>Дано: $a, b, \angle A$. Знайти: $c, \angle B, \angle C$. Розв'язання.</p> <p>І спосіб.</p> <p>1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Із цього рівняння знаходимо c. Задача може мати два, один або не мати жодного розв'язку.</p> <p>2. $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Далі знаходимо кут B за допомогою калькулятора або таблиць.</p> <p>3. $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$.</p>	<p>Дано: $a = 10, b = 8, \angle A = 70^\circ$. Знайти: $c, \angle B, \angle C$. Розв'язання.</p> <p>І спосіб.</p> <p>1. $10^2 = 8^2 + c^2 - 2 \cdot 8 \cdot c \cdot \cos 70^\circ$. $c^2 - 5,47c - 36 = 0$; $c_1 \approx 9,33$; $c_2 \approx -3,86$ не задовольняє змісту задачі. Отже, $c \approx 9,33$.</p> <p>2. $\cos B \approx \frac{10^2 + 9,33^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 9,33} \approx 0,659$; $\angle B \approx 48^\circ 45'$.</p> <p>3. $\angle C \approx 180^\circ - (70^\circ + 48^\circ 45') = 61^\circ 15'$.</p>

II спосіб.

$$1. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; \sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

Може існувати два, один або не існувати жодного кута, що задовольняли б останню рівність та нерівність $\angle A + \angle B < 180^\circ$.

$$2. \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B).$$

$$3. \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

II спосіб.

$$1. \sin B = \frac{8 \sin 70^\circ}{10} \approx 0,7518;$$

$$\angle B \approx 48^\circ 45' \text{ або}$$

$$\angle B \approx 180^\circ - 48^\circ 45' = 131^\circ 15'.$$

Оскільки $\angle A + \angle B = 70^\circ + 131^\circ 15' > 180^\circ$, то $\angle B = 131^\circ 15'$ не є розв'язком задачі.

$$2. \angle C \approx 180^\circ - (70^\circ + 48^\circ 45') = 61^\circ 15'.$$

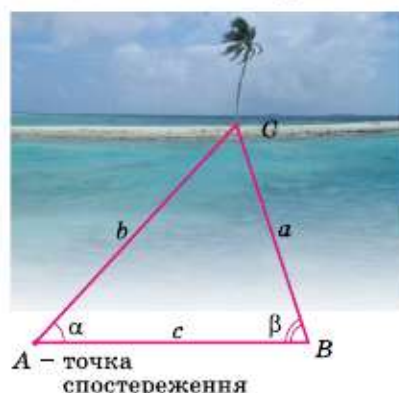
$$3. c \approx \frac{10 \sin 61^\circ 15'}{\sin 70^\circ} \approx 9,33.$$

Ця задача, на відміну від трьох попередніх, які завжди мають єдиний розв'язок, може мати один, два або не мати жодного розв'язку.

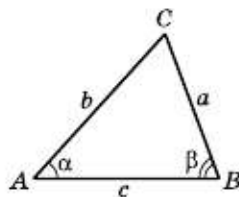
6. Розв'язування прикладних задач

Уміння розв'язувати трикутники допоможе і для розв'язування прикладних задач.

Приклад 5. (Вимірювання відстані до недоступної точки). Знайти відстань від точки спостереження A до недоступної точки C (мал. 24.2).



A – точка спостереження



Мал. 24.2

Розв'язання. Цю задачу ми вже розв'язували у 8 класі за допомогою подібності трикутників. Розглянемо тепер інший спосіб – за допомогою теореми синусів.

1) Позначимо на місцевості точку B і виміряємо довжину відрізка AB . Нехай $AB = c$. Потім виміряємо (наприклад, за допомогою астролябії) кути A і B , нехай $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

2) За теоремою синусів: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

3) $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$, тому $\sin C = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$.

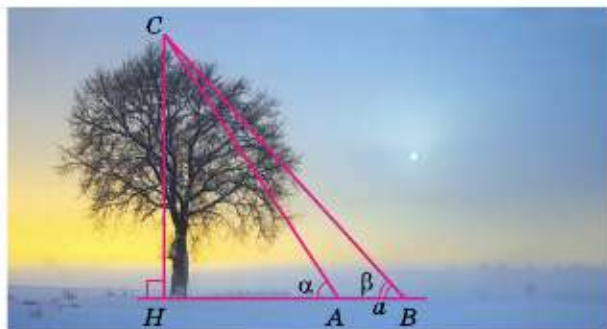
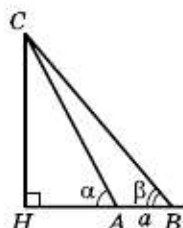
Остаточно отримаємо: $b = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Приклад 6. (Вимірювання висоти предмета, основа якого недоступна.)

Знайти висоту дерева CH , якщо точка H – недоступна (мал. 24.3).

Розв'язання. Цю задачу ми також розв'язували у 8 класі за допомогою співвідношень між сторонами і кутами в прямокутних трикутниках CHA і CHB . Розглянемо ще один спосіб розв'язування.

1) На прямій, що проходить через основу предмета – точку H , виберемо дві точки A і B , відстань між якими дорівнює a . Виміряємо кути CAH і CBH , нехай $\angle CAH = \alpha$, $\angle CBH = \beta$.



Мал. 24.3

2) Із трикутника ABC : $\frac{CA}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$.

Оскільки $\angle CAB = 180^\circ - \alpha$, то $\angle ACB = 180^\circ - (\beta + 180^\circ - \alpha) = \alpha - \beta$.

Тоді $CA = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

3) Із трикутника CHA : $CH = AC \cdot \sin \alpha$. Тоді $CH = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

? Які співвідношення між сторонами і кутами трикутника використовуємо під час розв'язування трикутників? **○** Як розв'язати трикутник: 1) за двома сторонами і кутом між ними; 2) за стороною і двома кутами; 3) за трьома сторонами; 4) за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них?



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

У задачах № 24.1–24.4, 24.12, 24.13 невідомі сторони знайдіть із точністю до сотих сантиметра, кути в разі використання калькулятора – з точністю до мінути або з точністю до градуса в разі використання таблиць.

2 24.1. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом між ними:

- 1) $AB = 7$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 60^\circ$;
- 2) $AC = 8$ см, $BC = 9$ см, $\angle C = 46^\circ$;
- 3) $BC = 10$ см, $AB = 6$ см, $\angle B = 117^\circ$;
- 4) $AB = 3$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 129^\circ$.

24.2. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом між ними:

- 1) $AC = 5$ см, $BC = 7$ см, $\angle C = 42^\circ$;
- 2) $BC = 8$ см, $AB = 9$ см, $\angle B = 62^\circ$;
- 3) $AB = 9$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 120^\circ$;
- 4) $AC = 8$ см, $BC = 4$ см, $\angle C = 147^\circ$.

24.3. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за стороною і двома кутами:

- 1) $AB = 8$ см, $\angle A = 37^\circ$, $\angle B = 30^\circ$;
- 2) $AC = 10$ см, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 92^\circ$;
- 3) $BC = 6$ см, $\angle B = 12^\circ$, $\angle A = 18^\circ$;
- 4) $AB = 7$ см, $\angle A = 57^\circ$, $\angle C = 62^\circ$.

24.4. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за стороною і двома кутами:

- 1) $AC = 5$ см, $\angle A = 150^\circ$, $\angle C = 8^\circ$;
- 2) $BC = 4$ см, $\angle B = 108^\circ$, $\angle A = 23^\circ$;
- 3) $AB = 12$ см, $\angle B = 56^\circ$, $\angle C = 94^\circ$;
- 4) $AC = 9$ см, $\angle A = 63^\circ$, $\angle C = 67^\circ$.

24.5. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці (кути знайдіть з точністю до градуса), відтак дізнаєтеся прізвище українського борця греко-римського стилю, олімпійського чемпіона 2020 р.



Розв'яжіть $\triangle ABC$ за трьома сторонами						$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
$AB = 3$ см, $AC = 8$ см, $BC = 7$ см						Н	Ю	Б
$AB = 9$ см, $AC = 8$ см, $BC = 13$ см						К	Е	Л
$\approx 22^\circ$	$\approx 37^\circ$	$\approx 43^\circ$	$\approx 37^\circ$	60°	$\approx 98^\circ$	$\approx 100^\circ$		

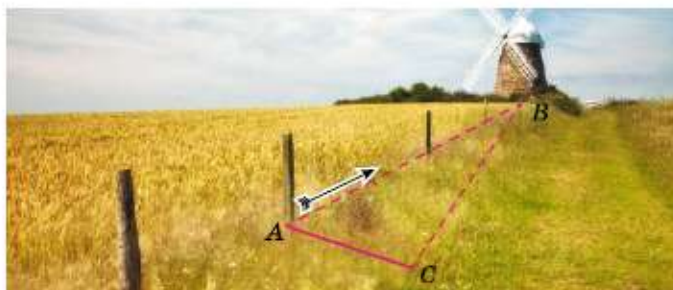
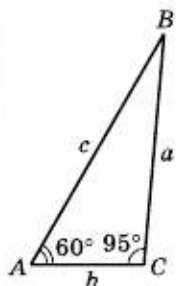
24.6. Розв'яжіть задачі, умови яких подано в таблиці (кути знайдіть з точністю до градуса), відтак прочитаєте назву міста в Київській області, у якому народилася видатна українська поетеса Ліна Костенко.



Ліна Костенко

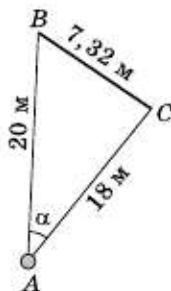
Розв'яжіть $\triangle ABC$ за трьома сторонами						$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
$AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $BC = 7$ см						В	И	Р
$AB = 10$ см, $AC = 6$ см, $BC = 7$ см						Щ	Ж	І
$\approx 22^\circ$	$\approx 36^\circ$	$\approx 38^\circ$	$\approx 44^\circ$	$\approx 100^\circ$	120°			

- 24.7.** Сторона паралелограма дорівнює 7 см і утворює з його діагоналлю 8 см завдовжки кут 67° . Знайдіть другу сторону паралелограма та його кути.
- 24.8.** Діагональ паралелограма дорівнює 8 см і утворює кути 37° і 42° зі сторонами паралелограма. Знайдіть кути та сторони паралелограма.
- 24.9.** Щоб знайти відстань AB до млина (мал. 24.4), виміряли відстань $AC = 36$ м, $\angle A = 60^\circ$ і $\angle C = 95^\circ$. Знайдіть відстань AB з точністю до сотих метра.



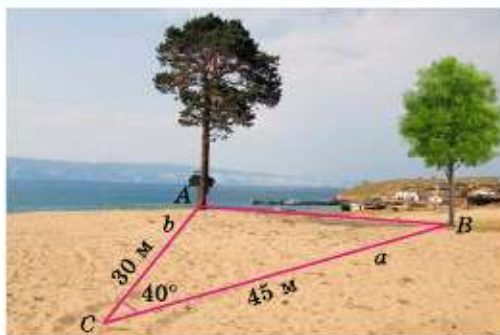
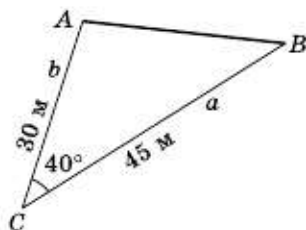
Мал. 24.4

- 24.10.** Футбольний м'яч міститься в точці A футбольного поля на відстанях 20 м і 18 м від основ B і C стійок воріт (мал. 24.5). Футболістка спрямовує м'яч у ворота. Знайдіть кут α (з точністю до градуса), під яким м'яч влучає у ворота, якщо ширина воріт дорівнює 7,32 м.



Мал. 24.5

- 24.11.** Дальномір – прилад для знаходження відстані до об'єкта без безпосередніх вимірювань на місцевості. Використовується у фотографії, геодезії, військовій справі, астрономії. За допомогою дальноміра було виміряно відстані $AC = 30$ м і $BC = 45$ м, а за допомогою астролябії $\angle ACB = 40^\circ$ (мал. 24.6). Більшою чи меншою за 30 м є відстань між двома недоступними точками A і B ?



Мал. 24.6

3 24.12. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них:

- 1) $AC = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle A = 80^\circ$;
- 2) $AC = 10$ см, $AB = 7$ см, $\angle B = 60^\circ$;
- 3) $BC = 2$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 61^\circ$;
- 4) $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\angle B = 30^\circ$.

24.13. Розв'яжіть $\triangle ABC$ за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них:

- 1) $AB = 12$ см, $BC = 5$ см, $\angle C = 120^\circ$;
- 2) $AC = 8$ см, $BC = 9$ см, $\angle A = 40^\circ$;
- 3) $AC = 4$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 50^\circ$;
- 4) $BC = 6$ см, $AC = 5$ см, $\angle B = 17^\circ$.

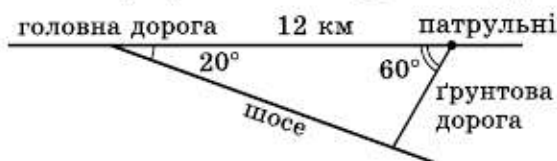
24.14. Сторона паралелограма дорівнює 6 см і утворює з діагоналями паралелограма кути 27° і 48° . Знайдіть другу сторону і кути паралелограма.

24.15. Діагоналі паралелограма дорівнюють 8 см і 10 см і перетинаються під кутом 70° . Знайдіть сторони і кути паралелограма.

24.16. AD і BC – основи рівнобічної трапеції $ABCD$, $AC = 6$ см, $\angle BAC = 52^\circ$, $\angle CAD = 20^\circ$. Знайдіть сторони і кути трапеції.

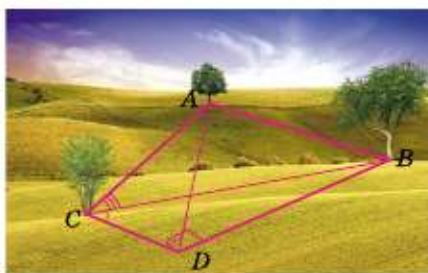
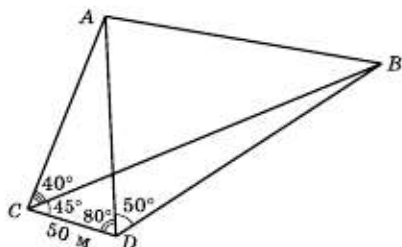
24.17. AD і BC – основи рівнобічної трапеції $ABCD$, $BD = 8$ см, $\angle ABD = 49^\circ$, $\angle DBC = 62^\circ$. Знайдіть сторони і кути трапеції.

4 24.18. О 8:00 порушник правил дорожнього руху повернув з головної дороги і помчав уздовж шосе зі швидкістю 150 км/год. О 8:01 екіпаж патрульної поліції отримав наказ затримати порушника й помчав йому напереріз ґрунтовою дорогою зі швидкістю 80 км/год (мал. 24.7). Чи встигнуть патрульні зупинити порушника на перехресті шосе і ґрунтової дороги?



Мал. 24.7

- 24.19.** З точки до прямої проведено дві похилі, які утворюють із прямою кути 50° і 70° . Відстань між основами похилих дорівнює 6 см. Знайдіть кут між похилими та довжини похилих із точністю до сотих сантиметра. Скільки випадків слід розглянути?
- 24.20.** З точки до прямої проведено дві похилі, відстань між основами яких 7 см. Одна з них дорівнює 5 см і утворює з прямою кут 60° . Знайдіть другу похилу (з точністю до сотих см), кут між похилими та кут, що утворює друга похила з прямою (з точністю до градуса). Скільки випадків слід розглянути?
- 24.21.** Щоб за відсутності дальноміра знайти відстань між двома недоступними точками A і B , вибрали дві доступні точки C і D , провели вимірювання й отримали, що $CD = 50$ м, $\angle ADB = 50^\circ$, $\angle ADC = 80^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$ (мал. 24.8). Знайдіть відстань AB (з точністю до метра).



Мал. 24.8



Вправи для повторення

- 24.22.** Знайдіть діагональ квадрата, площа якого дорівнює 36 см^2 .
- 24.23.** Одна зі сторін прямокутника вдвічі більша за іншу, а його діагональ дорівнює 10 см. Знайдіть площу й периметр прямокутника.
- 24.24.** Сусідні сторони паралелограма дорівнюють a і b , а його гострий кут дорівнює α . Знайдіть модуль різниці квадратів діагоналей паралелограма.
- 24.25.** Складіть рівняння прямої, що є серединним перпендикуляром до відрізка AB , якщо $A(-3; 2)$, $B(5; 0)$.



Піготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 24.26.** Знайдіть площу трикутника, сторона якого довжини a , а висота, проведена до неї, дорівнює h_a , якщо:
- 1) $a = 5$ см, $h_a = 8$ см;
 - 2) $a = 4$ см, $h_a = 22$ мм.
- 24.27.** Знайдіть площу паралелограма, сторона якого довжини a , а висота, проведена до неї, дорівнює h_a , якщо:
- 1) $a = 2$ см, $h_a = 3$ см;
 - 2) $a = 8$ см, $h_a = 0,5$ дм.



Життєва математика

- 24.28. Проектна діяльність.** Згідно із санітарними нормами відношення площі вікон до площі підлоги у класній кімнаті має бути не менше, ніж 0,2. У проекті будівництва школи вказано, що клас має довжину 12 м, а ширина становить 45 % від довжини. У класі заплановано три однакові вікна. Визначте, яких розмірів мають бути вікна, щоб вони відповідали санітарним нормам.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 24.29.** У трикутнику ABC $\angle C = 120^\circ$, H – ортоцентр трикутника, O – центр описаного кола. Точка M – середина дуги ACB . Доведіть, що $HM = MO$.

§ 25. Формули для знаходження площі трикутника

1. Формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними та наслідок із неї

Нагадаємо, що у 8 класі ми знаходили площу S трикутника за формулою

$$S = \frac{1}{2} ah_a,$$

де a – сторона трикутника, h_a – висота, проведена до неї.

Доведемо ще кілька формул для знаходження площі трикутника.



Теорема 1 (формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними). Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$, S – площа трикутника. Доведемо, що

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

- 1) Проведемо у трикутнику висоту AK , $AK = h$.
Тоді

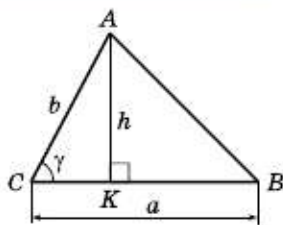
$$S = \frac{1}{2} ah.$$

- 2) Якщо кут C – гострий (мал. 25.1), то із трикутника ACK маємо:

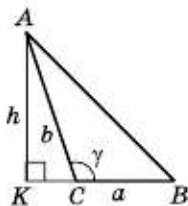
$$h = AK = AC \sin C = b \sin \gamma.$$

- 3) Якщо кут C – тупий (мал. 25.2), то із трикутника ACK маємо:

$$h = AK = AC \sin \angle ACK = b \sin(180 - \gamma) = b \sin \gamma.$$



Мал. 25.1

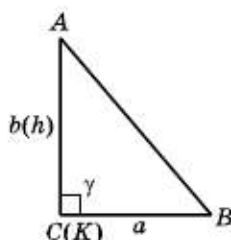


Мал. 25.2

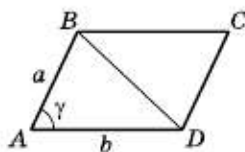
4) Якщо кут C – прямий (мал. 25.3), то

$$h = AK = AC = b = b \cdot 1 = b \sin 90^\circ = b \sin \gamma.$$

5) Отже, у всіх випадках $h = b \sin \gamma$, тобто $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$. ■



Мал. 25.3



Мал. 25.4



Наслідок. Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сусідніх сторін на синус кута між ними.

Доведення. У паралелограмі $ABCD$ проведемо діагональ BD (мал. 25.4). Оскільки $\triangle ABD = \triangle CDB$ (за трьома сторонами), то $S_{ABD} = S_{CDB}$. Тому

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \gamma = ab \sin \gamma. \quad \blacksquare$$



Приклад 1. Знайти площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює a .

Розв'язання. Нагадаємо, що ми вже знаходили площу рівностороннього трикутника у 8 класі за формулою $S = \frac{1}{2} ah_a$. Знайдемо тепер площу цього трикутника й іншим способом, тобто за доведеною вище формулою. Оскільки всі кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60° , маємо:

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Відповідь: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Приклад 2. Знайти площу трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, $\sqrt{3}$ см, $\sqrt{13}$ см.

Розв'язання. Нехай $a = 5$ см, $b = \sqrt{3}$ см, $c = \sqrt{13}$ см, $\angle C = \gamma$ (мал. 25.1).

$$1) \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ тому } \gamma = 30^\circ.$$

$$2) S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \sin 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{4} (\text{см}^2).$$

Відповідь: $\frac{5\sqrt{3}}{4} \text{ см}^2$.

Зауважимо, якщо за косинусом кута неможливо знайти точне значення міри кута, тобто якщо кут γ виявиться не табличним, то знаходити сам кут γ не потрібно. Адже для знаходження площі достатньо знайти значення синуса кута, скориставшись формулою

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma}.$$

2. Формула для знаходження площі чотирикутника через його діагоналі та кут між ними



Приклад 3. Довести, що площа будь-якого опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей чотирикутника на синус кута між ними.

Доведення. Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle AOB = \varphi$, де O – точка перетину діагоналей (мал. 25.5), S – площа чотирикутника.

Доведемо, що $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$.

1) Нехай $AO = m_1$, $OC = m_2$, $BO = n_1$, $OD = n_2$.

Тоді $AC = m_1 + m_2$, $BD = n_1 + n_2$.

Очевидно, що $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}$.

2) За доведеною вище формулою:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} m_1 n_1 \sin \varphi;$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} n_1 m_2 \sin (180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2} n_1 m_2 \sin \varphi;$$

$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} m_2 n_2 \sin \varphi;$$

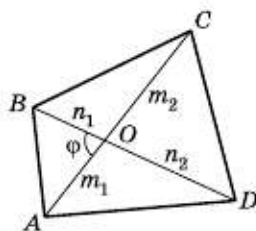
$$S_{\triangle DOA} = \frac{1}{2} m_1 n_2 \sin (180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2} m_1 n_2 \sin \varphi.$$

3) Маємо: $S = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle DOA} =$

$$= \frac{1}{2} \sin \varphi (n_1 m_1 + n_1 m_2 + m_2 n_2 + m_1 n_2) =$$

$$= \frac{1}{2} (n_1 (m_1 + m_2) + n_2 (m_1 + m_2)) \sin \varphi = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (n_1 + n_2) \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \varphi = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi. \quad \blacksquare$$



Мал. 25.5

3. Формула Герона



Теорема 2 (формула Герона). Площу S трикутника зі сторонами a , b і c можна знайти за формулою:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника.

Доведення. Скористаємося формулою $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

$$1) \text{ За теоремою косинусів: } \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$2) \text{ Тоді } \sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{(1 - \cos \gamma)(1 + \cos \gamma)} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{(c^2 - (a^2 - 2ab + b^2))(a^2 + 2ab + b^2 - c^2)}}{2ab} =$$

$$= \frac{\sqrt{(c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)}}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{2ab} \sqrt{(c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c)} =$$

$$= \frac{1}{2ab} \cdot \sqrt{16 \cdot \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2}}.$$

$$3) \text{ Але } \frac{c+b-a}{2} = \frac{a+b+c-2a}{2} = \frac{a+b+c}{2} - a = p - a.$$

$$\text{Аналогічно } \frac{c+a-b}{2} = p - b, \quad \frac{a+b-c}{2} = p - c.$$

$$4) \text{ Тоді: } \sin \gamma = \frac{1}{2ab} \cdot 4 \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$5) \text{ Отже, } S = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad \blacksquare$$

Зауважимо, що формулою Герона зручно користуватися у разі, якщо довжини сторін a , b і c є раціональними числами.

Якщо серед сторін трикутника є хоч одна, довжина якої – ірраціональне число, то зручніше використовувати метод, запропонований для розв'язування прикладу 2 в цьому параграфі.

За допомогою формули Герона, якщо відомо сторони, можна знаходити висоти трикутника, зокрема, використовуючи формулу:

$$h_a = \frac{2S}{a},$$

де $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, a – сторона, до якої проведено висоту.

Із цієї формули висоти приходимо до висновку, що

найбільшою висотою трикутника є та, що проведена до найменшої сторони; найменшою висотою є та, що проведена до найбільшої сторони.

Приклад 4. Знайти найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 25 см, 29 см і 6 см.

Розв'язання. 1) Знайдемо площу S трикутника за формулою Герона.

Оскільки $p = \frac{25 + 29 + 6}{2} = 30$ (см), то

$$S = \sqrt{30(30-25)(30-29)(30-6)} = 60 \text{ (см}^2\text{)}.$$

2) Найбільшою висотою цього трикутника є та, що проведена до сторони 6 см завдовжки. Отже, $h = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 60}{6} = 20$ (см).

Відповідь: 20 см.

4. Формула площі трикутника за радіусом описаного кола



Теорема 3 (формула площі трикутника за радіусом описаного кола). Площу S трикутника можна знайти за формулою

$$S = \frac{abc}{4R},$$

де a, b, c – сторони трикутника, R – радіус кола, описаного навколо трикутника.

Доведення. Скористаємося формулою $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

За узагальненою теоремою синусів: $2R = \frac{c}{\sin \gamma}$, де γ – кут, проти-

лежний до сторони c трикутника. Звідси $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$.

$$\text{Маємо: } S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}. \quad \blacksquare$$

З доведеної формули отримаємо формулу для обчислення радіуса кола, описаного навколо трикутника:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Зауважимо, що цю формулу доцільно використовувати, якщо відомо довжини всіх трьох сторін трикутника.

Радіус R кола, описаного навколо прямокутного трикутника, зручно знаходити за вивченою раніше формулою:

$$R = \frac{c}{2},$$

де c – гіпотенуза трикутника.

5. Формула площі трикутника за радіусом вписаного кола



Теорема (формула площі трикутника за радіусом вписаного кола). Площу S трикутника можна знайти за формулою

$$S = pr,$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника, r – радіус кола, вписаного у трикутник.

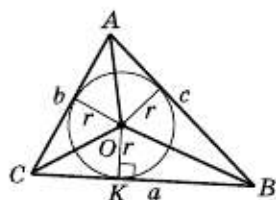
Доведення. Нехай O – центр кола, вписаного у $\triangle ABC$ (мал. 25.6), а точка K – точка дотику кола до сторони BC , $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

1) Оскільки $OK \perp BC$, то OK є висотою трикутника COB . Тоді $S_{\triangle COB} = \frac{1}{2}ar$.

2) Аналогічно $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}br$; $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}cr$.

3) Тоді $S = S_{\triangle COB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr =$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = pr. \quad \blacksquare$$



Мал. 25.6



Наслідок. Площу S будь-якого описаного багатокутника можна знайти за формулою

$$S = pr,$$

де p – півпериметр багатокутника, r – радіус кола, вписаного у багатокутник.

З доведеної формули випливає формула для обчислення радіуса кола, вписаного у трикутник або в описаний багатокутник:

$$r = \frac{S}{p}.$$

Радіус r кола, вписаного у прямокутний трикутник, зручно знаходити за формулою

$$r = \frac{a + b - c}{2},$$

де a і b – катети трикутника, c – його гіпотенуза.

Доведіть цю формулу самостійно.

Приклад 5. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см. Знайти радіус R кола, описаного навколо трикутника, та радіус r кола, вписаного у трикутник.

Розв'язання. 1) Знайдемо півпериметр трикутника:

$$p = \frac{4 + 13 + 15}{2} = 16 \text{ (см)}, \text{ та його площу за формулою Герона}$$

$$S = \sqrt{16(16 - 4)(16 - 13)(16 - 15)} = 24 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$2) \text{ Отже, } R = \frac{abc}{4S} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 24} = \frac{65}{8} = 8,125 \text{ (см)},$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{24}{16} = 1,5 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $R = 8,125$ см, $r = 1,5$ см.

А ще раніше...

Грецький математик Герон Александрийський, який жив у I ст. до н. е., багато уваги приділяв проблемам геодезії та практичному застосуванню геометрії та механіки. Хоча його праці мали більш енциклопедичний характер, Герона вважають видатним механіком того часу. Недарма за ним закріпилося прізвисько «Герон-механік».

Однією з праць Герона була «Геометрика», що є фактично збірником формул та відповідних їм завдань. У ній містилися вправи на обчислення площ квадратів, прямокутників і трикутників. У цій праці Герон наводить методику обчислення площі трикутника зі сторонами 13, 14 і 15, а в іншій своїй праці, яка має назву «Метрика», наводить доведення формули:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Саме тому цю формулу для обчислення площі трикутника за трьома його сторонами прийнято називати формулою Герона, проте вона була відома Архімеду ще у III ст. до н. е.

Відомі на той час правила для обчислення площ застосовували також грецькі, латинські й середньовічні землеміри і техніки.



Герон
Александрийський



Сформулюйте і доведіть теорему про формулу площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними. ○ Сформулюйте і доведіть формулу Герона. ○ Які співвідношення між сторонами трикутника і висотами, проведеними до них, ви знаєте? ○ Сформулюйте і доведіть формули знаходження площ трикутників за його радіусами вписаного та описаного кіл. ○ Запишіть формули для обчислення радіуса кола, описаного навколо трикутника, і радіуса кола, вписаного у трикутник.



Розв'яжіть задачі та виконайте вправи



25.1. (Усно.) Укажіть формули, за якими можна знайти площу трикутника:

- | | |
|---------------------------------------|-----------------------------|
| 1) $S = ab \sin \gamma$; | 2) $S = \frac{1}{2} ah_a$; |
| 3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; | 4) $S = \frac{a+b}{2} h$; |
| 5) $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$; | 6) $S = p(p-a)(p-b)(p-c)$. |

25.2. (Усно.) Укажіть формули, за якими можна знайти площу паралелограма:

- 1) $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$; 2) $S = ah_a$; 3) $S = \frac{1}{2} ah_a$; 4) $S = ab \sin \gamma$.

25.3. a і b – сторони трикутника, γ – кут між ними. Знайдіть площу трикутника, якщо:

- 1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $\gamma = 30^\circ$; 2) $a = 7$ см, $b = 8$ см, $\gamma = 120^\circ$.

25.4. a і b – сторони трикутника, γ – кут між ними. Знайдіть площу трикутника, якщо:

- 1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $\gamma = 45^\circ$; 2) $a = 6$ см, $b = 2$ см, $\gamma = 150^\circ$.

25.5. a і b – сторони паралелограма, γ – кут між ними. Знайдіть площу паралелограма, якщо:

- 1) $a = 7$ см, $b = 6$ см, $\gamma = 60^\circ$; 2) $a = 6$ см, $b = 13$ см, $\gamma = 135^\circ$.

25.6. Сторони паралелограма a і b , γ – кут між ними. Знайдіть площу паралелограма, якщо:

- 1) $a = 8$ см, $b = 6$ см, $\gamma = 30^\circ$;
2) $a = 9$ см, $b = 12$ см, $\gamma = 120^\circ$.



25.7. Доведіть, що площу S ромба, сторона якого дорівнює a , а один з кутів – α , можна знайти за формулою $S = a^2 \sin \alpha$.

25.8. Обчисліть площу ромба:

- 1) сторона якого дорівнює 4 см, а гострий кут – 45° ;
2) сторона якого дорівнює 8 см, а тупий кут – 150° .

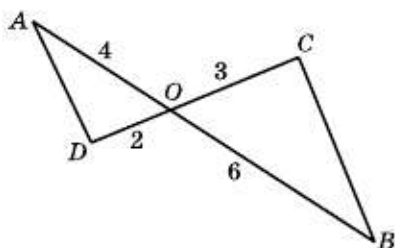
25.9. Обчисліть площу ромба:

- 1) сторона якого дорівнює 6 см, а гострий кут – 60° ;
2) сторона якого дорівнює 10 см, а тупий кут – 135° .

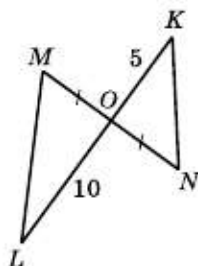
25.10. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а кут при основі – 75° . Знайдіть площу трикутника.

- 25.11. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює 8 см.
- 25.12. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 11 см, 25 см і 30 см.
- 25.13. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 51 см і 53 см.
- 25.14. Знайдіть площу прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 см, а кут між діагоналями – 30° .
- 25.15. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, діагональ якої дорівнює 8 см, а кут між діагоналями – 60° .
- 25.16. Знайдіть сторону BC трикутника ABC , якщо $AB = 8$ см, $\angle B = 45^\circ$, $S_{ABC} = 6\sqrt{2}$ см².
- 25.17. Площа паралелограма дорівнює 24 см², одна з його сторін – 8 см, а один з кутів – 30° . Знайдіть невідому сторону паралелограма.
- 25.18. Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють 7 см і 16 см, а його площа дорівнює 28 см². Обчисліть кут між цими сторонами.
- 25.19. Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють 8 см і 10 см. Обчисліть кут між цими сторонами, якщо площа трикутника дорівнює $20\sqrt{2}$ см².
- 3** 25.20. Знайдіть найменшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см.
- 25.21. Знайдіть найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, 29 см і 30 см.
- 25.22. Висоти паралелограма дорівнюють 6 см і 8 см, а кут між сторонами дорівнює 30° . Знайдіть площу паралелограма.
- 25.23. Висота ромба дорівнює 8 см, а гострий кут – 60° . Знайдіть площу ромба.
- 25.24. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 150° , а його площа – 25 см². Знайдіть сторони трикутника.
- 25.25. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 30° , а його площа – 9 см². Знайдіть сторони трикутника.
- 25.26. Доведіть, що діагоналі паралелограма ділять його на чотири рівновеликих трикутники.
- 25.27. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 25 см, 29 см і 36 см.
- 25.28. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 13 см, 40 см і 51 см.
- 25.29. Знайдіть радіус кола, вписаного у трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см.
- 25.30. Знайдіть радіус кола, вписаного у трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 8 см.

- 25.31. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O (мал. 25.7), $AO = 4$ см, $BO = 6$ см, $CO = 3$ см, $DO = 2$ см. Знайдіть відношення площ трикутників AOD і COB .



Мал. 25.7



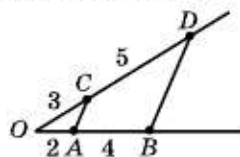
Мал. 25.8

- 25.32. Відрізки MN і KL перетинаються в точці O (мал. 25.8), $MO = ON$, $KO = 5$ см, $LO = 10$ см. Знайдіть відношення площ трикутників KON і MOL .
- 25.33. Кути ромба відносяться як 1:3. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 10 см.
- 4** 25.34. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R , а два його кути – α і β . Знайдіть площу трикутника.
- 25.35. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 14 см і 22 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює 12 см.
- 25.36. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 16 см і 30 см, а медіана, проведена до більшої із цих сторін, дорівнює 25 см.
- 25.37. Розгляньте рівнобедрений трикутник з кутом 2α при вершині та бічною стороною a . Знайдіть площу цього трикутника двома способами і доведіть формулу $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$.
- 25.38. У трикутнику ABC $AB = 10$ см, $AC = 6$ см. У якому відношенні бісектриса кута A ділить площу трикутника ABC ?

- 25.39. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 3, $\sqrt{5}$ і $\sqrt{10}$ см.

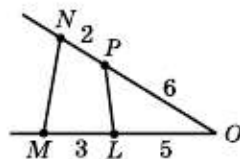
- 25.40. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 4, $\sqrt{11}$ і $\sqrt{13}$ см.

- 25.41. На сторонах OB та OD кута O відкладено відрізки $OA = 2$ см, $AB = 4$ см, $OC = 3$ см і $CD = 5$ см (мал. 25.9). Знайдіть відношення площі трикутника OBD до площі чотирикутника $ABDC$.



Мал. 25.9

- 25.42. На сторонах OM та ON кута O відкладено відрізки $OL = 5$ см, $LM = 3$ см, $OP = 6$ см і $PN = 2$ см (мал. 25.10). Знайдіть відношення площі трикутника OLP до площі чотирикутника $MNPL$.



Мал. 25.10



Вправи для повторення

- 25.43. Дві сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 2 см, а кут між ними дорівнює 30° . Знайдіть третю сторону трикутника.
- 25.44. Розв'яжіть $\triangle ABC$, якщо:
 1) $AB = 8$ см, $BC = 7$ см, $\angle B = 82^\circ$;
 2) $AC = 5$ см, $\angle A = 32^\circ$, $\angle C = 80^\circ$.
- 25.45. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см, дві інші утворюють кут 60° , а їхня різниця дорівнює 5 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 25.46. Дві сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 5 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо вона дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника. Скільки розв'язків має задача?



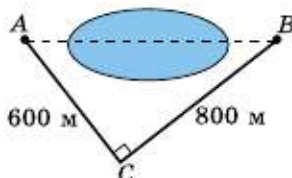
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

- 25.47. Знайдіть суму кутів опуклого:
 1) дев'ятикутника;
 2) двадцятикутника.
- 25.48. Усі кути опуклого восьмикутника між собою рівні. Знайдіть градусну міру одного із цих кутів.
- 25.49. Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює:
 1) 1620° ; 2) 2000° ?
- 25.50. 1) Сторона рівностороннього трикутника дорівнює 5 см. Знайдіть його периметр.
 2) Периметр квадрата дорівнює 28 см. Знайдіть його сторону.
- 25.51. Побудуйте рівносторонній трикутник і квадрат. Навколо кожної із цих фігур опишіть коло і в кожну з них впишіть коло.



Життєва математика

- 25.52. Використовуючи дані (див. мал.), знайдіть відстань у метрах між пунктами A і B , розміщених на різних берегах озера.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

- 25.53. Доведіть, що в будь-якому опуклому чотирикутнику сума довжин діагоналей менша від його периметра.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5 (§§ 22–25)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

- 1** 1. У трикутнику проти сторони a лежить кут 70° , а проти сторони b – кут 80° . Укажіть правильну рівність.

А. $\frac{a}{\cos 70^\circ} = \frac{b}{\cos 80^\circ}$

Б. $\frac{a}{\sin 70^\circ} = \frac{b}{\sin 80^\circ}$

В. $\frac{a}{70^\circ} = \frac{b}{80^\circ}$

Г. $\frac{a}{\sin 80^\circ} = \frac{b}{\sin 70^\circ}$

2. Сторони трикутника завдовжки a і b утворюють між собою кут γ . Якщо $a = 6$ см, $b = 10$ см, $\gamma = 45^\circ$, то площа трикутника дорівнює ...

А. $15\sqrt{2}$ см²

Б. $30\sqrt{2}$ см²

В. 60 см²

Г. $60\sqrt{2}$ см²

3. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 5 см, а один з його кутів – 120° . Знайдіть площу паралелограма.

А. 40 см²

Б. $40\sqrt{3}$ см²

В. $10\sqrt{3}$ см²

Г. $20\sqrt{3}$ см²

- 2** 4. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 15 см, а кут між ними – 60° . Знайдіть третю сторону трикутника.

А. 14 см

Б. 13 см

В. 17 см

Г. $\sqrt{379}$ см

5. У трикутнику ABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $BC = 8\sqrt{2}$ см. Знайдіть AC .

А. 8 см

Б. $8\sqrt{3}$ см

В. 16 см

Г. $16\sqrt{2}$ см

6. Знайдіть найбільший кут трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см, 8 см і 13 см.

А. 90°

Б. 120°

В. 135°

Г. 150°

- 3** 7. Одна зі сторін трикутника дорівнює 14 см, дві інші утворюють кут 120° , а їхня різниця дорівнює 4 см. Знайдіть периметр трикутника.

А. 30 см

Б. 32 см

В. 28 см

Г. 34 см

8. У трикутнику ABC $\angle B = 30^\circ$, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $BC = 4$ см. Знайдіть $\angle A$.

А. 30°

Б. 45°

В. 60°

Г. 45° або 135°

9. Знайдіть найменшу висоту трикутника зі сторонами 11 см, 13 см і 20 см завдовжки.

А. 12 см

Б. $10\frac{2}{13}$ см

В. $6\frac{3}{5}$ см

Г. $13\frac{1}{5}$ см

- 4** 10. У трикутнику ABC $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см. На сторонах AB і AC відповідно взято точки K і L такі, що $AK = 2$ см, $AL = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка KL .

А. 4 см

Б. $\sqrt{17}$ см

В. $\sqrt{41}$ см

Г. 5 см

11. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 16 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо її відношення до радіуса описаного кола дорівнює $\sqrt{3} : 1$.

А. 14 см Б. 16 см В. 14 см або $2\sqrt{97}$ см Г. 18 см

12. Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 9 см, а медіана, що проведена до третьої сторони, – 4 см. Знайдіть менший з відрізків, на які бісектриса трикутника ділить цю сторону.

А. 6,125 см Б. 6,5 см В. 6 см Г. 7,875 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 13. Установіть відповідність між довжинами сторін трикутника (1–3) та його видом (А–Г).

Довжини сторін трикутника Вид трикутника

1. 5 см, 7 см, 9 см

А. Прямокутний

2. 6 см, 8 см, 10 см

Б. Різносторонній гострокутний

3. 7 см, 7 см, 9 см

В. Рівнобедрений гострокутний

Г. Тупокутний

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 22–25

1 1. У трикутнику проти сторони a лежить кут 20° , а проти сторони b – кут 70° . Які з рівностей правильні:

1) $\frac{a}{\sin 70^\circ} = \frac{b}{\sin 20^\circ}$; 2) $\frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{b}{\sin 70^\circ}$;

3) $\frac{a}{\cos 20^\circ} = \frac{b}{\cos 70^\circ}$; 4) $\frac{a}{b} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 70^\circ}$?

2. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 9 см, а кут між ними – 60° . Знайдіть площу трикутника.

3. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 5 см, а один з кутів – 135° . Знайдіть площу паралелограма.

2 4. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 10 см, а кут між ними дорівнює 120° . Знайдіть третю сторону трикутника.

5. У трикутнику ABC $AB = 6\sqrt{2}$, $\angle C = 30^\circ$, $\angle A = 45^\circ$. Знайдіть довжину сторони BC .

6. Розв'яжіть $\triangle ABC$, якщо $AB = 8$ см, $AC = 9$ см, $BC = 5$ см (невідомі кути знайдіть з точністю до градуса).

3 7. Одна зі сторін трикутника дорівнює 13 см, дві інші утворюють кут 60° , а їхня різниця дорівнює 7 см. Знайдіть периметр трикутника.

8. Знайдіть найбільшу висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см.

4 9. Дві сторони трикутника дорівнюють $6\sqrt{2}$ см і 2 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо вона відноситься до радіуса описаного кола як $\sqrt{2} : 1$. Скільки розв'язків має задача?

Додаткові завдання

4 10. У трикутнику ABC $AB = 7$ см, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см. На сторонах BC і CA відповідно позначено точки M і N так, що $CM = 5$ см, $CN = 3$ см. Знайдіть довжину відрізка MN .

11. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 16 см і 38 см, а медіана, проведена до третьої сторони, – 25 см.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 5

До § 22

1 1. Сторони трикутника a , b , c лежать відповідно проти кутів A , B , C . Які з рівностей правильні:

$$1) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad 2) \cos C = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2ab};$$

$$3) \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}; \quad 4) \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}?$$

2 2. Знайдіть сторону AC трикутника ABC , якщо:

1) $AB = 8$ см, $BC = 15$ см, $\angle B = 60^\circ$;

2) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 120^\circ$.

3. Знайдіть середній за величиною кут трикутника зі сторонами 3 см, 7 см і 8 см.

4. Одна з бічних сторін трапеції дорівнює 10 см і утворює з меншою основою кут 120° . Знайдіть діагоналі трапеції, якщо її основи дорівнюють 6 см і 16 см.

5. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а кут при основі – 30° . Знайдіть основу трикутника.

6. Знайдіть медіану рівнобедреного трикутника, проведену до бічної сторони, якщо основа трикутника дорівнює 6 см, а бічна сторона – 8 см.

7. Знайдіть суму квадратів діагоналей ромба, сторона якого дорівнює 10 см.

3 8. Дві сторони трикутника відносяться як $\sqrt{3} : 2$, а кут між ними 30° . Знайдіть ці сторони, якщо третя сторона дорівнює 5 см.

9. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 14 см, а кут проти більшої з них – 120° . Знайдіть периметр трикутника.

10. Визначте вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), якщо відношення його сторін дорівнює $10 : 14 : 19$.

11. Для трикутника ABC справджується рівність $c^2 = a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab$. Знайдіть градусну міру кута C .

12. Дві сторони трикутника дорівнюють 8 см і 3 см, а кут між ними – 60° . Знайдіть довжину медіани, проведеної до третьої сторони трикутника.

4 13. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см і лежить проти кута 60° . Знайдіть дві інші сторони трикутника, якщо одна з його середніх ліній дорівнює 3 см.

14. У трикутнику зі сторонами 3 см, 4 см і 6 см проведено медіану до більшої сторони. Визначте косинус кута, що утворює ця медіана з меншою стороною трикутника.

15. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює m , а кут при основі – α . Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони трикутника.

16. Сторони гострокутного трикутника ABC дорівнюють a , b і c . Знайдіть довжину проєкції сторони b на сторону a .

17. Навколо чотирикутника, сторони якого в порядку слідування дорівнюють a , b , c і d , можна описати коло. Знайдіть косинус кута між сторонами a і b .

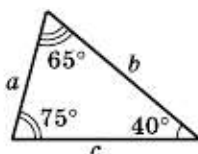
18. Доведіть, що в будь-якому трикутнику відношення суми квадратів сторін до суми квадратів медіан дорівнює $\frac{4}{3}$.

19. Для медіан трикутника m_1 , m_2 , m_3 справджується рівність $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$. Доведіть, що трикутник прямокутний.

До § 23

1 20. Запишіть теорему синусів для трикутника, зображеного на малюнку 1.

2 21. У трикутнику ABC $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. Знайдіть відношення довжини сторони BC до довжини сторони AB .



Мал. 1

22. У трикутнику ABC $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $AC = 8\sqrt{6}$ см. Знайдіть BC .

23. У трикутнику ABC $AC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

24. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 12 см, а кут при основі – 30° .

3 25. Кути трикутника пропорційні числам 1, 2, 3. Знайдіть відношення сторін трикутника.

26. Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють $10\sqrt{2}$ см і $10\sqrt{3}$ см, а радіус кола, описаного навколо трикутника, – 10 см. Знайдіть кути трикутника.

27. У трикутнику ABC $AC = 10$ см, $BC = 7$ см. Чи можливо, що:

- 1) $\sin B = \frac{2}{3}$; 2) $\sin A = \frac{4}{5}$?

28. Сторона трикутника у $\sqrt{3}$ разів більша за радіус, описаного навколо цього кола. Знайдіть кут, що лежить проти цієї сторони.

4

29. Два кути трикутника дорівнюють α і β . Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R . Знайдіть периметр трикутника.

30. Доведіть, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну йому сторону на частини, обернено пропорційні синусам прилеглих до цієї сторони кутів.

31. Сторони трикутника дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см. Знайдіть радіус кола, що проходить через кінці більшої сторони і середину меншої сторони.

32. У трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$, $AC = b$. Знайдіть довжину бісектриси трикутника AL .

33. Сторона квадрата дорівнює a . Знайдіть радіус кола, що проходить через вершину квадрата, середину сторони, що не містить цієї вершини, і точку перетину діагоналей квадрата.

До § 24

2

34. Розв'яжіть трикутник ABC , якщо:

1) $BC = 3$ см, $AB = 4$ см, $\angle B = 58^\circ$;

2) $AB = 7$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 139^\circ$;

3) $BC = 4$ см, $\angle B = 48^\circ$, $\angle C = 115^\circ$;

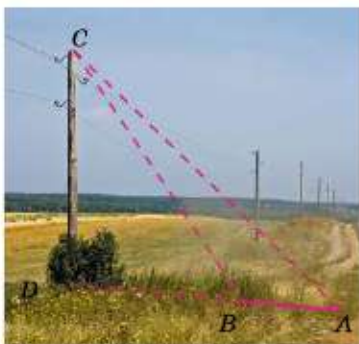
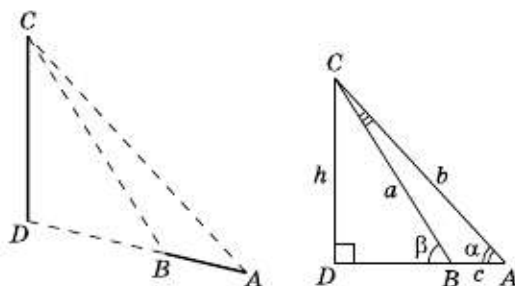
4) $AB = 10$ см, $\angle A = 9^\circ$, $\angle C = 97^\circ$;

5) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $AC = 7$ см;

6) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см.

Невідомі сторони знайдіть із точністю до сотих сантиметра, а невідомі кути – із точністю до мінути (у разі використання калькулятора) або з точністю до градуса (у разі використання таблиць).

35. Щоб знайти висоту CD стовпа лінії електропередачі, основа якого недоступна, виміряли відстань $AB = 2$ м та кути A і B : $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ (мал. 2). Знайдіть висоту стовпа CD двома способами (знайшовши спочатку BC або знайшовши спочатку AC).



Мал. 2

36. Розв'яжіть $\triangle ABC$, якщо:

- 1) $AB = 7$ см, $AC = 8$ см, $\angle B = 50^\circ$;
- 2) $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $\angle A = 110^\circ$;
- 3) $BC = 2$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 35^\circ$;
- 4) $AB = 7$ см, $BC = 8$ см, $\angle C = 60^\circ$.

Невідомі сторони знайдіть із точністю до сотих сантиметра, а невідомі кути – із точністю до мінути (у разі використання калькулятора) або з точністю до градуса (у разі використання таблиць).

37. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 10 см. Кут між діагоналлю трапеції та бічною стороною дорівнює 60° , а між діагоналлю та основою – 40° . Знайдіть основи трапеції та її діагональ.

38. Розв'яжіть трикутник ABC , якщо:

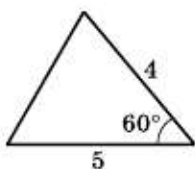
- 1) $BC = 10$ см, $AC = 15$ см, CM – медіана, $CM = 11$ см;
- 2) $BC = 12$ см, AH – висота, $AH = 6$ см, AM – медіана, $AM = 10$ см.

39. Спортивний літак летить по замкненому маршруту, траєкторія якого має форму трикутника, у якого два кути дорівнюють 100° і 50° . Відстань, що є довжиною сторони, яка лежить проти третього кута, літак долає за 1 год. За який час літак подолає весь маршрут, якщо його швидкість є сталою? Відповідь округліть до хвилин.

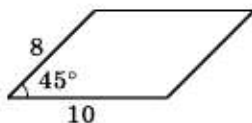
40. Три дороги утворюють трикутник ABC , у якого $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 145^\circ$, причому AB – шосе, AC і BC – ґрунтові дороги. Швидкість руху шосейною дорогою вдвічі більша за швидкість руху ґрунтовою дорогою. Водій хоче якнайшвидше потрапити з пункту A в пункт C . Який маршрут має обрати водій?

До § 25

41. Знайдіть площі трикутника і паралелограма, зображених на малюнках 3 і 4.



Мал. 3



Мал. 4

42. Знайдіть площу трикутника ABC , якщо $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, а зовнішній кут при вершині A дорівнює 30° .

43. Знайдіть гострий кут ромба, сторона якого дорівнює 6 см, а площа – 18 см^2 .

44. Обчисліть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює $8\sqrt{3}$ см, а кут між бічними сторонами – 120° .

45. Знайдіть середню за довжиною висоту трикутника, сторони якого дорівнюють 26 см, 28 см і 30 см.

46. Сторони паралелограма дорівнюють 16 см і 10 см, а кут між висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, – 120° . Знайдіть площу паралелограма.

47. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, і радіус кола, вписаного у трикутник, якщо сторони трикутника дорівнюють 8 см, 26 см і 30 см.

48. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а висота, проведена до неї, – 16 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

49. Одна зі сторін трикутника вдвічі більша за іншу, а кут між цими сторонами дорівнює 60° . Знайдіть третю сторону трикутника, якщо його площа – $8\sqrt{3}$ см².

4

50. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 4 см, а його площа – $3\sqrt{3}$ см². Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

51. Площа трикутника 5 см², а дві його сторони дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть площі трикутників, на які він ділиться бісектрисою кута між цими сторонами.

52. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{6}$ см і $\sqrt{7}$ см.

53. AM – медіана трикутника ABC . Знайдіть площу трикутника AMB , якщо $AB = 16$ см, $AC = 10$ см, $\angle BAC = 120^\circ$.

54. Три кола, радіуси яких дорівнюють 6 см, 7 см і 8 см, попарно дотикаються одне до одного. Знайдіть площу трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

55. У трикутник зі сторонами 12 см, 50 см і 58 см вписано коло, а центр кола сполучено з вершинами трикутника. Знайдіть площі трьох отриманих трикутників.

56. Діагоналі паралелограма дорівнюють 40 см і 74 см, а одна з його сторін – 51 см. Знайдіть площу паралелограма.

57. Основи трапеції дорівнюють 25 см і 4 см, а бічні сторони – 13 см і 20 см. Знайдіть висоту трапеції.



Головне в темі 5

ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

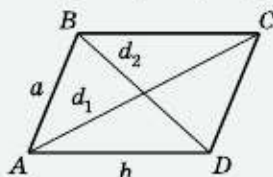
Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

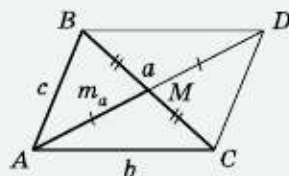
Якщо c – найбільша сторона трикутника і
 $a^2 + b^2 - c^2 > 0$, то $\angle C$ – гострий, а трикутник – гострокутний;
 $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, то $\angle C$ – прямий, а трикутник – прямокутний;
 $a^2 + b^2 - c^2 < 0$, то $\angle C$ – тупий, а трикутник – тупокутний.



Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

AM – медіана трикутника ABC. Формула медіани трикутника:

$$AM = m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$



ТЕОРЕМА СИНУСІВ

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних до них кутів.

Наслідок (узагальнена теорема синусів). У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного їй кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = D.$$

ФОРМУЛИ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

Теорема 1 (формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними). Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

Наслідок. Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сусідніх сторін на синус кута між ними.

Теорема 2 (формула Герона). Площу S трикутника зі сторонами a , b і c можна знайти за формулою

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника.

Найбільшою висотою трикутника є та, що проведена до найменшої сторони; найменшою висотою є та, що проведена до найбільшої сторони.

Теорема 3 (формула площі трикутника за радіусом описаного кола). Площу S трикутника можна знайти за формулою

$$S = \frac{abc}{4R},$$

де a , b , c – сторони трикутника, R – радіус кола, описаного навколо трикутника.

Формула для обчислення радіуса кола, описаного навколо трикутника:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Теорема 4 (формула площі трикутника за радіусом вписаного кола). Площу S трикутника можна знайти за формулою

$$S = pr,$$

де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника, r – радіус кола, вписаного у трикутник.

Формула для обчислення радіуса кола, вписаного у трикутник або в описаний многокутник:

$$r = \frac{S}{p}.$$

Наслідок. Площу S будь-якого описаного многокутника можна знайти за формулою

$$S = pr,$$

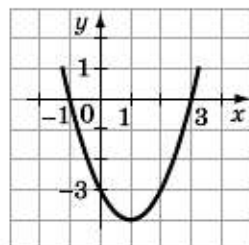
де p – півпериметр многокутника, r – радіус кола, вписаного у многокутник.

ЗРАЗОК ВАРІАНТА АТЕСТАЦІЙНОЇ ПИСЬМОВОЇ РОБОТИ З МАТЕМАТИКИ

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей, з яких тільки
ОДИН є ПРАВИЛЬНИМ. Оберіть і позначте правильний варіант
відповіді в таблиці.

1. Укажіть число, що є коренем рівняння $3x - 4 = 11$.
А) 3; Б) 4; В) 5; Г) 6.
2. Яку відстань подолає мотоцикл за $\frac{2}{3}$ год, якщо його швидкість дорівнює 78 км/год?
А) 52 км; Б) 117 км; В) 50 км; Г) 56 км.
3. Перетворіть вираз $(m + 3y)^2$ на многочлен.
А) $m^2 + 3my + 9y^2$; Б) $m^2 + 6my + 9y^2$;
В) $m^2 + 9y^2$; Г) $m^2 + 6my + 6y^2$.
4. Укажіть точку, через яку проходить пряма $2y - 7x = -1$.
А) (3; -10); Б) (10; 3);
В) (-3; 10); Г) (3; 10).
5. Знайдіть значення виразу $\frac{\sqrt{35}\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$.
А) $7\sqrt{7}$; Б) $\sqrt{7}$; В) 7; Г) 49.
6. Укажіть вираз, тотожно рівний виразу $\left(-\frac{2ab^3}{3c^8}\right)^5$.
А) $-\frac{32a^5b^{15}}{243c^{40}}$; Б) $\frac{32a^5b^{15}}{243c^{40}}$; В) $-\frac{32ab^{15}}{243c^{40}}$; Г) $-\frac{2a^5b^{15}}{3c^{40}}$.
7. У геометричній прогресії (b_n) $b_3 = 36$, $q = -3$. Знайдіть b_1 .
А) -4; Б) 4; В) 12; Г) -12.
8. На малюнку зображено графік функції $y = x^2 - 2x - 3$. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 2x - 3 \geq 0$.
А) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$;
Б) $[-1; 3]$;
В) $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$;
Г) $[3; +\infty)$.
9. Точка А належить відрізку ВС, $AB = 5$ см, $AC = 2$ см. Тоді $BC = \dots$
А) 8 см; Б) 10 см; В) 3 см; Г) 7 см.

	А	Б	В	Г
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				



10. Діагональ ромба утворює з його стороною кут 55° . Знайдіть менший кут ромба.

- А) 60° ; Б) 110° ; В) 70° ; Г) 80° .

11. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 7 см і 8 см, а кут між ними 60° .

- А) $14\sqrt{3}$ см²; Б) $14\sqrt{2}$ см²; В) 14 см²; Г) 28 см².

12. За якого значення x вектори $\vec{a}(x; -4)$ і $\vec{b}(2; -8)$ перпендикулярні?

- А) 1; Б) -16; В) 16; Г) 0.

Розв'яжіть завдання 13–16.

13. Спростіть вираз $\frac{a-5}{ab-a^2} - \frac{5-b}{ab-b^2}$.

14. Один з коренів рівняння $x^2 + px + 12 = 0$ дорівнює -2. Знайдіть p і другий корінь рівняння.

15. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x + xy = -2, \\ 5x - 3xy = 28. \end{cases}$

16. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\cos A = 0,8$, $BC = 6$ см. Знайдіть периметр трикутника.

Розв'яжіть завдання 17–19 та запишіть розв'язання кожного з повним обґрунтуванням послідовності логічних кроків і дій, посиланнями на математичні твердження та факти, з яких випливає той чи інший висновок. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

17. Відстань між двома пристанями по річці дорівнює 45 км. Моторний човен шлях туди і назад долає за 8 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год.

18. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{7}{x^2 - 16} + \sqrt{x^2 + 3x - 10}$.

19. Діагональ рівнобічної трапеції ділить її гострий кут навпіл, а середню лінію — на відрізки 3 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції.

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Повторюємо геометрію за 8 клас

6. Да Вінчі. 13. Бутусін. 15. 28 см. 16. $AM = 4$ см, $MD = 3$ см. 17. 1) 50° ; 2) 70° . 18. 1) 40° ; 2) 20° . 19. 70° і 110° . 20. 36° і 144° . 21. 80° і 100° . 22. 50° і 130° . 23. 40 см, 20 см, 30 см. 24. 8 см, 14 см, 10 см. 25. 100° . 26. 70° . 27. 8 см. 28. 15 см. 29. 6 см, 4 см, 6 см. 44. $1\frac{2}{3}$ см. 45. 12 см. 46. $BL = 4$ см, $LC = 5$ см. 47. 30 см. 48. Інна Дерусова. 49. 1) 8 см, 14 см, 18 см; 2) 12 см, 21 см, 27 см; 3) 20 см, 35 см, 45 см. 50. 18 см. 51. 8 см. 52. 5 см. 53. 4 см. 70. На мал. 9: $x = 25$; на мал. 10: $x = 3$; на мал. 11: $x = 10$. 71. 14 см або 4 см, два випадки. 72. 48 см. 73. 80 см. 74. 1) $BC \approx 3,32$ см, $\angle A \approx 34^\circ$, $\angle B \approx 56^\circ$; 2) $AB \approx 8,54$ см, $\angle A \approx 21^\circ$, $\angle B \approx 69^\circ$. 75. 1) $AC \approx 7,48$ см, $\angle A \approx 34^\circ$, $\angle B \approx 56^\circ$; 2) $AB \approx 7,28$ см, $\angle A \approx 74^\circ$, $\angle B \approx 16^\circ$. 76. 45 см. 77. 168 см. 78. 62° . 93. 80° , 100° , 120° , 120° , 120° . 94. 125° , 123° , 121° , 119° , 117° , 115° . 95. 70 см². 96. 40 см². 97. 50 см². 98. 24 см². 99. 30 см². 100. 5 см. 101. 6 см. 102. 30 см². 103. 24 см². 104. 24 см². 105. 54 см². 106. 75 см² або 50 см².

Тема 1

§ 1

1.15. $C(7; -3)$ або $C(2; 4)$. 1.16. 1) $x_A = y_A$, $x_A \geq 0$; 2) $x_A = -y_A$, $x_A \leq 0$. 1.17. 2) Відстань від точки $M(x; y)$ до осі абсцис дорівнює $|y|$, а до осі ординат $-|x|$. 1.19. $(-4; 0)$, $(0; 5)$, $(4; 0)$, $(0; -5)$ або $(-5; 0)$, $(0; 4)$, $(5; 0)$, $(0; -4)$. 1.20. $(-3; 0)$, $(0; 3)$, $(3; 0)$, $(0; -3)$. 1.21. $B(1; 3)$, $C(1; 5)$, $D(3; 5)$, або $B(5; 3)$, $C(5; 5)$, $D(3; 5)$, або $B(1; 3)$, $C(1; 1)$, $D(3; 1)$, або $B(5; 3)$, $C(5; 1)$, $D(3; 1)$. 1.22. Прямі $x = -3$ і $x = 3$. 1.23. Прямі $y = -2$ і $y = 2$. 1.25. 9,5 см, 10,5 см. 1.29. 500 відер. 1.30. 1) 44 см; 2) 8 см.

§ 2

2.13. X ст. 2.14. 5 місце. 2.21. 1) $\sin \alpha = 0,8$, $\operatorname{tg} \alpha = -1\frac{1}{3}$; 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ або $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. 2.22. 1) $\sin \alpha = 0,96$, $\operatorname{tg} \alpha = -3\frac{3}{7}$; 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$ або $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = -1$. 2.24. 1) -1 ; 2) $\sqrt{3}$. 2.25. 1) $\frac{1}{6}$; 2) 0. 2.26. 1) $\alpha = 118^\circ$; 2) $\alpha = 68^\circ$ або $\alpha = 112^\circ$. 2.27. 1) $\beta = 145^\circ$; 2) $\beta = 80^\circ$ або $\beta = 100^\circ$. 2.28. Порада. 1) Використати $\cos \alpha = -\cos(180 - \alpha)$. 2) Існує два кути, що задовольняють умову. 2.30. 0. 2.31. 1) 1; 2) 5. 2.32. 1) 1; 2) 6. 2.34. 25 см. 2.35. $2\sqrt{ab}$ см. 2.39. 24 куці. 2.40. 5 см.

§ 3

3.9. 1225 м. 3.18. $N(-5; 5)$. 3.19. $D(4; -31)$. 3.20. 1) Так; 2) ні. 3.21. $\sqrt{26}$. 3.22. $2\sqrt{2}$. 3.23. 26. 3.24. 34. 3.25. 5. 3.26. 13. 3.27. 24. 3.28. $10\sqrt{2}$. 3.29. $y = 22$ або $y = -8$. 3.30. $x = 10$ або $x = -4$. 3.31. $(-3; 0)$. 3.32. $(0; 8)$. 3.33. $N(3,5; 5)$. 3.34. $D(11; 4,5)$. 3.35. В між А і С. 3.36. М між Р і L. 3.39. $-2 \pm 2\sqrt{3}$. 3.40. $\angle A \approx 8^\circ 8'$, $\angle B \approx 81^\circ 52'$. 3.41. $\angle M \approx 26^\circ 34'$, $\angle L \approx 63^\circ 26'$. 3.43. 14 см.

3.44. 50 см. 3.45. Одна з невідомих сторін дорівнює 25 см, а інша — $5\sqrt{17}$ см або $5\sqrt{65}$ см. 3.50. 0,5 м.

§ 4

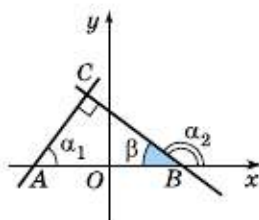
4.18. 3 золотих медалі, 1 срібна медаль. 4.23. $(x - 11)^2 + y^2 = 100$ або $(x + 1)^2 + y^2 = 100$. 4.24. $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ або $x^2 + (y + 1)^2 = 25$. 4.25. 1) Ні; 2) так. 4.26. 1) Так; 2) ні. 4.27. 1) С; 2) В; 3) А і D. 4.28. $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 169$. 4.29. $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 100$. 4.30. 1) Зовнішній дотик; 2) немає спільних точок. 4.31. 1) Перетин; 2) внутрішній дотик. 4.32. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. 4.36. А(1; 9), В(4; 0). 4.40. 1) 200 кг; 2) 11 000 грн; 3) 2400 кг; 4) 168 000 грн; 5) 157 000 грн.

§ 5

5.22. $10x - y - 2 = 0$. 5.23. $5x + y - 20 = 0$. 5.24. $(-3; -2)$. 5.25. $(-4; -5)$. 5.28. 1) $x + y + 5 = 0$; 2) $\sqrt{3}x - y + (4\sqrt{3} - 1) = 0$. 5.29. 1) $x - y + 3 = 0$; 2) $\sqrt{3}x + y - (5 + 2\sqrt{3}) = 0$. 5.32. $a = -5$. 5.33. $b = -4$. 5.34. $2x - y + 4 = 0$. 5.35. $3x + y - 3 = 0$. 5.36. Доведення (мал. 1). Розглянемо прямі CA і CB , $CA \perp CB$, $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$. Тоді $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot (-\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha_2)) = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot (-\operatorname{tg} \beta) = -\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha_1) = -\frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{\sin(90^\circ - \alpha_1)}{\cos(90^\circ - \alpha_1)} = -\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1} = -1$.

Отже, $k_1 k_2 = -1$. Нехай прямі задано рівняннями $y = k_1 x + l_1$ і $y = k_2 x + l_2$, де $k_1 \neq 0$ і $k_2 \neq 0$, та $k_1 k_2 = -1$ (мал. 1). Тоді $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$, а тому $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \beta = 1$, $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$. Можна довести, що для гострого кута α справ-

джується рівність $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}$. Тому $\alpha_1 = 90^\circ - \beta$, $\alpha_1 + \beta = 90^\circ$, а отже, $\angle ACB = 90^\circ$. 5.37. $2x + y - 1 = 0$. 5.38. $3x - y - 7 = 0$. 5.42. Так.



Мал. 1

Вправи для повторення теми 1

16. 1) $\sin^2 \alpha$; 2) $\cos^2 \alpha$. 17. 1) «Мінус»; 2) «мінус». 18. 1) Так; 2), 3) ні. 20. 1. 22. Порада. Розгляньте два випадки. 26. 1) Рівнобедрений; 2) рівносторонній; 3) різносторонній. 30. $(0; 0)$, $(-6; 0)$, $(0; 8)$. 31. $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. 32. $F(5; 12)$. 34. 1) Так; точка В між точками А і С; 2) ні. 36. $(0; 2)$. 38. $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. 48. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ або $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. 49. $(3; 3)$, або $(3; -3)$, або $(-3; 3)$, або $(-3; -3)$. 50. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ або $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$. 51. $(x - 4)^2 + y^2 = 25$. 52. $(14; 0)$. Порада. Спочатку запишіть рівняння кола, для якого АВ є діаметром. 53. Коло $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. 54. 1) Перетин; 2) зовнішній дотик. 63. $a = 0,2$, $b = 0,2$. 65. Так. 68. 36. 69. $x - y + 3 = 0$. 71. $y = 6$, $y = -4$. 72. $(8; 1)$, $(7; 4)$, $(7; -2)$. 74. $x - 2y + 6 = 0$.

Повторюємо алгебру за 8 клас

17. 1) $\frac{a-1}{2a+b}$; 2) $\frac{3}{xy}$; 3) $-\frac{1}{2x+6}$; 4) $-\frac{x(y+2)}{3(a+2)}$. 18. 1) $\frac{x-1}{3x+y}$; 2) $-\frac{5}{ab}$; 3) $\frac{1}{3x-6}$;
 4) $-\frac{p(m+3)}{4(a+3)}$. 19. 37 років. 21. 1954 р. 22. 1576 р. 23. 1) 64; 2) 1; 3) 0,25;
 4) 81; 5) -5; 6) 0,01. 24. 1) 0,2; 2) 7; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 2; 5) $-\frac{1}{9}$; 6) 1. 25. *Порада.* Після спрощень виразу отримаємо -1. 26. Ні. *Порада.* Після спрощень отримаємо 1. 27. 3. 28. 6 місце. 29. 1) 2; 4; 2) 3 - $\sqrt{17}$. 30. 3. 35. 10,4 млн га. 45. 1) 9; 2) 7; 3) -1; 11; 4) коренів немає; 5) -6; 6) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 46. 1) коренів немає; 2) 23; 3) -9; 4) -4; 10; 5) -4; 4; 6) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. 47. 1) $7\frac{59}{88}$; 2) 4; 3) 220; 4) 216.
 48. 1) $4\frac{27}{40}$; 2) 5; 3) 70; 4) 125. 49. 1) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-5}$; 2) $\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt[3]{7}$. 50. 1) $\frac{\sqrt{y}+6}{\sqrt{y}}$;
 2) $\frac{\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}$; 3) $\sqrt{6,5}$. 51. 1) 0; 3; 2) 4. 52. 1) -2; 0; 2) 1. 53. 1) -5; 4; 2) $\pm\sqrt{2}$;
 3) $\pm\sqrt{3}$; ± 1 . 54. 1) -12; 13; 2) $\pm\sqrt{33}$; 3) 0; ± 2 . 55. 1) 12; 2) 64. 56. 1) 10; 2) 36.
 73. $a = 2$; $b = -4$. 74. $b = 3$; $c = -18$. 75. 1) 0; 1; 2) -1; 1; 3) -1,25; 2; 4) -2.
 76. 1) 0; -4; 2) -1; 1; 3) -1; $1\frac{1}{9}$; 4) -1. 77. 1) $1\frac{1}{3}$; 2) -1; 3) 1804 р. 78. 1) $-\frac{1}{5}$;
 5; 2) $-\frac{14}{5}$; 2; 3) 4-те місце. 79. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$; $p = 1$ або $x_1 = 3$, $x_2 = -2$; $p = -1$.
 80. $x_1 = 4$, $x_2 = -1$; $q = -4$. 81. 1) $\frac{4}{x+1}$; 2) $\frac{x+2}{2x-1}$; 3) $\frac{x+3}{1-x}$. 82. 1) $\frac{x-3}{2}$; 2) $\frac{3x+1}{x+3}$;
 3) $\frac{x-2}{1-x}$. 83. 1) -10; 2) -2,8; 3) коренів немає; 4) 2. 84. 1) -2; 2) $\pm\sqrt{7}$;
 3) 10; 4) коренів немає. 85. 90 км/год; 80 км/год. 86. 12 км/год; 16 км/год.
 87. 1) $1 \pm \sqrt{3}$; 2) 9; 1; 3) 4. 88. 1) -1; 2) 4; 1; 3) 1. 89. 1) $-\frac{1}{16}$; 2) 0; -4. 90. 1) -4;
 4; 2) 0; -9. 91. 1) -3; 1; 2) -3; 2. 92. 1) 1; 3; 2) -1; 2; $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Тема 2

§ 6

- 6.16. 1) $\sqrt{5} - 2 = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$; 2) $\sqrt{7} + \sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$. 6.17. 1) $\sqrt{3} - 1 > \frac{1}{\sqrt{3}+1}$;
 2) $4 + \sqrt{15} = \frac{1}{4 - \sqrt{15}}$. 6.18. 1) *Порада.* $a^2 + 10a + 26 = (a + 5)^2 + 1$.
 6.23. 2) *Порада.* $a^2 + b^2 - (4(a + b) - 8) = (a - 2)^2 + (b - 2)^2$; 3) $m^2 + n^2 + 1 -$
 $-(m + n + mn) = \frac{(m^2 - 2mn + n^2) + (m^2 - 2m + 1) + (n^2 - 2n + 1)}{2}$. 6.24. 3) *По-*

рада. Доведіть, що $(a + 1)^3 - 4(a^3 + 1) = -3(a + 1)(a - 1)^2$. 6.26. 2) Порада. $\frac{3m}{5n} + \frac{5n}{12m} - (-1) = \frac{(6m + 5n)^2}{60mn}$. 6.28. $m^3 + n^3 > mn(m + n)$. 6.29. Добуток першого і четвертого виразів менший від добутку другого і третього. 6.30. Перша. 6.31. Поліна. 6.34. 8 днів. 6.35. 1,5. 6.36. 5010 грн. 6.40. $65\frac{5}{11}$ км/год.

§ 7

7.17. 1) $a > 0$; 2) $a < 0$; 3) $a > 0$; 4) $a > 0$. 7.18. 1) $x < 0$; 2) $x > 0$; 3) $x > 0$; 4) $x < 0$. 7.19. 1) Так; 2) ні. 7.20. 1) $x + 2 > y$; 2) $y - 3 < x$; 3) $-x + 1 < -y + 1$; 4) $-x < -y + 8$; 5) $-(x + 1) < -y$; 6) порівняти неможливо. 7.21. 1) $a - 2 < b$; 2) $b + 3 > a$; 3) $-a + 2 > -b + 2$; 4) $-b - 7 < -a$; 5) $-a > -(b + 3)$; 6) порівняти неможливо. 7.22. 1) $3,1 < 2x + 0,7 < 3,7$; 2) $3,5 < 5 - x < 3,8$; 3) $-0,6 < \frac{x}{3} - 1 < -0,5$; 4) $-13 < 2 - 10x < -10$. 7.23. 1) $2,2 < 3a - 0,2 < 3,4$; 2) $2,8 < 4 - a < 3,2$; 3) $3,4 < \frac{a}{2} + 3 < 3,6$; 4) $4 < 10 - 5a < 6$. 7.24. 1) $4 < \frac{20}{a} < 10$; 2) $0,1 < \frac{1}{3a + 4} < 1$. 7.25. 1) $10 < \frac{100}{x} < 20$; 2) $0,2 < \frac{1}{2x - 3} < 1$. 7.26. $42 < a < 50$. 7.27. $48 < p < 51$. 7.28. 1) $x > y$; 2) $x < y$. 7.29. 1) $a < b$; 2) $a > b$. 7.30. $3 < \frac{12}{7 - 3a} < 12$. 7.31. $3 < \frac{27}{13 - 2b} < 9$. 7.32. $\frac{6}{x} > 3$ або $\frac{6}{x} < -3$. 7.34. 1) -3 ; 2) -4 . 7.36. 12,25. 7.37. Модель B ($R = 32,5$), модель A ($R = 28$). 7.38. Говерла, Дніпро.

§ 8

8.11. 1) $-1 < 3a + b < 46$; 2) 45 перемог. 8.12. 1) $-2 < 2x + y < 9$; 2) 8 медалей. 8.16. Ні. 8.19. 1) $2,5 < \frac{a}{b} < 10$; 2) $\frac{2}{15} < \frac{4b}{3a} < \frac{8}{15}$. 8.20. 1) $\frac{2}{5} < \frac{x}{y} < 4$; 2) $\frac{5}{8} < \frac{5y}{2x} < \frac{25}{4}$. 8.21. $10,8 < P < 12,4$. 8.22. $28 < P < 34$. 8.23. $63^\circ < \angle A < 70^\circ$. 8.26. Порада. Використайте нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним та почленне множення нерівностей. 8.27. Див. пораду до попереднього номера. 8.28. Порада. Використайте $x + \frac{1}{x} \geq 2$, коли $x > 0$. 8.29. $2810 < M < 2875$. 8.31. 100 г 6-відсоткового і 200 г 3-відсоткового. 8.32. $4\frac{2}{3}$. 8.34. 1) 96,5 км/год; 2) 0,63 км/год. 8.39. 1.

§ 9

9.10. -1 ; -2 . 9.11. 1; 2; 3; 4. 9.12. 1) Будь-яке число, крім 0; 2) будь-яке число, крім 0; 3) будь-яке число; 4) $x = 0$; 5) будь-яке число, крім 1; 6) будь-яке число; 7) немає розв'язків; 8) $x = 1$; 9) немає розв'язків. 9.13. 1) Будь-яке число; 2) будь-яке число, крім -2 ; 3) немає розв'язків; 4) $x = -2$; 5) немає розв'язків; 6) будь-яке число. 9.14. 1) Будь-яке число, крім -2 ; 2) немає розв'язків; 3) будь-яке число, крім 0; 4) будь-яке число, крім 0 і -1 ; 5) будь-

яке число, більше за 0; 6) 1 і будь-яке число, менше від 0. 9.15. 1) Будь-яке число, крім 3; 2) немає розв'язків; 3) будь-яке число, крім 0; 4) будь-яке число, крім 0 і 1; 5) будь-яке додатне число, крім 3; 6) будь-яке від'ємне число.

9.19. ≈ 122 см. 9.26. На $16\frac{2}{3}\%$.

§ 10

10.13. 2) 18 медалей. 10.22. 60 км/год. 10.23. 6 або -6. 10.27. 1) На 5-й хв; 2) за 5 хв; 3) за 2 хв; 4) на 30°C . 10.28. -4; 2.

§ 11

11.25. 1) $a > 0$; 2) $a < 0$. 11.26. 1) $b > 0$; 2) $b < 0$. 11.28. 1) 1; 2; 3; 2) 1; 2; 3; 4; 5. 11.29. 1) 1; 2; 2) 1; 2; 3. 11.30. 1885 р. 11.31. 1710 р. 11.32. 1) 9; 2) 0. 11.33. 1) 5; 2) 0. 11.34. 1), 3) $(-\infty; +\infty)$; 2), 4) немає розв'язків. 11.35. 1), 3) Немає розв'язків; 2), 4) $(-\infty; +\infty)$. 11.36. Меншою від 12 см. 11.37. 1) $a > -7$; 2) $a > -2$. 11.38. 1) $a = 0$; 2) $a = 3$. 11.39. 1) $b < -4,5$; 2) $-4 < b < 0$ або $b > 0$. 11.40. 1) $a > -4$; 2) $a > 9$. 11.41. 48. 11.42. 51. 11.43. 41 банка. 11.44. 20 ві-дер. 11.45. 1) Якщо $a < 0$, то $x < \frac{3}{a}$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $x > \frac{3}{a}$; 2) якщо $a < 0$, то $x \leq 0$; якщо $a = 0$, то x - будь-яке число; якщо $a > 0$, то $x \geq 0$; 3) якщо $a < 0$, то $x > 0$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; якщо $a > 0$, то $x < 0$; 4) якщо $a < 0$, то $x < -\frac{5}{a}$; якщо $a = 0$, то x - будь-яке число; якщо $a > 0$, то $x > -\frac{5}{a}$. 11.48. 2 км/год. 11.51. 2376 грн. 11.54. Остан-нє, у неї 30 % перемог.

§ 12

12.17. 1) 6; 7; 2) 1; 2. 12.18. 1) -5; -4; -3; -2; -1; 2) 7; 8. 12.19. 82 ме-далі. 12.20. 1) 1; 2) -2. 12.21. 1) 1; 2) -1. 12.22. У 2020 р. 12.27. 1), 3) Не-має розв'язків; 2) $x < 2,8$; 4) x - будь-яке число. 12.28. 1) Немає розв'язків; 2) $x < 10$. 12.29. 1) $[3; 5) \cup (5; 7)$; 2) $(5; 10)$. 12.30. 1) $[2; 4) \cup (4; 6)$; 2) $(3; 8)$. 12.31. Більше за 1 см, але менше ніж 6 см. 12.32. 2) 26 кг. 12.33. 2) 6 грн. 12.34. $-1 < a < 0$. 12.35. $a > 3$. 7.39. 1) $15 < 2x - y < 38$; 2) $2 < \frac{x}{y} < 10$. 12.40. $m < -\frac{1}{2}$. 12.41. За 60 хв. 12.42. Немає коренів.

Вправи для повторення теми 2

3. 2), 3). 5. 1) $m > 0$; 2) $m < 0$; 3) $m < 0$; 4) $m > 0$. 7. 1) $a^3 - b^3 \geq ab(b - a)$; 2) $m^2 + n^2 \geq \frac{1}{2}$. 8. Перша. 9. Площа квадрата більша. 14. 1) $8x > 5y$; 2) $3x > y$; 3) $-3x < -y$; 4) $-5x < -2y$. 16. 1) $2a - 10 > 0$; 2) $35 - 7a < 0$. 17. 1) $1 < |x| < 3$; 2) $0 \leq |x| < 7$. 21. 1), 3) Так; 2), 4) ні. 22. $81 < S < 100$. 23. 1) $3m + 2n > 12$; 2) $b - 3a < 0$; 3) порівняти неможливо; 4) $p - 4q < 9$. 24. 1) $5 < a^2 + 2a + 5 < 8$; 2) $-4 < x^2 - 4x < -3$; 3) $\frac{3}{20} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{3}{10}$;

- 4) $-6 < \frac{1}{mn} - 7 < -3\frac{2}{3}$. 25. $x > y$. 26. $20 < S < 60$. 31. 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. 32. -1 і -2. 36. Найменше число 1,6, найбільшого не існує. 44. 30. 45. 1) $[11; +\infty)$; 2) $[5; 7) \cup (7; +\infty)$. 46. Більшою за 9 см. 47. 7, 8, 9 або 10. 48. 1) $a > 1$; 2) $a < 0$ або $0 < a < \frac{1}{4}$. 49. 1) Якщо $a < -3$, то $x \leq \frac{a-5}{a+3}$; якщо $a = -3$, то x - будь-яке число; якщо $a > -3$, то $x \geq \frac{a-5}{a+3}$; 2) якщо $a < 3$, то $x > -3$; якщо $a = 3$, то розв'язків немає; якщо $a > 3$, то $x < -3$; 3) якщо $a < -1$, то $x < a - 1$; якщо $a = -1$, то розв'язків немає; якщо $a > -1$, то $x > a - 1$; 4) якщо $a < -2$ або $a > 2$, то $x \leq \frac{1}{a+2}$; якщо $a = -2$, то розв'язків немає; якщо $-2 < a < 2$, то $x \geq \frac{1}{a+2}$; якщо $a = 2$, то x - будь-яке число. 54. 1) 1; 2; 3; 2) натуральних розв'язків немає. 56. 2) $[8; 9]$. 57. 19. 59. 1) $a > 5$; 2) $a \geq 2$. 60. 56. 61. 1) Якщо $a \leq 2$, то розв'язків немає; якщо $a > 2$, то $2 < x < a$; 2) якщо $a \leq 6$, то $x > 6$; якщо $a > 6$, то $x > a$. 62. $a < -0,5$ або $a > 1,5$. 63. $0 \leq a \leq 8$.

Фіскальна математика

1. На 3 059 025 тис. грн. 2. На 915 грн. 3. 3350 грн. 4. 80 грн. 5. 1) 2000 грн; 2) 24 000 грн. 6. 1) 12 000 грн; 2) 11 880 грн.

Тема 3

§ 13

- 13.18. Ні. 13.19. $N(3; 0)$. 13.20. $K(1; 0)$. 13.21. $|\overline{DC}| = 3$, $|\overline{AD}| = 4$, $|\overline{BD}| = 5$, $|\overline{AM}| = \sqrt{13}$. 13.22. $|\overline{BD}| = 4\sqrt{2}$, $|\overline{AB}| = 4$, $|\overline{DN}| = 2$, $|\overline{BN}| = 2\sqrt{5}$. 13.24. 1) $ABCD$ - ромб; 2) $ABCD$ - трапеція. 13.25. 1) $\overline{BE} \parallel \overline{CE}$, $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$, $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CF}$; 2) $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CF}$, $\overline{BE} \uparrow\uparrow \overline{AD}$; 3) $\overline{BE} \uparrow\downarrow \overline{CE}$, $\overline{AD} \uparrow\downarrow \overline{CE}$; 4) $\overline{AB} = \overline{CF}$; 5) $|\overline{AB}| = |\overline{CF}|$, $|\overline{BE}| = |\overline{CE}|$. 13.26. 1) $\overline{AE} \parallel \overline{CF}$, $\overline{AF} \parallel \overline{DF}$, $\overline{AF} \parallel \overline{EC}$, $\overline{DF} \parallel \overline{EC}$; 2) $\overline{AF} \uparrow\uparrow \overline{EC}$; 3) $\overline{AE} \uparrow\downarrow \overline{CF}$, $\overline{AF} \uparrow\downarrow \overline{DF}$, $\overline{DF} \uparrow\downarrow \overline{EC}$; 4) $\overline{AF} = \overline{EC}$; 5) $|\overline{AF}| = |\overline{EC}|$, $|\overline{AE}| = |\overline{CF}|$. 13.28. $A(-5; 0)$ або $A(19; 0)$. 13.30. $5,20 \text{ м}^2$. 13.31. 5, якщо $y = 3 - \frac{3}{4}x$, де $x \in [0; 4]$. *Порада.* Розглянемо деяку точку $M(x; y)$ та точки $A(0; 3)$ і $B(4; 0)$. Тоді заданий в умові вираз є сумою $MA + MB$. Ця сума набуває найменшого значення, якщо точка M належить відріzk AB .

§ 14

- 14.13. 23 медалі. 14.14. 3 місце. 14.17. $(2; -2)$. 14.18. $(1; 1)$. 14.19. $(-9; 12)$. 14.20. $(4; -8)$. 14.21. $(a + c; b)$. 14.22. $M(-3; 6)$. 14.25. $x = 4$ або $x = -4$. 14.26. $y = 6$ або $y = -6$. 14.29. $\vec{a}(3; 1)$ або $\vec{a}(-1; -3)$. 14.30. $\vec{b}(-1; 2)$ або $\vec{b}(2; -1)$. 14.31. $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 13$. 14.34. 48 см. 14.35. 4320 грн. 14.36. Так, $\angle ANB = 90^\circ$.

§ 15

15.11. 3 рази. 15.13. 1) $\overline{AD}$; 2) нуль-вектор; 3) $\overline{CD}$; 4) нуль-вектор. 15.14. 1) $\overline{CD}$; 2) нуль-вектор. 15.18. $K(5; -4)$. 15.19. $A(3; -9)$. 15.20. $x = -5$. 15.21. $y = 8$. 15.23. 3 см. 15.24. $\frac{7}{8}$. 15.25. Примітка. Візьміть до уваги максимальні розміри бруса. 20,7 см і 29,3 см.

§ 16

16.17. 1) 13; 2) $\sqrt{130}$. 16.18. 1) 17; 2) $\sqrt{85}$. 16.19. 1) $\vec{m}(3; -4)$; 2) 5 разів. 16.22. 1) $m = 15$; співнапрямлені; 2) $m = 2$; протилежно напрямлені. 16.23. 1) $n = -2$; протилежно напрямлені; 2) $n = 4$; співнапрямлені. 16.24. -4 . 16.25. 2. 16.26. $\overline{BO} = -\frac{1}{2}(\overline{DA} + \overline{DC})$. 16.28. $\vec{a}(-4; 3)$ або $\vec{a}(4; -3)$. 16.29. $\vec{b}(10; -24)$ або $\vec{b}(-10; 24)$. 16.32. $A\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$. 16.34. 14 см, $55\sqrt{3}$ см². 16.35. 72° . 16.36. 500. 16.37. $2\sqrt{5}$ см.

§ 17

17.16. $x = 10$. 17.17. $y = 8$. 17.18. 45° . 17.19. 135° . 17.20. 45° ; 90° ; 45° ; прямокутний. 17.21. $\cos K = 0$, $\cos M = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos L = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, прямокутний. 17.22. 1) 0° ; 2) 60° ; 3) 180° ; 4) 120° . 17.23. -6 ; 16. 17.24. 12; 0. 17.27. 18 годин. 17.29. 1) $\sqrt{31}$; 2) $\sqrt{19}$. 17.30. 1) $\sqrt{39}$; 2) $\sqrt{181}$. 17.31. 120° . 17.33. $\vec{a}(2; -8)$. 17.34. $\vec{b}(9; -3)$. 17.35. 0. 17.36. 20. 17.37. $\vec{d}(3; 6)$ або $\vec{d}(-3; -6)$. 17.38. $\vec{c}(5; 1)$ або $\vec{c}(-5; -1)$. 17.39. 12. 17.41. $m = 4$ або $m = -4$. 17.42. Ромб. 17.43. Так. 17.44. $d\sqrt{2}$.

Вправи для повторення теми 3

7. $|\overline{AC}| = 13$, $|\overline{DC}| = 5\sqrt{2}$, $|\overline{BD}| = \sqrt{74}$. 9. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) так. 10. 20. 16. 1) $C(-8; 11)$; 2) $C(1; -1)$. 19. $x = 3$ або $x = -3$. 21. $\vec{c}(1; 4)$. 26. $\overline{BC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overline{CD} = \vec{b} - \vec{a}$. 27. 1) $\overline{AD}$; 2) $\vec{0}$. 28. 1), 2) Так; 3) ні. 32. $|\vec{c}| > |\vec{d}|$. 33. Якщо $x = 3$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$; якщо $x = -3$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$. 35. $-\frac{1}{2}$. 38. $\vec{c}(4; 6)$, $\vec{d}(3; 2)$. 40. $x = 5$. 47. $\frac{13}{85}$. 48. 1) $y < 8$; 2) $y = 8$; 3) $y > 8$. 49. $\angle A = 90^\circ$, $\angle B \approx 53^\circ$, $\angle C \approx 37^\circ$. 52. -223 . 53. $-\frac{5}{11}$. 54. $-\frac{3}{5}$.

Тема 4

§ 18

18.4. 29 медалей. 18.5. У 19 років. 18.19. 7) x – будь-яке число; 8) $(-\infty; -1) \cup (-1; 5) \cup (5; +\infty)$; 9) $[2; +\infty)$; 10) $(-2, 5; +\infty)$. 18.20. 7) x – будь-яке число; 8) $(-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$; 9) $[-3; +\infty)$; 10) $(3, 5; +\infty)$. 18.22. $k = -3$, $l = 5$. 18.23. $k = 3$, $l = -7$. 18.24. 1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3]$; 3) $[2; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$;

5) $[5; +\infty)$; 6) $(-\infty; 9]$. 18.30. $c = 3$, $x_2 = 1$. 18.31. $-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. 18.32. Один.
18.33. 12 628 грн. 18.37. 50.

§ 19

19.12. 1) $(0; 3)$, $(-3; 0)$; 2) $(0; \sqrt{2})$, $(-2; 0)$; 3) $(0; -1)$, $(1; 0)$; 4) $(2; 0)$.
19.13. 1) $(0; -5)$, $(5; 0)$; 2) $(0; 3)$, $(-9; 0)$; 3) $(0; 1)$, $(-2; 0)$; 4) $(-3; 0)$. 19.18. 1) 3;
2) 2. 19.19. 1) 2; 2) 2. 19.23. 1) $x > 1$; 2) $-10 \leq x < -4$. 19.24. 70 км/год і 80 км/год.
19.25. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $c = 6$. 19.26. 7 хв. 19.28. Перший дріб менший.

§ 20

20.15. 1) $x = -3$, $x = 1$; 2) $[-4; +\infty)$; 3) $-3 < x < 1$; 4) $[-1; +\infty)$.
20.16. 1) $x = 1$, $x = 3$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $x < 1$ або $x > 3$; 4) $(-\infty; 2]$.
20.17. 1) $x = 5$; 2) $x = -3$, $x = 0$. 20.18. 1) $x = 3$; 2) $x = 0$, $x = 5$.
20.19. *Порада.* $\frac{x+4}{x-2} = \frac{x-2+6}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{6}{x-2} = \frac{6}{x-2} + 1$. 20.20. *По-
рада.* $\frac{x+5}{x+1} = \frac{x+1+4}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{4}{x+1} + 1$. 20.21. 2) $a = 4$.
20.23. $-2 \leq x < 5$. 20.24. 10. 20.25. 2 с. 20.30. 1) 4; 2) 7.

§ 21

21.20. $y = \frac{1}{12}x^2$. 21.23. $a = -10$. 21.24. $b = 2$. 21.25. 1) $b = 2$; 2) $b = -10$.
21.26. $a = -3$. 21.27. 1) $(2; 2)$ і $(5; 5)$; 2) $(4; -4)$ і $(2; -2)$. 21.28. 1) $(0; 0)$
і $(6; 6)$; 2) $(2; -2)$ і $(-5; 5)$. 21.30. $(2,5; 8)$ і $(2; 7)$. 21.31. $(1; -5)$ і $(0,2; -4,2)$.
21.32. $\approx 10,6$ с. 21.33. 1) 125 м; 2) піднімалася в перші 5 с, спускалася в на-
ступні 5 с; 3) через 10 с. 21.34. 1) 11,25 м; 2) піднімався в перші 1,5 с,
спускався в наступні 1,5 с; 3) через 3 с. 21.35. $b = -10$, $c = 32$. 21.36. $a = 2$,
 $c = 5$. 21.37. $a = 1$, $b = -6$, $c = 7$. 21.38. 1) 25 с; 2) 50 с. 21.39. 1) 5 с; 2) 20 с.
21.40. $c = 7$. 21.41. $c = 8$. 21.42. $c > 16$. 21.43. $c < -1$. 21.50. 1. 21.51. 1) -3 ; 3;
2) -2 ; 2; 3. 21.52. 1031 особа. 21.55. На 11.

Вправи для повторення теми 4

7. 1), 3), 4) Так; 2) ні. 8. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup$
 $\cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup$
 $\cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 6) $(2; 5) \cup (5; +\infty)$; 7) $x = 0$; 8) $x = -1$;
9) $x = 0$. 9. 1) 0; 2) 0; 3) $[0; 2]$; 4) $(0; 1]$; 5) $[-2; +\infty)$; 6) $\left[0; \frac{1}{4}\right]$. 13. 1) Не іс-
нують; 2) 1; 3) 10. 14. 1) $(-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2)$. 20. 1) $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$;
2) $x = 0$; 3) немає таких проміжків; 4) $(-\infty; -3)$ і $(-3; +\infty)$; 5) $-3 < x < 0$;
6) $x < -3$ або $x > 0$. 21. $a = 2$. 28. $c = 9$. 29. $a = -2$. 30. 1) $[0; 8]$; 2) $[-27; 0]$.
31. $(-1; 4)$, $(5; 10)$. 32. $p = -5$; $q = 8$. 34. $x = 4$. 35. 1) $-0,5$; 2) -1 . 36. 1) $a > 0$,

- $b < 0, c > 0, D = 0$; 2) $a < 0, b < 0, c > 0, D > 0$; 3) $a > 0, b > 0, c > 0, D < 0$; 4) $a < 0, b > 0, c < 0, D > 0$. 38. $a > \frac{8}{7}$. 44. 1) $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$; 2) $[3; 6]$; 3) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup [1; +\infty)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. 45. Менша від 5 см. 46. $0 < x \leq 7$. 47. $-1,5 \leq x \leq -\frac{4}{3}$. 48. 1) $c = 16$; 2) $c = 9$. 49. 1) $[-2; -1) \cup (1; 2]$; 2) $[-3; -1) \cup (0; 2]$. 50. $a = -2$. 51. $m < -\frac{1}{7}$ або $m > 1$. 52. Якщо $a \leq -6$ або $a \geq -1$, то $x_{1,2} = a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 7a + 6}$; якщо $-6 < a < -1$, то розв'язків немає. 53. 1) Якщо $a < 2$, то $-2 < x < -a$; якщо $a = 2$, то розв'язків немає; якщо $a > 2$, то $-a < x < -2$; 2) якщо $a < -1$, то $x \leq 2a$ або $x \geq -a - 3$; якщо $a = -1$, то x – будь-яке число; якщо $a > -1$, то $x \leq -a - 3$ або $x \geq 2a$. 54. 1) Якщо $m \leq -2$, то $x < m$; якщо $-2 < m \leq 3$, то $x \leq -2$; якщо $m > 3$, то $x \leq -2$ або $3 \leq x < m$; 2) якщо $m \leq -4$, то $-4 < x < 2$; якщо $-4 < m < 2$, то $m \leq x < 2$; якщо $m \geq 2$, то система не має розв'язків. 58. 1) (2; 5); 2) система не має розв'язків. 59. 1) (6; 2), (2; 6); 2) (3; -4), (-3; 4), (-4; 3), (4; -3). 60. 1) (3; 2), (-3; 2), (-3; -2), (3; -2); 2) (3; -2), (-3; -2); 3) (2; -1), (-2; 1); 4) (6; 10). 61. 1) (4; 1); 2) (-1; 0), (0; -1), (1; 0). 62. 1) (-1; -2), (-2,5; -1); 2) (3; 1), (-3; -1). 63. 1) (6; 2), $\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$; 2) (2; 1), $\left(\frac{126}{11}; -\frac{54}{11}\right)$. 64. 5 і 2 або -2 і -5. 65. 5 і 7. 66. 4 см і 8 см. 67. 4 і 5 або 15 і $\frac{4}{3}$. 68. 12 см і 9 см. 69. 4 см і 5 см. 70. 35. 71. 28 см або 26 см. 72. 90 км/год і 80 км/год. 73. 8. 74. 7. 75. 25 або 85. 76. 100×80 м. 77. 20 год і 30 год. 78. 20 іграшок.

Тема 5

§ 22

- 22.10. $\angle A = 90^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 30^\circ$. 22.11. 135° . 22.12. 30° . 22.13. 1) Гострокутний; 2) прямокутний; 3) тупокутний. 22.14. 1) Тупокутний; 2) прямокутний; 3) гострокутний. 22.15. $\sqrt{106}$ см. 22.16. $\sqrt{34}$ см. 22.17. 13 см. 22.18. $\frac{1}{2}\sqrt{145}$ см. 22.19. 20 см. 22.20. 30 см. 22.21. 6 см, 10 см, 14 см. 22.22. 15 см, 21 см, 24 см. 22.23. 3 см або 5 см. 22.24. 7 см. 22.25. 8 см і 14 см. 22.26. 10 см і 15 см. 22.27. 26 см. 22.28. 12 см і 14 см. 22.29. $\sqrt{10}$ см. 22.30. 14 см. 22.33. 8 см і 15 см. 22.34. $3\sqrt{10}$ см. 22.35. $2\sqrt{13}$ см або $2\sqrt{109}$ см. 22.36. $\sqrt{65}$ см або $\sqrt{233}$ см. 22.37. 32 см. 22.38. 30 см. 22.39. $\frac{\sqrt{274}}{4}$ см. 22.40. $\frac{\sqrt{595}}{7}$ см. 22.41. $6\sqrt{145}$ см. *Порада.* Якщо M – точка перетину медіан, то $AM = \frac{2}{3}AP, BM = \frac{2}{3}BN$. Медіана $\triangle AMB$, що проведена з вершини M , дорівнює третині невідомої медіани $\triangle ABC$. 22.42. $\frac{4d\sqrt{3}}{3}$. 22.45. 25 см.

22.46. 75 см^2 . 22.47. $c \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$, $c \cos\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$. 22.52. 1) 153 плитки; 2) 18 972 грн. 22.53. 90° .

§ 23

23.17. 30° . 23.18. 30° . 23.19. 60° або 120° . 23.20. 45° або 135° . 23.21. 45° або 135° . 23.22. 30° або 150° . 23.23. 12 см. 23.24. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см. 23.25. 2 см. 23.26. $(3\sqrt{3} + 5)$ см. 23.27. $AB = (3 + \sqrt{6})$ см, $AC = (2 + \sqrt{6})$ см. 23.28. 7 см або $\sqrt{97}$ см. 23.29. $\frac{2d}{\sin(\alpha + \beta)}(\sin \alpha + \sin \beta)$. 23.30. $\frac{m \sin \alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$. 23.31. $\frac{c \cos \alpha \sin \alpha}{\sin(45^\circ + \alpha)}$. 23.33. 7 см. 23.34. $\frac{d}{2}\sqrt{4a^2 - d^2}$. 23.35. $a^2 : b^2$. 23.38. 37° . 23.39. *Порада*. Нехай точка O – точка перетину діагоналей прямокутника, N – деяка точка кола, L і M – основи перпендикулярів, які проведено з точки N до діагоналей прямокутника. Розгляньте коло, діаметр якого ON , та доведіть, що точки L і M належать цьому колу.

§ 24

24.5. Беленюк. 24.6. Ржищів. 24.9. $\approx 84,86$ м. 24.12. 1) $\angle B \approx 37^\circ 59'$, $\angle C \approx 62^\circ 1'$, $AB \approx 7,17$ см; 2) $\angle C \approx 37^\circ 19'$, $\angle A \approx 82^\circ 41'$, $BC \approx 11,45$ см; 3) немає розв'язків; 4) $\angle A \approx 41^\circ 49'$, $\angle C \approx 108^\circ 11'$, $AB \approx 5,70$ см або $\angle A \approx 138^\circ 11'$, $\angle C \approx 11^\circ 49'$, $AB \approx 1,23$ см. 24.13. 1) $\angle A \approx 21^\circ 9'$, $\angle B \approx 38^\circ 51'$, $AC \approx 8,69$ см; 2) $\angle B \approx 34^\circ 51'$, $\angle C \approx 105^\circ 9'$, $AB \approx 13,51$ см; 3) немає розв'язків; 4) $\angle A \approx 20^\circ 32'$, $\angle C \approx 142^\circ 28'$, $AB \approx 10,42$ см або $\angle A \approx 159^\circ 28'$, $\angle C \approx 3^\circ 32'$, $AB \approx 1,06$ см. 24.14. 4,75 см, $62^\circ 1'$, $117^\circ 59'$. 24.15. 5,23 см, 7,39 см, $76^\circ 34'$, $103^\circ 26'$. 24.16. 4,97 см, 2,16 см, 6,3 см, 2,16 см, 72° , 108° . 24.17. 7,57 см, 6,47 см, 7,57 см, 1,04 см, 69° , 111° . 24.18. Так. 24.19. 60° , 6,51 см, 5,31 см або 20° , 13,44 см, 16,48 см. 24.20. 6,24 см, 76° , 44° або 10,44 см, 35° , 25° . *Порада*. Необхідно розглянути три випадки, але розв'язок матимуть лише два з них. 24.21. ≈ 318 м. 24.24. $4ab \cos \alpha$. 24.25. $4x - y - 3 = 0$.

§ 25

25.20. 11,2 см. 25.21. 28,8 см. 25.22. 96 см^2 . 25.23. $\frac{128\sqrt{3}}{3} \text{ см}^2$. 25.24. 10 см, 10 см, $10\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ см. 25.25. 6 см, 6 см, $6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ см. 25.27. 18,125 см. 25.28. 42,5 см. 25.29. 1,5 см. 25.30. $1\frac{1}{3}$ см. 25.31. 4 : 9. 25.32. 1 : 2. 25.33. $50\sqrt{2} \text{ см}^2$. 25.34. $2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$. 25.35. $48\sqrt{10} \text{ см}^2$. 25.36. $24\sqrt{91} \text{ см}^2$. 25.38. 3 : 5. 25.39. $\frac{1}{2}\sqrt{41} \text{ см}^2$. 25.40. $\frac{1}{2}\sqrt{127} \text{ см}^2$. 25.41. 8 : 7. 25.42. 15 : 17. 25.52. 1 км.

Вправи для повторення теми 5

7. 400 см^2 . 8. $5\sqrt{3} \text{ см}$ і 10 см . 9. 30 см . 10. Тупокутний. 11. 135° . 12. $\frac{1}{2}\sqrt{97} \text{ см}$.
 13. 6 см і $(3 + \sqrt{22}) \text{ см}$. 14. $\frac{\sqrt{14}}{12}$. 15. $\frac{m}{4 \cos \alpha} \sqrt{1 + 8 \cos^2 \alpha}$. 16. $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$.
 17. $\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$. 25. $1 : \sqrt{3} : 2$. 26. $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$. 27. 1) Так; 2) ні. 28. 60°
 або 120° . 29. $2R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta))$. 31. $\frac{4}{45}\sqrt{690} \text{ см}$. 32. $\frac{b \sin \gamma}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)}$.
 33. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. 38. 1) $AB = \sqrt{166} \text{ см}$, $\angle A \approx 41^\circ 10'$, $\angle B \approx 80^\circ 50'$, $\angle C \approx 58^\circ$;
 2) $AB = 2\sqrt{10} \text{ см}$, $AC = 2\sqrt{58} \text{ см}$, $\angle A \approx 48^\circ 22'$, $\angle B \approx 108^\circ 26'$, $\angle C \approx 23^\circ 12'$.
 39. 4 год 30 хв. 40. Через пункт B . 45. 24 см . 46. $80\sqrt{3} \text{ см}^2$. 47. $R = 16,25 \text{ см}$,
 $r = 3 \text{ см}$. 48. $12,5 \text{ см}$. 49. $4\sqrt{3} \text{ см}$. 50. $\sqrt{13} \text{ см}$ або $\sqrt{37} \text{ см}$. 51. $2\frac{1}{7} \text{ см}^2$ і $2\frac{6}{7} \text{ см}^2$.
 52. $\frac{1}{2}\sqrt{26} \text{ см}^2$. 53. $20\sqrt{3} \text{ см}^2$. *Порада.* Доведіть, що площа трикутника AMB
 дорівнює половині площі трикутника ABC . 54. 84 см^2 . 55. 24 см^2 , 100 см^2 ,
 116 см^2 . 56. 1224 см^2 . 57. 12 см . *Порада.* Нехай $ABCD$ – трапеція, $AB = 4 \text{ см}$,
 $CD = 25 \text{ см}$, $AD = 13 \text{ см}$, $BC = 20 \text{ см}$. Проведіть AE так, що $AE \parallel BC$, E – на-
 лежить стороні CD , і розгляньте $\triangle AED$.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання \ № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	В	Б	Г	А	В	Б	В	Г	Б	Б	А	В	1-Б, 2-В, 3-Г
2	В	Б	Г	Г	А	Б	В	А	Б	Г	В	Б	1-Б, 2-Г, 3-А
3	В	Б	Г	А	В	Г	Б	А	Г	Б	В	А	1-А, 2-Г, 3-Б
4	В	Б	А	Г	В	Б	В	Г	А	В	Б	Б	1-Б, 2-Г, 3-Б
5	Б	А	Г	Б	В	Б	А	Г	В	Б	В	А	1-Г, 2-А, 3-В

Аргумент 164

Вершина параболи 194

Вісь симетрії параболи 196

Властивості нерівностей зі змінними 98

– функції $y = ax^2$, $a \neq 0$ 195

– $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ 196

– числових нерівностей 75, 76

Графік функції 166

Доведення нерівностей 68

Змінна залежна 164

– незалежна 164

Знаки нестрогої нерівності 68

– строгої нерівності 68

Ліва частина нерівності 67

Лінійні нерівності з однією змінною 97

Найбільше значення функції 165

Найменше значення функції 165

Найпростіші перетворення графіків функцій 183–188

Нерівність Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним 69

– лінійна 97

– неправильна 68

– нестрога 68

– правильна 68

– строга 68

– числова 67

Нерівності рівносильні 98

Нулі функції 173

Об'єднання числових проміжків 94

Область визначення функції 165

– значень функції 165

Оцінювання значення виразу 78, 84

Перетин числових проміжків 93

Подвійні числові нерівності 77

Почленне додавання нерівностей 83

– множення нерівностей 83

Права частина нерівності 67

Проміжок знакосталості функції 174

– зростання функції 175

– спадання функції 175

Розв'язок нерівності 89

– системи нерівностей 105

Середнє арифметичне 69

– геометричне 69

Система лінійних нерівностей 105

Функція (функціональна залежність) 164

– зростаюча на проміжку 175

– квадратична 193

– спадна на проміжку 175

Числові проміжки 91

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК (ГЕОМЕТРІЯ)

Абсолютна величина вектора 126

Абсциса точки 15

Аналітична геометрія 28

Вектор 125

Векторні величини (вектори) 125

Вимірювання висоти предмета, основа якого недоступна 230

– відстані до недоступної точки 229

Від'ємна піввісь 15

Відкладання вектора, рівного даному, від заданої точки 127

Відстань між двома точками за заданими координатами 30

Вісь абсцис 15

– ординат 15

Властивості добутку вектора на число 141

– додавання векторів 136

– скалярного добутку 147

Декартові координати 16

Довжина вектора 126

Додатна піввісь 15

Знаходження площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними 235

– – – – – радіусом вписаного кола 240

– – – – – описаного кола 239

Кінець вектора 125

Колінеарні вектори 126

Координати вектора 131

– середини відрізка 28

– точки 15

– точки перетину двох прямих 45

Координатні чверті 16

Координатний метод 28

Кут між векторами 147

Кутовий коефіцієнт у рівнянні прямої 44

Множення вектора на число 141

Модуль вектора 126, 132

Нульовий вектор 126

Одиничне півколо 20

Ордината точки 16

Осі координат 15

Основна тригонометрична тотожність 21

Початок вектора 125

– координат 15

Правило паралелограма додавання векторів 137

– побудови різниці двох векторів 138

– трикутника додавання векторів 137

Протилежно напрямлені вектори 126

Прямокутна система координат 15

Рівні вектори 127, 132

Рівняння кола 36

– прямої загальне 41

– –, що проходить через дві точки 42

– фігури 35

Різниця векторів 138

Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом між ними 227

– – – – –, протилежним одній із них 228

– – – стороною і двома кутами 227

– – – трьома сторонами 228

Розташування прямої відносно системи координат 41

Скалярний добуток векторів 146

– квадрат вектора 147

Скалярні величини (скаляри) 125

Співнаправлені вектори 126

Сума векторів 136

Теорема косинусів 212

– про добуток вектора на число 142

– – рівність векторів 132

– – скалярний добуток векторів 147

– синусів 221

Тригонометричні тотожності 21

– функції 21

Узагальнена теорема Піфагора 213

– – синусів 221

Умова колінеарності векторів 143

– паралельності прямих 45

– перпендикулярності прямих 48

Формула Герона 238

– медіани 215

ЗМІСТ

<i>Шановні дев'ятикласники та дев'ятикласниці!</i>	3
<i>Шановні вчителі та вчительки!</i>	4
<i>Шановні дорослі!</i>	5

ПОВТОРЮЄМО ГЕОМЕТРІЮ ЗА 8 КЛАС	6
---	---

Тема 1. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

§ 1. Координатна площина	15
§ 2. Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180° . Тригонометричні тотожності	20
§ 3. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами	28
§ 4. Рівняння кола	35
§ 5. Рівняння прямої	40
Домашня самостійна робота № 1 (§§ 1–5)	49
Завдання для перевірки знань до §§ 1–5	50
Вправи для повторення теми 1	51
Головне в темі 1	56

ПОВТОРЮЄМО АЛГЕБРУ ЗА 8 КЛАС	58
---	----

Тема 2. НЕРІВНОСТІ

§ 6. Числові нерівності. Доведення нерівностей	67
§ 7. Основні властивості числових нерівностей	75
§ 8. Почленне додавання і множення числових нерівностей	83
§ 9. Нерівності зі змінними. Розв'язок нерівності	89
§ 10. Числові проміжки	91
§ 11. Лінійні нерівності з однією змінною. Рівносильні нерівності	97
§ 12. Системи лінійних нерівностей з однією змінною, їх розв'язування	105
Домашня самостійна робота № 2 (§§ 6–12)	112
Завдання для перевірки знань до §§ 6–12	114
Вправи для повторення теми 2	115
Головне в темі 2	121
Фіскальна математика	123

Тема 3. ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

§ 13. Вектор. Модуль і напрямок вектора. Колінеарні вектори. Рівність векторів	125
§ 14. Координати вектора	131
§ 15. Додавання та віднімання векторів	136
§ 16. Множення вектора на число	141
§ 17. Скалярний добуток векторів	146

Домашня самостійна робота № 3 (§§ 13–17)	153
Завдання для перевірки знань до §§ 13–17	155
Вправи для повторення теми 3	155
Найвеличніший арифметик своєї епохи	159
Головне в темі 3	161

Тема 4. КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

§ 18. Функції. Область визначення, область значень і графік функції	164
§ 19. Властивості функції	173
§ 20. Найпростіші перетворення графіків функцій	183
§ 21. Функція $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Її графік і властивості	193
Домашня самостійна робота № 4 (§§ 18–21)	203
Завдання для перевірки знань до §§ 18–21	205
Вправи для повторення теми 4	206
Головне в темі 4	210

Тема 5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

§ 22. Теорема косинусів	212
§ 23. Теорема синусів	220
§ 24. Розв'язування трикутників. Прикладні задачі	226
§ 25. Формули для знаходження площі трикутника	235
Домашня самостійна робота № 5 (§§ 22–25)	246
Завдання для перевірки знань до §§ 22–25	247
Вправи для повторення теми 5	248
Головне в темі 5	253
Зразок варіанта атестаційної письмової роботи з математики	255
Відповіді та поради до вправ	257
Предметний показчик (алгебра)	268
Предметний показчик (геометрія)	269

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович,
ІСТЕР Дмитро Олександрович

МАТЕМАТИКА

Підручник інтегрованого курсу для 9 класу
закладів загальної середньої освіти

(у 2-х частинах)

Частина 1

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику використано ілюстративний матеріал з відкритих джерел інтернету, зокрема сайтів *vecteezy.com*, *depositphotos.com*. Усі матеріали в підручнику використано з навчальною метою відповідно до законодавства України про авторське право і суміжні права.

Редактор *Наталія Дашко*
Обкладинка *Олександра Павленка*
Макет, художнє оформлення *Василя Марущинця*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректори *Олена Симонова, Ірина Хмельовська*

Формат 70×100/16.

Ум. друк. арк. 22,10. Обл.-вид. арк. 17,57.

Тираж 14 766 пр. Вид. № 0126.

Зам. № 26-04-1001.

ТОВ «Генеза»,
вул. Генерала Алмазова, 18/7 (літ. В), офіс 404, м. Київ, 01133, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Максиміліанівська, 17, м. Харків, 61024, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 6847 від 19.07.2019.

ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

1. Якщо $a > b$, то $b < a$; якщо $a < b$, то $b > a$.
2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.
Якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.
3. Якщо $a > b$ і p – будь-яке число, то $a + p > b + p$.
4. Якщо $a > b$ і $p > 0$, то $ap > bp$.
Якщо $a > b$ і $p < 0$, то $ap < bp$.
5. Якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.

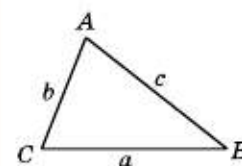
Почленне додавання	$\begin{array}{r} a < b \\ + \\ c < d \\ \hline a + c < b + d \end{array}$
-----------------------	--

6. Якщо $a < b$ і $c < d$, то $ac < bd$, де a, b, c, d – додатні.

Почленне множення	$\begin{array}{r} a < b \\ \times \\ c < d \\ \hline ac < bd \end{array}$
----------------------	---

Нерівність	Зображення	Числовий проміжок
$x < a$		$(-\infty; a)$
$x \leq a$		$(-\infty; a]$
$x > a$		$(a; +\infty)$
$x \geq a$		$[a; +\infty)$
$a < x < b$		$(a; b)$
$a < x \leq b$		$(a; b]$
$a \leq x < b$		$[a; b)$
$a \leq x \leq b$		$[a; b]$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ



Теорема косинусів

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \text{ де } R - \text{ радіус описаного кола}$$

ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА І ТАНГЕНСА ДЕЯКИХ КУТІВ

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ де } \alpha \neq 90^\circ$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$