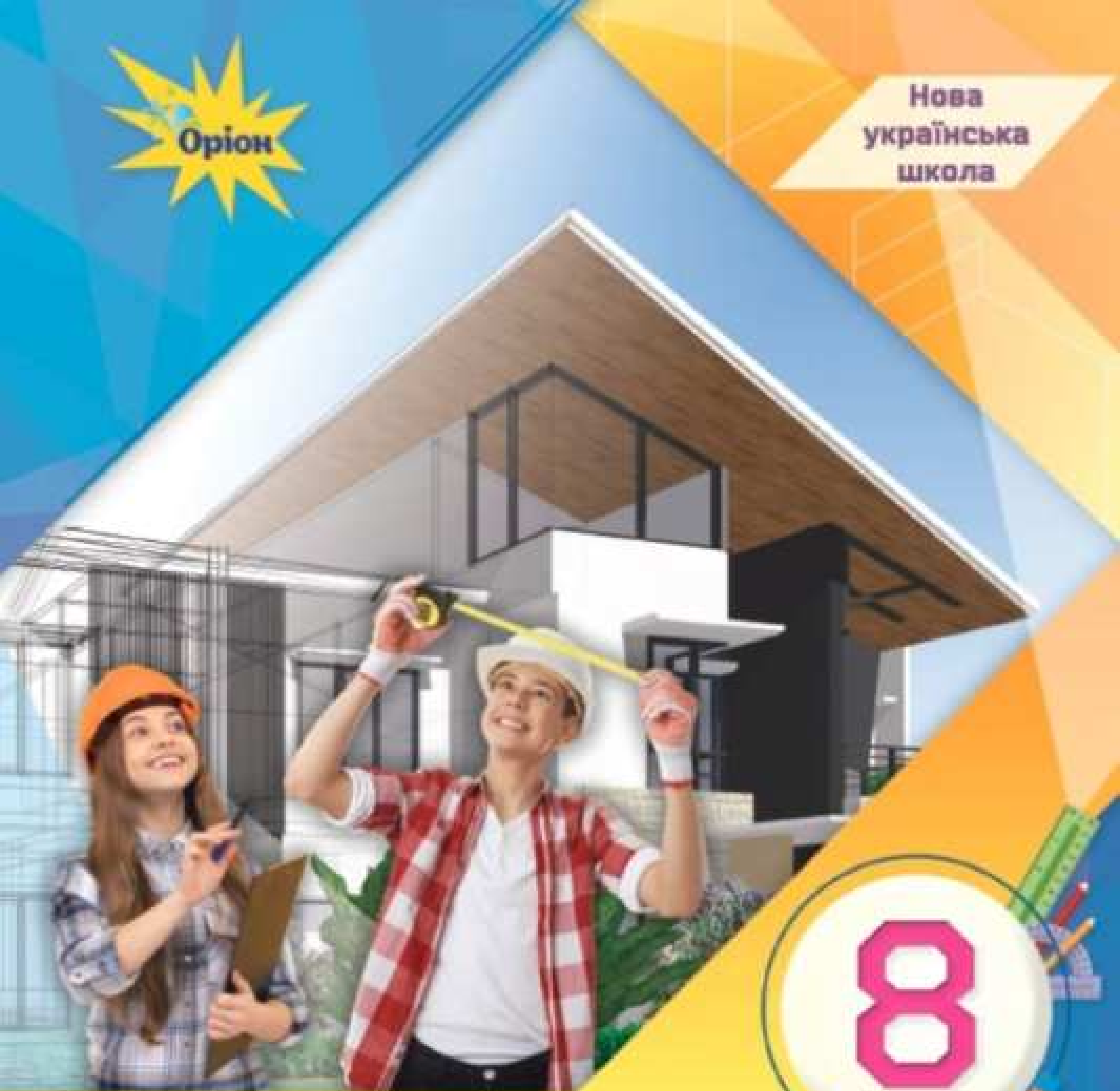


Оріон

Нова
українська
школа



8

Михайло Бурда
Ніна Тарасенкова

ГЕОМЕТРІЯ

НАВЧАЄМОСЯ РАЗОМ З ПІДРУЧНИКОМ



Михайло Бурда
Ніна Тарасенкова

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*



Український освітянський видавничий центр «Оріон»

УДК 514*кл8(075.3)
Б93

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 21.02.2025 № 347)

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою
«Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авторський колектив програми:
М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, Д. В. Васильєва)

Е-додаток

<https://faino.school/>

Готуємось до контрольної роботи



<qr.orioncentr.com.ua/LhE12>

Бурда М. І., Тарасенкова Н. А.

Б93 Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів загальної
середньої освіти. Київ : УОВЦ «Оріон», 2025. 288 с. : іл.

ISBN 978-966-991-414-9

УДК 514*кл8(075.3)

ISBN 978-966-991-414-9

© Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., 2025
© УОВЦ «Оріон», 2025

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ДОРОГІ УЧНІ Й УЧЕНИЦІ!

У 7 класі ви ознайомилися з властивостями суміжних і вертикальних кутів, паралельних та перпендикулярних прямих, трикутників, кола; навчилися застосовувати ознаки рівності трикутників до розв'язування задач.

Тепер ви розширите й поглибите свої знання з геометрії: дізнаєтеся про властивості й ознаки чотирикутників та подібних трикутників, навчитесь знаходити площі трикутників і чотирикутників, ознайомитеся з новими способами обчислення сторін і кутів прямокутних трикутників та виробите вміння застосовувати ці способи на практиці.

Як успішно вивчати геометрію за цим підручником? Увесь матеріал поділено на розділи, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теоретичний матеріал, особливу увагу звертайте на текст, надрукований **жирним шрифтом**. Це найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх треба зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

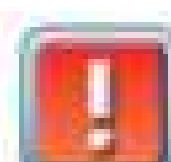
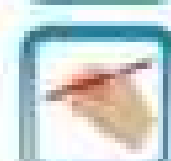
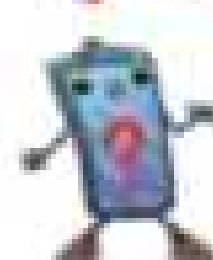
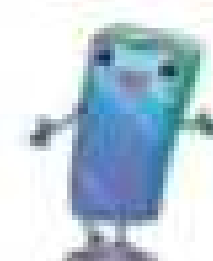
Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (•) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння і наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Номери завдань для домашньої роботи виділені рожевим кольором.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви можете поглибити й розширити свої знання.

У підручнику використовуються спеціальні позначки (підписки). Вони допоможуть вам краще зорієнтуватись у навчальному матеріалі.

-  — Увага! Не припустіться помилки
-  — Важливо знати
-  — Як записати
-  — Словничок
-  — Запитуємо
-  — Відповідаємо
-  — Інтерактивні вправи
-  — Вправи з Е-додатка

Бажаємо вам успіхів і задоволення у пізнанні невідомого!

Розділ 1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ВИВЧЕНОГО В 7 КЛАСІ

ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ



qr.orioncentr.com.ua/kS7vB

1. Скільки прямих можна провести через: 1) дві точки; 2) три точки; 3) чотири точки? Зробіть малюнки.
2. Проведіть прямі AB і CD , що перетинаються в точці O , яка лежить між точками A і B , C і D . Запишіть назви: 1) променів; 2) доповняльних променів.
3. На прямій a позначили точки K , L і M . Відомо, що точки K і M лежать по один бік від точки L , а точка K не лежить між точками L і M . Розмістіть ці точки на прямій (зробіть малюнок).
4. Три будинки A , B і C розміщені на прямолінійній вулиці. Будинки A і B розташовані по один бік від будинку C , а будинок B не розміщується між будинками A і C . Зробіть малюнок.

5. Чи лежить точка C на відрізку AB , якщо:



- 1) $AB = 10$ см, $AC = 45$ мм, $BC = 0,55$ дм;
- 2) $BC = 41$ мм, $AC = 0,5$ дм, $AB = 9,6$ см?



qr.orioncentr.com.ua/x3x1E

6. Відстань між містами на карті становить 5 см. Скільки кілометрів потрібно пройти туристам, якщо масштаб карти 1 : 300 000?

7. Відрізок завдовжки 12 см поділено на дві нерівні частини. Знайдіть відстань між серединами цих частин.

8. Точки A , B і C розміщені на прямій, причому точка C лежить між точками A і B . Знайдіть довжину відрізка AB , якщо $AC = 12$ см, а відрізок BC у два рази більший.



9. Як від шматка тканини завдовжки 8 м відрізати, не відмірюючи: 1) 6 м; 2) 5 м?

10. Зобразіть точками на площині два населені пункти A і B , відстань між якими дорівнює 10 км. Зобразіть між населеними пунктами A і B таке місце C , щоб виконувалась умова $AC = 4BC$. Чому дорівнює відстань AC ?

11. Три аптеки розміщено уздовж прямолінійної вулиці. Відстань між аптеками № 1 і № 2 становить 2 км, а між аптеками № 1 і № 3 — 1 км. Якою може бути відстань між аптеками № 2 і № 3?

12. Бібліотека, школа й кінотеатр розташовані на прямолінійній вулиці, причому кінотеатр розміщується між бібліотекою та школою. Знайдіть відстань між бібліотекою та школою, якщо відстань між бібліотекою й кінотеатром дорівнює 600 м, а між кінотеатром і школою — у три рази менша.



13. OC — бісектриса кута AOB . Знайдіть: 1) $\angle AOB$, якщо $\angle AOC = 25^\circ$; 2) $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 64^\circ$.

14. Чи проходить промінь OC між сторонами кута AOB , якщо:



- 1) $\angle AOC = 92^\circ$, $\angle BOC = 43^\circ$, $\angle AOB = 48^\circ$;
2) $\angle AOC = 30^\circ$, $\angle BOC = 65^\circ$, $\angle AOB = 95^\circ$?

15. На скільки градусів повернеться хвилинка стрілка за:



- 1) 1 хв; 2) 5 хв; 3) 10 хв?



qr.orioncentr.com.ua/e8V15

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

16. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них:



- 1) на 34° менший від іншого;
2) утричі більший за інший.

17. Один із суміжних кутів удвічі більший за інший. Яка градусна міра цих кутів?



18. Дві прямі перетинаються. Знайдіть градусну міру утворених кутів, якщо:

- 1) сума двох із них дорівнює 84° ;
2) різниця двох із них дорівнює 42° .

19. Знайдіть градусну міру кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо сума двох із них дорівнює 90° .



20. За допомогою перегинання аркуша паперу проведіть через дану точку O пряму, перпендикулярну до даної прямої AB .

21. Пряма a перетинає сторони кута A в точках B і C . Чи можуть обидві прямі AB і AC бути перпендикулярними до прямої a ?

22. Прямі a і b — перпендикулярні. Відстані від точок A і B прямої b до прямої a відповідно дорівнюють 8 см і 12 см. Знайдіть:

- 1) довжину відрізка AB ;
2) відстань від середини відрізка AB до прямої a .
Скільки випадків треба розглянути?



qr.orioncentr.com.ua/nUI3X



qr.orioncentr.com.ua/Y9WG0

- 23.** Дві паралельні прямі перетинає третя.
 Скільки при цьому може бути кутів:
 1) гострих; 2) тупих; 3) прямих?



qr.orioncentr.com.ua/TmYkk

- 24.** Знайдіть кути при двох паралельних прямих і січній, якщо один із них становить третину розгорнутого кута.

- 25.** Знайдіть кути при двох паралельних прямих і січній, якщо один із них становить половину прямого кута.

- 26.** Доведіть, що бісектриси внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній перетинаються.

- 27.** Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній паралельні.

- 28.** За допомогою перегинань аркуша паперу проведіть через дану точку O пряму, паралельну даній прямій AB .

- 29.** Знайдіть кути, що утворилися в результаті перетину двох доріг, якщо: 1) всі ці кути рівні між собою; 2) сума двох із них дорівнює 50° ; 3) два із них відносяться, як $1 : 2$.

- 30.** Знайдіть кути, утворені при перетині двох паралельних доріг третьою, якщо: 1) сума двох кутів дорівнює 140° ; 2) один із кутів у 8 разів більший за інший.

ТРИКУТНИКИ

- 31.** Чи можна утворити трикутник із відрізків завдовжки:
 1) 3 см, 5 см, 9 см;
 2) 5 см, 4 см, 2 см?



qr.orioncentr.com.ua/Y57FU

- 32.** Чи існує трикутник зі сторонами:
 1) 2 см, 2 см, 4 см;
 2) 5 см, 12 см, 13 см?

- 33.** Як зміниться периметр трикутника, якщо всі його сторони:
 1) збільшити на 3 см;
 2) збільшити у 3 рази;
 3) зменшити в 1,5 раза;
 4) зменшити на 1,5 см?



qr.orioncentr.com.ua/fiVWf

- 34.** Як зміниться довжина сторони рівностороннього трикутника, якщо його периметр:
 1) зменшити на 12 см;
 2) збільшити в 6 разів?

35. У трикутній піраміді всі ребра рівні, і кожне з них дорівнює 6 см. Знайдіть суму довжин усіх ребер піраміди.
36. У трикутній піраміді всі ребра рівні, а сума їхніх довжин дорівнює 54 см. Знайдіть довжину ребра піраміди.
37. Трикутник, периметр якого дорівнює 25 см, медіана поділяє на два трикутники з периметрами 16 см і 19 см. Яка довжина медіани?
38. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см. Медіана, проведена до основи, поділяє його на два трикутники з периметрами по 12 см. Яка довжина висоти, проведеної до основи?
39. У рівнобедреному прямокутному трикутнику з вершини прямого кута проведено висоту до гіпотенузи. Яка довжина бісектриси прямого кута цього трикутника, якщо гіпотенуза дорівнює:
1) 12 см; 2) 15 см?
40. Знайдіть висоту даху, крокви якого мають форму рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо основа цього трикутника дорівнює 8 м.
41. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = OB$, $CO = OD$. Знайдіть:
1) відрізок AC , якщо $BD = 10$ см;
2) $\angle BAD$, якщо $\angle ABC = 72^\circ$.
42. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = OB$, $\angle CBO = \angle DAO$. Яка довжина відрізка AC , якщо $BD = 8$ см?
43. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику: 1) бісектриси кутів при основі — рівні; 2) висоти, проведені до бічних сторін, — рівні; 3) медіани, проведені до бічних сторін, — рівні.
44. Доведіть, що коли бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то трикутник рівнобедрений.
45. Знайдіть невідомі кути α , β , γ трикутника ABC , якщо:
1) $\alpha = 36^\circ$, $\beta = \gamma$;
2) $\beta = 30^\circ$, $\alpha : \gamma = 2 : 3$.
46. У трикутнику ABC з кутами α , β і γ знайдіть невідомі кути, якщо $\gamma = 50^\circ$, а кут β на 60° більший за кут α .
47. Чи може кут при основі рівнобедреного трикутника бути:
1) прямим;
2) гострим;
3) тупим?



qr.orioncentr.com.ua/6sM8g

48. У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, удвічі менша від одного з катетів. Знайдіть кути трикутника.
49. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, удвічі менша від основи. Знайдіть кути трикутника.
50. Вам потрібно відпиляти кінець дошки з паралельними краями під кутом 45° . Як ви це зробите?
51. Зовнішній кут трикутника дорівнює 120° . Знайдіть кути трикутника, якщо один із них дорівнює 50° .
52. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 45° . Знайдіть зовнішній кут при вершині трикутника.
53. Рівнобедрений трикутник з кутом при основі 72° називають «золотим». У ньому відношення довжини бічної сторони до довжини основи відповідає «золотому перерізу» і приблизно дорівнює 1,62. Побудуйте такий трикутник. Виміряйте його сторони та знайдіть їх відношення.
54. Властивості золотого перерізу використовували ще стародавні єгиптяни. Якщо велику піраміду Хеопса перетнути вертикальною площиною, яка проходить через вершину піраміди і середину сторони основи, отримаємо так званий подвійний золотий трикутник. Це — рівнобедрений трикутник, у якого відношення бічної сторони до половини основи дорівнює відношенню «золотого перерізу» (приблизно дорівнює 1,62). У піраміді Хеопса цей трикутник має такі розміри: бічна сторона приблизно дорівнює 186,526 м, а основа — 230,4 м. Перевірте за цими даними, чи справджується відношення «золотого перерізу». Побудуйте трикутник із відношенням сторін, як у трикутнику піраміди Хеопса. Чи правильно, що кут при основі такого трикутника приблизно дорівнює $51^\circ 51'$?

КОЛО І КРУГ

55. Діаметр кола більший за його радіус:
1) на 12 см; 2) на 7 см. Знайдіть діаметр кола.



qr.orioncentr.com.ua/Wja1i/

56. Радіус кола менший від його діаметра на 4 см. Знайдіть діаметр кола.

57. Дано коло з центром O та діаметром $AB = 8$ см. На діаметрі позначено точку C так, що $OC = 2$ см. Знайдіть відстань від точки C до кінців діаметра.

58. Найбільша відстань від точки A до точки кола дорівнює m , а найменша — n . Знайдіть радіус кола. Скільки випадків треба розглянути?

 59. Діаметр круглої заготовки деталі дорівнює 50 мм, а діаметр виробу — 46 мм. Якої товщини шар металу було знято під час виготовлення деталі?



qr.orioncentr.com.ua/8dFL4

60. Хорда кола перетинає діаметр під кутом 30° і ділиться ним на відрізки 8 см і 10 см. Знайдіть відстань від кінців хорди до діаметра.

 61. Діаметр AB перетинає хорду CD під прямим кутом, M — точка їх перетину. Чи завжди правильна рівність: 1) $AM = BM$; 2) $CM = DM$? Відповідь поясніть.

62. На озері правильної круглої форми розташований маленький острів. Знайдіть найкоротший прямий маршрут катера, який сполучатиме дві точки берега й матиме проміжну пристань біля острова.

 63. Дано коло з центром O та радіусом R .
1) Яку фігуру утворюють середини всіх його радіусів?
2) Яку фігуру утворюють усі точки X такі, що $OX = 2R$?



qr.orioncentr.com.ua/br90W

64. Через місто A має проходити автомагістраль так, щоб два населені пункти B і C розташовувались по різні боки від неї на однаковій відстані. Як прокласти автомагістраль?

 65. Недалеко від залізниці розташовані два села. Знайдіть на лінії залізниці місце для станції, яка була б рівновіддаленою від цих сіл. Зробіть малюнок.

66. Як повинна проходити магістраль, щоб відстані від неї до трьох населених пунктів були однаковими?

 67. Мешканці трьох дачних будинків A , B і C вирішили побудувати криницю. Як обрати місце для криниці, щоб відстані від неї до будинків були однаковими?

68. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 60° , висота, проведена до основи, — 9 см. Знайдіть радіус описаного кола.

 69. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 60° , а висота, проведена до основи, — 12 см. Знайдіть радіус вписаного кола.

70. Складіть план побудови:
1) рівнобедреного трикутника за основою a та прилеглим кутом A ;
2) прямокутного трикутника за катетом і гіпотенузою.

71. Складіть план побудови рівнобедреного прямокутного трикутника за його катетом.



Розділ 2. ЧОТИРИКУТНИКИ

У розділі дізнаєтесь:

- про чотирикутник, його елементи та класифікацію чотирикутників;
- які властивості сторін і кутів окремих видів чотирикутників: паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата, трапеції;
- як розпізнавати ці фігури;
- що таке центральні та вписані кути в колі; яка їхня градусна міра;
- які властивості й ознаки чотирикутників, вписаних у коло та описаних навколо кола;
- як застосовувати властивості та ознаки чотирикутників на практиці та під час розв'язування задач.

§ 1. ЧОТИРИКУТНИК

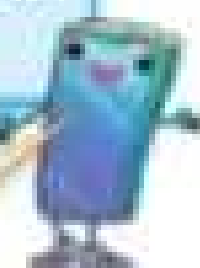
1. Що таке чотирикутник

Ситуація. Нічна хуртовина занесла снігом подвір'я. Зранку батько з мамою та двома дітьми — Ігорем і Катрусею — вийшли розчистити доріжки, щоб можна було обійти подвір'я «за колом». Батько розчищав доріжку від будинку до хвіртки, мама — від будинку до літньої кухні, Ігор — від літньої кухні до сарайчика, а Катруся — від сарайчика до хвіртки.



Яка фігура утворилася на подвір'ї?

Чотирикутник.

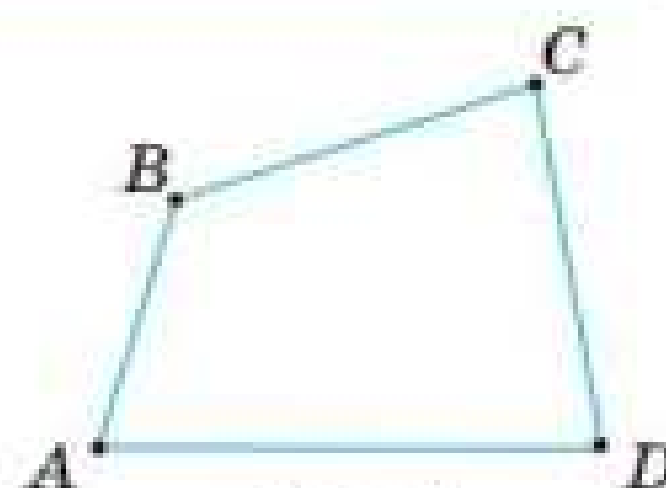


qr.orioncentr.com.ua/1rTUQ

Запам'ятайте!

Чотирикутником називається геометрична фігура, що складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають. При цьому: ніякі три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а відрізки, що сполучають ці точки, не повинні перетинатися.

Наприклад, на малюнку 1 точки A, B, C, D — вершини чотирикутника, відрізки AB, BC, CD, DA — його сторони. Кути DAB, ABC, BCD, CDA — це кути чотирикутника. Їх позначають і однією буквою: $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$.



Мал. 1



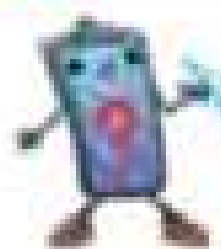
Записуємо: $ABCD$, або $BCDA$, або $CDAB$ і т. д.



Чотирикутник позначають, послідовно записуючи його вершини, починаючи з будь-якої.



Для чотирикутника на малюнку 1 записи, наприклад, $ADBC$ чи $CDBA$ — **неправильні**.

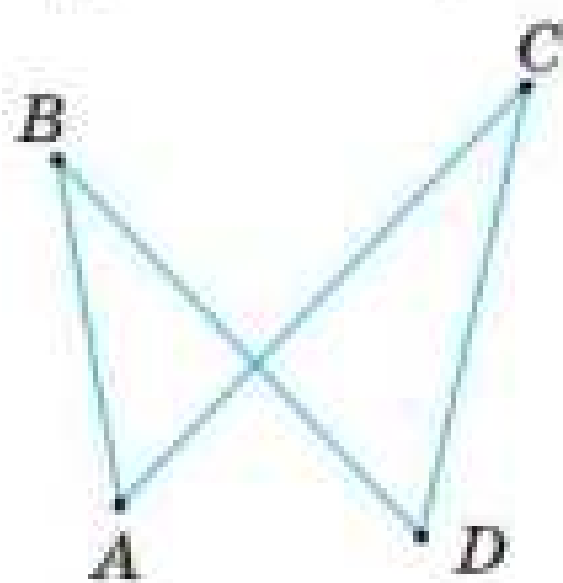


Чому фігури, зображені на малюнках 2 і 3, не є чотирикутниками?

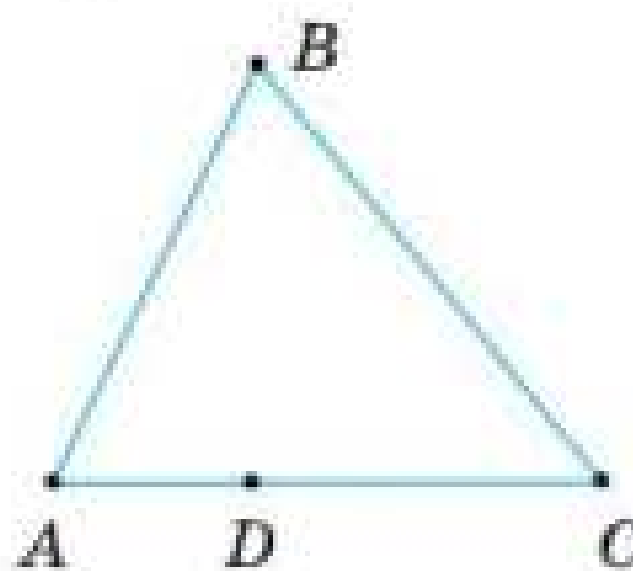
Поміркуємо.



У фігури на малюнку 2 відрізки AC і BD перетинаються, а у фігури на малюнку 3 точки A , D і C лежать на одній прямій.



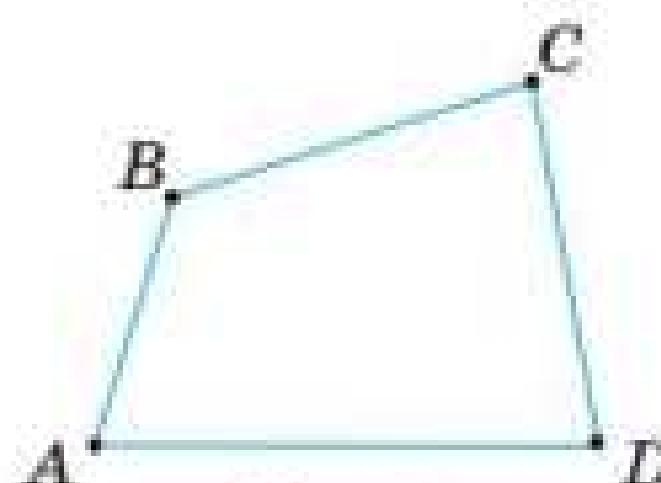
Мал. 2



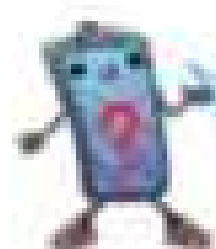
Мал. 3

2. Елементи чотирикутника

Дві вершини, два кути або дві сторони чотирикутника можуть бути або *сусідніми*, або *протилежними*. Наприклад, у чотирикутнику $ABCD$ (мал. 4) вершини A і D , $\angle A$ і $\angle D$, сторони AD і AB — сусідні, а вершини A і C , $\angle A$ і $\angle C$, сторони AD і BC — протилежні.

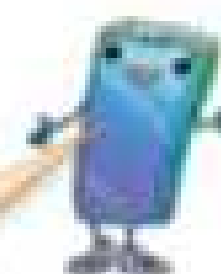


Мал. 4



Які елементи чотирикутника одержимо, якщо сполучити його протилежні вершини?

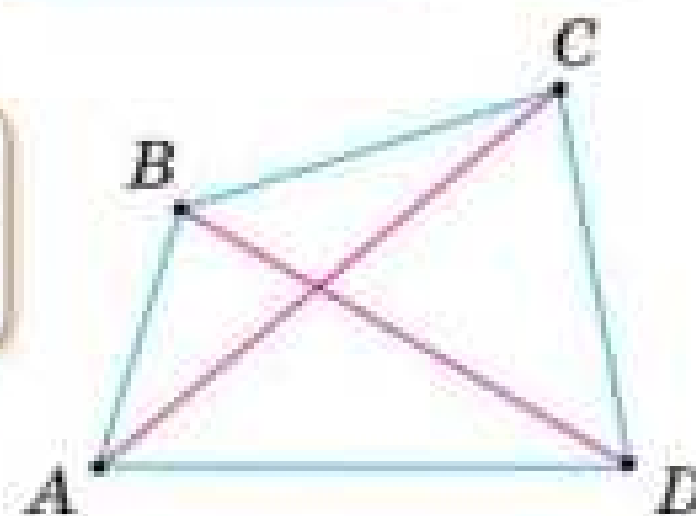
Діагоналі.



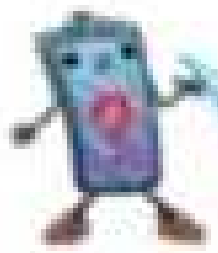
Запам'ятайте!

Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називають його *діагоналями*.

На малюнку 5 відрізки AC і BD — діагоналі чотирикутника $ABCD$.

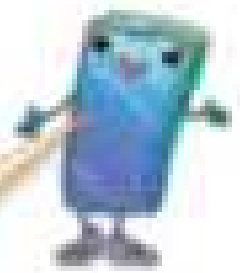


Мал. 5



Який елемент чотирикутника одержимо, якщо продовжити його сторону?

Зовнішній кут.



Запам'ятайте!

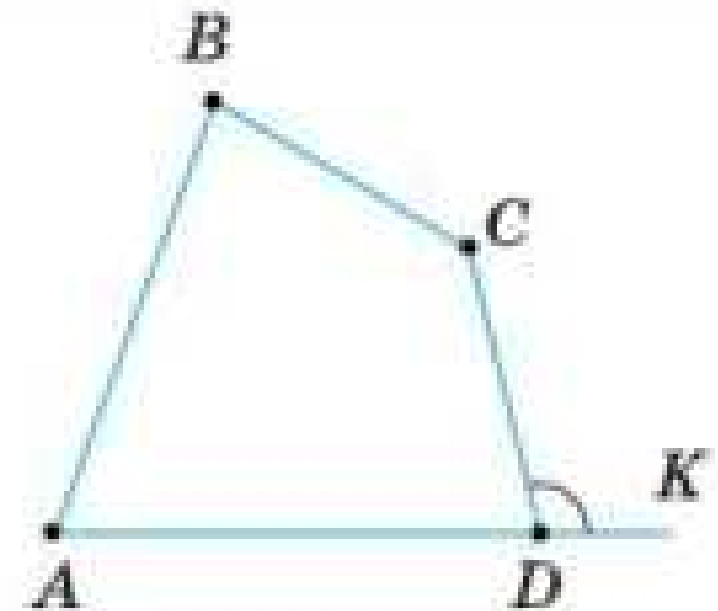
Кут, суміжний з кутом чотирикутника, називають *зовнішнім кутом чотирикутника*.

На малюнку 6 $\angle CDK$ — зовнішній кут чотирикутника $ABCD$ при вершині D .



Щоб знайти зовнішній кут чотирикутника, наприклад $\angle CDK$ чотирикутника $ABCD$ (мал. 6), застосуйте властивість суміжних кутів та обчисліть:

$$\angle CDK = 180^\circ - \angle ADC.$$



Мал. 6

3. Опуклі та неопуклі чотирикутники

На малюнку 7 чотирикутник $ABCD$ лежить з одного боку від кожної прямої, яка проходить через дві його сусідні вершини. Такий чотирикутник називають *опуклим*.



Чи кожний чотирикутник є опуклим?

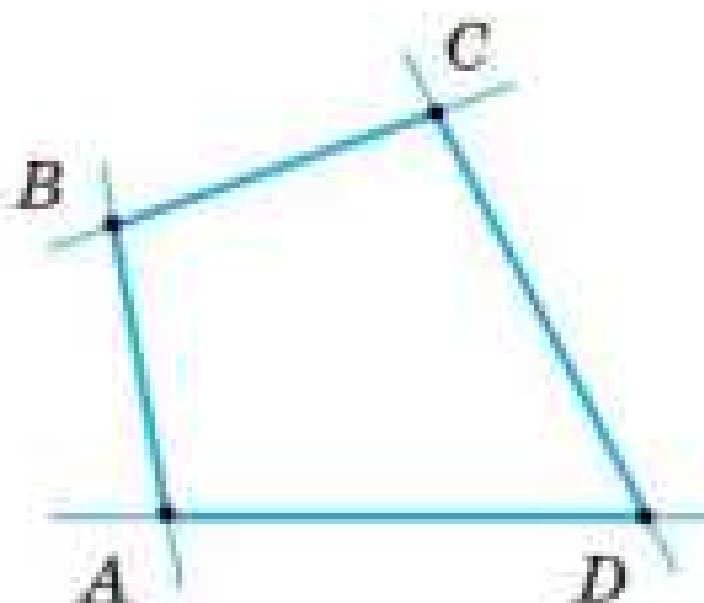
Ні.



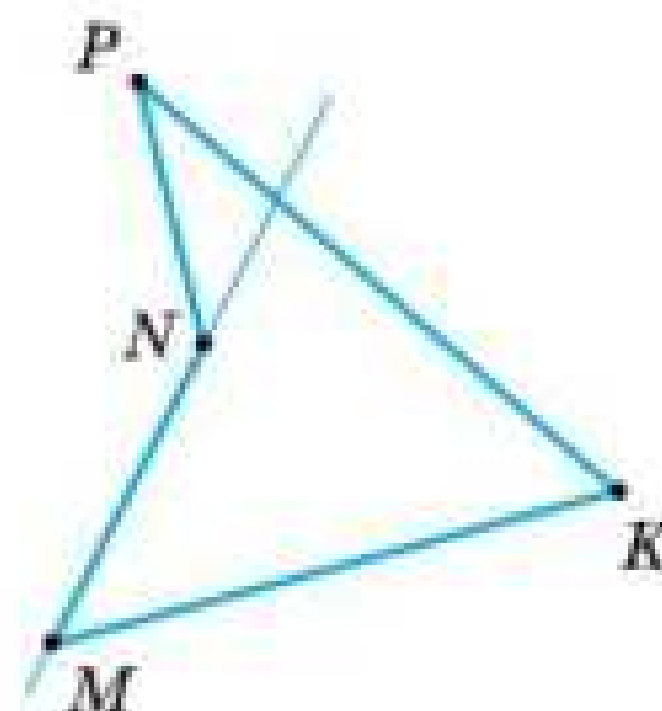
Наприклад, на малюнку 8 чотирикутник $MKNP$ не є опуклим, бо він не лежить з одного боку від прямої, що проходить через вершини M і N . Такий чотирикутник називають *неопуклим*.



Ми вивчатимемо лише опуклі чотирикутники.



Мал. 7



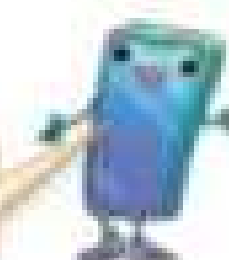
Мал. 8

4. Периметр чотирикутника



Що таке периметр чотирикутника?

Поміркуйте за аналогією з трикутником.



Запам'ятайте!

Периметром чотирикутника називають суму довжин усіх його сторін.



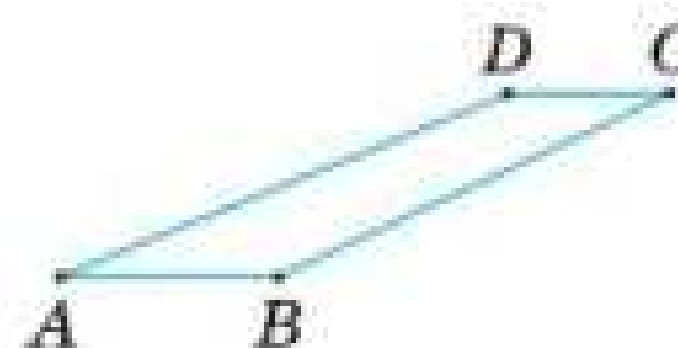
Якщо периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 40 см, то коротко записують:

$$P_{ABCD} = 40 \text{ см.}$$

Задача Периметр чотирикутника дорівнює 24 см. Найменша його сторона дорівнює 3 см, а найбільша — 9 см. Одна з двох інших його сторін удвічі менша від іншої. Знайдіть невідомі сторони чотирикутника.

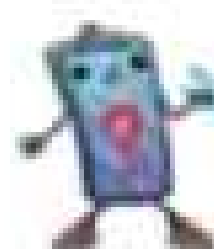
Розв'язання Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник, у якого $CD = 3$ см, $AD = 9$ см, $P_{ABCD} = 24$ см (мал. 9). Нехай $AB = x$. Тоді, за умовою, $BC = 2x$. Оскільки $P = 24$ см, то $x + 2x + 3 + 9 = 24$. Звідси $x = 4$. Отже, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см.

Відповідь: 4 см, 8 см.



Мал. 9

5. Властивість сторін чотирикутника



Чи може чотирикутник мати такі сторони: 1 см, 2 см, 3 см, 6 см?

Не може.



Справді, найбільший з відрізків дорівнює сумі трьох інших, а значить, вони не можуть утворити чотирикутник.



Щоб установити, чи можна із чотирьох відрізків a, b, c, d утворити чотирикутник, перевірте, чи є найдовший із чотирьох відрізків меншим від суми трьох інших.

6. Властивість кутів чотирикутника

Дослід. Накресліть довільний чотирикутник і виміряйте транспортиром його кути. Чому дорівнює їх сума?

Запам'ятайте!

Теорема (про суму кутів чотирикутника)

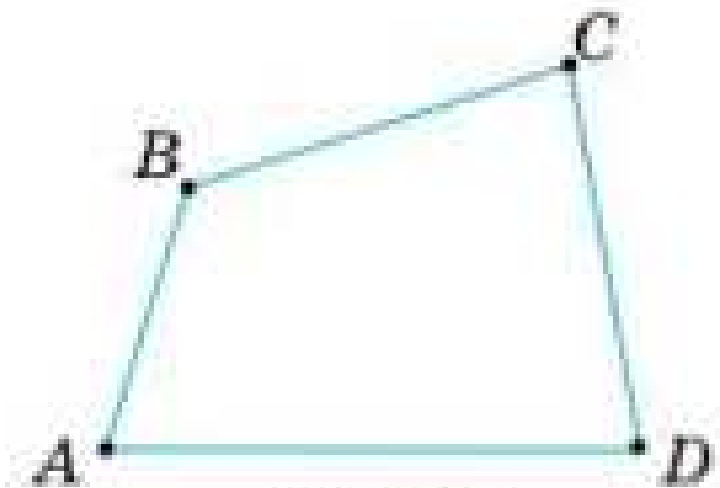
Сума кутів чотирикутника дорівнює 360° .

Дано: чотирикутник $ABCD$ (мал. 10).

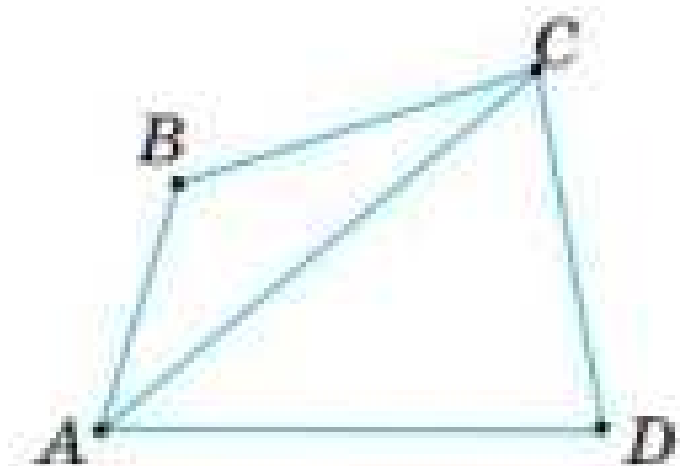
Довести: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$.

Доведення. У даному чотирикутнику $ABCD$ проведемо діагональ AC (мал. 11). Одержали два трикутники — $\triangle ABC$ і $\triangle ACD$. Тоді $\angle A = \angle BAC + \angle CAD$, $\angle C = \angle BCA + \angle ACD$. Звідси:

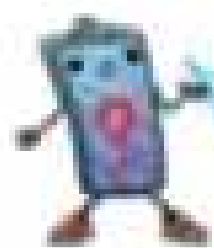
$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= \\ &= \angle BAC + \angle CAD + \angle B + \angle BCA + \angle ACD + \angle D = \\ &= (\angle BAC + \angle B + \angle BCA) + (\angle ACD + \angle D + \angle CAD) = \\ &= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ. \end{aligned}$$



Мал. 10



Мал. 11



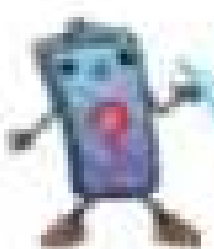
Чи можуть усі кути чотирикутника бути гострими?

Ні.



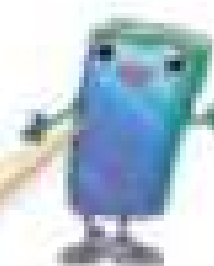
Справді, сума чотирьох гострих кутів є меншою від 360° , а значить, ці кути не можуть бути кутами чотирикутника.

7. Чотирикутники в піраміді

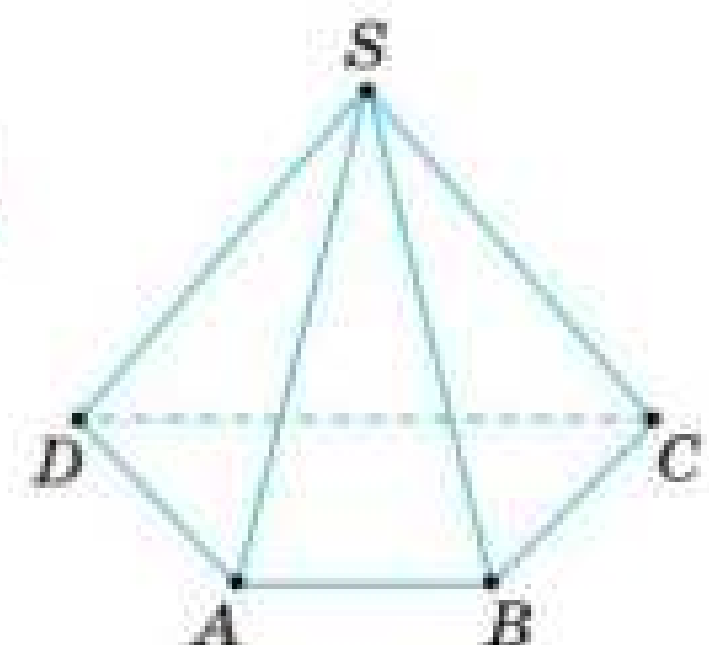


Чи можна в піраміді побачити чотирикутник?

Так.



В основі піраміди може лежати будь-який багатокутник. У чотирикутній піраміді (мал. 12) основа є чотирикутником, а бічні грані — трикутниками.



Мал. 12

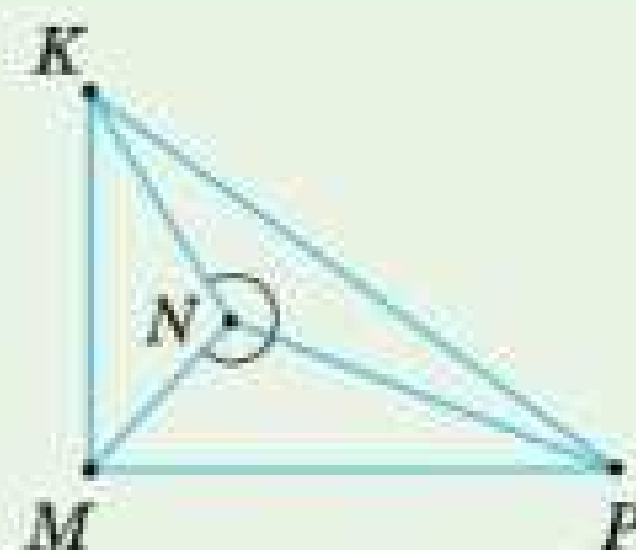
Дізнайтеся більше

1. У вас може виникнути запитання: Які відмінні властивості мають опуклі й неопуклі чотирикутники? Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ (мал. 5) перетинаються, і кожна з них розбиває його на два трикутники. А діагоналі неопуклого чотирикутника $MNKP$ (мал. 13) не перетинаються, і лише одна з них розбиває його на два трикутники. Кожний кут опуклого чотирикутника менший від 180° . Якщо чотирикутник неопуклий, то один з його кутів більший за 180° .

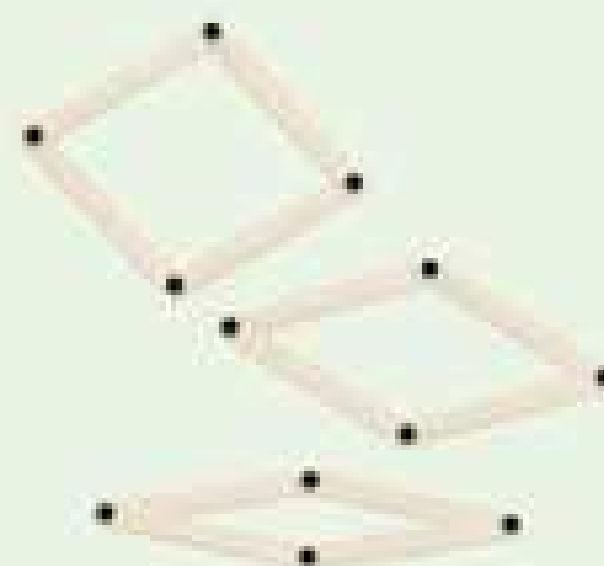
2. На відміну від трикутника, чотирикутник — фігура нежорстка. Якщо взяти чотири планки та з'єднати їх за допомогою шарнірів, то форму одержаного чотирикутника можна змінювати (мал. 14).

3. Термін «діагональ» походить від грецького слова *diagonios*, що означає «той, що йде від кута до кута». Цей термін став загальноприйнятим лише у XVIII ст.

4. Для стародавніх греків математика була насамперед геометрією. Значний внесок у розвиток геометрії зробив давньогрецький вчений **Платон** (428 р. до н. е. — 348 р. до н. е.).



Мал. 13



Мал. 14

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
чотирикутник	quadrangle	Viereck (n)	quadrilatère

qr.orioncentr.com.ua/8lZcl

Пригадайте головне

1. Що таке чотирикутник?
2. Як позначають чотирикутник?
3. Що таке діагональ чотирикутника?
4. Що таке зовнішній кут чотирикутника?
5. Що таке периметр чотирикутника?
6. Як установити, чи можна з чотирьох відрізків утворити чотирикутник?
7. Сформулюйте та доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.
8. Де в піраміді можна побачити чотирикутник?

Усне тренування

Обчисліть:

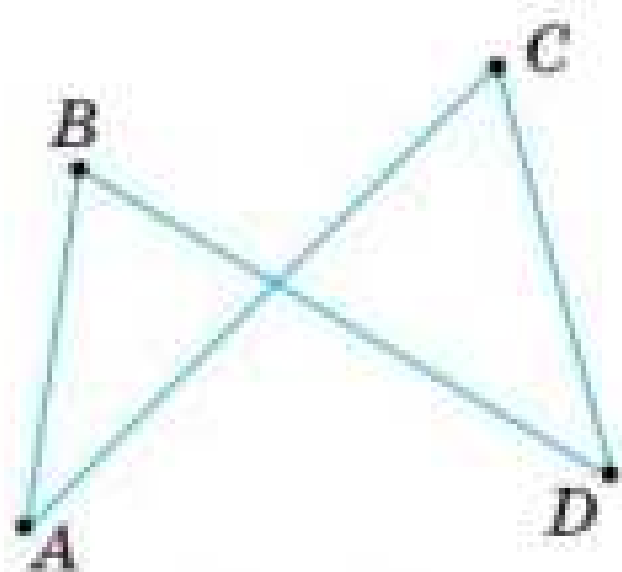
$$(77 + 103) \cdot 2; \quad (162 + 28) \cdot 2; \quad (104 + 76) \cdot 2; \quad (93 + 87) \cdot 2.$$

Розв'яжіть задачі

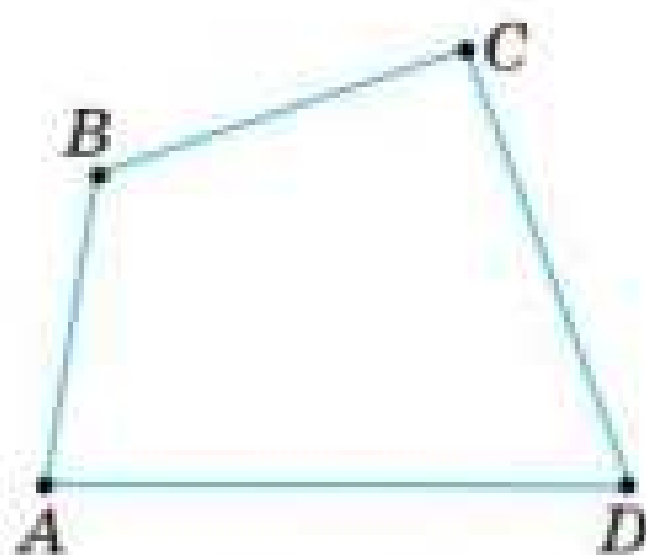
72'. Чи правильно, що в чотирикутнику:

- 1) три вершини лежать на одній прямій;
- 2) жодні три вершини не лежать на одній прямій?

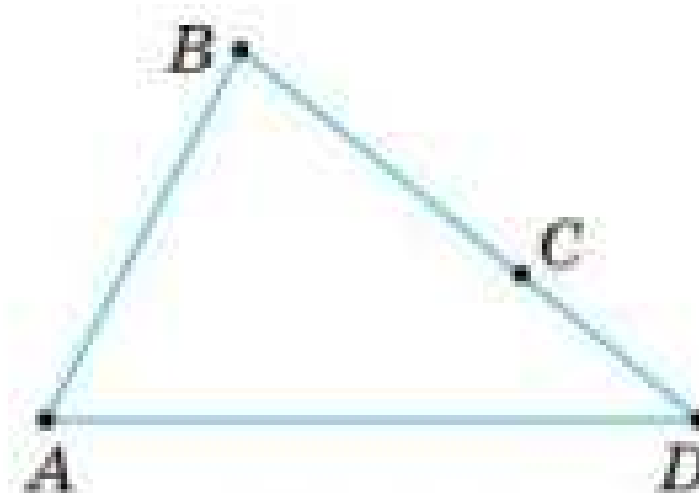
73'. Яка з фігур, зображених на малюнках 15–17, є чотирикутником $ABCD$?



Мал. 15



Мал. 16



Мал. 17

74'. Чи правильно, що зовнішній кут чотирикутника:

- 1) не суміжний із кутом чотирикутника;
- 2) суміжний із кутом чотирикутника;
- 3) вертикальний із кутом чотирикутника?

75'. Яке з наведених тверджень правильне?

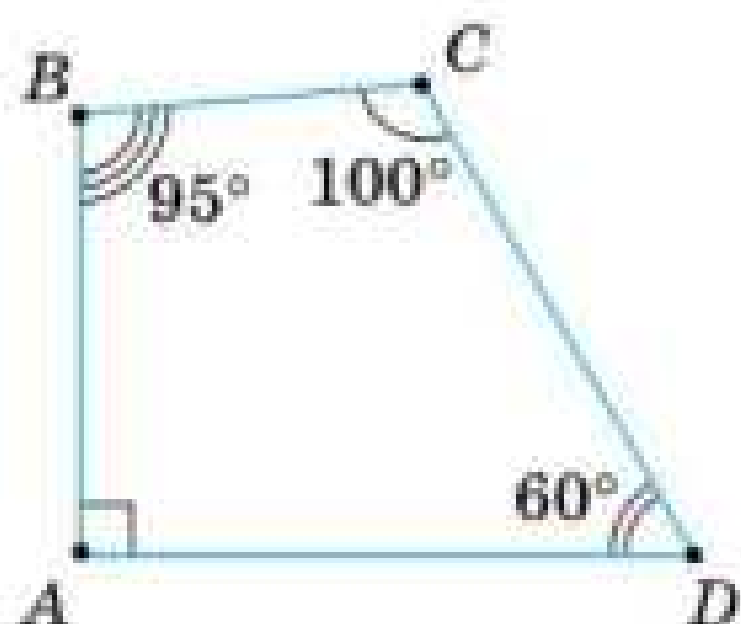
Периметр чотирикутника — це сума довжин:

- 1) трьох його сторін;
- 2) чотирьох сторін;
- 3) усіх сторін і діагоналей.

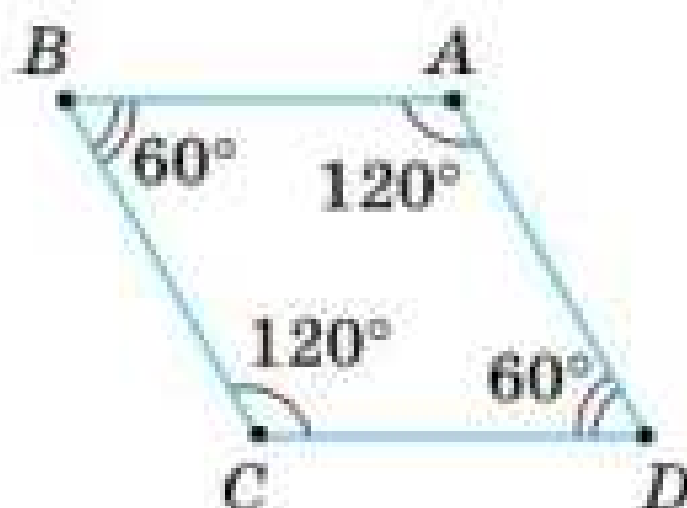
76'. Чи правильно вказано градусну міру кутів чотирикутника $ABCD$ на малюнках 18 і 19? Відповідь поясніть.

77'. Назвіть зображені на малюнку 20 зовнішні кути чотирикутника $MNPК$ при вершині:

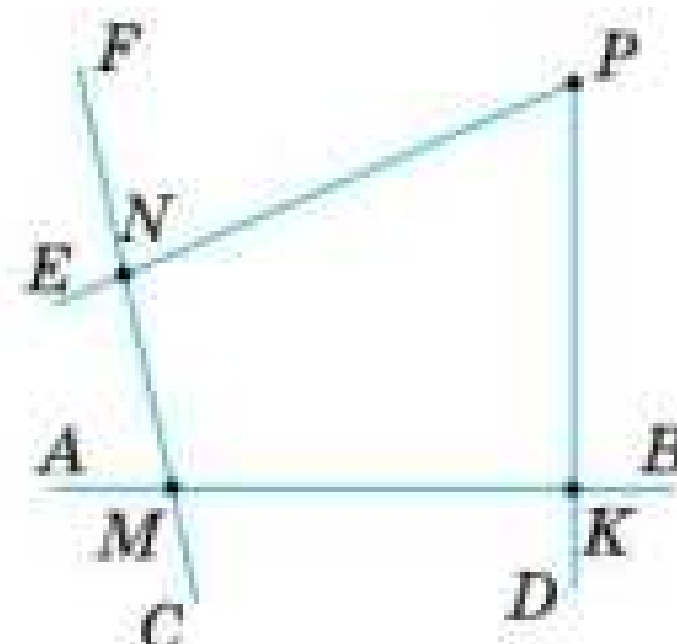
- 1) N ;
- 2) M ;
- 3) K .



Мал. 18



Мал. 19



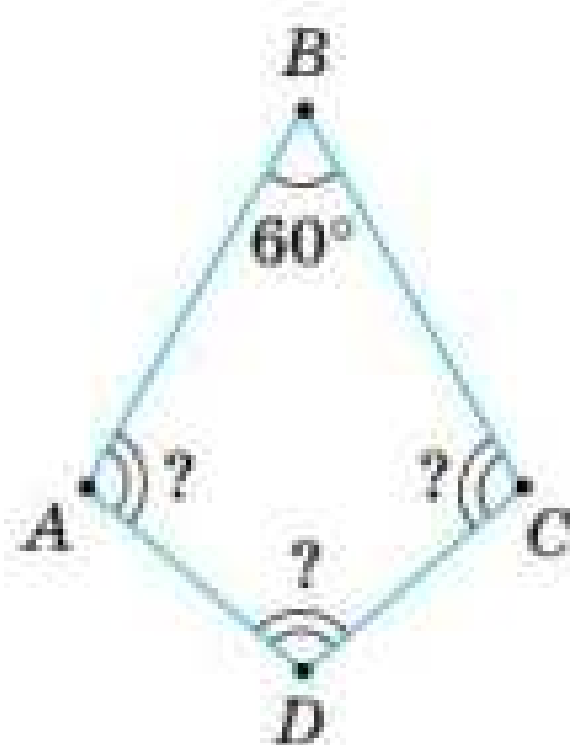
Мал. 20

- 78*** a, b, c, d — сторони чотирикутника, P — його периметр. Знайдіть невідомі величини за таблицею 1.

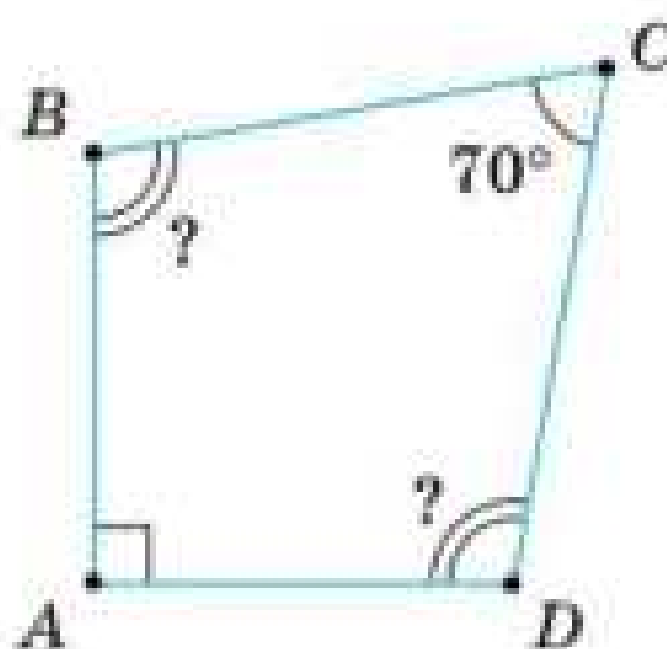
Таблиця 1

a	8 см	10 см	5 см	23 см	
b	12 см	25 см	13 см		16 см
c	16 см	30 см		30 см	20 см
d	18 см		17 см	35 см	24 см
P		90 см	60 см	115 см	74 см

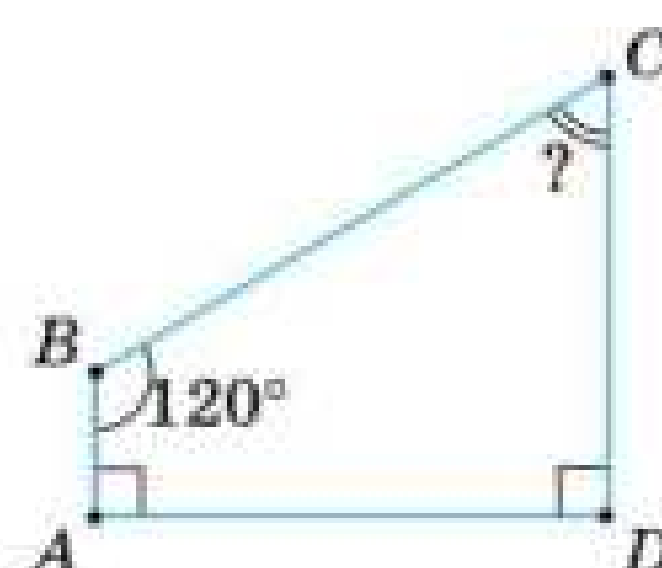
- 79*** Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 140 см, а одна з його сторін у 9 разів менша від кожної з інших.
- 80*** Периметр чотирикутника дорівнює 210 см, а одна з його сторін у 2 рази менша від кожної з інших. Знайдіть сторони чотирикутника.
- 81*** Чи може чотирикутник мати такі сторони:
 1) 1 см, 2 см, 3 см, 4 см;
 2) 18 см, 6 см, 5 см, 6 см?
- 82*** Чи може чотирикутник мати такі сторони: 2 см, 3 см, 5 см, 10 см?
- 83*** За даними на малюнках 21 і 22 визначте невідомі кути чотирикутника $ABCD$.
- 84*** За даними на малюнку 23 визначте невідомий кут чотирикутника $ABCD$.



Мал. 21



Мал. 22



Мал. 23

- 85*** Знайдіть невідомий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють:
 1) $120^\circ, 80^\circ, 100^\circ$; 2) $70^\circ, 130^\circ, 90^\circ$.
- 86*** Три кути чотирикутника дорівнюють $60^\circ, 100^\circ$ і 50° . Знайдіть його четвертий кут.

- 87'. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати: 1) 55° , 75° , 100° , 80° ; 2) 145° , 85° , 70° , 65° ?



qr.orioncentr.com.ua/olYhi

- 88'. Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати 160° , 95° , 45° , 60° ?



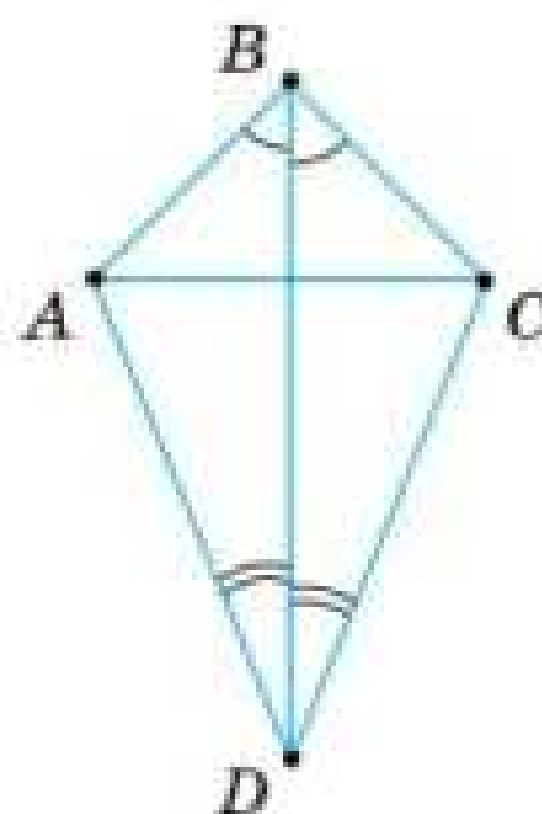
- 89'. За даними таблиці 2 знайдіть кути чотирикутника $ABCD$.

Таблиця 2

$\angle A$	n°	$n^\circ - 30^\circ$	$n^\circ + 10^\circ$	n°
$\angle B$	$2n^\circ$	$n^\circ - 20^\circ$	$n^\circ + 20^\circ$	$2n^\circ$
$\angle C$	$3n^\circ$	$n^\circ - 10^\circ$	$n^\circ + 30^\circ$	n°
$\angle D$	$4n^\circ$	n°	n°	$5n^\circ$

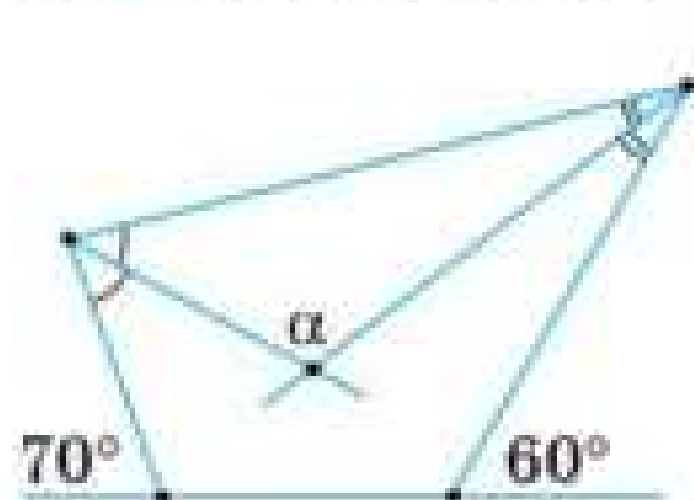
- 90'. Чи можуть усі кути чотирикутника бути тупими? Відповідь поясніть.
- 91'. Усі кути чотирикутника рівні. Знайдіть їх.
- 92'. Якщо чотирикутник має два прями кути, то чому дорівнює сума решти його кутів?
- 93'. Три кути чотирикутника прямі. Доведіть, що й четвертий його кут — прямий.
- 94'. Знайдіть зовнішній кут при вершині C чотирикутника $ABCD$, якщо:
1) $\angle C = 75^\circ$; 2) $\angle A = \angle B = \angle D = 90^\circ$.
- 95'. Знайдіть зовнішній кут при вершині A чотирикутника $ABCD$, якщо:
1) $\angle A = 80^\circ$; 2) $\angle A = 120^\circ$.
- 96'. Піраміда має п'ять граней, чотири з яких — трикутники. Яким многокутником є її п'ята грань?
- 97'. Основою піраміди є чотирикутник. Скільки граней і ребер має піраміда?
98. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 66 см, одна його сторона більша за другу на 8 см і на стільки само менша від третьої, а четверта сторона — у три рази більша за другу.
99. Одна зі сторін чотирикутника дорівнює 9 см, друга — у три рази більша за першу, а третя — на 8 см менша від другої й на 10 см більша за четверту. Знайдіть периметр чотирикутника.

- 100.** Три сторони чотирикутника дорівнюють 10 см, 15 см і 20 см. Чи може периметр чотирикутника дорівнювати:
1) 90 см; 2) 72 см; 3) 115 см?
- 101.** Доведіть, що кожна діагональ чотирикутника менша від його півпериметра.
- 102.** Доведіть, що сума діагоналей чотирикутника менша від його периметра.
- 103.** У чотирикутнику $ABCD$ діагональ BD ділить кути B і D навпіл (мал. 24). Доведіть, що $AB = CB$ і $DA = DC$.
- 104.** Доведіть, що в чотирикутнику $ABCD$ (мал. 24) діагоналі AC і BD — перпендикулярні, якщо $AB = CB$ і $DA = DC$.
- 105.** Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам:
1) 1, 2, 3 і 4; 2) 4, 6, 12 і 14.
- 106.** Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 1, 2, 4 і 5.
- 107.** Якою в чотирикутнику може бути найбільша кількість кутів:
1) тупих; 2) прямих; 3) гострих?
- 108.** Чи можна накреслити чотирикутник, у якому: 1) три кути прямі, а четвертий — тупий; 2) один із кутів дорівнює сумі трьох інших?
- 109.** Сума двох кутів чотирикутника, прилеглих до однієї з його сторін, дорівнює 180° . Знайдіть кут між бісектрисами цих кутів.
- 110.** Знайдіть зовнішні кути чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють: 1) 38° , 158° і 44° ; 2) 49° , 145° і 91° .
- 111.** Три кути чотирикутника дорівнюють 50° , 150° і 65° . Знайдіть його зовнішні кути.
- 112.** Доведіть, що сума зовнішніх кутів чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° .
- 113.** Чи існує чотирикутник, зовнішні кути якого дорівнюють:
1) 120° , 80° , 59° і 101° ; 2) 49° , 98° , 68° і 125° ?
- 114.** Чи існує чотирикутник, зовнішні кути якого дорівнюють: 100° , 55° , 160° і 45° ?
- 115.** Знайдіть залежність між сумою кутів чотирикутника та сумою його зовнішніх кутів.
- 116.** За даними на малюнках 25 і 26 знайдіть кут α .

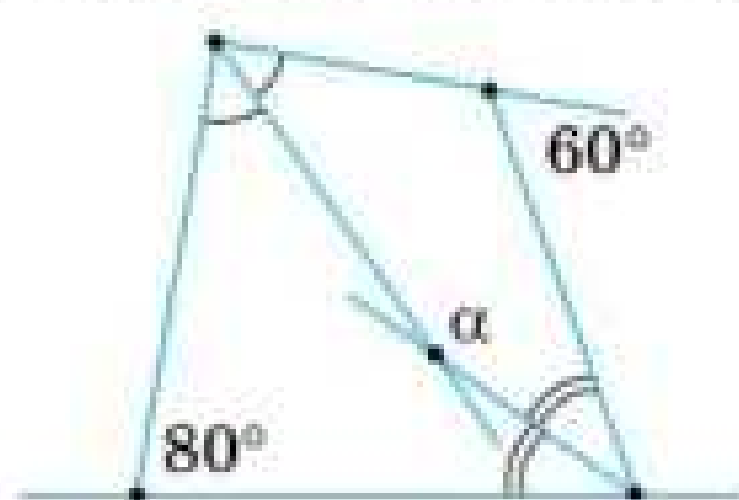


Мал. 24

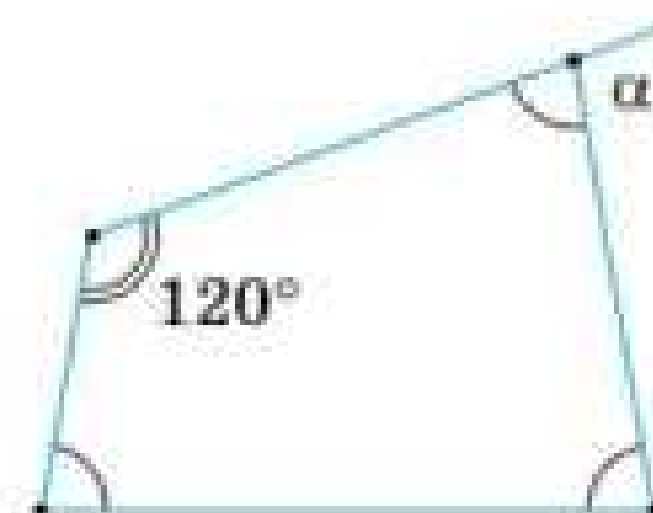
117. За даними на малюнку 27 знайдіть кут α .



Мал. 25



Мал. 26



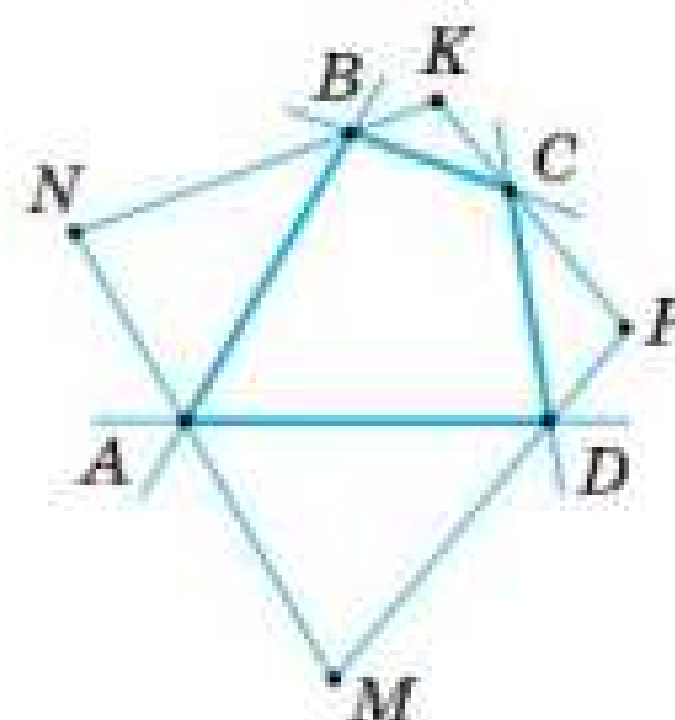
Мал. 27

118*. Діагональ чотирикутника поділяє його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть довжину діагоналі, якщо периметр чотирикутника дорівнює 50 см.

119*. Доведіть, що сума двох протилежних сторін чотирикутника менша від суми його діагоналей.

120*. У чотирикутнику $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинаються в точці M , а бісектриси кутів C і D — у точці N . Доведіть, що сума кутів AMB і CND дорівнює 180° .

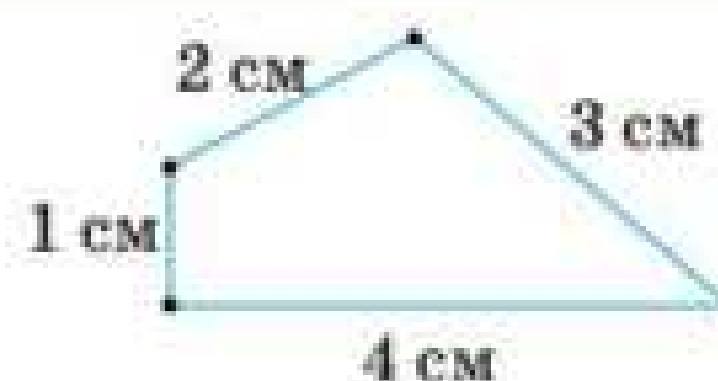
121*. Бісектриси зовнішніх кутів чотирикутника $ABCD$, перетинаючись, утворюють чотирикутник $MNKP$ (мал. 28). Доведіть, що сума протилежних кутів чотирикутника $MNKP$ дорівнює 180° .



Мал. 28

Проявіть компетентність

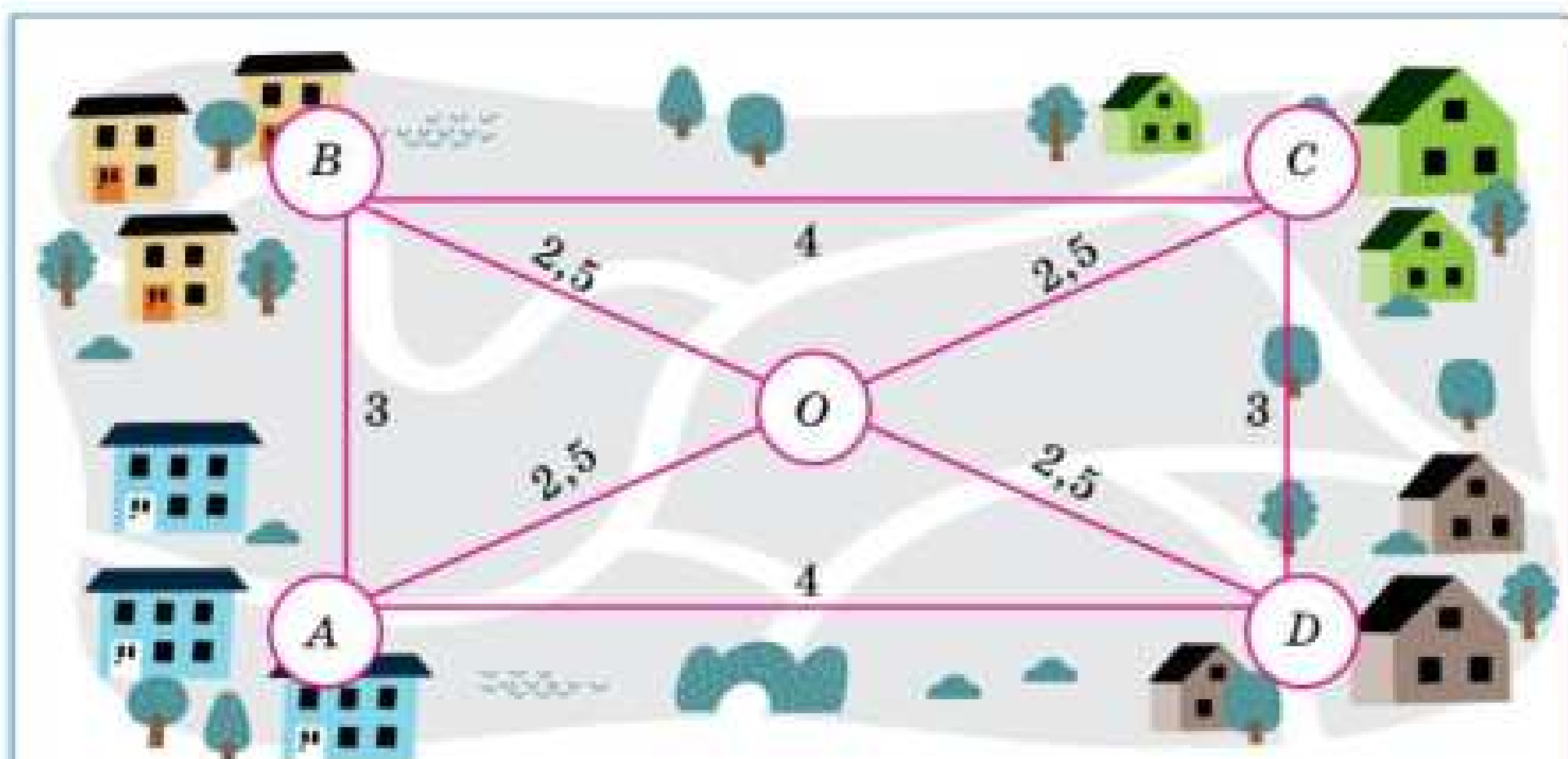
122. На малюнку 29 зображено земельну ділянку в масштабі 1 : 2000. Межі ділянки потрібно обгородити парканом. Скільки стовпців необхідно для огорожі, якщо відстань між ними має бути 4 м?



Мал. 29

123. Потрібно виготовити чотирикутну рамку для повітряного змія. Взяли чотири планки й закріпили їхні кінці. З'ясувалося, що виготовлена рамка нежорстка — змінюється її форма. Як можна укріпити рамку?

124. Чотири населені пункти розташовані у вершинах чотирикутника (мал. 30) і попарно з'єднані дорогами (відповідні відстані вказано на малюнку). На цій місцевості планують побудувати завод, де зможуть працювати мешканці кожного із цих населених пунктів.



Мал. 30

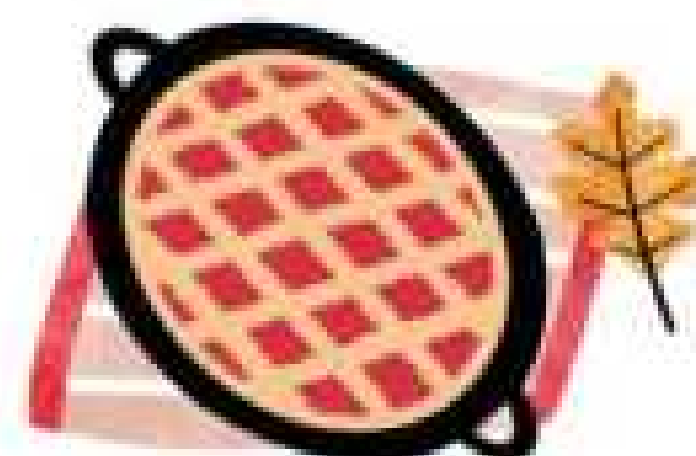
На роботу та з роботи працівників возитиме заводський автобус.

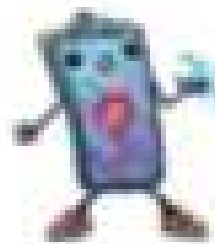
1. Чому дорівнює сума відстаней від заводу до даних пунктів, якщо завод побудують в одному із цих населених пунктів? Чи може ця відстань бути найменшою?
2. Чому дорівнює сума відстаней від заводу до даних пунктів, якщо завод побудують посередині між двома із цих чотирьох населених пунктів? Чи може ця відстань бути найменшою?
3. У якому місці потрібно побудувати завод, щоб сума відстаней від нього до всіх чотирьох даних пунктів була найменшою?
4. Розробіть найкоротший маршрут заводського автобуса перед початком робочого дня, якщо він вирушає з території заводу, у кожному населеному пункті забирає робітників на одній зупинці та привозить усіх разом на завод.
5. Розробіть найкоротший маршрут заводського автобуса після робочого дня, якщо він вирушає з території заводу, у кожному населеному пункті висаджує робітників на одній зупинці й не повертається на завод.

§ 2. ПАРАЛЕЛОГРАМ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1. Що таке паралелограм

Ситуація. Бабуся готувала пиріг і попросила Катруся допомогти його прикрасити. Бабуся завжди робила на пирогах красиву решітку зі смужок із тіста. Катруся виклала перший шар смужок паралельно одна одній, а в другому шарі змінила напрямок смужок і розмістила їх навскоси до смужок у першому шарі.





Яку фігуру утворили дві пари смужок із двох своїх шарів?

Паралелограм.

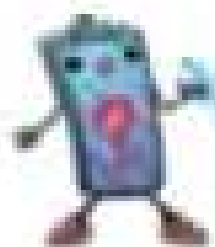
qr.orioncentr.com.ua/qtU3A



Запам'ятайте!

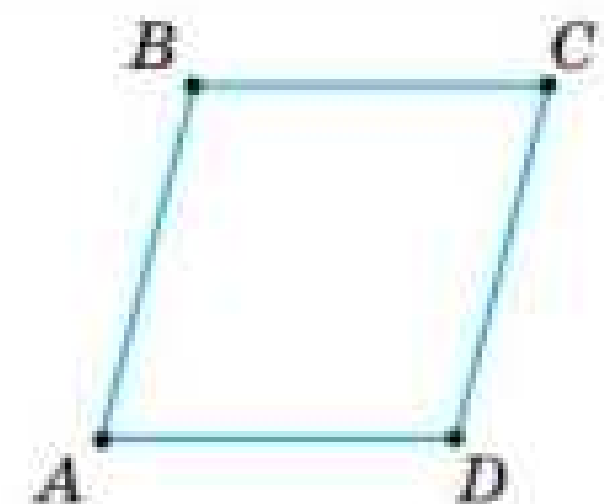
Чотирикутник, у якому протилежні сторони попарно паралельні, називається *паралелограмом*.

Наприклад, у чотирикутнику $ABCD$ (мал. 31) $AD \parallel BC$ і $AB \parallel DC$, тому цей чотирикутник — паралелограм.



Який елемент паралелограма одержимо, якщо з його вершини проведемо перпендикуляр до протилежної сторони?

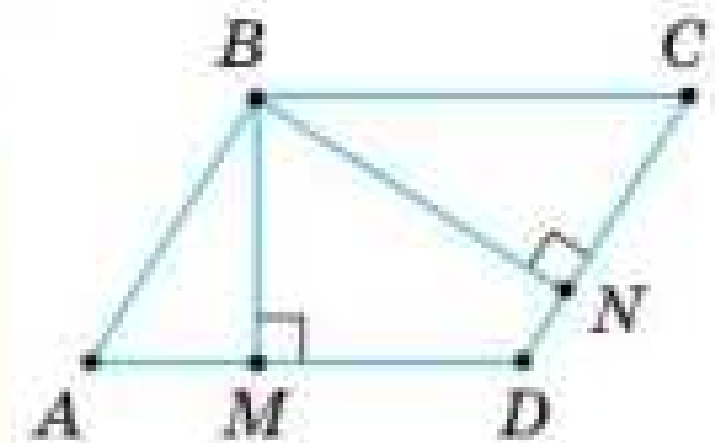
Висоту.



Мал. 31

Запам'ятайте!

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї сторони до паралельної їй сторони (або до її продовження).



Мал. 32

На малюнку 32 відрізки BM і BN — висоти паралелограма $ABCD$.



Висоту паралелограма можна провести з будь-якої точки його сторони.

2. Властивості паралелограма

Запам'ятайте!

Теорема (властивість сторін і кутів паралелограма)

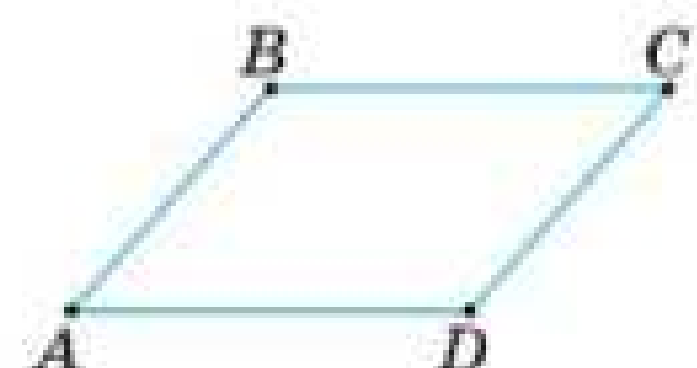
У паралелограмі:

- 1) протилежні сторони попарно рівні;
- 2) протилежні кути попарно рівні.

Дано: $ABCD$ — паралелограм (мал. 33).

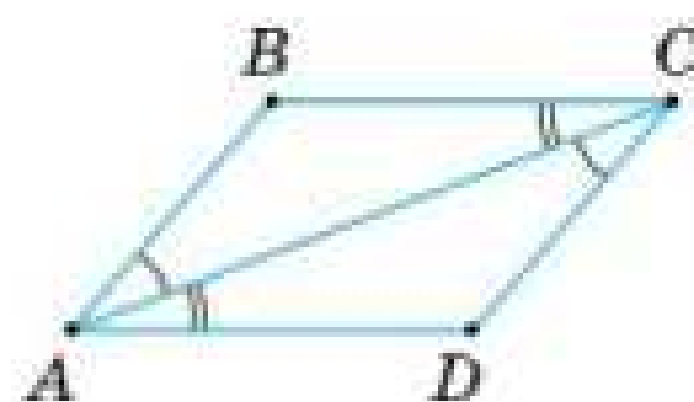
Довести: 1) $AB = DC$, $BC = AD$;

2) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.



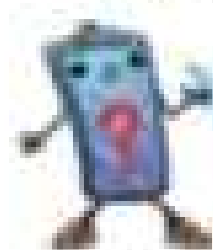
Мал. 33

Доведення. Проведемо діагональ AC (мал. 34). Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle CDA$. У них AC — спільна сторона, $\angle BCA = \angle DAC$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній AC , $\angle BAC = \angle DCA$ також як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і DC та січній AC . Отже, $\triangle ABC = \triangle CDA$ за стороною та прилеглими до неї кутами. Із рівності трикутників ABC і CDA випливає: 1) $AB = CD$, $BC = DA$; 2) $\angle B = \angle D$.



Мал. 34

Кути A і C паралелограма рівні як суми рівних кутів.



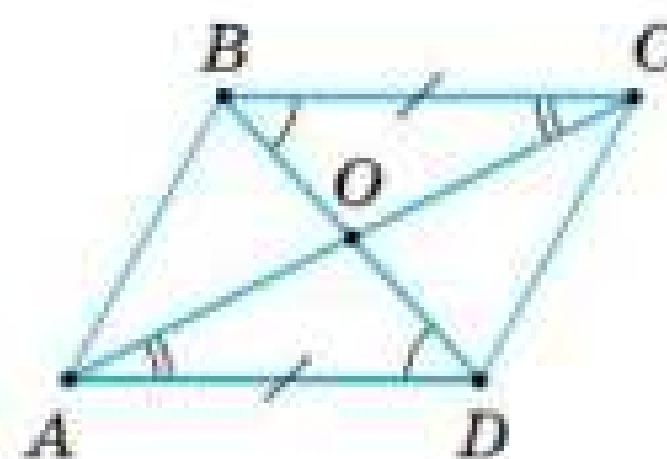
Чи може паралелограм мати лише один гострий кут?

Ні, бо за доведеною теоремою протилежний йому кут також гострий.



Задача (властивість діагоналей паралелограма) Діагоналі паралелограма точкою їх перетину діляться навпіл. Доведіть.

Розв'язання Нехай $ABCD$ — паралелограм (мал. 35), O — точка перетину його діагоналей AC і BD . Доведемо, що $AO = CO$, $DO = BO$. Розглянемо $\triangle AOD$ і $\triangle COB$. У них $BC = AD$ як протилежні сторони паралелограма, $\angle CBO = \angle ADO$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній BD , $\angle BCO = \angle DAO$ ($BC \parallel AD$, AC — січна). Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ за стороною та прилеглими до неї кутами. З рівності трикутників AOD і COB випливає: $AO = CO$, $DO = BO$.



Мал. 35

✓ Щоб довести рівність відрізків (кутів) у паралелограмі, доведіть рівність трикутників, відповідними елементами яких є ці відрізки (кути).

✓ Паралелограм є окремим видом чотирикутника, тому має всі його властивості.

Інші властивості паралелограма подано в таблиці 3.

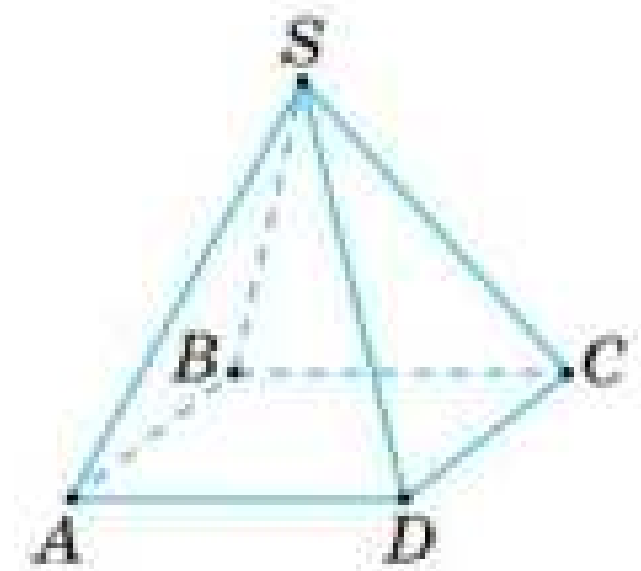
Таблиця 3

$ABCD$ — паралелограм	Властивість
	1. $AB = DC$, $AD = BC$
	2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
	3. $AO = CO$, $DO = BO$

3. Паралелограм як основа піраміди

Якщо основою піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$ (мал. 36), то:

- 1) $AB \parallel DC$ і $AD \parallel BC$;
- 2) $AB = DC$ і $AD = BC$;
- 3) $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$.



Мал. 36

Дізнайтеся більше

1. Назва «паралелограм» (*parallelogramm*) походить від поєднання грецьких слів: «паралелос» — той, що йде поряд, і «грамма» — лінія.

Цей термін уперше трапляється в «Началах» Евкліда (III ст. до н. е.). Хоча замість терміна «паралелограм» давньогрецький учений спочатку вживав словосполучення «утворена паралельними лініями площа» (мається на увазі частина площини, обмежена двома парами паралельних прямих).

2. **Ада Августа Лавлейс (Байрон)** (10.12.1815–27.11.1852) — відома англійська математикиня, яку називали «Королева паралелограмів». Вперше зробила опис ранньої версії обчислювальної машини Чарлза Беббіджа і склала для цієї машини першу у світі програму. Вона вважається однією з перших програмістів в історії.



Словничок



Українська

Англійська/
EnglishНімецька/
DeutschФранцузька/
Françaisпаралело-
грамparallelo-
gramParallelo-
gramm (n)parallélo-
gramme

qr.orioncentr.com.ua/Uq1Ln

Пригадайте головне

1. Який чотирикутник називається паралелограмом?
2. Що таке висота паралелограма?
3. Сформулюйте та доведіть теорему про властивість сторін і кутів паралелограма.
4. Сформулюйте та доведіть властивість діагоналей паралелограма.
5. Де в піраміді можна побачити паралелограм?

Усне тренування

Обчисліть:

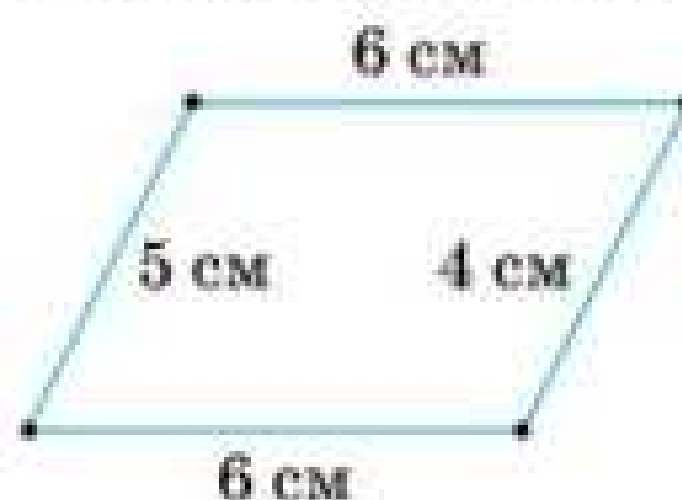
$$(26 + 84) : 2; \quad (102 - 24) : 2; \quad (76 - 62) : 2; \quad (55 - 43) : 2.$$

Розв'яжіть задачі

- 125.** Чи правильно, що паралелограмом є чотирикутник, у якому:
- 1) сусідні сторони паралельні;
 - 2) дві протилежні сторони паралельні;
 - 3) протилежні сторони попарно паралельні?
- 126.** Чи правильно, що висотою паралелограма є:
- 1) пряма; 2) промінь; 3) відрізок?
- 127.** Чи правильно, що в будь-якому паралелограмі:
- 1) сусідні сторони рівні;
 - 2) протилежні сторони попарно рівні;
 - 3) сусідні кути рівні;
 - 4) протилежні кути попарно рівні?
- 128.** Чи правильно вказано градусні міри кутів паралелограма на малюнку 37 і довжини сторін на малюнку 38? Відповідь поясніть.



Мал. 37



Мал. 38

- 129.** У паралелограмі $MNPK$ $MN = 1,2\text{ дм}$, $NP = 0,4\text{ дм}$. Чому дорівнюють сторони PK і MK ? Відповідь поясніть.
- 130.** У паралелограмі $ABCD$ $AB = 5\text{ см}$, $BC = 10\text{ см}$. Чому дорівнюють сторони AD і DC ? Відповідь поясніть.
- 131.** За даними таблиці 4 знайдіть довжину сторони паралелограма $ABCD$, яка паралельна заданій його стороні.

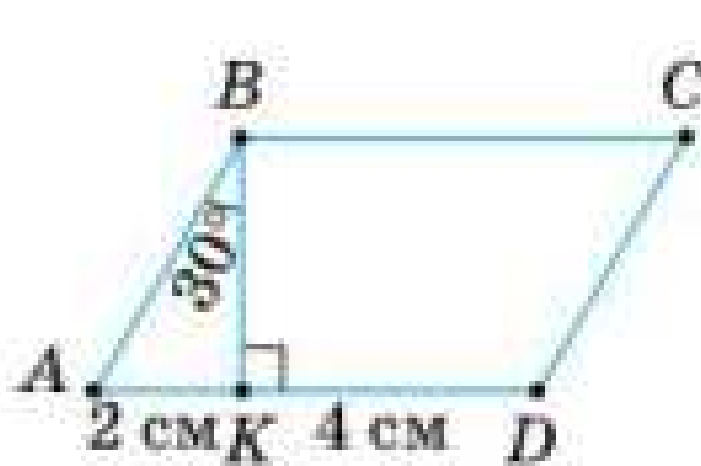
Таблиця 4

AB	15 см			
BC		2,1 дм		
CD			1,8 мм	
AD				0,33 м

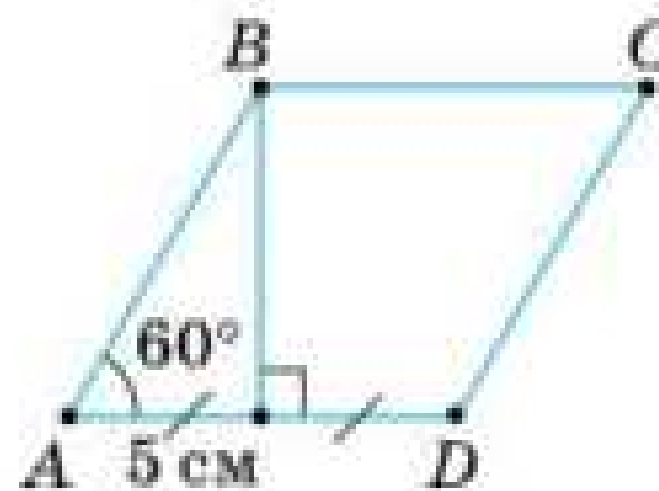
- 132.** Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо:
- 1) одна з його сторін у 7 разів менша від іншої;
 - 2) різниця двох його сторін дорівнює 7 см.
- 133.** Периметр паралелограма дорівнює 32 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з його сторін на 3 см більша за іншу.



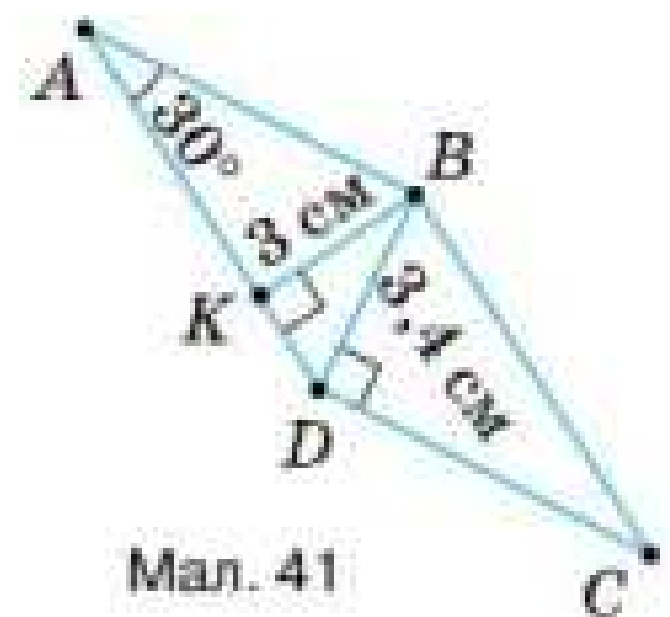
134'. За даними на малюнках 39, 40 знайдіть сторони паралелограма $ABCD$.



Мал. 39



Мал. 40



Мал. 41

135'. За даними на малюнку 41 знайдіть сторони паралелограма $ABCD$.



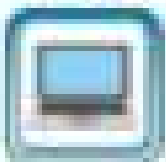
136'. Сума кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, дорівнює 180° . Доведіть.

137'. У паралелограмі $ABCD$ $\angle ABC = \alpha$, $\angle BCD = \beta$. Чому дорівнюють кути ADC і BAD , якщо: 1) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$; 2) $\alpha = \beta = 90^\circ$? Відповідь поясніть.

138'. Знайдіть кути ABC і BCD паралелограма $ABCD$, якщо $\angle BAD = 45^\circ$, $\angle ADC = 135^\circ$. Відповідь поясніть.



139'. A, B, C, D — кути паралелограма $ABCD$. Накресліть у зошиті таблицю 5 і заповніть її.



Таблиця 5

$\angle A$	35°			
$\angle B$		140°		
$\angle C$			75°	
$\angle D$				64°



qr.orioncentr.com.ua/DaKSx

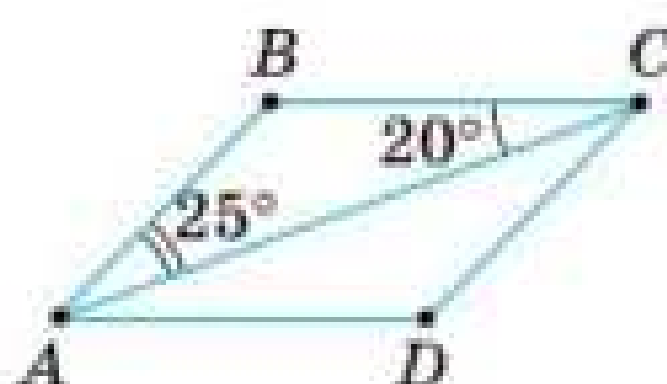
140'. Чи може паралелограм мати:

- 1) лише три рівні кути;
- 2) лише один тупий кут?

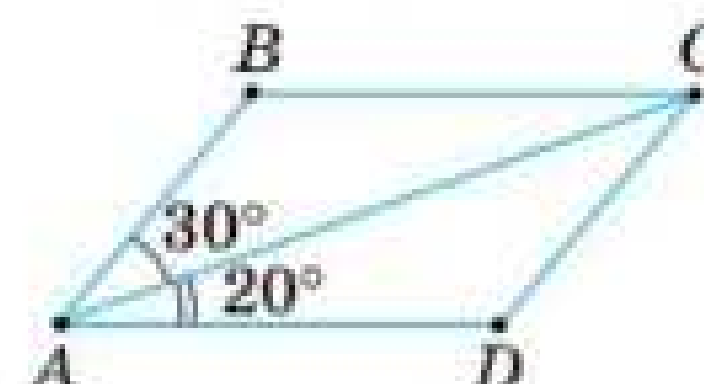
Відповідь поясніть.

141'. Чи можуть усі кути паралелограма бути гострими?

142'. За даними на малюнках 42, 43 знайдіть кути паралелограма $ABCD$.



Мал. 42



Мал. 43

143'. За даними на малюнку 44 знайдіть кути паралелограма $ABCD$.

- 144'.** Знайдіть кути паралелограма, якщо:
 1) один з його кутів на 50° менший від іншого;
 2) сума двох його кутів дорівнює 120° .

145'. Знайдіть кути паралелограма, якщо один з його кутів у 3 рази більший за інший.

146'. Доведіть, що діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники.

147'. Чи правильно вказано довжини відрізків діагоналей паралелограма на малюнку 45? Відповідь поясніть.

148'. $ABCD$ — паралелограм (мал. 46).

За даними на малюнку знайдіть:

- 1) відрізки OC і OD ;
- 2) діагоналі AC і BD ;
- 3) сторони AD і DC .

149'. Основа піраміди — паралелограм $ABCD$ (мал. 47). Знайдіть кути паралелограма, якщо $\angle A = 35^\circ$.

150'. Основа піраміди — паралелограм $ABCD$ (мал. 47). Знайдіть усі сторони паралелограма, якщо $AB = 3$ см, $BC = 0,6$ дм.

151. Доведіть, що бісектриси кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, взаємно перпендикулярні.

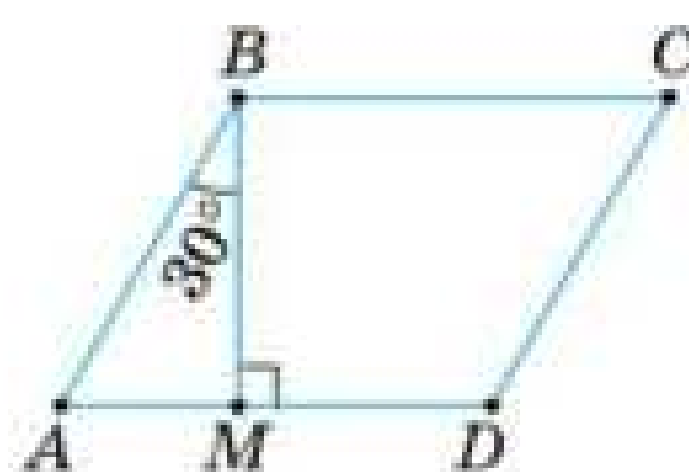
152. Доведіть, що бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні.

✓ Якщо в задачі дано бісектрису кута паралелограма, то утворений трикутник ($\triangle ABK$ на малюнку 48) — рівнобедрений. Скористайтеся його властивостями.

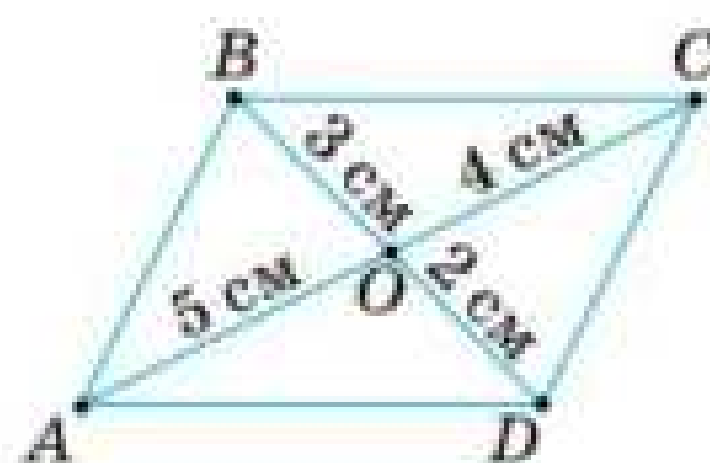
153. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці K (мал. 48). $BK = a$, $KC = b$.

Знайдіть периметр паралелограма, якщо:

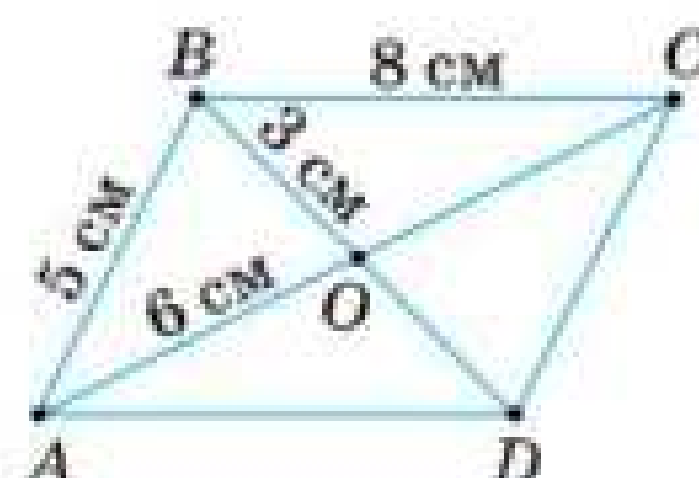
- 1) $a = 14$ см, $b = 7$ см;
- 2) $a = 2$ см, $b = 3$ см.



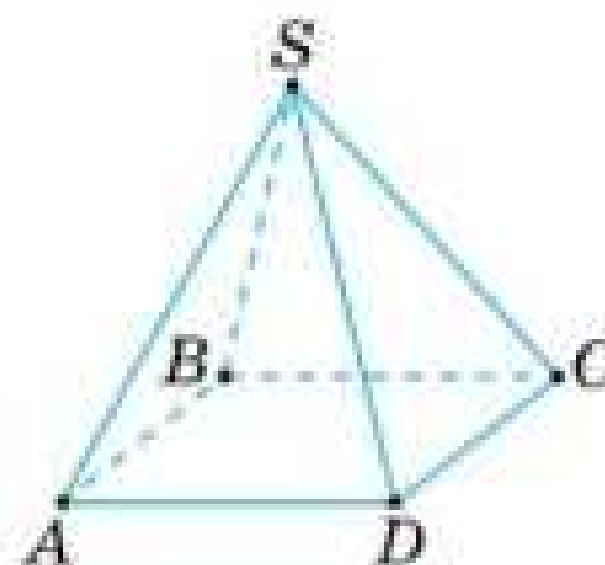
Мал. 44



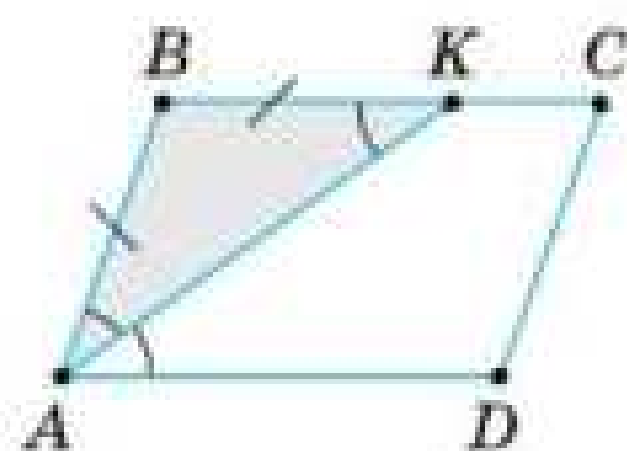
Мал. 45



Мал. 46

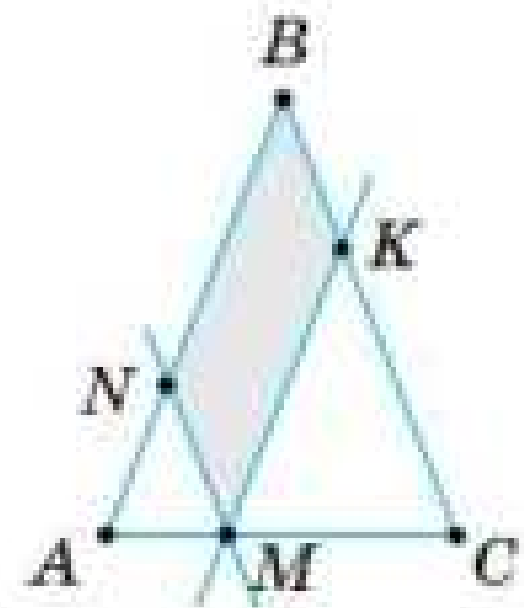


Мал. 47



Мал. 48

- 154.** У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці K . Знайдіть:
- 1) BK і KC , якщо $AB = 6$ см, $AD = 9$ см;
 - 2) AD , якщо $AB = 4$ см, $KC = 11$ см.
- 155.** У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці K . Знайдіть периметр паралелограма, якщо $AD = 14$ см, $BK : KC = 3 : 4$.
- 156.** Із точки M , узятої на основі AC рівнобедреного трикутника ABC , проведено прямі, паралельні бічним сторонам (мал. 49). Доведіть, що периметр утвореного паралелограма $MNBK$ не залежить від положення точки M .
- 157.** Із точки, узятої на основі AC рівнобедреного трикутника ABC , проведено прямі, паралельні бічним сторонам (мал. 49). Знайдіть периметр паралелограма $MNBK$, якщо $AB = 15$ см.
- 158.** У паралелограмі $ABCD$ через точку O перетину діагоналей проведено пряму, яка перетинає сторони BC та AD в точках E і F . Доведіть, що: а) $OE = OF$; б) $BE = DF$; в) $CE = AF$.
- 159.** У паралелограмі $ABCD$ через точку O перетину діагоналей проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD в точках E і F . Знайдіть сторони BC та AD паралелограма, якщо $BE = 5$ см, $AF = 4$ см.
- 160.** Знайдіть кути паралелограма, якщо два його кути відносяться як:
- 1) $4 : 5$; 2) $3 : 7$.
- 161.** Знайдіть кути паралелограма, якщо:
- 1) один із них у 4 рази більший за суму двох інших;
 - 2) половина одного кута дорівнює третині іншого.
- 162.** Знайдіть кути паралелограма, якщо:
- 1) два його кути відносяться як $2 : 3$;
 - 2) один з його кутів дорівнює сумі двох інших.
- 163.** На малюнках 50, 51 зображено паралелограми. Знайдіть кут x .



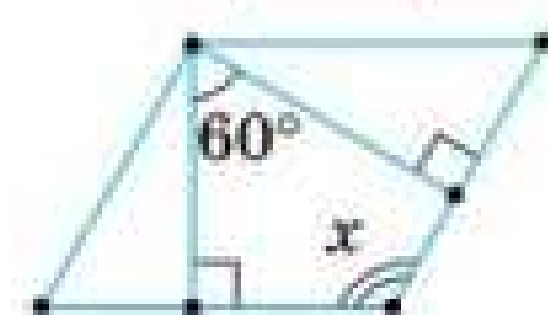
Мал. 49



Мал. 50



Мал. 51



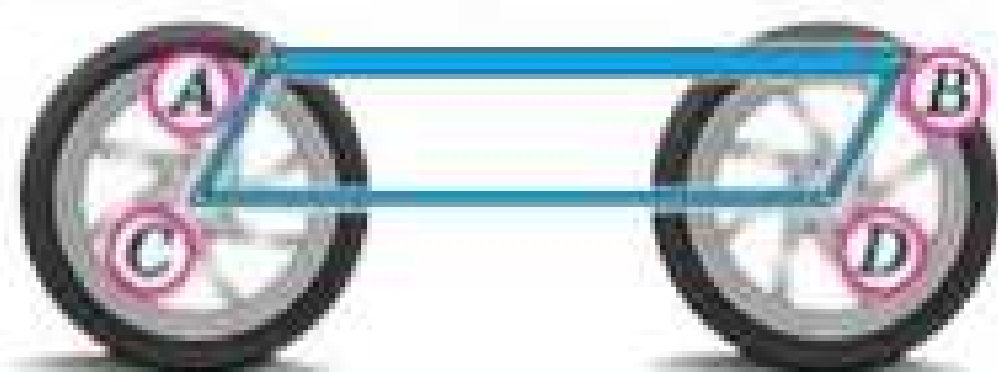
Мал. 52

- 164.** На малюнку 52 зображено паралелограм. Знайдіть кут x .
- 165.** Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює його гострому куту.

- 166.** Із вершини тупого кута паралелограма проведено дві висоти. Кут між ними дорівнює α . Знайдіть кути паралелограма, якщо:
1) $\alpha = 35^\circ$; 2) $\alpha = 45^\circ$; 3) $\alpha = 89^\circ$.
- 167.** У паралелограмі $ABCD$ діагональ BD утворює зі стороною CD кут 68° , $\angle ABC = 84^\circ$. Знайдіть кути ADB і BCD .
- 168.** Знайдіть кути паралелограма, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні паралелограма й перпендикулярна до неї.
- 169*.** Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 48 см. Бісектриси кутів A і D ділять сторону BC на три рівні частини. Знайдіть сторони паралелограма.
- 170*.** У паралелограмі гострий кут дорівнює 60° . Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону навпіл. Знайдіть меншу діагональ паралелограма, якщо його периметр дорівнює 24 см.
- 171*.** Два кути паралелограма відносяться як 1 : 3. Знайдіть кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини:
1) тупого кута; 2) гострого кута.
- 172*.** Один із кутів паралелограма в три рази більший за інший. Висота, проведена з вершини тупого кута, ділить протилежну сторону на два відрізки, які дорівнюють 2 см і 4 см. Знайдіть висоту паралелограма.
- 173*.** Паралелограм, периметр якого дорівнює 50 см, розбивається діагоналями на чотири трикутники. Знайдіть сторони паралелограма, якщо різниця периметрів двох із цих трикутників дорівнює 5 см.
- 174*.** За якої умови точка перетину бісектрис двох кутів паралелограма, що прилягають до однієї сторони, лежить на протилежній стороні?
- 175*.** Периметр паралелограма дорівнює 42 см. Бісектриси кутів, прилеглих до однієї сторони, перетинаються на іншій стороні. Знайдіть сторони паралелограма.

Проявіть компетентність

- 176.** На малюнку зображено два однакові колеса (мал. 53). Стрижень AB , довжина якого дорівнює відстані CD між центрами коліс, передає рух від одного колеса до іншого.



Мал. 53

1. Яким може бути взаємне розміщення стрижня AB та лінії центрів CD ?

А. $AB \perp CD$.

Б. $AB \parallel CD$.

В. AB і CD лежать на прямих, що не перетинаються.

Г. Не можна визначити.

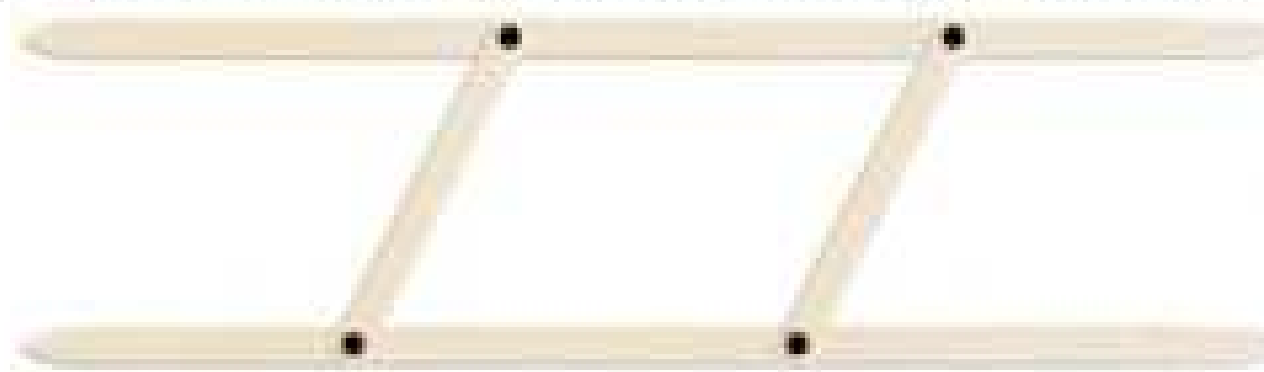
2. Уявіть, що стрижень AB зламався. Як його відновити? Запропонуйте власний план дій.

177. Для проведення паралельних прямих використовують паралельні лінійки (мал. 54).

1. Поясніть, як виготовити такий прилад.

2. Поясніть, як користуватися цим приладом.

3. На якій властивості ґрунтується будова приладу?

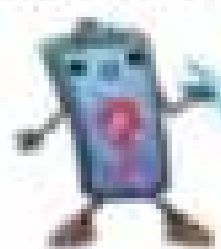


Мал. 54

§ 3. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛОГРАМА

1. Ознака паралелограма за попарною рівністю протилежних сторін

Ситуація. Батько лагодив огороження сходів і попросив Юлю з'ясувати, чи паралельні нові перила і лінія підйому сходів. Юля виміряла довжини двох баясин та відстані між їхніми верхніми й нижніми кінцями і встановила, що ці довжини відповідно рівні. Вона стверджує, що кожна пара баясин утворює з перилами і лінією підйому сходів паралелограм, тому перила паралельні лінії підйому сходів.



Чи має рацію Юля?

Так.



qr.orioncentr.com.ua/xckld

Запам'ятайте!

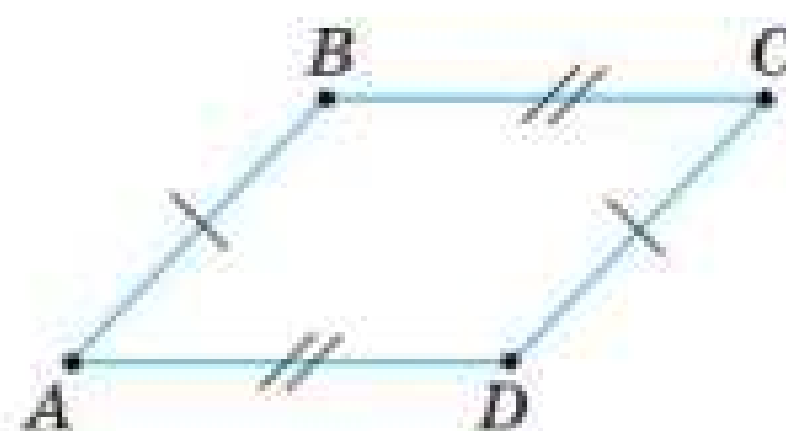
Теорема (ознака паралелограма)

Якщо **протилежні сторони** чотирикутника **попарно рівні**, то такий чотирикутник — паралелограм.

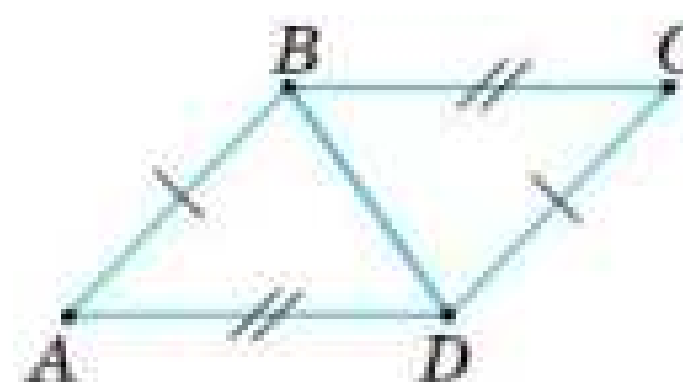
Дано: $ABCD$ — чотирикутник (мал. 55),
 $AB = DC$, $BC = AD$.

Довести: $ABCD$ — паралелограм.

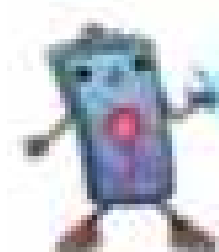
Доведення. У даному чотирикутнику $ABCD$ проведемо діагональ BD (мал. 56). Розглянемо $\triangle BCD$ і $\triangle DAB$. У них BD — спільна сторона, $DC = AB$ і $BC = AD$ за умовою. Отже, $\triangle BCD = \triangle DAB$ за трьома сторонами. Із рівності трикутників випливає: $\angle CBD = \angle ADB$ і $\angle CDB = \angle ABD$. Кути CBD і ADB — внутрішні різносторонні при прямих BC і AD та січній BD . Тому $BC \parallel AD$. Так само кути CDB і ABD — внутрішні різносторонні при прямих AB і DC та січній BD . Тому $AB \parallel DC$. Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$ і $AB \parallel DC$, то, за означенням, цей чотирикутник — паралелограм.



Мал. 55

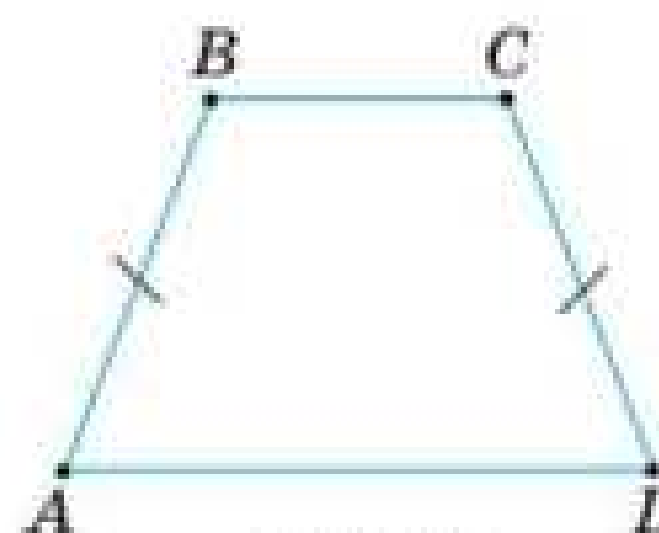


Мал. 56



Чи можна вважати чотирикутник паралелограмом, якщо в ньому дві протилежні сторони рівні, а дві інші — паралельні?

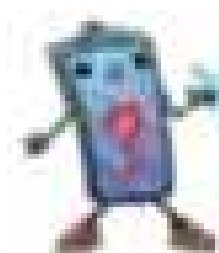
Не можна.



Мал. 57

На малюнку 57 $AB = CD$, $BC \parallel AD$, але чотирикутник $ABCD$ — не паралелограм.

2. Ознака паралелограма за рівністю й паралельністю двох протилежних сторін



Чи могла Юля в описаній ситуації по-іншому обґрунтувати свій висновок?

qr.orioncentr.com.ua/SXMe5

Так.



Справді, дві баласини в огороженні сходів мають рівні довжини й установлені вертикально. Значить, вони паралельні й рівні. Звідси теж випливає Юлін висновок про паралелограм. Доведемо це.

Запам'ятайте!**Теорема (ознака паралелограма)**

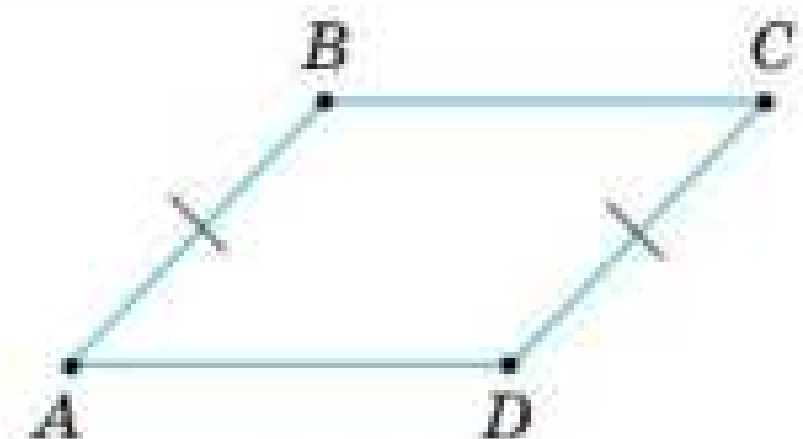
Якщо в чотирикутнику **дві протилежні сторони рівні й паралельні**, то такий чотирикутник — паралелограм.

Дано: $ABCD$ — чотирикутник (мал. 58), $AB = DC$, $AB \parallel DC$.

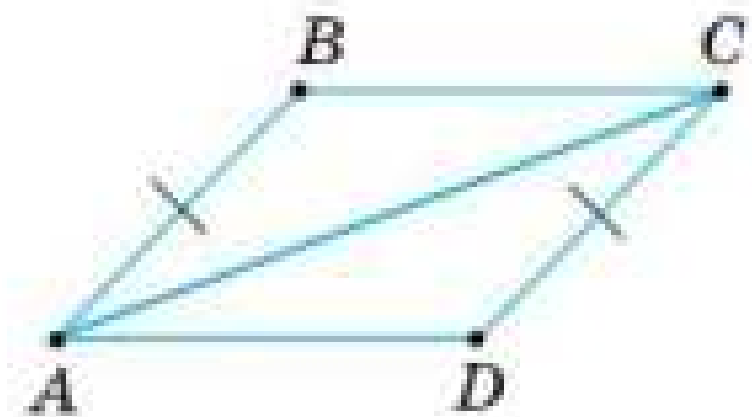
Довести: $ABCD$ — паралелограм.

Доведення. У даному чотирикутнику $ABCD$ проведемо діагональ AC (мал. 59). Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle CDA$. У них AC — спільна сторона, $AB = DC$ за умовою, $\angle BAC = \angle DCA$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і DC та січній AC . Отже, $\triangle ABC = \triangle CDA$ за двома сторонами та кутом між ними. Із рівності трикутників випливає: $\angle DAC = \angle BCA$. Але кути DAC і BCA — внутрішні різносторонні при прямих BC і AD та січній AC . Тому $BC \parallel AD$.

Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$ (за доведеним) і $AB \parallel DC$ (за умовою), то, за означенням, цей чотирикутник — паралелограм.



Мал. 58



Мал. 59

3. Ознака паралелограма за діагоналями

Задача (ознака паралелограма) Якщо **діагоналі чотирикутника точкою їх перетину діляться навпіл**, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.

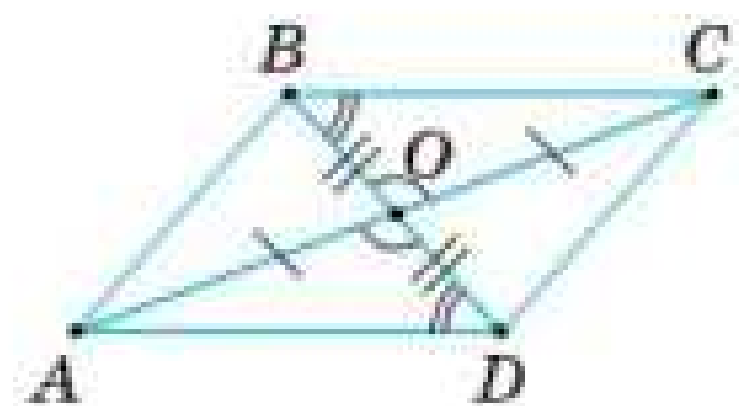
Розв'язання Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник, O — точка перетину його діагоналей і $BO = DO$, $AO = CO$ (мал. 60).

Доведемо, що $ABCD$ — паралелограм.

Розглянемо $\triangle BOC$ і $\triangle DOA$.

У них $BO = DO$, $AO = CO$ за умовою, $\angle BOC = \angle DOA$ як вертикальні. Отже, $\triangle BOC = \triangle DOA$ за двома сторонами та кутом між ними. Із рівності трикутників випливає: $BC = AD$ і $\angle OBC = \angle ODA$. Але кути OBC і ODA — внутрішні різносторонні при прямих BC і AD та січній BD . Тому $BC \parallel AD$.

Оскільки в чотирикутнику $ABCD$ $BC = AD$ і $BC \parallel AD$, то, за доведеною вище ознакою, цей чотирикутник — паралелограм.

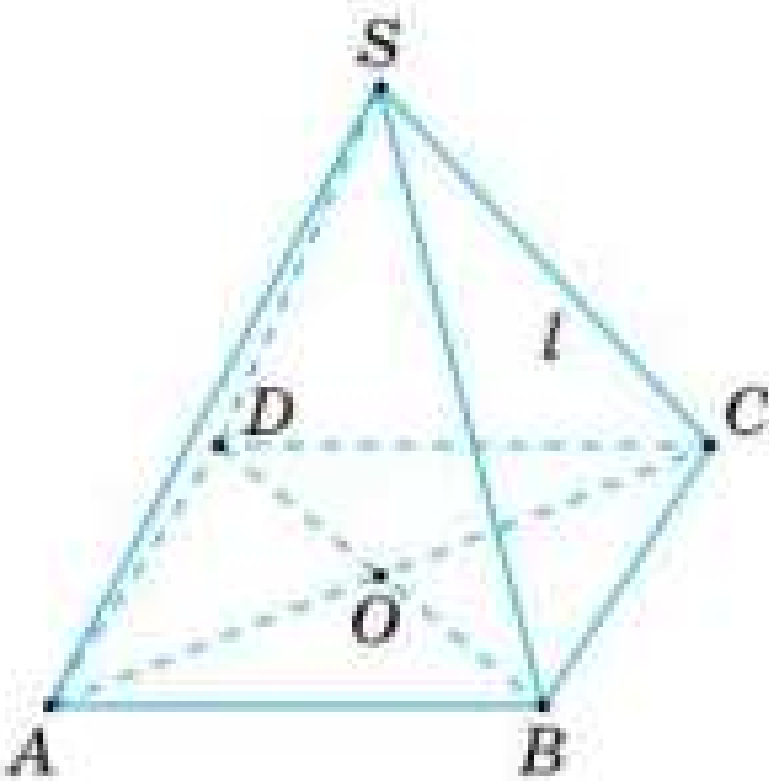


Мал. 60

4. Як переконатись, що основою чотирикутної піраміди є паралелограм



Щоб установити, що основою чотирикутної піраміди є паралелограм, доведіть, що в чотирикутнику основи:
або $AB \parallel DC$ і $AD \parallel BC$,
або $AB = DC$ і $AD = BC$,
або $AB = DC$ і $AB \parallel DC$,
або $BO = DO$ і $AO = CO$ (мал. 61).



Мал. 61

Дізнайтеся більше

Вам доводилося стикатись із поняттями «необхідно», «достатньо», «необхідно й достатньо». За таблицею 6 розгляньте пари тверджень А і В та з'ясуйте зміст цих понять.

Таблиця 6

Твердження А	Твердження В	Зв'язок між твердженнями	Вид умови
Чотирикутник є паралелограмом	Дві протилежні сторони чотирикутника рівні	З А випливає В ($A \Rightarrow B$)	А — достатня умова для В
			В — необхідна умова для А
Чотирикутник є паралелограмом	Протилежні сторони чотирикутника попарно рівні	З А випливає В і з В випливає А ($A \Leftrightarrow B$)	А — необхідна й достатня умова для В і навпаки

Зверніть увагу, що твердження: «А достатнє для В» і «А необхідне для В» — є взаємно оберненими. Їх можна об'єднати і сформулювати так:

Для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно й достатньо, щоб його протилежні сторони були попарно рівними.

Замість того щоб говорити «необхідна й достатня умова», іноді кажуть «необхідна й достатня ознака», або, частіше, просто «ознака». Тому теореми цього параграфа називаємо «ознаками паралелограма».

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
ознака паралелограма	sign of the parallelogram	Anzeichen eines Parallelogramms	propriétés du parallélogramme

qr.orioncentr.com.ua/txreo

Пригадайте головне

1. Доведіть, що коли протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то він є паралелограмом.
2. Доведіть, що коли в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні й паралельні, то він є паралелограмом.
3. Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника точкою їх перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм.
4. Поясніть, як переконатися, що даний чотирикутник є паралелограмом.

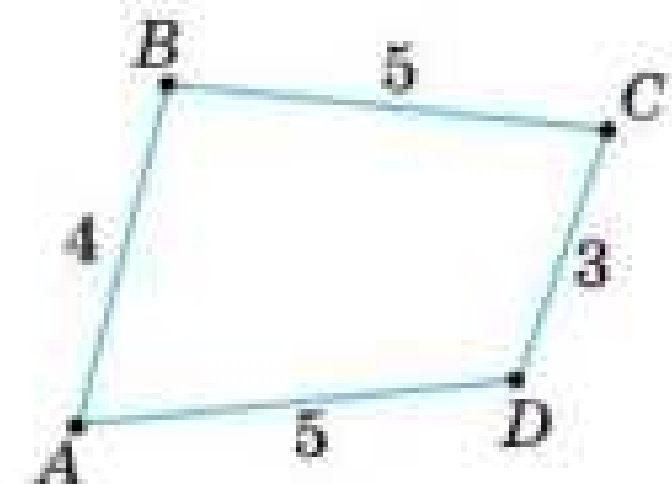
Усне тренування

1. Запишіть у дециметрах: 6 мм, 6 см, 6 м, 6 км;
2. Запишіть у метрах: 10 мм, 10 см, 10 дм, 10 км.

Розв'яжіть задачі

- 178'.** Чи є паралелограмом чотирикутник, у якому дві протилежні сторони:
1) рівні; 2) паралельні; 3) паралельні й рівні?
Відповідь поясніть.

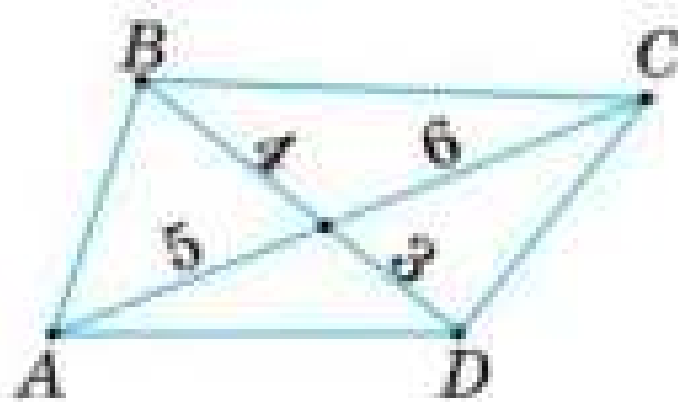
- 179'.** Чому чотирикутник на малюнку 62 не є паралелограмом?



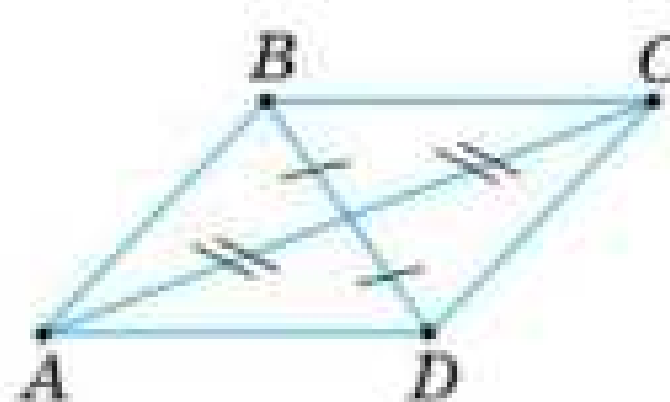
Мал. 62

- 180'.** Накресліть два рівні й паралельні відрізки завдовжки 4 см. Їхні кінці сполучіть відрізками так, щоб вони не перетиналися. Чому утворений чотирикутник є паралелограмом?

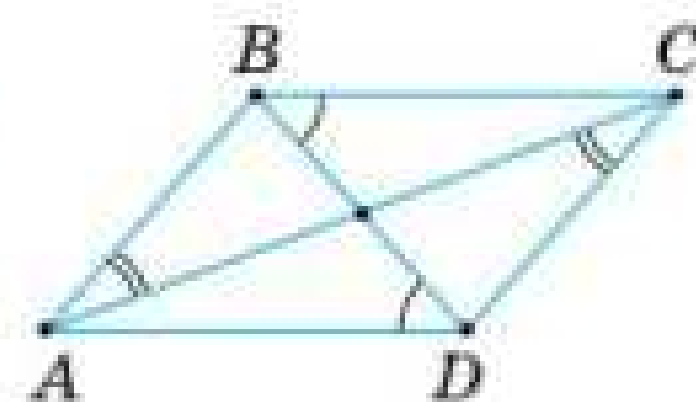
- 181'.** Який із чотирикутників, зображених на малюнках 63, 64, є паралелограмом? Відповідь поясніть.



Мал. 63



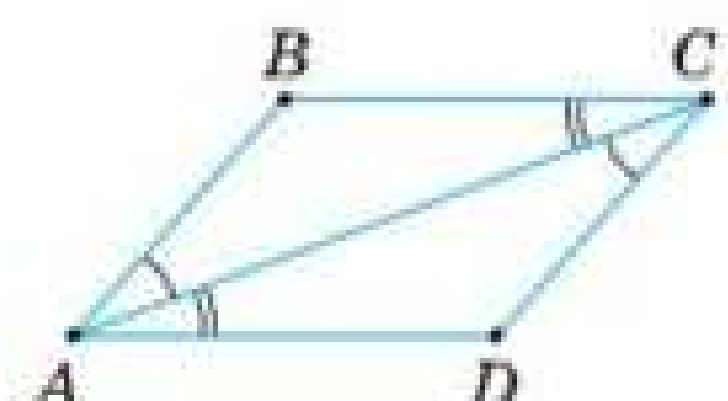
Мал. 64



Мал. 65

- 182'.** За даними на малюнку 65 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Чим ви скористалися?

- 183'.** За даними на малюнку 66 доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Чим ви скористалися?



Мал. 66

- 184***. Дано чотирикутник $KLMN$. Доповніть дані в таблиці 7 так, щоб наведений висновок був правильним.

Таблиця 7

KL	4 см		1,5 см	
LM		3 дм	25 мм	
MN		5,3 дм		0,3 дм
NK	6 см			5 см
Висновок	$KLMN$ — паралелограм			

- 185***. Відомі довжини двох сторін чотирикутника $ABCD$:



1) $AB = 3$ см, $AD = 2$ см; 2) $BC = 2,5$ см, $CD = 3,7$ см.

Які довжини мають бути в інших сторін цього чотирикутника, щоб був правильним висновок: $ABCD$ — паралелограм?

- 186***. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо:

1) $AB = 3$ см, $BC = 0,4$ дм, $CD = 30$ мм, $AD = 40$ мм;
 2) $AB + BC = 7$ см, $BC - CD = 3$ см, $AD = BC = 5$ см;
 3) $AB : BC : CD : AD = 2 : 1 : 2 : 1$.

- 187***. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо:

1) $AB = 0,5$ дм, $BC = 2,7$ см, $CD = 5$ см, $AD = 27$ мм;
 2) $AB - AD = 3$ см, $CD = 2BC$, $AB = CD = 6$ см.

- 188***. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$. Знайдіть:



1) AB , якщо $CD = 4$ см;
 2) BC , якщо $AD = 2$ см;
 3) $\angle B$, якщо $\angle D = 120^\circ$;
 4) $\angle A$, якщо $\angle C = 60^\circ$.



qr.orioncentr.com.ua/R8zqm



Щоб довести рівність (паралельність) двох відрізків:

1) виділіть на малюнку чотирикутник, протилежними сторонами якого є ці відрізки;
 2) доведіть, що чотирикутник — паралелограм;
 3) зробіть висновок: відрізки рівні (паралельні) як протилежні сторони паралелограма.

Так само можна довести рівність двох кутів.

- 189***. У чотирикутнику $MNKP$ протилежні сторони попарно рівні. Знайдіть:



1) кут M , якщо $\angle K = 35^\circ$;
 2) MN , якщо $KP = 5$ см.

- 190***. У чотирикутнику $KLMN$ дві сторони паралельні. Доповніть дані таблиці 8 так, щоб наведений висновок був правильним.



qr.orioncentr.com.ua/xnbPS

Таблиця 8

KL	4 см		1,5 см	
LM		3 дм		0,6 дм
MN	4 см		15 мм	
NK		3 дм		6 см
				
Висновок	$KLMN$ — паралелограм			

191'. Відомі довжини двох сторін чотирикутника $ABCD$:



- 1) $AB = CD = 2$ см; 2) $BC = AD = 7$ см.

Які сторони цього чотирикутника мають бути паралельними, щоб був правильним висновок: $ABCD$ — паралелограм?

192'. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо:

- 1) $AD \parallel BC$, $AD = 0,5$ дм, $BC = 50$ мм;
 2) $AB \parallel CD$, $AB = 2$ см, $CD = 0,02$ м;
 3) $AB = CD$, $\angle BAD = 45^\circ$, $\angle ADC = 135^\circ$.

193'. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо:



- 1) $AB \parallel CD$, $AB = 3$ см, $CD = 30$ мм;
 2) $AD = BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$.

194'. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O . Доповніть дані таблиці 9 так, щоб наведений висновок був правильним.

Таблиця 9

AO	3 см			0,6 дм
OC		2 дм	35 мм	
BO		4,8 дм		6 см
OD	5 см		2,1 см	
Висновок	$ABCD$ — паралелограм			

195'. Діагоналі чотирикутника $KLMN$ перетинаються в точці O . Відомі довжини їхніх частин:



- 1) $KO = 2$ см, $NO = 3$ см; 2) $LO = 3,5$ см, $MO = 1,9$ см.

Які довжини мають бути в інших частин діагоналей цього чотирикутника, щоб був правильним висновок: $KLMN$ — паралелограм?

196'. Якщо протилежні кути чотирикутника рівні, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.

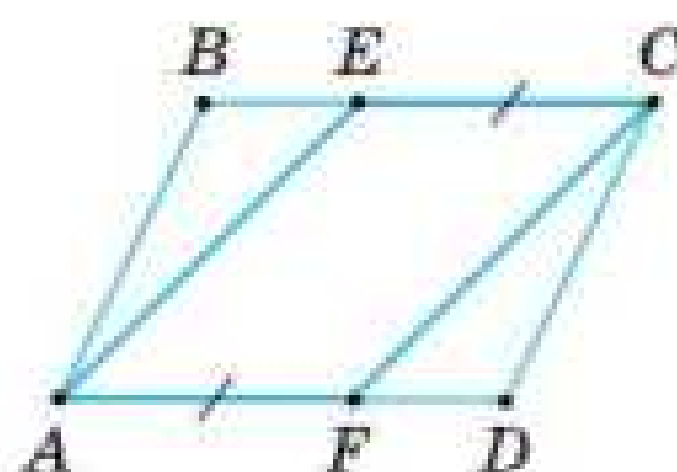
197'. Чи є чотирикутник паралелограмом, якщо три його кути дорівнюють:

- 1) 20° , 60° , 110° ; 2) 60° , 60° , 120° ?

198'. Чи є чотирикутник паралелограмом, якщо три його кути дорівнюють 35° , 145° , 35° ? Відповідь поясніть.

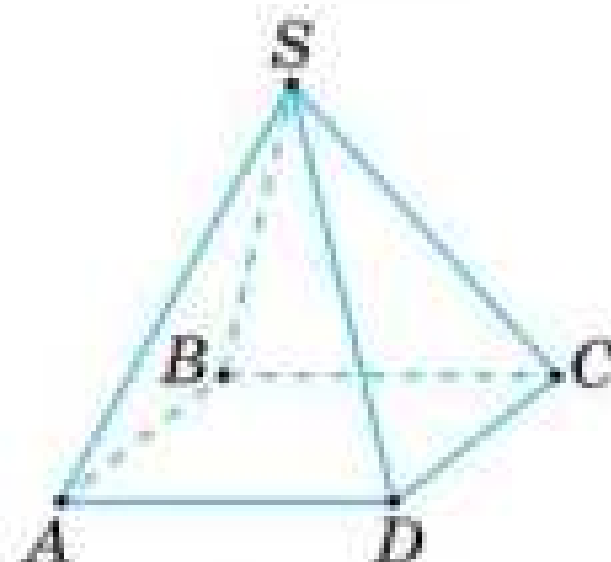


199. На сторонах BC і AD паралелограма $ABCD$ позначено точки E і F так, що $EC = AF$ (мал. 67). Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.



Мал. 67

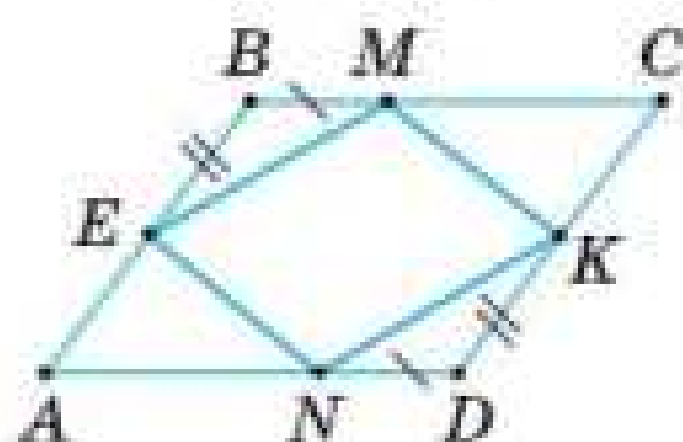
200. У піраміді $SABCD$ (мал. 68) $AB = 4$ см, $BC = 0,7$ дм, $DC = 40$ мм, $AD = 70$ мм. Доведіть, що основа піраміди — паралелограм.



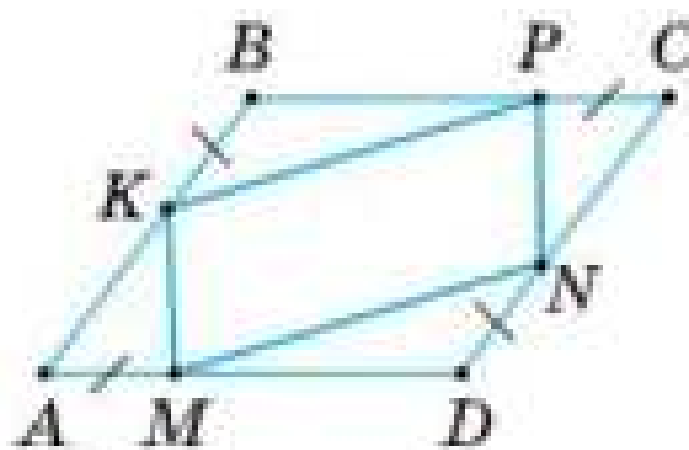
Мал. 68

201. Доведіть, що основою піраміди $SABCD$ (мал. 68) є паралелограм, якщо $AB \parallel DC$, $AB = 65$ мм, $DC = 6,5$ см.

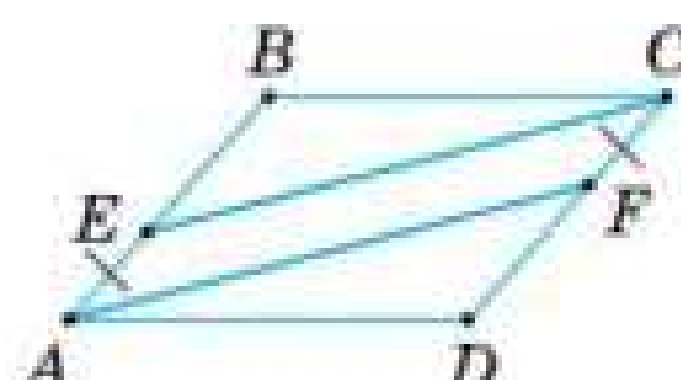
202. На сторонах AB , BC , CD і AD паралелограма $ABCD$ позначено точки E , M , K і N відповідно і так, що $BM = DN$, $BE = DK$ (мал. 69). Доведіть, що $EMKN$ — паралелограм.



Мал. 69



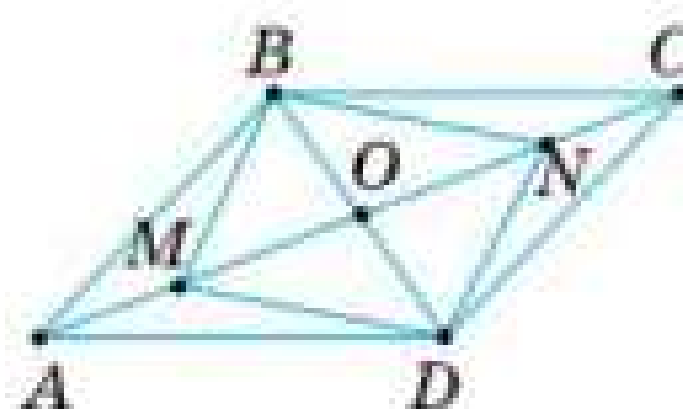
Мал. 70



Мал. 71

204. У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони AD , а N — середина сторони BC . Доведіть, що $BNDM$ — паралелограм.

205. $ABCD$ — паралелограм (мал. 71), $AE = CF$. Доведіть, що відрізки CE і AF рівні й паралельні.



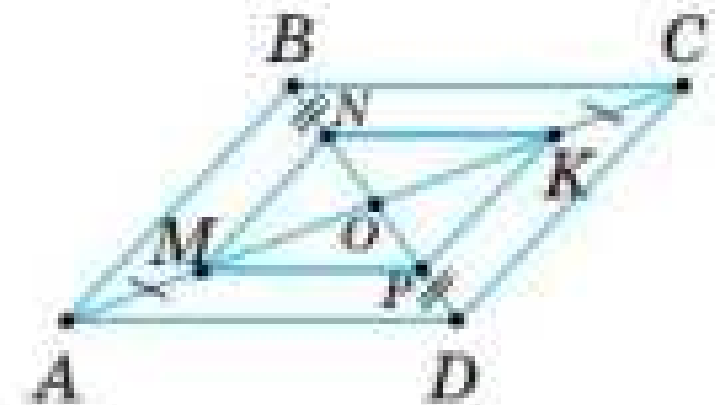
Мал. 72

206. $ABCD$ — паралелограм (мал. 72), $OM = ON$. Доведіть, що $MBND$ — паралелограм.

207. $MBND$ — паралелограм (мал. 72), $OA = OC$. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.

208. Медіану BD трикутника ABC продовжено на відрізок $DE = BD$. Точку E сполучено з вершинами A і C трикутника. Доведіть, що чотирикутник $ABCE$ — паралелограм.

- 209.** Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці M , а бісектриса кута C перетинає сторону AD в точці N . Доведіть, що $AMCN$ — паралелограм.
- 210.** Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні, а одна з діагоналей ділить іншу навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.
- 211.** $ABCD$ — паралелограм (мал. 73), $AM = KC$, $BN = PD$. Доведіть, що $MP = NK$ і $MP \parallel NK$.
- 212.** Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O . Доведіть, що чотирикутник $MNPК$, вершинами якого є середини відрізків OA , OB , OC і OD , — паралелограм.
- 213.** У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = CD$, $\angle A + \angle D = 180^\circ$. Доведіть, що $AD = BC$.
- 214.** У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180^\circ$ і $\angle B + \angle C = 180^\circ$. Доведіть, що протилежні сторони чотирикутника рівні.
- 215*.** На продовженнях сторін AB , BC , CD і DA паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки K , P , M і E так, що $AK = BP = CM = DE$. Доведіть, що чотирикутник $KPME$ — паралелограм.
- 216*.** На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначено точки K і M так, що $\angle KVB = \angle CMD$. Доведіть, що $KBMD$ — паралелограм.
- 217*.** Через точку K внутрішньої області кута ABC проведіть пряму так, щоб її відрізок між сторонами кута цією точкою ділився навпіл.
- 218*.** До сторін паралелограма проведено серединні перпендикуляри, які перетинають протилежні сторони або їх продовження в точках K , L , M і N . Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ — паралелограм.
- 219*.** Якщо вершини протилежних кутів чотирикутника однаково віддалені від відповідних діагоналей, то такий чотирикутник — паралелограм. Доведіть.



Мал. 73

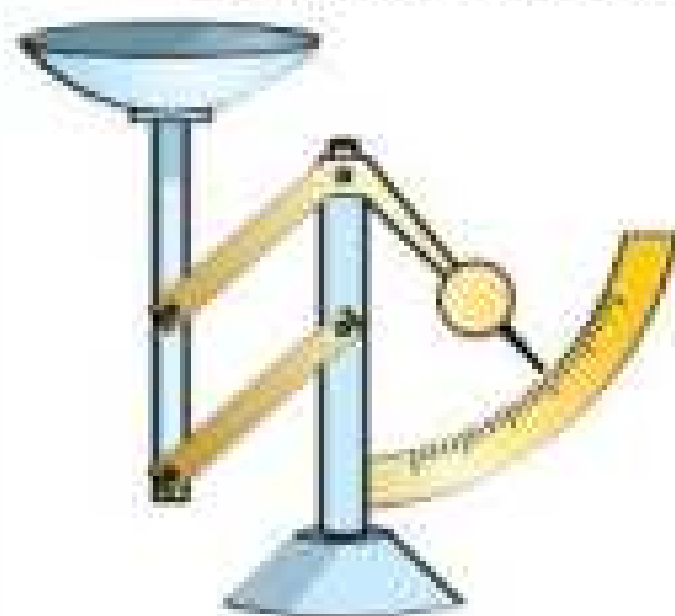
Проявіть компетентність

- 220.** Поясніть принцип дії: механічної рейшини (мал. 74); терезів (мал. 75).
- 221.** На малюнках 76 і 77 зображено шарнірні пристрої для регулювання висоти.
1. Поясніть, як користуватися цими пристроями.

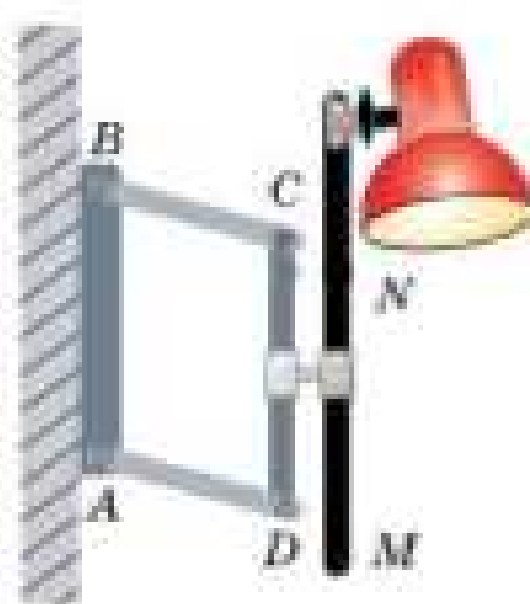


Мал. 74

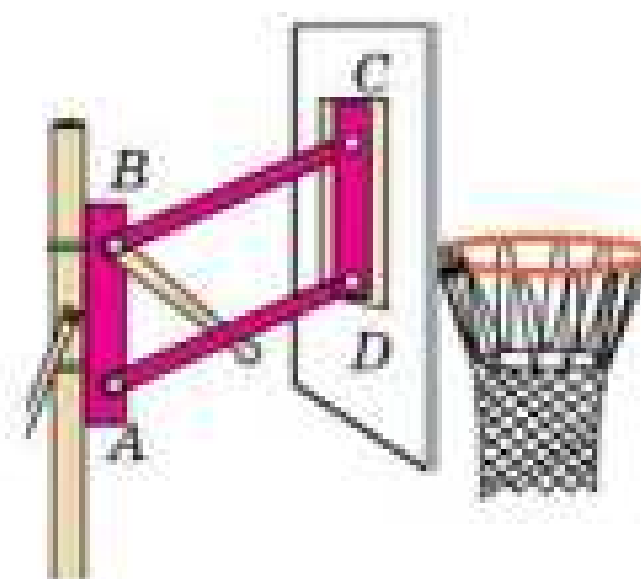
2. Чому за всіх можливих положень сторони CD вісь MN лампи завжди вертикальна, а площина кільця — горизонтальна?
3. Поясніть, як виготовити такі пристрої.



Мал. 75



Мал. 76

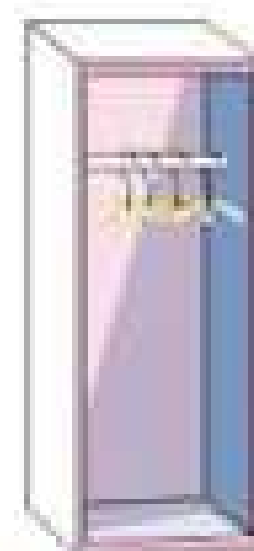
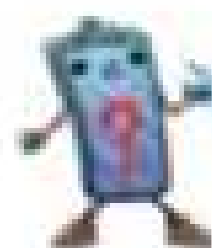


Мал. 77

§ 4. ПРЯМОКУТНИК

1. Що таке прямокутник

Ситуація. Батько збирав нову шафу і попросив Дениса з'ясувати, чи не перекошило каркас. Зрозуміло, що контур перекошеної шафи має форму паралелограма, а двері шафи — форму прямокутника. Така невідповідність не дозволить зібрати шафу правильно. Денис вирішив перевірити за допомогою шкільного косинця, чи є кути каркаса прямими.



Чи має рацію Денис?

Так.

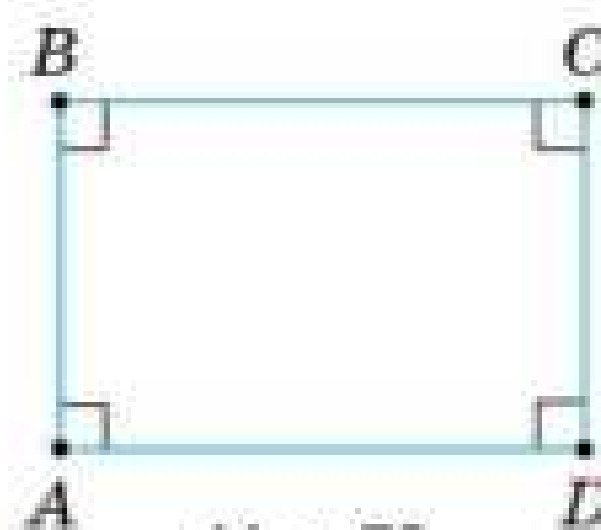


qr.orioncentr.com.ua/S19Hf

Прямокутник — один із видів паралелограма. На малюнку 78 ви бачите паралелограм $ABCD$, що є прямокутником. Дайте означення прямокутника та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Запам'ятайте!

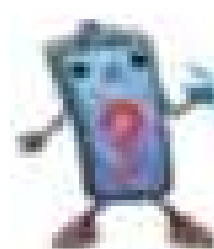
Паралелограм, у якого всі кути прямі, називається **прямокутником**.



Мал. 78

Отже, Денис діяв за означенням прямокутника.

2. Властивості прямокутника



Чи має прямокутник однакові властивості з паралелограмом?

Так.





Оскільки прямокутник — окремий вид паралелограма, то він має **всі властивості паралелограма**:

- 1) протилежні сторони рівні;
- 2) протилежні кути рівні;
- 3) діагоналі точкою їх перетину діляться навпіл.

Крім цих властивостей, прямокутник має ще **особливу властивість**.

Запам'ятайте!

Теорема (властивість діагоналей прямокутника)

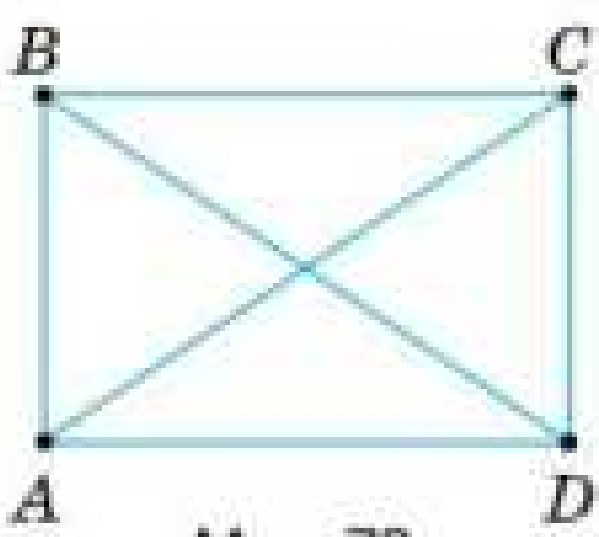
Діагоналі прямокутника рівні.

Дано: $ABCD$ — прямокутник (мал. 79).

Довести: $AC = DB$.

Доведення. Розглянемо прямокутні трикутники ACD і DBA . У них AD — спільний катет, а катети AB і DC рівні як протилежні сторони паралелограма. Отже, $\triangle ACD = \triangle DBA$ за двома катетами. З рівностей трикутників випливає: $AC = DB$.

Властивості прямокутника подано в таблиці 10.

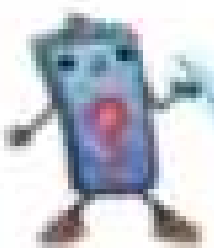


Мал. 79

Таблиця 10

$ABCD$ — прямокутник	Властивість
	паралелограма
	1. $AB = DC, AD = BC$
	2. $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$
	3. $AO = CO, BO = DO$
	особлива
	4. $AC = DB$

3. Ознака прямокутника



Чи міг Денис діяти по-іншому в описаній ситуації?

qr.orioncentr.com.ua/qjXrA

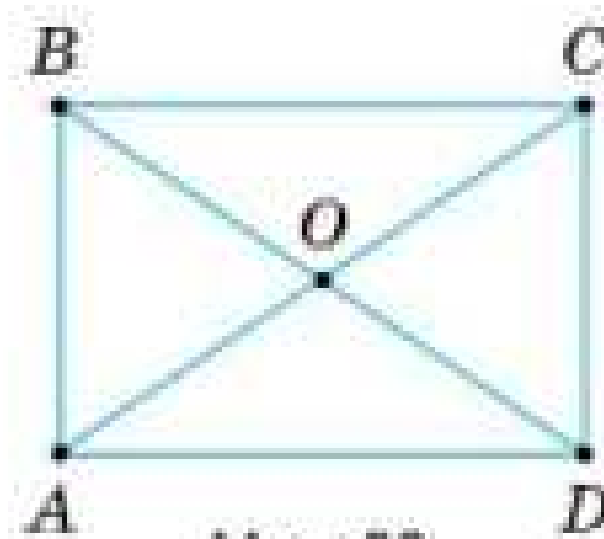
Так.



Задача (**ознака прямокутника**) Якщо діагоналі паралелограма рівні, то такий паралелограм — прямокутник. Доведіть.

Розв'язання Нехай $ABCD$ — паралелограм, у якому $AC = DB$ (мал. 80). Доведемо, що $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$. Розглянемо $\triangle ABD$ і $\triangle DCA$.

У них AD — спільна сторона, $AC = DB$ за умовою, $AB = DC$ як протилежні сторони паралелограма. Отже, $\triangle ABD = \triangle DCA$ за трьома сторонами. Звідси випливає, що $\angle A = \angle D$. Але $\angle A = \angle C$ і $\angle D = \angle B$ як протилежні кути паралелограма, тому $\angle A = \angle C = \angle D = \angle B$. За властивістю кутів чотирикутника, $\angle A + \angle C + \angle D + \angle B = 360^\circ$. Отже, $\angle A = \angle C = \angle D = \angle B = 360^\circ : 4 = 90^\circ$, тобто паралелограм $ABCD$ — прямокутник.



Мал. 80

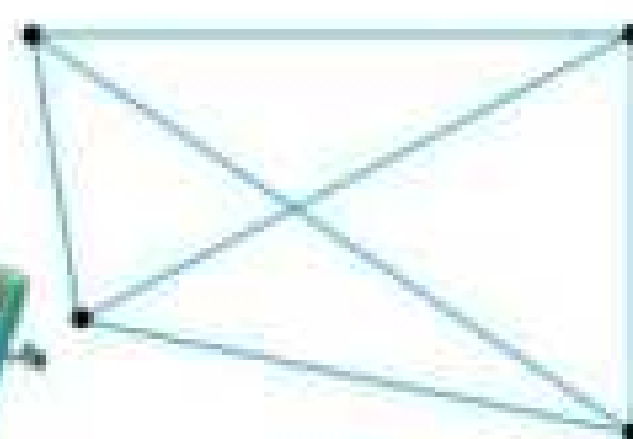


Щоб установити, що даний паралелограм — прямокутник, доведіть, що в ньому: або всі кути прямі (означення прямокутника), або діагоналі рівні (ознака прямокутника).



Чи можна стверджувати, що чотирикутник, у якому діагоналі рівні, є прямокутником?

Не можна (мал. 81).



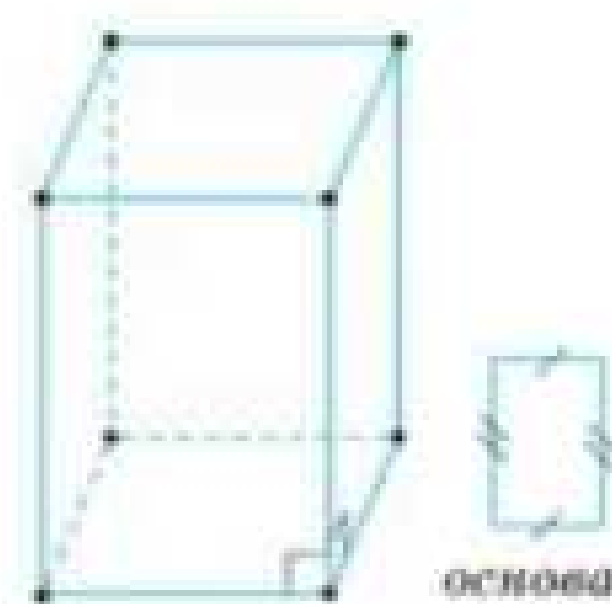
Мал. 81

Потрібно ще перевірити, чи виконується одна з ознак паралелограма. Наприклад, чи діляться діагоналі точкою їх перетину навпіл.

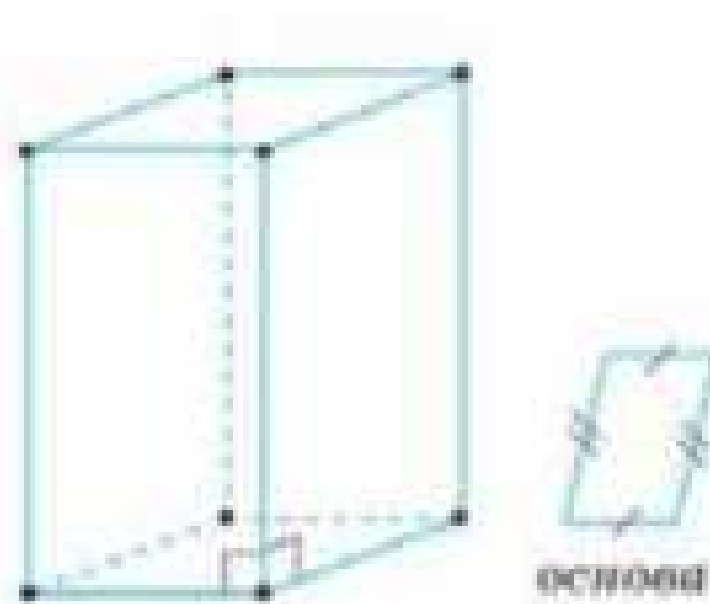
4. Прямокутник як грань паралелепіпеда і піраміди

Ви вже знаєте, що прямокутник — окремий вид паралелограма. Можливі такі види паралелепіпеда:

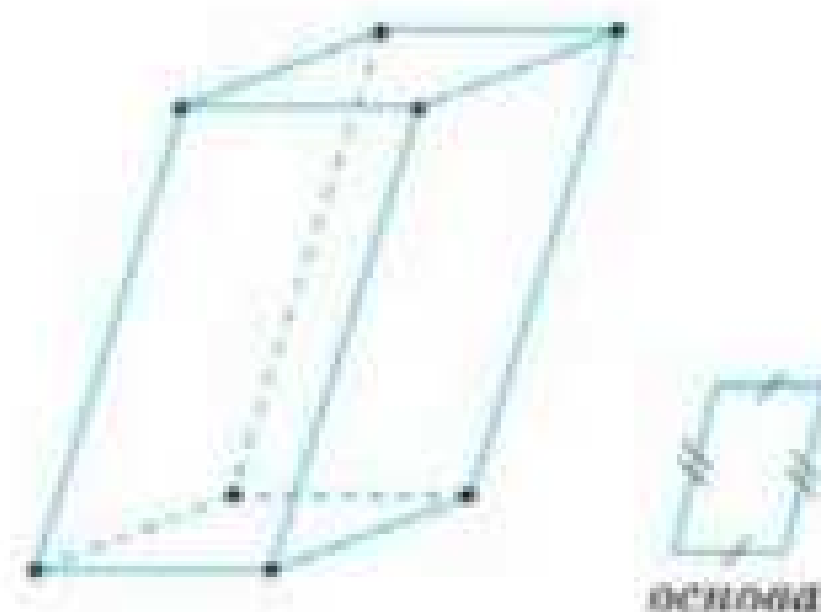
- 1) прямокутний паралелепіпед (мал. 82), у нього всі грані є прямокутниками;
- 2) прямий паралелепіпед (мал. 83), у нього бічні грані — прямокутники, а основи — паралелограми;
- 3) похилий паралелепіпед (мал. 84), у нього всі грані — паралелограми.



Мал. 82



Мал. 83



Мал. 84



Щоб установити, що основою паралелепіпеда є прямокутник, доведіть, що в цьому чотирикутнику всі кути прямі.

Дізнайтеся більше

Виникає запитання: Чи можна дати інші означення прямокутника?

Поміркуємо. У молодших класах прямокутник визначали як чотирикутник, усі кути якого прямі. Тепер ми визначили прямокутник як окремий вид паралелограма. Можна сказати, що прямокутник — це:

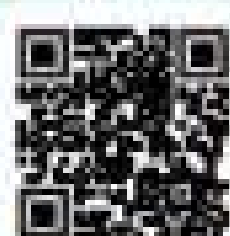
паралелограм, у якого всі кути рівні (справді, сума кутів паралелограма становить 360° , тоді кожний із них дорівнює 90°);

паралелограм, який має прямий кут (справді, у паралелограма сусідні кути в сумі становлять 180° , а протилежні кути — рівні. Тому, якщо один із кутів паралелограма прямий, то і три інші його кути — прямі).

Наведені означення прямокутника є еквівалентними.

Отже, можна дати різні означення одного й того самого поняття.

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
прямокутник	rectangle	Rechteck (n)	rectangle

qr.orioncentr.com.ua/11bYy

Пригадайте головне

1. Що таке прямокутник?
2. Сформулюйте та доведіть властивість діагоналей прямокутника.
3. Поясніть, як установити, що даний паралелограм є прямокутником.

Усне тренування

Обчисліть:

1) $5,86 + 4,14$; $0,79 + 9,21$; $8,62 + 1,38$;

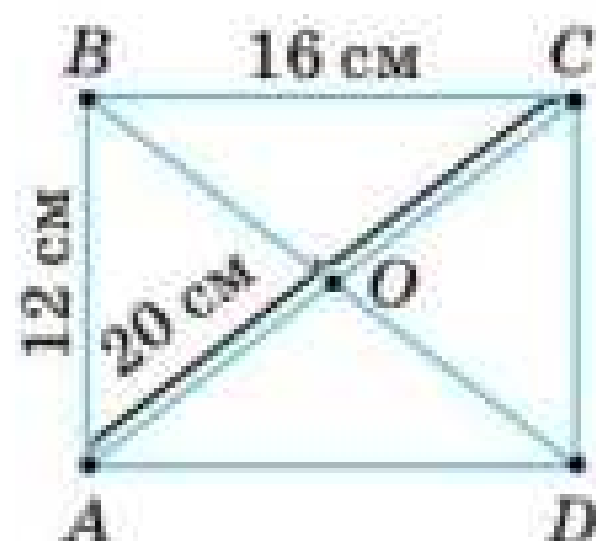
2) $3,56 + 6,44$; $4,25 + 5,75$; $1,13 + 8,87$.

Розв'яжіть задачі

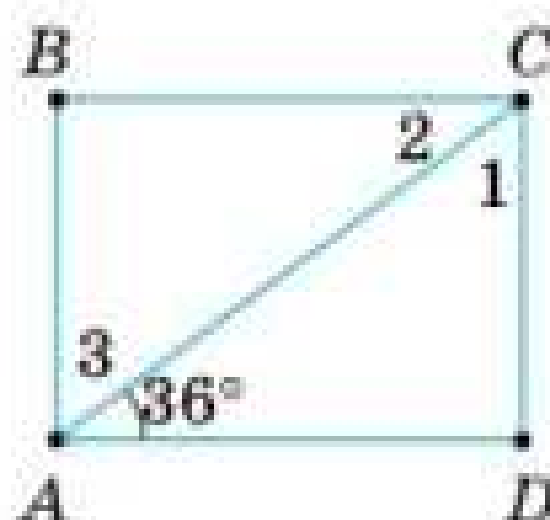
- 222'.** Чи правильно, що прямокутником є паралелограм, у якому:
- 1) усі сторони рівні;
 - 2) усі кути прямі?
- 223'.** Чи правильно, що прямокутник має всі властивості паралелограма? Відповідь поясніть.
- 224'.** Назвіть властивість, яку має прямокутник, але якої не має паралелограм, що не є прямокутником.
- 225'.** Чи правильно, що діагоналі прямокутника: 1) нерівні; 2) рівні?

226* Чи правильно, що паралелограм є прямокутником, якщо його діагоналі: 1) нерівні; 2) рівні?

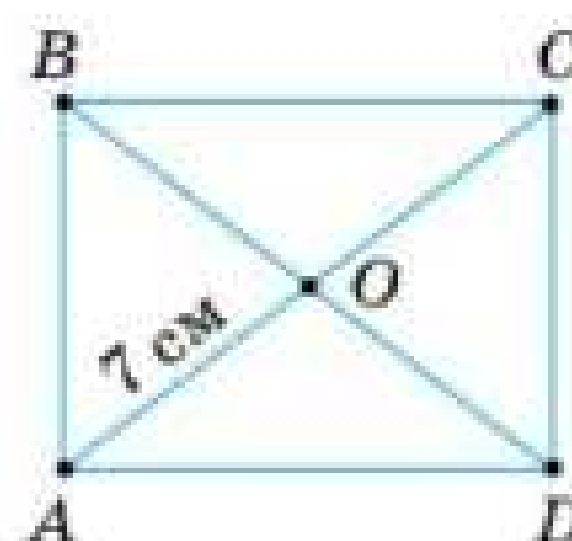
227* $ABCD$ — прямокутник (мал. 85). За даними на малюнку знайдіть:
1) AD і DC ;
2) BD ;
3) AO , OC , BO і OD .



Мал. 85



Мал. 86



Мал. 87

228* $ABCD$ — прямокутник (мал. 86). За даними на малюнку знайдіть кути 1, 2 і 3.

229* Знайдіть діагоналі прямокутника, якщо їх сума дорівнює:
1) 12 см; 2) 6 см; 3) 18 мм.



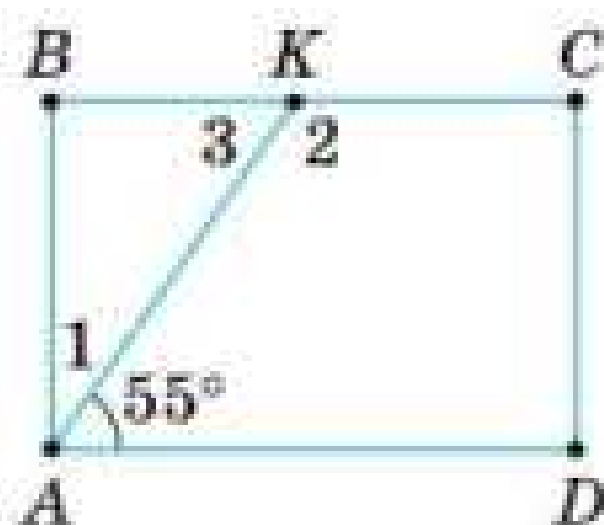
230* $ABCD$ — прямокутник (мал. 87). За даними на малюнку знайдіть:
1) його діагоналі;
2) суму його діагоналей.



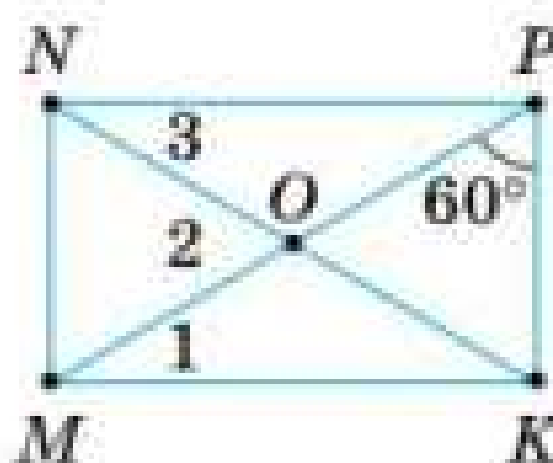
qr.orioncentr.com.ua/O87A4

231* O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$. Доведіть:
1) трикутники AOD , BOC , AOB і DOC — рівнобедрені;
2) $\triangle AOB = \triangle DOC$, $\triangle BOC = \triangle AOD$.

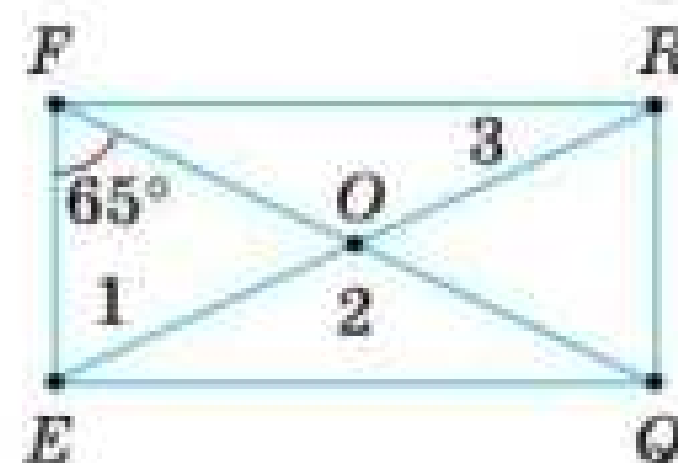
232* На малюнках 88, 89 зображено прямокутники. Знайдіть кути 1, 2 і 3.



Мал. 88



Мал. 89



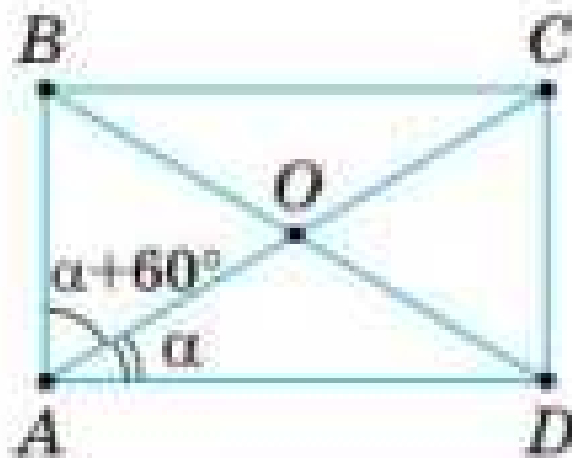
Мал. 90

233* На малюнку 90 зображено прямокутник. Знайдіть кути 1, 2 і 3.

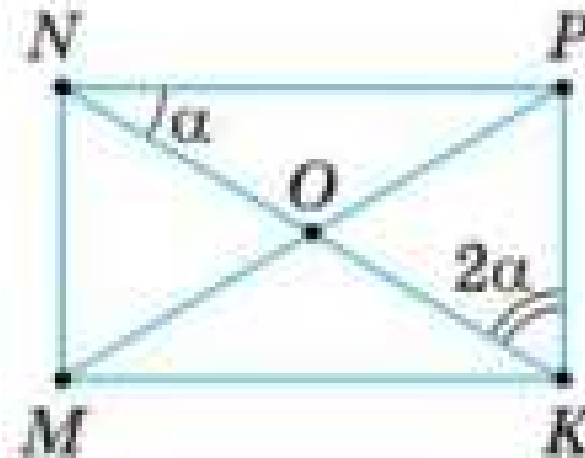


234'. Знайдіть градусну міру кута між діагоналями прямокутника (мал. 91, 92).

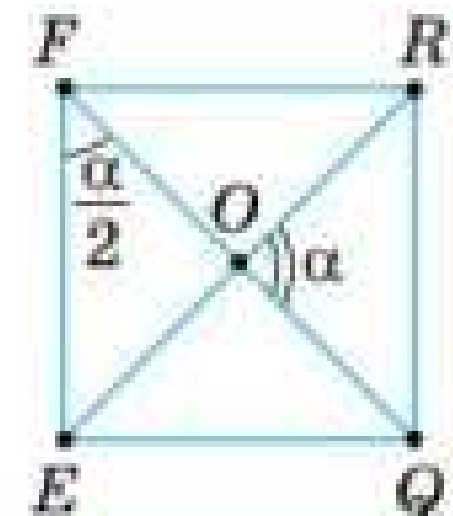
235'. Знайдіть градусну міру кута між діагоналями прямокутника (мал. 93).



Мал. 91



Мал. 92



Мал. 93

236'. a і b — сторони прямокутника, P — його периметр. Знайдіть невідомі величини за таблицею 11.

Таблиця 11

a	6 см	4 см		10 см	9 см
b	12 см		5 см		7 см
P		32 см	30 см	44 см	

237'. Знайдіть периметр прямокутника, якщо:

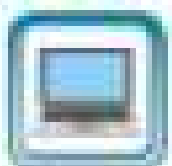
- 1) одна його сторона дорівнює 4 см, а інша — утричі більша;
- 2) одна його сторона дорівнює 10 см, а інша — удвічі менша.

238'. Одна сторона прямокутника дорівнює



12 см, а інша — на 4 см більша. Знайдіть периметр прямокутника.

239'. Чотирикутник $KLMN$ — паралелограм. Доповніть дані таблиці 12 так,



щоб наведений висновок був правильним.



qr.orioncentr.com.ua/u8WZL

Таблиця 12

KM	4 см		1,5 дм	
LN		3 дм		2,7 см
Висновок	$KLMN$ — прямокутник			

240'. Одна з діагоналей паралелограма $ABCD$ має довжину:



- 1) $AC = 2$ см;
- 2) $BD = 7$ см.

Якої довжини має бути інша його діагональ, щоб був правильним висновок: $ABCD$ — прямокутник?

241'. У паралелограмі $KLMN$ діагоналі утворюють рівні трикутники:

- 1) KLM і MNK ;
 - 2) LMN і NKL .
- Доведіть, що $KLMN$ — прямокутник.

242*. Діагоналі паралелограма $ABCD$ утворюють рівні трикутники CAB і DBA . Доведіть, що $ABCD$ — прямокутник.



243*. Доведіть, що коли в паралелограмі хоча б один кут прямий, то він є прямокутником.

244*. Якщо в паралелограмі хоча б один кут прямий, то його діагоналі рівні. Доведіть.

245*. Висота прямокутного паралелепіпеда дорівнює 8 см, ширина — у 2 рази менша за висоту, а довжина — на 16 см більша за ширину. Знайдіть ширину й довжину прямокутного паралелепіпеда.

246*. Висота прямокутного паралелепіпеда дорівнює 18 см, ширина — у 3 рази менша за висоту, а довжина — у 4 рази більша за ширину. Знайдіть ширину й довжину прямокутного паралелепіпеда.

247. Діагональ прямокутника дорівнює d й утворює зі стороною кут 30° . Знайдіть меншу сторону прямокутника, якщо:

- 1) $d = 4$ см;
- 2) $d = 14$ мм;
- 3) $d = 0,44$ дм.

248. Менша сторона прямокутника дорівнює a . Знайдіть діагоналі прямокутника, якщо вони перетинаються під кутом 60° і:



- 1) $a = 10$ см;
- 2) $a = 0,25$ дм;
- 3) $a = 7$ мм.

249. Доведіть, що коли в прямокутнику сторона дорівнює половині діагоналі, то кут між ними дорівнює 60° .

250. Перпендикуляр, проведений із вершини кута прямокутника до діагоналі, ділить цей кут у відношенні $2 : 3$. Знайдіть:

- 1) кути, утворені діагоналями зі сторонами прямокутника;
- 2) кут між проведеним перпендикуляром та іншою діагоналлю.

251. Периметр прямокутника дорівнює 48 см. Знайдіть сторони прямокутника, якщо:

- 1) дві його сторони відносяться як $2 : 3$;
- 2) відстань між серединами двох його протилежних сторін дорівнює 10 см;
- 3) точка перетину його діагоналей віддалена від його сторони на 4 см.

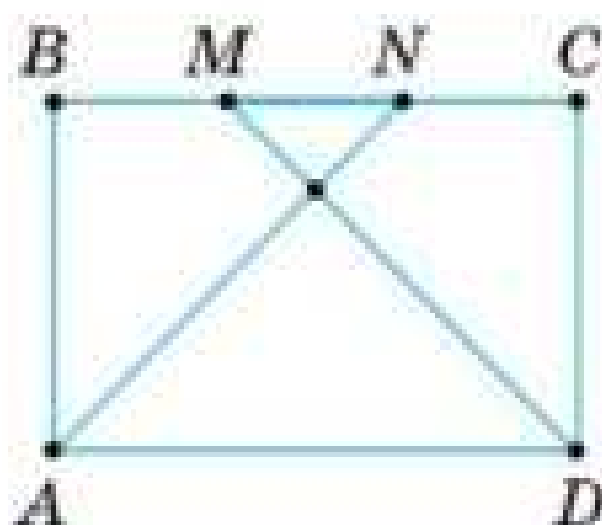
252. Знайдіть суму відстаней від довільної внутрішньої точки прямокутника до сторін, якщо його периметр дорівнює:

- 1) 12 см;
- 2) 8,6 см.

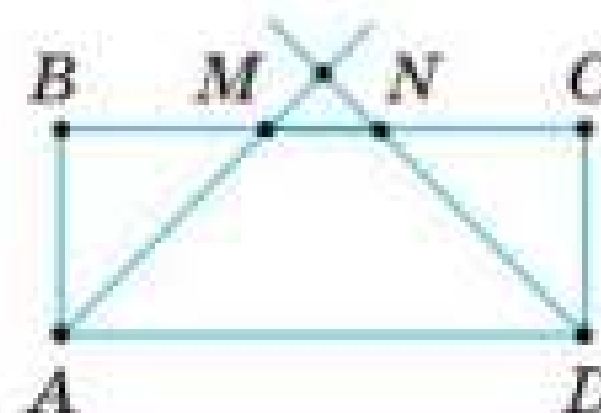
253. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$, якщо бісектриса кута A ділить сторону BC на відрізки завдовжки:

- 1) 3 см і 5 см;
- 2) 0,2 дм і 3 см.

- 254.** Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить сторону, яку вона перетинає, на рівні відрізки. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює:
1) 15 см; 2) 3,8 дм.
- 255.** У паралелограмі жодний із кутів не є гострим. Доведіть, що цей паралелограм — прямокутник.
- 256.** Якщо в паралелограмі сума двох протилежних кутів дорівнює 180° , то він є прямокутником. Доведіть.
- 257.** Якщо всі кути чотирикутника рівні, то він є прямокутником. Доведіть.
- 258.** Доведіть, що коли в паралелограмі кути, прилеглі до однієї сторони, рівні, то він є прямокутником.
- 259.** Діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з його стороною. Доведіть, що цей паралелограм є прямокутником.
- 260.** У основі паралелепіпеда всі кути рівні. Доведіть, що цей паралелепіпед — прямокутний.
- 261.** У паралелепіпеда гранями є чотирикутники, у яких усі кути є прямими. Доведіть, що цей паралелепіпед — прямокутний.
- 262*.** Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Периметр трикутника ABD більший за периметр трикутника AOB на 12 см, а периметр прямокутника дорівнює 50,2 см. Знайдіть сторони прямокутника.
- 263*.** У прямокутнику $ABCD$ зі сторонами $AB = a$ і $BC = b$ проведено бісектриси кутів A і D , які перетинають сторону BC в точках M і N (мал. 94, 95). Знайдіть довжину відрізка MN .



Мал. 94



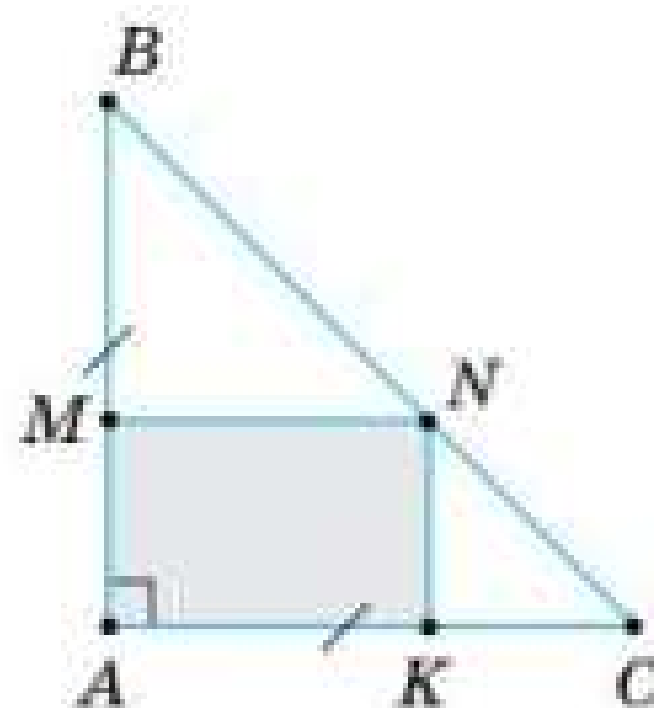
Мал. 95

- 264*.** Через середину гіпотенузи прямокутного трикутника, яка дорівнює 6 см, проведено дві прямі, паралельні його катетам. Знайдіть діагоналі утвореного прямокутника.
- 265*.** Доведіть, що сума відстаней від точки, яка лежить на основі рівнобедреного трикутника, до його бічних сторін дорівнює висоті, проведеної з вершини основи.

266*. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник так, що вони мають спільний кут (мал. 96).

1. Доведіть, що периметр прямокутника не залежить від положення його вершини на гіпотенузі.

2. Знайдіть периметр прямокутника, якщо катет трикутника дорівнює 5 см.



Мал. 96

267*. Доведіть, що коли в чотирикутнику діагоналі рівні й у точці перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник є прямокутником.



Щоб довести, що чотирикутник є прямокутником, покажіть, що: або цей чотирикутник є паралелограмом, а паралелограм — прямокутником, або три кути чотирикутника — прямі.

268*. У чотирикутнику діагоналі точкою їх перетину діляться навпіл, а один кут — прямий. Доведіть, що цей чотирикутник є прямокутником.

269*. Чотирикутник, у якому протилежні сторони попарно рівні й діагоналі рівні, є прямокутником. Доведіть.

270*. Доведіть, що чотирикутник, у якому діагоналі рівні і дві протилежні сторони рівні й паралельні, є прямокутником.

271*. Доведіть, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.



Щоб довести рівність двох відрізків, покажіть, що вони є: або протилежними сторонами прямокутника (паралелограма); або діагоналями прямокутника; або частинами діагоналі прямокутника (паралелограма), на які вона ділиться точкою перетину з іншою діагоналлю.

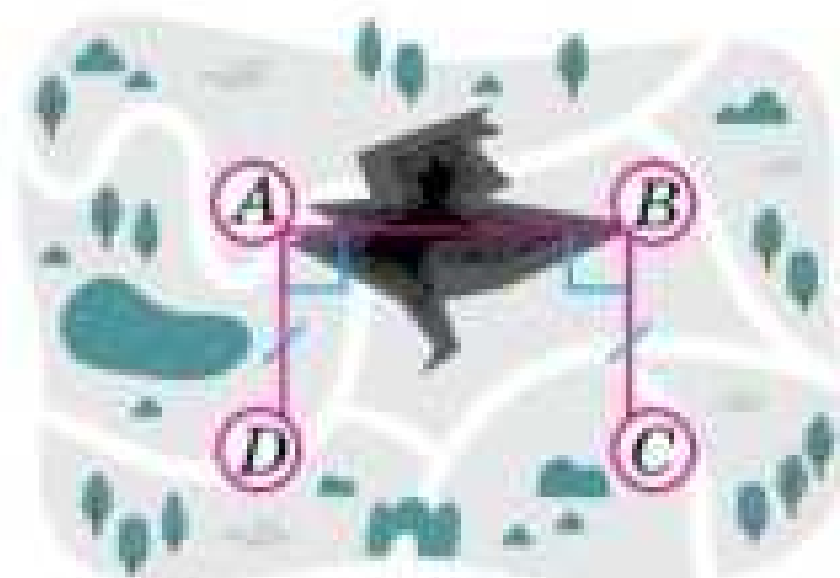
Проявіть компетентність

272. Щоб виміряти на місцевості відстань між пунктами A і B , між якими не можна пройти (мал. 97), побудували прямі кути BAD і ABC .

Потім на сторонах кутів відклали рівні відрізки AD і BC .

1. Поясніть, якою фігурою є чотирикутник $ABCD$.

2. Як знайти відстань AB ?



Мал. 97

273. Учень виготовляв рамку прямокутної форми. Щоб перевірити правильність виготовлення рамки, він перевіряв рівність її діагоналей. Чи достатньо такої перевірки? Чому?

274. Якими способами можна перевірити, що даний чотирикутний предмет має форму прямокутника? Відповідь поясніть.

275. На малюнку 98 зображено прилад для вимірювання діаметра колод.

1. Поясніть, як користуватися цим приладом.

2. Чому відлік на горизонтальній лінійці приладу відповідає діаметру колоди?

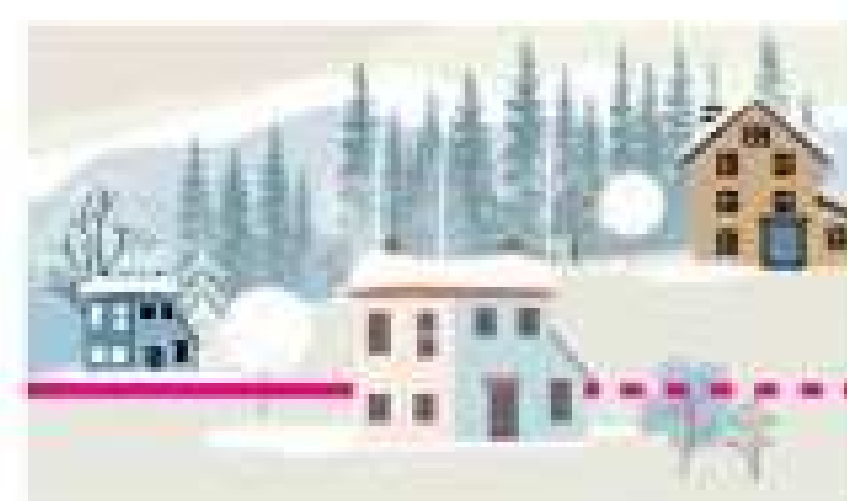
3. Якщо відлік на горизонтальній лінійці приладу дорівнює 20 см, то який діаметр колоди?

4. Поясніть, як виготовити такий прилад.

276. Провішена на місцевості пряма упирається в будівлю (мал. 99). Поясніть, як продовжити пряму за будівлю.



Мал. 98



Мал. 99

§ 5. РОМБ. КВАДРАТ

1. Що таке ромб

Ситуація. Учні й учениці 8-А класу розробляли емблему своєї спортивної команди для участі в шкільному етапі всеукраїнського змагання «Пліч-о-пліч. Всеукраїнські шкільні ліги». Футбольні фани Іван та Оля запропонували взяти форму емблеми легендарного футбольного клубу «Динамо» (Київ), бо в ній використано «гармонійний» паралелограм, у якого всі сторони рівні.

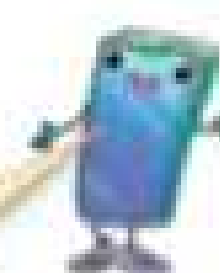


qr.orioncentr.com.ua/eNLm6



Чи можуть усі сторони паралелограма бути рівними?

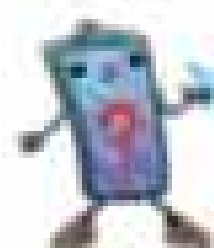
Можуть.



На малюнку 100 в паралелограмі $ABCD$ $AB = BC = CD = AD$. Це ще один вид паралелограма — ромб.

Запам'ятайте!

Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається *ромбом*.

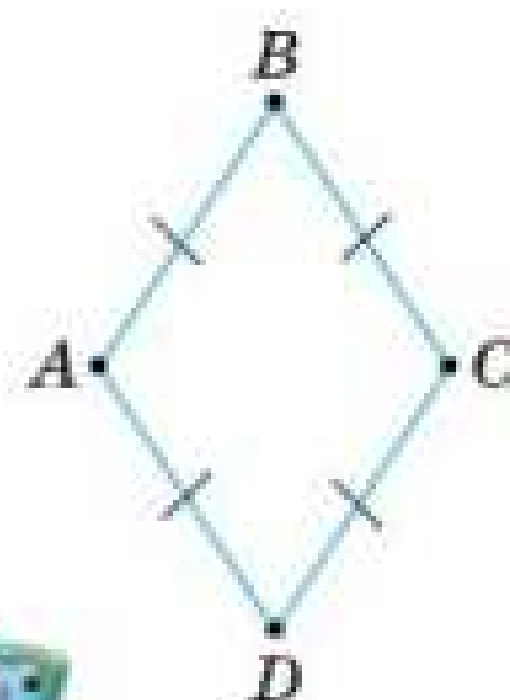


Чи можна стверджувати, що паралелограм є ромбом, якщо в нього дві сусідні сторони рівні?

Так.

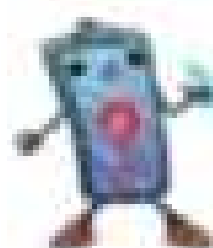


Мал. 100



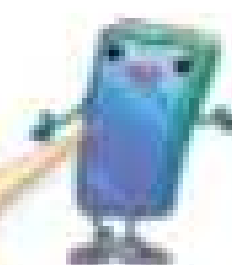
Справді, рівність усіх сторін такого паралелограма випливає з властивості: протилежні сторони паралелограма рівні.

2. Властивості ромба



Чи має ромб однакові властивості з паралелограмом?

Так.



Оскільки ромб є окремим видом паралелограма, то він має **всі властивості паралелограма**:

- 1) протилежні сторони рівні;
- 2) протилежні кути рівні;
- 3) діагоналі точкою їх перетину діляться навпіл.

Крім того, ромб має ще **особливі властивості**.

Запам'ятайте!

Теорема (властивості діагоналей ромба)

Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.
Діагоналі ромба ділять його кути навпіл.

Дано: $ABCD$ — ромб (мал. 101),

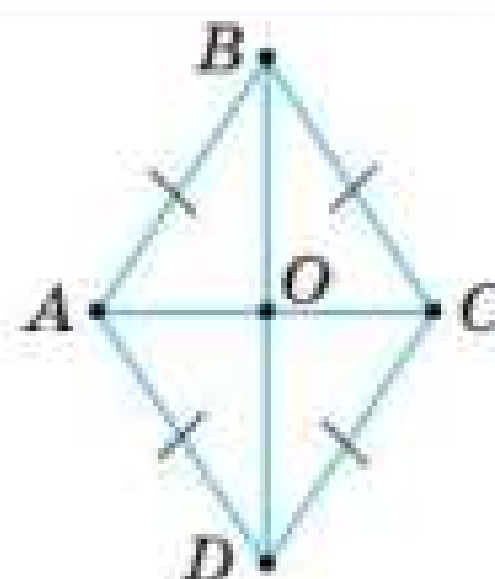
O — точка перетину діагоналей.

Довести: $AC \perp BD$;

$\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = \angle CDB$;

$\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA$.

Доведення. За означенням ромба, $AB = BC$, тому трикутник ABC — рівнобедрений. Оскільки ромб $ABCD$ — паралелограм, то $AO = OC$. Звідси BO — медіана рівнобедреного трикутника ABC , а отже — висота й бісектриса цього трикутника. Тому $AC \perp BD$ і $\angle ABD = \angle CBD$.

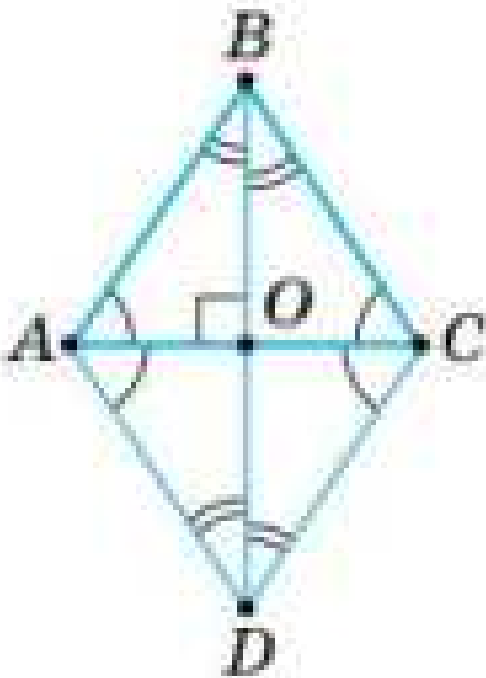


Мал. 101

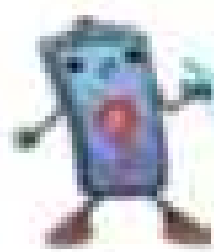
Так само доводимо, що діагональ BD ділить навпіл кут D , а діагональ AC — кути A і C ромба $ABCD$.

Основні властивості ромба наведено в таблиці 13.

Таблиця 13

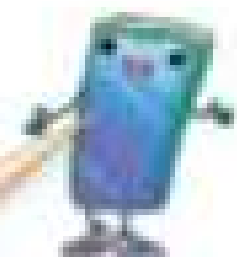
$ABCD$ — ромб	Властивість
	паралелограма
	1. $AB = DC, AD = BC$
	2. $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$
	3. $AO = OC, BO = OD$
	особливі
	4. $AC \perp BD$
	5. AC і BD — бісектриси

3. Ознака ромба



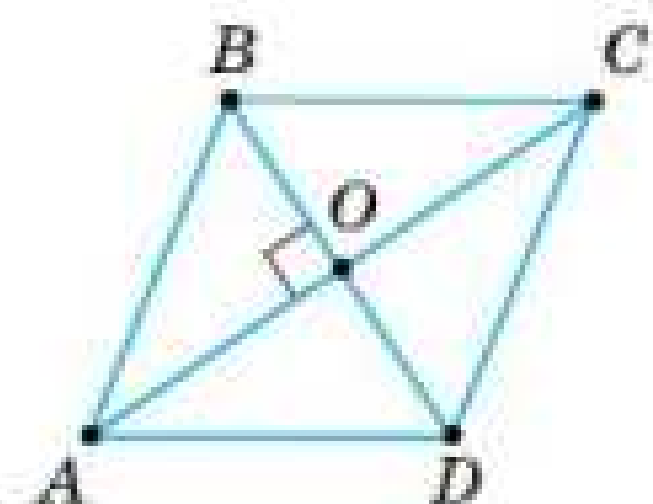
Чи можна встановити не за означенням, що даний паралелограм — ромб?

Так.



Задача (ознака ромба) Паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є ромбом. Доведіть.

Розв'язання Нехай $ABCD$ — даний паралелограм, у якому $AC \perp BD$ (мал. 102). Доведемо, що $ABCD$ — ромб. Розглянемо $\triangle AOB$ і $\triangle AOD$. У них AO — спільна сторона, $OB = OD$ за властивістю діагоналей паралелограма, $\angle AOB = \angle AOD = 90^\circ$ за умовою. Отже, $\triangle AOB = \triangle AOD$ за двома сторонами й кутом між ними. Із рівності трикутників випливає: $AB = AD$. Тоді $AB = CD$ і $AD = BC$ за властивістю протилежних сторін паралелограма. Отже, всі сторони паралелограма рівні, тому, за означенням, він є ромбом.



Мал. 102

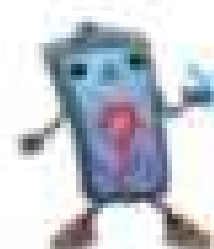


Щоб установити, що даний паралелограм — ромб, доведіть, що в ньому:

або всі сторони рівні (означення ромба),

або діагоналі взаємно перпендикулярні (ознака ромба).

4. Квадрат і його властивості

qr.orioncentr.com.ua/ABqvA


Чи є інші різновиди паралелограма, крім ромба і прямокутника?



Так.



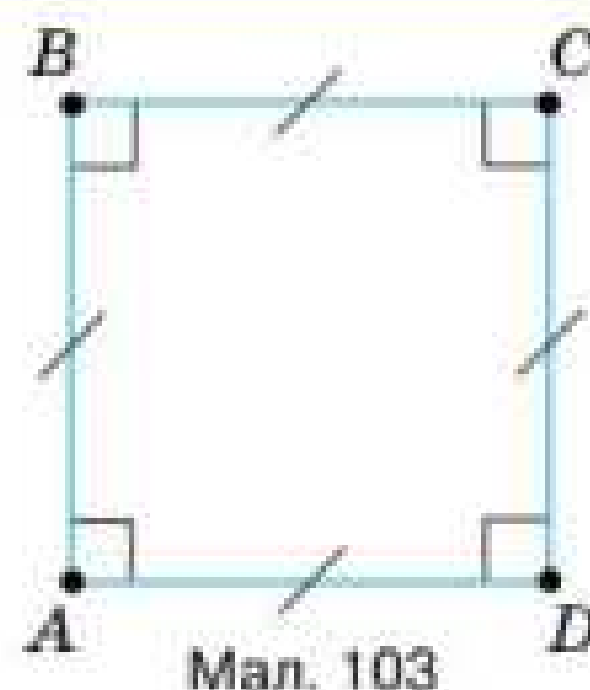
Запам'ятайте!

Прямокутник, у якого всі сторони рівні, називається *квадратом*.

На малюнку 103 ви бачите квадрат $ABCD$.

Можна дати різні означення квадрата:

- ромб, у якого всі кути прямі, називається квадратом;
- прямокутник, у якого всі сторони рівні, називається квадратом;
- паралелограм, у якого всі сторони рівні й усі кути прямі, називається квадратом.



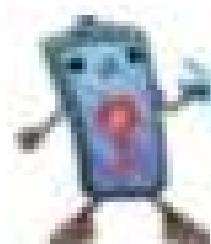
Квадрат має всі властивості паралелограма, прямокутника та ромба.

Основні властивості квадрата подано в таблиці 14.

Таблиця 14

$ABCD$ — квадрат	Властивість	
	паралелограма	
	1. $AB = DC, AD = BC$	
	2. $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$	
	3. $AO = OC, BO = OD$	
	прямокутника	ромба
	4. $AC = BD$	5. $AC \perp BD$
	6. AC і BD — бісектриси	
	особливі	
	7. $AB = BC = CD = DA$	8. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

5. Взаємозв'язок різновидів паралелограма



Чи є взаємозв'язок між окремими видами паралелограма?

Так.



Ромб і прямокутник — окремі види паралелограма.

Квадрат є окремим видом і ромба, і прямокутника, і паралелограма.

Співвідношення між видами паралелограмів зображено на малюнку 104.



Мал. 104

Дізнайтеся більше

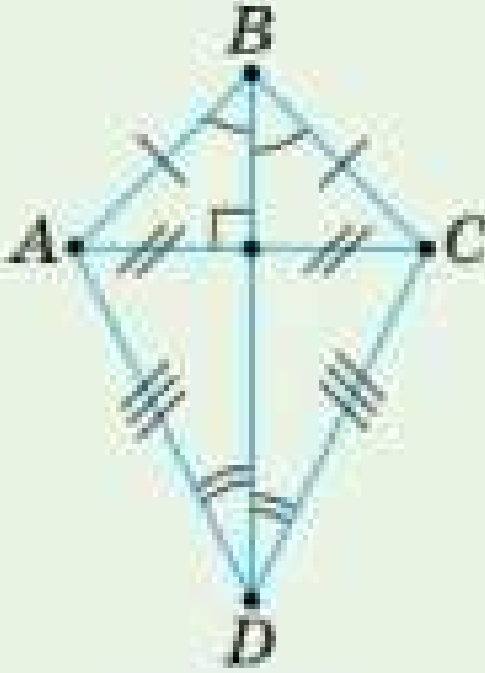
1. Розгляньте таблицю класифікації паралелограмів за сусідніми сторонами та за кутами. Запропонуйте власну класифікацію вивчених видів паралелограма.

Таблиця 15

За кутами	За сторонами	
	Сусідні сторони рівні	Сусідні сторони нерівні
Кути прямі	 Квадрат	 Прямокутник
Кути непрямі	 Ромб	 Паралелограм, що не є прямокутником і ромбом

2. Крім паралелограмів, є ще один вид чотирикутників — дельтоїд. Цю фігуру одержимо, якщо два рівнобедрені трикутники ABC і ADC з рівними основами AC прикладемо один до одного так, як показано на малюнку 105. Властивості дельтоїда випливають із властивостей рівнобедреного трикутника. Наприклад, діагоналі дельтоїда взаємно перпендикулярні, одна із них ділить кути навпіл і ділить іншу діагональ навпіл. Сформулюйте за малюнком ще якісь властивості дельтоїда.

3. Слово «ромб» походить від грецького *rhombos*, що означає — дзиґа, кружіння. Слово «квадрат» походить від латинського *quadratum* — чотирикутник. Квадрат був першим чотирикутником, який розглядали в геометрії.



Мал. 105

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
ромб	rhombus	Rhombus (m)	losange
квадрат	square	Quadrat (n)	carré

qr.orioncentr.com.ua/bNAbg

Пригадайте головне

1. Що таке ромб?
2. Сформулюйте та доведіть властивості діагоналей ромба.
3. Доведіть, що паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є ромбом.
4. Що таке квадрат?
5. Назвіть властивості квадрата.

Усне тренування

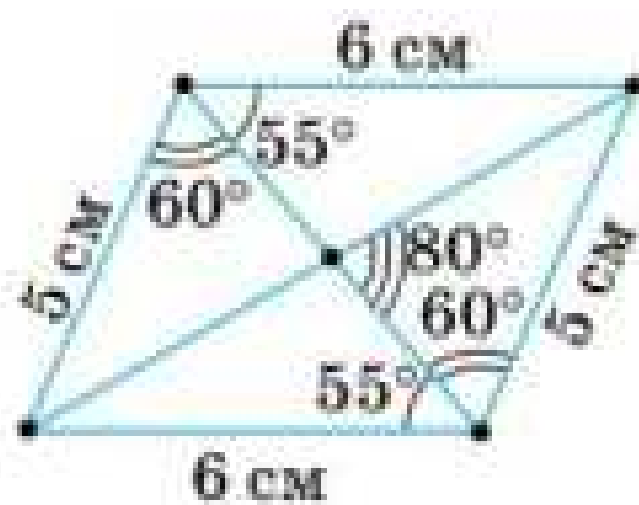
Обчисліть:

- 1) $(15 : 0,5 + 7 : 0,1 - 50) \cdot 0,1$;
- 2) $100 : (0,5 \cdot 40 + 8 : 0,1) - 1$.

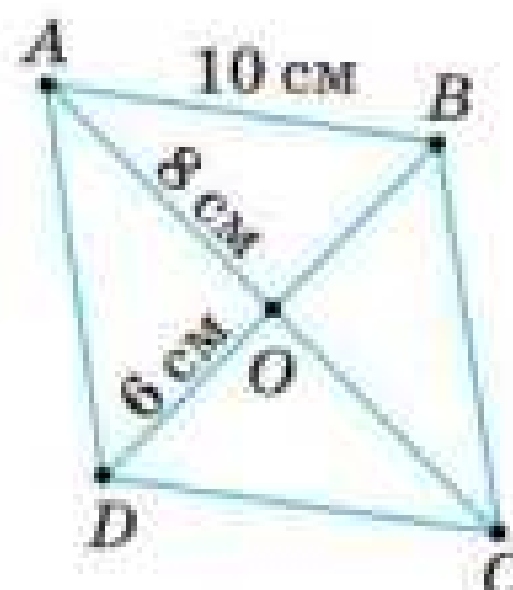
Розв'яжіть задачі

277. Чи правильно, що ромбом є паралелограм, у якому:
 - 1) протилежні сторони попарно рівні;
 - 2) усі сторони рівні?
278. Чи має ромб усі властивості паралелограма? Відповідь поясніть.
279. Назвіть властивості, які має ромб, але яких не має паралелограм, що не є ромбом.
280. Чи є ромбом будь-який паралелограм, у якого діагоналі:
 - 1) рівні;
 - 2) взаємно перпендикулярні;
 - 3) ділять кути ромба навпіл?
281. Чи правильно, що паралелограм є ромбом, якщо його діагоналі:
 - 1) перетинаються під гострим кутом;
 - 2) взаємно перпендикулярні?
282. Чи правильно, що квадратом є прямокутник, у якому:
 - 1) дві сусідні сторони нерівні;
 - 2) усі сторони рівні?

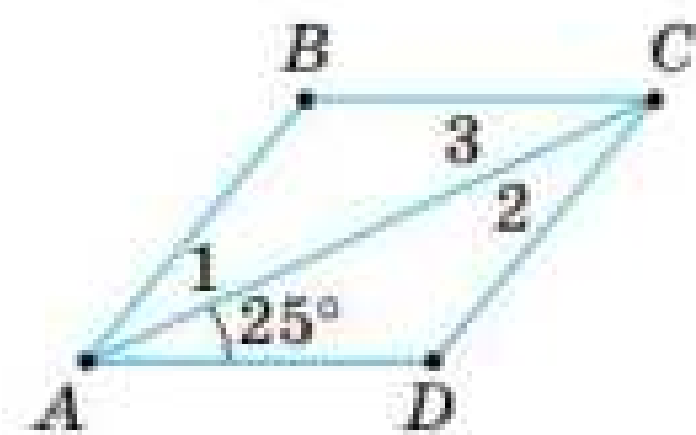
- 283'.** Чи має квадрат усі властивості прямокутника? Відповідь поясніть.
- 284'.** Чи має квадрат усі властивості ромба? Відповідь поясніть.
- 285'.** Чи правильно, що у квадраті:
- 1) протилежні сторони рівні й паралельні;
 - 2) сусідні сторони рівні та взаємно перпендикулярні;
 - 3) протилежні кути рівні;
 - 4) усі кути рівні?
- 286'.** Чи правильно, що діагоналі квадрата:
- 1) рівні;
 - 2) взаємно перпендикулярні;
 - 3) ділять кути навпіл;
 - 4) точкою перетину діляться навпіл?
- 287'.** Чи правильно вказано довжини сторін і градусні міри кутів ромба на малюнку 106? Відповідь поясніть.
- 288'.** $ABCD$ — ромб (мал. 107). За даними на малюнку знайдіть:
- E** 1) BC, AD, DC ;
2) AC, BD .



Мал. 106

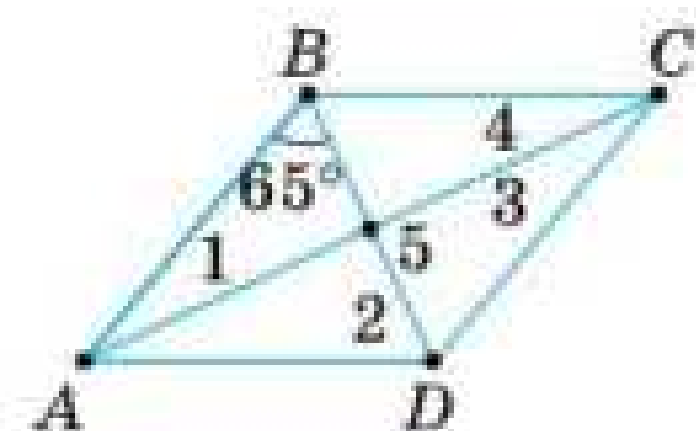


Мал. 107



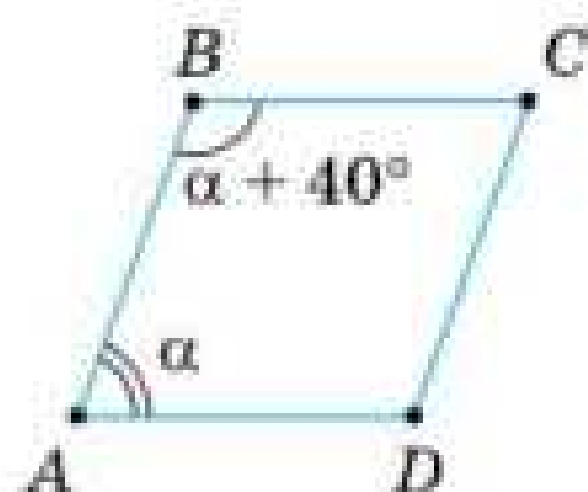
Мал. 108

- 289'.** $ABCD$ — ромб (мал. 108). За даними на малюнку знайдіть кути 1, 2 і 3.
- 290'.** Знайдіть сторону ромба, якщо його периметр дорівнює:
- 1) 2,4 дм;
 - 2) 280 мм.
- 291'.** Периметр ромба дорівнює 12 см. Знайдіть сторону ромба.
- 292'.** Доведіть, що діагоналі ромба ділять його на чотири рівні прямокутні трикутники.
- 293'.** Доведіть, що діагональ ромба ділить його на два рівні трикутники.
- 294'.** $ABCD$ — ромб (мал. 109). За даними на малюнку знайдіть кути 1, 2, 3, 4 і 5.

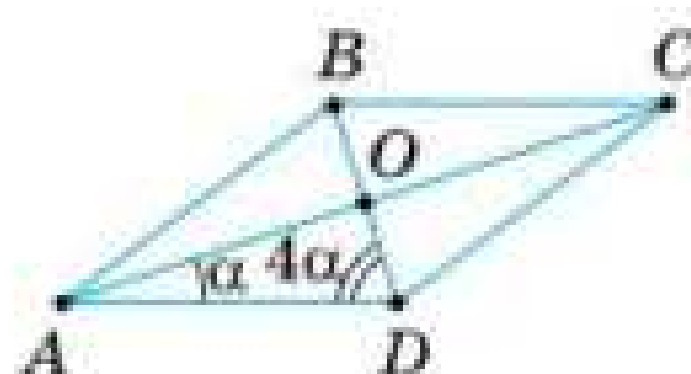


Мал. 109

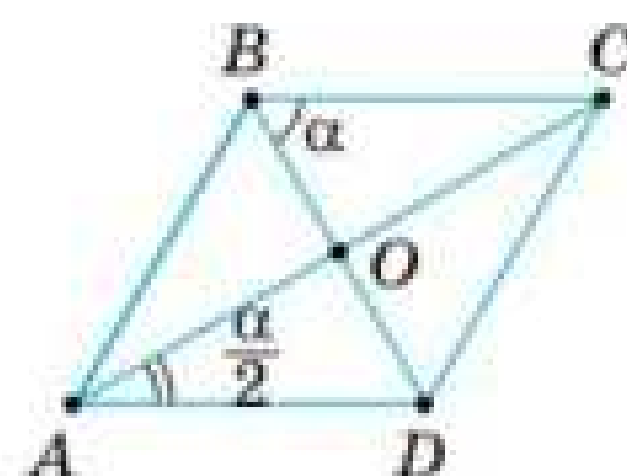
- 295*** Знайдіть кути, утворені діагоналями ромба з його сторонами, якщо кут ромба дорівнює: 1) 36° ; 2) 54° .
- 296*** Знайдіть кути, утворені діагоналями ромба з його сторонами, якщо кут ромба дорівнює 60° .
- 297*** Знайдіть кути ромба, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні.
- 298*** Знайдіть кути ромба, якщо його висота утворює зі стороною кут: 1) 30° ; 2) 15° ; 3) 65° .
- 299*** За даними на малюнках 110, 111 знайдіть кути ромба.



Мал. 110



Мал. 111



Мал. 112

- 300*** За даними на малюнку 112 знайдіть кути ромба.

- 301*** Кут ромба дорівнює 60° , а менша діагональ — d . Знайдіть периметр ромба, якщо:

- 1) $d = 3,2$ дм;
- 2) $d = 45$ мм.



qr.orioncentr.com.ua/fCtfh

- 302*** Кут ромба дорівнює 60° , а менша діагональ — 10 см. Знайдіть периметр ромба.
- 303*** У чотирикутнику $KLMN$ протилежні сторони паралельні. Доповніть дані в таблиці 16 так, щоб наведений висновок був правильним.

Таблиця 16

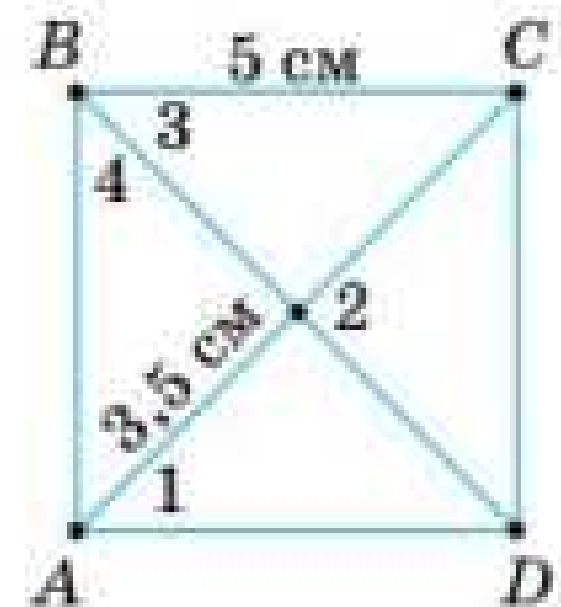
KL	5 см		2,5 см	
LM		2 дм		0,4 дм
MN	5 см		25 мм	
NK		2 дм		4 см
	$\dots \perp \dots$	$\dots \perp \dots$	$\dots \perp \dots$	$\dots \perp \dots$
Висновок	$KLMN$ — ромб			

304'. Відомі довжини двох паралельних сторін чотирикутника $ABCD$:



1) $AB = CD = 3$ см; 2) $BC = AD = 4$ см.

Які елементи цього чотирикутника мають бути перпендикулярними, щоб був правильним висновок: $ABCD$ — ромб?



305'. За даними на малюнку 113 знайдіть:

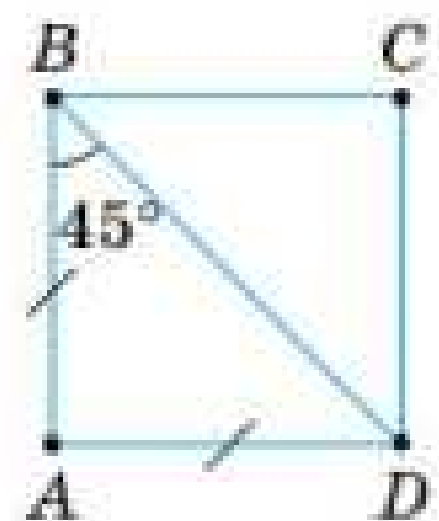
- 1) інші сторони квадрата;
- 2) діагоналі квадрата;
- 3) кути 1, 2, 3 і 4.

Мал. 113

306'. Знайдіть периметр квадрата, якщо точка перетину його діагоналей віддалена від сторони на:

- 1) 8 см;
- 2) 0,3 дм.

307'. Знайдіть периметр квадрата, якщо точка перетину його діагоналей віддалена від сторони на 21 мм.



Мал. 114

308'. Дано паралелограм $KLMN$. Доповніть дані в таблиці 17 так, щоб наведений висновок був правильним.

Таблиця 17

KL	5 см			0,4 дм
LM	5 см	2 дм		
MN		2 дм	25 мм	
NK			2,5 см	4 см
	$\dots \perp \dots$	$\dots \perp \dots$	$\dots \perp \dots$	$\dots \perp \dots$
Висновок	$KLMN$ — квадрат			

309'. Доведіть, що паралелограм $ABCD$ на малюнку 114 — квадрат.



310'. Накресліть у зошиті таблицю 18.



У таблиці поставте знак $+$, якщо геометрична фігура має вказану властивість.



qr.orioncentr.com.ua/tIF7v

Таблиця 18

Властивості \ Фігура		Паралелограм	Прямокутник	Ромб	Квадрат
1.	Протилежні сторони попарно паралельні				
2.	Протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні				

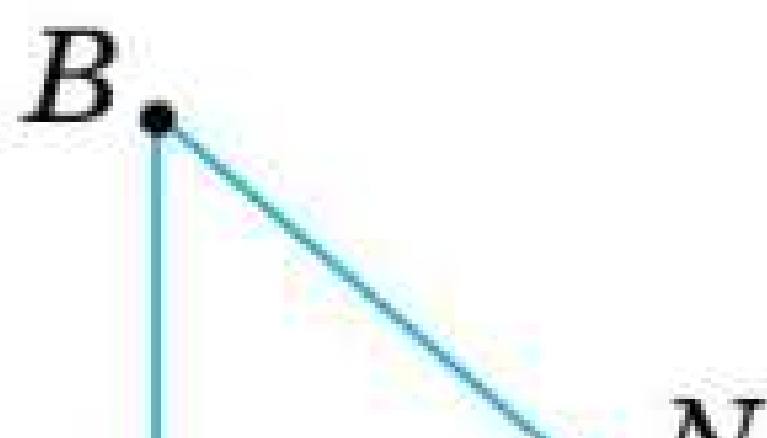
Властивості		Фігура
3.	Усі сторони рівні	
4.	Усі кути прямі	
5.	Діагоналі точкою їх перетину діляться навпіл	
6.	Діагоналі рівні	
7.	Діагоналі взаємно перпендикулярні	
8.	Діагоналі ділять кути навпіл	

311°. Чи може лише одна грань приймати форму квадрата?

312°. Знайдіть суму площ усіх граней куба, якщо однієї грані дорівнює 16 см.

313°. Знайдіть суму площ усіх граней куба, якщо ребер дорівнює 132 см.

- 323.** У рівносторонній трикутник ABC вписано ромб, який має з ним спільний кут (рис. 10.10).
1. Знайдіть периметр ромба, якщо периметр трикутника дорівнює 24.
 2. Доведіть, що сторона ромба дорівнює половині сторони трикутника.
 3. Знайдіть довжини відрізків, на які сторони ромба ділять сторони трикутника.
- 324.** У рівнобедрений прямокутник вписано квадрат, який має з трикутником спільний кут. Знайдіть периметр квадрата, якщо периметр трикутника дорівнює: 1) 8 см; 2) 29 мм; 3) 0,41 дм.
- 325.** Ромб, у якого один кут прямий, вписано в трикутник.
- 326.** AN — бісектриса прямого кута A трикутника ABC , BM і NK — перпендикуляри до катетів AB і AC (рис. 10.11).
- 327.** Доведіть, що ромб, діагоналі якого є бісектрисами кутів трикутника, вписаний в цей трикутник.



- 332***. Вершини протилежних кутів вписаного чотирикутника $ABCD$ лучено із серединами його сторін. Доведіть, що чотирикутник, утворений серединами сторін, показано на малюнку 118. Доведіть, що чотирикутник $MNPQ$ — паралелограм.
- 333***. Від двох протилежних вершин A і C вписаного чотирикутника $ABCD$ до його сторін BD і AD відкладено рівні відрізки AM і CN (мал. 119). Доведіть, що утворений чотирикутник $PMNK$ — прямокутник.
- 334***. Із точки перетину діагоналей O вписаного чотирикутника $ABCD$ проведено перпендикуляри до його сторін. Доведіть, що основи цих перпендикулярів є вершинами прямокутника.
- 335***. Доведіть, що чотирикутник, утворений серединами сторін паралелограма, — ромб.
- 336***. Сума периметрів чотирьох трикутників, утворених діагоналями, більша за периметр самого чотирикутника. Доведіть, що діагональ квадрата менша за суму периметрів чотирьох трикутників, утворених її.

- 342.** Щоб перевірити, чи має стіл форму квадрата, столяр виміряв всі чотири сторони й переконався, що вони рівні.
1. Чи є правильною така перевірка?
 2. Чи достатньо виміряти дві протилежні сторони й переконатися, що вони рівні?
 3. Чи матиме стільниця форму квадрата, якщо її сторони рівні?
- 343.** Земельна ділянка, яка має форму квадрата, була обнесена парканом. Лишилося два стовпці у протилежних кутах. Як відновити межу ділянки?
- 344.** Наталка вирішила перевірити, чи має квадратна серветка форму квадрата. Вона перегнула її за діагоналю. Якщо обидві половинки серветки будуть рівними, така перевірка є недостатньою. Чи достатньо перевірити кожну діагональ? Якщо ні, то як перевірити, чи є квадратом серветка?

Запам'ятайте!

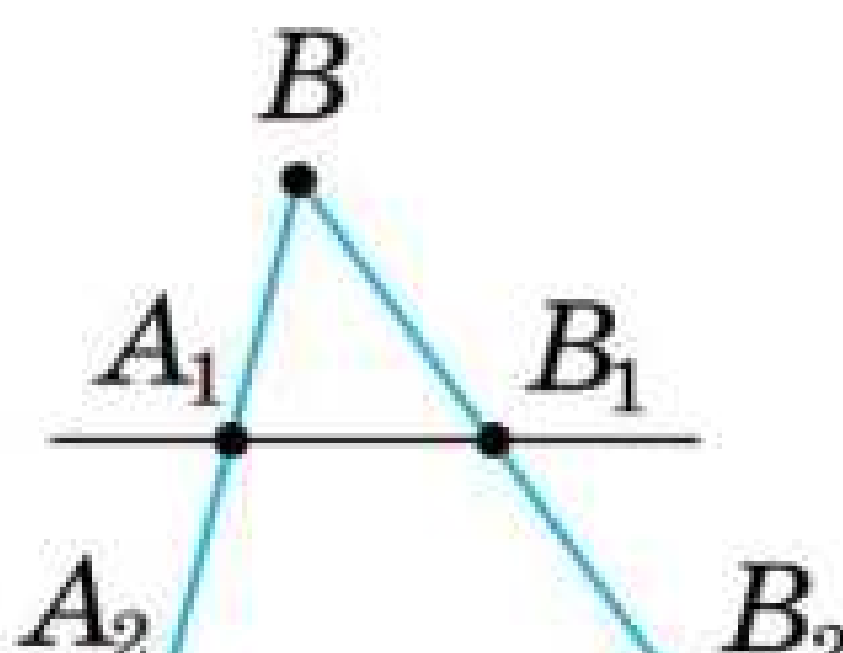
Теорема

Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони відтинають рівні відрізки, то і на іншій його стороні.

Дано: $\angle ABC$ (мал. 123), $A_1A_2 = A_1A_3$.

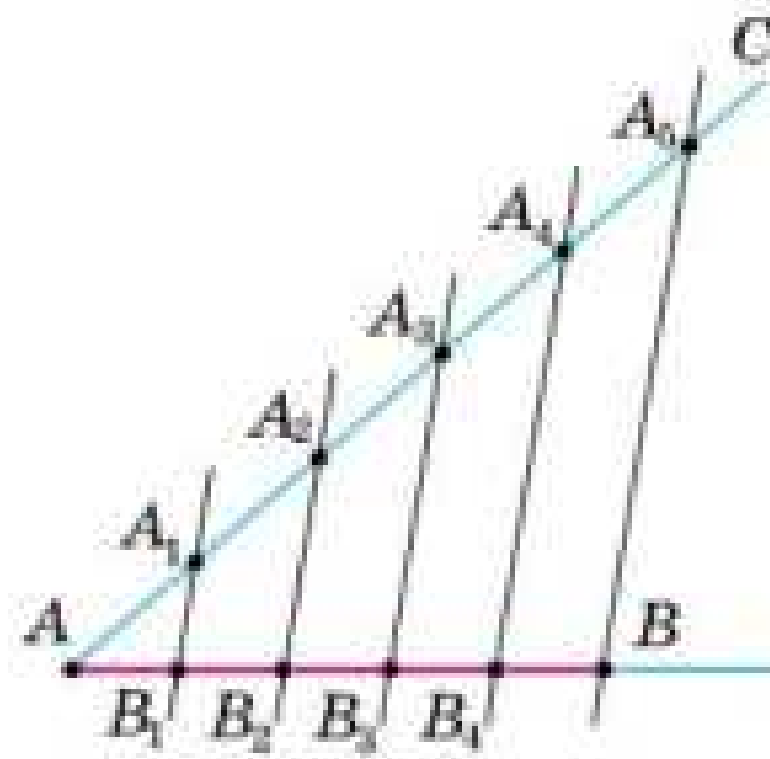
Довести: $B_1B_2 = B_2B_3$.

Доведення. Через точки A_1 і A_2 проведемо паралельні BC (мал. 124). Розглянемо $\triangle A_1A_2E$ за умовою, $\angle A_1A_2E = \angle A_2A_3F$ і $\angle A_2A_1E = \angle A_2A_3F$ — відповідні кути паралельних прямих і січній. Отже, $A_1E = A_2F$. Але $A_1E = B_1B_2$ і $A_2F = B_2B_3$ — відповідні сторони трикутників $A_1B_1B_2E$ і $A_2B_2B_3F$. Отже, $B_1B_2 = B_2B_3$.





Мал. 126



Мал. 127

Відкладемо на промені AC п'ять рівних відрізків: AA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 .

Проведемо пряму A_5B .

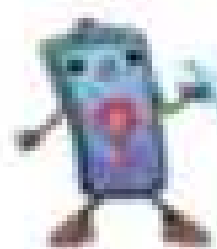
Через точки A_1 , A_2 , A_3 , A_4 проведемо прямі, паралельні прямій A_5B . За теоремою Фалеса, ці прямі ділять відрізок AB на п'ять рівних частин.

2. Що таке середня лінія трикутника

Ситуація. Учні й учениці 8-А класу вирішили продовжити своє мінідослідження, але вже в трикутнику. Вони точно знали, що тут можна застосувати теорему Фалеса. Можливо, це дозволить виявити нові властивості трикутника? У довільному трикутнику ABC через середину M сторони AB вони провели пряму, паралельну стороні AC (мал. 128). На стороні BC утворилися рівні відрізки BN і NC . Цей висновок учні підтвердили і вимірюванням, і аналітично. А от відрізок MN цієї прямої примусив їх замислитися. Якщо діяти навпаки, тобто спочатку сполучити середини двох сторін трикутника, то виявляється, що цей відрізок не лише паралельний третій стороні трикутника. Цей відрізок має довжину, яку можна знаходити без вимірювання.

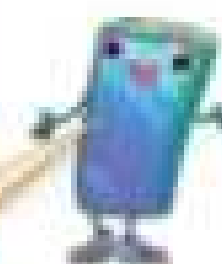
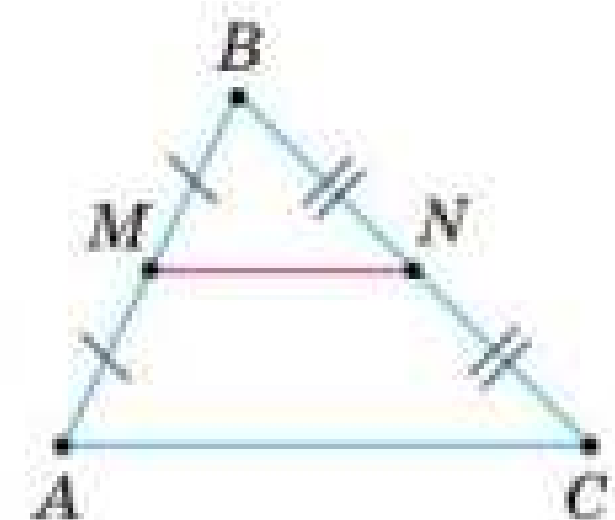


qr.orioncentr.com.ua/hZYz0



Чи є особливим відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника?

Так.



Мал. 128

Такий відрізок у трикутнику має спеціальну назву — середня лінія.

Запам'ятайте!

Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

На малюнку 128 відрізок MN — середня лінія трикутника ABC , бо точки M і N — середини сторін AB і BC .

3. Властивості середньої лінії трикутника

Чи можна встановити аналітично властивості середньої лінії трикутника?

Так.

**Запам'ятайте!****Теорема (властивості середньої лінії трикутника)**

Середня лінія трикутника паралельна третій його стороні й дорівнює її половині.

Дано: $\triangle ABC$ (мал. 129), DE — середня лінія.

Довести: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE = \frac{1}{2} AC$.

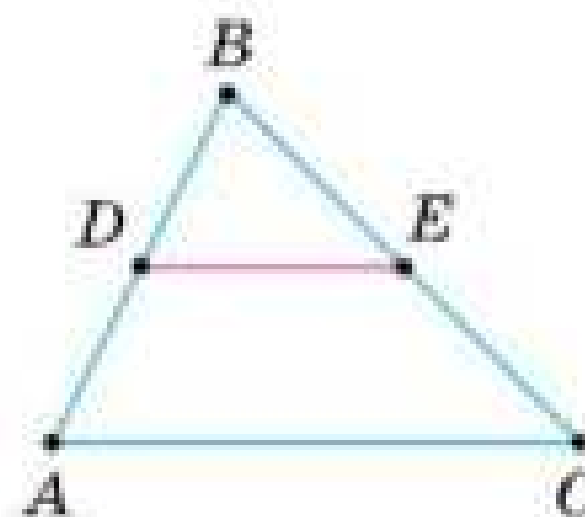
Доведення. 1. Оскільки DE — середня лінія трикутника ABC , то точка D є серединою відрізка AB , а точка E — серединою відрізка BC . Проведемо через точку D пряму, паралельну AC . За теоремою Фалеса, вона перетинає відрізок BC в його середині, тобто в точці E . Тому побудована пряма містить середню лінію DE даного трикутника. Отже, $DE \parallel AC$.

2. Проведемо пряму $EF \parallel AB$ (мал. 130). За теоремою Фалеса, пряма EF ділить відрізок AC навпіл:

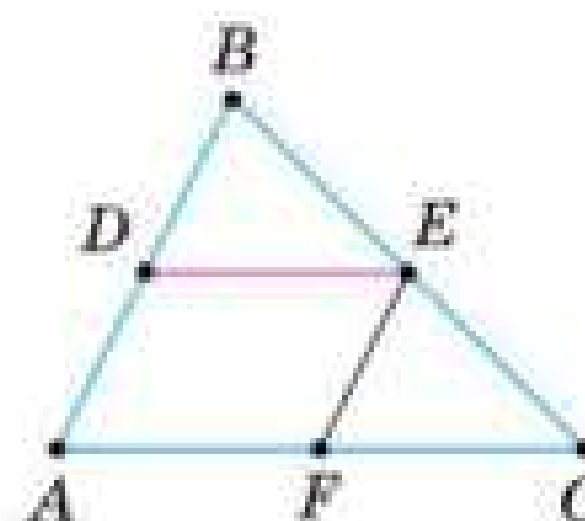
$AF = FC = \frac{1}{2} AC$. За побудовою, чотирикутник

$ADEF$ — паралелограм, тому $DE = AF$. Отже,

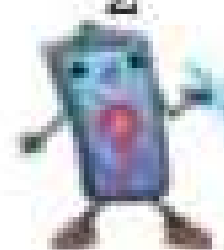
$DE = \frac{1}{2} AC$.



Мал. 129

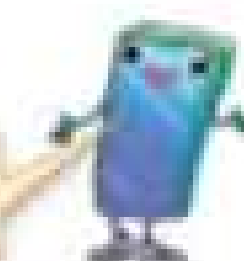


Мал. 130



Чи можна застосувати властивості середньої лінії трикутника не лише в трикутнику?

Так.



Задача Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

Розв'язання Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник і M, N, P і K — середини його сторін (мал. 131). Доведемо, що $MNPK$ — паралелограм.

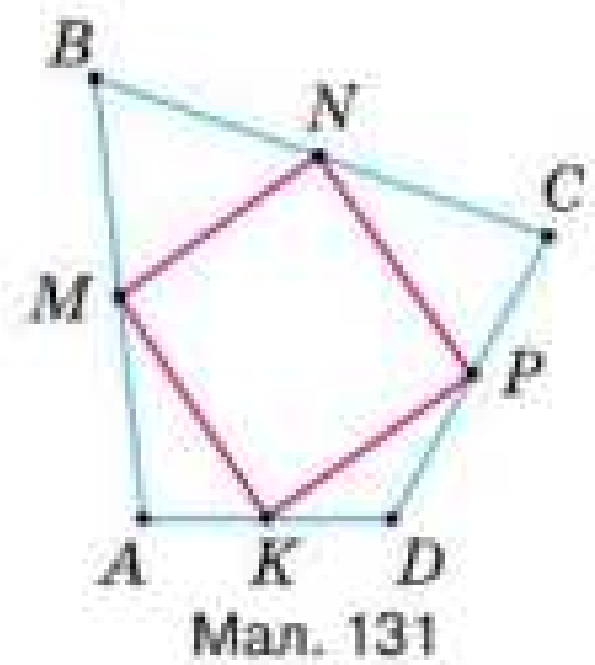
Проведемо діагональ AC (мал. 132). MN — середня лінія трикутника ABC . Тому $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

KP — середня лінія трикутника ADC . Тому $KP \parallel AC$ і $KP = \frac{1}{2}AC$.

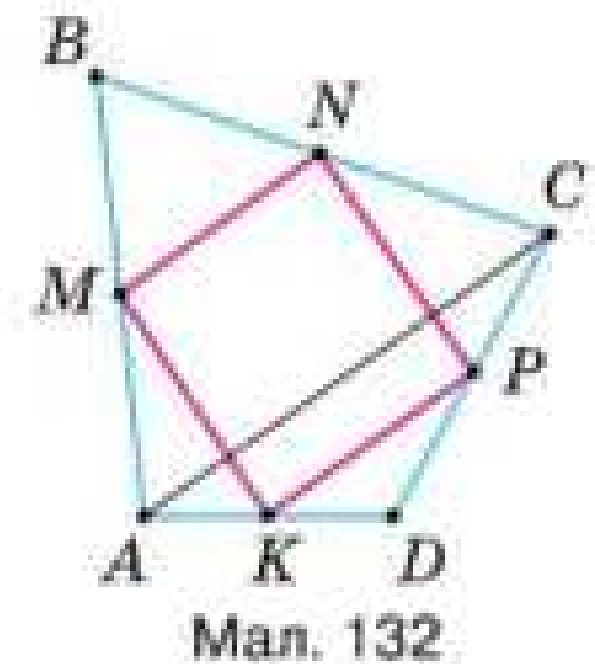
Одержали: $MN \parallel AC$ і $KP \parallel AC$, звідси $MN \parallel KP$;

$MN = \frac{1}{2}AC$ і $KP = \frac{1}{2}AC$, звідси $MN = KP$.

Отже, протилежні сторони MN і KP чотирикутника $MNPK$ рівні й паралельні, тому він — паралелограм (за ознакою).



Мал. 131

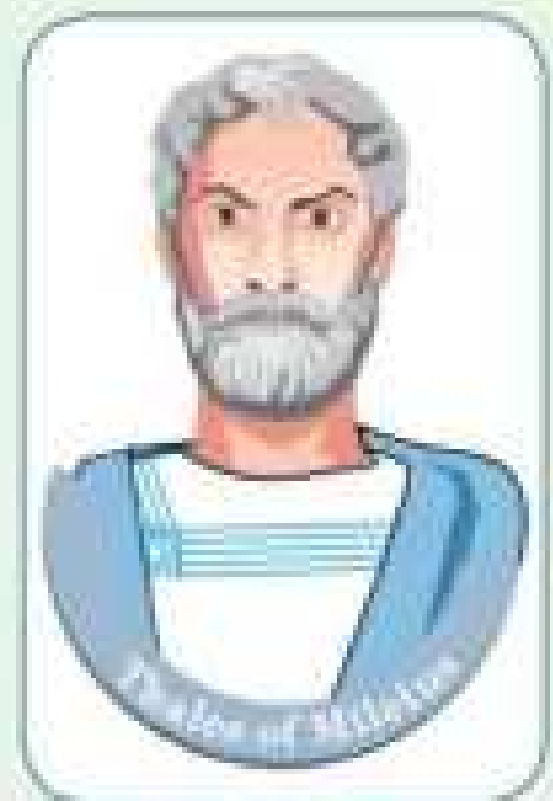


Мал. 132

Якщо в умові задачі дано середини деяких відрізків, то спробуйте скористатися властивостями середньої лінії трикутника.

Дізнайтеся більше

Давньогрецького вченого Фалеса з Мілета (625–548 рр. до н. е.) вважають одним із семи мудреців світу. Геній Фалеса знайшов втілення в різних галузях людської діяльності. Він займався інженерною справою, був державним діячем, математиком, астрономом. Особливою заслугою Фалеса вважають те, що він увів у математику ідею доведення. Учений довів, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні, що діаметр ділить круг на дві рівні частини, що прямий кут можна вписати в півколо та ін. Як вважають історики, саме Фалес почав застосовувати основні геометричні інструменти — циркуль і лінійку. Учений виміряв висоту єгипетських пірамід за довжиною їхніх тіней, уперше передбачив сонячне затемнення, яке відбулося 585 р. до н. е.



Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
середня лінія трикутника	midline of a triangle	Mittellinie eines Dreiecks	médiane du triangle

Пригадайте головне

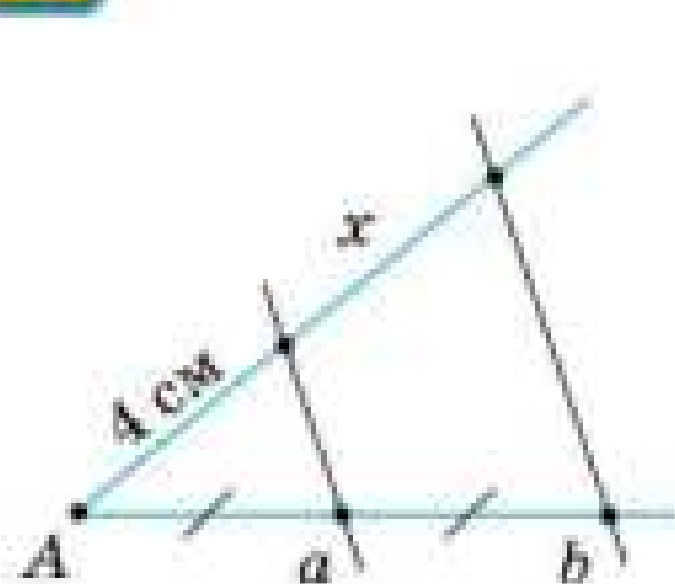
1. Сформулюйте теорему Фалеса.
2. Як поділити даний відрізок на n рівних частин?
3. Що таке середня лінія трикутника?
4. Сформулюйте та доведіть теорему про властивості середньої лінії трикутника.

Усне тренування

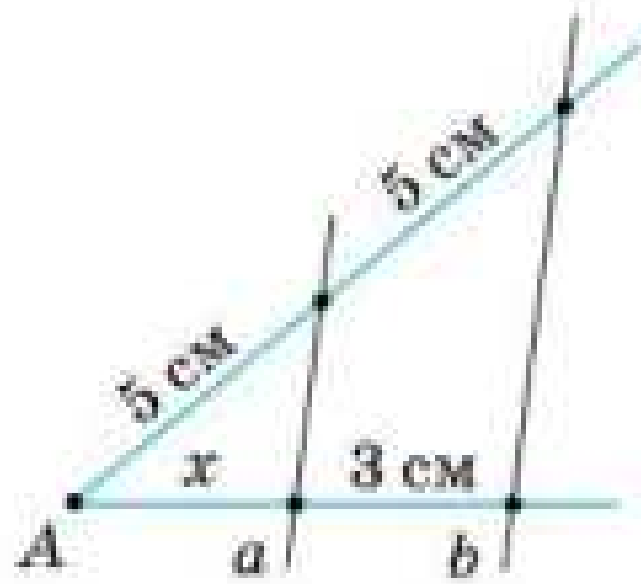
1. Чи існує трикутник, у якого сторони дорівнюють:
4,56, 5,44 і 10; 2,39, 3,61 і 5; 7,65, 1,35 і 6,3?
2. Чи існує трикутник, у якого кути дорівнюють:
 20° , 80° , 90° ; 55° , 35° , 80° ; 18° , 62° , 100° ?

Розв'яжіть задачі

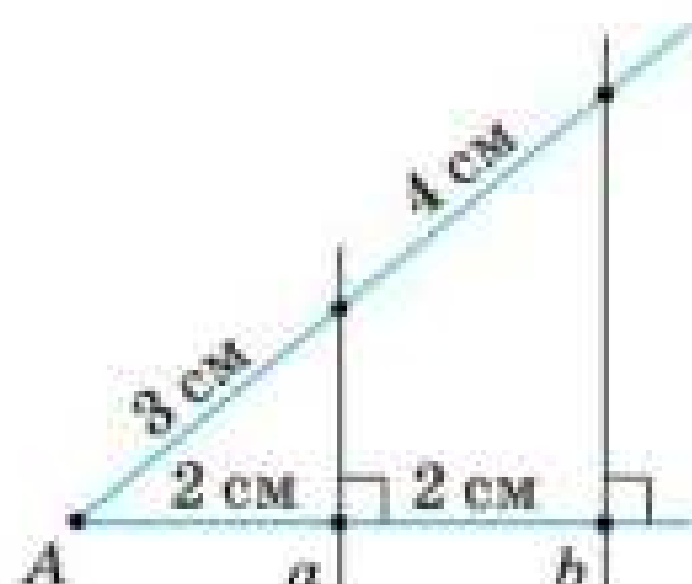
- 345*** Чи правильно, що в теоремі Фалеса йдеться про те, що:
- 1) сторони кута перетинають будь-які прямі;
 - 2) сторони кута перетинають паралельні прямі;
 - 3) усі утворені відрізки дорівнюють один одному;
 - 4) дорівнюють один одному лише відрізки, утворені на одній стороні кута;
 - 5) дорівнюють один одному відрізки, утворені на кожній стороні кута, але два відрізки на різних сторонах кута можуть мати не таку саму довжину?
- 346*** Чи правильно, що середня лінія трикутника сполучає середини:
- 1) усіх сторін трикутника; 2) двох сторін трикутника?
- 347*** Чи правильно, що середня лінія трикутника:
- 1) перетинає третю сторону трикутника;
 - 2) паралельна третій стороні трикутника;
 - 3) дорівнює половині будь-якої сторони трикутника;
 - 4) дорівнює половині третьої сторони трикутника?
- 348*** За даними на малюнках 133, 134 знайдіть x ($a \parallel b$).
- 349*** Чи правильно вказано довжини відрізків на малюнку 135? Відповідь поясніть.



Мал. 133



Мал. 134



Мал. 135

- 350'**. На малюнку 136 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Знайдіть:
- 1) AB_1 , якщо $B_2B_3 = 6$ см;
 - 2) B_2B_3 , якщо $AB_3 = 12$ см.



qr.orioncentr.com.ua/LFEOK

- 351'**. На малюнку 136 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$. Знайдіть AB_3 , якщо $B_1B_2 = 5$ см.

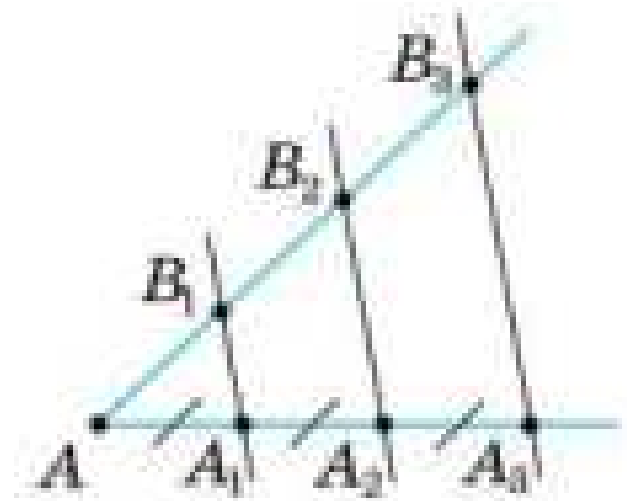


- 352'**. За даними на малюнку 137 доведіть, що $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.

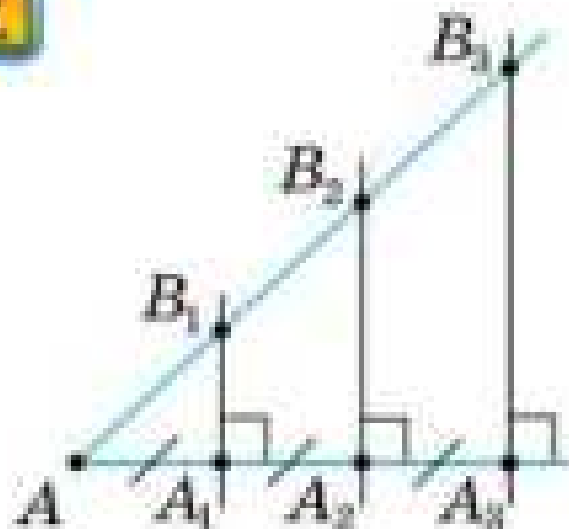
- 353'**. Поділіть даний відрізок на вказану кількість рівних частин: 1) 4; 2) 6.

- 354'**. Поділіть даний відрізок на три рівні частини.

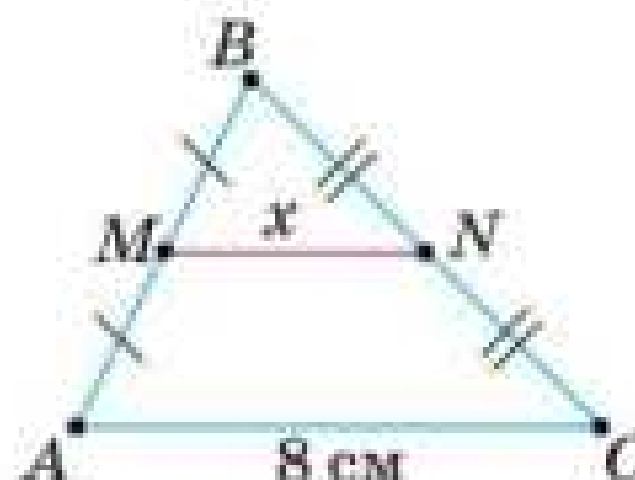
- 355'**. За даними на малюнках 138, 139 знайдіть x .



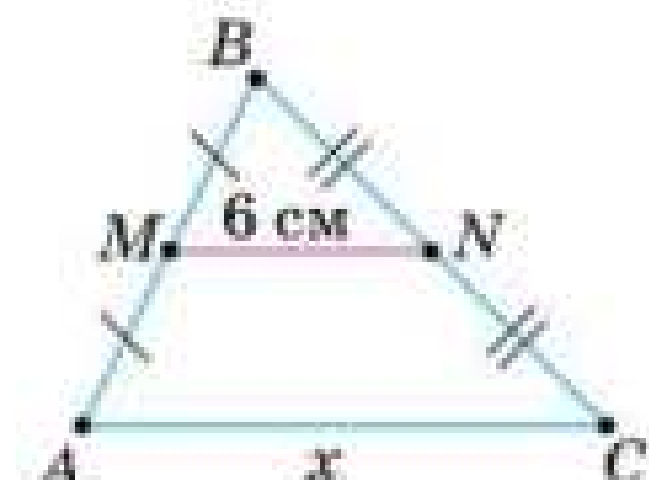
Мал. 136



Мал. 137



Мал. 138

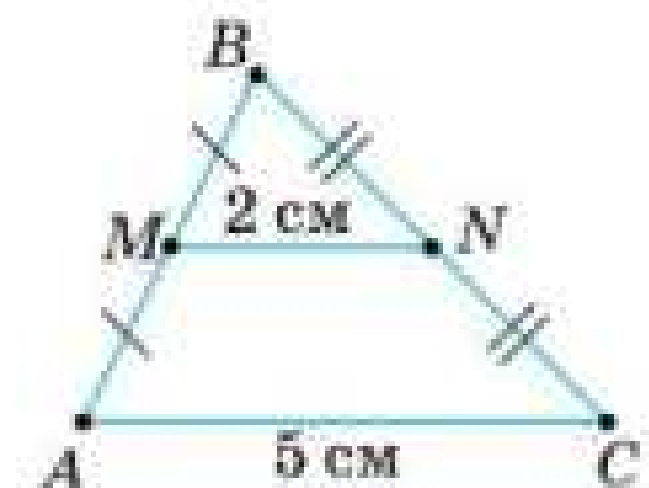


Мал. 139

- 356.** Чи правильно вказано довжини відрізків на малюнку 140? Відповідь поясніть.



- 357.** DE і EF — середні лінії трикутника ABC , які відповідно паралельні сторонам BC і AB . Знайдіть:
- 1) відрізок FC , якщо $DE = 4$ см;
 - 2) відрізок BD , якщо $EF = 7$ см.



Мал. 140

- 358'**. Знайдіть середні лінії трикутника, якщо його сторони дорівнюють:
- 1) 8 см, 5 см, 7 см;
 - 2) 30 мм, 40 мм, 50 мм.



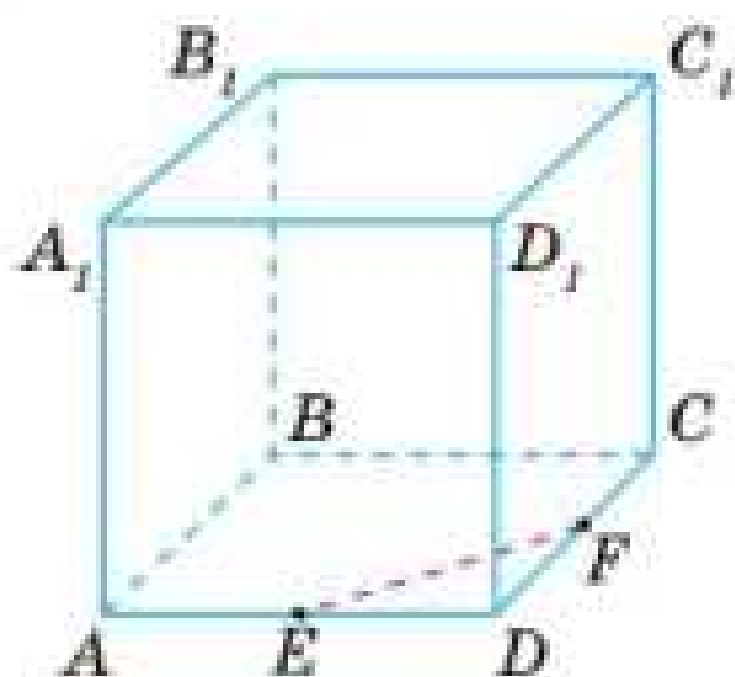
qr.orioncentr.com.ua/kmv1X

- 359'**. Сторони трикутника дорівнюють 9 см, 10 см і 14 см. Знайдіть середні лінії трикутника.

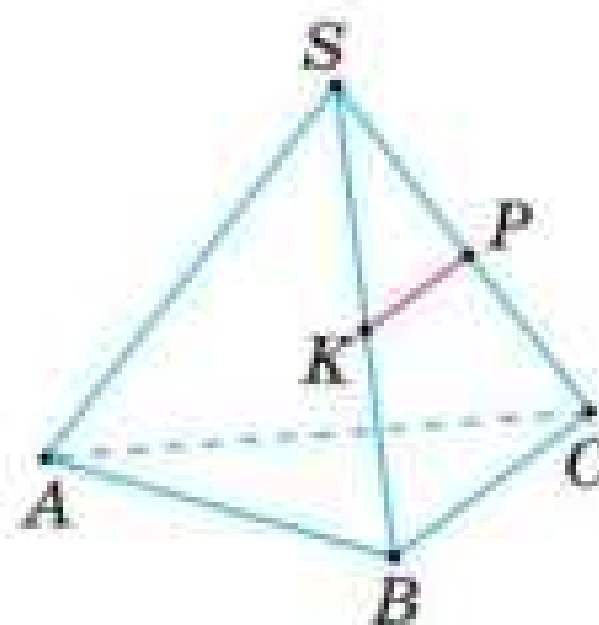


- 360'**. Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику всі середні лінії — рівні. Чи рівні середні лінії в рівнобедреному трикутнику?

- 361***. Знайдіть середні лінії рівностороннього трикутника, якщо його периметр дорівнює:
1) 24 дм; 2) 48 мм.
- 362***. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть його середні лінії.
- 363***. Знайдіть периметр рівностороннього трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють: 1) 0,8 дм; 2) 100 мм.
- 364***. Середні лінії рівностороннього трикутника дорівнюють 4 см. Знайдіть його периметр.
- 365***. Знайдіть периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють: 1) 3 см, 5 см, 6 см; 2) 7 см, 9 см, 12 см; 3) 8 см, 10 см, 12 см.
- 366***. Визначте вид трикутника, якщо:
1) усі його середні лінії рівні; 2) дві його середні лінії рівні.
- 367***. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо два відрізки, що сполучають середини його сусідніх сторін, дорівнюють:
1) 0,6 дм і 0,9 дм;
2) 100 мм і 14 см.
- 368***. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо два відрізки, які сполучають середини його сусідніх сторін, дорівнюють 5 см і 11 см.
- 369***. Точки E і F — середини ребер куба (мал. 141). Знайдіть суму довжин діагоналей граней куба, якщо $EF = 4$ см.
- 370***. У трикутній піраміді всі ребра рівні (мал. 142). Знайдіть суму довжин усіх ребер піраміди, якщо $KP = 3$ см, де K і P — середини ребер CS і BS .



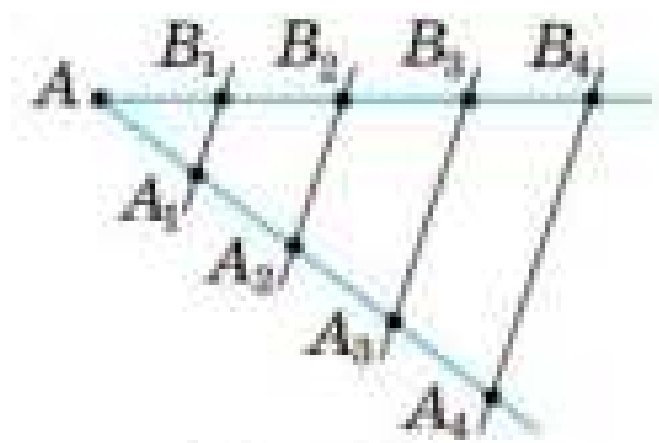
Мал. 141



Мал. 142

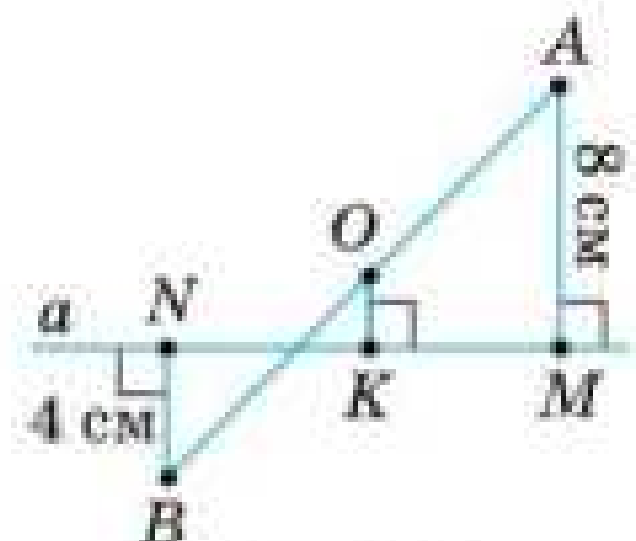
- 371.** Поділіть даний відрізок на дві частини так, щоб вони відносились як: 1) 3 : 4; 2) 2 : 3.
- 372.** Поділіть даний відрізок на дві частини так, щоб вони відносились як 2 : 5.

- 373.** На малюнку 143 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$. Знайдіть:
- 1) AB_3 , якщо різниця довжин відрізків AB_4 і B_2B_3 дорівнює 9 см;
 - 2) B_1B_4 , якщо різниця довжин відрізків AB_4 і B_1B_3 дорівнює 8 см;
 - 3) AB_4 , якщо різниця довжин відрізків B_1B_4 і B_1B_2 дорівнює 10 см.



Мал. 143

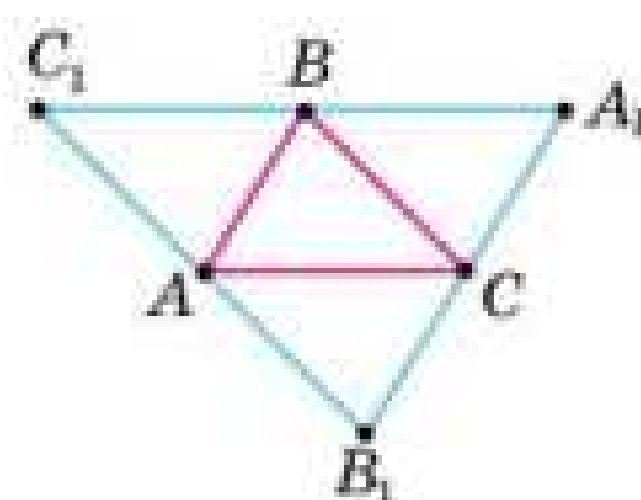
- 374.** Сторони трикутника дорівнюють a , b і c . Знайдіть сторони іншого трикутника, вершини якого є серединами сторін даного трикутника, якщо:
- 1) $a = 8$ см, $b = 10$ см, $c = 12$ см;
 - 2) $a = 0,5$ дм, $b = 12$ см, $c = 1,3$ дм.
- 375.** Складіть формулу та обчисліть периметр трикутника ABC , якщо периметр трикутника, утвореного середніми лініями трикутника ABC , дорівнює:
- 1) 18 см;
 - 2) 2,4 дм;
 - 3) 300 мм.
- 376.** Середня лінія рівнобедреного трикутника, що паралельна основі, дорівнює 2,5 см, а його периметр — 2,5 дм. Знайдіть сторони трикутника.
- 377.** Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника з периметром 40 см, якщо його середня лінія, паралельна основі, дорівнює 5 см.
- 378.** Точки A і B лежать по різні боки від прямої a на відстані 8 см і 4 см від неї (мал. 144). Знайдіть відстань від середини O відрізка AB до прямої a .



Мал. 144

- 379.** Сторони трикутника відносяться як 3 : 4 : 5. Знайдіть сторони трикутника, утвореного середніми лініями даного трикутника, якщо периметр даного трикутника дорівнює: 1) 60 см; 2) 4,8 дм.
- 380.** Сторони трикутника відносяться як 7 : 8 : 9. Знайдіть сторони даного трикутника, якщо периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника, дорівнює:
- 1) 48 см; 2) 2,4 дм.
- 381.** Доведіть, що периметр даного трикутника вдвічі більший за периметр трикутника, сторони якого є середніми лініями даного трикутника.

- 382.** Прямі, проведені через вершини A , B і C трикутника ABC паралельно протилежним сторонам, утворюють трикутник $A_1B_1C_1$ (мал. 145).



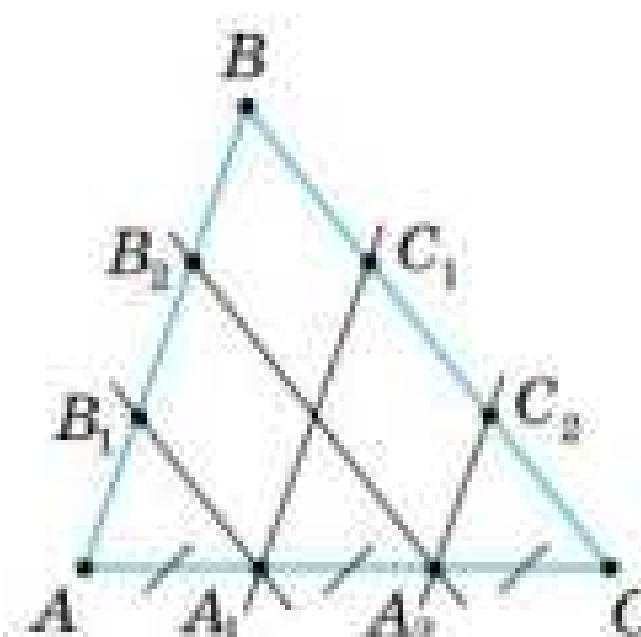
Мал. 145

1. Доведіть, що сторони трикутника $A_1B_1C_1$ точками A , B і C діляться навпіл.
2. Знайдіть сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $AB = 6$ см, $BC = 12$ см, $AC = 15$ см.
3. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо периметр трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює 48 см.

- 383.** У трикутнику ABC (мал. 146) $AB = 12$ см, $BC = 18$ см. Сторону AC поділено на три рівні частини й через точки поділу проведено прямі, паралельні AB і BC . Знайдіть:



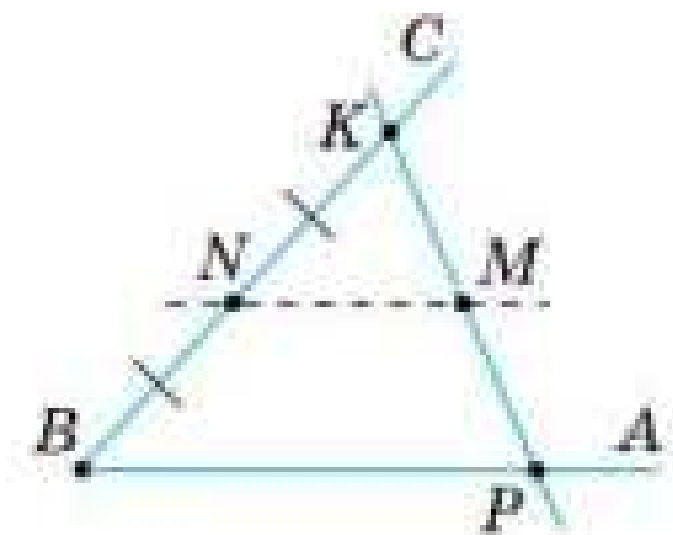
- 1) довжини відрізків, утворених на сторонах AB і BC ;
- 2) довжини відрізків паралельних прямих, що містяться між сторонами трикутника.



Мал. 146

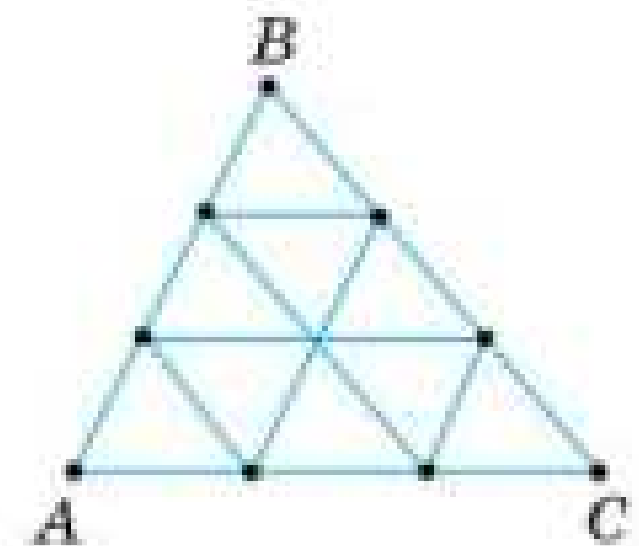
- 384.** Доведіть, що середні лінії трикутника ділять його на чотири рівні трикутники.
- 385.** Точки M і N — середини сторін AD і BC паралелограма $ABCD$. Доведіть, що прямі AN і CM ділять діагональ BD на три рівні частини.
- 386.** Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника, якщо сума діагоналей чотирикутника дорівнює: 1) 25 см; 2) 3,5 дм.
- 387.** Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника, якщо діагоналі чотирикутника дорівнюють: 1) 4 см і 6 см; 2) 24 см і 25 см.
- 388.** Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін квадрата, якщо діагональ квадрата дорівнює: 1) 8 см; 2) 1,3 дм.
- 389.** Доведіть, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба.
- 390.** Доведіть, що середини сторін квадрата є вершинами квадрата.
- 391.** Доведіть, що середини сторін ромба є вершинами прямокутника.
- 392.** Як побудувати трикутник за даними серединами його сторін?
- 393.** Через точку M , розміщену всередині кута ABC , проведіть пряму так, щоб її відрізок, який відтинають сторони кута, ділився точкою M навпіл.

Побудова (мал. 147). Проводимо $MN \parallel AB$; відкладаємо на стороні BC кута відрізок $NK = BN$; проводимо через точки K і M шукану пряму. Доведіть, що наведена побудова є правильною.



Мал. 147

- 394***. Точка K — середина медіани AM трикутника ABC . Пряма BK перетинає сторону AC в точці D . Доведіть, що $AC = 3AD$.
- 395***. Доведіть, що точка перетину медіан трикутника ділить кожну медіану у відношенні $2 : 1$, починаючи від вершини трикутника.
- 396***. Доведіть, що три висоти трикутника перетинаються в одній точці.
- 397***. Кожну зі сторін трикутника ABC поділено на три рівні частини й точки поділу сполучено відрізками (мал. 148).
1. Знайдіть суму довжин усіх відрізків, які сполучають точки поділу, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 см.
 2. Розв'яжіть задачу за умови, що кожную сторону трикутника поділено на чотири рівні частини.
- 398***. Через точку M , розміщену всередині кута ABC , проведіть пряму так, щоб її відрізок, який відтинають сторони кута, точкою M ділився у відношенні $1 : 2$.



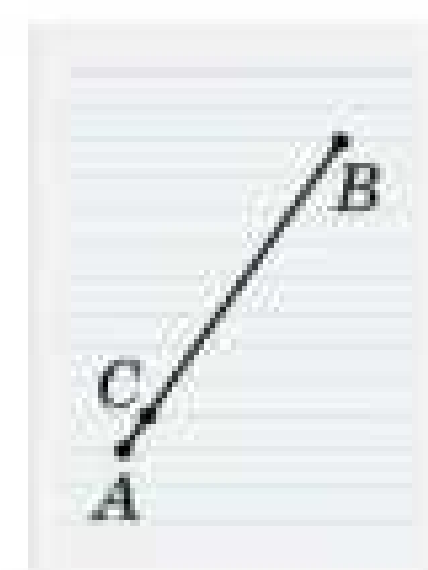
Мал. 148

Проявіть компетентність

- 399.** Потрібно поділити прямокутну смугу (дошку, кусок жерсті, картону) на п'ять смужок однакової ширини. За малюнком 149 поясніть, як це можна зробити. Чому смуга поділилася прямими на п'ять рівних частин?
- 400.** У вас є аркуш зошита з паралельними горизонтальними лініями та циркуль. Потрібно поділити даний відрізок AB на рівні частини, наприклад на 9 рівних частин (мал. 150).
1. Поясніть за малюнком, як це можна зробити. Чому $AC = \frac{1}{9}AB$?



Мал. 149



Мал. 150



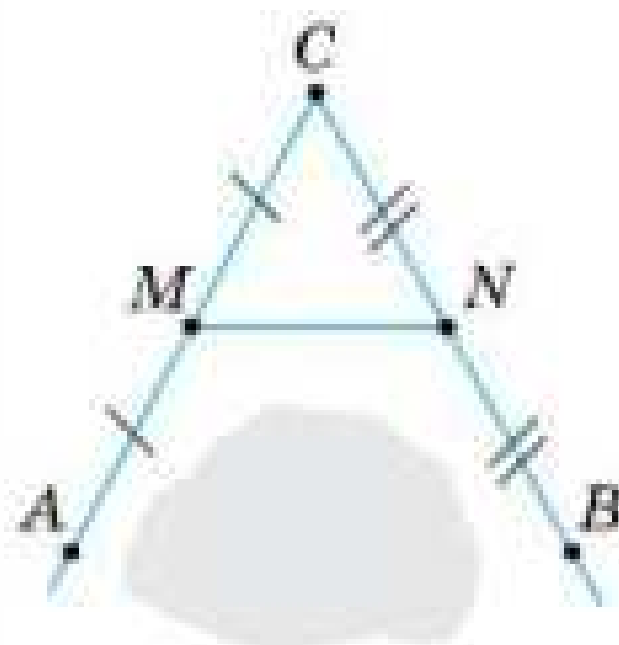
2. Візьміть аркуш зошита з паралельними горизонтальними лініями й поділіть олівець на 5 рівних частин за допомогою цього аркуша.

401. На малюнку 151 показано, як на місцевості виміряли відстань між пунктами A і B , розділеними перешкодою. Позначили довільну точку C і провісили прямі CA і CB . Знайшли точки M і N — середини відрізків AC і BC — та виміряли відстань між точками M і N . Поясніть, чому шукана відстань $AB = 2MN$.

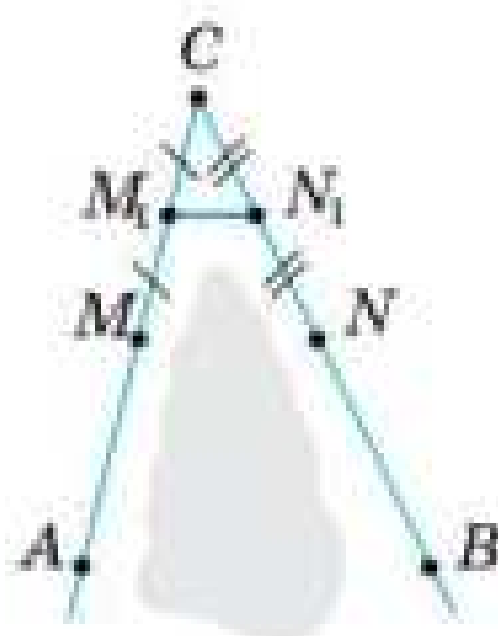
402. Може трапитися так, що провісити пряму між точками M і N , як у задачі 401, неможливо (мал. 152).

1. За малюнком поясніть, як виміряти відстань AB в цьому випадку.

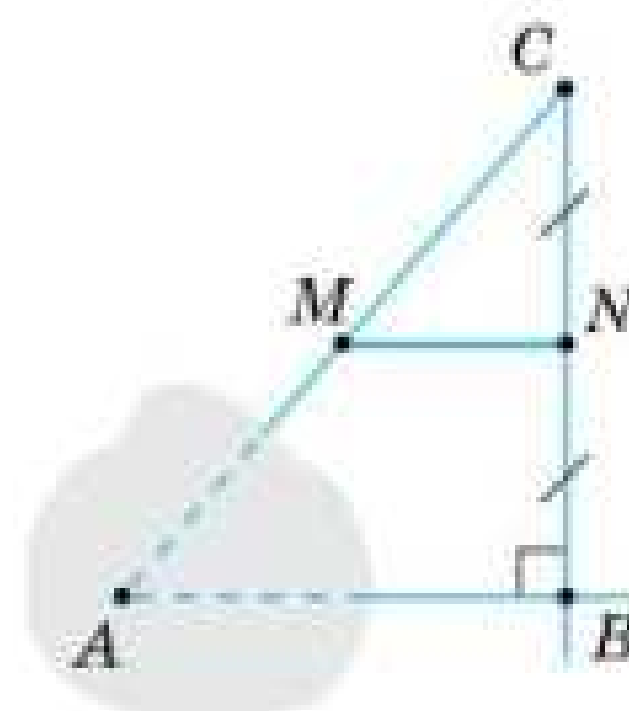
2. Чому шукана відстань $AB = 4M_1N_1$?



Мал. 151



Мал. 152



Мал. 153

403. На малюнку 153 показано, як виміряти відстань між пунктами A і B , якщо до пункту A підійти не можна.

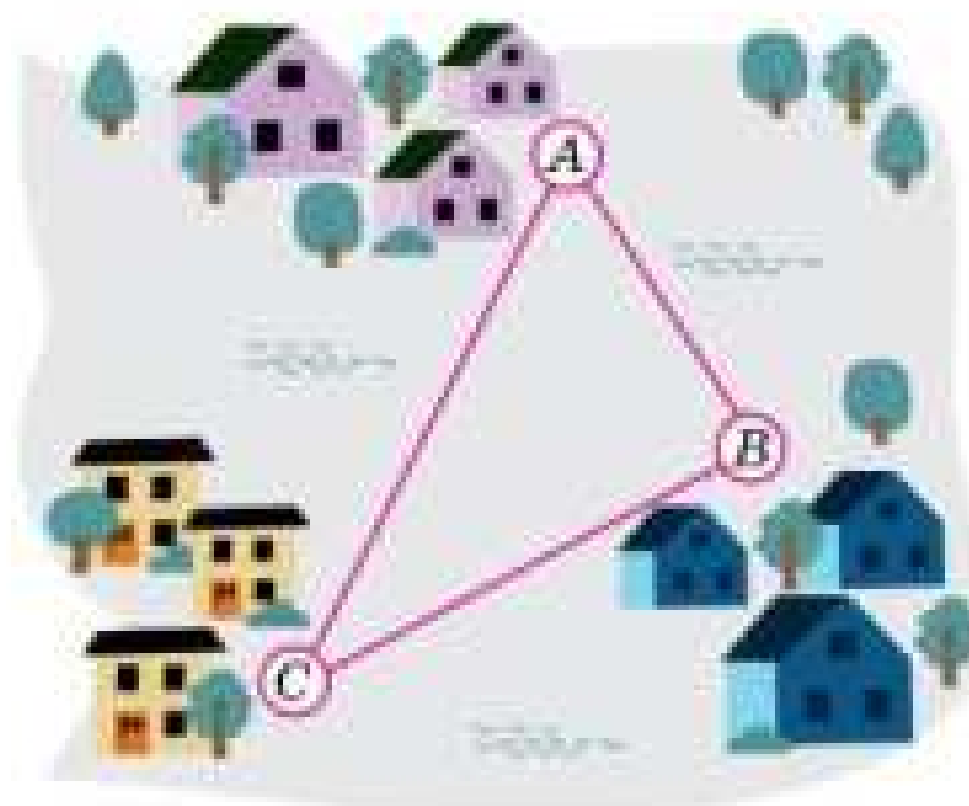
1. Поясніть вимірювання.

2. Чи обов'язково кут B має бути прямим?

404. Три населені пункти A , B і C розташовані на рівнині й не лежать на одній прямій. Потрібно прокласти дорогу, щоб вона пройшла на однаковій відстані від цих пунктів.

1. Як це зробити? Покажіть на малюнку.

2. Скільки таких доріг можна прокласти?



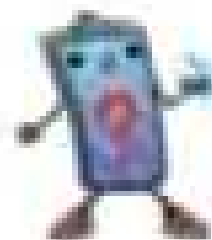
§ 7. ТРАПЕЦІЯ

1. Що таке трапеція

Ситуація. Учні й учениці 8 класу готувалися до шкільного благодійного ярмарку. Для всіх продавчинь вони вирішили пошити нарядні фартухи без нагрудника. Дівчата знайшли кілька залишків тканини трикутної форми й розрізали їх так, як показано на малюнку 154. Для пошиття фартухів взяли нижні частини.



qr.orioncentr.com.ua/EktMK

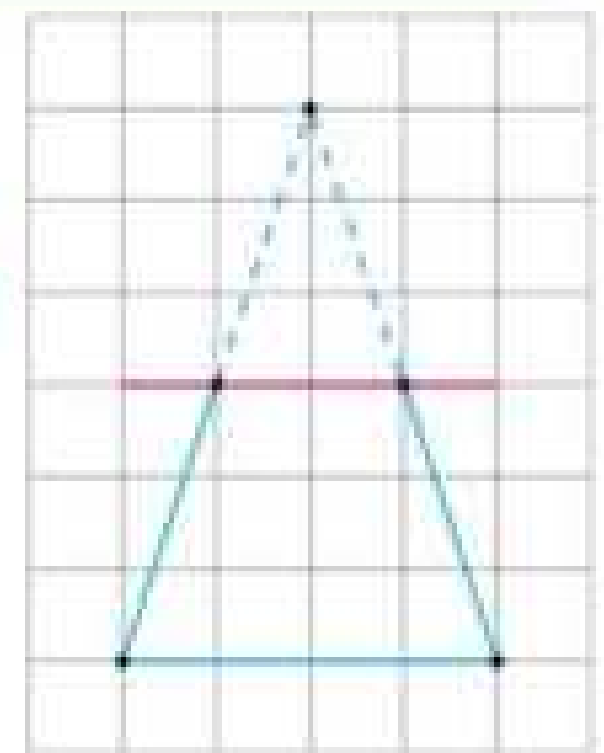


Яку форму мали фартухи?

Форму трапеції.

Запам'ятайте!

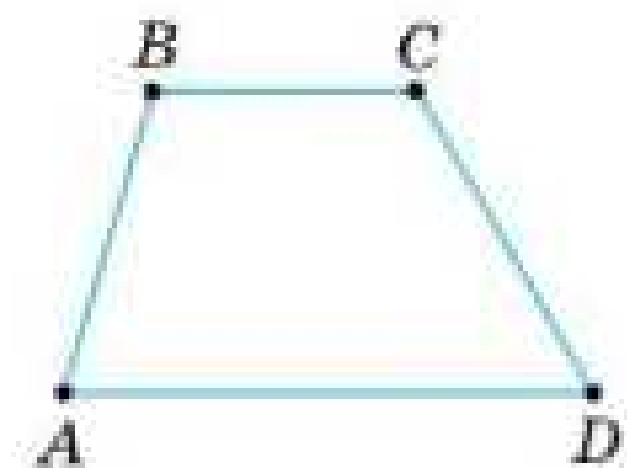
Трапецією називається чотирикутник, у якому дві сторони паралельні, а дві інші — непаралельні.



Мал. 154

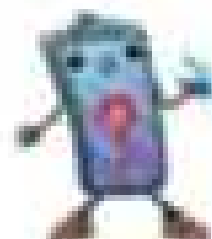
На малюнку 155 зображено трапецію $ABCD$. У ній дві сторони AD і BC паралельні, а дві інші — AB і CD — непаралельні.

Паралельні сторони трапеції називають її *основами*, а непаралельні — *бічними сторонами*. На малюнку 156 AD і BC — основи трапеції, AB і CD — бічні сторони.



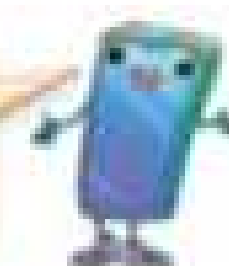
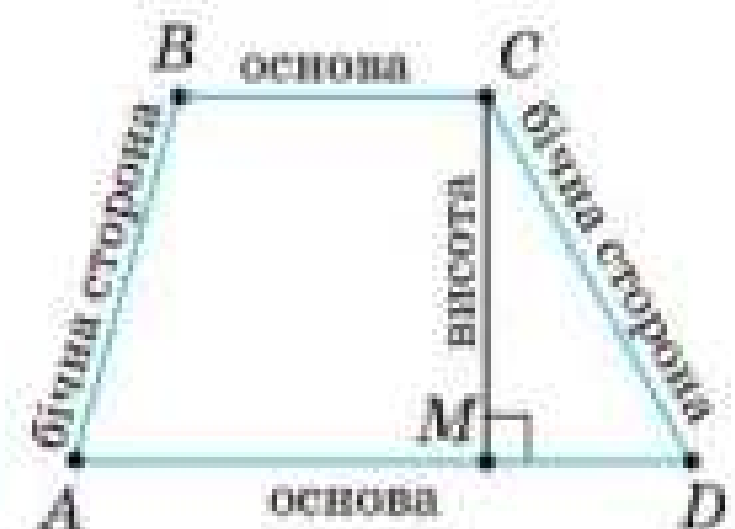
Мал. 155

Висотою трапеції називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї основи до іншої основи або до її продовження (мал. 156).



Чи можуть основи трапеції бути рівними?

Не можуть, бо тоді одержимо паралелограм.



Мал. 156

2. Види і властивості трапеції



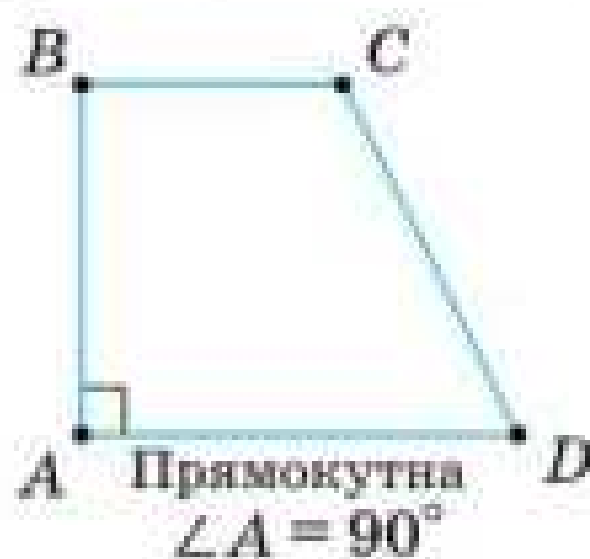
Чи існують різні види трапецій?

Так.

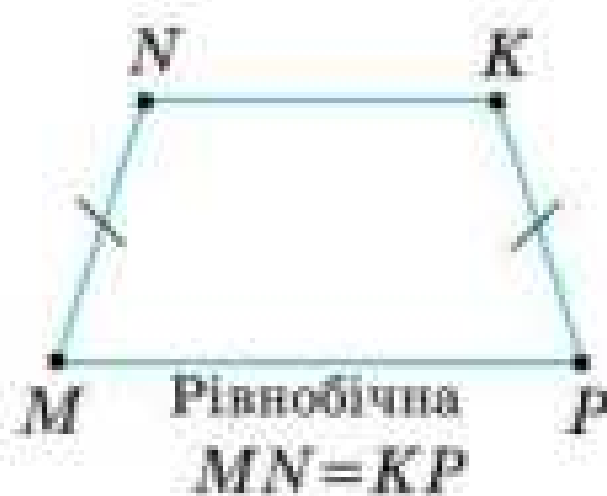


Трапецію, один із кутів якої прямий, називають *прямокутною*. Трапеція $ABCD$ (мал. 157) — прямокутна, оскільки $\angle A = 90^\circ$.

Трапецію, у якої бічні сторони рівні, називають *рівнобічною*. На малюнку 158 трапеція $MNKP$ — рівнобічна, оскільки $MN = KP$.



Мал. 157

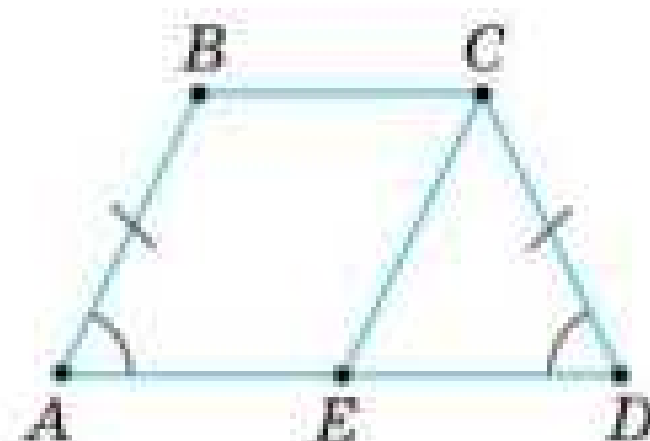


Мал. 158

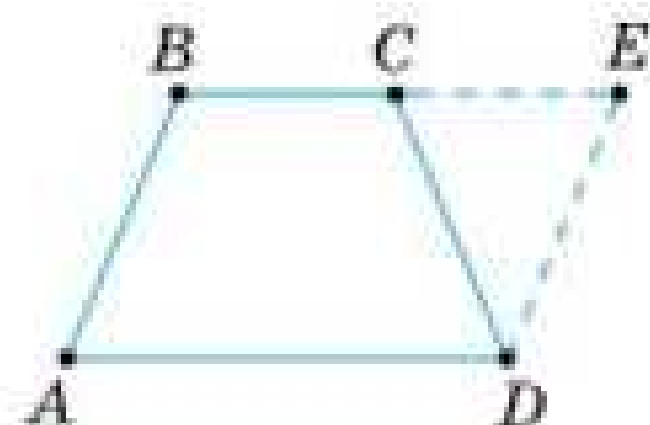
Задача (властивість рівнобічної трапеції) У рівнобічній трапеції кути при основі рівні. Доведіть.

Розв'язання Нехай у трапеції $ABCD$ (мал. 159) $AB = CD$. Доведемо, що кути при основі AD рівні.

Проведемо $CE \parallel AB$. Утворений чотирикутник $ABCE$ — паралелограм, бо його протилежні сторони попарно паралельні. За властивістю паралелограма, $AB = CE$, а за умовою, $AB = CD$. Отже, $CE = CD$ і $\triangle CDE$ — рівнобедрений. Тому $\angle CDE = \angle CED$. Але $\angle CED = \angle BAD$ як відповідні кути при паралельних прямих CE і AB та січній AE . Звідси $\angle CDE = \angle BAE$.



Мал. 159

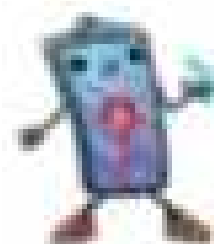


Мал. 160

 Якщо в умові задачі дано трапецію, то корисною буде така допоміжна побудова: проведіть через вершину трапеції пряму, паралельну бічній стороні (мал. 159 або мал. 160), і використайте властивості утворених паралелограма і трикутника.

3. Середня лінія трапеції та її властивості

qr.orioncentr.com.ua/19NDo



Чи можна в трапеції провести середню лінію, як у трикутнику?

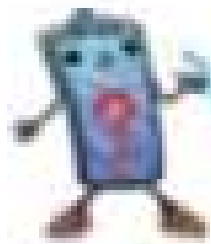
Так.



Запам'ятайте!

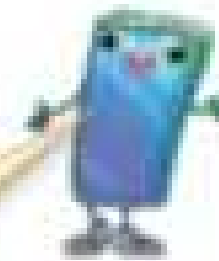
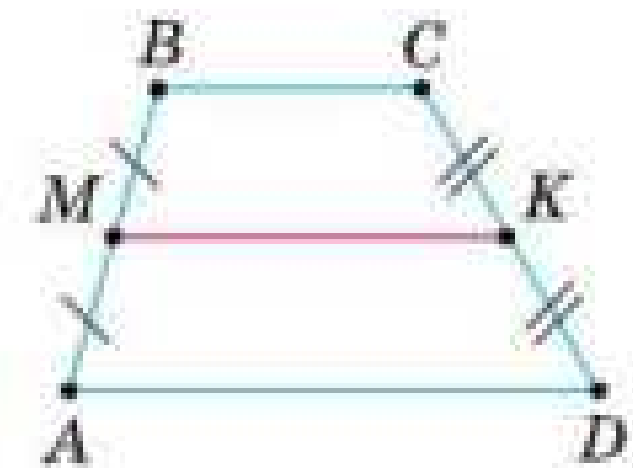
Середньою лінією трапеції називається відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

На малюнку 161 відрізок MK — середня лінія трапеції $ABCD$, бо точки M і K — середини бічних сторін AB і CD відповідно.



Які властивості має середня лінія трапеції?

Поміркуємо.



Мал. 161

Запам'ятайте!

Теорема (властивості середньої лінії трапеції)

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

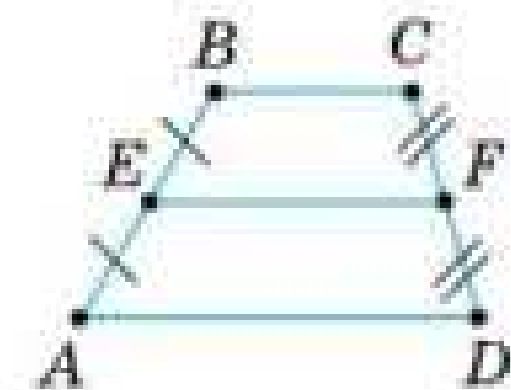
Дано: $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC (мал. 162), EF — середня лінія.

Довести: 1) $EF \parallel AD$, $EF \parallel BC$, 2) $EF = \frac{AD + BC}{2}$.

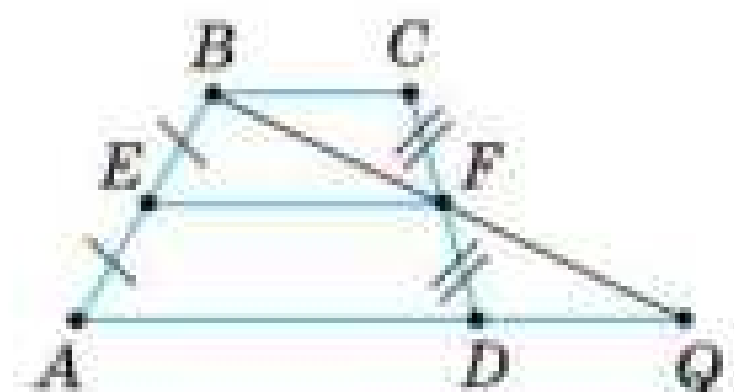
Доведення. Оскільки EF — середня лінія трапеції $ABCD$, то $AE = BE$, $DF = CF$. Через точки B і F проведемо пряму, яка перетне продовження основи AD в точці Q (мал. 163). Розглянемо $\triangle BCF$ і $\triangle QDF$. У них $CF = DF$ за умовою, $\angle BFC = \angle QFD$ як вертикальні, $\angle BCF = \angle QDF$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих BC і AQ та січній CD . Отже, $\triangle BCF = \triangle QDF$ за стороною та прилеглими до неї кутами. З рівності трикутників випливає: $BF = QF$, тобто середня лінія EF трапеції є середньою лінією трикутника ABQ .

1) За властивістю середньої лінії трикутника, $EF \parallel AQ$, тому $EF \parallel AD$. Оскільки $AD \parallel BC$, то $EF \parallel BC$.

2) $EF = \frac{1}{2}AQ = \frac{AD + DQ}{2}$, але $DQ = BC$ (з рівності трикутників BCF і QDF). Тоді одержимо: $EF = \frac{AD + BC}{2}$.



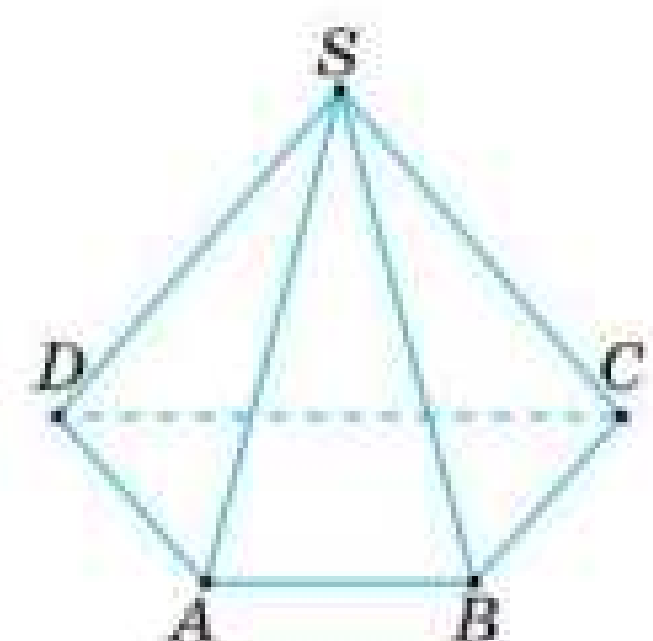
Мал. 162



Мал. 163

4. Трапеція як основа піраміди

В основі піраміди може лежати будь-який чотирикутник, зокрема трапеція. На мал. 164 основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$ ($AB \parallel CD$).



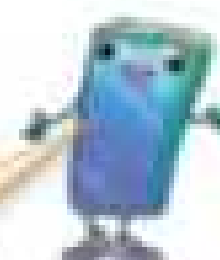
Мал. 164

5. Взаємозв'язок між чотирикутниками



Чи є зв'язок між різними видами чотирикутників?

Так.



Подивіться на малюнок 165, на якому зображено вивчені вами чотирикутники. Ви бачите, що серед чотирикутників можна виділити паралелограми (протилежні сторони попарно паралельні) і трапеції (тільки дві протилежні сторони паралельні). Серед трапецій, своєю чергою, — рівнобічні й прямокутні. Якщо в паралелограмі всі сторони рівні або всі кути прямі, то одержимо ромби або прямокутники. Нарешті, квадрат є окремим видом і ромба (усі сторони рівні), і прямокутника (усі кути прямі), і паралелограма (усі кути прямі й усі сторони рівні).



Мал. 165

Дізнайтеся більше

1. Розгляньте таблицю 19 класифікації трапецій за бічними сторонами та кутами.

Таблиця 19

За кутами	За бічними сторонами	
	Рівнобічні	Нерівнобічні
Прямокутні	—	
Непрямокутні		

За бічними сторонами трапеції поділяють на рівнобічні та нерівнобічні, а за кутами — на прямокутні та непрямокутні. Рівнобічні трапеції бувають одного виду — непрямокутні; нерівнобічні — як прямокутні, так і непрямокутні.

2. Слово «трапеція» походить від грецького слова *trapezion*, що означає — столик. Цей термін як назва виду чотирикутника почав застосовуватися у XVIII ст. Про те, що середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, було відомо ще стародавнім єгиптянам і вавилонським землемірам.

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
середня лінія трапеції	midline of a trapezoid	Mittellinie eines Trapezes	médiane du trapèze

qr.orioncentr.com.ua/KZpew

Пригадайте головне

1. Що таке трапеція?
2. Які сторони трапеції називають основами?
3. Які сторони трапеції називають бічними сторонами?
4. Яку трапецію називають рівнобічною?
5. Яку трапецію називають прямокутною?
6. Що таке середня лінія трапеції?
7. Сформулюйте та доведіть властивості середньої лінії трапеції.
8. Поясніть класифікацію чотирикутників за малюнком 165.

Усне тренування

Обчисліть:

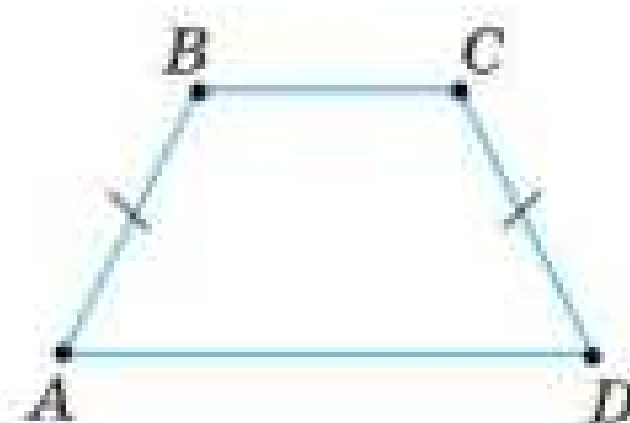
$$\begin{array}{llll} 1) (67 + 113) \cdot 2; & (152 + 38) \cdot 2; & (94 + 86) \cdot 2; & (83 + 97) \cdot 2. \\ 2) (27 + 73) : 2; & (92 + 24) : 2; & (62 + 48) : 2; & (46 + 55) : 2. \end{array}$$

Розв'яжіть задачі

- 405'.** Чи правильно, що трапецією є чотирикутник, у якому:
- 1) протилежні сторони попарно паралельні;
 - 2) дві сторони паралельні, а дві інші — непаралельні?
- 406'.** Чи правильно, що висота трапеції — це перпендикуляр, який проведено:
- 1) з будь-якої точки основи до бічної сторони;
 - 2) з будь-якої точки однієї основи до іншої основи або до її продовження?

407. Чи правильно, що в рівнобічній трапеції (мал. 166):

- 1) основи рівні;
- 2) усі сторони рівні;
- 3) бічні сторони рівні?

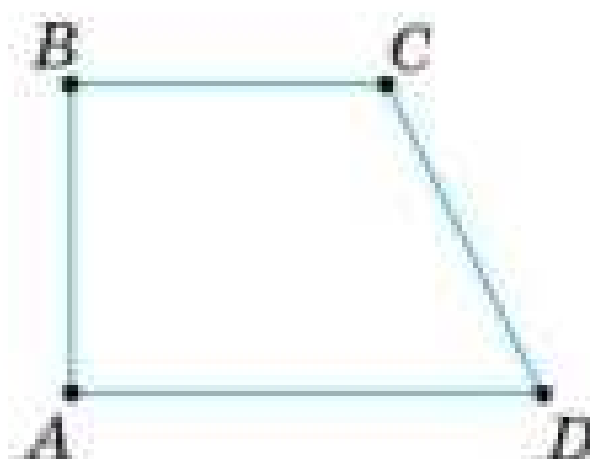


Мал. 166

408. Які з наведених тверджень правильні?

У прямокутній трапеції (мал. 167):

- 1) основи перпендикулярні;
- 2) один із кутів — прямий;
- 3) бічна сторона перпендикулярна до основи.



Мал. 167

409. Чи правильно, що середньою лінією трапеції є: 1) пряма; 2) промінь; 3) відрізок?

410. Чи правильно, що середня лінія трапеції:

- 1) сполучає її вершини;
- 2) сполучає середини її сусідніх сторін;
- 3) сполучає середини її бічних сторін;
- 4) паралельна бічним сторонам;
- 5) паралельна основам?

411. Які з наведених тверджень правильні?

Щоб знайти середню лінію трапеції, потрібно:

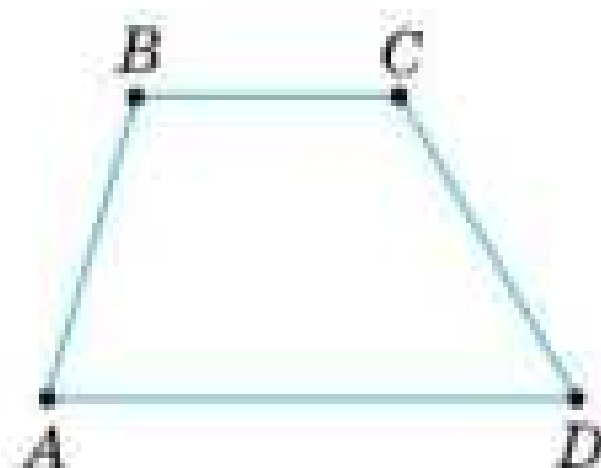
- 1) суму бічних сторін поділити на 2;
- 2) суму основ поділити на 2;
- 3) різницю основ поділити на 2.

412. На малюнку 168 зображено трапецію $ABCD$, у якій $AD \parallel BC$. Назвіть:

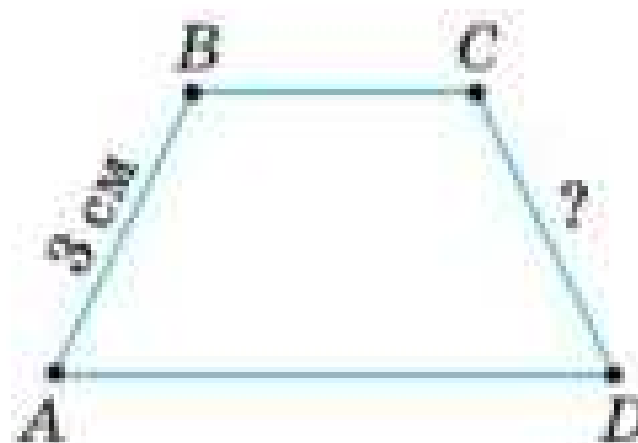
- 1) основи трапеції;
- 2) бічні сторони трапеції;
- 3) кути, прилеглі до основи;
- 4) кути, прилеглі до бічної сторони.

413. За малюнками 169, 170 знайдіть:

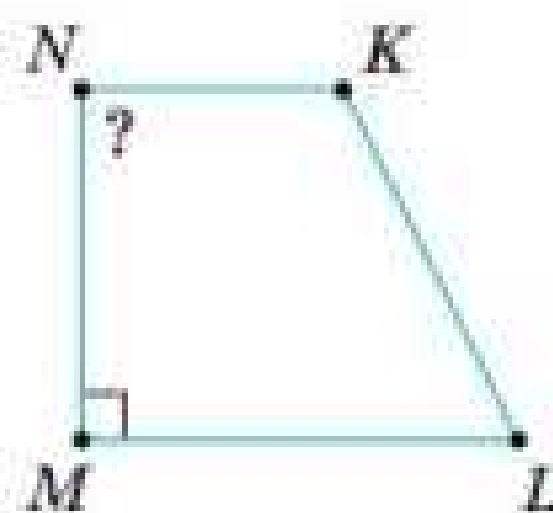
- 1) сторону CD рівнобічної трапеції $ABCD$ (мал. 169);
- 2) кут N трапеції $MNKL$ (мал. 170).



Мал. 168



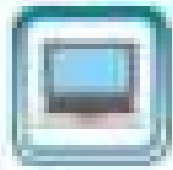
Мал. 169



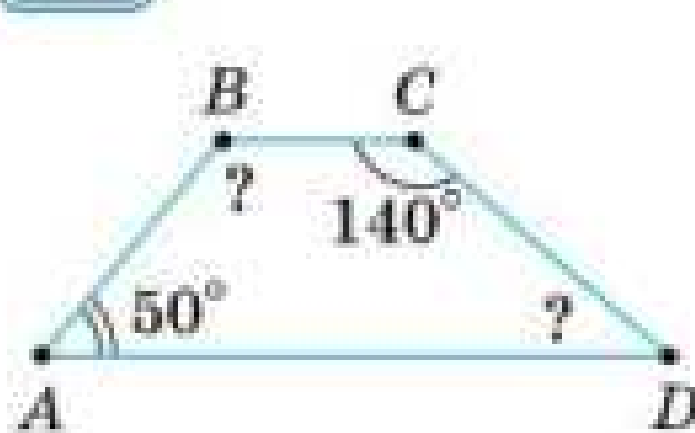
Мал. 170

414. Доведіть, що сума двох кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180° .

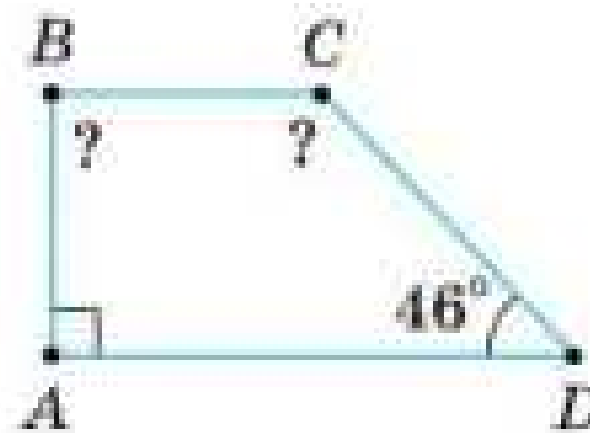
415'. За даними на малюнках 171–173 знайдіть невідомі кути трапеції $ABCD$.



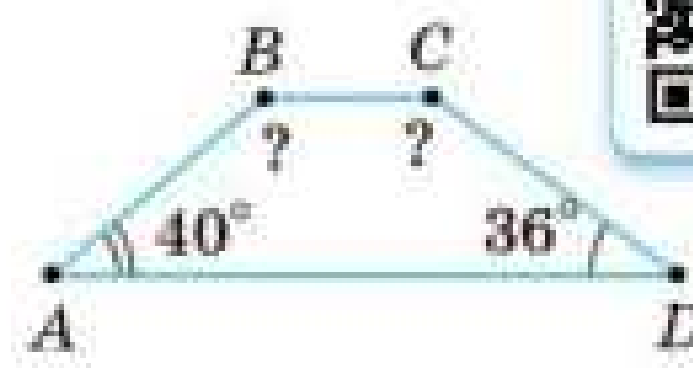
qr.orioncentr.com.ua/zlYZF



Мал. 171



Мал. 172



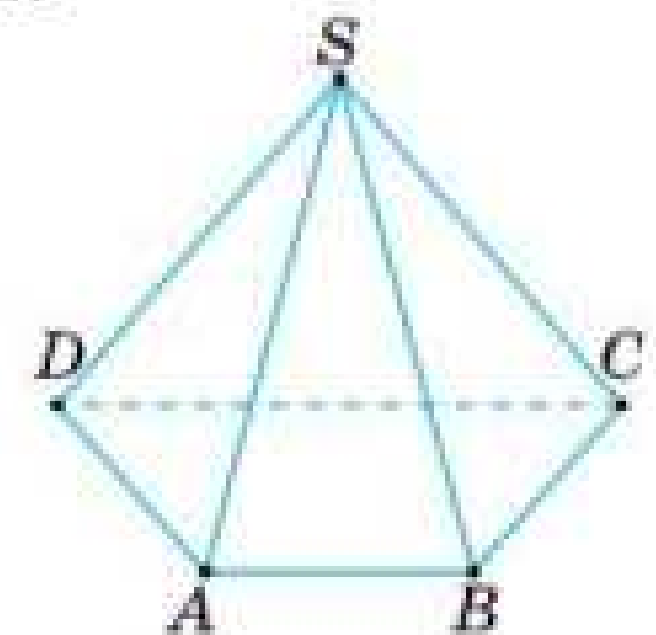
Мал. 173

416'. $ABCD$ — трапеція з основами AD і BC . Знайдіть:



- 1) $\angle A$ і $\angle C$, якщо $\angle B = 110^\circ$, $\angle D = 30^\circ$;
- 2) $\angle A$ і $\angle D$, якщо $\angle B = 125^\circ$, $\angle C = 145^\circ$.

417'. Основою піраміди (мал. 174) є трапеція $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Знайдіть $\angle D$ цієї трапеції, якщо:
1) $\angle A = 160^\circ$; 2) $\angle A = 135^\circ$; 3) $\angle A = 95^\circ$.



Мал. 174

418'. Трапеція $ABCD$ ($AB \parallel CD$) є основою піраміди (мал. 174). Знайдіть $\angle A$ і $\angle C$ трапеції, якщо $\angle B = 120^\circ$, $\angle D = 40^\circ$.

419'. AD і BC — основи трапеції $ABCD$. За даними таблиці 20 знайдіть невідомі кути трапеції.

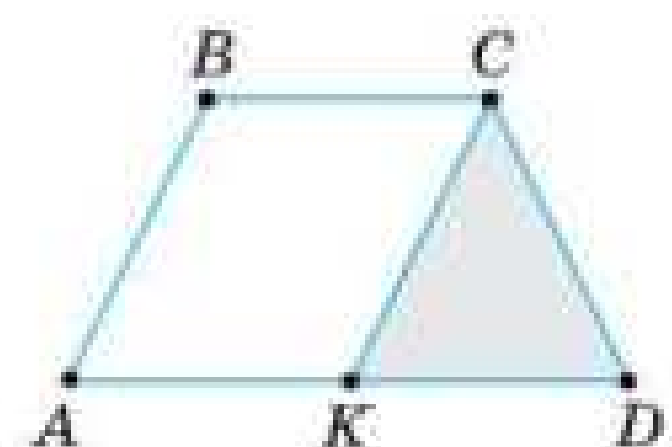
Таблиця 20

$\angle A$	70°	65°		
$\angle B$			120°	135°
$\angle C$	154°			142°
$\angle D$		36°	28°	

420'. Накресліть гострокутний трикутник KLM . Проведіть пряму, паралельну стороні KM трикутника. Позначте точки перетину прямої та сторін KL і LM трикутника буквами C і D відповідно. Якого виду чотирикутник $KCDM$?

421'. Накресліть гострий кут із вершиною O . Проведіть дві паралельні прямі, що перетинають сторони кута. Позначте точки перетину прямих і сторін кута буквами A , B , C і D . Якого виду чотирикутник $ABCD$?

422'. На малюнку 175 $ABCD$ — рівнобічна трапеція з основами AD і BC , $CK \parallel AB$. Доведіть, що:
1) чотирикутник $ABCK$ — паралелограм;
2) трикутник KCD — рівнобедрений.



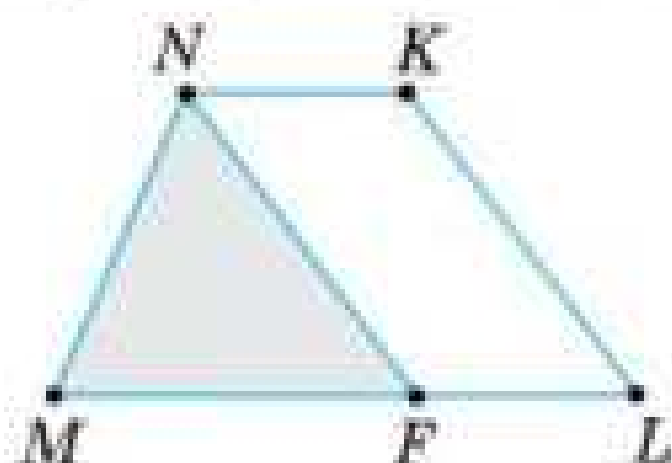
Мал. 175

423*. $MNKL$ — трапеція з основами ML і NK , $NF \parallel KL$ (мал. 176).

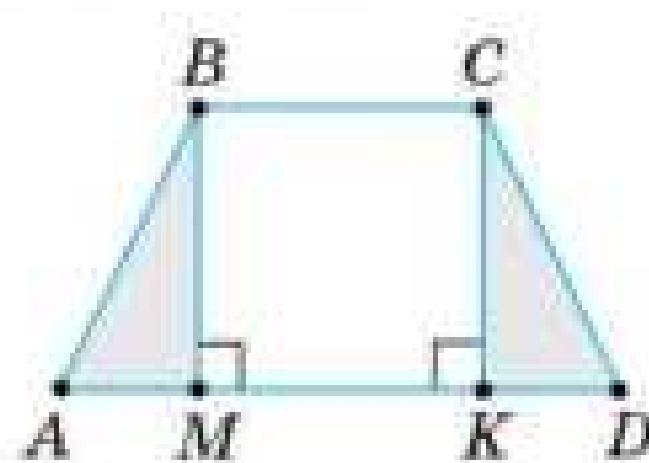


Знайдіть:

- 1) основу ML , якщо $MF = 5$ см, $NK = 2$ см;
- 2) основу NK , якщо $ML = 10$ см, $MF = 7$ см.



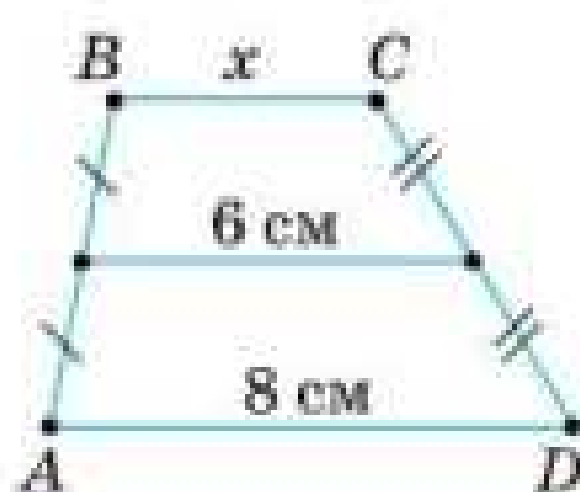
Мал. 176



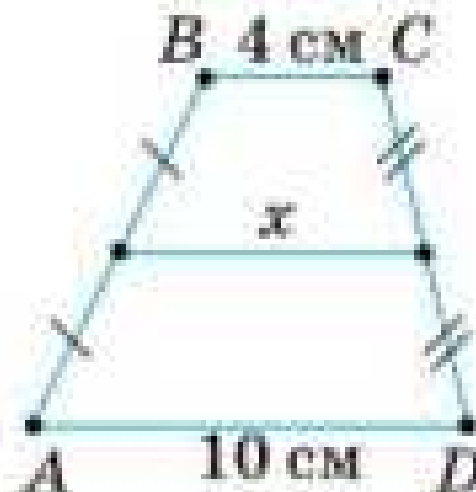
Мал. 177

424*. BM і CK — висоти рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AD і BC (мал. 177). Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle DCK$.

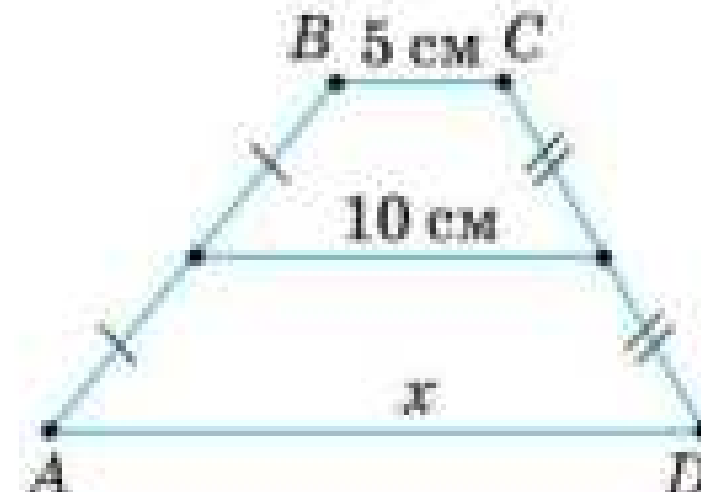
425*. Знайдіть x за даними на малюнках 178–180.



Мал. 178



Мал. 179

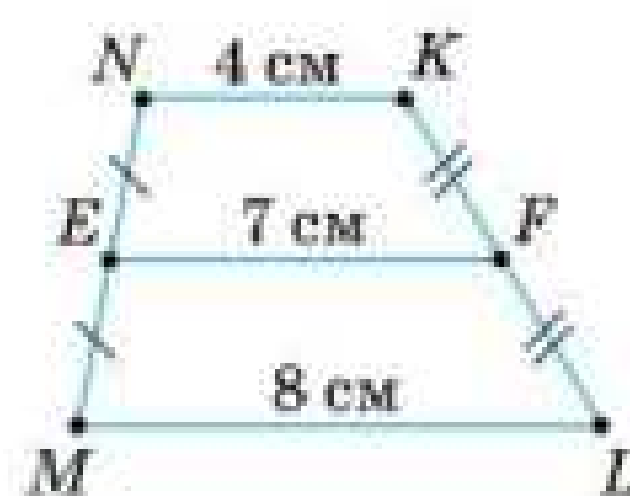


Мал. 180

426*. Чи правильно вказано довжину середньої лінії трапеції на малюнку 181? Відповідь поясніть.

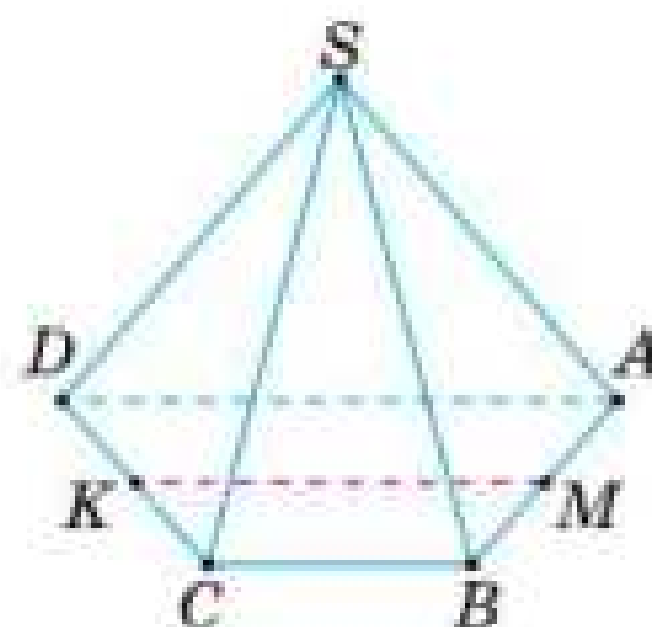
427*. Основою піраміди $SABCD$ є трапеція із середньою лінією MK (мал. 182). Знайдіть сторону AD основи піраміди, якщо:

- 1) $MK = 3$ см, $BC = 2$ см;
- 2) $MK = 11$ см, $BC = 7$ см;
- 3) $MK = 14,5$ см, $BC = 12$ см.



Мал. 181

428*. Трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$) — основа піраміди (мал. 182). Точки M і K — середини сторін AB і CD основи піраміди. Знайдіть MK , якщо $AD = 10$ см, $BC = 4$ см.



Мал. 182

- 429'. AD і BC — основи трапеції, MN — її середня лінія. Заповніть таблицю 21.



qr.orioncentr.com.ua/kNbqE



Таблиця 21

AD	10 см	7 см		11 см	9 см
BC	6 см		5 см		15 см
MN		8 см	9 см	10 см	

- 430'. За даними на малюнку 183 знайдіть основи й середню лінію трапеції.

- 431'. Яка довжина основ і середньої лінії трапеції $MNKL$ (мал. 184)?



- 432'. Знайдіть периметр трапеції з бічними сторонами c і d та середньою лінією m , якщо:
- 1) $c = 8$ см, $d = 12$ см, $m = 10$ см;
 - 2) $c = d = m = 15$ см.

- 433'. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює 17 см, а середня лінія — 14 см. Знайдіть периметр трапеції.



434. Два кути трапеції дорівнюють: 1) 46° і 144° ; 2) 35° і 155° . Знайдіть два інші її кути.

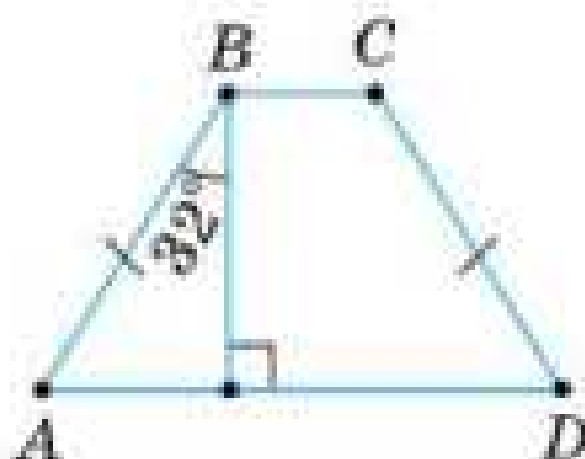
435. Знайдіть кути трапеції, якщо два інші її кути дорівнюють 52° і 124° .



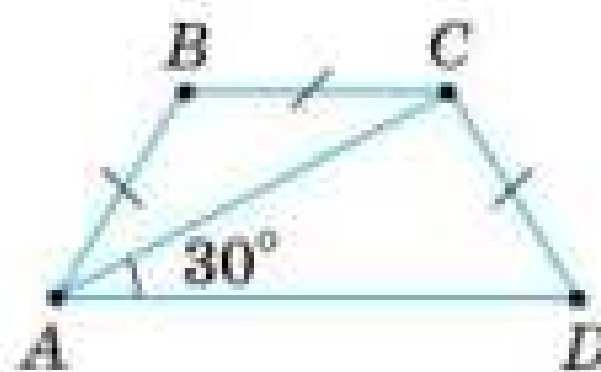
436. Гострий кут прямокутної трапеції дорівнює 45° . Знайдіть висоту трапеції, якщо її основи дорівнюють: 1) 6 см і 8 см; 2) 62 мм і 10 см.

437. Якщо кути при основі трапеції рівні, то трапеція — рівнобічна. Доведіть.

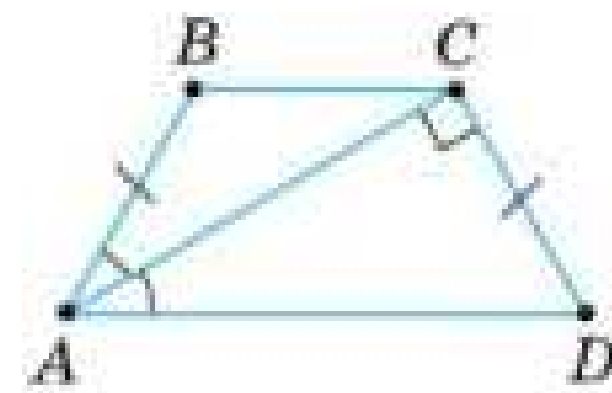
438. За даними на малюнках 185–187 знайдіть кути трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$).



Мал. 185



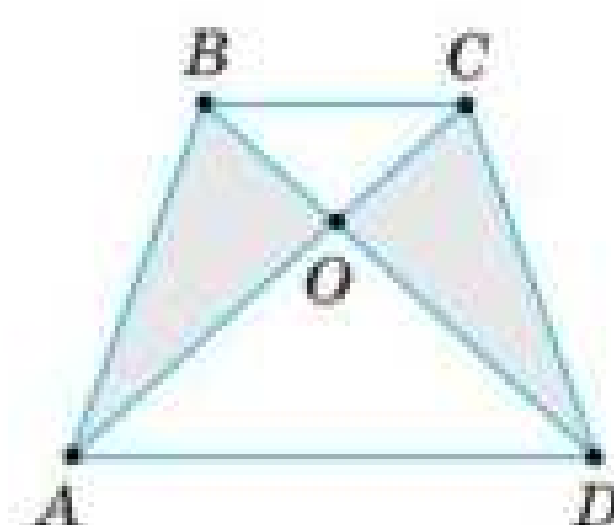
Мал. 186



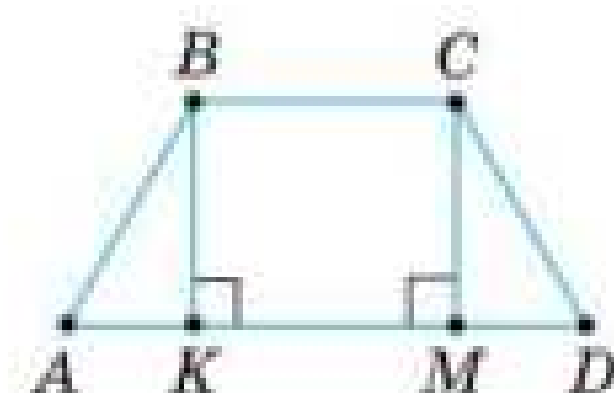
Мал. 187

439. Доведіть, що в рівнобічній трапеції сума протилежних кутів дорівнює 180° .

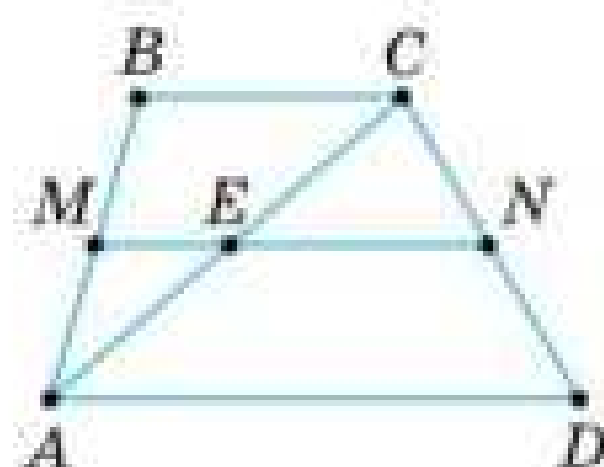
- 440.** Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо різниця її протилежних кутів дорівнює 40° .
- 441.** Протилежні кути рівнобічної трапеції відносяться як $1 : 4$. Знайдіть кути трапеції.
- 442.** Доведіть, що діагоналі рівнобічної трапеції — рівні.
- 443.** $ABCD$ — рівнобічна трапеція, $AD \parallel BC$, AC і BD — діагоналі, O — точка їх перетину (мал. 188). Доведіть:
1) $\triangle BOC$ і $\triangle AOD$ — рівнобедрені; 2) $\triangle AOB = \triangle DOC$.
- 444.** У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 10 см, бічна сторона — 4 см, а кут між ними — 60° . Знайдіть меншу основу трапеції.
- 445.** Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює 60° , а основи — 15 см і 49 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.
- 446.** $ABCD$ — рівнобічна трапеція, $AD \parallel BC$, BK і CM — висоти (мал. 189). Доведіть:
1) $AK = MD = (AD - BC) : 2$;
2) $KD = AM = (AD + BC) : 2$.
- 447.** Знайдіть основи рівнобічної трапеції, якщо її висота, проведена з вершини тупого кута, ділить основу на відрізки:
1) 4 см і 8 см; 2) 2 см і 7 см.
- 448.** Доведіть, що коли бічна сторона трапеції дорівнює меншій основі, то діагональ, яка сполучає їхні кінці, є бісектрисою кута, прилеглого до більшої основи.
- 449.** У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайдіть периметр трапеції, якщо її основи дорівнюють:
1) 6 см і 8 см; 2) 62 мм і 10 см.
- 450.** Доведіть теорему про властивості середньої лінії трапеції, скориставшись малюнками 190–192 (MN — середня лінія).



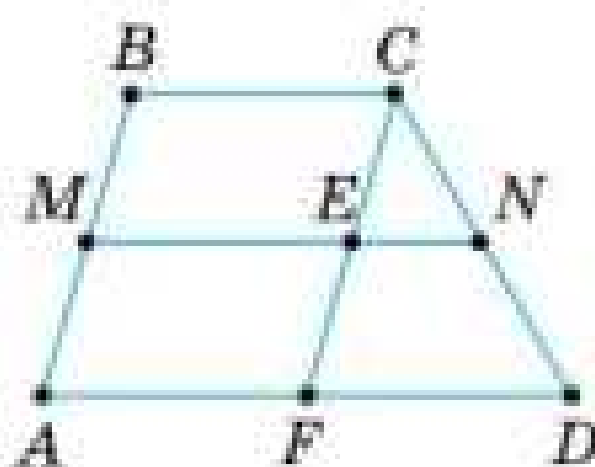
Мал. 188



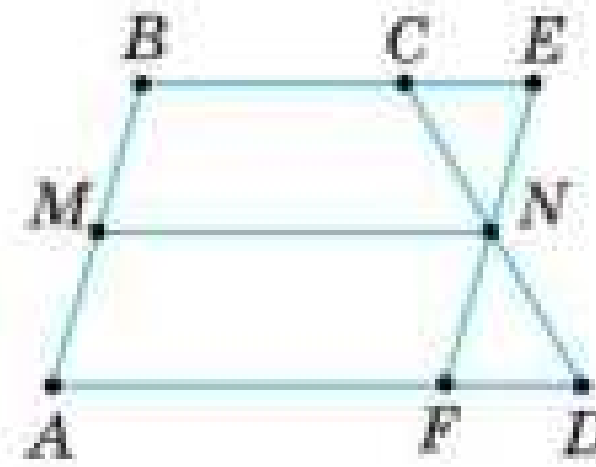
Мал. 189



Мал. 190



Мал. 191



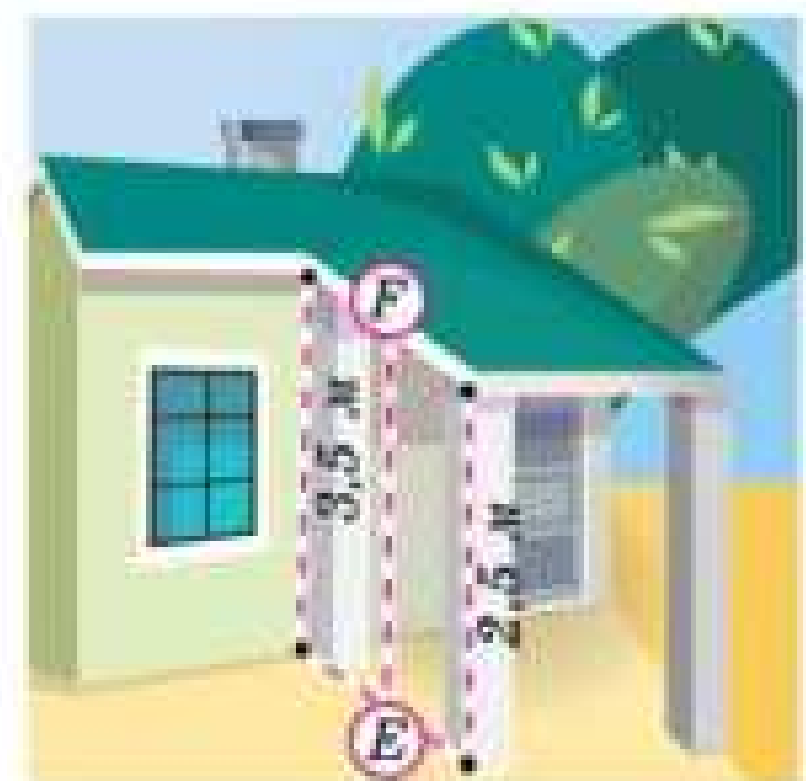
Мал. 192

- 451.** Основи трапеції відносяться як $7 : 3$, а різниця їхніх довжин дорівнює 4,8 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

- 452.** Середня лінія трапеції дорівнює 10 см. Одна з діагоналей ділить її на два відрізки, різниця довжин яких дорівнює 2 см. Знайдіть основи трапеції.
- 453.** Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам і дорівнює їх піврізниці.
- 454.** Менша основа трапеції дорівнює a , відстань між серединами її діагоналей — c . Знайдіть більшу основу трапеції, якщо:
E 1) $a = 6$ см, $c = 4$ см; 2) $a = 50$ мм, $c = 2$ см.
- 455*.** Якщо бісектриси кутів при одній основі трапеції перетинаються на іншій її основі, то інша основа дорівнює сумі бічних сторін трапеції. Доведіть.
- 456*.** Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 24 см, а середня лінія ділиться діагоналлю на відрізки 8 см і 20 см.
- 457*.** Якщо діагоналі трапеції рівні, то трапеція — рівнобічна. Доведіть.
- 458*.** Якщо в трапеції сума протилежних кутів дорівнює 180° , то трапеція — рівнобічна. Доведіть.
- 459*.** Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то середня лінія трапеції дорівнює її висоті.
- 460*.** Якщо середня лінія рівнобічної трапеції дорівнює її висоті, то діагоналі трапеції перпендикулярні. Доведіть.
- 461*.** Пряма ділить трапецію на ромб і рівносторонній трикутник. Знайдіть: 1) кут між діагоналями трапеції; 2) основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 18 см.
- 462*.** Прямокутна трапеція ділиться діагоналлю на два трикутники — рівносторонній зі стороною a та прямокутний. Знайдіть середню лінію трапеції.

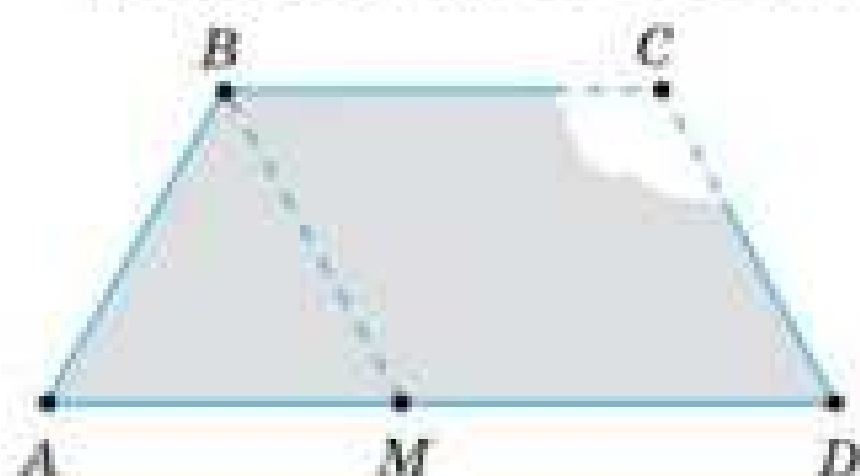
Проявіть компетентність

- 463.** З однакових плиток, що мають форму рівнобічної трапеції, потрібно виготовити паркет. Як це зробити?
- 464.** Над входом у дачний будинок є навіс. Згодом виникла потреба поставити підпори до середини краю навісу (точка F на мал. 193). Як, не вимірюючи, знайти довжину підпори (відрізка EF), якщо відповідні краї навісу віддалені від поверхні землі на 2,5 м і 3,5 м?

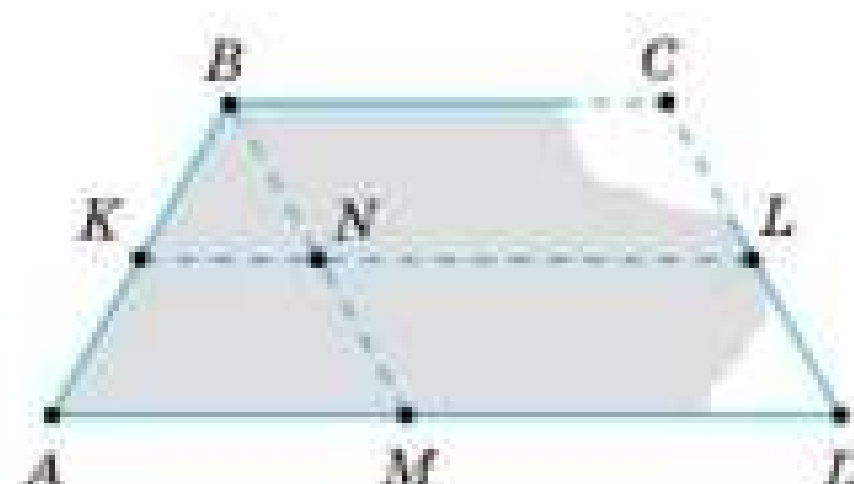


Мал. 193

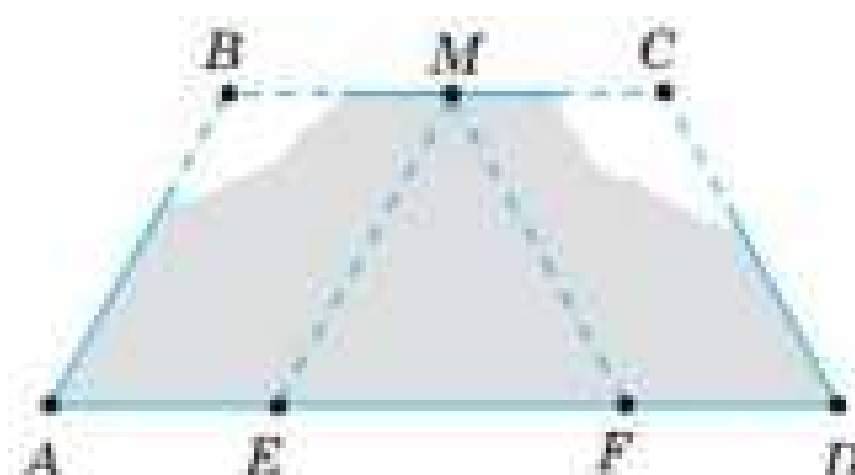
- 465.** Плитка для даху має форму трапеції (трапеція не рівнобічна). Знайдіть розміри її сторін, якщо:
- 1) обламано один ріжок плитки (мал. 194);
 - 2) обламано два ріжки плитки (мал. 195, 196).
- Поясніть, як це зробити.



Мал. 194

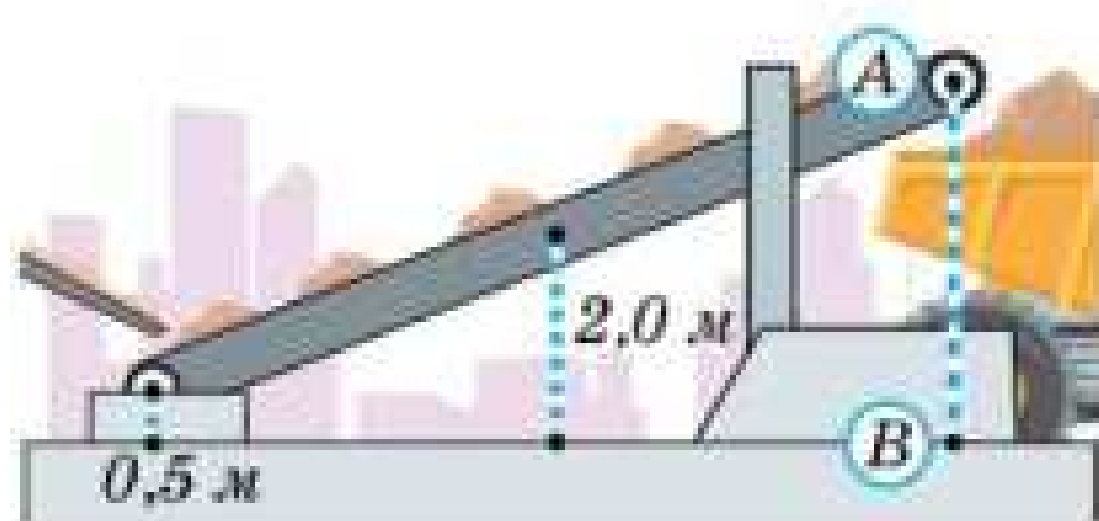


Мал. 195



Мал. 196

- 466.** Знайдіть відстань від кінця транспортера до поверхні землі (яку безпосередньо виміряти не можна), якщо інший його кінець і середина віддалені від поверхні землі відповідно на 0,5 м і 2 м (мал. 197).
- 467.** Розгляньте малюнок 198. Будівельникам потрібно виміряти відстань між серединами бічних сторін покрівлі (точки A і B). Їм запропонували такий спосіб: із верхньої вершини покрівлі умовно провісити пряму, перпендикулярну до нижньої основи покрівлі, орієнтуючись, наприклад, на відповідні краї покриття; позначити точку C перетину цих прямих і виміряти відстань CD. Тоді шукана відстань AB дорівнюватиме CD. Чи є правильним цей спосіб? Чому?



Мал. 197



Мал. 198

§ 8. ЦЕНТРАЛЬНІ ТА ВПИСАНІ КУТИ

1. Що таке центральний кут

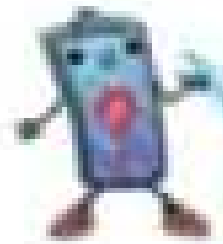
Ситуація. Марина вирішила відрізати шматочок торта. Для цього вона зробила два розрізи торта за променями, що виходять із його центра (мал. 199).



Мал. 199

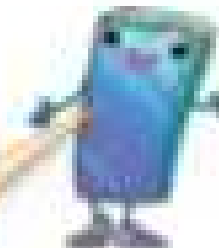
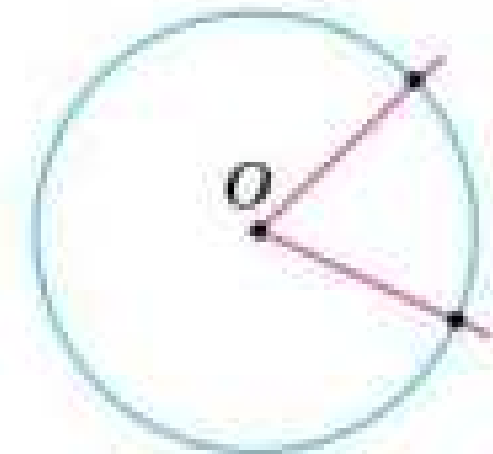


qr.orioncentr.com.ua/83s8f



Яку фігуру утворили лінії розрізу торта на його верхньому шарі?

Центральний кут.

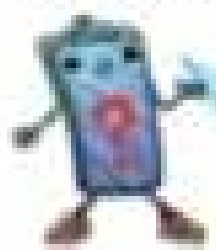


Мал. 200

Запам'ятайте!

Кут із вершиною в центрі кола називається **центральним кутом**.

На малюнку 200 ви бачите коло з центром O та два центральні кути з вершиною O : один менший від 180° , а інший — більший за 180° .

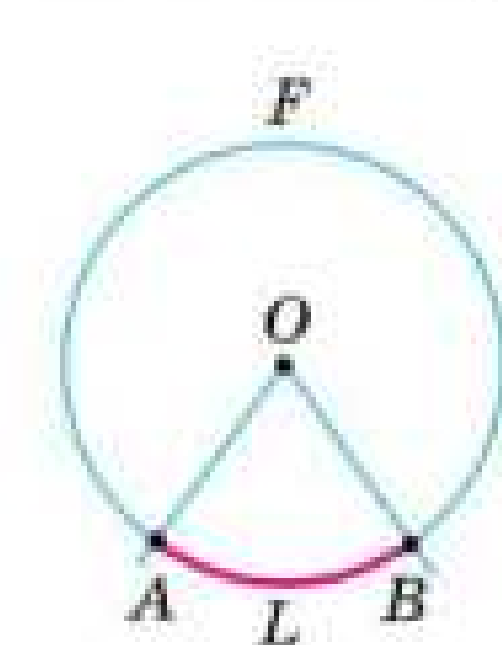


На які фігури центральний кут розбиває коло?

На *дуги кола*.

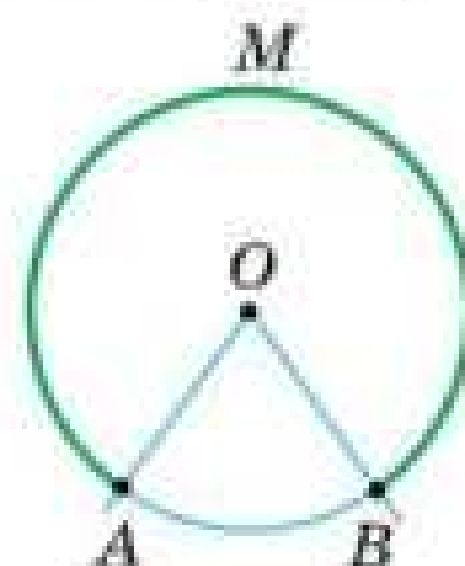


Нехай сторони центрального кута перетинають коло із центром O в точках A і B . Центральному куту AOB відповідають дві дуги з кінцями A і B — дуга, менша від півкола (мал. 201), і дуга, більша за півколо (мал. 202). Якщо кут AOB — розгорнутий, то йому відповідають також дві дуги — два півкола (мал. 203). Щоб розрізнити ці дуги, на кожній із них позначають проміжну точку, наприклад L і F (мал. 201).



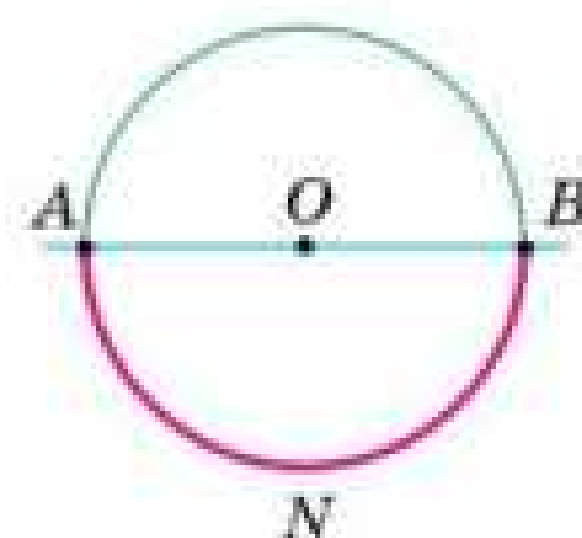
$$\sphericalangle ALB = \sphericalangle AOB$$

Мал. 201



$$\sphericalangle AMB = 360^\circ - \sphericalangle AOB$$

Мал. 202



$$\sphericalangle ANB = 180^\circ$$

Мал. 203



Записують: $\cup ALB$ і $\cup AFB$ (мал. 201). Дугу можна позначити й без проміжної точки, наприклад $\cup AB$, якщо зрозуміло, про яку з двох дуг ідеться.



Чи можна виміряти дугу кола?

Так.



Дугу кола вимірюють у градусах. Її градусна міра дорівнює градусній мірі відповідного центрального кута.

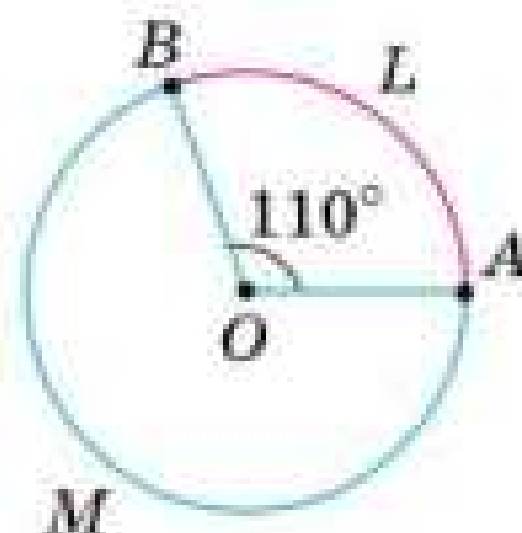


Градусна міра всього кола дорівнює 360° .

На малюнку 204 градусна міра дуги ALB дорівнює 110° , а градусна міра дуги AMB — 250° .



Коротко говоримо: «Дуга ALB дорівнює 110° » — і записуємо: $\cup ALB = 110^\circ$.



Мал. 204



Чи залежить градусна міра дуги кола від довжини його радіуса?

Не залежить.



Справді, від довжини радіуса кола не залежить градусна міра відповідного центрального кута, а значить, не залежить і градусна міра дуги кола.

2. Що таке вписаний кут

Ситуація. Денис вирішив по-іншому відрізати шматочок торта, ніж Марина. Для цього він теж зробив два розрізи торта, але за променями, що виходять з точки на його краї.

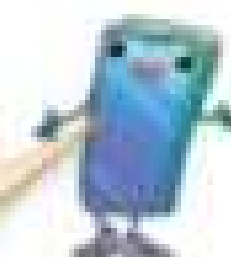


qr.orioncentr.com.ua/ShVQQ



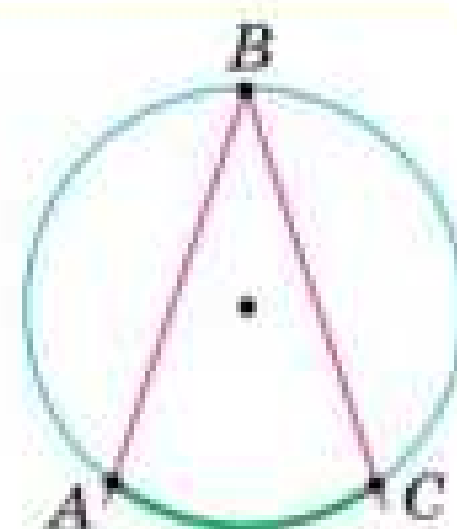
Яку фігуру утворили лінії розрізу торта на його верхньому шарі?

Вписаний кут (мал. 205).



Запам'ятайте!

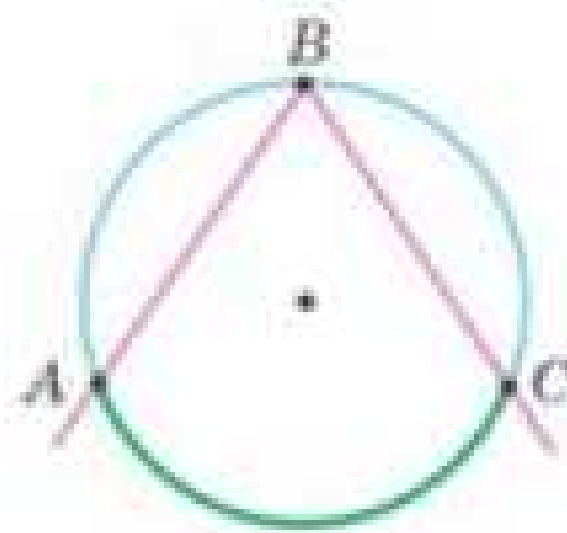
Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називається *вписаним кутом*.



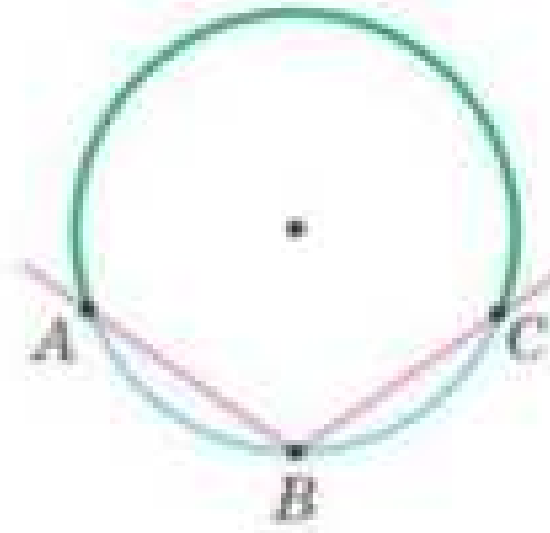
Мал. 205

На малюнках 206, а і 206, б $\angle ABC$ — вписаний, оскільки його вершина B лежить на колі, а сторони перетинають коло в точках A і C . Якщо

дуга AC лежить у внутрішній області вписаного кута ABC , то кажуть, що даний вписаний кут спирається на дугу AC .



Мал. 206, а



Мал. 206, б

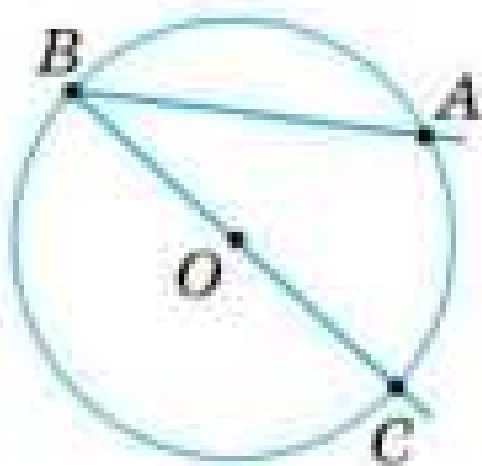
Запам'ятайте!

Теорема (про вписаний кут)

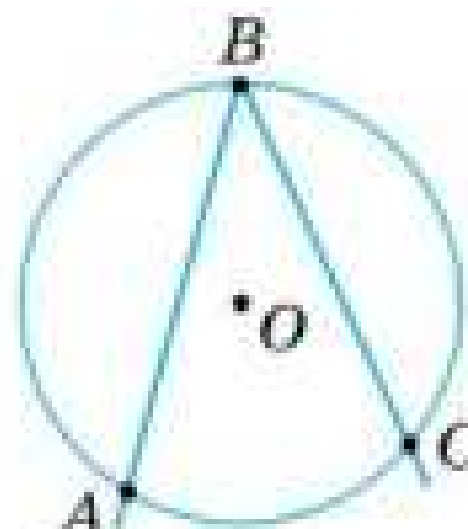
Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

Дано: $\angle ABC$ — вписаний у коло із центром O (мал. 207–209).

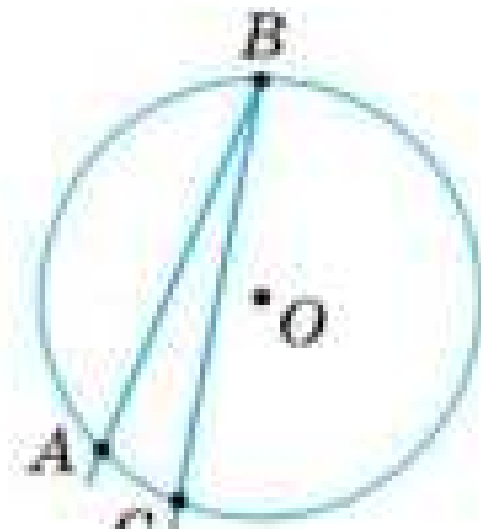
Довести: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.



Мал. 207



Мал. 208



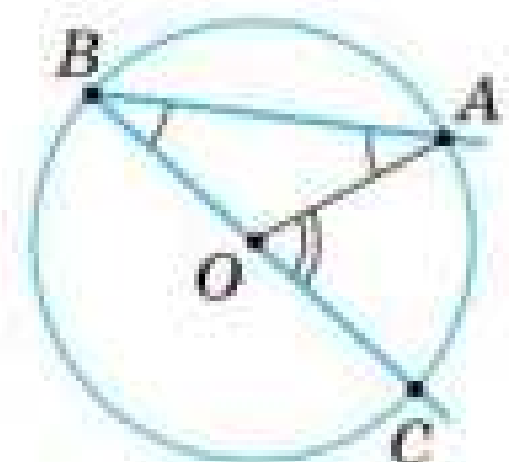
Мал. 209

Доведення. Розглянемо три випадки розміщення центра кола відносно сторін даного вписаного кута.

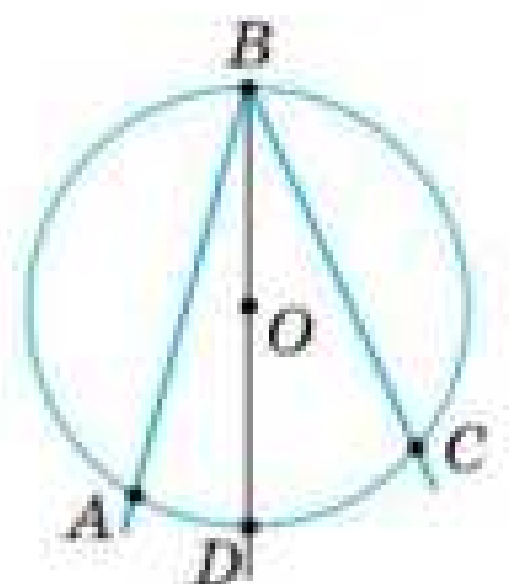
1. Центр кола лежить на стороні вписаного кута (мал. 207). Проведемо відрізок OA (мал. 210). Тоді центральний кут AOC є зовнішнім кутом трикутника AOB . За властивістю зовнішнього кута трикутника, $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$. Але $\angle OBA = \angle OAB$, оскільки $\triangle AOB$ — рівнобедрений ($OB = OA = R$). Тому $\angle AOC = 2\angle ABC$, або $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$. Але $\angle AOC$ вимірюється дугою AC . Отже, вписаний кут ABC вимірюється половиною дуги AC .

2. Центр кола лежить у внутрішній області вписаного кута (мал. 208). Провівши промінь BO (мал. 211), подамо даний кут у вигляді суми двох кутів:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC.$$



Мал. 210



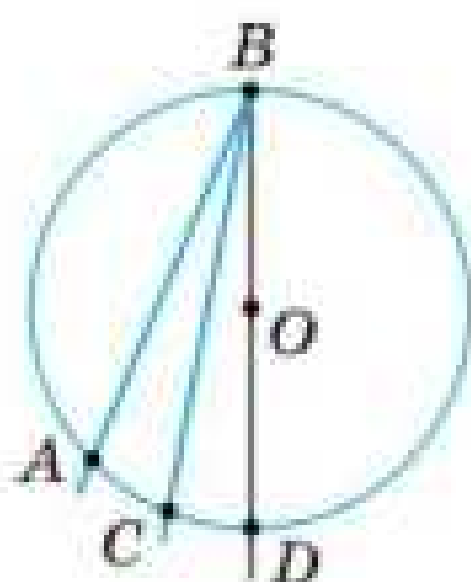
Мал. 211

За доведеним у першому випадку, $\angle ABD$ вимірюється половиною дуги AD , а $\angle DBC$ — половиною дуги DC . Тому $\angle ABC$ вимірюється сумою півдуг AD і DC , тобто половиною дуги AC .

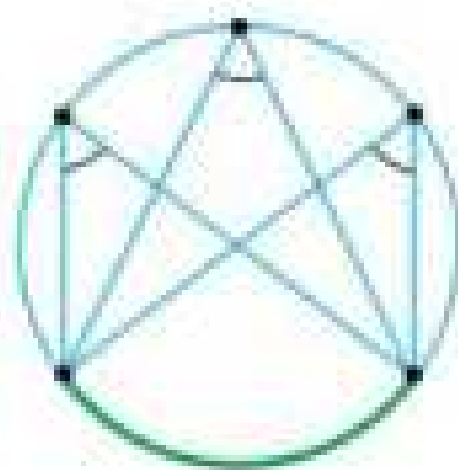
3. Центр кола лежить у зовнішній області вписаного кута (мал. 209). Провівши промінь BO (мал. 212), одержимо:

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} \cup AD - \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2} \cup AC.$$

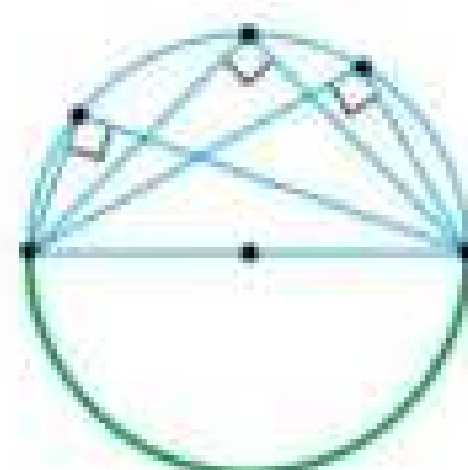
Наслідок 1. Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, — рівні (мал. 213).



Мал. 212



Мал. 213

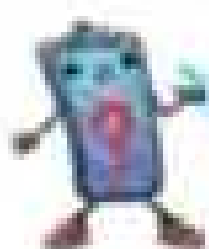


Мал. 214

Справді, кожний із них вимірюється половиною однієї й тієї самої дуги.

Наслідок 2. Вписаний кут, що спирається на діаметр, — прямий (мал. 214).

Справді, такий кут вимірюється половиною півкола, тобто його градусна міра дорівнює $180^\circ : 2 = 90^\circ$.



Чи рівні вписані кути, що спираються на рівні дуги (мал. 215)?

Так.



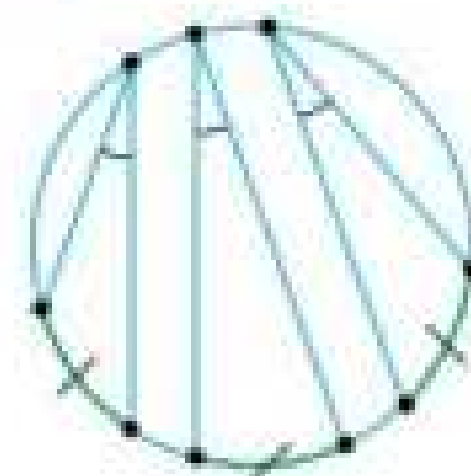
Справді, кожний із цих кутів вимірюється половиною дуг, градусні міри яких рівні.

Задача Хорди кола AB і BC утворюють кут 30° . Знайдіть хорду AC , якщо діаметр кола дорівнює 10 см.

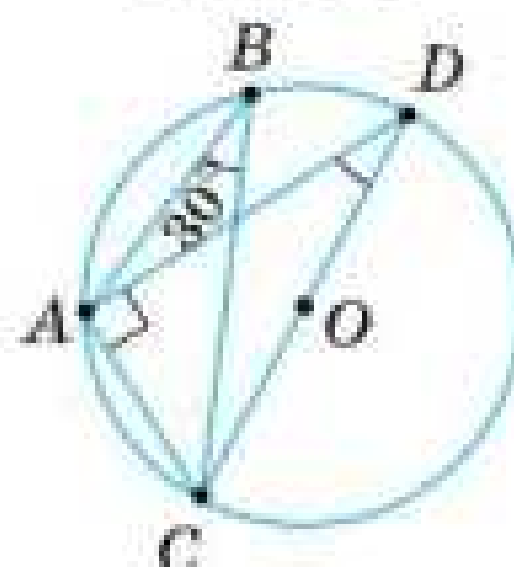
Розв'язання Проведемо діаметр CD і сполучимо точки A і D (мал. 216). $\angle ABC = \angle ADC$ як вписані кути, що спираються на дугу AC (наслідок 1).

Отже, $\angle ADC = \angle ABC = 30^\circ$. $\angle CAD = 90^\circ$, бо спирається на діаметр кола (наслідок 2). Тоді в прямокутному трикутнику ADC катет AC лежить проти кута 30° і дорівнює половині гіпотенузи CD .

$$\text{Отже, } AC = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ (см).}$$



Мал. 215



Мал. 216



Щоб довести рівність двох кутів, покажіть, що вони є вписаними в одне коло і спираються на одну й ту саму дугу або на рівні дуги цього кола.

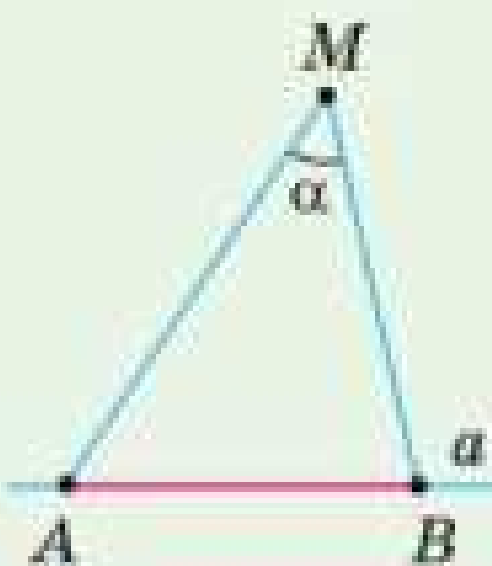
Дізнайтеся більше

1. Розглянемо геометричне місце точок, з яких даний відрізок видно під даним кутом. Нехай AB — деякий відрізок прямої a , M — довільна точка, яка не лежить на прямій a , $\angle AMB = \alpha$ (мал. 217). Тоді кажуть: з точки M відрізок AB видно під кутом α .

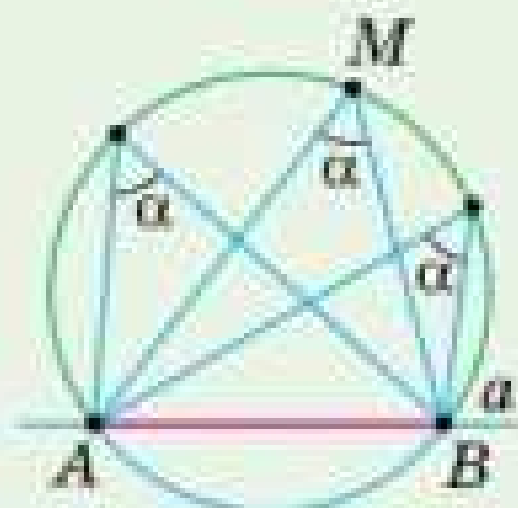
Якщо описати коло навколо трикутника AMB (мал. 218), то з будь-якої точки дуги AMB (крім точок A і B) відрізок AB видно під кутом α (наслідок 1 з теореми про вписаний кут). Оскільки точку можна взяти і з іншого боку від прямої a , то існує ще одна дуга, наприклад ANB (мал. 219), з кожної точки якої (крім точок A і B) відрізок AB видно під кутом α . Тому геометричним місцем точок, з яких відрізок AB видно під кутом α , є фігура, що складається з двох дуг AMB і ANB без точок A і B .

Щоб побудувати одну з двох дуг цього геометричного місця точок для гострого кута α , треба:

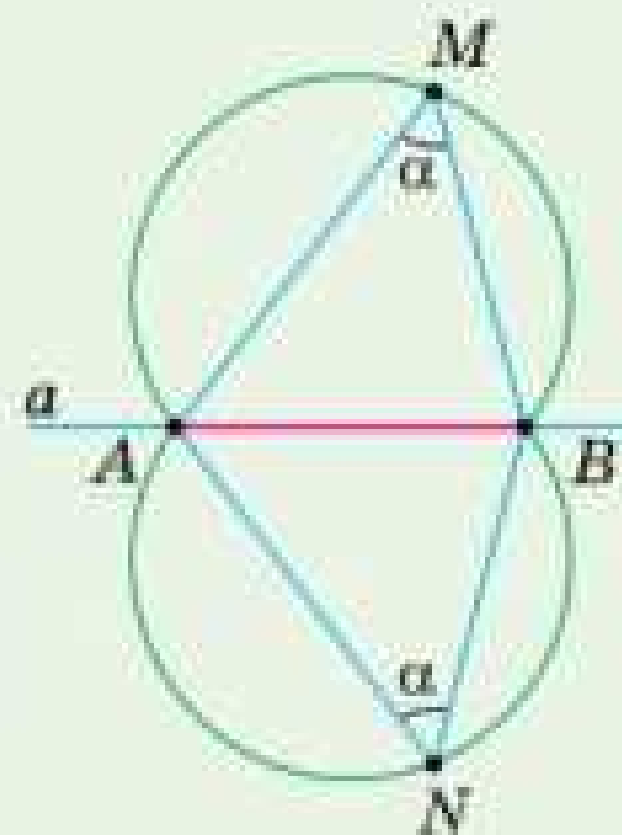
- 1) провести серединний перпендикуляр до відрізка AB (мал. 220);
- 2) із точки B провести промінь під кутом $90^\circ - \alpha$ до відрізка AB . O — точка перетину променя із серединним перпендикуляром;
- 3) описати коло радіусом OB . Дуга AMB — шукане геометричне місце точок.



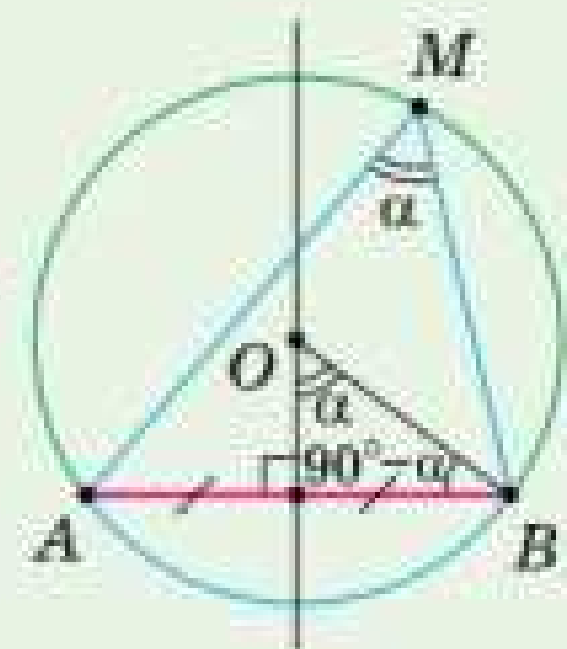
Мал. 217



Мал. 218

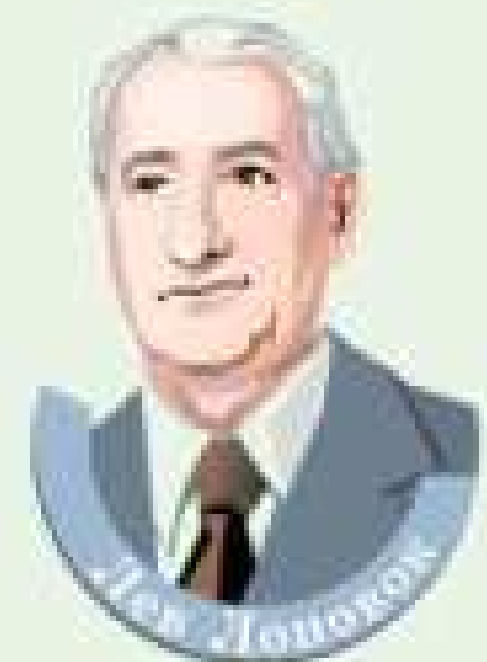


Мал. 219



Мал. 220

2. Значний внесок у шкільну геометрію й методику її вивчення зробив Лев Михайлович Лоповок (29.07.1916–29.11.1992) — відомий педагог-математик, кандидат педагогічних наук, професор, який народився в Полтаві. Один із творців проблемного навчання й розвивальної системи вправ, автор шкільних підручників, збірників задач, методичних рекомендацій для вчителів та учнів, книг для позакласного читання. Такі його праці, як «Геометрія для 9–11 класів», «Збірник задач з геометрії для 6–8 класів», «Збірник геометричних задач на побудову», «Факультативні завдання з геометрії для 7–11 класів» та інші, — яскраве тому підтвердження.



Лев Михайлович
Лоповок

Словничок



Українська

Англійська/
EnglishНімецька/
DeutschФранцузька/
Français

дуга кола

circular arc

Kreisbogen (m)

arc de cercle

qr.orioncentr.com.ua/bXroE

Пригадайте головне

1. Який кут називається центральним?
2. Що вважають градусною мірою дуги кола?
3. Що таке кут, вписаний у коло?
4. Доведіть, що вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.
5. Сформулюйте наслідки з теореми про вписаний кут.

Усне тренування

Обчисліть:

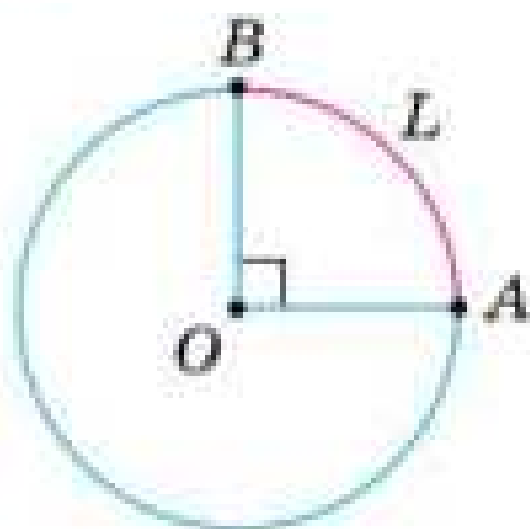
1) $360^\circ - 229^\circ$; $136^\circ + 224^\circ$; $360^\circ - 113^\circ$; $79^\circ + 281^\circ$.

2) $226^\circ : 2$; $85^\circ : 2$; $178^\circ : 2$; $304^\circ : 2$.

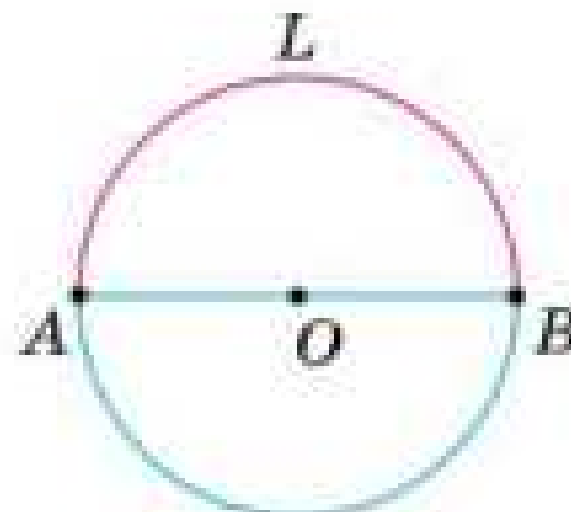
Розв'яжіть задачі

- 468*** Чи правильно, що центральний кут має вершину, що лежить:
1) на колі; 2) поза колом; 3) у центрі кола?
- 469*** Чи правильно, що сторони центрального кута:
1) не перетинають коло;
2) перетинають коло?
- 470*** Чи правильно, що центральному куту AOB :
1) не відповідає жодна дуга даного кола із центром O ;
2) відповідає лише одна дуга кола з кінцями в точках A і B ;
3) відповідають дві дуги кола з кінцями в точках A і B ?
- 471*** Чи правильно, що вписаний кут має вершину, що лежить:
1) на колі; 2) поза колом; 3) у центрі кола?
- 472*** Чи правильно, що сторони вписаного кута:
1) не перетинають коло;
2) перетинають коло?
- 473*** Чи правильно, що вписаний кут вимірюється:
1) дугою, на яку він спирається;
2) половиною дуги, на яку він спирається?

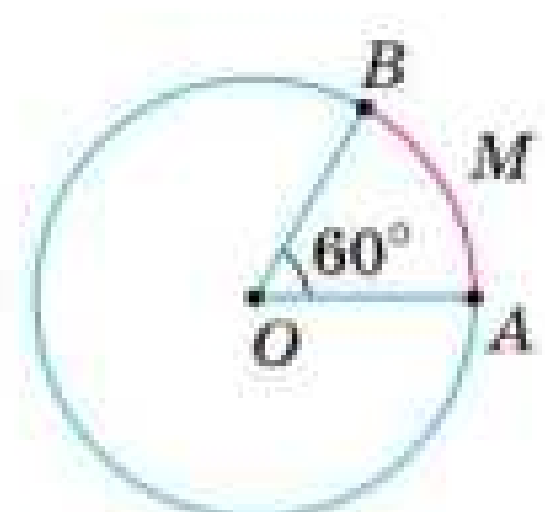
- 474'.** Проведіть коло із центром O та позначте на ньому дві точки A і B . Сполучіть ці точки із центром кола. Назвіть два центральні кути, що утворилися. Назвіть дві дуги, які відповідають цим кутам.
- 475.** За даними на малюнках 221, 222 назвіть градусну міру дуги ALB .
- 476'.** Яка градусна міра дуги AMB на малюнку 223?



Мал. 221



Мал. 222



Мал. 223

- 477'.** Скільки градусів має дуга, що дорівнює:

1) $\frac{1}{2}$ кола; 2) $\frac{1}{3}$ кола; 3) $\frac{2}{3}$ кола?

Яка градусна міра відповідного центрального кута?

- 478'.** Один із двох центральних кутів AOB дорівнює α . Скільки градусів мають дві відповідні дуги, якщо:

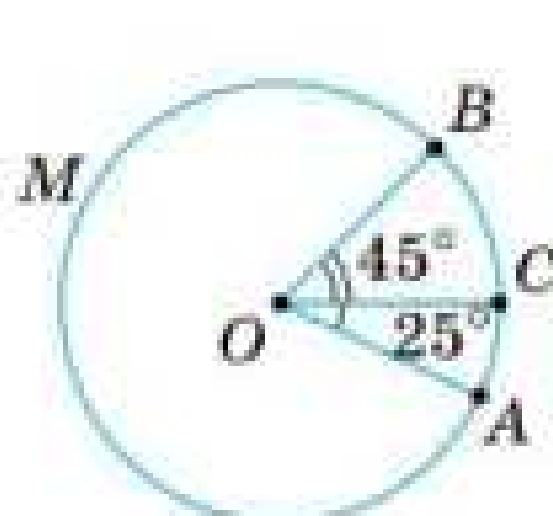
1) $\alpha = 30^\circ$; 2) $\alpha = 62^\circ$; 3) $\alpha = 100^\circ$?

- 479'.** За даними на малюнках 224, 225 знайдіть градусну міру дуги:

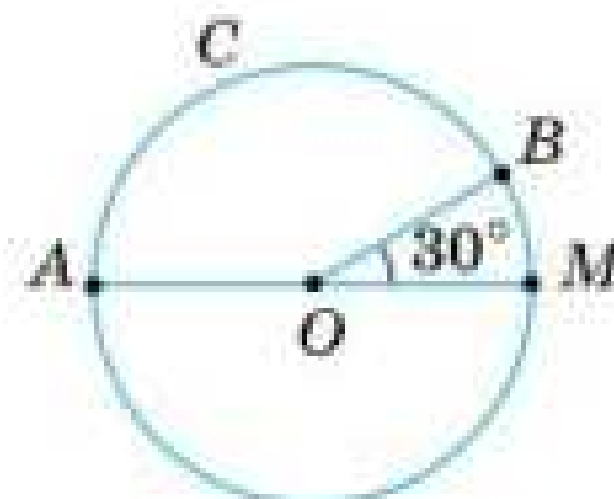
1) ACB ; 2) AMB .



qr.orioncentr.com.ua/BOHmo



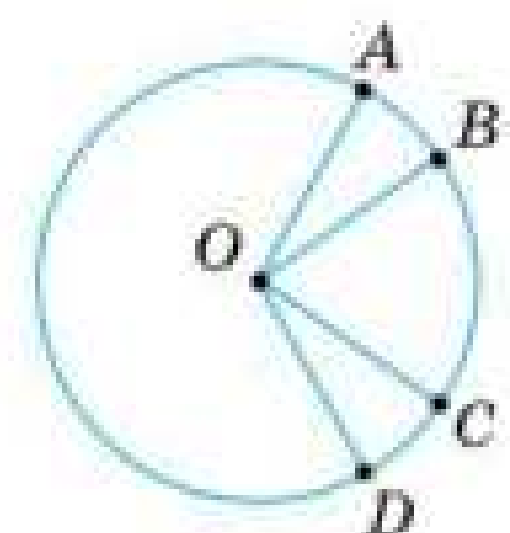
Мал. 224



Мал. 225

- 480'.** На півколі з діаметром AB позначено точки C і D так, що $\cup AC = 59^\circ$, $\cup BD = 61^\circ$. Знайдіть хорду CD , якщо радіус кола дорівнює:
- 1) 12 см; 2) 0,2 дм; 3) 39 мм.

- 481'.** У колі з центром O дуги AB і CD рівні (мал. 226). Доведіть, що $\angle AOC = \angle BOD$.



Мал. 226

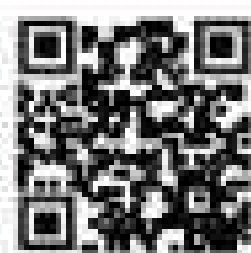
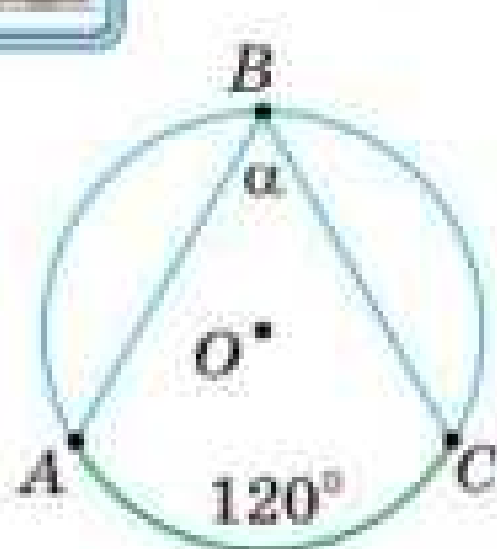
482*. Дуги ABC і BCD кола з центром O рівні (мал. 226). Доведіть, що $\angle AOB = \angle COD$.



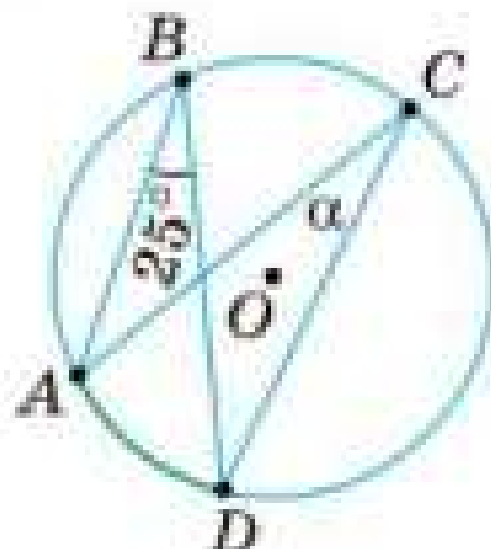
483*. За даними на малюнках 227–229 знайдіть градусну міру кута α .



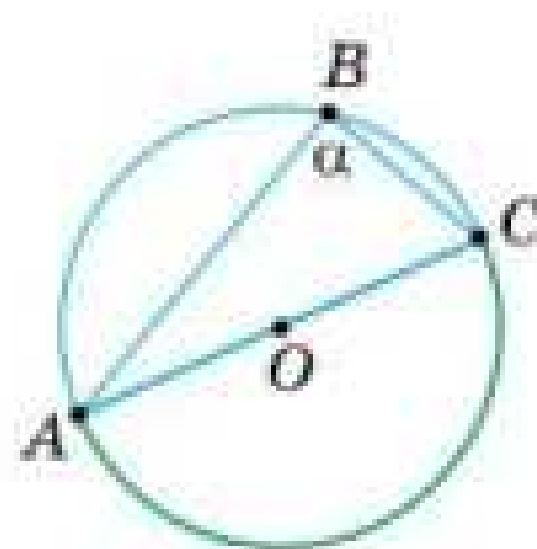
qr.orioncentr.com.ua/Z8Ueb



Мал. 227

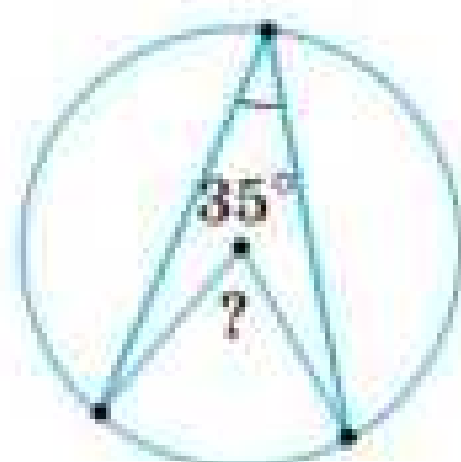


Мал. 228

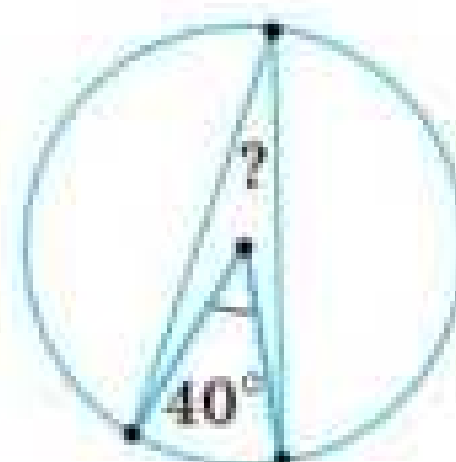


Мал. 229

484*. За даними на малюнках 230, 231 знайдіть кути, позначені знаком «?».



Мал. 230



Мал. 231

485*. Знайдіть вписаний кут, якщо дуга, на яку він спирається, дорівнює:

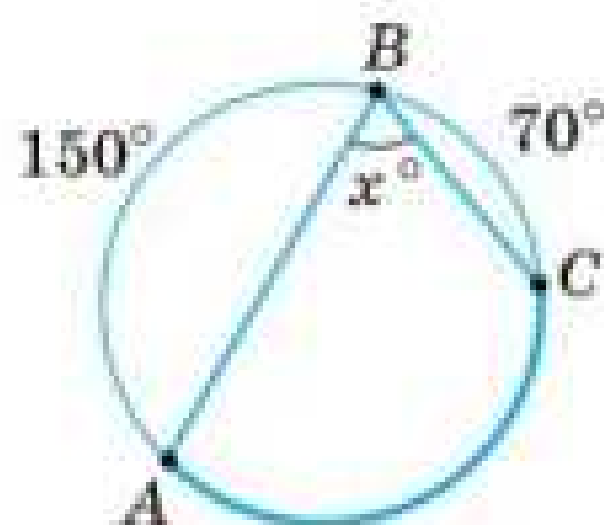
- 1) 52° ; 2) 126° ; 3) 200° .

486*. Знайдіть дугу, на яку спирається вписаний кут, якщо він дорівнює:

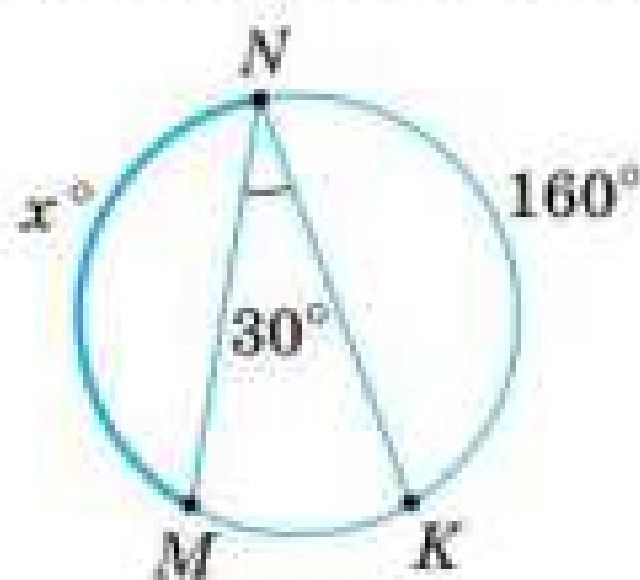


- 1) 16° ; 2) 32° ; 3) 110° .

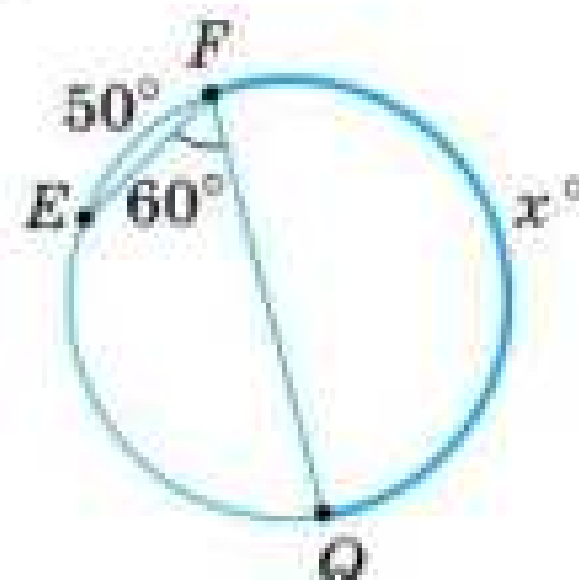
487*. За даними на малюнках 232–234 знайдіть x° .



Мал. 232



Мал. 233



Мал. 234

488*. Точки A , B і C ділять коло на три дуги. Знайдіть кути трикутника ABC , якщо градусні міри дуг відносяться як:

- 1) $1 : 1 : 1$; 2) $1 : 2 : 2$.

489'. Точки A , B і C ділять коло на три дуги. Знайдіть кути трикутника ABC , якщо градусні міри дуг відносяться як $1 : 2 : 3$.



490'. Навколо трикутника ABC описано коло. Знайдіть градусні міри дуг AB , BC і AC , якщо:



- 1) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$;
- 2) $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 28^\circ$.



qr.orioncentr.com.ua/rDohG

491'. Навколо трикутника ABC описано коло. Знайдіть градусні міри дуг AB , BC і AC , якщо $\angle A = 65^\circ$, $\angle C = 35^\circ$.



492'. Знайдіть кути вписаного в коло рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого стягує дугу: 1) 64° ; 2) 144° .

493'. Знайдіть кути вписаного в коло рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого стягує дугу 120° .

494. У колі рівні дуги стягуються рівними хордами. Доведіть.

495. У колі рівні хорди стягують рівні дуги. Доведіть.

496. Доведіть, що діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить дуги, які вона стягує, навпіл.



497. Доведіть, що діаметр, проведений через середину хорди, яка не проходить через центр кола, ділить навпіл дуги, що їх стягує хорда.

498. Дуги, що лежать між паралельними хордами, — рівні. Доведіть.

499. Дуги, що лежать між дотичною та паралельною їй хордою, — рівні. Доведіть.

500. Кінці хорди AB ділять коло на дві дуги ACB і ADB . Знайдіть вписані в це коло кути ACB і ADB , якщо:

- 1) $\cup ACB : \cup ADB = 2 : 3$;
- 2) $\cup ACB : \cup ADB = 4 : 5$.

501. Точки P і T ділять коло на дуги, градусні міри яких відносяться як: 1) $3 : 5$; 2) $2 : 7$.



Знайдіть вписані кути, що спираються на ці дуги.

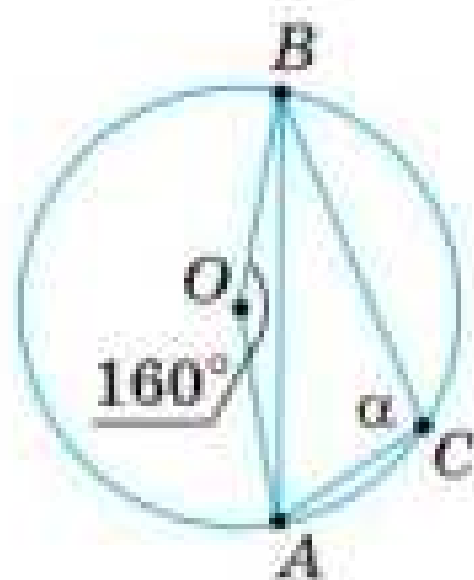
502. Доведіть, що коли хорди AB і BC утворюють кут 30° , то хорда AC дорівнює радіусу кола.

503. Знайдіть кут, який утворюють хорди AB і BC , якщо хорда AC дорівнює радіусу кола. (Розгляньте два випадки.)

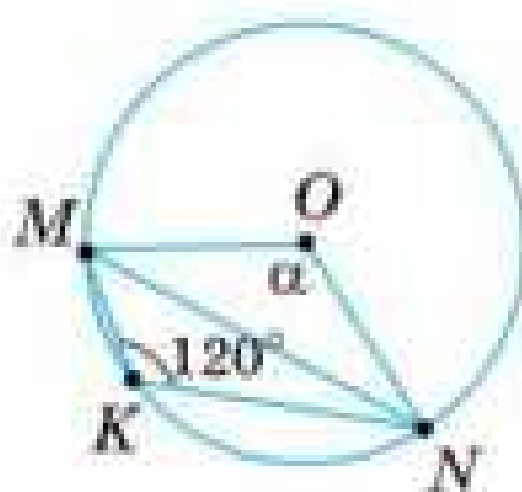
504. Хорда ділить коло на дві дуги, одна з яких в n разів більша за іншу. Знайдіть вписані кути, що спираються на цю хорду, якщо:

- 1) $n = 3$; 2) $n = 4$.

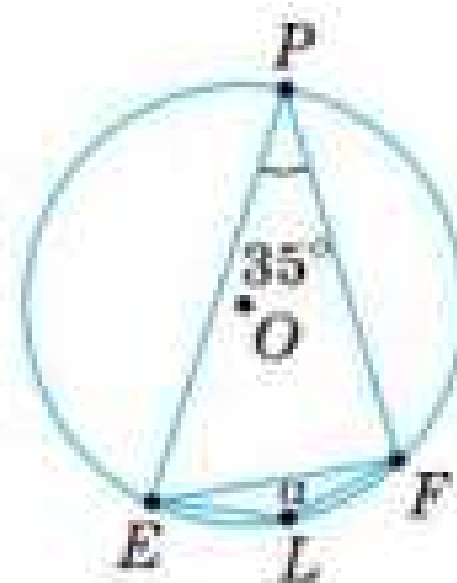
- 505.** Доведіть, що сума вписаних кутів, що спираються на хорду кола й вершини яких лежать по різні боки від неї, дорівнює 180° .
- 506.** За даними на малюнках 235–237 знайдіть кут α .



Мал. 235

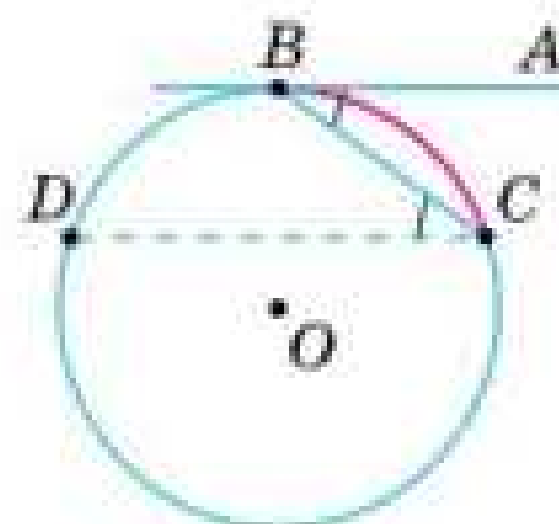


Мал. 236



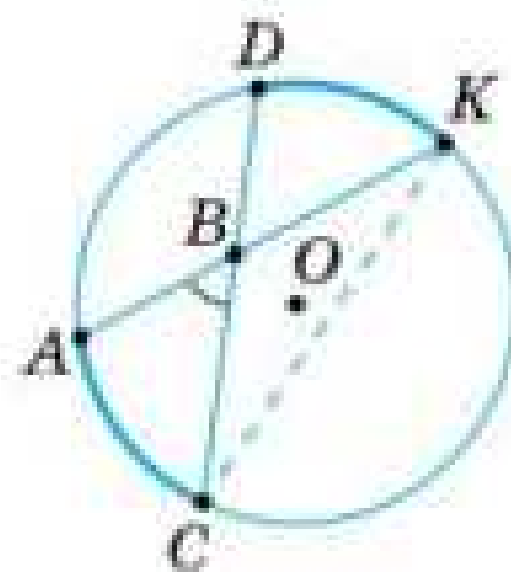
Мал. 237

- 507.** Центральний кут на n° більший за вписаний кут, що спирається на ту саму дугу. Знайдіть градусну міру кожного із цих кутів, якщо:
1) $n = 35^\circ$; 2) $n = 45^\circ$.
- 508.** Доведіть, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи.
- 509.** Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, розбиває його на два рівнобедрені трикутники.
- 510.** Кут між дотичною та хордою, що проходить через точку дотику, вимірюється половиною дуги, яка лежить між його сторонами (мал. 238). Доведіть.
- 511.** Через кінець хорди проведено дотичну. Знайдіть гострий кут між хордою та дотичною, якщо хорда ділить коло у відношенні:
1) $1 : 3$; 2) $2 : 7$.



Мал. 238

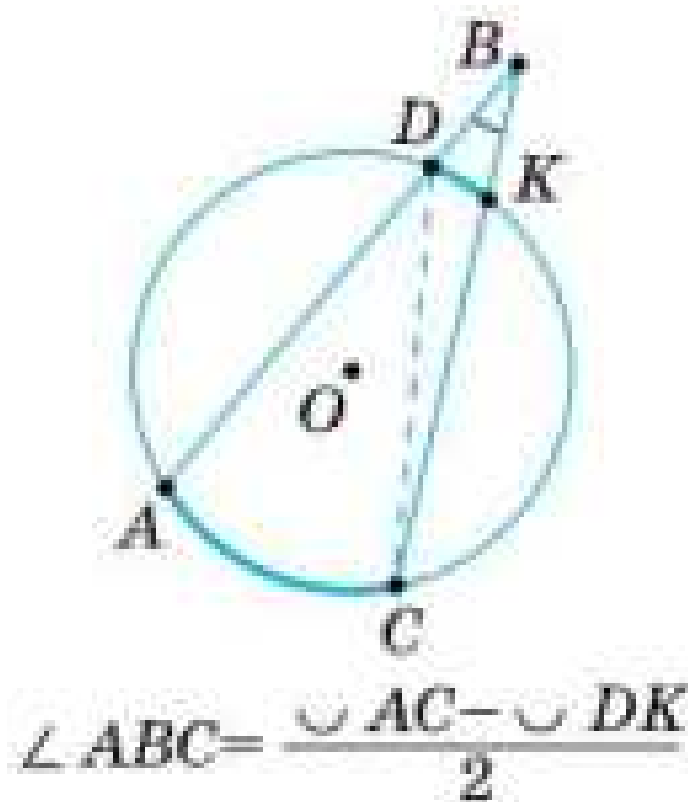
- 512*.** Доведіть, що кут із вершиною всередині кола вимірюється півсумою дуг, на які спирається даний кут і кут, вертикальний із ним. (Скористайтесь малюнком 239.)
- 513*.** Доведіть, що кут, вершина якого лежить зовні кола, а сторони перетинають коло, вимірюється піврізницею більшої та меншої дуг, що містяться між його сторонами. (Скористайтесь малюнком 240.)



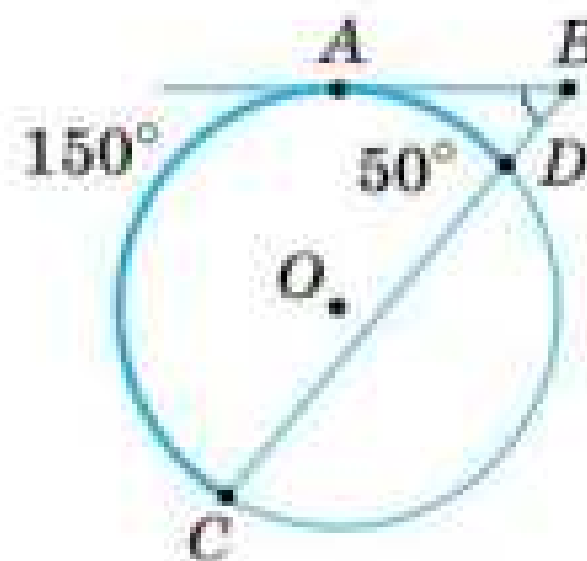
$$\angle ABC = \frac{\text{дуга } AC + \text{дуга } DK}{2}$$

Мал. 239

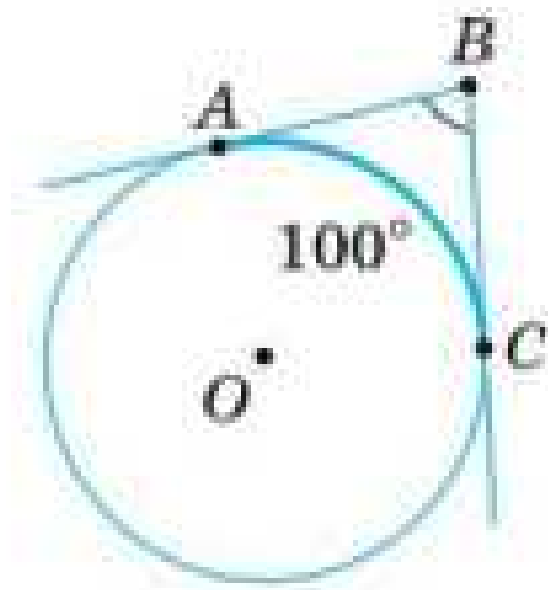
- 514*.** За даними на малюнках 241, 242 знайдіть кут ABC .



Мал. 240



Мал. 241

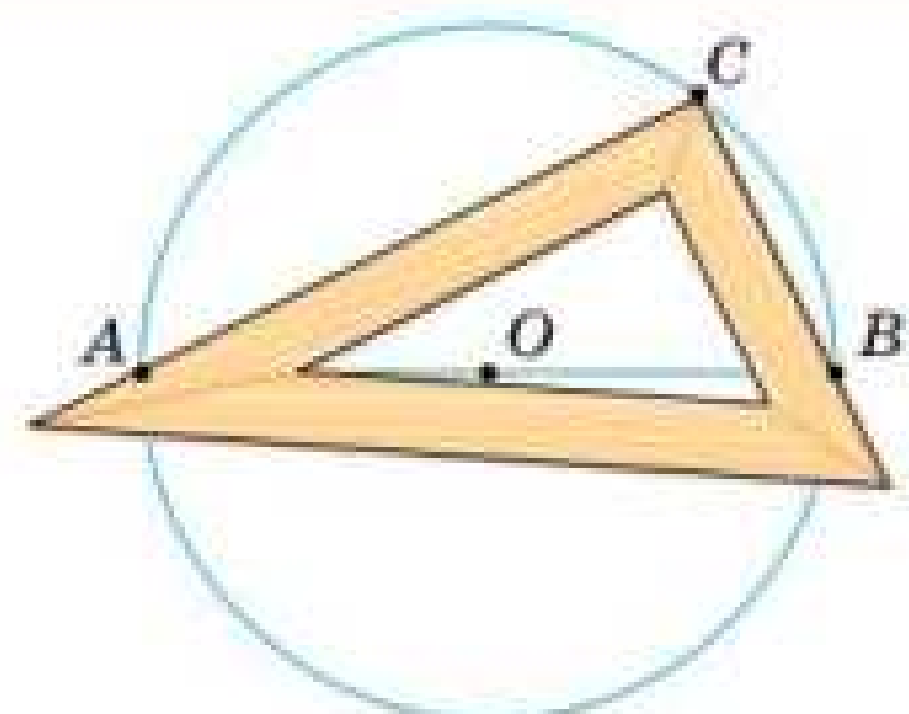


Мал. 242

- 515***. Коло поділено точками A , B і C на дуги, що відносяться як $11 : 3 : 4$. Через точки A , B і C проведено дотичні до їх взаємного перетину. Знайдіть кути утвореного трикутника.
- 516***. До двох кіл із центрами O і O_1 , що дотикаються зовні в точці A , проведено спільну дотичну BC (B і C — точки дотику). Доведіть, що кут BAC — прямий.
- 517***. Два кола мають внутрішній дотик, причому менше коло проходить через центр більшого. Доведіть, що будь-яка хорда більшого кола, що проходить через точку дотику, ділиться меншим колом навпіл.
- 518***. Знайдіть геометричне місце вершин:
- 1) прямих кутів, сторони яких проходять через дві дані точки;
 - 2) трикутників зі спільною основою AB , у яких кут, що лежить проти основи, дорівнює даному куту α .

Проявіть компетентність

- 519.** Правильність виготовлення косинця перевірили так. Накреслили коло та його діаметр AB (мал. 243). Приклали косинець так, щоб його катети проходили через точки A і B . Якщо при цьому вершина прямого кута косинця лежить на колі, то косинець — правильний. Поясніть, чому це так.



Мал. 243

- 520.** У центрі диска, що має форму круга, потрібно просвердлити отвір. Як знайти центр диска за допомогою одного косинця?

§ 9. ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

1. Що таке вписаний та описаний чотирикутник

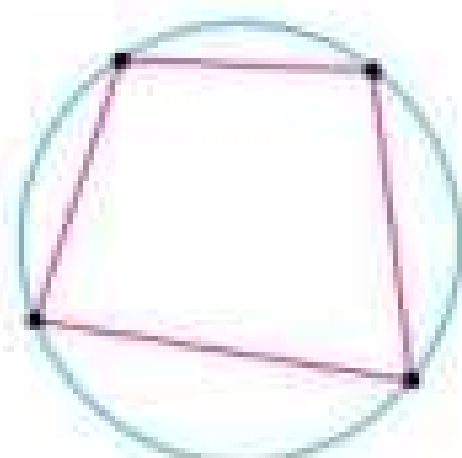


qr.orioncentr.com.ua/51Cts

Ситуація. Дівчата й хлопці 8-А класу аналізували старі назви «хордальний чотирикутник» і «дотичний чотирикутник» і намагалися пояснити, яким сучасним термінам вони відповідають.

Дівчата

Позначили на колі чотири точки, сполучили їх **хордами**.



Мал. 244

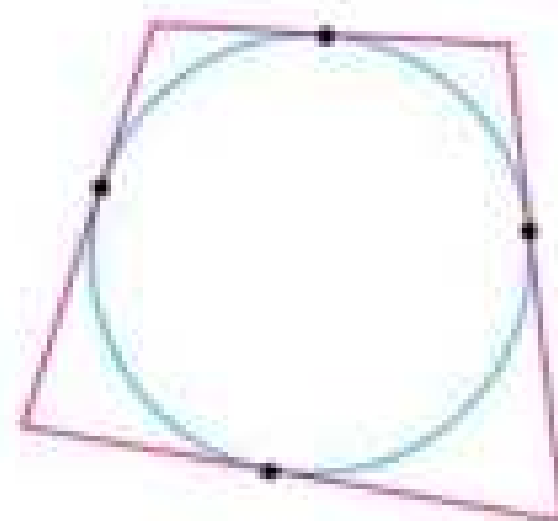
Отримали:

**хордальний
ВПИСАНИЙ**

чотирикутник.

Хлопці

Позначили на колі чотири точки, провели через них **дотичні**.

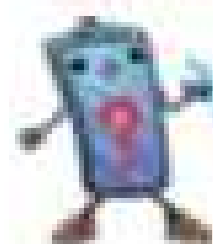


Мал. 245

Отримали:

**дотичний
ОПИСАНИЙ**

чотирикутник.



Як визначити вписаний чотирикутник і описаний чотирикутник?

Аналогічно до вписаного трикутника й описаного трикутника відповідно.



Запам'ятайте!

Чотирикутник, усі **вершини** якого **лежать на колі**, називається **вписаним** у це коло, а коло — **описаним** навколо цього чотирикутника.

Чотирикутник, усі **сторони** якого **дотикаються до кола**, називається **описаним** навколо цього кола, а коло — **вписаним** у цей чотирикутник.

2. Властивість і ознака вписаного чотирикутника



З якими елементами пов'язана властивість вписаного чотирикутника?

З його кутами.



Запам'ятайте!**Теорема (властивість кутів вписаного чотирикутника)**

Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180° .

Дано: чотирикутник $ABCD$, вписаний у коло (мал. 246).

Довести: $\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

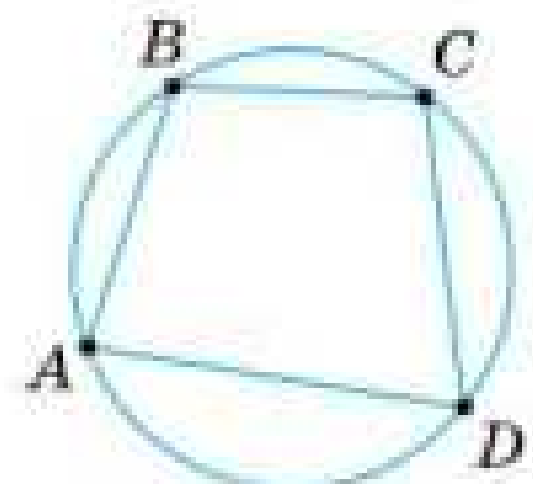
Доведення. Кути A , B , C і D — вписані в коло.
За теоремою про вписаний кут маємо:

$$\angle A = \frac{1}{2} \cup DCB, \quad \angle C = \frac{1}{2} \cup DAB.$$

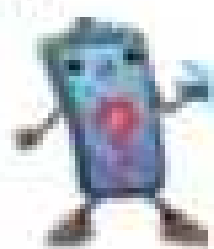
$$\text{Тоді } \angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\cup DCB + \cup DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Сума всіх кутів чотирикутника дорівнює 360° , а сума кутів A і C — 180° .

$$\text{Тоді } \angle B + \angle D = 360^\circ - (\angle A + \angle C) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ.$$

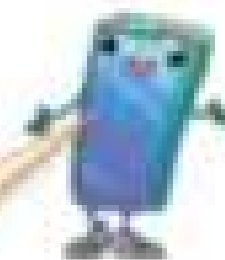


Мал. 246



Чи навколо кожного чотирикутника можна описати коло?

Ні.



На відміну від трикутника, не кожний чотирикутник може бути вписаним.

Наприклад, ромб, що не є квадратом, не є вписаним чотирикутником. Наведемо ознаку вписаного чотирикутника без доведення.

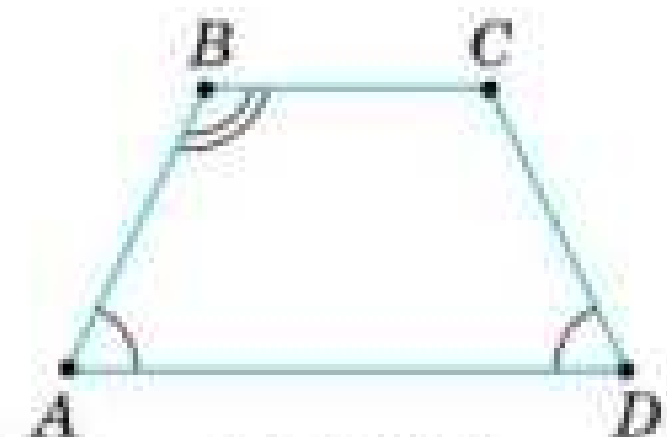
Запам'ятайте!**Теорема (ознака вписаного чотирикутника)**

Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180° , то навколо такого чотирикутника можна описати коло.

Задача Доведіть, що навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.

Розв'язання Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція з основами AD і BC (мал. 247). Доведемо, що $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

У будь-якій трапеції сума кутів, прилеглих до однієї бічної сторони, дорівнює 180° (впливає з властивості паралельних прямих).



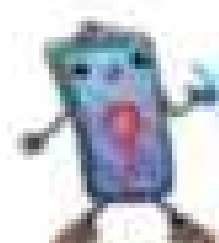
Мал. 247

Отже, $\angle A + \angle B = 180^\circ$.

За властивістю рівнобічної трапеції, $\angle A = \angle D$. Тоді $\angle B + \angle D = 180^\circ$ і, за ознакою вписаного чотирикутника, навколо трапеції $ABCD$ можна описати коло.

3. Властивість і ознака описаного чотирикутника

qr.orioncentr.com.ua/yEvPH



З якими елементами пов'язана властивість описаного чотирикутника?

З його сторонами.



Запам'ятайте!

Теорема (властивість сторін описаного чотирикутника)
Суми протилежних сторін описаного чотирикутника — рівні.

Дано: чотирикутник $ABCD$, описаний навколо кола (мал. 248), E, F, K і P — точки дотику.

Довести: $AB + CD = BC + AD$.

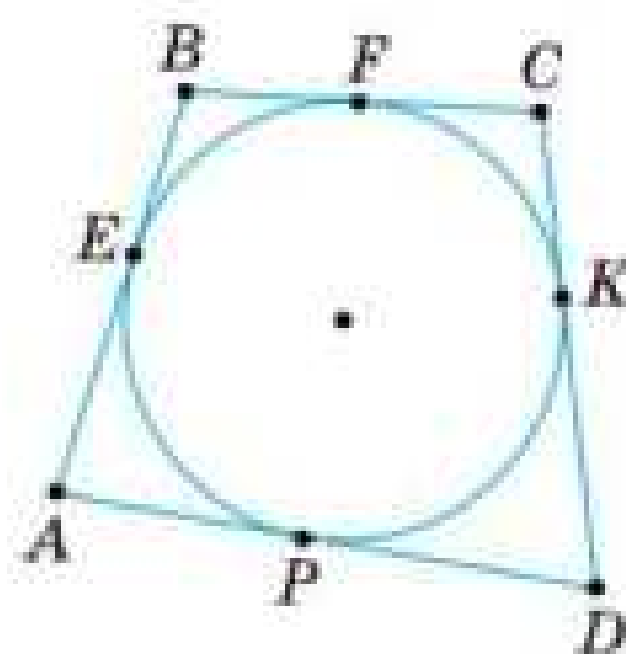
Доведення. За властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки, маємо (мал. 249):

$$AE = AP, BE = BF, CK = CF, DK = DP.$$

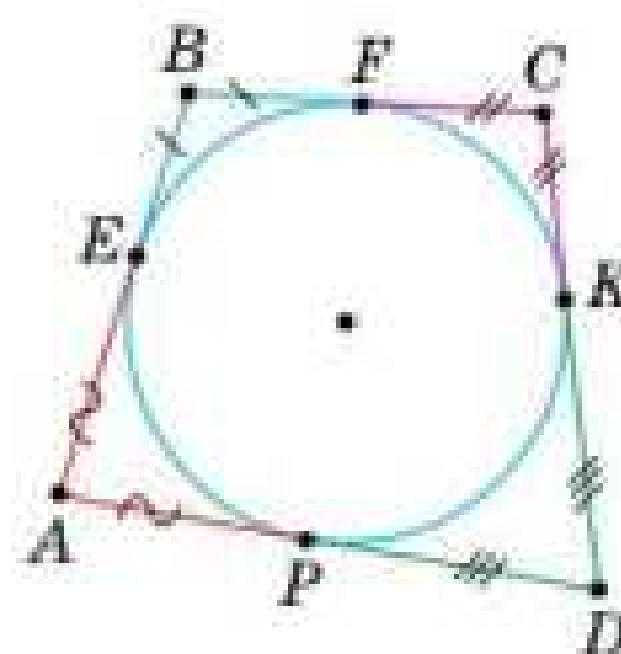
Додавши почленно ці рівності, одержимо:

$$AE + BE + CK + DK = AP + BF + CF + DP,$$

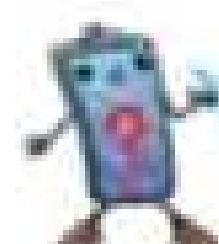
тобто $AB + CD = BC + AD$.



Мал. 248

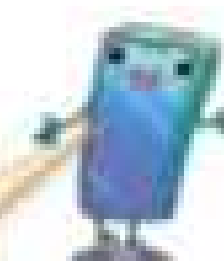


Мал. 249



Чи в кожний чотирикутник можна вписати коло?

Ні.





На відміну від трикутника, не будь-який чотирикутник може бути описаним.

Наприклад, прямокутник, що не є квадратом, не є описаним чотирикутником.

Наведемо ознаку описаного чотирикутника без доведення.

Запам'ятайте!

Теорема (ознака описаного чотирикутника)

Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.

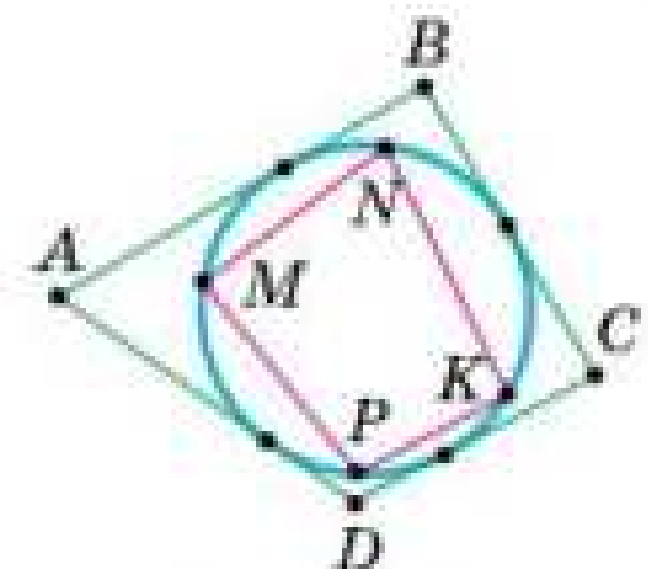


Щоб довести, що чотирикутник $MNKP$ (мал. 250) є вписаним у коло, покажіть, що:

або $\angle M + \angle K = 180^\circ$, або $\angle N + \angle P = 180^\circ$.

Щоб довести, що чотирикутник $ABCD$ (мал. 250) є описаним навколо кола, покажіть, що:

$$AB + CD = AD + BC.$$



Мал. 250

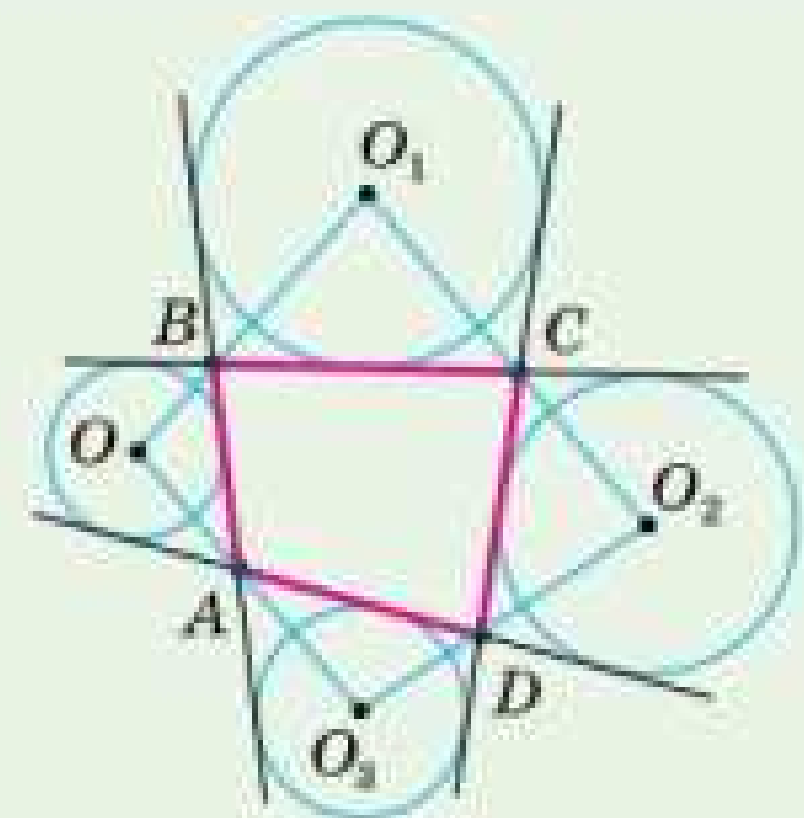
Дізнайтеся більше

1. Крім кіл, вписаного в чотирикутник й описаного навколо нього, є ще зовнівписані кола.

Проведемо в довільному чотирикутнику $ABCD$ бісектриси зовнішніх кутів при вершинах A, B, C і D (мал. 251). Точки їх перетину O, O_1, O_2 і O_3 є центрами чотирьох зовнівписаних кіл. Кожне з них дотикається до однієї сторони чотирикутника та до продовжень двох інших його сторін.

2. Давньогрецькі вчені відкрили, крім уже відомих вам, інші цікаві властивості вписаних й описаних чотирикутників. Наприклад, добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

3. Значний внесок у розвиток шкільної математичної освіти, виховання талановитої молоді в галузі математики, популяризації математичної науки зробив відомий український математик — професор, доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент Національної академії наук України **Михайло Йосипович Ядренко** (16.04.1932–28.09.2004), який народився в с. Дрімайлівка Куликівського району Чернігівської області. Понад 40 років він був організатором шкільних математичних олімпіад різного рівня, очолював журі Всеукраїнських олімпіад для школярів. Михайло Йосипович заснував унікальний журнал для учнів «У світі математики», був незмінним його редактором.



Мал. 251

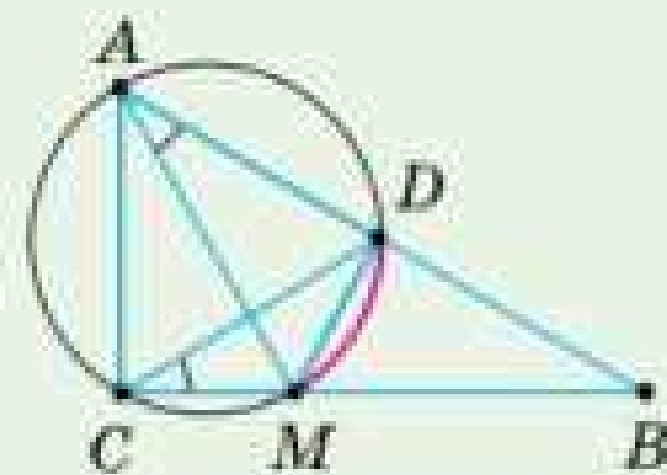


Михайло Йосипович Ядренко

4. Під час розв'язування задач інколи корисно розглядати кола, не задані в умові. На малюнку до задачі спочатку знаходимо чотирикутник, навколо якого можна описати коло або в який можна вписати коло, а потім використовуємо властивості хорд, діаметрів, вписаних кутів, кутів з вершиною всередині кола та ін.

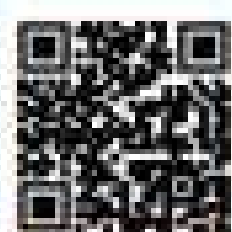
Задача З довільної точки M катета BC прямокутного трикутника ABC проведено перпендикуляр MD до гіпотенузи AB (мал. 252). Доведіть, що $\angle MAD = \angle MCD$.

Розв'язання Навколо чотирикутника $ADMC$ можна описати коло, оскільки $\angle ACM + \angle ADM = 180^\circ$. Тоді $\angle MAD = \angle MCD$ як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу MD .



Мал. 252

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
описане коло	circum- scribed circle	umschriebene Kreis (m)	cercle circonscriit
вписане коло	inscribed circle	einbeschriebener Kreis (m)	cercle inscrit

qr.orioncentr.com.ua/MsmPa

Пригадайте головне

1. Який чотирикутник називається вписаним у коло?
2. Який чотирикутник називається описаним навколо кола?
3. Сформулюйте та доведіть теорему про властивість кутів вписаного чотирикутника.
4. Сформулюйте ознаку вписаного чотирикутника.
5. Сформулюйте та доведіть теорему про властивість сторін описаного чотирикутника.
6. Сформулюйте ознаку описаного чотирикутника.

Усне тренування

1. Обчисліть:

$36^\circ + 154^\circ;$

$143^\circ + 37^\circ;$

$109^\circ + 71^\circ;$

$22^\circ + 158^\circ.$

2. Чи правильна рівність:

$22 + 48 = 70;$

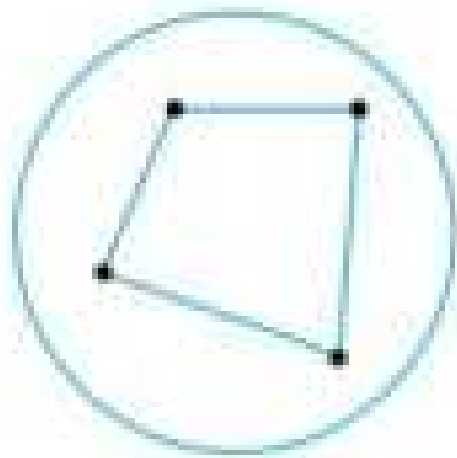
$85 + 16 = 100;$

$17 + 26 = 33;$

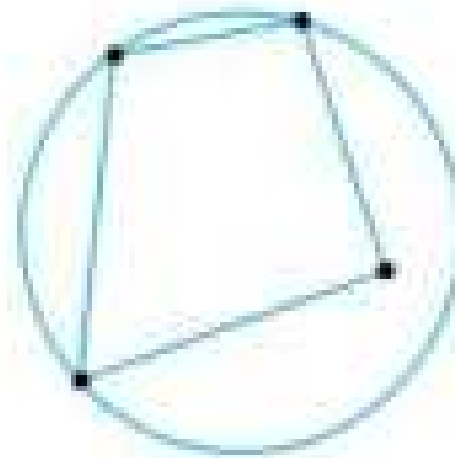
$34 + 39 = 73?$

Розв'яжіть задачі

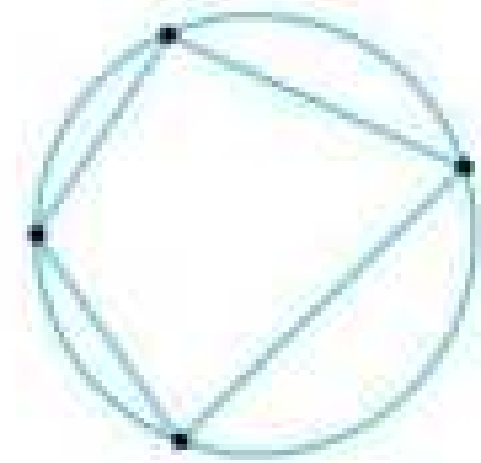
521'. На якому з малюнків 253–255 зображено чотирикутник, вписаний у коло?



Мал. 253

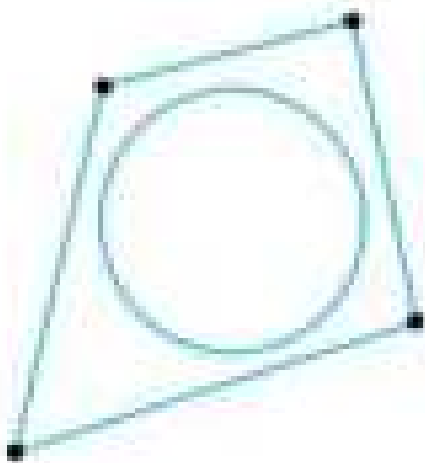


Мал. 254

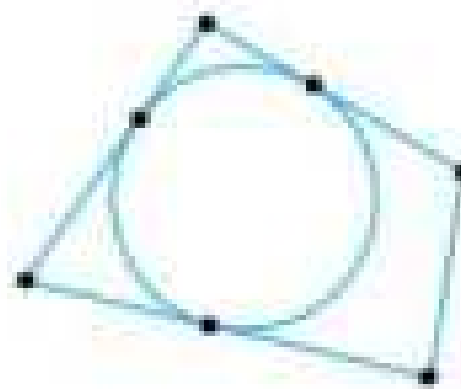


Мал. 255

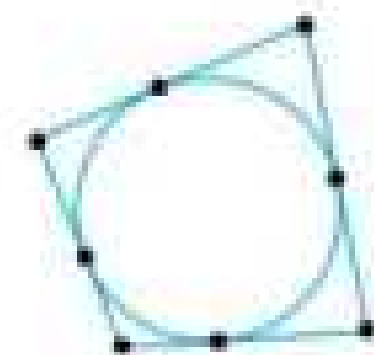
522'. На якому з малюнків 256–258 зображено чотирикутник, описаний навколо кола?



Мал. 256



Мал. 257

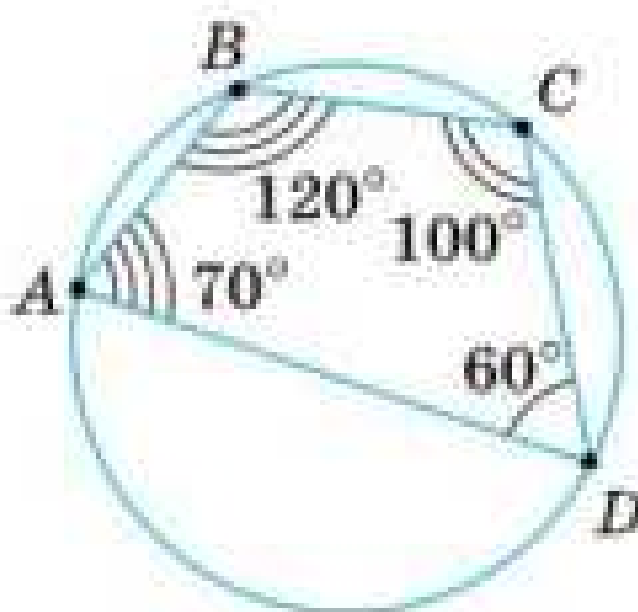


Мал. 258

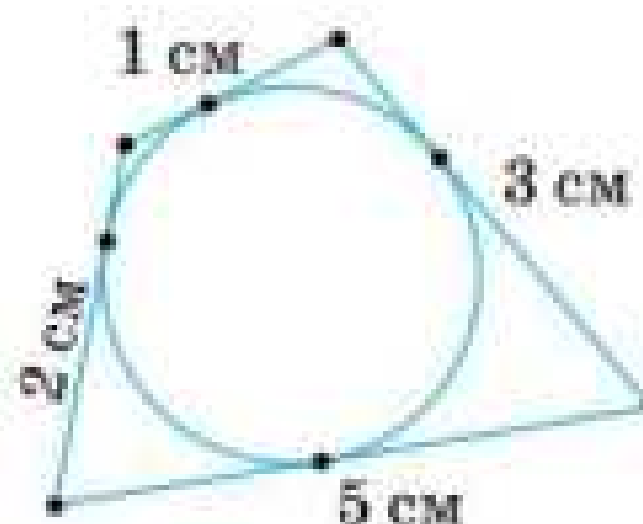
523'. Чи правильно вказано градусні міри кутів чотирикутника на малюнку 259? Відповідь поясніть.

524'. Чи правильно вказано довжини сторін чотирикутника на малюнку 260? Відповідь поясніть.

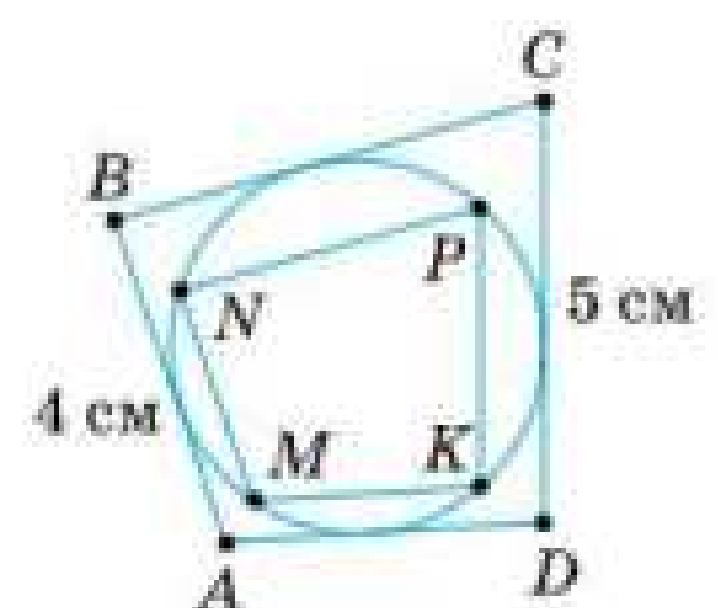
525'. За даними на малюнку 261 знайдіть:
1) суму сторін AD і BC описаного чотирикутника $ABCD$;
2) суму кутів M і P вписаного чотирикутника $MNPQ$.



Мал. 259

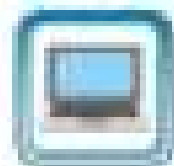


Мал. 260

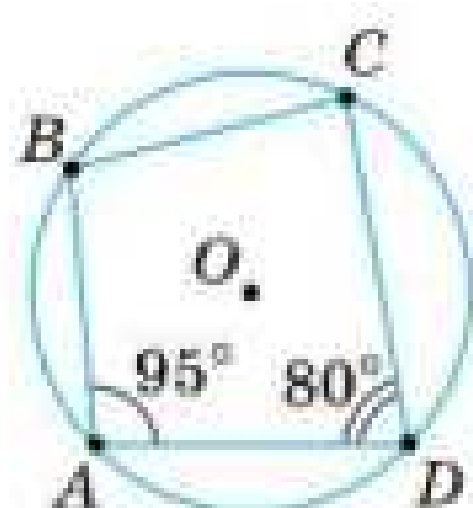


Мал. 261

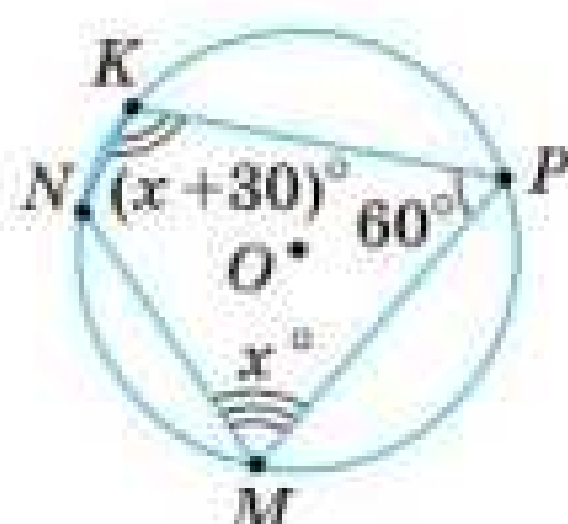
526* За даними на малюнках 262–264 знайдіть невідомі кути вписаних чотирикутників.



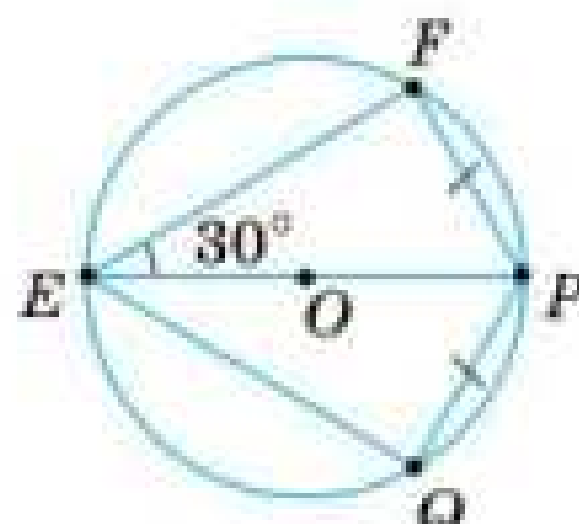
qr.orioncentr.com.ua/sJE8M



Мал. 262



Мал. 263



Мал. 264

527* Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо кути A , B , C і D відповідно дорівнюють:

- 1) 90° , 90° , 110° , 120° ;
- 2) 70° , 130° , 110° , 50° ?

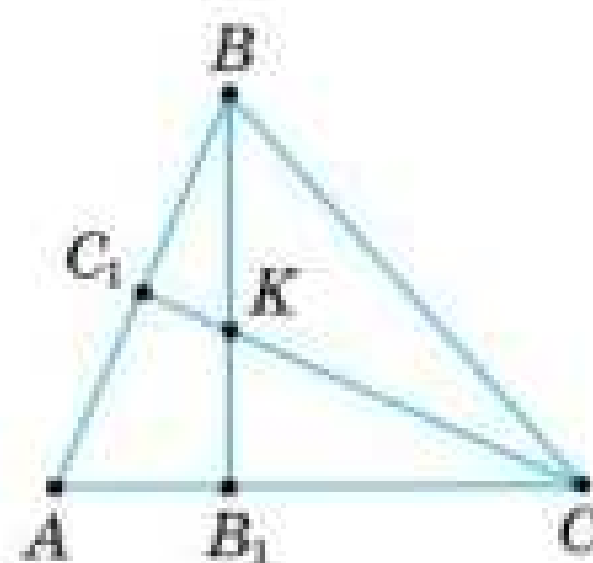
528* Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо кути A , B і C відповідно дорівнюють:



- 1) 85° , 130° , 95° ;
- 2) 60° , 100° , 119° ?

529* У трикутнику ABC проведено висоти BB_1 і CC_1 , що перетинаються в точці K (мал. 265). Доведіть, що навколо чотирикутника AB_1KC_1 можна описати коло. Знайдіть кут B_1KC_1 , якщо кут A дорівнює:

- 1) 55° ; 2) 72° ; 3) 60° .



Мал. 265

530* Чи можна описати коло навколо довільного:



- 1) прямокутника;
 - 2) квадрата;
 - 3) ромба?
- Відповідь поясніть.

531* Доведіть, що центр кола, описаного навколо прямокутника, є точкою перетину його діагоналей.

532* AD і BC — діаметри кола.



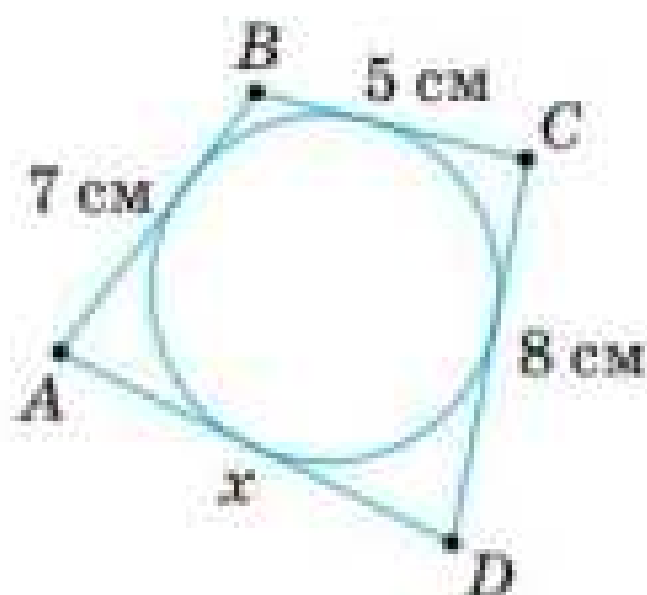
1. Доведіть, що чотирикутник $ABDC$ — прямокутник.
2. Визначте, за якої умови прямокутник $ABDC$ є квадратом.



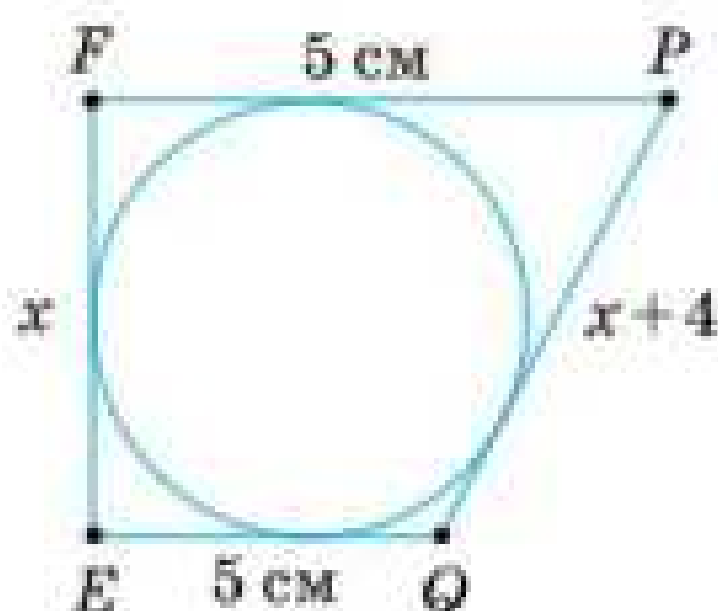
533* За даними на малюнках 266–268 знайдіть невідомі сторони описаних чотирикутників.



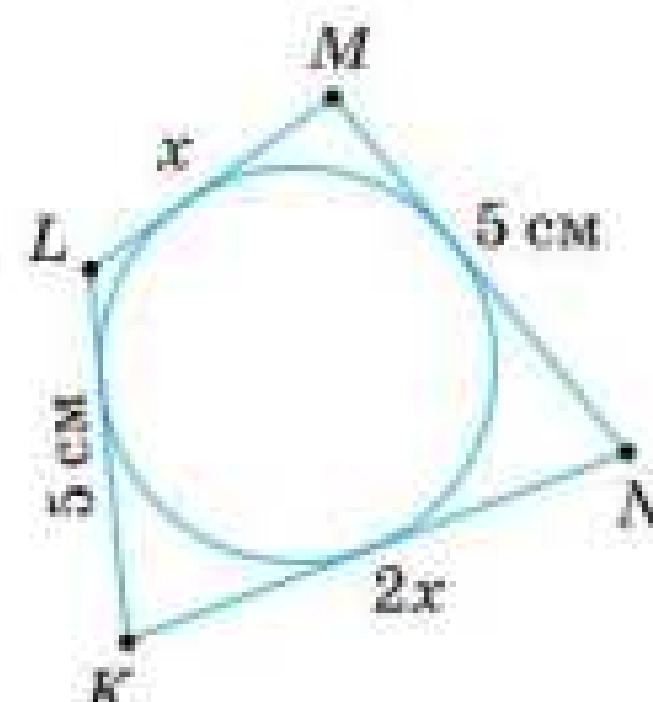
qr.orioncentr.com.ua/x7ug3



Мал. 266



Мал. 267



Мал. 268

534'. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого, взяті по-
 слідовно, дорівнюють:

- 1) 2 см, 3 см, 5 см, 4 см;
- 2) 7 см, 4 см, 3 см, 5 см?

535'. Знайдіть периметр чотирикутника, описаного навколо кола, якщо сума двох протилежних його сторін дорівнює:

- 1) 20 см;
- 2) 3,2 дм.

536'. Знайдіть периметр описаного чотирикутника, три сторони якого, взяті по-
 слідовно, дорівнюють:

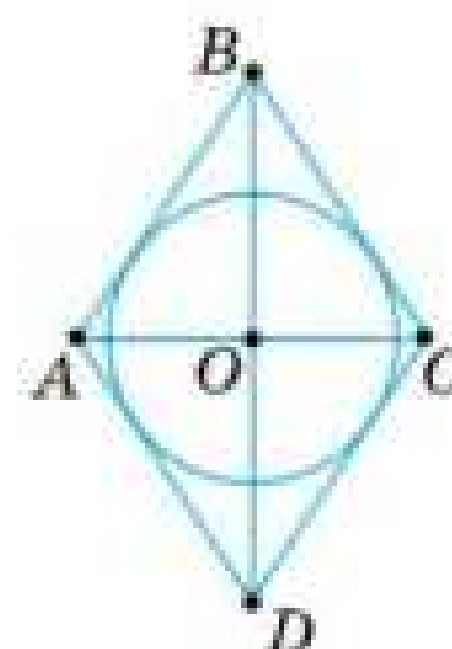
- 1) 12 см, 16 см, 28 см;
- 2) 10 см, 14 см, 16 см.

537'. Доведіть, що центром кола, вписаного в ромб, є точка перетину його діагоналей (мал. 269).

538'. Чи можна вписати коло в довільний:

-  1) прямокутник;
- 2) квадрат;
- 3) ромб?

Відповідь поясніть.



Мал. 269

539. Знайдіть кут D чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо його кути A , B і C відносяться як:

- 1) $2 : 3 : 4$; 2) $1 : 2 : 2$.

540. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 60° . Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює:

- 1) 10 см; 2) 2,3 дм.

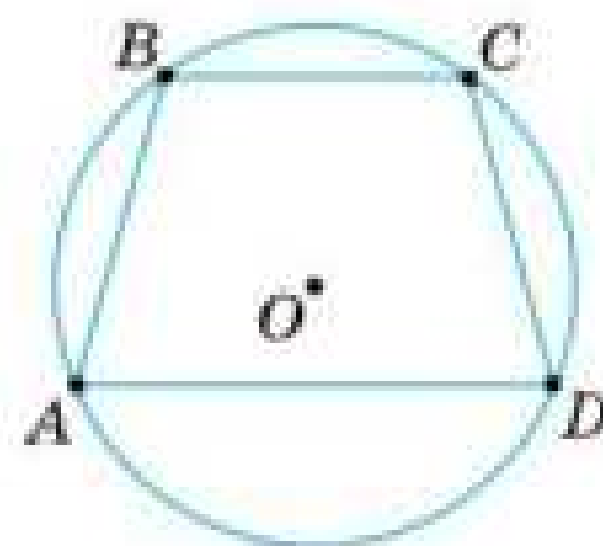
541. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого, взяті по-
 слідовно, відносяться як:

- 1) $2 : 4 : 5 : 3$; 2) $5 : 7 : 8 : 9$?

Відповідь поясніть.

542. Доведіть:

- 1) будь-яка трапеція, вписана в коло, — рівнобічна (мал. 270);
- 2) будь-який паралелограм, вписаний у коло, — прямокутник.



Мал. 270

543. Доведіть, що будь-який ромб, вписаний у коло, — квадрат.

544. Доведіть, що кут A вписаного чотирикутника $ABCD$ дорівнює зовнішньому куту при вершині C .

545. Чи можна вписати коло в чотирикутник, сторони якого, взяті послідовно, пропорційні числам:

- 1) 2, 2, 3, 3;
- 2) 2, 5, 3, 4?

546. Два рівнобедрені трикутники мають спільну основу, а їхні вершини лежать по різні боки від неї. Чи можна в утворений чотирикутник вписати коло?

547. Як потрібно розмістити два рівні різносторонні трикутники, щоб в утворений ними чотирикутник можна було вписати коло?

548. Три сторони описаної трапеції, взяті послідовно, відносяться як $2 : 7 : 12$. Знайдіть сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює:

- 1) 42 мм;
- 2) 56 см.

549. Складіть формулу та знайдіть середню лінію описаної трапеції, якщо її периметр дорівнює:



- 1) 16 см;
- 2) 200 мм.

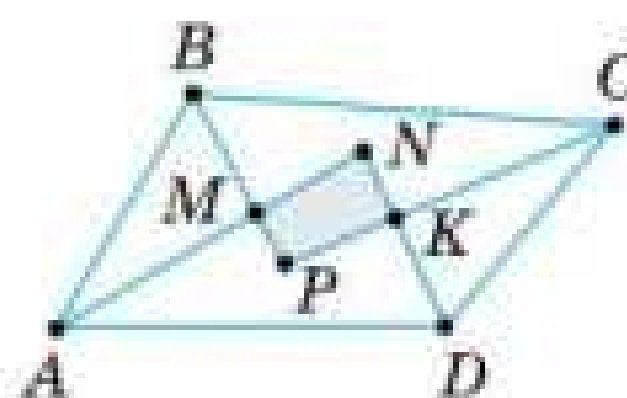
550. Кут описаної рівнобічної трапеції дорівнює 150° , її середня лінія — 40 см. Знайдіть висоту трапеції.

551. Кут описаної рівнобічної трапеції дорівнює 30° , її середня лінія — 20 см. Знайдіть радіус вписаного кола.

552. Як побудувати квадрат:

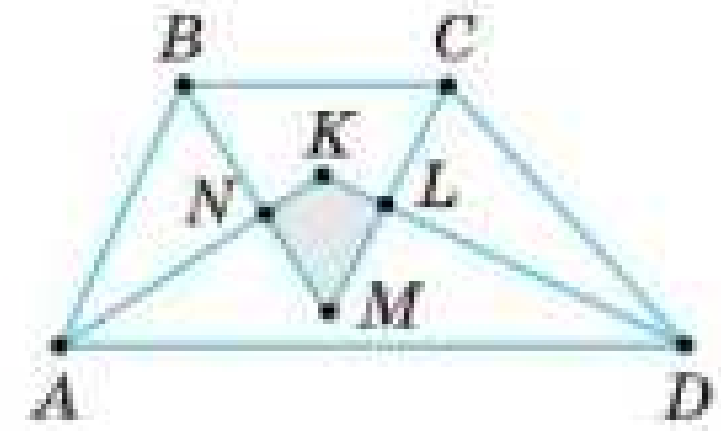
- 1) вписаний у коло;
- 2) описаний навколо кола?

553*. Доведіть, що бісектриси кутів чотирикутника, перетинаючись, утворюють чотирикутник, навколо якого можна описати коло (мал. 271).



Мал. 271

554*. Доведіть, що бісектриси кутів трапеції $ABCD$, перетинаючись, утворюють чотирикутник $MNKL$, навколо якого можна описати коло (мал. 272).



Мал. 272

555*. Доведіть, що у вписаному чотирикутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинається з бісектрисою зовнішнього кута при вершині C в точці, що лежить на колі, описаному навколо чотирикутника.

556*. Із точки P перетину взаємно перпендикулярних діагоналей чотирикутника $ABCD$ провели перпендикуляри PK , PL , PM і PN до сторін, причому точки K , L , M і N лежать на сторонах AB , BC , CD , DA відповідно. Доведіть, що чотирикутник $KLMN$ — вписаний у коло.

557*. Пряма, паралельна бічній стороні рівнобедреного трикутника, відтинає від нього трапецію, бічна сторона якої є частиною основи даного трикутника й удвічі довша за її меншу основу. Чи можна вписати коло в таку трапецію?

558*. Якщо навколо трапеції можна описати коло й у цю саму трапецію можна вписати коло, то кожна бічна сторона трапеції дорівнює її середній лінії. Доведіть.

Проявіть компетентність

559. Потрібно висвердлити чотири отвори уздовж країв круглого диска на однаковій відстані один від одного, а також один отвір — у центрі. Накресліть малюнок і поясніть, як це зробити.

560. Поясніть, як із листа жерсті прямокутної форми вирізати круг найбільшого радіуса.

561. З аркуша картону круглої форми потрібно вирізати квадрат, діагональ якого дорівнює діаметру круга. Поясніть, як це зробити.

562. Мешканці чотирьох дачних будинків вирішили знайти таке місце для криниці, щоб відстані від неї до будинків були однаковими. Зробіть малюнок і знайдіть місце для криниці, якщо будинки розташовані:

- 1) у вершинах прямокутника;
- 2) у вершинах рівнобічної трапеції.



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 2

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Доведіть теорему про суму кутів чотирикутника.
2. Який чотирикутник називається паралелограмом?
3. Назвіть властивості паралелограма.
4. Які ознаки паралелограма?
5. Що таке прямокутник; ромб; квадрат; трапеція; рівнобічна трапеція?
6. Сформулюйте та доведіть теореми про властивості діагоналей прямокутника; ромба.
7. Які властивості квадрата?
8. Доведіть теореми про властивості середньої лінії трикутника; трапеції.
9. Який кут називається центральним?
10. Який кут називається вписаним у коло?
11. Доведіть, що вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.
12. Який чотирикутник називається вписаним у коло; описаним навколо кола?
13. Які властивості вписаного чотирикутника; описаного чотирикутника?
14. Яка ознака вписаного чотирикутника; описаного чотирикутника?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тестового завдання потрібно 10–15 хв.

№ 1

1. Знайдіть тупий кут паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 30° .
 А. 60° .
 Б. 120° .
 В. 150° .
 Г. 180° .
2. За якої з наведених умов чотирикутник є паралелограмом?
 А. Дві протилежні сторони — рівні.
 Б. Одна з діагоналей ділить іншу навпіл.
 В. Дві протилежні сторони — паралельні.
 Г. Діагоналі діляться точкою їх перетину навпіл.
3. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см й утворює зі стороною кут 30° . Знайдіть меншу сторону прямокутника.
 А. 15 см.
 Б. 5 см.
 В. 20 см.
 Г. 6 см.

4. Знайдіть гострий кут ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см, а висота — 3 см.
 А. 60° .
 Б. 90° .
 В. 30° .
 Г. 45° .
- 5*. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці K . Знайдіть периметр паралелограма, якщо $BK = 12$ см, $KC = 8$ см.
 А. 20 см.
 Б. 40 см.
 В. 44 см.
 Г. 64 см.

№ 2

- 1*. Знайдіть вписаний кут, якщо дуга, на яку він спирається, дорівнює 150° .
 А. 150° .
 Б. 75° .
 В. 90° .
 Г. 85° .
- 2*. Точки M і N — середини сторін AB і BC трикутника ABC . Знайдіть сторону AC трикутника, якщо $MN = 4$ см.
 А. 8 см.
 Б. 12 см.
 В. 2 см.
 Г. 6 см.
- 3*. Сума двох протилежних сторін описаного чотирикутника дорівнює 10 см. Знайдіть периметр чотирикутника.
 А. 10 см.
 Б. 20 см.
 В. 30 см.
 Г. 40 см.
4. Кути A , B і C вписаного чотирикутника $ABCD$ відносяться як $1 : 2 : 3$. Знайдіть кут D .
 А. 30° .
 Б. 60° .
 В. 120° .
 Г. 90° .
- 5*. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута, а основи дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть периметр трапеції.
 А. 17 см.
 Б. 22 см.
 В. 25 см.
 Г. 27 см.



Розділ 3. ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

У розділі дізнаєтесь:

- про подібні трикутники, їхні властивості й ознаки;
- про властивості медіани і бісектриси трикутника;
- що таке пропорційні відрізки, як їх знаходити;
- які середні пропорційні відрізки є в прямокутному трикутнику;
- як застосовувати подібність трикутників на практиці та під час розв'язування задач

§ 10. ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ

1. Що таке подібні трикутники

Ситуація. Максим і Дарина готувались до літньої регати й дізналися, що на сучасних спортивних вітрильниках встановлюють бермудські вітрила грот і стаксель. Ці вітрила мають трикутну форму і неоднакові розміри. Діти вирішили спочатку дослідити це питання математично. Вони пригадали, що в рівних трикутниках рівними є відповідні сторони й відповідні кути. Але вітрила грот і стаксель відрізняються одне від одного.



qr.orioncentr.com.ua/Q7V74



Які трикутники мали дослідити діти?

Подібні.



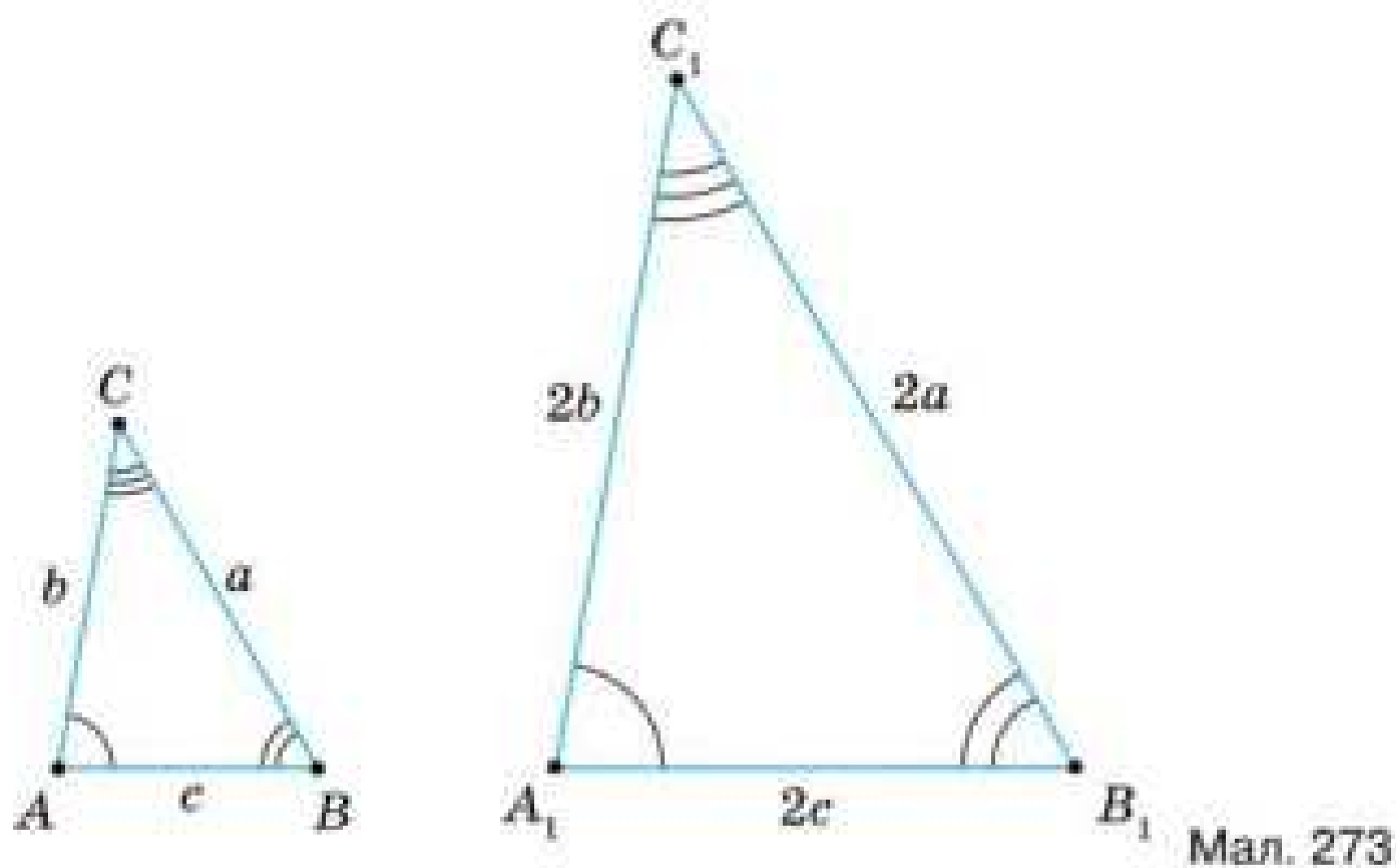
Подивіться на малюнок 273. Кути трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнюють відповідним кутам трикутника ABC : $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$. Але сторони трикутника $A_1B_1C_1$ удвічі більші за відповідні сторони трикутника ABC : $A_1B_1 = 2AB$, $B_1C_1 = 2BC$, $A_1C_1 = 2AC$. Отже, трикутник $A_1B_1C_1$ не дорівнює трикутнику ABC . Трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC — *подібні*.

Оскільки $A_1B_1 = 2AB$, то можна знайти *відношення* цих сторін: $\frac{A_1B_1}{AB} = 2$. Аналогічно одержимо: $\frac{B_1C_1}{BC} = 2$ і $\frac{A_1C_1}{AC} = 2$. Кожне з відношень дорівнює числу 2. Отже, їх можна прирівняти: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Із цієї подвійної рівності можна утворити три пропорції:

$$1) \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}; \quad 2) \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}; \quad 3) \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}.$$

Саме тому кажуть, що відповідні *сторони* подібних трикутників *пропорційні*.



Запам'ятайте!

Два трикутники називаються *подібними*, якщо в них відповідні кути рівні, а відповідні сторони — пропорційні.



Записуємо: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ — і говоримо: «Трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC ». Знак $\sim$ замінює слово «подібний».



Для подібних трикутників, як і для рівних трикутників, має значення порядок запису вершин.



Для трикутників на малюнку 273 запис « $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ » — **неправильний**.

Задача 1 Два трикутники на малюнку 274 подібні. Знайдіть довжини їхніх невідомих сторін.

Розв'язання У даних трикутниках:

$$\angle A = \angle N, \angle B = \angle K, \angle C = \angle P.$$

Тому порядок запису їхніх вершин такий:

$$\triangle ABC \sim \triangle NKP.$$

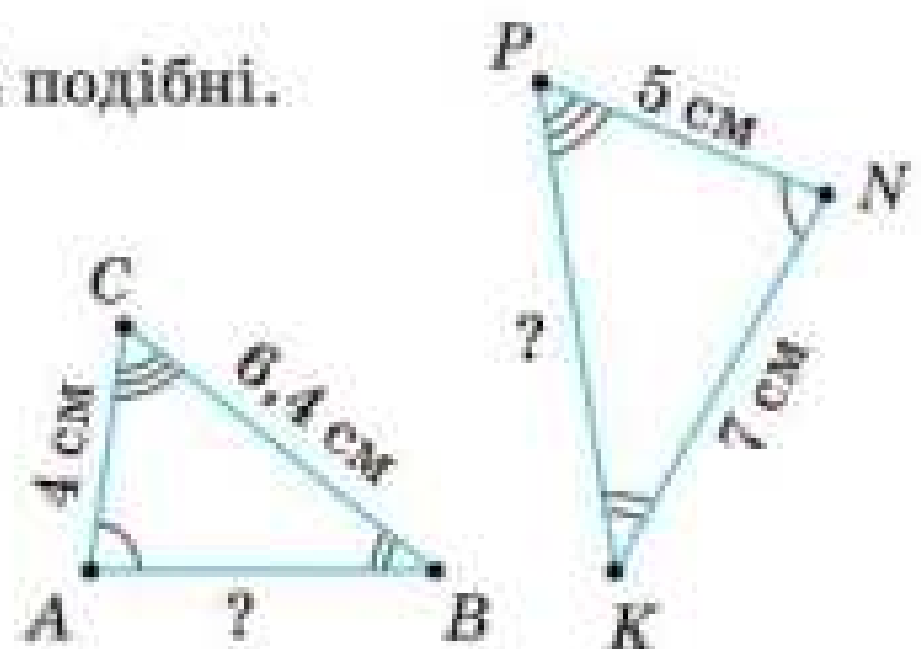
Складемо відношення відповідних сторін:

$$\frac{AB}{NK} = \frac{BC}{KP} = \frac{AC}{NP}.$$

Підставимо відомі довжини сторін:

$$\frac{AB}{7} = \frac{6,4}{5} = \frac{4}{5}.$$

Прирівняємо перше і третє відношення, а потім — друге і третє.



Мал. 274

Відповідно одержимо: $\frac{AB}{7} = \frac{4}{5}$, звідси $AB = 5,6$ см;

$$\frac{6,4}{KP} = \frac{4}{5}, \text{ звідси } KP = 8 \text{ см.}$$



- Щоб скласти відношення відповідних сторін подібних трикутників:
- 1) визначте відповідно рівні кути трикутників та запишіть назви цих трикутників;
 - 2) з'ясуйте, які їхні сторони є відповідними;
 - 3) запишіть рівність трьох дробів, у чисельниках яких — сторони одного з трикутників, а в знаменниках — відповідні сторони іншого.

2. Коефіцієнт подібності трикутників

Число, якому дорівнює відношення відповідних сторін подібних трикутників, називають *коефіцієнтом подібності*. Його позначають буквою k .

Подивіться на малюнок 273. Сторони трикутника $A_1B_1C_1$ удвічі довші за відповідні сторони подібного йому трикутника ABC . Тобто:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = 2.$$

Отже, коефіцієнт подібності трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC дорівнює 2.



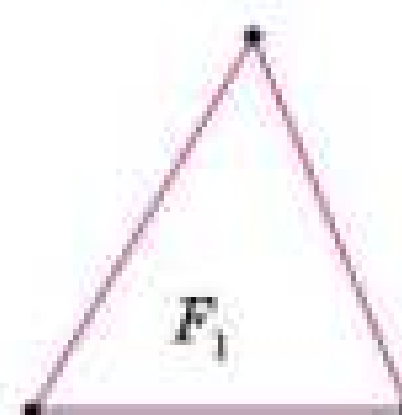
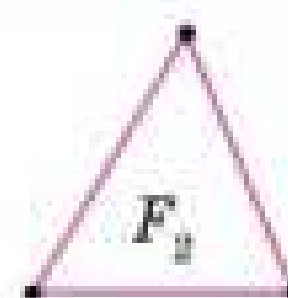
Коротко записуємо: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ ($k = 2$).

Якщо розглядати дані трикутники в іншому порядку — спочатку $\triangle ABC$, а потім $\triangle A_1B_1C_1$, — то й коефіцієнт подібності буде іншим, а саме: $k = \frac{1}{2}$.



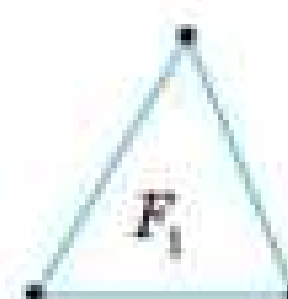
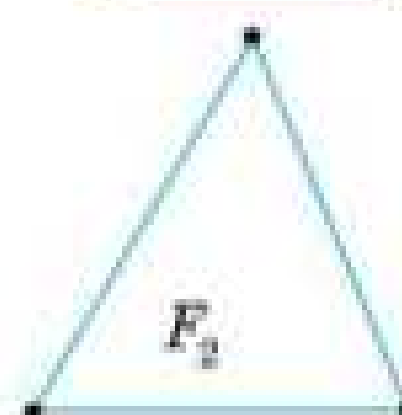
Коротко записуємо: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ($k = \frac{1}{2}$).

За означенням, коефіцієнт подібності k не може бути від'ємним числом або дорівнювати нулю. Якщо $k > 1$, то перший із двох подібних трикутників більший за другий (мал. 275). Якщо $0 < k < 1$, то навпаки — більшим буде другий трикутник (мал. 276).



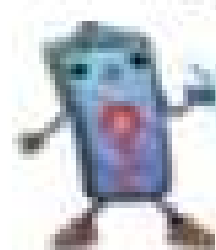
$k > 1$

Мал. 275



$0 < k < 1$

Мал. 276



Чи може коефіцієнт подібності трикутників дорівнювати 1?

Так.



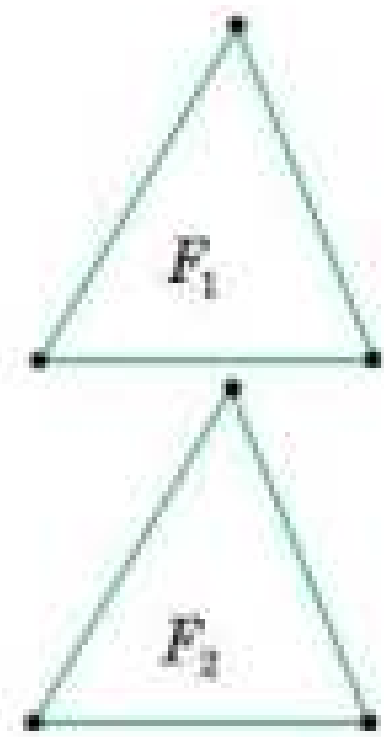
У цьому разі подібні трикутники мають відповідно рівні сторони, а значить, є рівними (мал. 277).



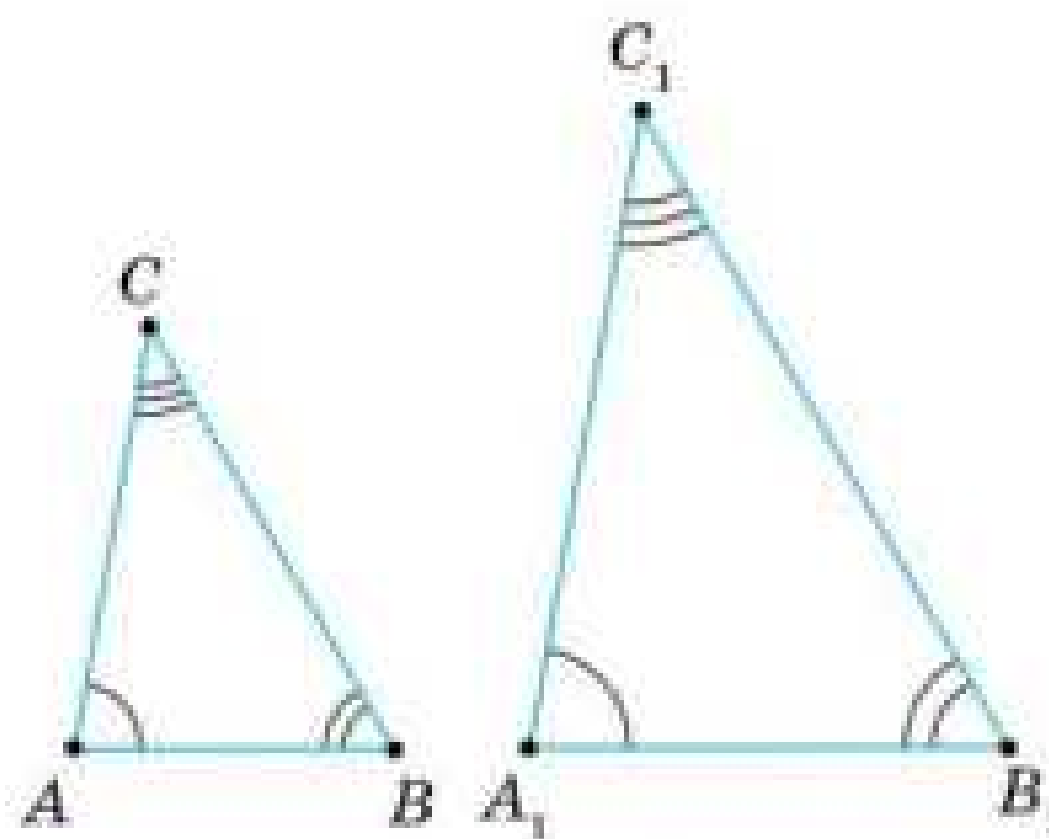
Рівність трикутників є окремим випадком подібності трикутників з коефіцієнтом $k = 1$.

Задача 2 Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню їхніх відповідних сторін. Доведіть.

Розв'язання Нехай трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 278) подібні з коефіцієнтом k . Доведемо, що $\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1}$.



$k = 1$
Мал. 277



Мал. 278

Оскільки $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$,

то $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $AC = kA_1C_1$.

Запишемо периметр трикутника ABC :

$$P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1 = k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1) = kP_{\triangle A_1B_1C_1}.$$

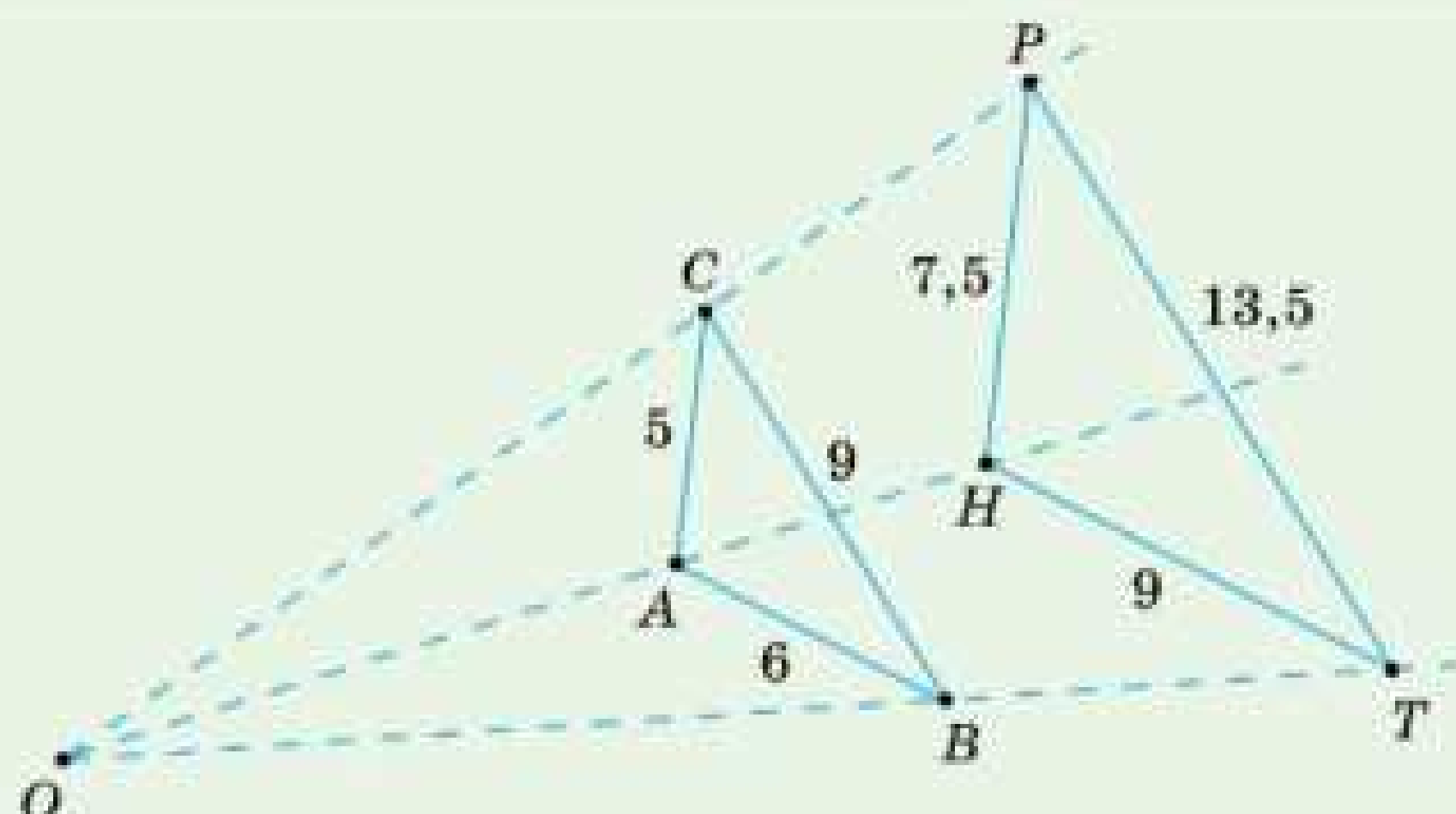
$$\text{Тоді } \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{kP_{\triangle A_1B_1C_1}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = k, \text{ або } \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Дізнайтеся більше

1. Слово «подібний» означає «який має спільні риси з ким-небудь, чим-небудь; схожий на когось, щось». Цей термін часто використовують у побуті, в науці, на виробництві. Наприклад, ескіз трикутної косинки, виконаний у масштабі $1 : 10$, та її викрійка, що виготовляється в натуральну величину, — це подібні трикутники. А ось викрійка й сама косинка — це рівні трикутники.

2. Знак $\sim$ увів у 1679 р. німецький математик Готфрід Лейбніц (1646–1716).

3. На малюнку 279 ви бачите подібні трикутники ABC і HTP . Вони розміщені так, що їхні сторони паралельні, а прямі $АН$, $ВТ$ і $СР$, які проходять через відповідні вершини, перетинаються в одній точці O . Кажуть, що такі подібні трикутники ABC і HTP мають перспективне розміщення.



Мал. 279

Поняття перспективи відоме з давніх-давен, але відповідна наукова теорія почала інтенсивно розвиватися лише в епоху Відродження. За допомогою перспективи художники досягали ефекту об'ємності своїх полотен. Першим, кому це вдалося зробити, був видатний флорентійський художник Джотто ді Бондоне (1266–1337). Вчення про перспективу розвивали й активно використовували у своїй творчості видатні митці Леонардо да Вінчі (Італія, 1471–1528), Альбрехт Дюрер (Німеччина, 1471–1528) та ін. Згодом з геометричних паростків учення про перспективу виросла нова наука — *проективна геометрія*. Її започаткував французький геометр, архітектор та інженер **Жерар Дезарг** (1591–1661), а розвинув до рівня стрункої математичної теорії — французький математик Жан-Віктор Понселе (1788–1867).



Жерар Дезарг

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
подібні трикутники	similar triangles	ähnliche Dreiecke	triangles semblables

qr.orioncentr.com.ua/8ShJp

Пригадайте головне

1. Які трикутники називаються подібними?
2. Як записати, що два трикутники подібні з коефіцієнтом k ?
3. Поясніть, як скласти відношення відповідних сторін двох подібних трикутників.
4. Чому дорівнює коефіцієнт подібності рівних трикутників?
5. Що можна сказати про відношення периметрів подібних трикутників?

Усне тренування

Обчисліть:

$100 : 25;$

$25 : 100;$

$63 : 7;$

$7 : 63;$

$36 : 18;$

$18 : 36;$

$72 : 9;$

$9 : 72.$

Розв'яжіть задачі

563'. Чи правильно, що в подібних трикутниках:

- 1) усі кути рівні;
- 2) відповідні кути рівні;
- 3) усі сторони рівні;
- 4) відповідні сторони рівні;
- 5) відповідні сторони пропорційні?

564'. Чи правильно зроблено висновок із запису $\triangle ABC \sim \triangle KLM$:

- 1) $\angle A = \angle M$;
- 2) $\angle A = \angle K$;
- 3) $\angle B = \angle L$;
- 4) $\angle C = \angle K$;
- 5) $\angle C = \angle M$?

565'. Відомо, що в подібних трикутниках $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle L$ і $\angle C = \angle K$.

Чи є правильним запис:

- 1) $\triangle ABC \sim \triangle KLM$;
- 2) $\triangle ABC \sim \triangle LKM$;
- 3) $\triangle ABC \sim \triangle MLK$?

566'. Чи правильно зроблено висновок із запису $\triangle ABC \sim \triangle KLM$:

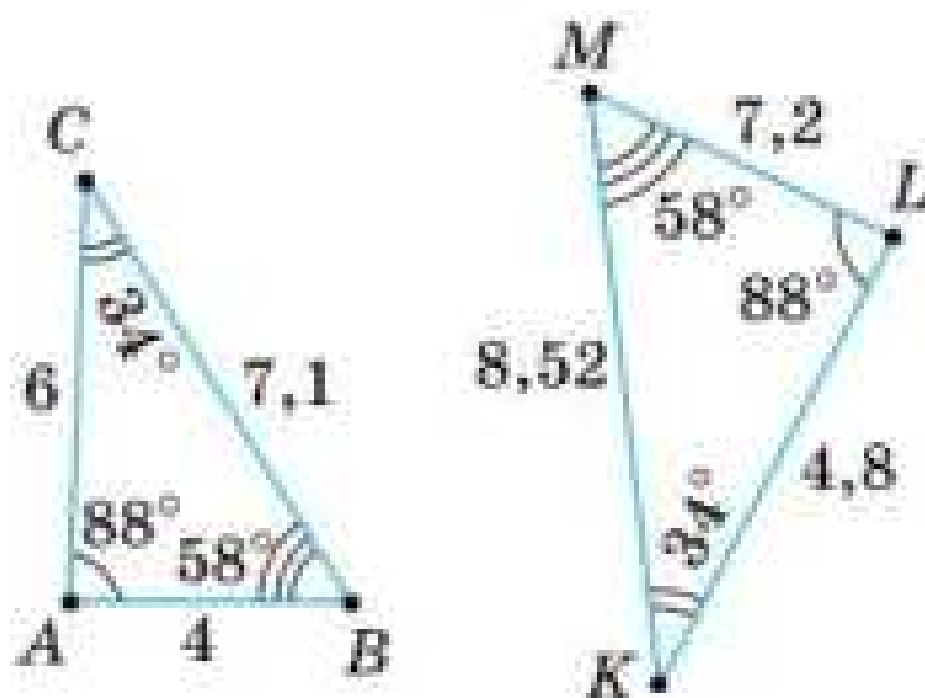
- 1) $\frac{AB}{KM} = \frac{BC}{KL} = \frac{AC}{LM}$;
- 2) $\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{LM} = \frac{AC}{KM}$?

567'. Чи може коефіцієнт подібності двох трикутників дорівнювати:

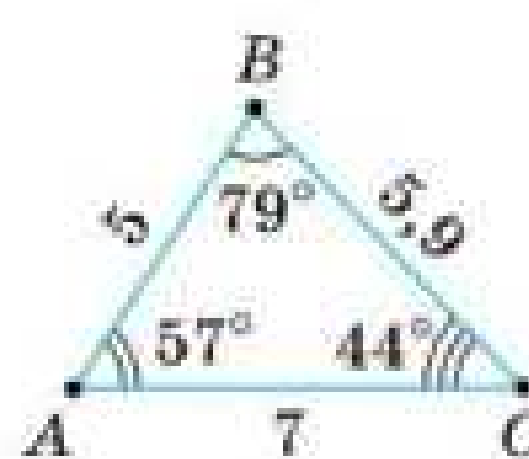
- 1) -2 ;
- 2) 0 ;
- 3) 3 ;
- 4) 1 ;
- 5) $\frac{1}{5}$;
- 6) $\frac{6}{5}$?

568'. На малюнках 280, 281 зображено подібні трикутники. Назвіть їх.

Запишіть: 1) їхні відповідні кути; 2) їхні відповідні сторони.



Мал. 280



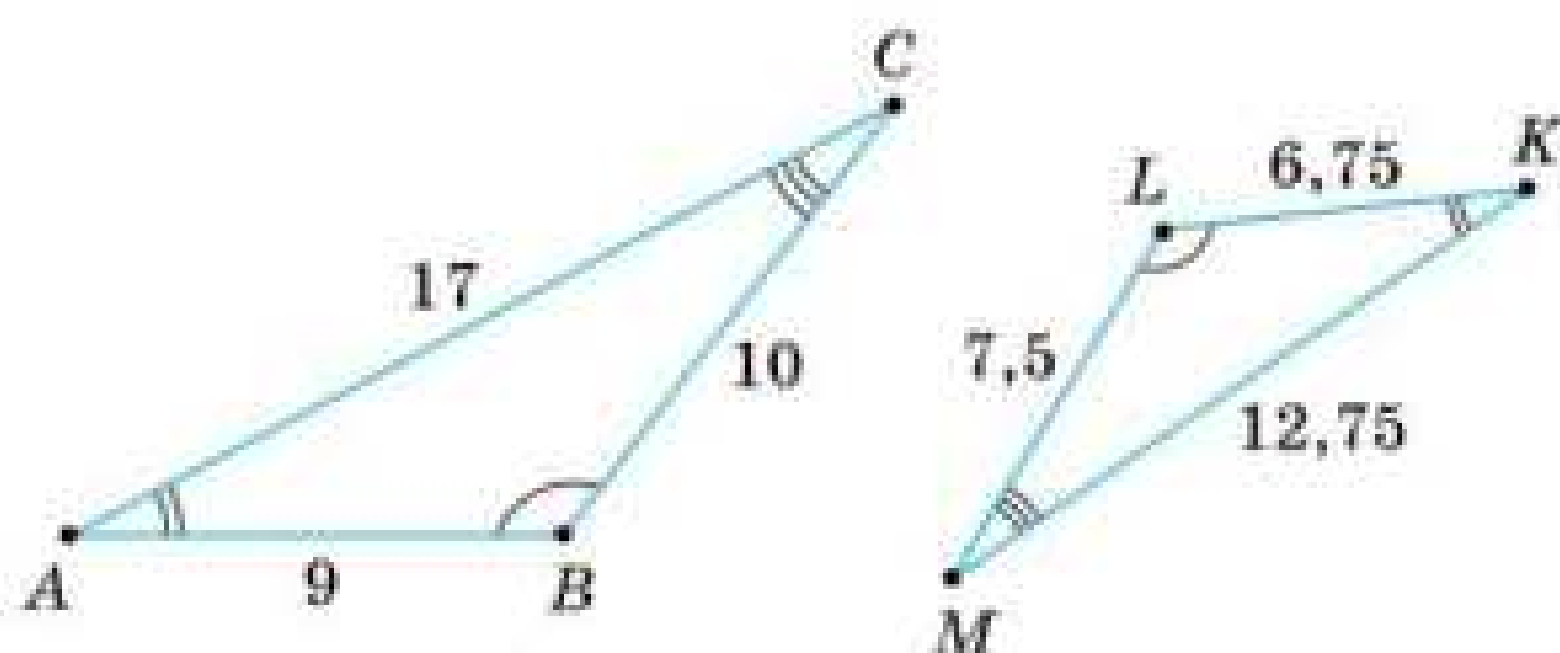
Мал. 281

569* Дано подібні трикутники:

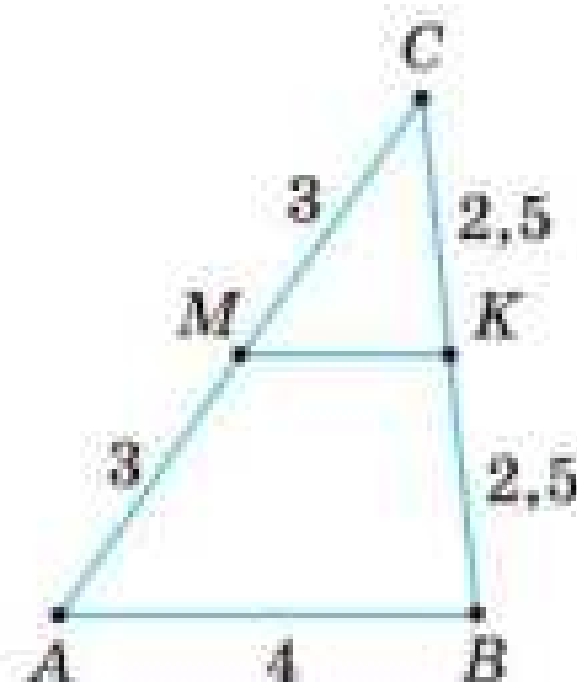


1) ABC і KLM (мал. 282); 2) ABC і MKC (мал. 283).

Знайдіть відношення їхніх відповідних сторін.



Мал. 282

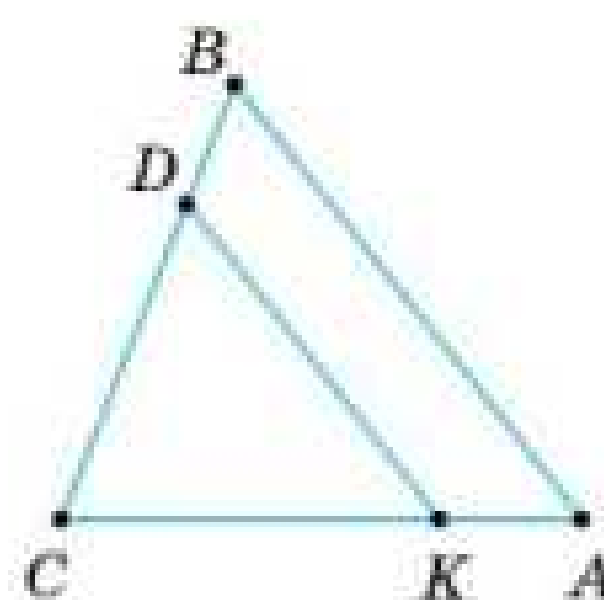


Мал. 283

570* На малюнку 284 $\triangle ABC \sim \triangle KDC$. Доберіть пари відрізків так, щоб із них можна було утворити праву частину пропорції:

1) $\frac{KD}{AB} = \dots$; 2) $\frac{AC}{KC} = \dots$; 3) $\frac{BC}{DC} = \dots$.

Скільки таких пар відрізків можна дібрати?



Мал. 284

571* Чи можуть бути подібними трикутники:

- 1) гострокутний і тупокутний;
- 2) прямокутний і тупокутний;
- 3) рівнобедрений і рівносторонній?

572* $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть невідомі кути трикутників, якщо:

- 1) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B_1 = 60^\circ$;
- 2) $\angle B = 110^\circ$, $\angle C_1 = 25^\circ$.

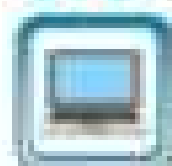
573* $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть невідомі кути трикутників, якщо $\angle C = \angle B_1 = 50^\circ$.

574* Чи можуть сторони двох подібних трикутників мати довжину:

- 1) 1,2 см, 1,3 см, 2,2 см і 24 мм, 26 мм, 44 мм;
- 2) 5 мм, 50 см, 50 см і 5 см, 50 мм, 50 мм?

575* Чи можуть сторони двох подібних трикутників мати довжину: 3 дм, 4 дм, 5 дм і 9 м, 12 м, 15 м?

576* $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони AC і B_1C_1 , якщо:



- 1) $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $A_1B_1 = 56$ мм, $A_1C_1 = 42$ мм;
- 2) $AB = 40$ мм, $BC = 37$ мм, $A_1B_1 = 20$ см, $A_1C_1 = 6,5$ см.



qr.orioncentr.com.ua/3PV7o

577'. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть сторони AB і A_1C_1 , якщо:



$BC = 13$ см, $AC = 14$ см, $B_1C_1 = 4,5$ дм, $A_1B_1 = 3,9$ дм.

578'. Пряма, що перетинає дві сторони трикутника й відтинає від нього подібний трикутник, паралельна третій стороні трикутника. Доведіть.

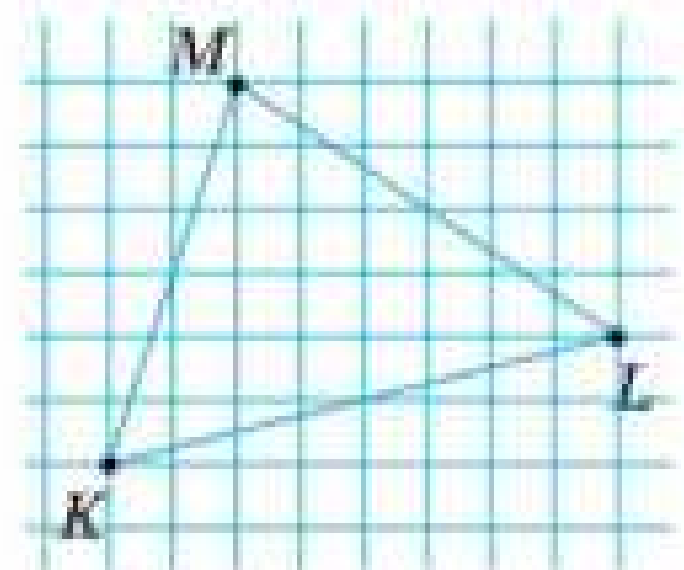
579'. Пряма перетинає дві сторони трикутника ABC в точках M і N і відтинає від нього подібний трикутник. Назвіть паралельні прямі, які утворилися при цьому, якщо:

1) $M \in AB$ і $N \in BC$; 2) $M \in AC$ і $N \in BC$.

580'. Пряма перетинає дві сторони трикутника ABC в точках M і N і відтинає від нього подібний трикутник. Назвіть паралельні прямі, які утворилися при цьому, якщо $M \in AC$ і $N \in AB$.

581'. Побудуйте за клітинками спочатку трикутник KLM (мал. 285), а потім $\triangle KBC \sim \triangle KLM$, якщо:

1) $k = 2$; 2) $k = \frac{2}{3}$.



Мал. 285

582'. Побудуйте за клітинками спочатку трикутник KLM (мал. 285), а потім $\triangle KBC \sim \triangle KLM$, якщо $k = \frac{1}{2}$.

583'. Обчисліть периметри подібних трикутників, зображених на малюнках: 1) 280; 2) 281; 3) 283. Знайдіть відношення периметрів подібних трикутників.

584'. Обчисліть периметри подібних трикутників, зображених на малюнку 282. Чому дорівнює відношення периметрів цих трикутників?

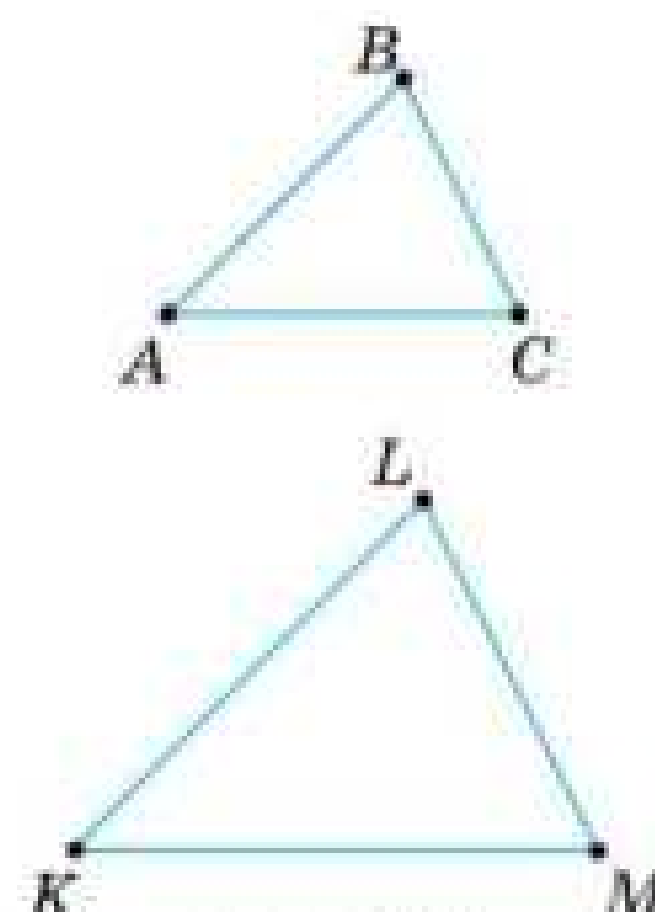


585'. a , b , c — сторони трикутника з периметром P . Він подібний із коефіцієнтом k іншому трикутнику, периметр якого дорівнює P_1 . Знайдіть невідомі величини за таблицею 22.

Таблиця 22

a	12 см	20 см	8 см	
b	16 см	21 см		8 см
c	18 см		17 см	14 см
P				
P_1		140 см	100 см	12,4 см
k	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{2}$

- 586.** Знайдіть сторони рівностороннього трикутника, якщо периметр  подібного йому трикутника з коефіцієнтом 4 дорівнює:
1) 36 см; 2) 45 см; 3) 72 см.
- 587.** Сторони трикутника відносяться як 3 : 5 : 7. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого менша сторона дорівнює 5 см.
- 588.** Сторони трикутника відносяться як 2 : 3 : 4. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого більша сторона дорівнює 12 см.
- 589.** Якщо трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC і трикутник $A_2B_2C_2$ подібний трикутнику ABC , то трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ — подібні. Доведіть.
- 590.** Кожну сторону трикутника збільшено на: 1) 2 см; 2) 5 см. З утворених відрізків побудовано новий трикутник. Чи може він бути подібним даному?
- 591.** Кожну сторону трикутника збільшено на:
1) третину її довжини;
2) 25 % її довжини.
Чи можна з утворених відрізків побудувати трикутник?
Чи може він бути подібним даному?
- 592.** $\triangle ABC \sim \triangle MOP$ ($k_1 = 3$) і $\triangle ABC \sim \triangle TEN$ ($k_2 = 2$). Чи подібні трикутники MOP і TEN ? З яким коефіцієнтом подібності?
- 593.** $\triangle ABC \sim \triangle MOP$ ($k_1 = 4$) і $\triangle MOP \sim \triangle TEN$ ($k_2 = \frac{1}{2}$). Чи подібні трикутники ABC і TEN ? З яким коефіцієнтом подібності?
- 594.** Два рівнобедрені трикутники подібні з коефіцієнтом $k = 0,5$. В одного з них дві сторони дорівнюють 12 см і 5 см. Знайдіть третю сторону іншого трикутника.
- 595.** Два рівнобедрені трикутники подібні з коефіцієнтом $k = 2,5$. В одного з них дві сторони дорівнюють 6 см і 15 см. Знайдіть третю сторону іншого трикутника. 
- 596.** Визначте периметри двох подібних трикутників, якщо їхні відповідні сторони відносяться як 7 : 4, а різниця їхніх периметрів дорівнює 48 см.
- 597.** Різниця периметрів двох подібних трикутників дорівнює 15 см, а їхні відповідні сторони відносяться як 2 : 3 (мал. 286). Чому дорівнюють периметри цих трикутників?



Мал. 286

- 598.** У трапеції з основами a і b одну з бічних сторін, що дорівнює c , продовжено до перетину з продовженням іншої бічної сторони. Утворилися два подібні трикутники зі спільною вершиною O . На яку відстань продовжено першу бічну сторону, якщо:
- 1) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 6$ см;
 - 2) $a = 8$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см?
- 599*.** Відповідні сторони двох подібних трикутників попарно додано і з трьох утворених відрізків побудовано новий трикутник. Чи подібний цей трикутник даним трикутникам?
- 600*.** Чи існують подібні трикутники, у яких відношення двох сторін одного трикутника дорівнює відношенню квадратів відповідних сторін іншого?
- 601*.** Сторони рівностороннього трикутника спочатку збільшено в n разів, а потім зменшено в n разів. Чи одержано трикутник, подібний даному? Який коефіцієнт подібності першого і третього трикутників?
- 602*.** Два подібні прямокутні трикутники мають гострий кут 30° . Гіпотенуза одного з них дорівнює меншому катету другого. Визначте коефіцієнт подібності цих трикутників.
- 603*.** У рівнобедреному трикутнику основа в n разів менша від бічної сторони, а периметр дорівнює P . Знайдіть сторони подібного йому трикутника з коефіцієнтом k , якщо:
- 1) $n = 2$, $P = 50$ см, $k = 1,5$;
 - 2) $n = 3$, $P = 35$ см, $k = 0,75$.
- 604*.** Найбільші сторони двох подібних трикутників дорівнюють відповідно a_1 і a_2 , а різниця їхніх периметрів $P_2 - P_1 = m$. Доведіть, що
- $$P_1 = \frac{ma_1}{a_2 - a_1} \text{ і } P_2 = \frac{ma_2}{a_2 - a_1}.$$
- 605*.** Доведіть, що радіус кола, що проходить через середини сторін трикутника, дорівнює половині радіуса кола, описаного навколо цього трикутника.

Проявіть компетентність

- 606.** Рівносторонній трикутник зі стороною 0,1 мм розглядають під мікроскопом, який дає збільшення в 40 разів. Чи збільшаться кути трикутника?
- 607.** Зробіть необхідні вимірювання та з'ясуйте, чи подібні внутрішній і зовнішній трикутники в косинці.

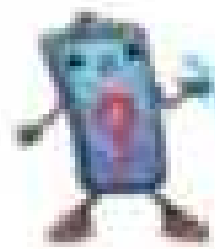
- 608.** На географічній карті три населені пункти віддалені один від одного на 6 см, 5 см і 4 см. На місцевості найбільша відстань між ними дорівнює 15 км.
1. Який масштаб цієї карти?
 2. Яка найменша відстань між населеними пунктами?
 3. Яка відстань між іншими населеними пунктами?
- 609.** Якщо до листа сталі, що має форму трапеції з основами 15 см і 25 см та бічними сторонами 18 см і 20 см, прикладемо сталевий лист у формі трикутника з основою 15 см, то одержимо сталевий лист трикутної форми. Які розміри утвореного листа?
- 610.** Триярусну ялинку з тасьми утворюють три подібні рівносторонні трикутники. У них відповідні сторони паралельні, а висоти до горизонтальних сторін лежать на одній прямій.
1. Чи вистачить 2,5 м тасьми для такої ялинки, якщо її основа дорівнює 40 см, а трикутники подібні з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$?
 2. Проведіть необхідні вимірювання та з'ясуйте, скільки метрів тасьми знадобиться, щоб прикрасити такими ялинками штори на вікнах вашої класної кімнати.



§ 11. УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

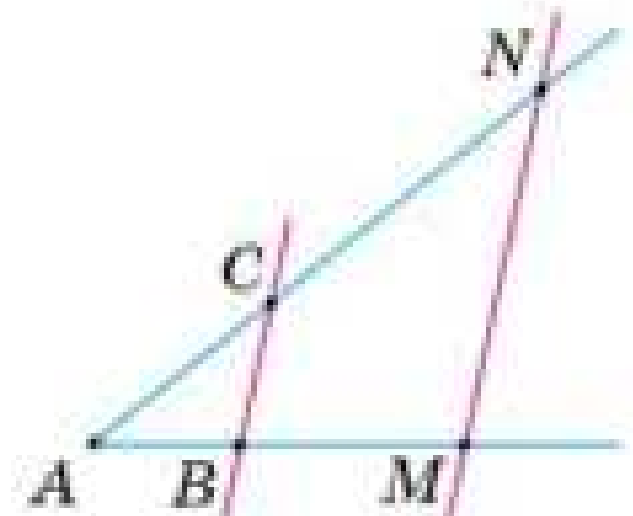
qr.orioncentr.com.ua/nc7TP


Ситуація. Учні та учениці 8-А класу на уроці геометрії виконували мінідослідження. Вони накреслили кут MAN . Відклали на його стороні AM пропорційні відрізки AB і BM , такі, що $AB : BM = 1 : 2$. Через точки B і M провели паралельні прямі, що перетинають сторону AN цього кута в точках C і N (мал. 287). А потім порівняли довжини відрізків AC і CN та зробили висновок.



Який висновок зробили учні?

$$AC : CN = 1 : 2.$$



Мал. 287

Відповідна теорема має назву узагальненої теореми Фалеса. Наведемо її без доведення.

Запам'ятайте!

Теорема (узагальнена теорема Фалеса)

Паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах **пропорційні відрізки**.

Узагальнену теорему Фалеса інакше називають *теоремою про пропорційні відрізки*.

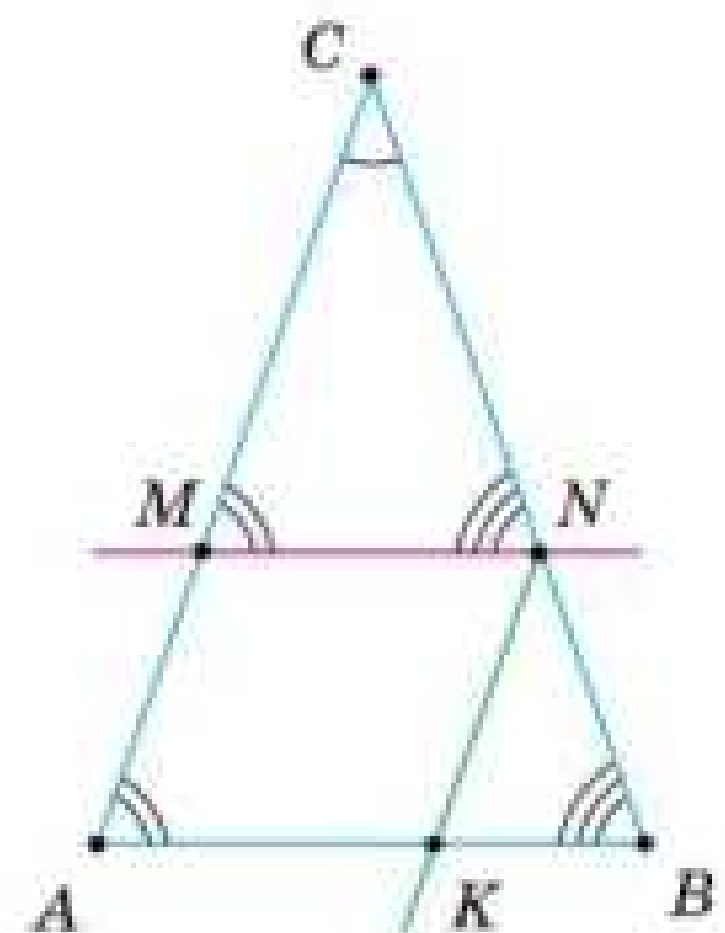
Наслідок. Пряма, що перетинає дві сторони трикутника й паралельна третій його стороні, відтинає від нього подібний трикутник.

Справді, у трикутників ABC і MNC (мал. 288) є спільний кут C . Його перетинають паралельні прямі AB і MN . Із січною AC вони утворюють рівні відповідні кути CAB і CMN . Треті кути трикутників також рівні. Доведемо пропорційність сторін трикутників.

За узагальненою теоремою Фалеса, $\frac{AM}{MC} = \frac{BN}{NC}$,
тому $\frac{AM + MC}{MC} = \frac{BN + NC}{NC}$, звідси $\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC}$.

Провівши пряму $NK \parallel AC$, аналогічно одержимо: $\frac{BC}{NC} = \frac{BA}{KA}$. Але $KA = MN$, тому $\frac{BC}{NC} = \frac{BA}{NM}$.

Отже, у трикутниках ABC і MNC відповідні кути — рівні, а відповідні сторони — пропорційні: $\frac{AC}{MC} = \frac{BC}{NC} = \frac{BA}{NM}$. Тому дані трикутники подібні за означенням.



Мал. 288



Щоб довести подібність трикутників:

- 1) доведіть рівність відповідних кутів даних трикутників;
- 2) доведіть пропорційність відповідних сторін даних трикутників;
- 3) зробіть висновок: трикутники подібні за означенням.

Дізнайтеся більше

1. Може виникнути запитання: Як довести узагальнену теорему Фалеса?

Поділимо відрізок AB на n рівних відрізків (мал. 289). Нехай довжина кожного з них дорівнює d . Тоді $AB = dn$. Відкладемо від точки B на промені BM відрізки завдовжки d . Через усі точки поділу проведемо прямі, паралельні BC . За теоремою Фалеса, ці прямі відтинають рівні відрізки й на стороні AC даного кута.

Позначимо їхні довжини d_1 . На відрізку AC їх буде та сама кількість n , тому $AC = d_1 n$.

Нехай на відрізку BM уміщується ціла кількість m таких відрізків (мал. 289). На відрізку CN їх теж буде m . Тоді $BM = dm$, а $CN = d_1 m$.

Знайдемо відношення відрізків на двох сторонах кута:

$$\frac{AB}{BM} = \frac{n}{m}, \quad \frac{AC}{CN} = \frac{n}{m}.$$

Бачимо, що два відношення дорівнюють тому самому числу $\frac{n}{m}$, отже, можемо їх прирівняти:

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}.$$

Нехай на відрізку BM уміщується m відрізків завдовжки d і залишається остача — відрізок меншої довжини, ніж d (мал. 290). Це означає, що відрізок з m частин завдовжки d менший від відрізка BM , а відрізок з $m + 1$ частин завдовжки d — більший за цей відрізок.

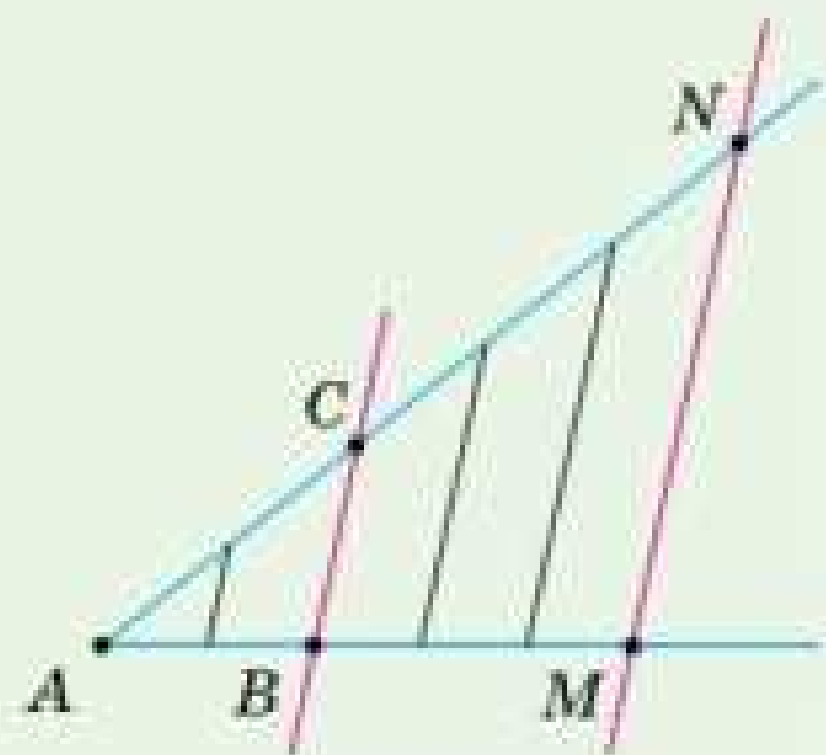
Одержали нерівність: $dm < BM < d(m + 1)$.

Оскільки $d = \frac{AB}{n}$, то $\left(\frac{AB}{n}\right)m < BM < \left(\frac{AB}{n}\right)(m + 1)$.

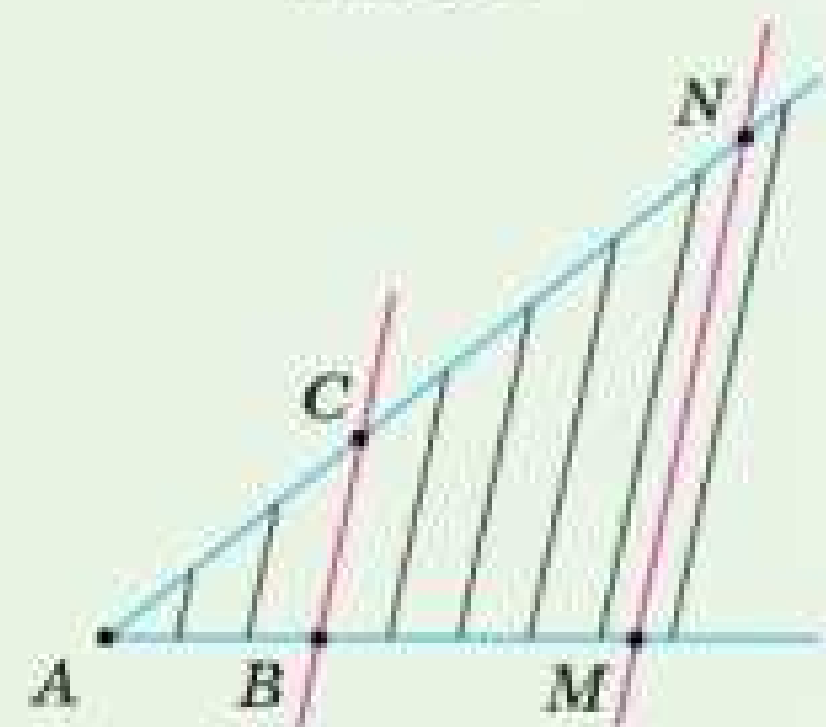
Поділимо всі члени нерівності на AB : $\frac{m}{n} < \frac{BM}{AB} < \frac{m+1}{n}$, або $\frac{m}{n} < \frac{BM}{AB} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$.

Якщо збільшувати кількість точок поділу, то число n стане нескінченно великим, а число $\frac{1}{n}$ — близьким до нуля. Тому відношення $\frac{BM}{AB}$ відрізняється від числа $\frac{m}{n}$ на дуже мале число $\frac{1}{n}$.

Міркуючи аналогічно, одержимо: $d_1 m < CN < d_1(m + 1)$.



Мал. 289



Мал. 290

Якщо $d_1 = \frac{AC}{n}$, то: $\left(\frac{AC}{n}\right)m < CN < \left(\frac{AC}{n}\right)m + \frac{AC}{n}$

Отже, відношення $\frac{CN}{AC}$ відрізняється

від $\frac{1}{n}$. А це може бути лише тоді, коли $\frac{BM}{AC} = \frac{1}{n}$

Звідси випливає, що $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CN}$.

2. Відрізок x називають *четвертим пропорційним* трьох даних відрізків a , b і c , якщо ється рівність $a : b = c : x$. Для побудови четвертого пропорційного відрізка на стороні даного кута від його вершини O відкладаємо відрізки $OA = a$, $AB = b$, а на іншій стороні кута — відрізок $OC = c$ (мал. 291). З'єднавши точки A і C , побудуємо $BX \parallel AC$. Відрізок CX — шуканий, бо за узагальненою теоремою Фалеса, $\frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CX}$.



- 3) відрізки, утворені на одній сторіні
- 4) відрізки, утворені на одній сторіні
- 5) відрізки, утворені на одній сторіні
- 6) відрізки, утворені на одній сторіні

612'. Чи правильно, що від даного тупого кута перетинає:

- 1) будь-яка пряма;
- 2) пряма, що проходить через вершину кута;
- 3) пряма, що перетинає дві сторони кута;
- 4) пряма, що перетинає дві сторони кута в одній його стороні?

613°. У якому відношенні точка O ділить відрізок AB (мал. 292, 293)?

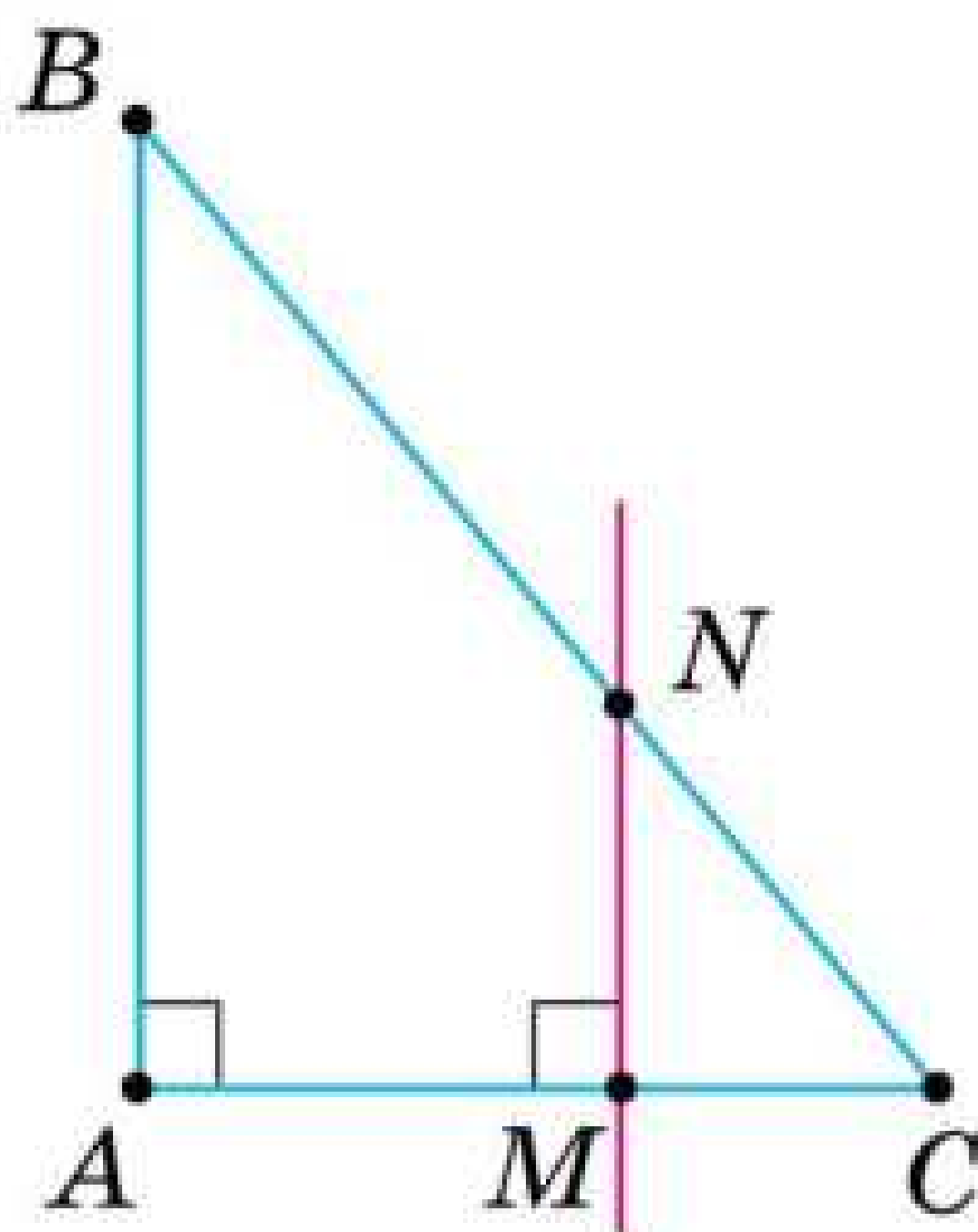
614°. Запишіть відношення, у якому точка E ділить відрізок AB (мал. 294).



615°. Точка M ділить відрізок PN у певному відношенні. Який із відрізків довше: PM чи MN , якщо:

- 1) $PM \cdot MN = 5 \cdot 2 \cdot 2$
- 2) $PM \cdot MN = 5 \cdot 2 \cdot 2$

- 619°.** На стороні BC кута ABC відклади відрізки $BD = 4$ см і $DC = 2$ см. Через точки C і D проведіть паралельні прямі. Як відносяться відрізки BM і MC ?
- 620°.** Яку кількість відрізків потрібно відкласти на проміжку, щоб вони були рівні?
- 621°.** Чи подібні трикутники ABC і DEF ? Поясніть.
- 622°.** Чи подібні трикутники ABC і DEF ? Поясніть.



Мал. 297

631°. Чи є пропорційними чотири в



8 см, 3 см, 24 см і 9 см?

632°. До трьох даних відрізків a , b і c щоб вони були пропорційними відповідно:

1) 1, 2, 3; 2) 6, 3, 4; 3) 3, 5, 7.

Скільки розв'язків має задача?

633°. На сторонах кута ABC розміщені точки P і Q на стороні BA , E і F — на стороні BC . Чи є

1) $BP = PQ$ і $BE = EF$; 3)

2) $BQ = QR$ і $BF = FE$; 4)

Зробіть малюнки та поясніть відповідь.

634°. Чи подібні трикутники ABC і DEF якщо $AB = DE$ і $BC = EF$?

635°. Як найпростіше побудувати трикутник, якщо дані його сторони 3, 4, 5?

636°. Паралельно стороні AB рівностороннього трикутника ABC проведено дві прямі, які перетинають

$$AC$$
 і BC в точках M і N та E і F . $MN = \frac{3}{4}AB$, $EF = \frac{1}{2}AB$.

639. На продовженні відрізка AB знайдіть точку N так, щоб
 $AN : BN = m : n$. Знайдіть довжину відрізка AN , якщо:

- 1) $d = 5$ см, $m = 3$, $n = 2$;
- 2) $d = 16$ см, $m = 5$, $n = 1$.

640. На малюнку 300 $AB \parallel DC \parallel KL$, AC і BD перетинаються в точці F , причому $AF : KF = 2 : 3 : 2$. Знайдіть довжини відрізків BC , CL , LF , DC і KL , якщо:

- 1) $AB = 70$ мм, $FC = 40$ мм;
- 2) $AB = 21$ см, $FC = 15$ см.

641. На малюнку 301 $AM \parallel BN \parallel CK$, AC і BD перетинаються в точці L , причому $AL : BL : CL = a : b : c$. Знайдіть довжини відрізків AM , BN і CK , якщо:

- 1) $a = 2,5$ см, $b = 4$ см, $c = 2$ см,
- 2) $a = 10$ см, $b = 16$ см, $c = 8$ см.

642. Сторони кута A перетинаються двома паралельними прямими BC і OH , причому точка O лежить між точками A і H . Знайдіть:

- 1) AN , якщо $AB = 8$ см, $AO = 1$ см;
- 2) AO , якщо $AC : AN = \frac{3}{11} : 0,6$.

- 648.** Через вершину B паралелограма проведено пряму, паралельну до сторони AD , яка перетинає продовження сторони AC в точці N . Знайдіть довжину відрізка BN , якщо $AD = 5$, $BN : MN = 3 : 2$.
- 649.** Побудуйте два кола, що дотикаються до двох паралельних прямих і відносяться як $2 : 3$.
- 650.** Побудуйте два кола, що дотикаються до двох паралельних прямих і відносяться як $3 : 4$.
- 651*.** На відрізку AB позначено дві точки M і N , причому M лежить між A і N . Знайдіть, які частини відрізка AB дорівнюють AM , AN і ON .
- 652*.** Відрізок AB має довжину a . Точка M лежить на відрізку AB , а точка T лежить на продовженні відрізка AB за точку B . Знайдіть довжину відрізка MT , якщо: 1) $a = 6$ см, $AM = 2$ см; 2) $a = 10$ см, $AM = 4$ см.
- 653*.** За даними на малюнку 302 доведіть, що:
- 1) $a : c = b : d$;
 - 2) $a : c = (a + b) : (c + d)$;

жини відрізків цих прямих, трапеції, якщо: 1) $a = 7$ см, $b =$



Якщо в трапеції проведено кі...
то через її вершину проведіть...
сторін. Тоді трапеція буде под...
Задача зведеться до відшука...
у трикутнику.

658*. Основи трапеції дорівнюють a і b . Через кожну точку, позначено n точок, які ділять кожну сторону трапеції, проведено прями, паралельні основам. Знайти довжину цих прямих для обчислення довжин відрізків, на які вони ділять бічних сторонах трапеції, якщо $a = 10$ см, $b = 20$ см, $n = 4$.

Проявіть компетентність

659. Для зменшення або збільшення застосовують пропорційний розподіл. На чому ґрунтується спосіб його застосування?

660. Вулиці Садова та Квітнева перетинаються під прямим кутом. Відстань між Садовою та Квітневою вулицями становить 100 м. Знайти довжину вулиці Садової, якщо відстань між Квітневою та Садовою вулицями становить 120 м.

§ 12. ПЕРША ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ

1. Навіщо потрібні ознаки подібності?

Ситуація. Іван і Дарина з'ясовували, чи подібні два трикутники, і пригадали означення подібності: **трикутники називаються подібними, якщо відповідні кути — рівні, а відповідні сторони пропорційні.**



Як за означенням встановити, чи подібні два трикутники?

Довести рівність їхніх кутів і пропорційність їхніх сторін.



Це **не раціонально**, бо відповідно до означення потрібно

Тому користуються **ознаками подібності**. У цих ознаках стверджується, що для висновку про подібність **достатньо** дослідити **лише дві або три** відповідні сторони і кути.

2. Перша ознака подібності

Прямі BC і B_1C_1 із січною A_1B .
 $\angle A_1BC = \angle A_1B_1C_1$. Отже, за ознакою
За наслідком із узагальненої те
лельна стороні B_1C_1 , відтинає від тр
кутник. Тому $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Наслідок. Рівносторонні трику

Справді, у рівносторонніх трику
Тому ці трикутники подібні за двом

Задача У трапеції $ABCD$ діагоналі
ретинаються в точці O (мал. 309).
 $\triangle AOB \sim \triangle COD$.

Розв'язання Розглянемо трикут
 COD . У них: $\angle AOB = \angle COD$ як
 $\angle OAB = \angle OCD$ як внутрішні різно
паралельних прямих AB і CD та січн
 $\triangle AOB \sim \triangle COD$ за двома кутами.



Щоб довести подібність двох т
1) виділіть їх на малюнку;
2) доведіть рівність двох пар в
3) зробіть висновок: трикутни

Дізнайтеся більше

На властивостях подібних трикутників принцип побудови *номограми* — спеціального зображення, за допомогою якого можна, не виконуючи числень, одержувати розв'язки певного роду геометричного глянемо задачу.

Задача До даного відрізка AB в його проєкції на один бік від нього проведено два перпендикуляри $AM = a$ і $BN = b$, а також відрізки MB і AN перетинаються в точці O . Відстань від O до AB дорівнює x . Знайдіть залежність x від a і b .

Розв'язання Нехай точка K (мал. 31) є проекцією точки O на відрізок AB . Проведемо перпендикуляр, проведеного з точки O до відрізка AB . За умовою задачі, $AM \perp AB$, $BN \perp AB$.

Тоді одержимо:

1) у прямокутному трикутнику ABN $ON = \frac{b}{2}$

2) у прямокутному трикутнику BAM $OM = \frac{a}{2}$

Додавши одержані рівності, маємо: $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Пригадайте головне

1. Сформулюйте та доведіть ознаку подібності.
2. Чому рівносторонні трикутники подібні?
3. Поясніть, як довести подібність двох трикутників.

Усне тренування

Чи існує трикутник, у якого кут

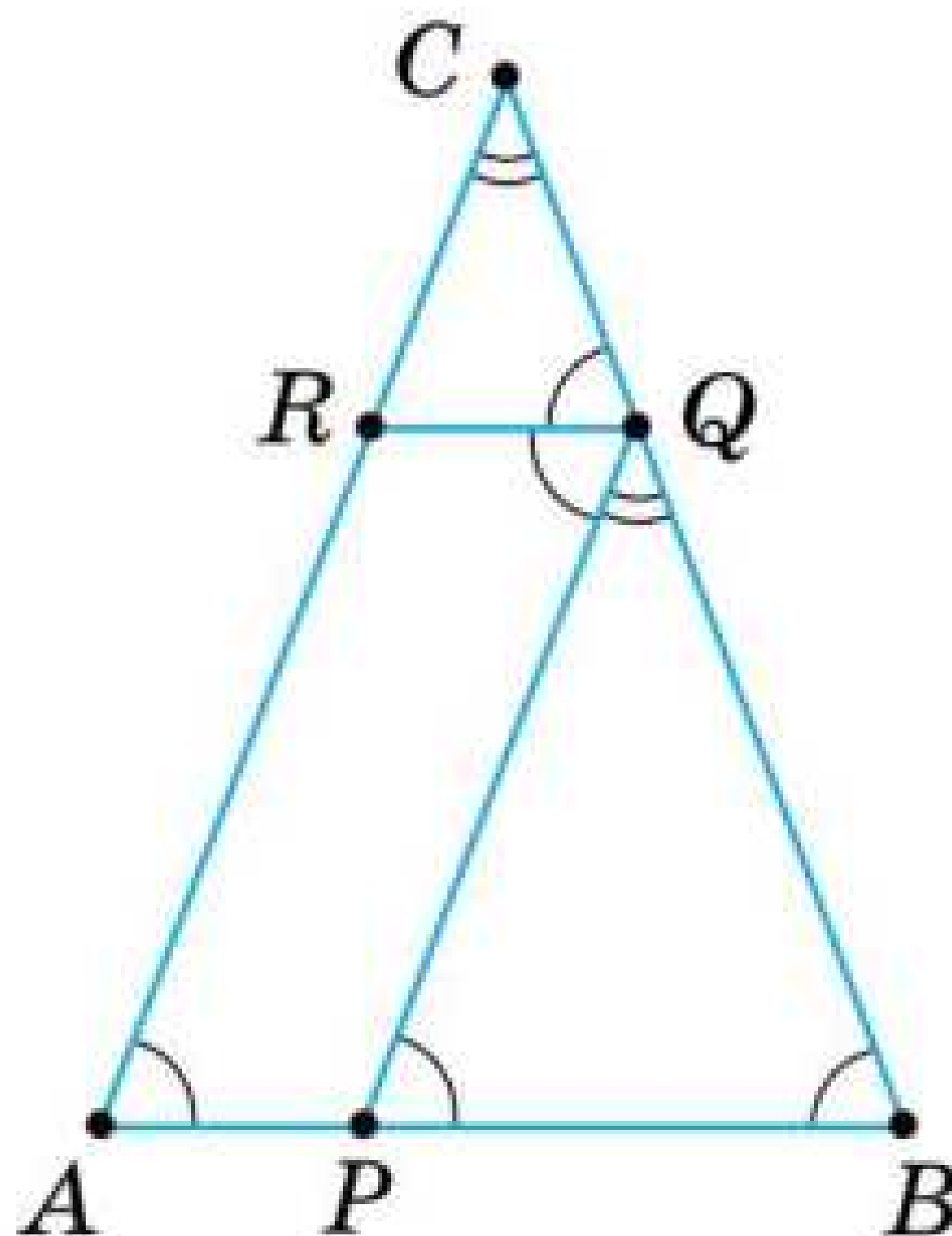
- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $20^\circ, 80^\circ, 90^\circ$; | $55^\circ, 35^\circ, 80^\circ$; |
| 2) $120^\circ, 30^\circ, 40^\circ$; | $125^\circ, 35^\circ, 10^\circ$; |

Розв'яжіть задачі

- 663'.** Чи правильно, що в першій ознаці подібності трикутників говорять про:
- 1) сторони даних трикутників;
 - 2) кути даних трикутників;
 - 3) рівність двох кутів трикутників;
 - 4) рівність двох кутів даних трикутників;
 - 5) рівність двох відповідних кутів трикутників?

664'. Чи правильно, що рівносторонні трикутники подібні?

670°. На малюнку 315 знайдіть по
 вони подібні.

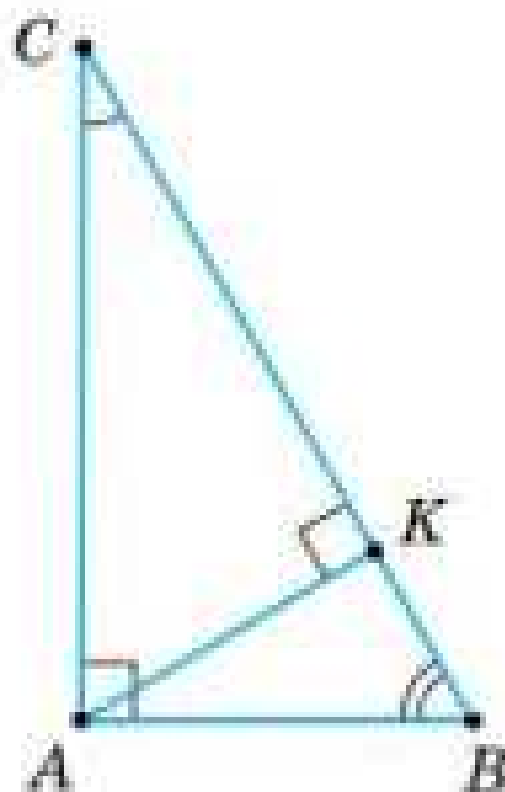


Мал. 314

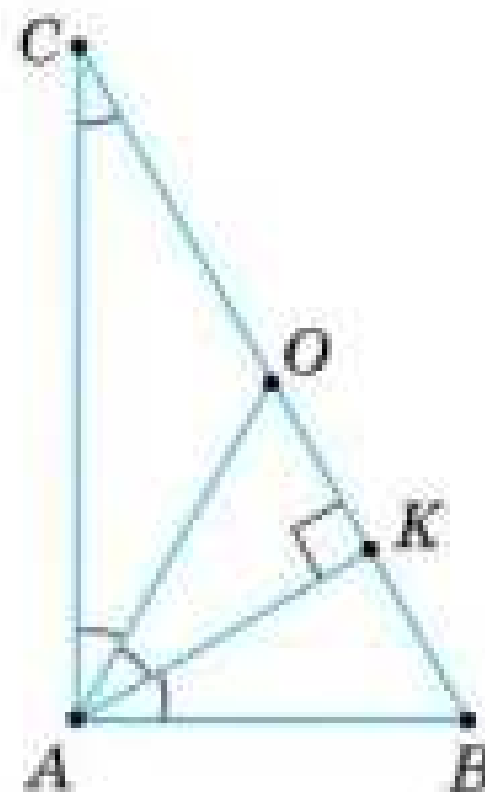
671°. У трикутниках KLM і POH є
 літь у зошиті таблицю 24 та
 у першому стовпчику.

α	β	α	β
$\angle K$	$\angle L$	$\angle L$	$\angle K$
$\angle P$	$\angle O$	$\angle H$	$\angle O$

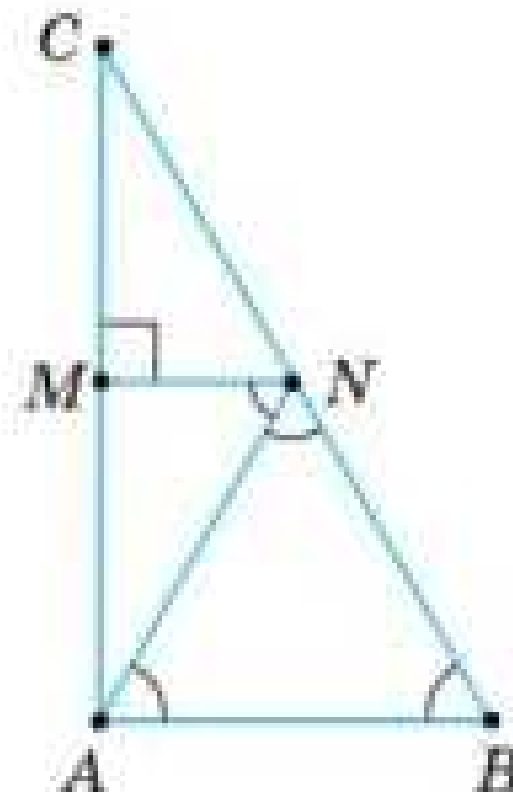
- 678'.** Чи подібні рівнобедрені трикутники, в одному з яких кут між бічними сторонами дорівнює α , а в іншому — кут при основі дорівнює β , якщо:
1) $\alpha = 43^\circ$, $\beta = 68^\circ 30'$; 2) $\alpha = 105^\circ$, $\beta = 38^\circ 30'$
- 679'.** Чи подібні рівнобедрені трикутники, в одному з яких кут між бічними сторонами дорівнює 52° , а в іншому — кут при основі дорівнює 64° ?
- 680'.** Прямокутні трикутники з рівним гострим кутом — подібні. Доведіть.
- 681'.** Доведіть, що вказані прямокутні трикутники подібні:
1) $\triangle ABC$ і $\triangle KBA$ (мал. 316); 2) $\triangle OKA$ і $\triangle BAC$ (мал. 317).
- 682'.** Доведіть подібність прямокутних трикутників AMN і CAB (мал. 318).



Мал. 316



Мал. 317



Мал. 318

- 683'.** Чи подібні прямокутні трикутники, в одному з яких гострий кут дорівнює α , а в іншому — β , якщо:
1) $\alpha = 42^\circ$, $\beta = 48^\circ$; 2) $\alpha = 35^\circ 30'$, $\beta = 54^\circ 30'$
- 684'.** Чи подібні прямокутні трикутники, в одному з яких гострий кут дорівнює 23° , а в іншому — 77° ?
- 685'.** Рівнобедрені прямокутні трикутники — подібні. Доведіть.
- 686'.** За основами a і b трапеції визначте відношення, у якому її діагоналі ділять одна одну.
- 687'.** У рівнобічній трапеції $ABCD$ основи BC і AD дорівнюють a і b . Діагоналі AC і BD дорівнюють c й перетинаються в точці O . Знайдіть периметри трикутників BCO і ADO , якщо:
1) $a = 32$ мм, $b = 64$ мм, $c = 51$ мм;
2) $a = 0,3$ дм, $b = 0,5$ дм, $c = 0,8$ дм.


qr.orioncentr.com.ua/W0bd5

688*. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основи BC і AD дорівнюють 3 см і 8 см, а діагоналі — по 7 см. O — точка перетину діагоналей. Знайдіть периметри трикутників BCO і ADO .

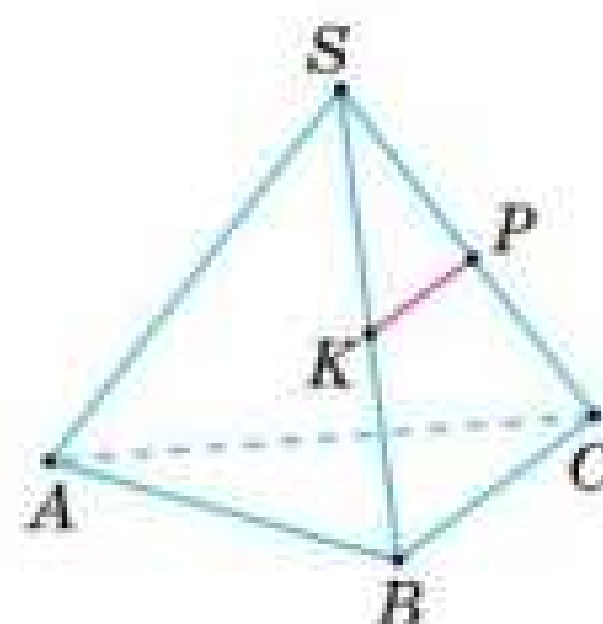


689*. Бічні сторони AD і BC трапеції $ABCD$ продовжено до їх перетину в точці O . Доведіть, що $\frac{AD}{AO} = \frac{BC}{BO} = \frac{AB}{DC}$.

690*. Пряма KP перетинає ребра SB і SC піраміди й відтинає від грані трапецію $BKPC$ (мал. 319). Обґрунтуйте подібність трикутників BSC і KSP .

691*. Кожне ребро піраміди $SABC$ дорівнює m . Відрізок KP грані BSC відтинає від неї трапецію $BKPC$ (мал. 319). Знайдіть:

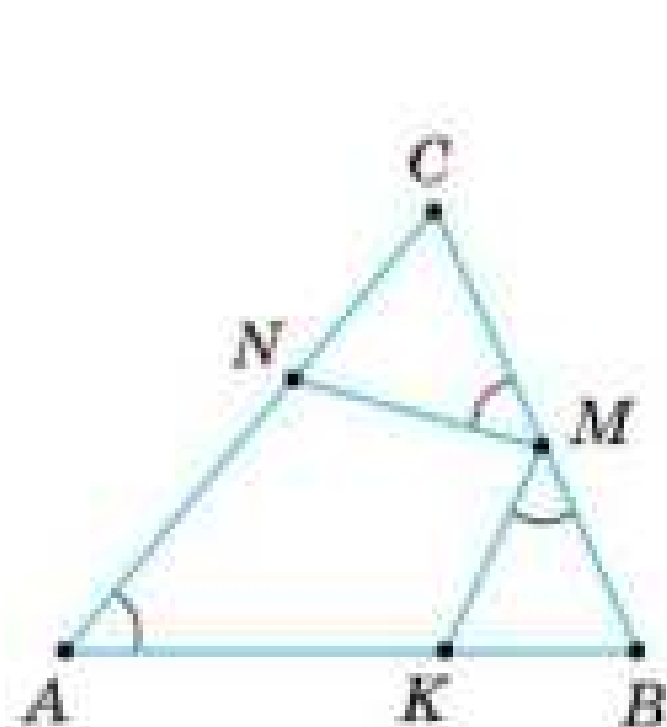
- 1) сторону KP трикутника KSP , якщо його периметр дорівнює p ;
- 2) меншу сторону трапеції $BKPC$, якщо її периметр дорівнює P .



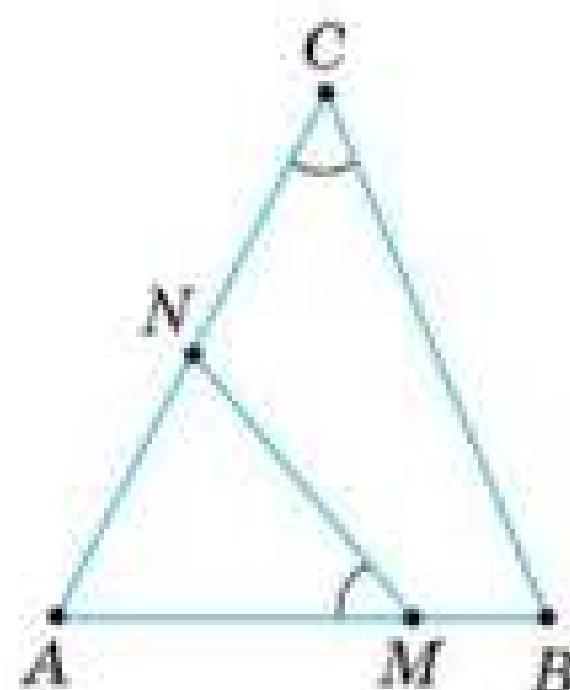
Мал. 319

692. За даними, наведеними на малюнках 320, 321, доведіть подібність зображених трикутників.

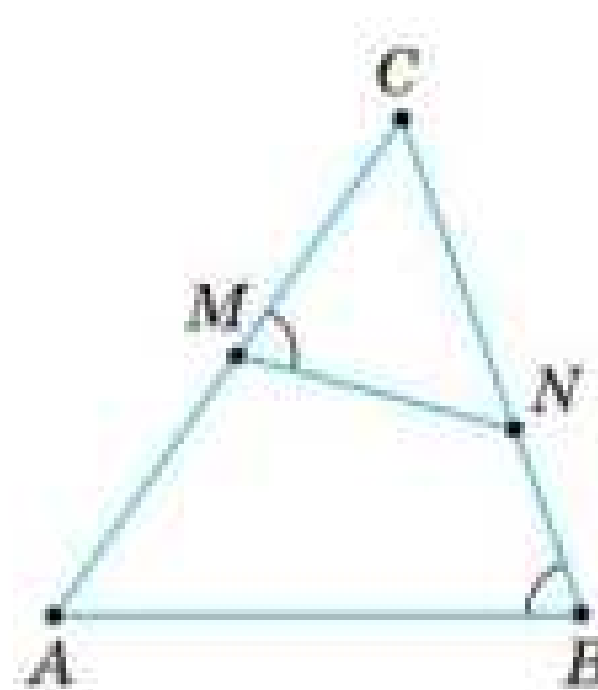
693. Доведіть подібність трикутників, зображених на малюнку 322.



Мал. 320



Мал. 321



Мал. 322

694. Доведіть, що трикутники з відповідно паралельними сторонами — подібні.

695. У трикутниках ABC і KLM : $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $AB = c$, $BC = c + 2$, $AC = c - 2$, $KL = nc$. Знайдіть сторони трикутників, якщо:

1) $c = 5$ см, $n = 3$;

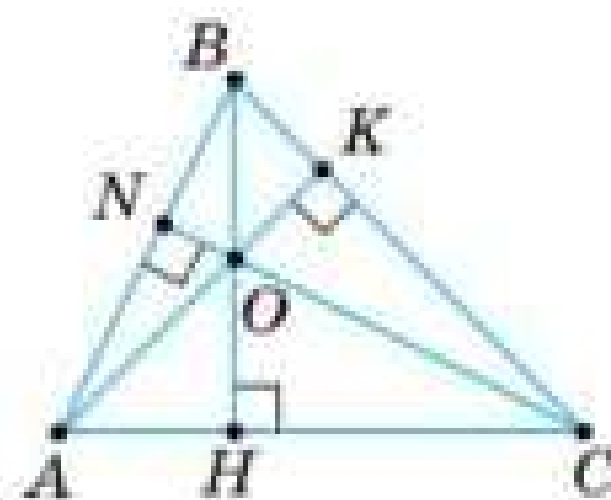
2) $c = 6$ см, $n = \frac{3}{4}$.

696. У трикутниках KLM і ABC : $\angle K = \angle A$, $\angle B = \angle L$, $KL = m$, $LM = m + 2$, $KM = m - 2$, $AB = nm$. Знайдіть сторони трикутників, якщо $m = 8$ см, $n = 2$.



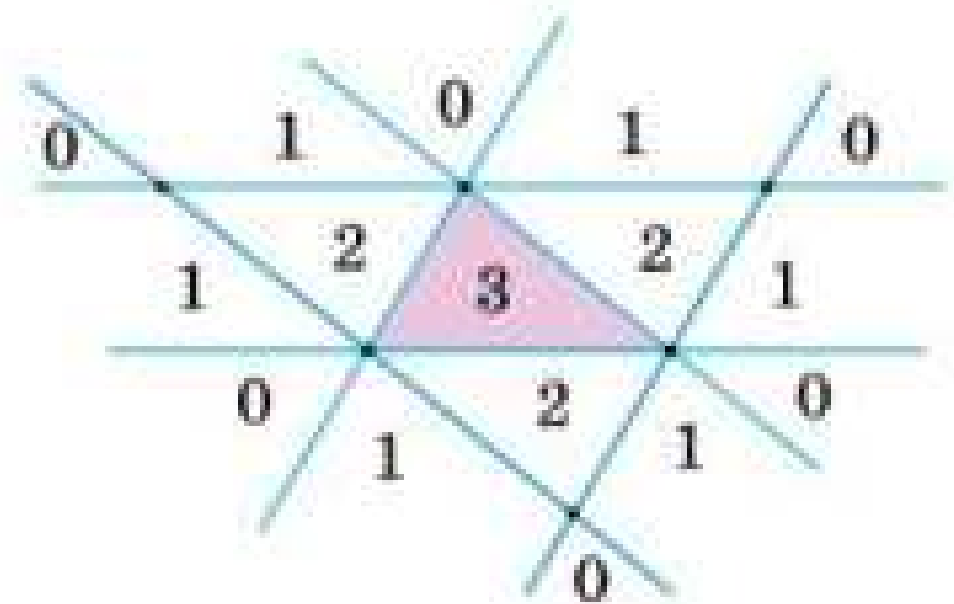
- 697.** Висоти AE і CD трикутника ABC перетинаються в точці H . Знайдіть ці висоти, якщо їхня сума дорівнює 18 см, $AH = 8$ см, $CH = 4$ см.
- 698.** Периметр рівностороннього трикутника дорівнює P . Через точку перетину його медіан проведено пряму, паралельну стороні. Доведіть, що довжину відрізка d цієї прямої з кінцями на сторонах трикутника можна обчислити за формулою: $d = \frac{2P}{9}$.
- 699.** У трикутнику зі сторонами a , b і c пряма перетинає кут A й відтинає від нього трапецію з периметром P . Знайдіть меншу основу трапеції, якщо:
-  1) $a = 30$ см, $b = 20$ см, $c = 15$ см, $P = 63$ см;
2) $a = b = c = 18$ см, $P = 50$ см.
- 700.** Доведіть, що через вершину більшого кута різностороннього трикутника завжди можна провести пряму так, щоб вона відтinalа від даного трикутника подібний йому трикутник.
- 701.** Через точку M на стороні трикутника ABC проведено пряму, що відтинає від нього подібний трикутник. Скільки розв'язків має задача? Розгляньте випадки, коли $\triangle ABC$:
- 1) різносторонній; 2) рівнобедрений; 3) рівносторонній.
- 702.** У рівнобедрений трикутник з основою a й бічною стороною b вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику кола до бічних сторін трикутника, якщо:
- 1) $a = 6$ см, $b = 10$ см; 2) $a = 10$ см, $b = 13$ см.
- 703.** Доведіть, що відстань d між точками дотику вписаного кола до бічних сторін b рівнобедреного трикутника з основою a можна обчислити за формулою: $d = \frac{a(2b - a)}{2b}$.
- 704.** У рівнобедрений трикутник з основою a й бічною стороною b вписано коло із центром O . Знайдіть відношення відрізків висоти, проведеної до основи трикутника, на які вона ділиться точкою O (починаючи від вершини), якщо:
- 1) $a = 12$ см, $b = 10$ см;
2) $a = 10$ см, $b = 13$ см.
- 705.** Доведіть, що в подібних трикутниках відповідні висоти відносяться як сторони, до яких вони проведені.
- 706.** Два подібні трикутники мають по висоті, що дорівнюють одна одній. Чому не можна стверджувати, що дані трикутники рівні?
- 707.** Доведіть, що в подібних трикутниках відповідні бісектриси відносяться як сторони, до яких вони проведені.

- 708.** Трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC подібні ($k = 1,5$). Знайдіть довжини бісектрис кутів C_1 і C даних трикутників, якщо їхня різниця дорівнює 4 см.
- 709.** Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O . Знайдіть довжини основ трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 24 см і $CO : AO = 1 : 3$.
- 710.** Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O . Знайдіть довжини основ трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 24 см і $BO : DO = 3 : 5$.
- 711.** У чотирикутнику $ABCD$ з прямими кутами B і D проведено діагональ AC , а з її довільної точки M — прямі ML і MN , які відповідно перпендикулярні до прямих BC і AD . Доведіть, що $\frac{ML}{AB} + \frac{MN}{CD} = 1$.
- 712.** Два кола з радіусами $R_1 = 4$ см і $R_2 = 6$ см дотикаються зовні. Їхня спільна зовнішня дотична перетинає лінію центрів у точці M . Знайдіть відстані від центрів цих кіл до точки M .
- 713.** Два кола з радіусами $R_1 = 3$ см і $R_2 = 6$ см дотикаються зовні. Їхня спільна зовнішня дотична перетинає лінію центрів у точці K . Знайдіть відстані від центрів цих кіл до точки K .
- 714*.** Доведіть, що трикутники з відповідно перпендикулярними сторонами — подібні.
- 715*.** Доведіть, що відстані від точки перетину медіан трикутника до його сторін утричі менші від довжин відповідних висот трикутника.
- 716*.** У рівнобедреному трикутнику з основою AB через середину висоти CD проведено прямі AK і BL ($K \in BC$, $L \in AC$). Знайдіть довжину відрізка KL , якщо: 1) $AB = 3$ см; 2) $AB = 4$ см; 3) $AB = 5$ см.
- 717*.** Доведіть, що висоти трикутника обернено пропорційні сторонам, до яких вони проведені (мал. 323).
- 718*.** Знайдіть відповідні висоти двох подібних трикутників з коефіцієнтом подібності k , якщо:
- 1) сума цих висот дорівнює 36, $k = 2$;
 - 2) різниця цих висот дорівнює 10, $k = \frac{2}{3}$.
- 719*.** У коло з радіусом R вписано трикутник ABC зі сторонами $BC = a$ і $AB = c$. Доведіть, що висоту h_b до третьої сторони трикутника можна обчислити за формулою: $h_b = \frac{ac}{2R}$.



Мал. 323

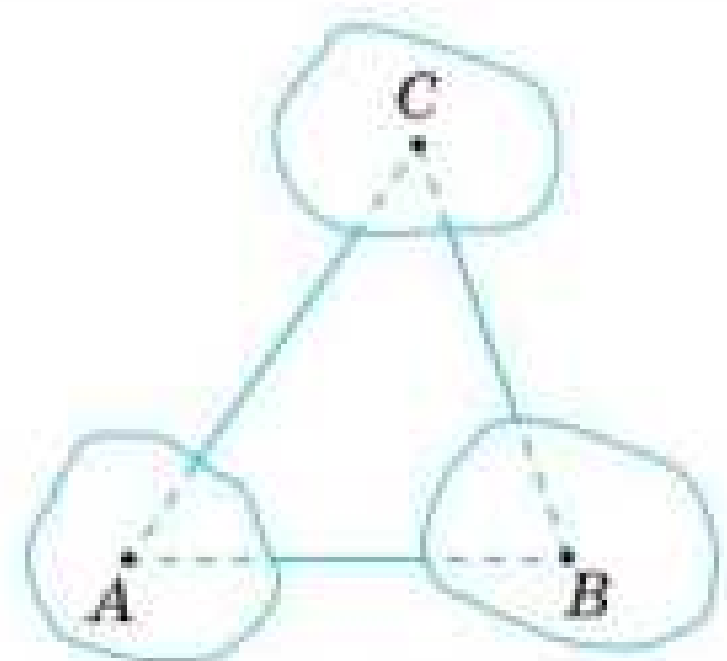
- 720***. На колі з центром O й радіусом R , у якому проведено два взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD , узято точку K . Хорда AK перетинає діаметр CD в точці M , а пряма BK — його продовження в точці N . Доведіть, що $OM \cdot ON = R^2$.
- 721***. У трикутник ABC зі сторонами $AC = b$ і $BC = a$ вписано ромб $CKLM$ так, що $K \in AC$, $L \in AB$, $M \in BC$. Доведіть, що сторону x ромба можна обчислити за формулою: $x = \frac{ab}{a+b}$.
- 722***. У трикутнику ABC з тупим кутом B проведено висоти BD і CM . Доведіть, що трикутники ABC і ADM подібні.
- 723***. Основи трапеції $ABCD$ дорівнюють a і b ($a > b$), $\angle ADC$ — тупий. Знайдіть квадрат довжини діагоналі AC , яка ділить трапецію на два подібні трикутники.
- 724***. Проведемо три прямі через сторони трикутника та ще три прямі — через його вершини паралельно протилежним сторонам. Цими прямими площина трикутника розбивається на 16 областей (мал. 324). Пряма, яка перетинає дві сторони трикутника й паралельна третій його стороні, відтинає від нього подібний трикутник. Дослідіть, якій з областей належать точки, через які: 1) не можна провести жодної такої прямої; 2) можна провести тільки одну таку пряму; 3) можна провести тільки дві такі прямі; 4) можна провести три такі прямі.



Мал. 324

Проявіть компетентність

- 725.** Триповерховий будинок на світлинні має висоту 8 м. Знаючи, що його справжня висота дорівнює 13 м, а глибина камери фотоапарата — 12 см, визначте, на якій відстані від будинку був розміщений фотоапарат.
- 726.** У трикутнику ABC всі вершини недоступні (мал. 325). Як визначити довжини всіх його сторін?
- 727.** На ділянці шляху завдовжки 320 м підйом однаковий. На кінцях ділянки стоять позначки 186,5 м і 194,9 м.



Мал. 325

1. Яка позначка відповідає початку ділянки?
2. Яка позначка стоїть наприкінці ділянки?
3. Якою має бути позначка, що відповідає середині ділянки?
4. Яка позначка має бути на відстані 120 м від початку підйому?

728. Із селища виходять три дороги в напрямках: 1) південно-західному; 2) південному; 3) південно-східному. Якою б дорогою не йшов пішохід із селища, відношення його відстаней до двох інших доріг залишається сталим. Поясніть, чому це так.

§ 13. ДРУГА І ТРЕТЯ ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

1. Про суть інших ознак подібності трикутників

Ситуація. Юрій Петрович нагадав, що рівність трикутників можна встановити за двома сторонами й кутом між ними або за трьома сторонами.



qr.orioncentr.com.ua/7HCQs



Чи існують аналогічні ознаки для подібності трикутників?

Так.



Але тут потрібно виявити не рівність, а пропорційність відповідних сторін двох трикутників.

2. Друга ознака подібності трикутників

Запам'ятайте!

Теорема (ознака подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними)

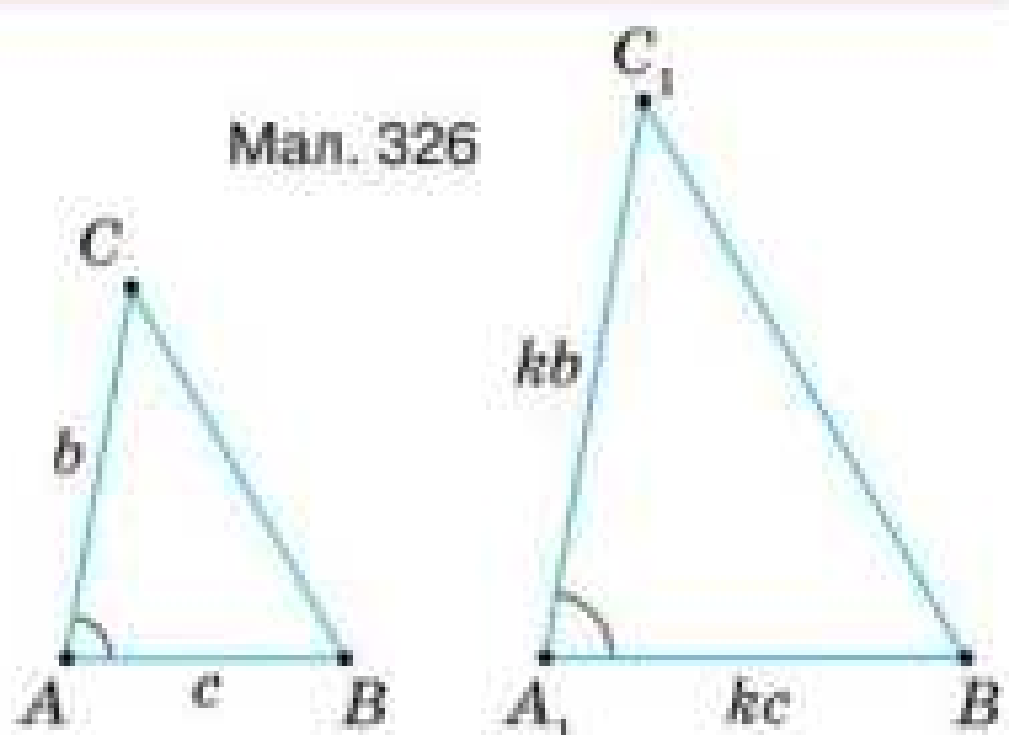
Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника й кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Дано: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ (мал. 326),

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \angle A = \angle A_1.$$

Довести: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

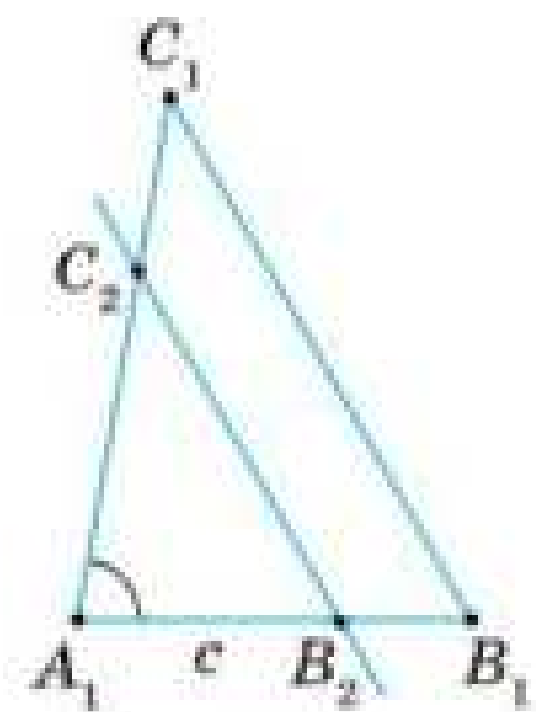
Доведення. Нехай $A_1B_1 = kAB = kc$,
 $A_1C_1 = kAC = kb$.



Відкладемо на стороні A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$ відрізок $A_1B_2 = AB = c$ (мал. 327). Через точку B_2 проведемо пряму $B_2C_2 \parallel B_1C_1$. Утворився трикутник $A_1B_2C_2$, який, за наслідком з узагальненої теореми Фалеса, подібний трикутнику $A_1B_1C_1$.

$$\text{Отже, } \frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1}.$$

$$\text{Звідси } \frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1}.$$



Мал. 327

Підставимо в цю пропорцію відомі довжини сторін і скоротимо одержані дробу.

$$\text{Тоді маємо: } \frac{c}{kc} = \frac{A_1C_2}{kb}, \quad 1 = \frac{A_1C_2}{b}. \quad \text{Звідси } A_1C_2 = b.$$

Розглянемо $\triangle A_1B_2C_2$ і $\triangle ABC$.

У них $\angle A_1 = \angle A$ за умовою, $A_1B_2 = AB = c$ за побудовою, $A_1C_2 = AC = b$ за доведеним.

Отже, $\triangle A_1B_2C_2 = \triangle ABC$ за двома сторонами й кутом між ними.

Із рівності трикутників ABC і $A_1B_2C_2$ та подібності трикутника $A_1B_2C_2$ трикутнику $A_1B_1C_1$ випливає, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Наслідок. Прямокутні трикутники з відповідно пропорційними катетами — подібні.

Справді, у прямокутному трикутнику між катетами лежить прямий кут, а прямі кути — рівні. Тому прямокутні трикутники з відповідно пропорційними катетами подібні за двома сторонами й кутом між ними.

3. Третя ознака подібності трикутників

qr.orioncentr.com.ua/EQbu1

Запам'ятайте!

Теорема (ознака подібності трикутників за трьома сторонами)

Якщо сторони одного трикутника пропорційні сторонам іншого трикутника, то такі трикутники подібні.

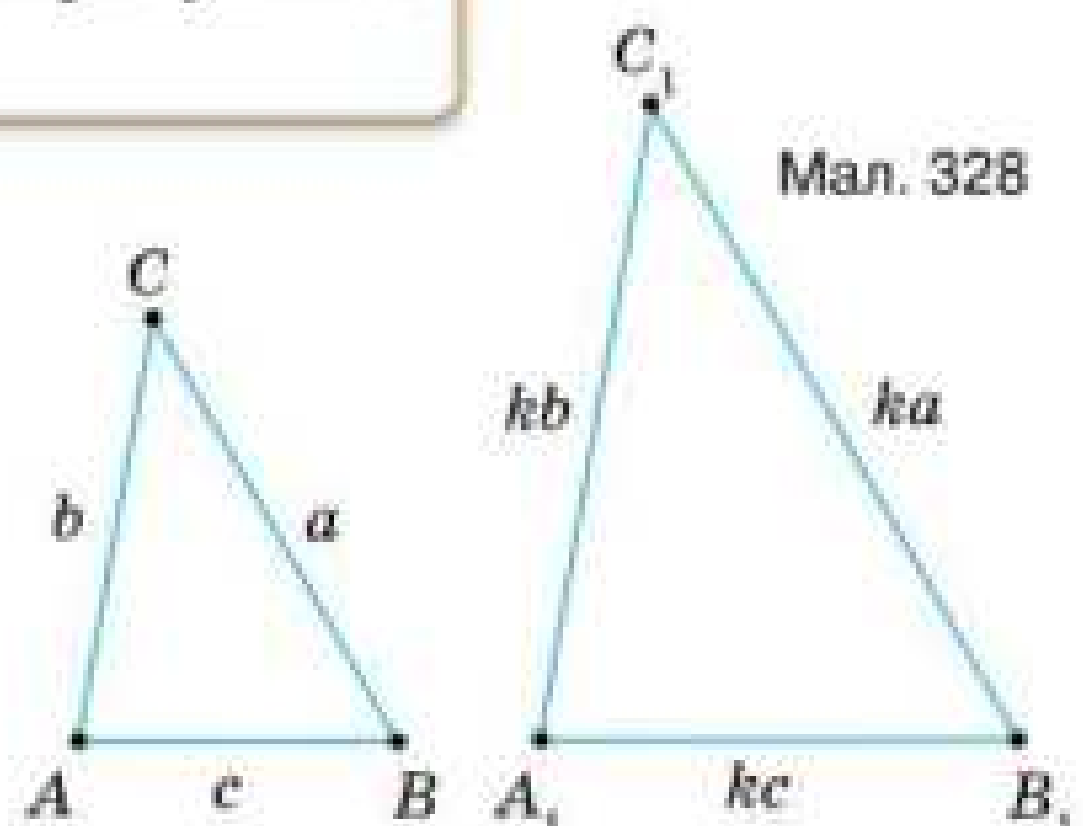


Дано: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ (мал. 328),

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Довести: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Доведення. Нехай: $A_1B_1 = kAB = kc$, $A_1C_1 = kAC = kb$, $B_1C_1 = kBC = ka$.



Відкладемо на стороні A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$ відрізок $A_1B_2 = AB = c$ (мал. 329). Через точку B_2 проведемо пряму $B_2C_2 \parallel B_1C_1$. Утворився трикутник $A_1B_2C_2$, який, за наслідком із узагальненої теореми Фалеса, подібний трикутнику $A_1B_1C_1$.

$$\text{Отже, } \frac{A_1B_2}{A_1B_1} = \frac{A_1C_2}{A_1C_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1}.$$

Далі одержимо:

$$\frac{c}{kc} = \frac{A_1C_2}{kb} = \frac{B_2C_2}{ka}, \text{ або } 1 = \frac{A_1C_2}{b} = \frac{B_2C_2}{a}.$$

Звідси $A_1C_2 = b$, $B_2C_2 = a$.

Отже, $A_1C_2 = AC$ і $B_2C_2 = BC$.

Розглянемо $\triangle A_1B_2C_2$ і $\triangle ABC$.

У них $A_1B_2 = AB = c$ за побудовою,

$A_1C_2 = AC = b$ і $B_2C_2 = BC = a$ за доведенням.

Отже, $\triangle A_1B_2C_2 = \triangle ABC$ за трьома сторонами.

Із рівності трикутників ABC і $A_1B_2C_2$ та подібності трикутника $A_1B_2C_2$ трикутнику $A_1B_1C_1$ випливає, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Задача У кожному з трикутників ABC і RST (мал. 330) медіана, проведена до більшої сторони, дорівнює половині цієї сторони. Чи подібні дані трикутники, якщо $AC = 9$, $AK = 7,5$, $TR = 6$, $MR = 5$?

Розв'язання Медіани CK і TM відтинають від даних трикутників ABC і RST відповідно $\triangle ACK$ і $\triangle RTM$. У кожному з них відомі три сторони:

$$AC = 9, AK = KC = 7,5; \quad RT = 6, RM = MT = 5.$$

З'ясуємо, чи пропорційні відповідні сторони цих трикутників:

$$\frac{AC}{RT} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \quad \frac{AK}{RM} = \frac{7,5}{5} = \frac{3}{2}.$$

Отже, $\triangle ACK \sim \triangle RTM$ за трьома сторонами. Із подібності цих трикутників випливає, що $\angle A = \angle R$.

Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle RST$. У них:

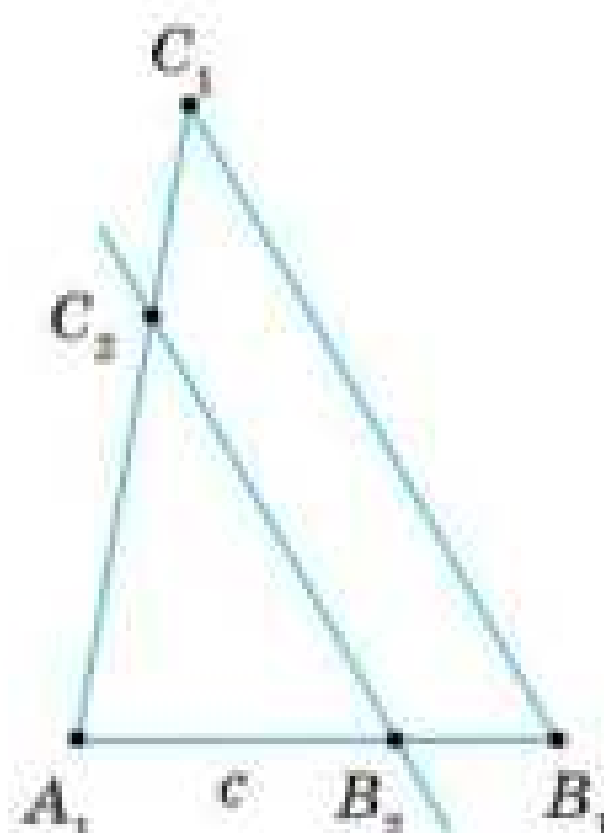
$$\angle A = \angle R, \quad \frac{AC}{RT} = \frac{3}{2}, \quad \frac{AB}{RS} = \frac{2AK}{2RM} = \frac{AK}{RM} = \frac{3}{2}.$$

Отже, $\triangle ABC \sim \triangle RST$ за двома сторонами й кутом між ними.

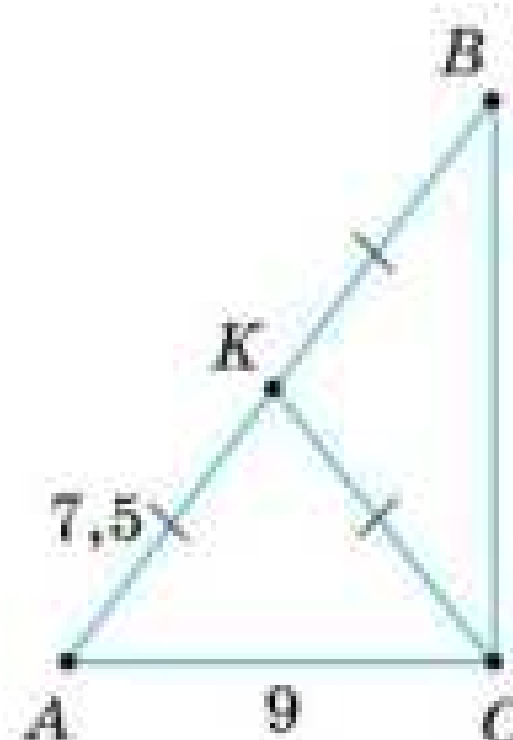
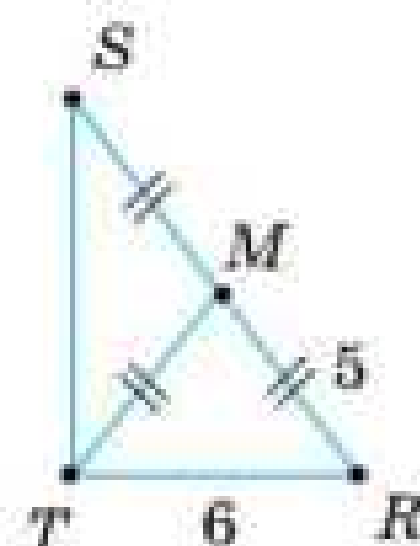


Розв'язуючи задачі, пам'ятайте:

- 1) якщо на малюнку немає потрібної пари трикутників, то проведіть допоміжні відрізки, щоб їх утворити;
- 2) інколи потрібно довести подібність кількох трикутників.



Мал. 329



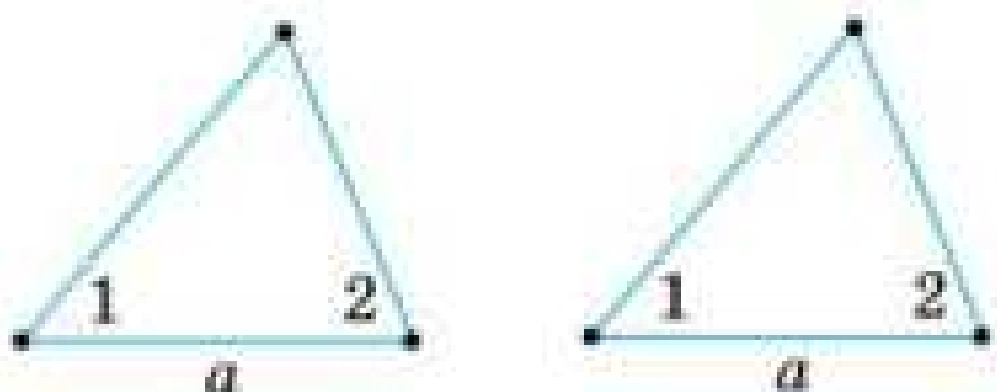
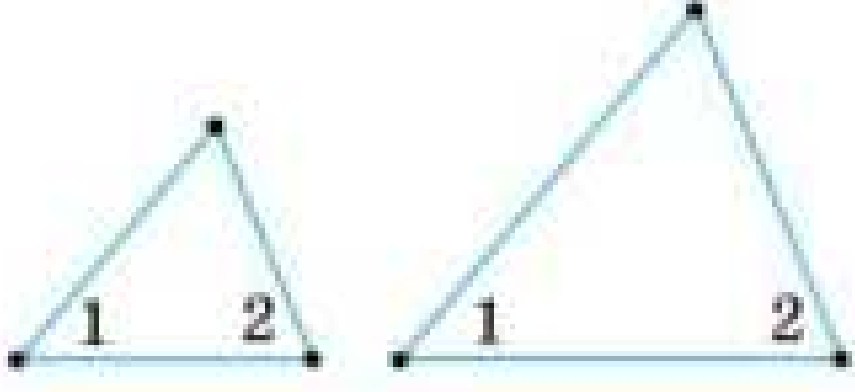
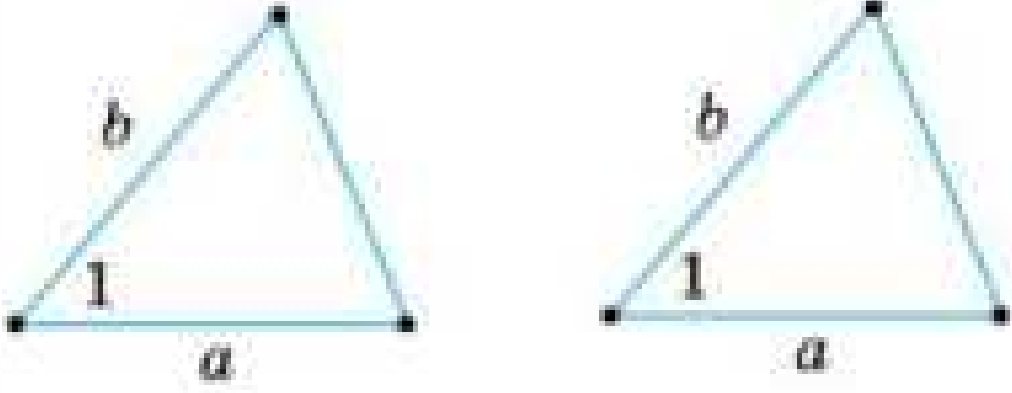
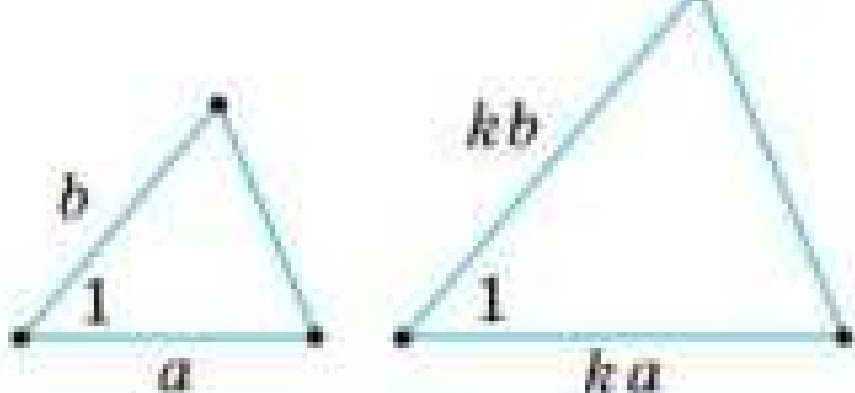
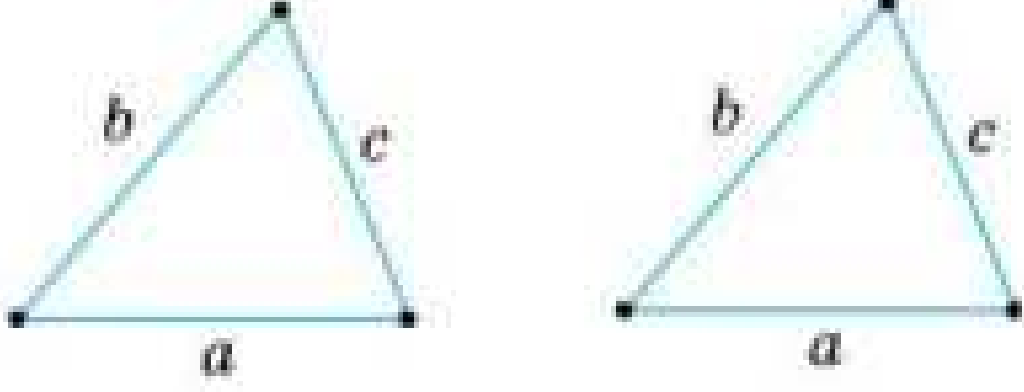
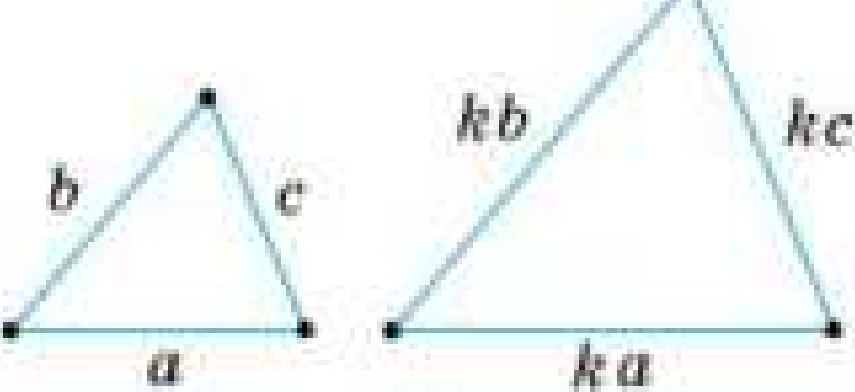
Мал. 330

Дізнайтеся більше

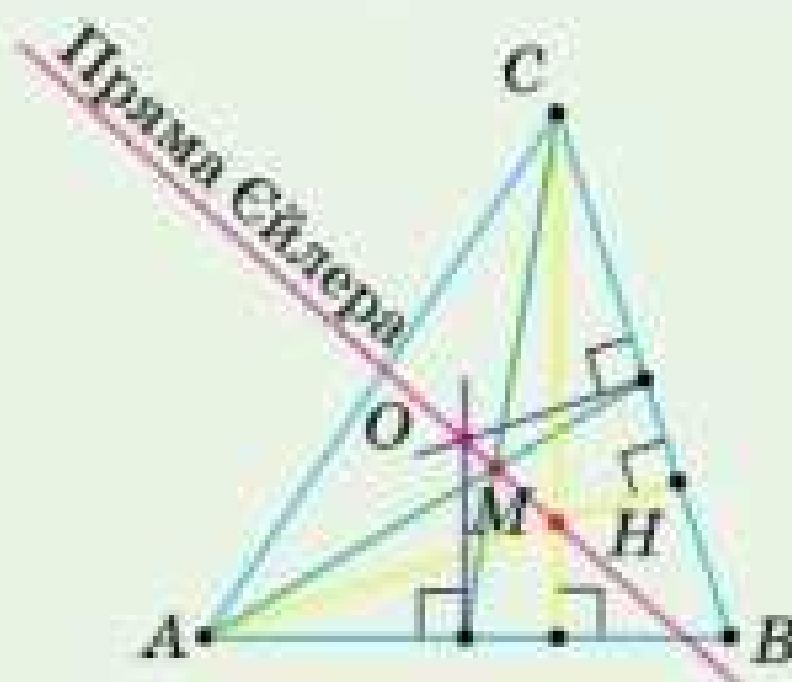
1. Ви, напевне, помітили, що ознаки подібності трикутників мають багато схожого з ознаками рівності трикутників.

За таблицею 25 сформулюйте попарно ознаку рівності й ознаку подібності трикутників. У чому відмінності відповідних ознак?

Таблиця 25

Трикутники рівні, якщо:	Трикутники подібні, якщо:
	
	
	

2. Застосовуючи подібність трикутників, можна довести, що точка перетину висот трикутника H , точка перетину його медіан M і центр описаного кола O лежать на одній прямій (мал. 331). Цю пряму називають прямою Ейлера на честь найвидатнішого математика XVIII ст. **Леонарда Ейлера** (1707–1783). Він народився в Базелі (Швейцарія). У його творчому доробку — видатні досягнення в усіх галузях математики, у механіці, фізиці, астрономії. Теорему про пряму, названу його ім'ям, Л. Ейлер сформулював, довів й опублікував у 1765 р.



Мал. 331



Леонард Ейлер

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
пряма Ейлера	Euler line ['s]	Eulersche Gerade (f)	la droite d'Euler

qr.orioncentr.com.ua/IIC08

Пригадайте головне

1. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними.
2. Чому прямокутні трикутники з пропорційними катетами подібні?
3. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за трьома сторонами.

Усне тренування

Чи існує трикутник, у якого сторони дорівнюють:

- 1) 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 5; 4, 5, 10;
- 2) 4,56, 5,44 і 10; 2,39, 3,61 і 5; 7,65, 1,35 і 6,3?

Розв'яжіть задачі

- 729**. Чи правильно, що в другій ознаці подібності трикутників ідеться про:
- 1) дві сторони та два кути даних трикутників;
 - 2) дві сторони й кут даних трикутників;
 - 3) рівність двох відповідних сторін даних трикутників;
 - 4) рівність відповідних кутів даних трикутників;
 - 5) рівність двох відповідних сторін і кутів між ними даних трикутників;
 - 6) пропорційність двох відповідних сторін і рівність кутів між ними даних трикутників?
- 730**. Чи правильно, що прямокутні трикутники з відповідно пропорційними катетами:
- 1) рівні;
 - 2) подібні?
- 731**. Чи правильно, що в третій ознаці подібності трикутників ідеться про:
- 1) кути даних трикутників;
 - 2) сторони й кути даних трикутників;
 - 3) рівність сторін даних трикутників;
 - 4) пропорційність відповідних сторін даних трикутників?

- 732'.** За даними на малюнку 332 назвіть відповідно рівні кути та відповідно пропорційні сторони трикутників. Чи подібні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.



qr.orioncentr.com.ua/iWFU1

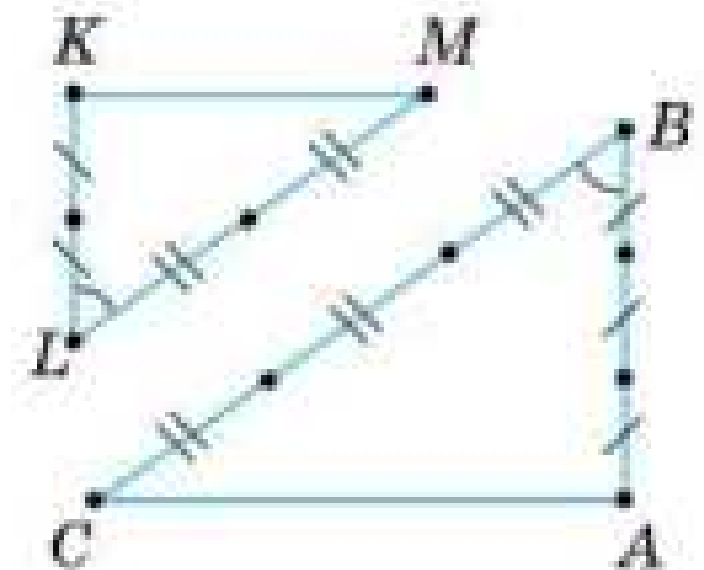
- 733'.** На малюнку 333 задано елементи трикутників DEF і ACB . Чи подібні дані трикутники?



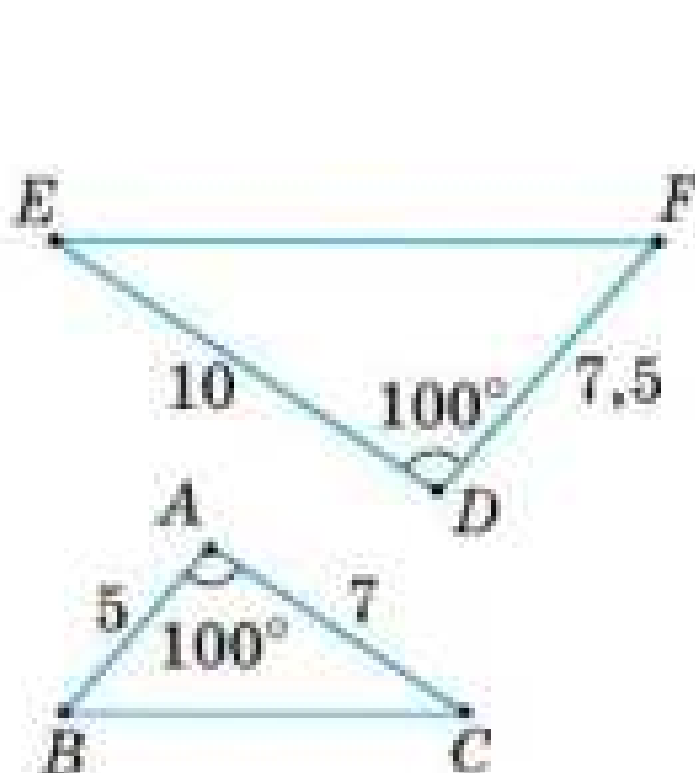
- 734'.** Трикутник має сторони 5 см і 8 см. Кут між ними дорівнює 50° . Які виміри може мати подібний йому трикутник?

- 735'.** На малюнку 334 знайдіть подібні трикутники. Поясніть, чому вони подібні.

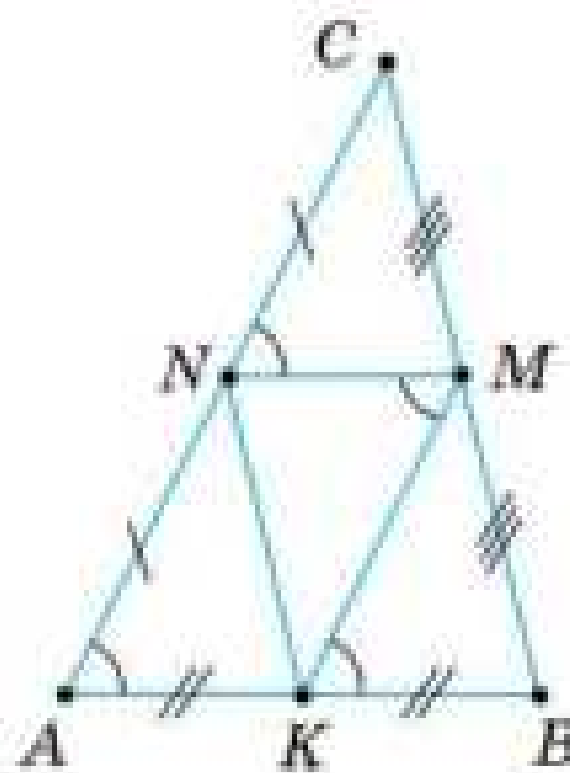
- 736'.** На малюнку 335 знайдіть подібні трикутники. Поясніть, чому вони подібні.



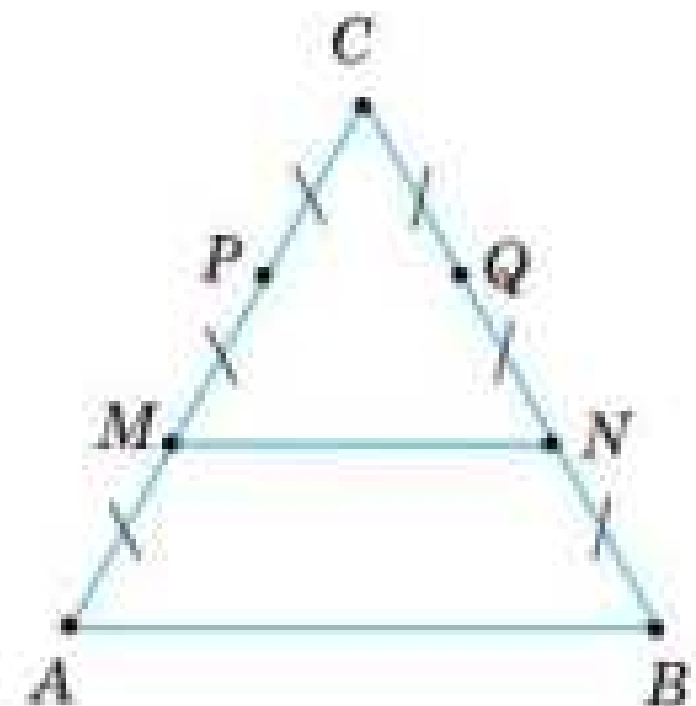
Мал. 332



Мал. 333



Мал. 334



Мал. 335

- 737'.** У трикутниках KLM і POH один із кутів дорівнює α . Які дві сторони в них мають бути відповідно пропорційними, щоб трикутники були подібними? Накресліть у зошиті таблицю 26 та заповніть її за зразком, наведеним у першому стовпчику.

Таблиця 26

α	2 сторони		α	2 сторони		α	2 сторони	
$\angle K$	$a = KL$	$b = KM$	$\angle L$	$a =$	$b =$	$\angle M$	$a =$	$b =$
$\angle P$	$ka = PO$	$kb = PH$	$\angle H$	$ka =$	$kb =$	$\angle P$	$ka =$	$kb =$
$\triangle KLM \sim \triangle POH$ за двома сторонами та кутом між ними								

- 738'.** У першому трикутнику дві сторони дорівнюють 5 см і 8 см; у другому — 6 см і 12 см; у третьому — 10 см і 16 см. Кути, утворені цими сторонами, — рівні. Які з трикутників подібні? Відповідь поясніть.

739* У трикутнику ABC на сторонах AB і AC взято точки D і E . Чи подібні трикутники ABC і ADE , якщо:

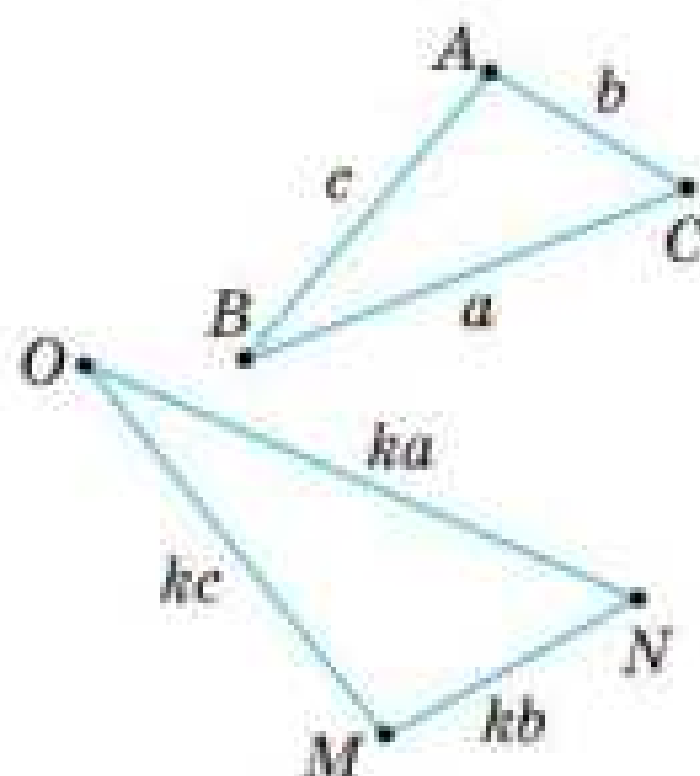
- 1) $AB = 12$ см, $AC = 15$ см, $BD = 2$ см, $CE = 7$ см;
- 2) $AB = 15$ см, $AC = 18$ см, $BD = 3$ см, $CE = 8$ см;
- 3) $AB = 20$ см, $AC = 21$ см, $BD = 10$ см, $CE = 10,5$ см?

740* У трикутнику BAC на сторонах BA і BC взято точки M і P . Чи подібні трикутники BAC і BMP , якщо:

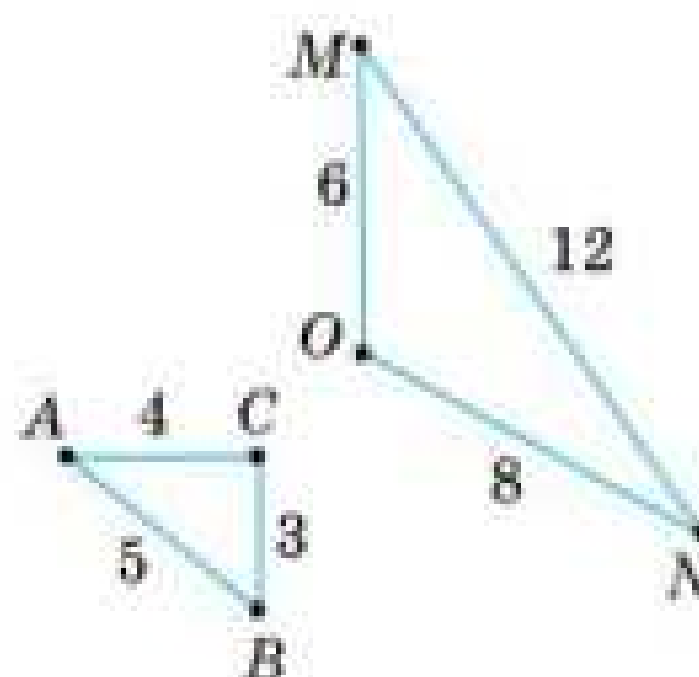


- 1) $BA = 10$ см, $BC = 12$ см, $AM = 5$ см, $CP = 6$ см;
- 2) $BA = 22$ см, $BC = 16$ см, $AM = 11$ см, $CP = 10$ см?

741* За даними на малюнку 336 назвіть відповідно пропорційні сторони трикутників. Чи подібні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідний запис.



Мал. 336



Мал. 337

742* На малюнку 337 задано сторони трикутників MON і ABC . Чи подібні дані трикутники?



743* Трикутник має сторони 5 см, 6 см і 9 см. Які сторони може мати подібний йому трикутник?

744* Які з трьох трикутників подібні, якщо їхні сторони дорівнюють: 8 см, 10 см, 14 см; 12 см, 15 см, 21 см; 16 см, 20 см, 30 см?

745* Сторони одного трикутника дорівнюють a , b і c . У подібному трикутнику найменша сторона дорівнює d . Знайдіть його сторони, якщо:



- 1) $a = 7$ см, $b = 9$ см, $c = 12$ см, $d = 21$ см;
- 2) $a = 17$ см, $b = 8$ см, $c = 15$ см, $d = 56$ см.



qr.orioncentr.com.ua/hfyFe

746* Сторони одного трикутника дорівнюють 6 см, 5 см і 9 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо його найменша сторона дорівнює 25 см.



747* Чи подібні два рівнобедрені трикутники, якщо бічна сторона й основа одного з них пропорційні бічній стороні й основі іншого?

- 748'.** Які з трьох прямокутних трикутників подібні, якщо їхні катети дорівнюють: 3 см і 4 см; 5 см і 12 см; 45 мм і 6 см?
- 749'.** Які з трьох прямокутних трикутників подібні, якщо їхні катети дорівнюють: 1 см і 24 см; 5 см і 12 см; 25 мм і 0,6 дм?
- 750'.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює b , а бічна сторона — a . У подібному трикутнику основа дорівнює c . Знайдіть його периметр, якщо:
- 1) $a = 18$ см, $b = 12$ см, $c = 6$ см;
 - 2) $a = 25$ см, $b = 14$ см, $c = 28$ см.
- 751'.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а бічна сторона — 5 см. Знайдіть периметр подібного йому трикутника, якщо його основа дорівнює 12 см.
- 752'.** Периметри двох тупокутних трикутників відносяться як $m : n$. У першому трикутнику більша сторона дорівнює a . Знайдіть більшу сторону другого трикутника, якщо:
- 1) $a = 24$ мм, $m = 2$, $n = 3$; 2) $a = 1,5$ дм, $m = 5$, $n = 3$.
- 753'.** Периметри двох тупокутних трикутників відносяться як 3 : 4. У першому трикутнику більша сторона дорівнює 12 см. Знайдіть більшу сторону другого трикутника.
- 754'.** У прямокутнику $ABCD$ точки P і T ділять діагональ AC на три рівні частини. Із цих точок проведено перпендикуляри до сторони AB . Знайдіть периметри всіх прямокутних трикутників, які при цьому утворилися, якщо:
- 1) $AB = 16$ см, $BC = 63$ см, $AC = 65$ см;
 - 2) $AB = 7$ см, $BC = 24$ см, $AC = 25$ см.
- 755'.** У прямокутнику $MORT$ точки A і B ділять діагональ MP на три рівні частини. Із цих точок проведено перпендикуляри до сторони MO . Знайдіть периметри всіх прямокутних трикутників, які при цьому утворилися, якщо $MO = 8$ см, $OR = 15$ см, $MP = 17$ см.
- 756'.** У рівнобічній трапеції $ABCD$ діагоналі AC і BD дорівнюють c і точкою O їх перетину діляться у відношенні $m : n$. $AD - BC = 4$ см. Знайдіть основи трапеції та периметри трикутників BCO і ADO , якщо:
- 1) $c = 42$ мм, $m = 8$, $n = 13$; 2) $c = 0,8$ дм, $m = 5$, $n = 3$.
- 757'.** У рівнобічній трапеції $MORT$ діагоналі MP і OT дорівнюють 7 см і точкою C їх перетину діляться у відношенні 2 : 5. Сторона MT на 4 см довша за сторону OR . Знайдіть основи трапеції та периметри трикутників OPC і MTC .
- 758.** У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: $\angle A = \angle A_1$; $AB \cdot A_1B_1 = AC \cdot A_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

759. У трикутниках ABC і KLM : $\angle A = \angle K$, $AB = c$, $BC = c + 2$, $AC = c - 2$, $KL = nc$, $KM = nc - 2n$. Знайдіть сторони трикутників, якщо:

1) $c = 5$ см, $n = 3$; 2) $c = 6$ см, $n = \frac{3}{4}$.

760. У трикутниках TOM і BCE : $\angle T = \angle B$, $TO = 8$ см, $OM = a + 2$,



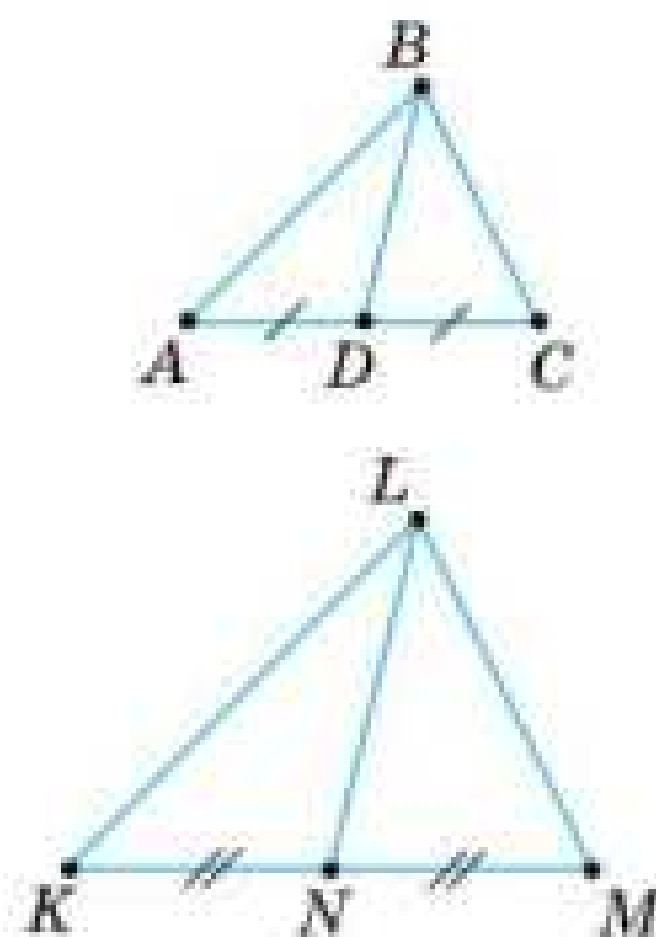
$TM = a - 2$, $BC = pa$, $BE = pa - 2p$. Знайдіть сторони трикутників, якщо $p = 2$.

761. Доведіть, що в подібних трикутниках відповідні медіани відносяться як сторони, до яких вони проведені (мал. 338).

762. Два подібні трикутники мають по медіані, що дорівнюють одна одній. Чому не можна стверджувати, що дані трикутники рівні?

763. Сторони кута A одна пряма перетинає в точках K і L , а інша — в точках M і N відповідно, причому $KL : MN = \frac{1}{5} : 0,25$, $KM = 3$ см.

Якої довжини повинен бути відрізок AK , щоб дані прямі були паралельними?



Мал. 338

764. Висота трикутника ділить основу у відношенні $m : n$. У якому відношенні серединний перпендикуляр до основи ділить бічну сторону, якщо:

- 1) $m = 5$, $n = 9$;
2) $m = 3$, $n = 5$?

765. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BH і CM . Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle AMH$.

766. Медіана AA_1 трикутника ABC утворює кут AA_1C , який дорівнює куту BAC . Чому дорівнює відношення квадратів сторін BC і AC цього трикутника?

767. Точка E — середина сторони BC паралелограма $ABCD$. Відрізок AE перетинає діагональ BD в точці K . Знайдіть відношення відрізків:

- 1) AK і KE ;
2) BK і KD .

768. Висота BM рівнобічної трапеції $ABCD$ ділить діагональ AC у відношенні $m : n$. У якому відношенні вона ділить сторону AD , якщо:

- 1) $m = 1$, $n = 2$; 2) $m = 1$, $n = 1$?

769. Чи будуть подібними два прямокутні трикутники, якщо в них:

- 1) відношення гіпотенуз дорівнює відношенню радіусів описаних кіл;

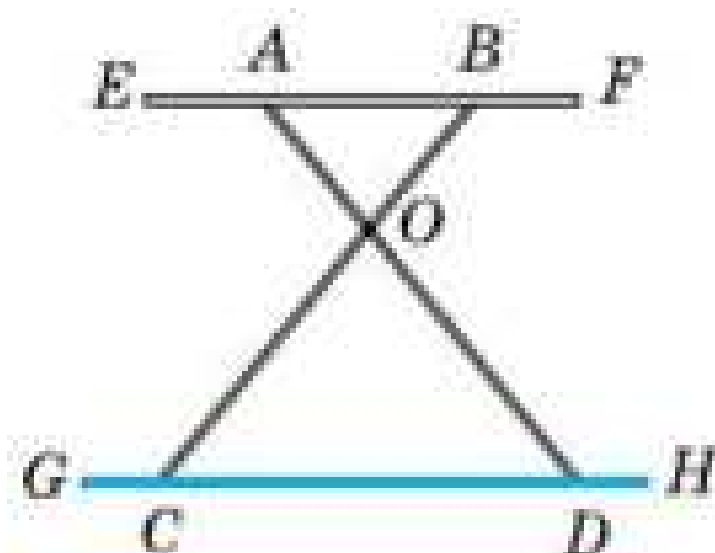
- 2) відношення двох катетів дорівнює відношенню радіусів описаних кіл;
- 3) відношення гіпотенуз дорівнює відношенню радіусів вписаних кіл?

- 770*.** Прямокутні трикутники з відповідно пропорційними катетом і гіпотенузою — подібні. Доведіть.
- 771*.** За стороною a трикутника визначте відстань між точками, які ділять дві інші сторони у відношенні $1 : m$, починаючи від сторони a .
- 772*.** У рівнобедрений трикутник вписано прямокутник так, що його діагоналі відповідно паралельні бічним сторонам трикутника. Знайдіть відношення, у якому вершини прямокутника ділять бічні сторони трикутника, починаючи від вершин основи.
- 773*.** З вершини тупого кута ромба проведено дві висоти. Відстань між кінцями висот дорівнює половині більшої діагоналі. Знайдіть кути ромба.
- 774*.** За основами a і b трапеції ($a > b$) визначте:
- 1) відстань між точками, які ділять бічні сторони у відношенні $1 : m$, починаючи від меншої основи;
 - 2) довжину відрізка, що проходить паралельно основам через точку перетину діагоналей;
 - 3) довжину відрізка, що проходить паралельно основам через точку перетину продовжених бічних сторін і має кінці на продовженнях діагоналей.
- 775*.** Відрізок із кінцями на бічних сторонах трапеції проходить через точку перетину діагоналей і паралельний основам. Доведіть, що цей відрізок точкою перетину діагоналей ділиться навпіл.
- 776*.** Основи трапеції відносяться як $m : n$. Середину O однієї з основ сполучено відрізками з кінцями іншої основи. Проведені відрізки перетинають діагоналі трапеції в точках M і N . Знайдіть відстань між цими точками, якщо:
- 1) точка O належить меншій основі трапеції, $m = 1$, $n = 4$;
 - 2) точка O належить більшій основі трапеції, $m = 2$, $n = 3$.
- 777*.** Два кола перетинаються в точках A і B . Дотичні до кіл у точці A перетинають кола в точках M і N . Доведіть, що середини хорд AM і AN , а також точки A і B лежать на одному колі.
- 778*.** Висота BH трикутника ABC ділить медіану AM у відношенні $3 : 1$, починаючи від вершини A . У якому відношенні точка H ділить сторону AC ?

- 779***. Медіана BM ділить висоту AN трикутника ABC у відношенні $3 : 1$, починаючи від вершини. У якому відношенні ця висота ділить медіану BM ?

Проявіть компетентність

- 780.** На малюнку 339 ви бачите дачний столик у поперечному розрізі. AD і BC — дві з чотирьох його ніжок. $AO = BO = 52$ см, $OC = OD = 88$ см, EF — розріз горизонтальної поверхні стола, GH — лінія підлоги. Поясніть, чому за такої будови столика прямі EF і GH — паралельні.



Мал. 339

- 781.** Як знайти відстань між двома пунктами A і B , між якими не можна пройти?
- 782.** У певний момент часу тінь від двометрової віхи мала довжину 1,4 м, а тінь від дерева (якщо міряти від стовбура) — 6,3 м. Визначте висоту дерева, знаючи, що діаметр стовбура біля землі дорівнює 1,2 м.
- 783.** Чому вдень за тінню можна визначити висоту дерева, а вночі за тінню від ліхтаря — ні?
- 784.** Щоб поділити відрізок AB на три рівні частини, діяли так. На промені AD , що не збігається з AB , відклали рівні відрізки AE і EK . Потім на промені KB побудували точку T так, щоб $KB = BT$. Пряма TE поділила відрізок AB у відношенні $2 : 1$. Отже, одержали, що менший з утворених відрізків дорівнює третині AB . Більший з утворених відрізків поділили навпіл. Обґрунтуйте таку побудову.



§ 14. ЗАСТОСУВАННЯ ПО

1. Про суть застосувань подібності трикутників

Ситуація. Дмитро і Наталка міркували, якими можуть бути застосування подібності трикутників. Наталка стверджувала, що тільки практичними. А Дмитро — що не лише практичними, а й теоретичними, коли застосування відомої теореми дозволяє встановити нові математичні факти.



Хто має рацію — Дмитро чи Наталка?

Справді, практичне застосування подібності трикутників у графах як задачі-теореми були доказом теоретичності подібності рівнобедрених трикутників, про яку ми знаємо нові математичні факти, якими можна користуватися.

Розглянемо деякі нові факти, які стосуються подібності трикутників.

Наслідок. Усі три медіани трикутника

Справді, за доведеною теоремою трикутника ABC ділить кожну з них, ділить відрізок у заданому відношенні трикутника буде проходити через цю

3. Властивість бісектриси

Запам'ятайте!

Теорема (властивість бісектриси)

Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

Дано: $\triangle ABC$ (мал. 341), CL — бісектриса кута C .

Довести: $AL : BL = AC : BC$.

Доведення.

Із точок A і B проведемо перпендикуляри AM і BN до прямої CL (мал. 342).

Розглянемо $\triangle AMC$ і $\triangle BNC$.

У них: $\angle AMC = \angle BNC = 90^\circ$, $\angle AСМ = \angle BCN$, оскільки CL — бісектриса кута C .



Якщо сторони трикутника значено маленькими буквами проєкції катетів a і b на гіпотенузу c позначають відповідно: a_c і b_c .

Запам'ятайте!

Відрізок x називається середнім пропорційним між відрізками a і b , якщо виконується рівність $a : x = x : b$.

Задача

(Властивості середніх пропорційних у трикутнику)

У прямокутному трикутнику:

- 1) висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проєкціями катетів на гіпотенузу;
 - 2) катет є середнім пропорційним між висотою, проведеною до гіпотенузи, та її проєкцією на гіпотенузу;
 - 3) проєкції катетів на гіпотенузу є середнім пропорційним між висотою, проведеною до гіпотенузи, та її проєкцією на гіпотенузу.
- Доведіть.

Розв'язання

1. Розглянемо $\triangle ABC$ з кутами $\angle C = 90^\circ$.



У прямокутному трикутнику (

$$h_c^2 = b_c \cdot a_c$$

$$b^2 = c \cdot b_c$$

$$a^2 = c \cdot a_c$$

Мал

Дізнайтеся більше

1. Подібність трикутників застосовують не лише в задачах на доведення чи обчислення, але й у задачах на побудову.

Задача Побудуйте трикутник за двома кутами A і C та бісектрисою l кута B .

Розв'язання Будуємо допоміжний $\triangle ABC$ за двома кутами A і C (мал. 346). Проводимо бісектрису BL кута B . На промені BL відкладаємо відрізок $BL_1 = l$. Через точку L_1 проводимо пряму $A_1C_1 \parallel AC$. За побудовою, у трикутнику A_1BC_1 : $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$. BL_1 — бісектриса кута B .

Пригадайте головне

1. Сформулюйте властивості медіан трикутника.
2. Яку властивість має бісектриса кута трикутника?
3. Які відрізки називають проєкціями катета на гіпотенузу?
4. Що таке середнє пропорційне між двома відрізками?
5. Сформулюйте властивості середніх ліній трикутника.

Усне тренування

- 1) $x : 12 = 3 : 4$; $12 : x = 4 : 3$;
2) $x : 35 = 7 : 5$; $35 : x = 5 : 7$;

Розв'яжіть задачі

- 785'.** У трикутнику KLM проведені медіани, що перетинаються в точці O . Чи правильно, що
1) $KO : OK_1 = 2 : 1$; 2) $L_1O : L_1K_1 = 2 : 1$?
- 786'.** Запишіть, чому дорівнює відношення площ двох трикутників, утворених медіаною трикутника, що ділить протилежну сторону на дві частини.

790°. Знайдіть довжини медіан трикутника, перетину до вершин трикутника:
1) 12 см, 16 см і 24 см; 2) 4 см

791°. Знайдіть довжини медіан трикутника, перетину до вершин трикутника:

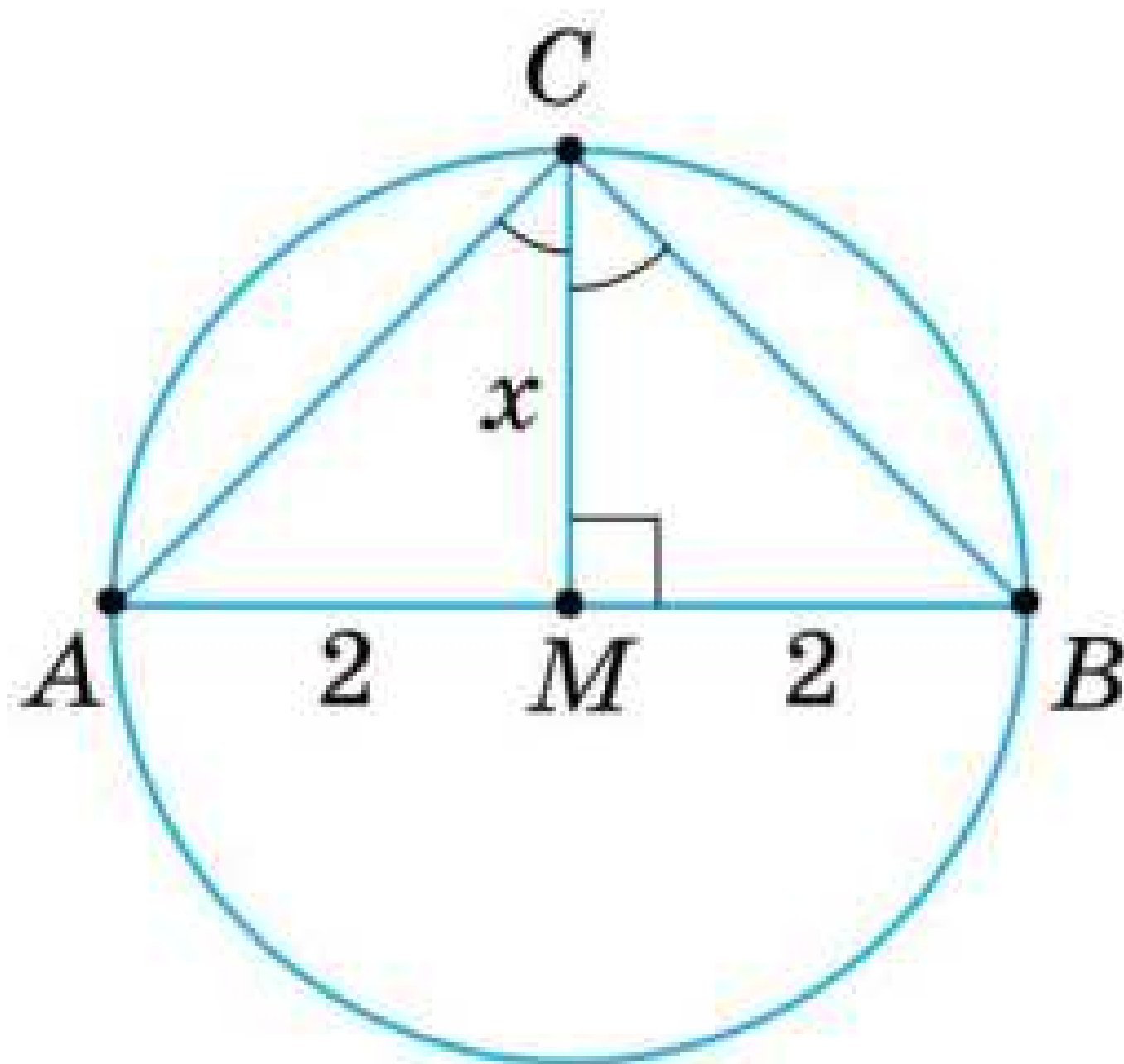


792°. У трикутнику ABC проведено медіану AC на відрізки AD і DC . Наповніть її.

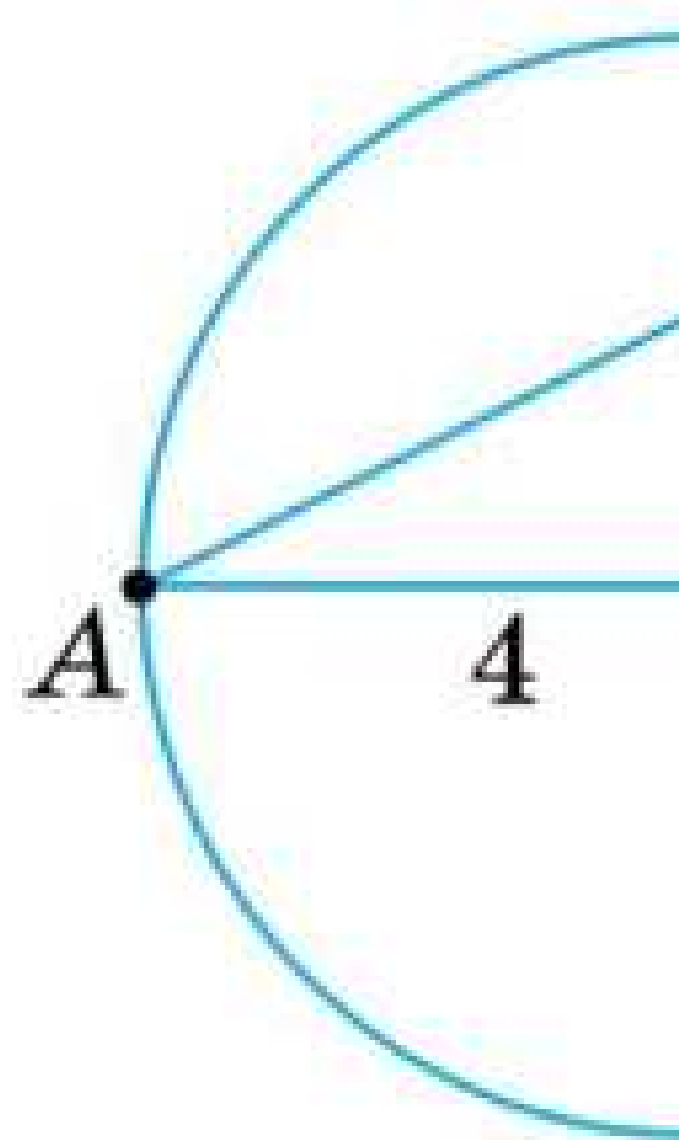
AB	10 см	
BC	15 см	
AC	20 см	
AD		
DC		

793°. Із вершини B трикутника ABC проведено медіану BM . Яка з двох точок ближче до вершини C ? Висновок поясніть.

797°. За даними на малюнках 352 (AB — діаметр кола).



Мал. 352



Мал.

798°. Із точки кола проведено перпендикуляр до діаметра. Відстані від цієї точки до кінців діаметра дорівнюють: 1) 16 см і 1 см; 2) 10 см і 4 см.

799°. Перпендикуляр, проведений з точки кола до діаметра, ділить його на відрізки 9 см і 4 см. Знайти радіус кола.



800. Через точку перетину медіан трикутника проведено перпендикуляр до однієї зі сторін. У якому відношенні цей перпендикуляр ділить медіану, що проходить через точку перетину?

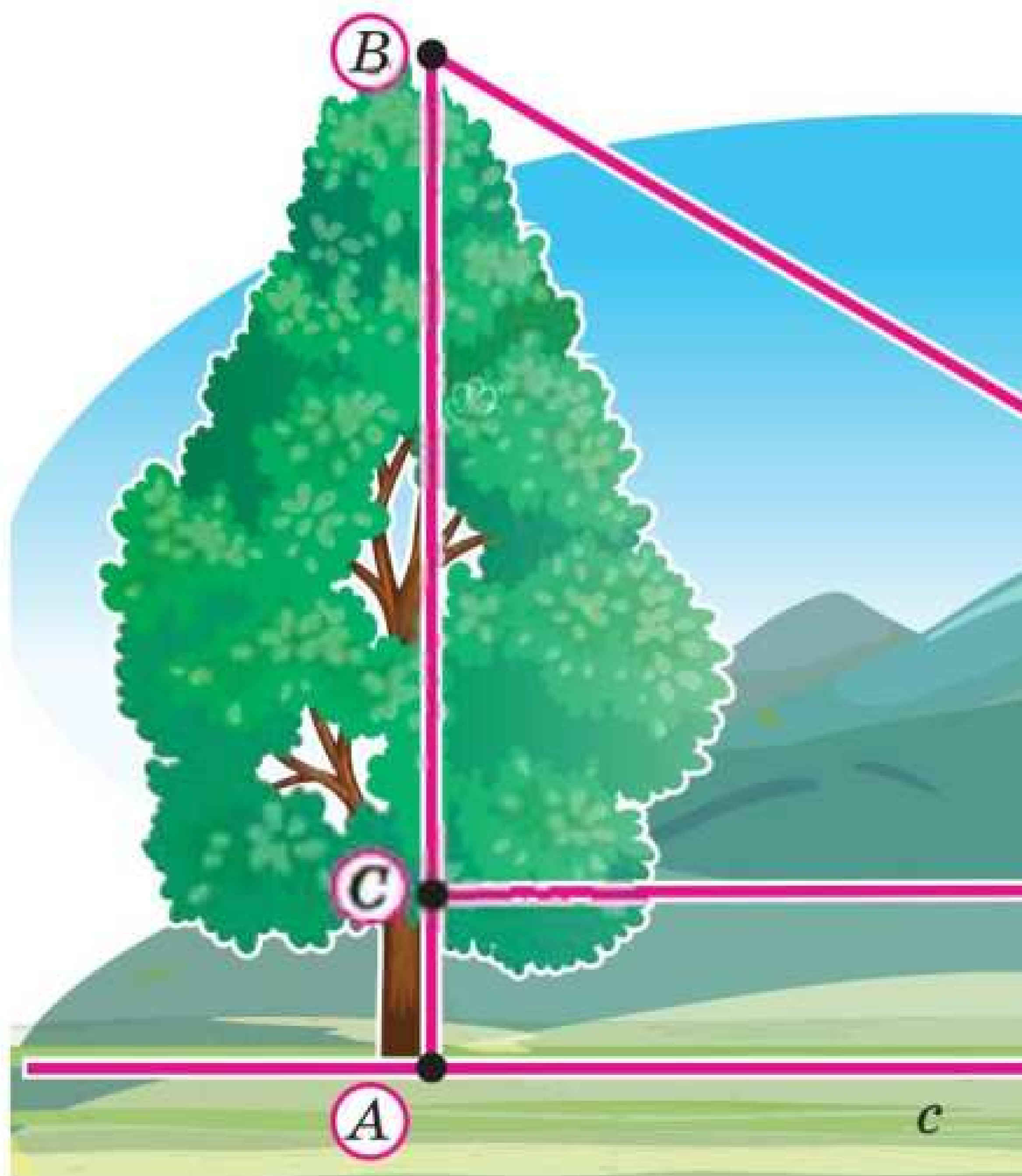
- 807.** У рівнобічній трапеції $ABCD$ з AC є бісектрисою гострого кута A . AC більша за її середню лінію. AC ділить висоту BK трапеції.
- 808.** У рівнобедреному трикутнику ABC висота AD дорівнює 10 см, а висота, проведена з вершини B на протилежну сторону, становить від основи цієї висоти три частини.
- 809.** Чому дорівнює відстань від основи висоти рівнобедреного трикутника до його бічної сторони, якщо бічна сторона — 25 см, а висота — 15 см?
- 810.** Діагоналі ромба зі стороною a дорівнюють d_1 та d_2 . Знайдіть площу ромба, якщо: 1) $a = 25$ см, $d_1 = 130$ мм, $d_2 = 312$ мм.
- 811.** За даними на малюнках 355–357 знайдіть кут α . Чи є трикутники — подібні: 1) $\triangle ACM$ і $\triangle DCM$ (мал. 355); 2) $\triangle ABC$ і $\triangle DCM$ (мал. 356); 3) $\triangle ABC$ і $\triangle ACM$ (мал. 357)?

- 816*.** Доведіть, що квадрат добутку
ного трикутника дорівнює
його гіпотенузи на висоту, пр
нузи (мал. 359).
- 817*.** Сума кутів при одній з основ
 90° . Доведіть, що висота трапе
порційним між проєкціями її
основу.
- 818*.** У гострий кут вписано три кол
редне коло дотикається до дв
ведіть, що радіус середнього к
пропорційним між радіусами
- 819*.** Спираючись на малюнок 360, д
1) $\triangle ADB \sim \triangle ACB$;
2) $\triangle BAC \sim \triangle BDC$;
3) $\triangle ADK \sim \triangle ACB$;
4) $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$.

Проявіть компетентність

820. Спираючись на властивість

823. На малюнку 362 показано, як користуючись однією віхою.



17. Які відрізки називають проєкціями ка
18. Що таке середнє пропорційне між дво
19. Сформулюйте властивості середніх трикутника.
20. Чому дорівнює відношення проєкції трикутника?

ТЕСТОВІ З

Уважно прочитайте задачі та знайдіть вільну. Для виконання тестового завдання

- 1°. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. Кут A дорівнює 40° , кут B дорівнює 80° . Знайдіть кут C_1 .
А. 40° .
Б. 80° .
В. 100° .
Г. 120° .
- 2°. У трикутниках KLM і DEF : $DF = 5KM$. Чому дорівнює DE ?
А. 2 см.
Б. 15 см.
В. 25 см.



Розділ 4. РОЗ ПРЯМОКУТНИ

У розділі д

- про визначну теорему геометрії — те
- що таке синус, косинус, тангенс го
- та про співвідношення між його сторо
- про алгоритми знаходження за одніє
- і гострим кутом двох інших сторін,
- гострих кутів;
- як застосовувати вивчені алгоритми,
- і задач практичного змісту

§ 15. ТЕОРЕМА ПІФАГОРА. П

1. Теорема Піфагора

Ситуація. Учні й учениці 8-А класу п
ли мінідослідження. Спочатку вони поб
два прямокутні трикутники з катетами 3 с
та 5 см і 12 см, а потім виміряли їхні гіп
Марія Іванівна сказала, що може назвати
ни гіпотенуз цих трикутників без вимірю
першим трикутником — 5 см, а в другому

між гіпотенузою та його проекцією

$$AC^2 = AB \cdot AD \text{ і}$$

Додавши рівності почленно та в
жимо:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB =$$

$$\text{Отже, } AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

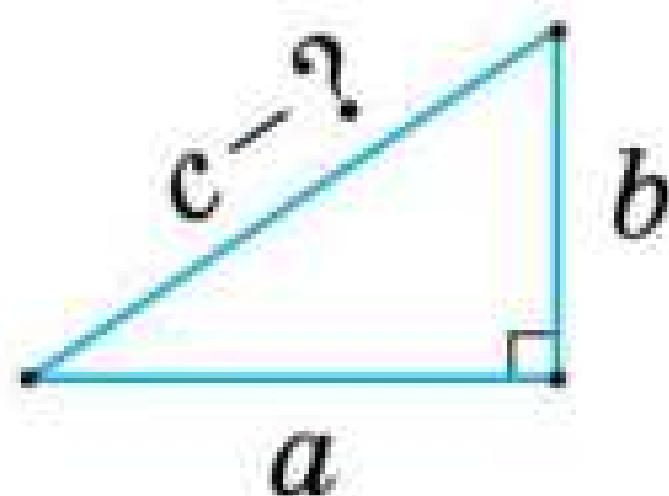


Якщо a, b — катети прямокут

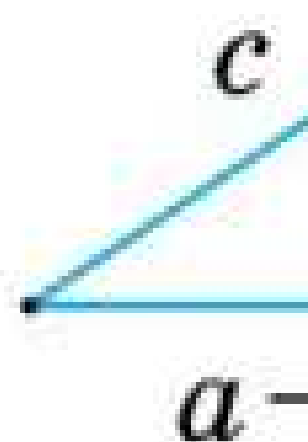
за, то з формули $c^2 = a^2 + b^2$ о

$$a^2 = c^2 - b^2, \text{ або } a = \sqrt{c^2 - b^2}; b^2 =$$

Скориставшись цими формулам
прямокутного трикутника можна з



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$$

Тоді $BD = 2 \cdot OD = 2 \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$ (см).



Щоб знайти деякий елемент фігури, виділіть на малюнку прямокутник, який містить шуканий елемент, і застосуйте властивості прямокутника.

2. Перпендикуляр і похила

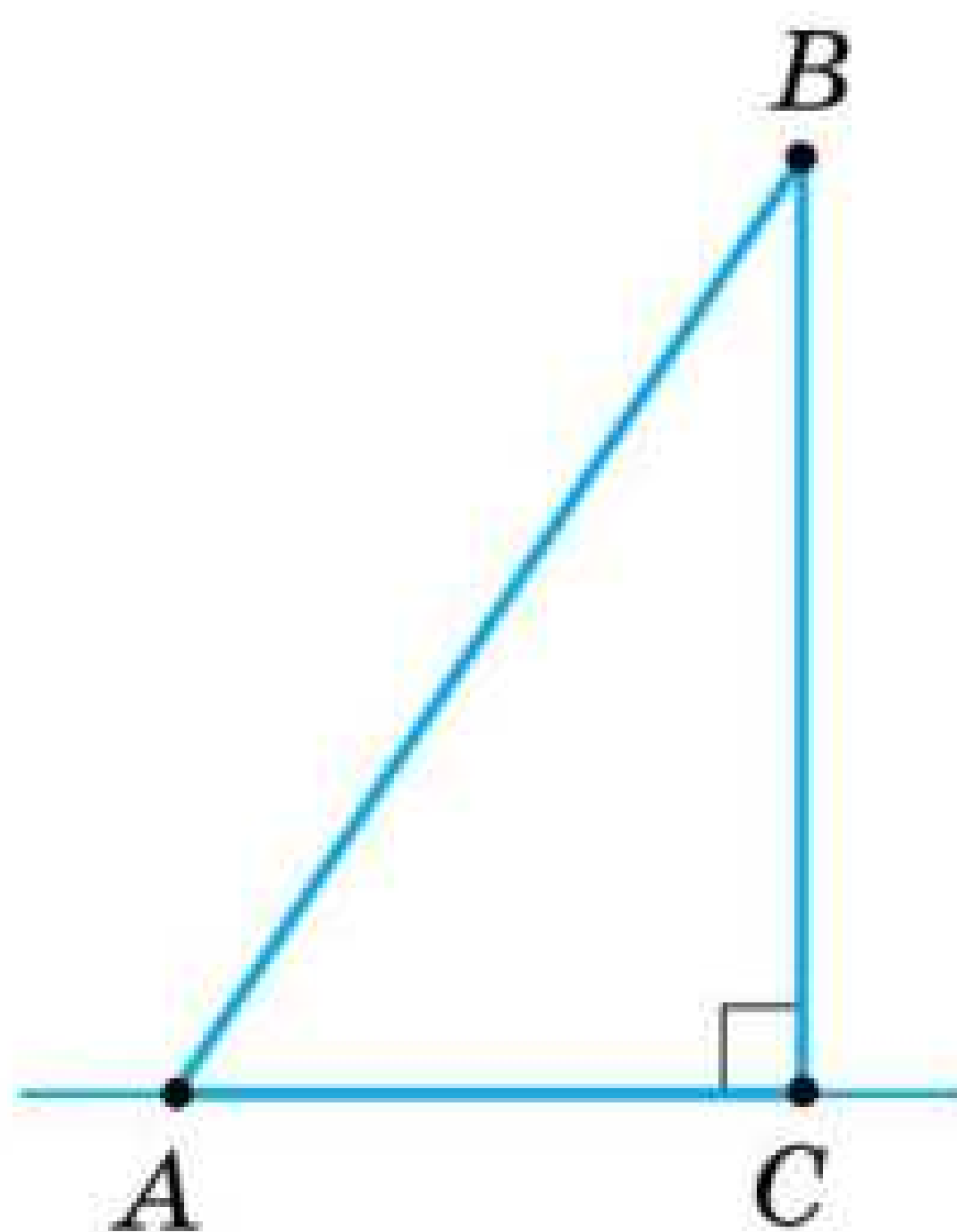
Нехай BC — перпендикуляр, проведений із точки B до прямої a (мал. 3). Візьмемо довільну точку A на прямій a , відмінну від точки C , і сполучимо точки A і B . Відрізок AB називають *похилою*, проведеною з точки B до прямої a . Точку A називають *основою похилої*, а відрізок AC називають *похилою*.

Запам'ятайте!

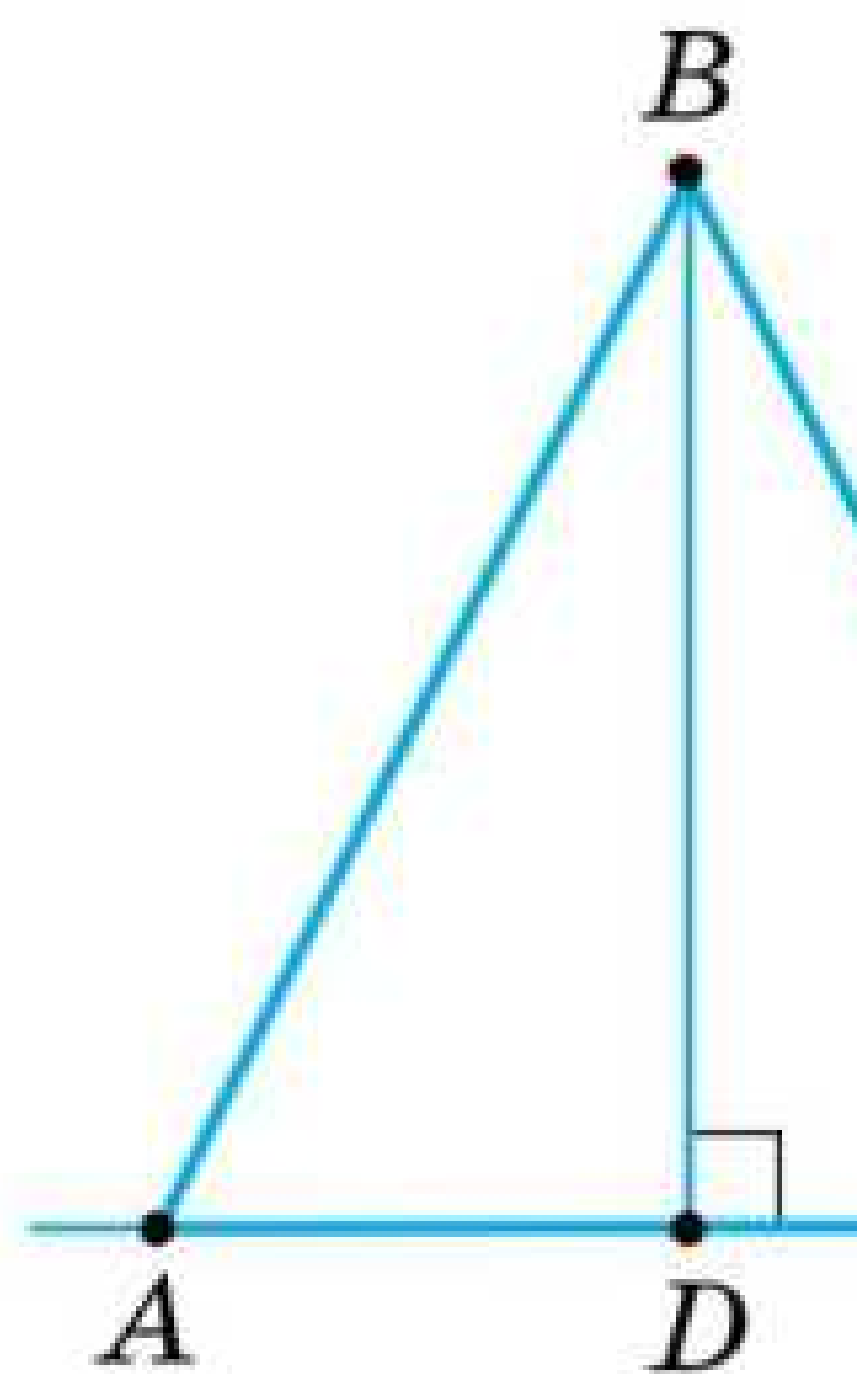
Властивості похилої

Якщо з даної точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, то:

1. Перпендикуляр є найкоротшим відстанню від точки до прямої.



Мал. 366



Мал. 369

Задача Із точки до прямої проведені перпендикуляр і похилий. Знайдіть похилий, якщо відомо, що перпендикуляр дорівнює 5 см і 9 см. Знайдіть похилий за іншу.

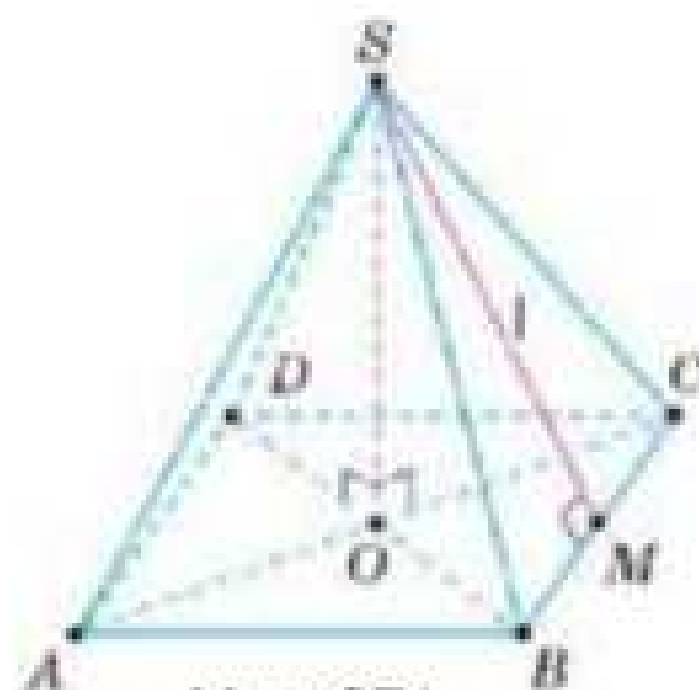
Розв'язання Нехай $AD = 5$ см, $DC = 2$ см (мал. 369). Оскільки $AD < DC$, то, за властивістю похилих, $AB < BC$. Позначимо довжину похилої AB як x , тоді $BC = x + 2$. Із прямокутних трикутників ABD і CBD знаходимо BD^2 .

$$\text{Із } \triangle ABD : BD^2 = AB^2 - AD^2 = x^2 - 5^2$$

$$\text{Із } \triangle CBD : BD^2 = BC^2 - DC^2 = (x + 2)^2 - 2^2$$

трикутник (наприклад, прямокутний трикутник A_1AC на малюнку 370).

У зображеній на малюнку 371 чотирикутній піраміді AC і BD — діагоналі основи, SO — висота піраміди, SM — перпендикуляр, проведений до сторони BC . Ці відрізки утворюють прямокутні трикутники (наприклад, трикутники SMC , SMB , SOC , SOB).



Мал. 371

Дізнайтеся більше

Теорема Піфагора — одна з визначних теорем математики. Протягом багатьох століть вона була поштовхом до важливих математичних досліджень.

Піфагор (570–496 рр. до н. е.) народився на острові Самосі (на півдні Егейського моря). Довгий час вивчав математику в Єгипті та Вавилоні. У м. Кротон, на півдні Італії, заснував наукову школу — так званий піфагорійський союз. Піфагор та його учні займалися математикою, філософією, астрономією й теорією музики.

Серед досягнень піфагорійців найвагомішим вважають теорему, названу Піфагоровою, та її доведення. (Нині встановлено, що цю теорему застосовували за 1500 років до Піфагора в Давньому Вавилоні.)

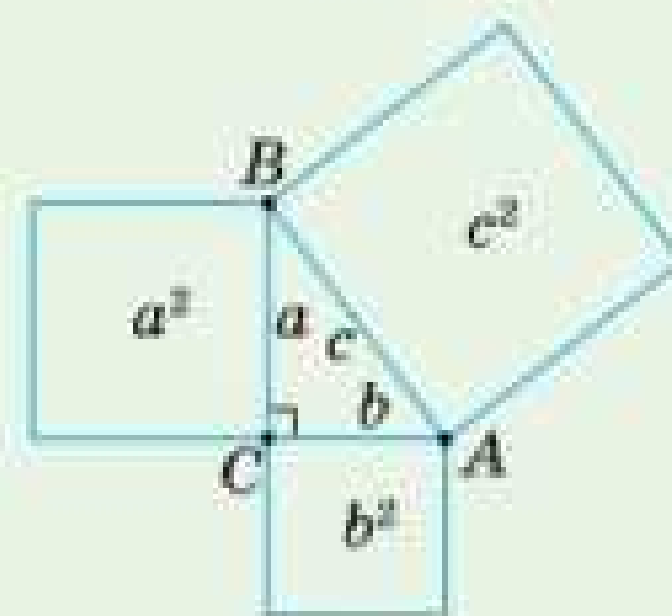
Теорема була сформульована так: **площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах** (мал. 372).

Доведенням теореми Піфагора займалось багато математиків протягом кількох століть. Нині є понад 150 різних доведень цієї теореми. Так, індійський математик Бхаскара (XII ст.) запропонував таку фігуру, як на малюнку 373, без жодних пояснень. Під малюнком стоїть лише одне слово — «дивись». Спробуйте пояснити справедливість теореми за цим малюнком.

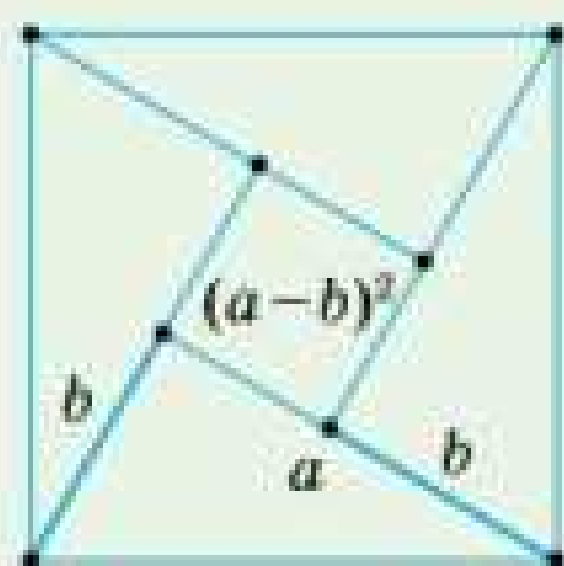
Із теоремою Піфагора пов'язані учнівські жарти: малюнок до теореми для випадку рівнобедреного прямокутного трикутника називали «піфагоровими штанами» (мал. 374). Іноді цей малюнок зображали у вигляді різних смішних фігурок (мал. 375 і 376).



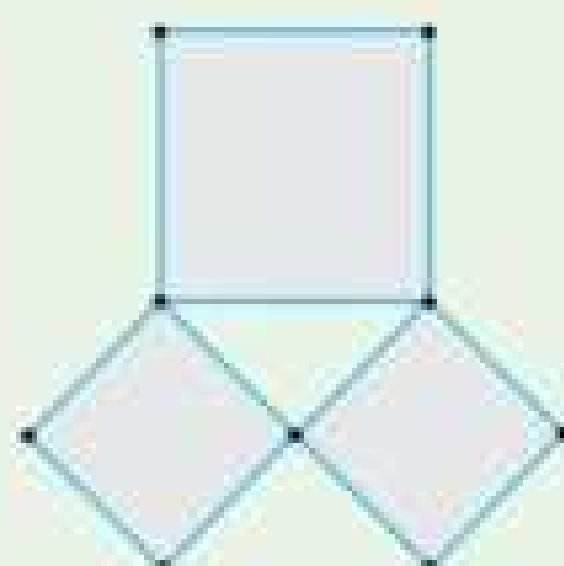
Піфагор



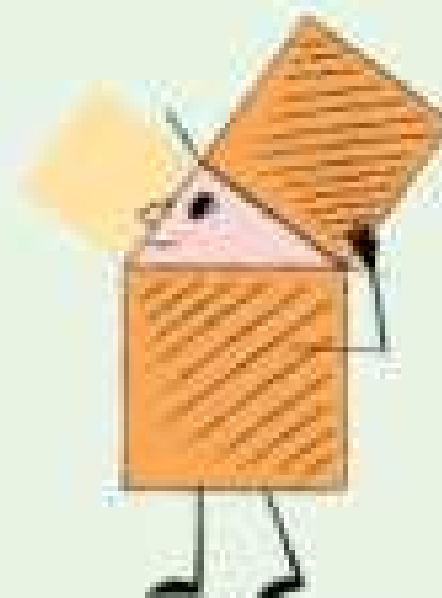
Мал. 372



Мал. 373



Мал. 374



Мал. 375



Мал. 376



Словничок



Українська

теорема
Піфагора

Англійська English

Pythago-
rean
theorem

qr.orioncentr.com.ua/fPUx0

Пригадайте головне

1. Сформулюйте та доведіть теорему Піфагора.
2. Поясніть, як за двома сторонами прямокутника знайти третю сторону.
3. Що таке похила; основа похилої; проекція похилої на гіпотенузу.
4. Сформулюйте властивості похилих.

Усне тренування

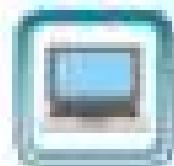
Обчисліть:

1) $3^2 + 4^2$;

$5^2 + 12^2$;

$7^2 + 24^2$

827* Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:



- 1) 12 см і 5 см;
- 2) 9 м і 12 м;
- 3) 8 см і $8\sqrt{3}$ см.



qr.orioncentr.com.ua/rbrhWt

828* Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та інший катет відповідно дорівнюють:

- 1) 13 см і 12 см; 2) 17 м і 15 м; 3) $15a$ і $9a$.

829* a, b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. Знайдіть невідомі величини за таблицею 29.



Таблиця 29

a		12 см	$8a$
b	5 см		$6a$
c	13 см	20 см	

830* a, b — сторони прямокутника, d — його діагональ. Знайдіть невідомі величини за таблицею 30.

Таблиця 30

a	24 см	10 см	$12a$
b	7 см		
d		26 см	$15a$

831* Доведіть, що квадрат діагоналі прямокутника дорівнює сумі квадратів двох його суміжних сторін.

832* Знайдіть діагональ квадрата, якщо його сторона дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

833* Знайдіть гіпотенузу рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його катет дорівнює:

- 1) 1 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) a .

834* Знайдіть катети рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює:



- 1) $\sqrt{2}$ см; 2) 8 см; 3) m .

835* Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює: 1) $\sqrt{3}$ см; 2) 10 см; 3) a .

836* Знайдіть висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, якщо його бічна сторона та основа відповідно дорівнюють:



- 1) 26 см і 20 см;
- 2) 17 см і 16 см;
- 3) 13 см і 10 см.

837°. Через точку A до кола з центром O проведено дотичну AB , де B — точка дотичності (мал. 380). Знайдіть:

1) радіус кола, якщо відрізок OB дорівнює 8 см, а відстань від центра кола — 17 см;

2) відстань від точки A до центра кола, якщо радіус кола дорівнює 12 см, а відрізок дотичної AB — 16 см.

838°. Знайдіть сторону ромба, якщо



1) 6 см і 8 см;

2) 18 см і 24 см;

3) 12 см і 16 см.

839°. Доведіть, що коли a — сторона квадрата, а d_2 — його діагоналі, то $4a^2 = d_2^2$.

840°. Доведіть, що квадрат діагонального паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (мал. 381).

841°. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 13 см, а його

845°. Із точки O до прямої проведемо



Знайдіть:

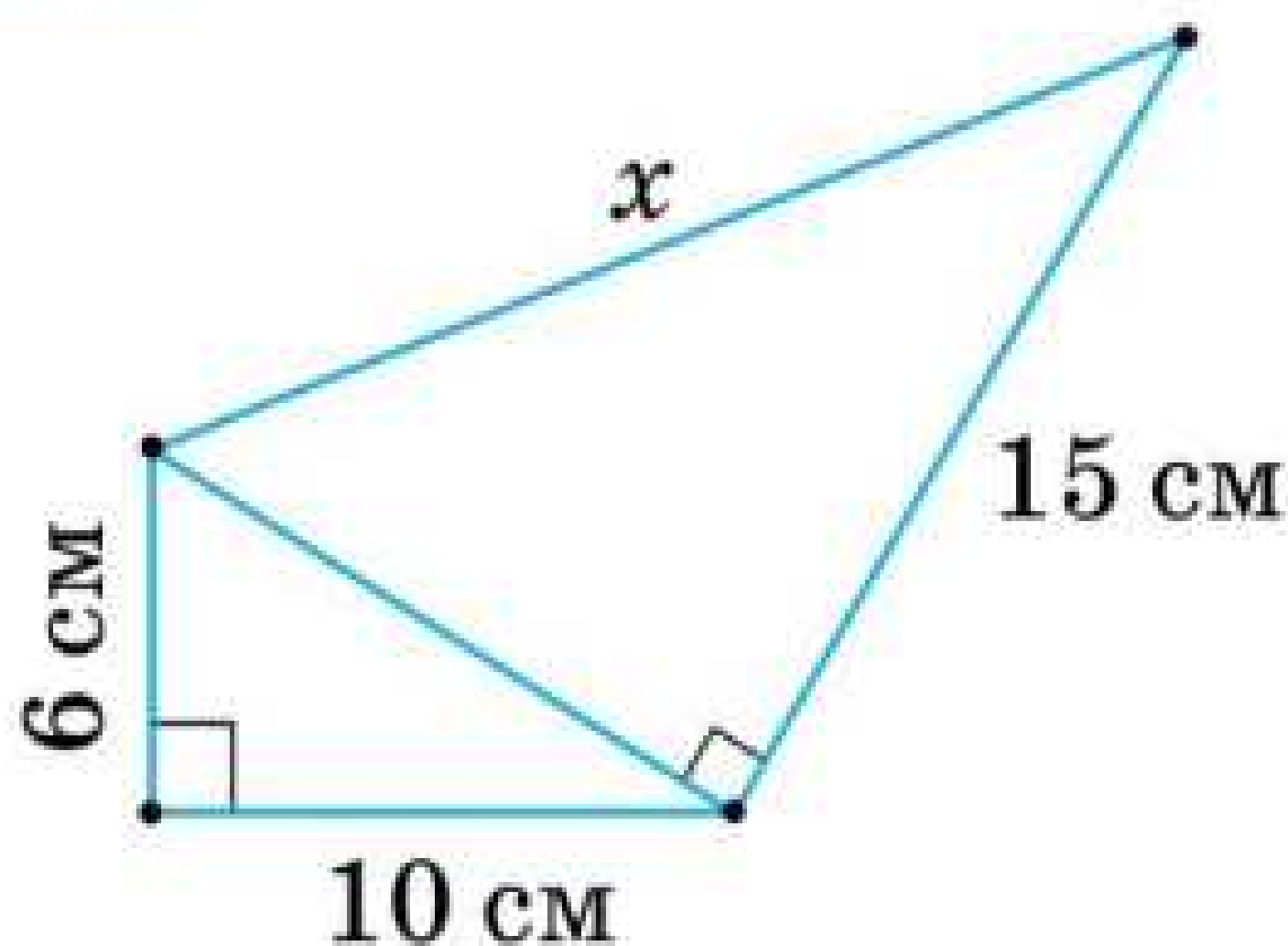
1) похилу OC , якщо її проєкція на пряму OB — 3 см;

2) проєкцію BC похилої, якщо OC — 13 см;

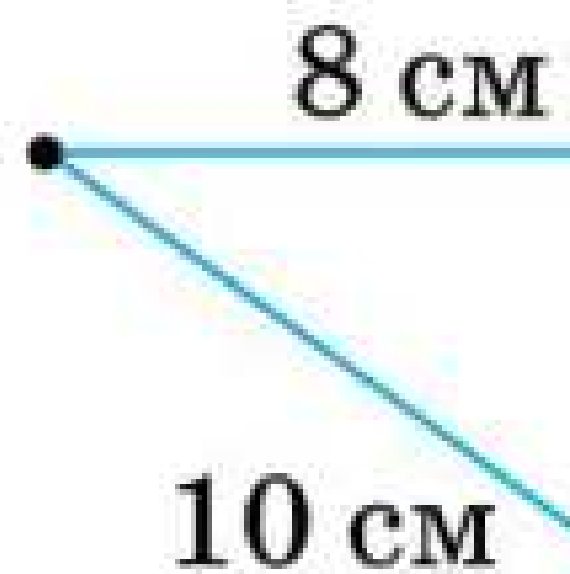
3) перпендикуляр OB , якщо OC — 13 см, а проєкція BC — 7 см.

846. За даними на малюнках 383, 384

847. За даними на малюнку 385 знайдіть

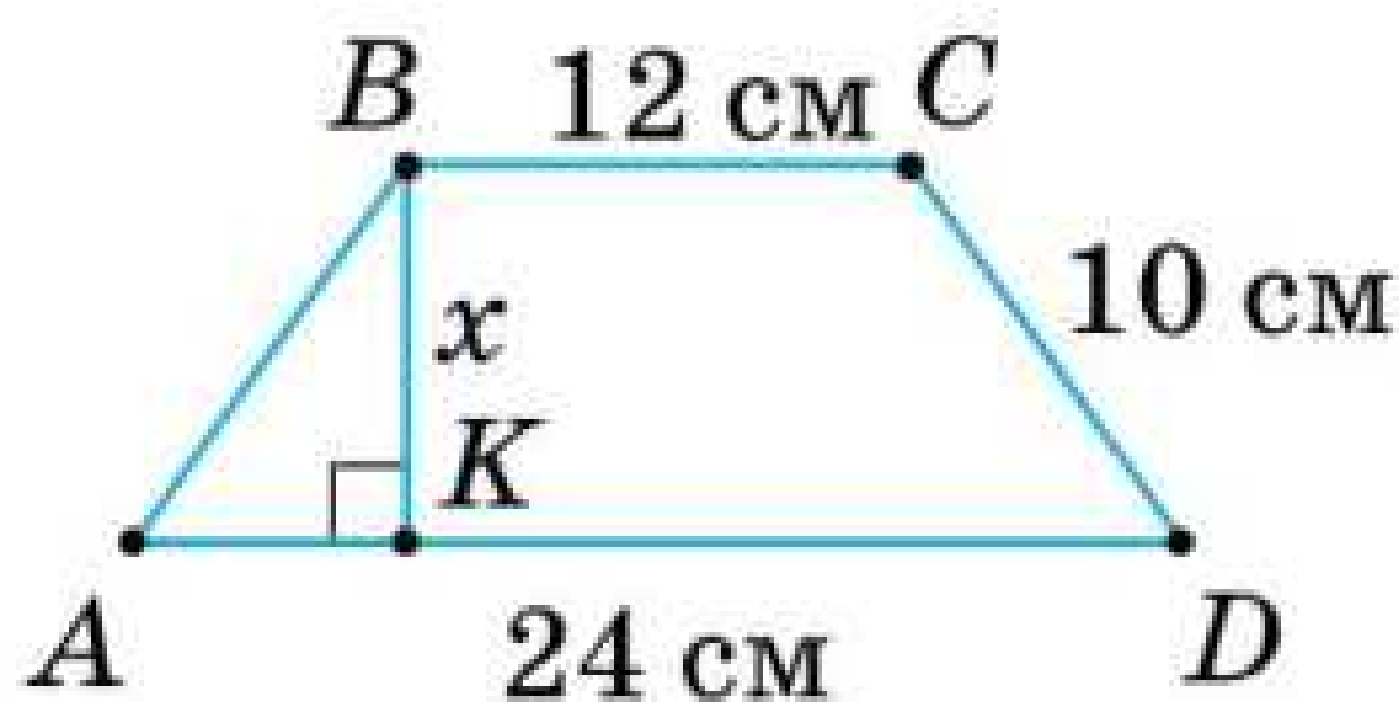


Мал. 383

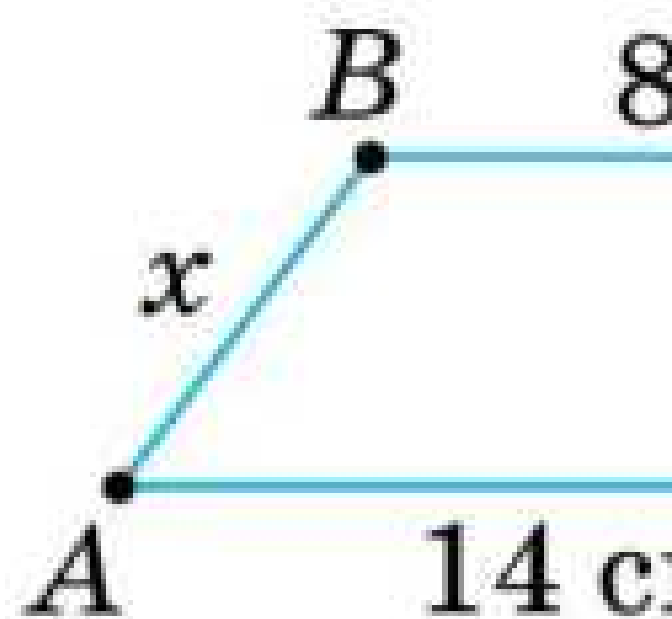


Ма

- 854.** Основи прямокутної трапеції
йдіть більшу бічну сторону, якщо
1) $a = 4$ см, $b = 12$ см, $h = 6$ см;
- 855.** Доведіть, що в прямокутній трапеції
лей дорівнює різниці квадратів бічних сторін.
- 856.** За даними на малюнках 386, 387
рівнобічної трапеції $ABCD$.
- 857.** За даними на малюнку 388 з
бічної трапеції $ABCD$.



Мал. 386

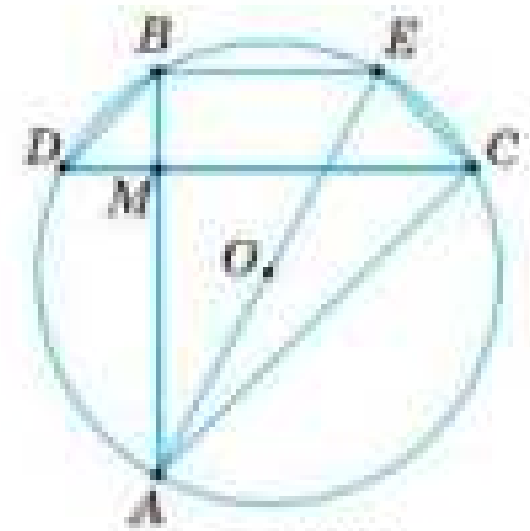


Мал. 387

- 858.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 18 см. Знайдіть діагональ трапеції, якщо висота дорівнює 16 см.
- 1) $a = 6$ см, $b = 18$ см, $h = 16$ см;

- 864.** Із точки, що лежить на відстані 13 см від однієї з двох похилих завдовжки 13 см і 20 см, проведено перпендикуляри до цих похилих. Скільки розв'язків має ця задача?
- Е** **865.** Із точки до прямої проведено дві перпендикуляри. Їхні проєкції відносяться як 2 до 1. Знайдіть відстань від точки до прямої, якщо відстань від точки до однієї з перпендикулярів дорівнює 10 см.
- 866.** Якщо дві похилі, проведені до однієї прямої, мають однакові проєкції, то вони рівні між собою.
- 867.** Якщо з однієї точки до прямої проведено дві перпендикуляри, то одна з них має й більшу проєкцію на цю пряму.
- Е** **868*.** У прямокутному трикутнику ABC катети AB і BC дорівнюють m і n відповідно. Знайдіть довжину гіпотенузи AC , якщо:
- 1) $m = 25$ см, $n = 24$ см; 2) $m = 12$ см, $n = 5$ см.
- 869*.** У прямокутному трикутнику ABC гіпотенузи та іншого катета AB дорівнюють a і b відповідно. Знайдіть довжину іншого катета, якщо: 1) $b = 60$ см, $a = 61$ см; 2) $b = 12$ см, $a = 13$ см.
- 870*.** Висота й медіана, проведені до гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC , дорівнюють h і m . Знайдіть дві інші сторони.

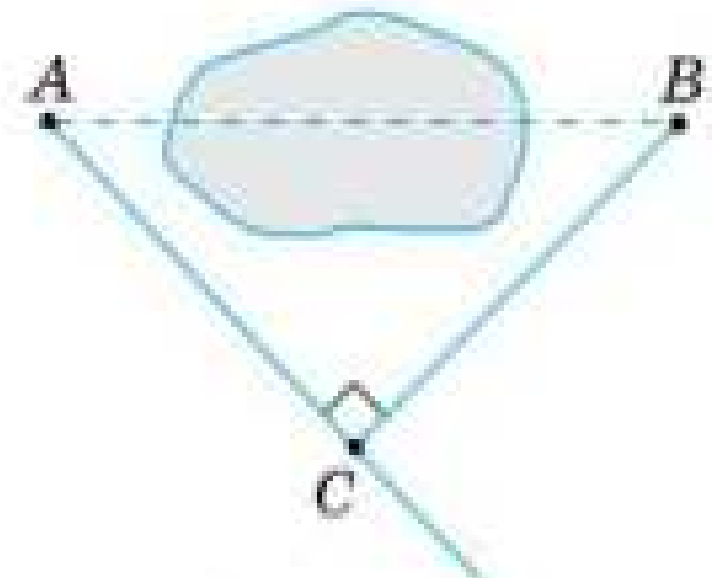
- 877***. (Задача Архімеда) Дві хорди, які перетинаються, — взаємно перпендикулярні. Доведіть, що сума квадратів відрізків цих хорд дорівнює квадрату діаметра (мал. 391).



Мал. 391

Проявіть компетентність

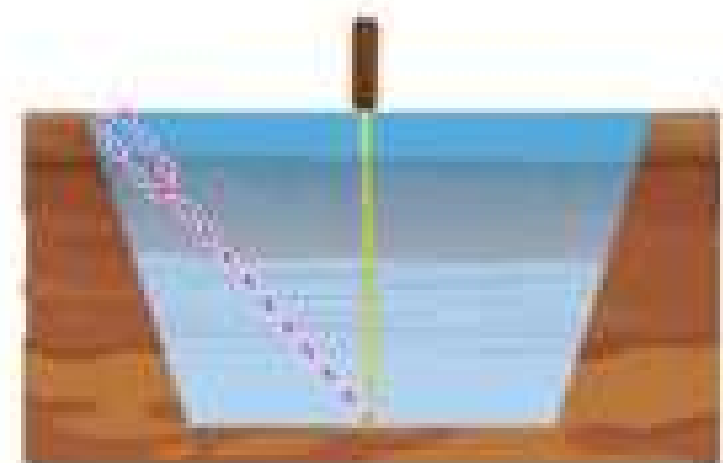
- 878.** На малюнку 392 показано, як застосували теорему Піфагора, щоб виміряти відстань між пунктами A і B, розділеними перешкодою. Поясніть вимірювання.
- 879.** Між двома фабричними будівлями потрібно побудувати похилий жолоб для транспортування матеріалів. Кінці жолоба мають бути розташовані на висоті 7 м і 3 м над землею. Якою має бути довжина жолоба, якщо відстань між будівлями дорівнює 15 м?
- 880.** Діагональ прямокутної ділянки землі дорівнює 116 м, а одна зі сторін — 84 м. Який периметр цієї ділянки?
- 881.** 1. Якої довжини має бути драбина (мал. 393), щоб її можна було приставити до вікна, розташованого на висоті 6 м, якщо відстань від нижнього кінця драбини до будинку має дорівнювати 2,5 м?
2. На яку відстань від стіни будинку потрібно відсунути нижній кінець драбини завдовжки 9 м, щоб верхній її кінець був на висоті 6 м?
- 882.** (Задача давньокитайського вченого Цзінь Кіу-Чау, 1250 р. до н. е.) У центрі копанки, що має форму квадрата зі стороною 10 футів, росте очеретина, висота якої над поверхнею води — 1 фут (1 фут $\approx$ 30 см). Якщо нахилити її до берега (до середини сторони копанки), то вона дістає своєю верхівкою берега (мал. 394). Яка глибина копанки?



Мал. 392



Мал. 393



Мал. 394

§ 16. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

1. Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника

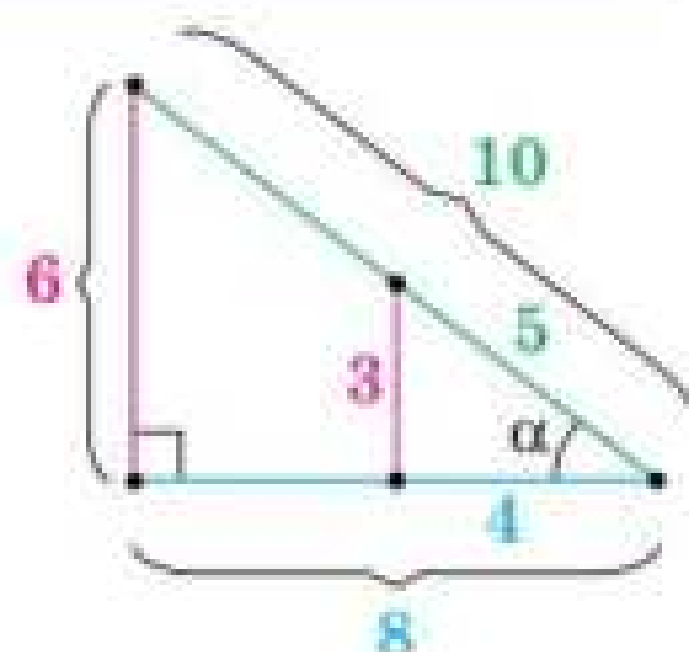


qr.orioncentr.com.ua/pKHWK

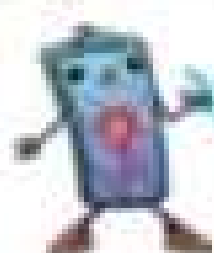
Ситуація. Учні й учениці 8-А класу продовжували досліджувати властивості прямокутних трикутників. Вони побудували прямокутний трикутник зі сторонами 6, 8, 10 і його середню лінію та отримали подібний прямокутний трикутник зі сторонами 3, 4, 5. Спільний гострий кут цих трикутників позначили α (мал. 395). Учні помітили таку закономірність — відношення обох катетів до гіпотенузи, а також катета до катета у кожному з цих трикутників відповідно рівні:

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Виникла гіпотеза, що значення цих відношень пов'язані з кутом α цих трикутників.



Мал. 395



Чи мають рацію учні й учениці?

Так.



Запам'ятайте!

Відношення **протилежаного катета** до **гіпотенузи** називається **синусом** гострого кута прямокутного трикутника.

Відношення **прилеглого катета** до **гіпотенузи** називається **косинусом** гострого кута прямокутного трикутника.

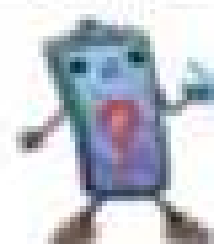
Відношення **протилежаного катета** до **прилеглого катета** називається **тангенсом** гострого кута прямокутного трикутника.



Коротко записуємо і читаємо (табл. 31):

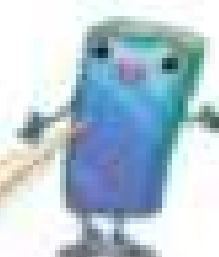
Таблиця 31

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$ синус альфа	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$ косинус альфа	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ тангенс альфа
--	--	---



Чи залежать синус, косинус і тангенс гострого кута від розмірів трикутника?

Не залежать.



У цьому ви могли переконатися, аналізуючи ситуацію на початку параграфа.



Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежать тільки від градусної міри кута й не залежать від розмірів трикутника.

У прямокутному трикутнику:

- 1) кожний із двох катетів менший від гіпотенузи;
- 2) катет може бути і більшим, і меншим від іншого катета або дорівнювати йому.

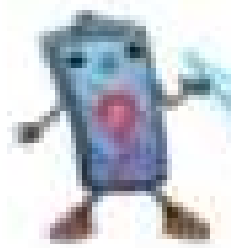
Звідси впливають важливі властивості синуса, косинуса і тангенса гострого кута.



Для будь-якого гострого кута α :

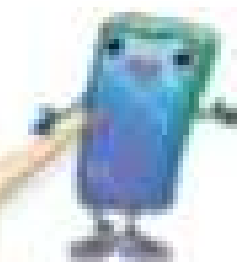
- 1) $\sin \alpha < 1$ і $\cos \alpha < 1$;
- 2) $\operatorname{tg} \alpha$ може бути і більшим за 1, і меншим від 1, і дорівнювати 1.

2. Значення синуса, косинуса й тангенса для кутів 45° , 30° та 60°



Як знайти значення синуса, косинуса й тангенса для кутів 45° , 30° , 60° ?

Поміркуємо.



1. Для кута 45° .

Нехай ABC — прямокутний трикутник із гіпотенузою AB і $\angle A = 45^\circ$ (мал. 396). Тоді $\angle B = 45^\circ$.

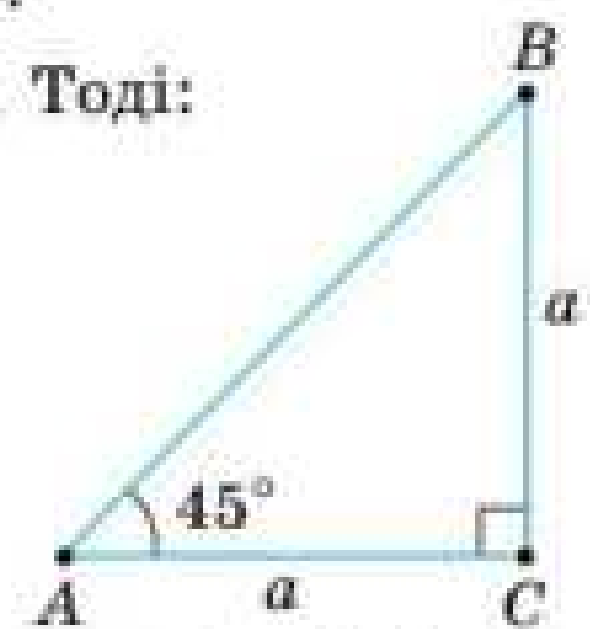
Отже, $\triangle ABC$ — рівнобедрений. Нехай $AC = BC = a$.

За теоремою Піфагора, $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Тоді:

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1.$$



Мал. 396

2. Для кутів 30° і 60° .

Нехай ABC — прямокутний трикутник із гіпотенузою $AB = c$ і $\angle A = 30^\circ$ (мал. 397). Знайдемо катети AC і BC .

$BC = \frac{c}{2}$ як катет, що лежить проти кута 30° . За теоремою Піфагора, знайдемо AC :

$$AC = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}. \text{ Тоді:}$$



Мал. 397

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Якщо $\angle A = 30^\circ$ (мал. 403), то $\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Тоді:

$$\sin 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}.$$

Складемо таблицю значень синуса, косинуса й тангенса для кутів 30° , 45° , 60° (табл. 32).

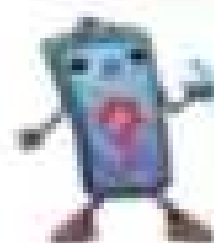
Таблиця 32

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



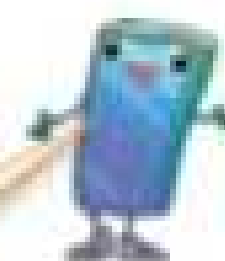
При **збільшенні** кута **синус** і **тангенс** гострого кута **збільшуються**, а **косинус** — **зменшується**.

При **зменшенні** кута **синус** і **тангенс** гострого кута **зменшуються**, а **косинус** — **збільшується**.



Чи є залежність між синусом і косинусом кутів α та $90^\circ - \alpha$?

Так.



Запам'ятайте!

У будь-якому прямокутному трикутнику:

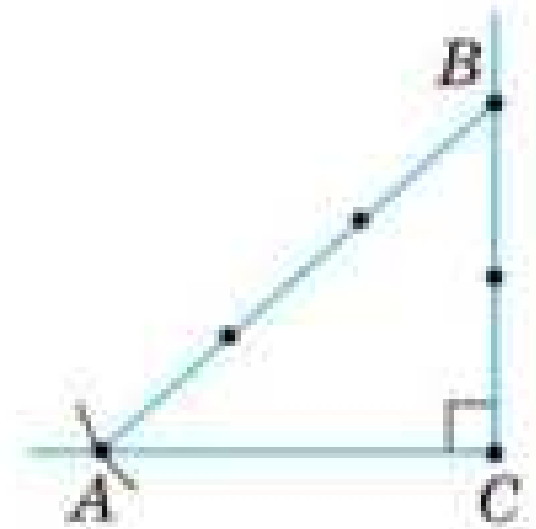
$$\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha),$$

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha).$$

Спробуйте вивести ці формули самостійно.

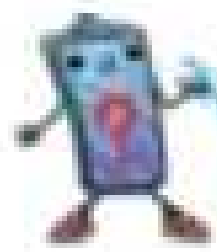
Задача 1 Побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

Розв'язання За допомогою косинця побудуємо прямий кут і на одній його стороні від вершини C відкладемо відрізок CB , що дорівнює двом довільним одиничним відрізкам (мал. 398). З точки B , як із центра, радіусом, що дорівнює трьом таким самим одиничним відрізкам, опишемо дугу, яка перетне іншу сторону прямого кута. Точку перетину позначимо буквою A . З'єднавши точки A і B , одержимо прямокутний трикутник ABC . $\angle A$ — шуканий, оскільки $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}$.



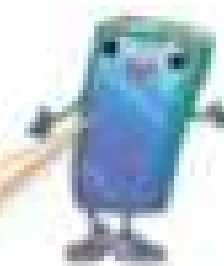
Мал. 398

3. Залежності між сторонами і кутами прямокутного трикутника



Чи можна виразити сторону прямокутного трикутника через його кут?

Так.



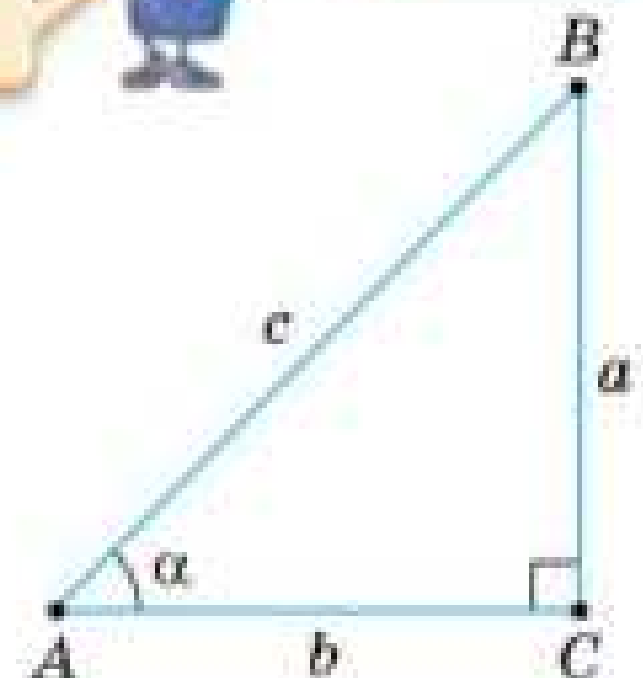
qr.orioncentr.com.ua/rfXcf



Для цього достатньо скористатися означенням синуса, косинуса і тангенса гострого кута прямокутного трикутника.

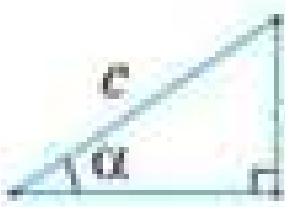
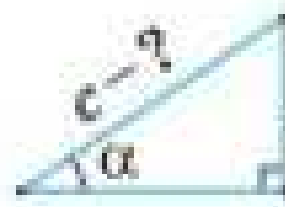


Щоб знайти за однією зі сторін прямокутного трикутника та гострим кутом дві інші сторони (мал. 399), скористайтесь рівностями 1) — 6) (табл. 33).



Мал. 399

Таблиця 33

 $1) a = c \cdot \sin \alpha$	 $4) c = \frac{a}{\sin \alpha}$
 $2) b = c \cdot \cos \alpha$	 $5) c = \frac{b}{\cos \alpha}$
 $3) a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$	 $6) b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$

Задача 1 Побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{1}{3}$.

Розв'язання За допомогою косинусів побудуємо кут і на одній його стороні відкладемо відрізок CB , що дорівнює двом одиничним відрізкам (мал. 398). З точки C радіусом, що дорівнює трьом таким відрізкам, опишемо дугу, яка перетне перпендикулярного прямого кута. Точку перетину позначимо A . Тоді $\triangle ABC$ і B , одержимо прямокутний трикутник, в якому

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{3}.$$

3. Залежності між сторонами і кутами прямокутного трикутника



Чи можна виразити сторони прямокутного трикутника через його кут?

Для цього достатньо скористатися

Запам'ятайте!

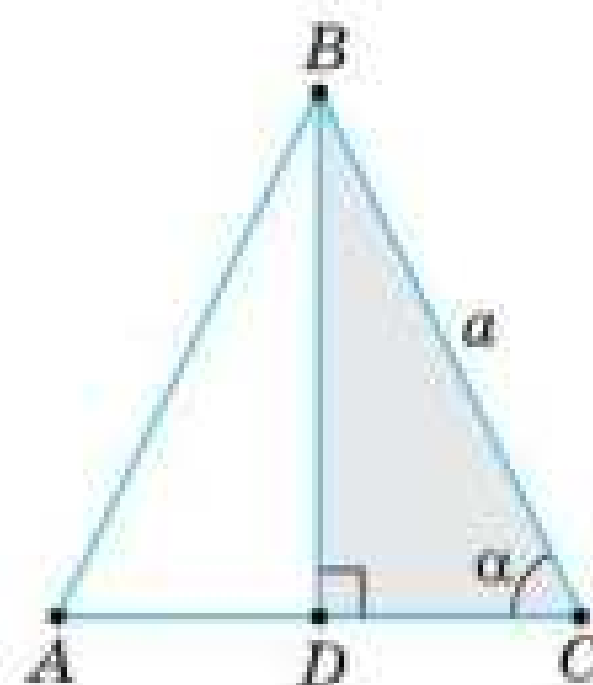
1. Катет, протилежний куту α , дорівнює добутку гіпотенузи на $\sin \alpha$.
2. Катет, прилеглий до кута α , дорівнює добутку гіпотенузи на $\cos \alpha$.
3. Катет, протилежний куту α , дорівнює добутку іншого катета на $\operatorname{tg} \alpha$.
4. Гіпотенуза дорівнює частці катета, протилежного куту α , і $\sin \alpha$.
5. Гіпотенуза дорівнює частці катета, прилеглого до кута α , і $\cos \alpha$.
6. Катет, прилеглий до кута α , дорівнює частці катета, протилежного куту α , і $\operatorname{tg} \alpha$.

Задача 2 Знайдіть основу рівнобедреного трикутника з бічною стороною a і кутом α при основі.

Розв'язання Нехай ABC — рівнобедрений трикутник із бічною стороною $BC = a$ і $\angle C = \alpha$ (мал. 400). Проведемо висоту BD . У прямокутному трикутнику DBC катет DC , прилеглий до кута α , дорівнює добутку гіпотенузи a на $\cos \alpha$:

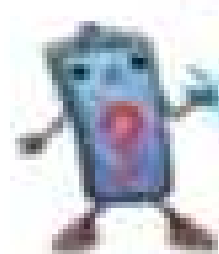
$$DC = a \cos \alpha.$$

Оскільки висота рівнобедреного трикутника, яку проведено до основи, є медіаною, то $DC = AD$. Тоді основа $AC = 2 \cdot DC = 2a \cos \alpha$.



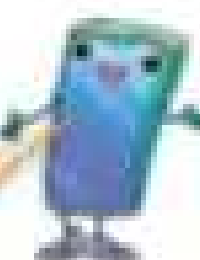
Мал. 400

4. Знаходження синуса, косинуса й тангенса кутів



Чи можна обчислити значення синуса, косинуса й тангенса кутів, відмінних від 30° , 45° , 60° ?

Так.



За допомогою інженерних калькуляторів (чи програми «калькулятор» комп'ютера) або спеціальних таблиць можна розв'язати дві задачі:

- 1) для даного кута α знайти $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$;
- 2) за даним значенням $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ знайти кут α .



Якщо використовуєте калькулятор і кут дано в градусах і мінутах, то мінути переведіть у десяті частини градуса (поділіть їх на 60).

Наприклад, для кута $55^\circ 42'$ одержите $55,7^\circ$. Якщо, наприклад, для $\cos \alpha \approx 0,8796$ знайшли $\alpha \approx 28,40585^\circ$, то частини градуса переведіть у мінути (помножте дробову частину на 60). Округливши, одержите: $\alpha \approx 28^\circ 24'$.

Значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ можна знаходити за таблицями.

Таблиця синусів і косинусів (див. таблицю 1). У першому стовпці ліворуч — кут α від 0° до 45° , а в четвертому — від 90° до 45° .

Над другим і третім стовпцями — «синуси», а знизу цих стовпців — «косинуси».

Верхні назви «синуси» й «косинуси» — для кутів до 45° , а нижні — кутів, більших за 45° .

Наприклад, за таблицею знаходимо $\sin 85^\circ \approx 0,996$ і т. д.

За таблицею можна знайти кут α , якщо відомо його синус або косинус. Наприклад, треба знайти кут α , якщо $\sin \alpha \approx 0,615$. Знаходимо число, близьке до 0,615.

Таблиця тангенсів (див. таблицю 2). Вона містить кут α в одному стовпці та значення тангенсів цих кутів у другому.

Наприклад, $\tan 19^\circ \approx 0,344$. Якщо $\tan \alpha = 0,344$, то $\alpha \approx 19^\circ$.

Дізнайтеся більше

1. Крім синуса, косинуса й тангенса кута α в трикутнику існують ще дві функції: відношення сторін прямокутного трикутника, що лежить навпроти кута α , до сусідньої сторони кута α — *котангенс*. Це відношення катета b до сусіднього катета a (мал. 1).

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
синус	sine	Sinus (m)	sinus
косинус	cosine	Kosinus (m)	cosinus
тангенс	tangent	Tangens (m)	tangente

qr.orioncentr.com.ua/7af0l

Пригадайте головне

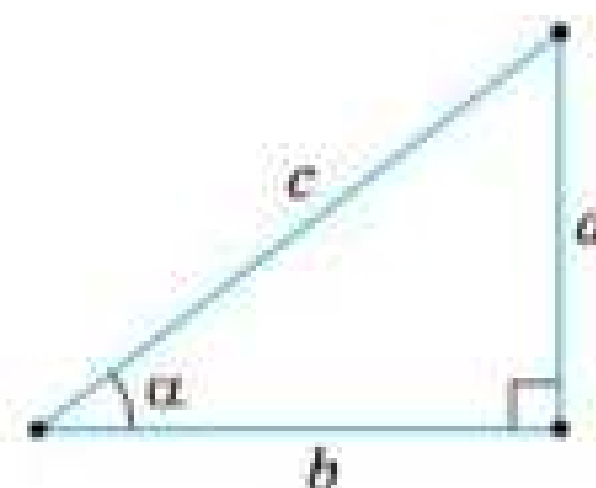
1. Дайте означення синусу, косинусу й тангенсу гострого кута прямокутного трикутника.
2. Поясніть, чому синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника залежать від градусної міри кута й не залежать від розмірів трикутника.
3. Поясніть, чому $\sin \alpha < 1$, $\cos \alpha < 1$ для будь-якого гострого кута α .
4. Яких значень може набувати $\operatorname{tg} \alpha$?
5. Сформулюйте залежність між синусом і косинусом кутів, які доповнюють один одного до 90° .
6. Назвіть значення синуса, косинуса і тангенса кутів 30° , 45° , 60° .
7. Поясніть, як знайти гіпотенузу прямокутного трикутника за катетом і гострим кутом.
8. Як знайти катет прямокутного трикутника за прилеглим до нього кутом та іншим катетом?

Усне тренування

1. Обчисліть:
 $36^\circ + 54^\circ$; $43^\circ + 47^\circ$; $19^\circ + 71^\circ$; $22^\circ + 68^\circ$.
2. Знайдіть x , якщо:
 $\frac{x}{4} = a$; $\frac{3}{x} = c$; $\frac{x}{12} = n$; $\frac{5}{x} = m$.

Розв'яжіть задачі

- 883.** 1. За даними на малюнку 402 назвіть: катет, прилеглий до кута α ; катет, протилежний куту α .
2. Прочитайте записи $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ і $\frac{a}{b}$, вживаючи слова «відношення», «протилежний катет», «прилеглий катет», «гіпотенуза».



Мал. 402

884'. Назвіть правильну відповідь (

1) $\operatorname{tg} \beta$ дорівнює:

а) $\frac{5}{15}$; б) $\frac{12}{5}$; в) $\frac{5}{13}$;

2) $\cos \beta$ дорівнює:

а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{13}{5}$; в) $\frac{5}{13}$;

3) $\sin \beta$ дорівнює:

а) $\frac{5}{12}$; б) $\frac{12}{13}$; в) $\frac{13}{5}$.

885'. За малюнком 404 назвіть прав

1) для кута α відношення $\frac{a}{c}$ є:

а) $\sin \alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $\operatorname{tg} \alpha$;

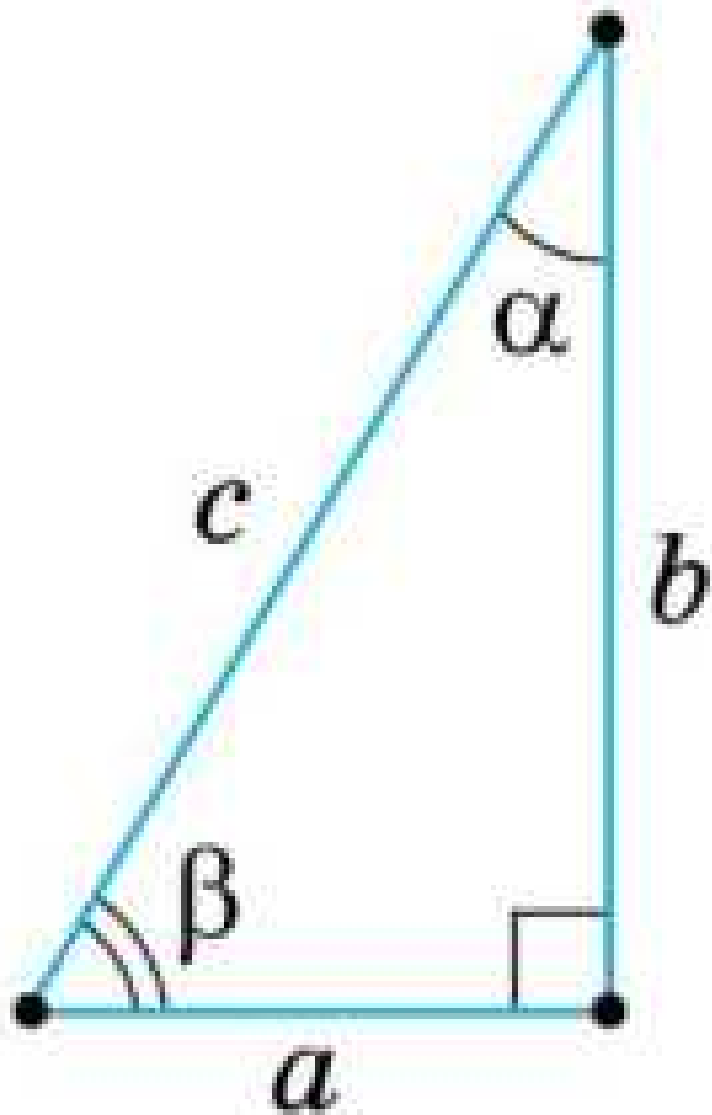
2) для кута β відношення $\frac{a}{c}$ є:

а) $\sin \beta$; б) $\cos \beta$; в) $\operatorname{tg} \beta$;

3) для кута β відношення $\frac{b}{a}$ є:

а) $\sin \beta$; б) $\cos \beta$; в) $\operatorname{tg} \beta$.

888°. Накресліть у зошиті таблицю де відношення сторін трикутника

Відношення			
		$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
	$\frac{a}{b}$		
	$\frac{b}{a}$		
	$\frac{b}{c}$		
	$\frac{a}{c}$		

889°. На малюнку 406 $\angle ABC = \angle AD$
визнач $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\tan \alpha$ через сторони

896'. Яка градусна міра кута α , якщо:

- 1) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$; 5) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$;
 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\operatorname{tg} \alpha = 1$?

897'. Яка градусна міра кута α , якщо:

- 1) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$?

898'. Запишіть у порядку збільшення:

- 1) $\sin 15^\circ$, $\sin 46^\circ$, $\sin 75^\circ$, $\sin 10^\circ$, $\sin 11^\circ$;
 2) $\operatorname{tg} 37^\circ$, $\operatorname{tg} 87^\circ$, $\operatorname{tg} 66^\circ$, $\operatorname{tg} 17^\circ$, $\operatorname{tg} 48^\circ$.

899'. Запишіть у порядку збільшення:

- $\cos 50^\circ$, $\cos 34^\circ$, $\cos 20^\circ$, $\cos 72^\circ$, $\cos 25^\circ$.

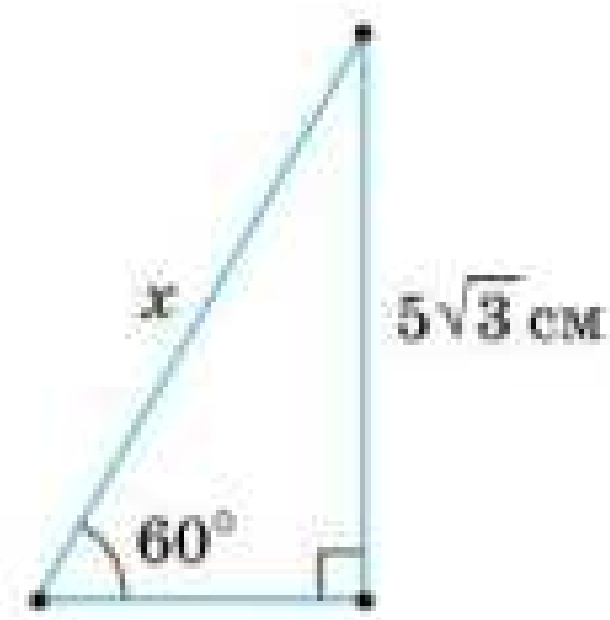
900'. За даними, наведеними на малюнках 407–409, знайдіть x .



Мал. 407

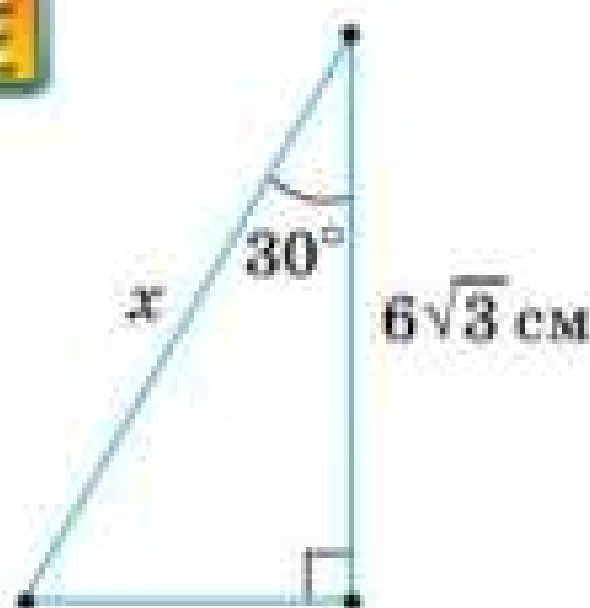


Мал. 408

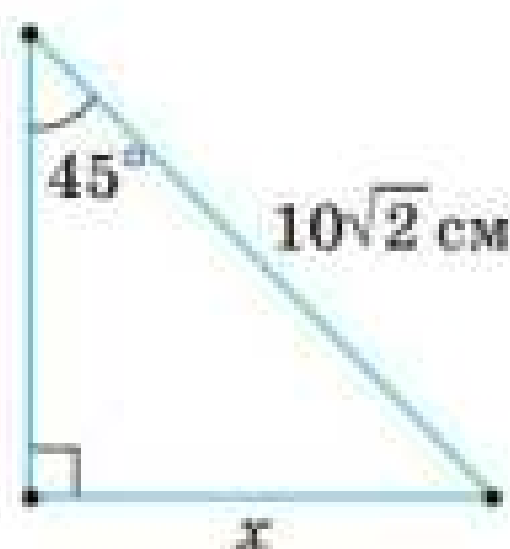


Мал. 409

901'. За даними, наведеними на малюнках 410–412, знайдіть x .



Мал. 410



Мал. 411



Мал. 412

902'. У трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) кут A дорівнює 30° . Знайдіть:

- 1) BC , якщо $AB = 4$ см;
 2) AC , якщо $BC = 2\sqrt{3}$ см;
 3) AB , якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см.

903* У трикутнику MNK ($\angle K = 90^\circ$) кут M дорівнює 60° . Знайдіть:

- 1) MN , якщо $MK = 3$ см; 3) MK , якщо $NK = 7\sqrt{3}$ см.
- 2) NK , якщо $MK = 2\sqrt{3}$ см;

904* Кут A трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) дорівнює 45° . Знайдіть:



- 1) AB , якщо $AC = \sqrt{2}$ см; 3) AC , якщо $BC = 9$ см.
- 2) BC , якщо $AB = 5\sqrt{2}$ см;

905* Скориставшись формулами $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$, $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$, замініть:

- 1) косинуси даних кутів на синуси: $\cos 20^\circ$, $\cos 35^\circ$, $\cos 50^\circ$;
- 2) синуси даних кутів на косинуси: $\sin 10^\circ$, $\sin 65^\circ$, $\sin 85^\circ$.

906* Скориставшись формулами $\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$, $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$, замініть:



- 1) косинуси даних кутів на синуси: $\cos 40^\circ$, $\cos 74^\circ$;
- 2) синуси даних кутів на косинуси: $\sin 55^\circ$, $\sin 25^\circ$.

907* Спростіть вираз:

- 1) $2 \cos (90^\circ - \alpha) - \sin \alpha$; 3) $3 \cos \alpha - 2 \sin (90^\circ - \alpha)$;
- 2) $\sin \alpha + \cos (90^\circ - \alpha)$; 4) $3 \sin (90^\circ - \alpha) - 4 \cos \alpha$.

908* Спростіть вираз: 1) $\sin (90^\circ - \alpha) - \cos \alpha$; 2) $\cos \alpha - 2 \sin (90^\circ - \alpha)$.

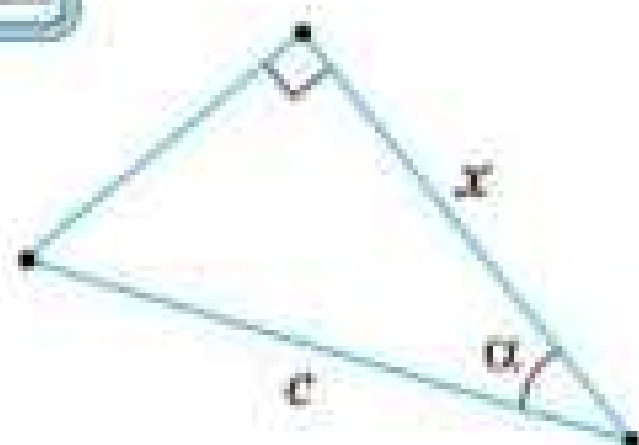
909* Побудуйте кут:

- 1) синус якого дорівнює: а) $\frac{3}{5}$; б) $0,3$;
- 2) косинус якого дорівнює: а) $\frac{5}{6}$; б) $0,6$;
- 3) тангенс якого дорівнює: а) 2 ; б) $\frac{4}{7}$.

910* Побудуйте кут:

- 1) синус якого дорівнює $0,5$;
- 2) косинус якого дорівнює $\frac{5}{12}$;
- 3) тангенс якого дорівнює 1 .

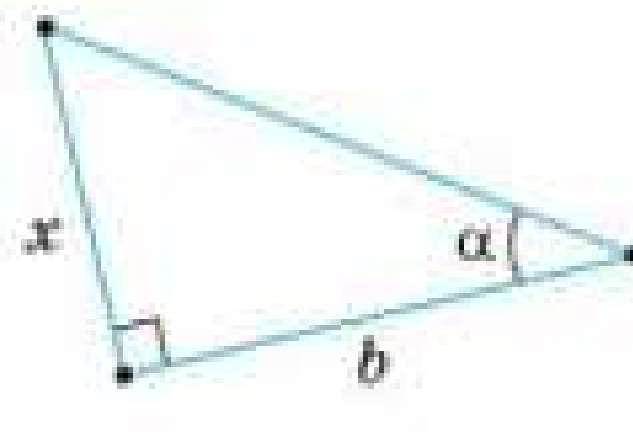
911* За даними, наведеними на малюнках 413–415, знайдіть x .



Мал. 413



Мал. 414

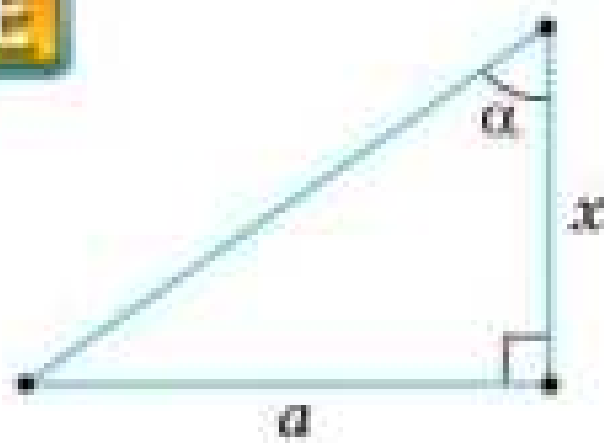


Мал. 415

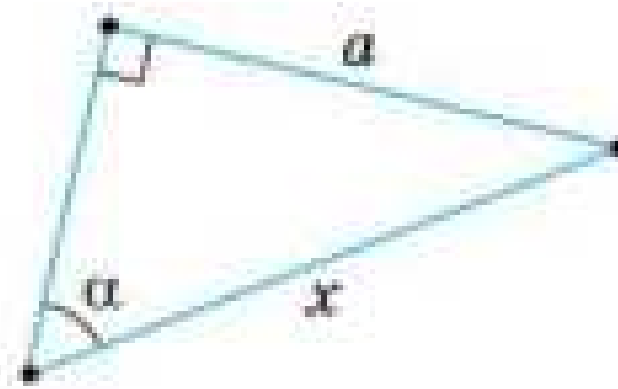


qr.orioncentr.com.ua/h2LQI

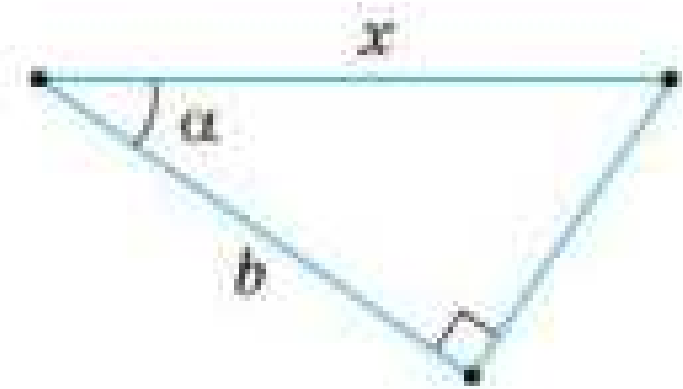
912'. За даними, наведеними на малюнках 416–418, знайдіть x .



Мал. 416



Мал. 417



Мал. 418

913'. Знайдіть катет a прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза c і синус протилежного йому кута A дорівнюють:

- | | |
|--|--|
| 1) $c = 12$ см, $\sin A = \frac{1}{4}$; | 3) $c = 18$ см, $\sin A = \frac{2}{3}$; |
| 2) $c = 20$ см, $\sin A = \frac{2}{5}$; | 4) $c = 8$ см, $\sin A = \frac{3}{4}$. |

914'. Знайдіть катет b прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза c і косинус прилеглого до нього кута A дорівнюють:



- | | |
|---|--|
| 1) $c = 6$ см, $\cos A = \frac{1}{3}$; | 2) $c = 14$ см, $\cos A = \frac{2}{7}$. |
|---|--|

915'. Знайдіть гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо:

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1) $BC = 16$ см, $\cos B = \frac{1}{8}$; | 3) $BC = 5$ см, $\cos B = 0,5$; |
| 2) $BC = 12$ см, $\cos B = \frac{3}{4}$; | 4) $BC = 7$ см, $\cos A = 0,7$. |

916'. Знайдіть гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо:



- | | |
|---|---|
| 1) $BC = 24$ см, $\sin A = \frac{3}{8}$; | 2) $BC = 10$ см, $\sin A = \frac{1}{5}$. |
|---|---|

917'. Знайдіть катет BC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо:

- | | |
|---|--|
| 1) $AC = 8$ см, $\operatorname{tg} A = 0,6$; | 3) $AC = 11$ см, $\operatorname{tg} A = 1,5$. |
| 2) $AC = 12$ см, $\operatorname{tg} A = 4$; | |

918'. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо:

- 1) $AB = c$, $\angle B = \beta$; 2) $BC = a$, $\angle A = \alpha$; 3) $AC = b$, $\angle B = \beta$.

919'. Скориставшись калькулятором, знайдіть:

- 1) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, якщо α дорівнює: 43° ; 22° ; 35° ; $58^\circ 20'$; $64^\circ 13'$;
 2) кут α , якщо:
 $\sin \alpha$ дорівнює: 0,642; 0,771; 0,910; 0,640; 0,712;
 $\cos \alpha$ дорівнює: 0,342; 0,962; 0,087; 0,914; 0,809;
 $\operatorname{tg} \alpha$ дорівнює: 0,178; 0,269; 0,035; 0,447; 0,532.

920* Скориставшись калькулятором, знайдіть:

- 1) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$,
якщо α дорівнює: 39° ; $54^\circ 12'$;
- 2) кут α , якщо:
 $\sin \alpha$ дорівнює: 0,750; 0,515;
 $\cos \alpha$ дорівнює: 0,602; 0,915;
 $\operatorname{tg} \alpha$ дорівнює: 0,934; 0,781.

921* За таблицями (додатки 1, 2) знайдіть:

- 1) $\sin 20^\circ$, $\sin 75^\circ$, $\sin 33^\circ$, $\sin 85^\circ$;
- 2) $\cos 6^\circ$, $\cos 67^\circ$, $\cos 51^\circ$, $\cos 24^\circ$;
- 3) $\operatorname{tg} 65^\circ$, $\operatorname{tg} 1^\circ$, $\operatorname{tg} 73^\circ$, $\operatorname{tg} 19^\circ$.

922* За таблицями (додатки 1, 2) знайдіть:



- 1) $\sin 53^\circ$, $\sin 2^\circ$; 2) $\cos 62^\circ$, $\cos 13^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 10^\circ$, $\operatorname{tg} 16^\circ$.

923* За таблицями (додатки 1, 2) знайдіть кут α , якщо:

- 1) $\sin \alpha = 0,999$; $\sin \alpha = 0,017$; $\sin \alpha = 0,574$;
- 2) $\cos \alpha = 0,766$; $\cos \alpha = 0,966$; $\cos \alpha = 0,225$;
- 3) $\operatorname{tg} \alpha = 0,900$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,344$; $\operatorname{tg} \alpha = 0,781$.

924* За таблицями (додатки 1, 2) знайдіть кут α , якщо:

- 1) $\sin \alpha = 0,588$; 2) $\cos \alpha = 0,731$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = 0,839$.

925. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 18$ мм, $BC = 24$ мм. Знайдіть: 1) $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$; 2) $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.

926. Із точки A до прямої проведено похилу $AB = 15$ см і перпендикуляр $AC = 9$ см. Знайдіть синус і косинус:

- 1) кута A ; 2) кута B .

927. У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 24 см і 7 см.



Знайдіть:

- 1) косинус гострого кута, який лежить проти меншого катета;
- 2) синус гострого кута, який лежить проти більшого катета;
- 3) тангенс гострого кута, який лежить проти більшого катета.

928. Знайдіть значення виразу:

- 1) $2\cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$;
- 2) $3\operatorname{tg}^2 60^\circ - 4\cos^2 30^\circ$.

929. Знайдіть значення виразу: $\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + \sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$.

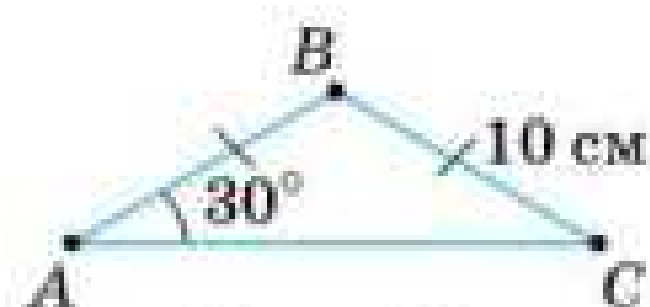
930. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 8 см, а протилежний йому кут — 60° . Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.

931. Катет прямокутного трикутника дорівнює $9\sqrt{3}$ см, а прилеглий до нього кут — 60° . Знайдіть бісектрису цього кута.

- 932.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а кут при основі — 30° (мал. 419). Знайдіть:

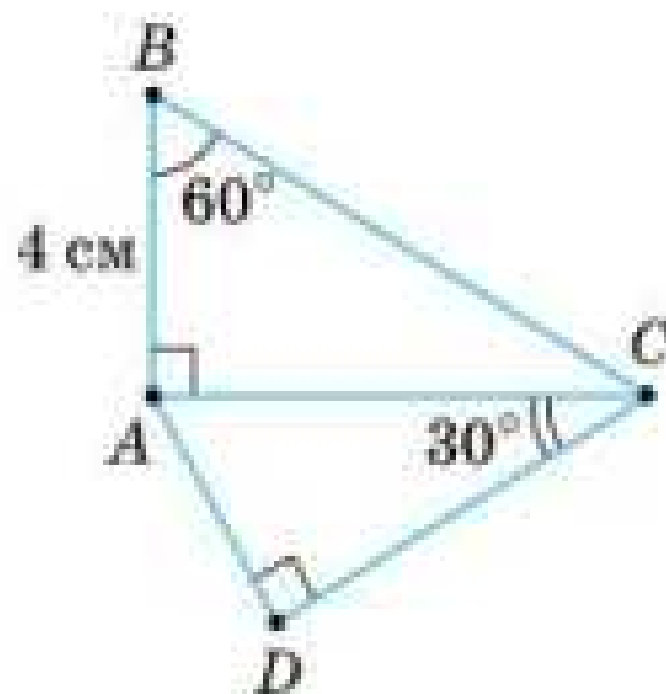


- 1) основу трикутника;
- 2) висоту, проведену до основи;
- 3) висоту, проведену до бічної сторони.

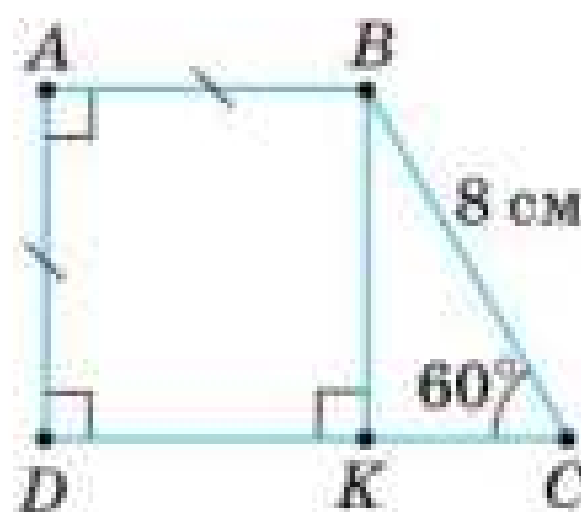


Мал. 419

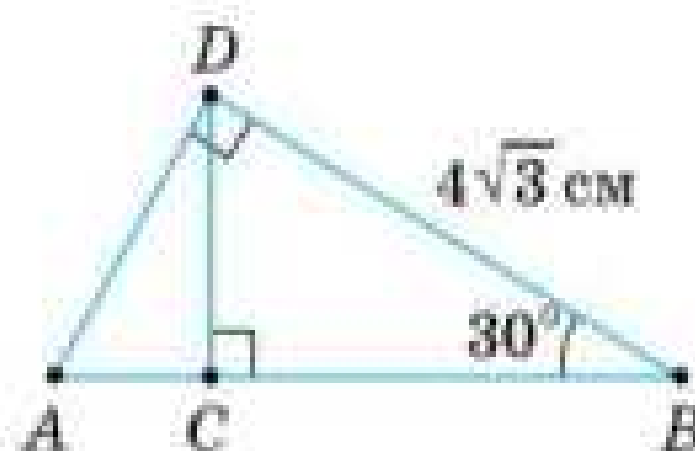
- 933.** Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 8 см, а кут трикутника: 1) 30° ; 2) 45° .
- 934.** За даними, наведеними на малюнках 420, 421, знайдіть довжини відрізків AD і CD .
- 935.** За даними, наведеними на малюнку 422, знайдіть довжини відрізків AD і CD .



Мал. 420



Мал. 421



Мал. 422

- 936.** Сторона ромба дорівнює 4 см, а один із його кутів — 60° . Знайдіть діагоналі ромба.
- 937.** Більша діагональ ромба дорівнює $12\sqrt{3}$ см, а один із його кутів — 120° . Знайдіть сторону й меншу діагональ ромба.
- 938.** Діагональ паралелограма дорівнює 12 см і перпендикулярна до його сторони. Знайдіть сторони паралелограма, якщо один із його кутів дорівнює: 1) 30° ; 2) 45° .
- 939.** Знайдіть радіус r кола, вписаного в рівносторонній трикутник, і радіус R кола, описаного навколо цього трикутника, якщо сторона трикутника дорівнює a .
- 940.** Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб, якщо його сторона дорівнює 16 см, а гострий кут: 1) 30° ; 2) 60° .
- 941.** Знайдіть відношення діаметрів кіл, вписаного в квадрат й описаного навколо цього квадрата.
- 942.** Із точки, що розташована на відстані 5 см від прямої, проведено дві похилі, які утворюють із прямою кути 45° і 30° . Знайдіть: 1) похилі; 2) проєкції похилих на пряму.

932. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а кут при вершині дорівнює 120° (мал. 419). Знайдіть:

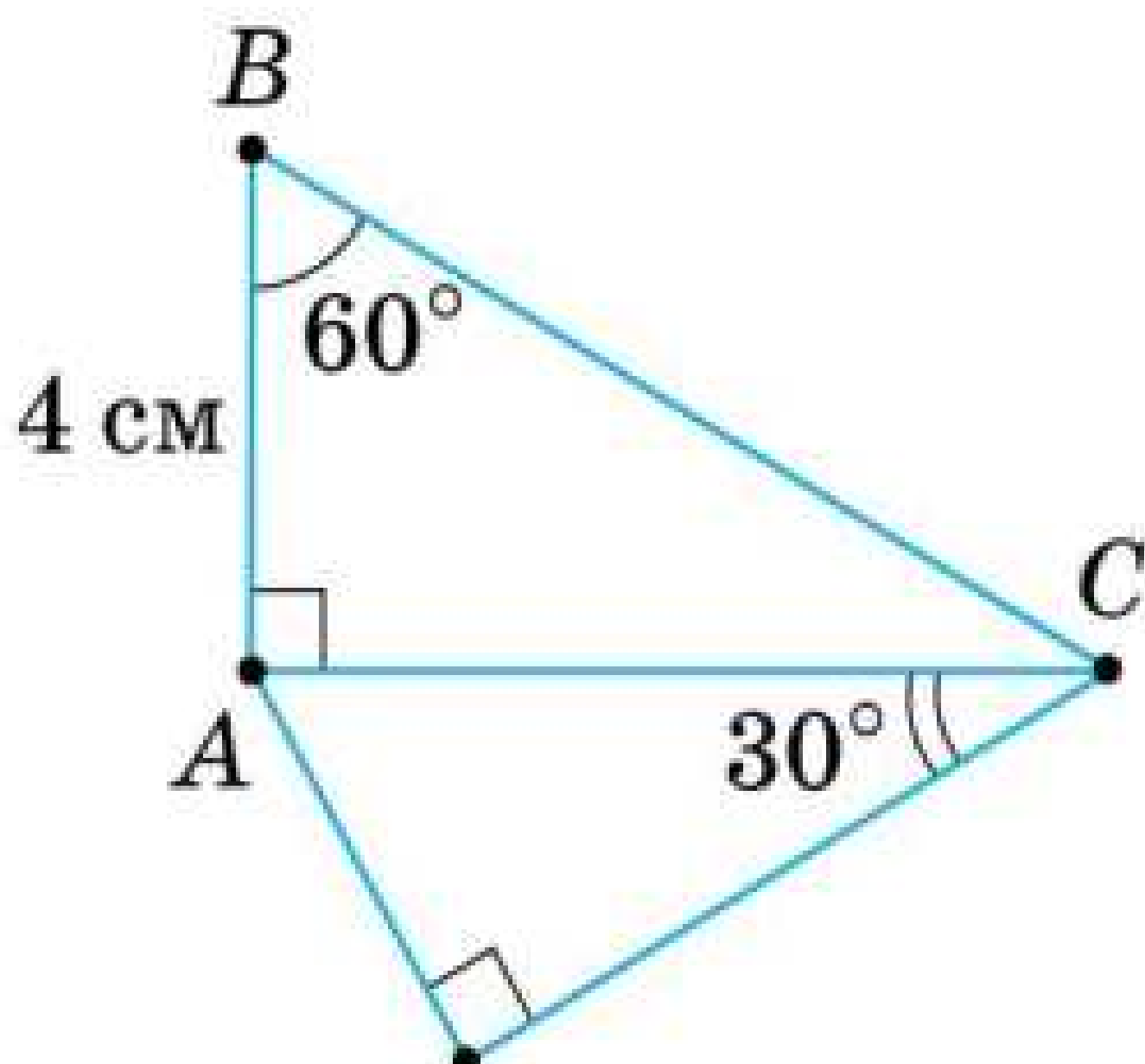
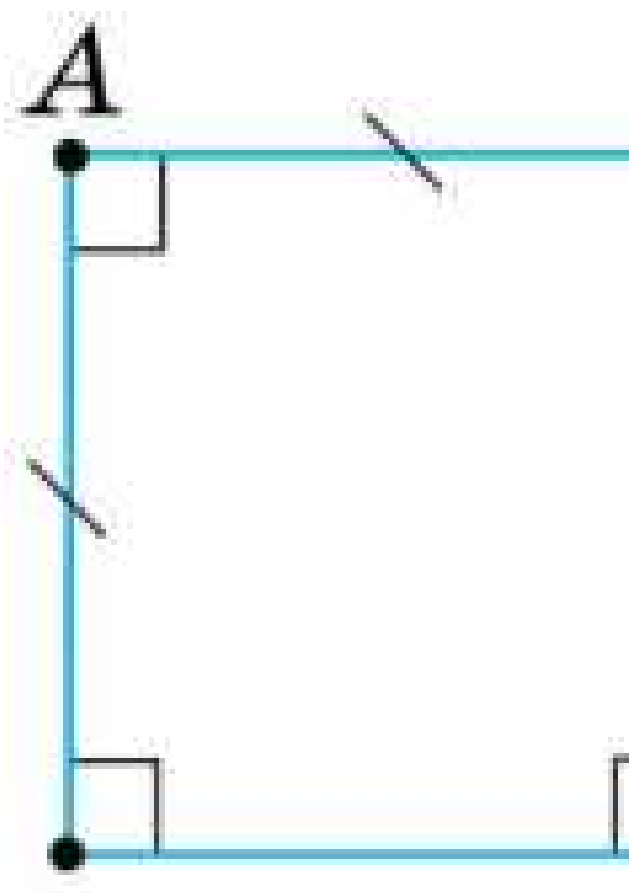


- 1) основу трикутника;
- 2) висоту, проведену до основи;
- 3) висоту, проведену до бічної сторони.

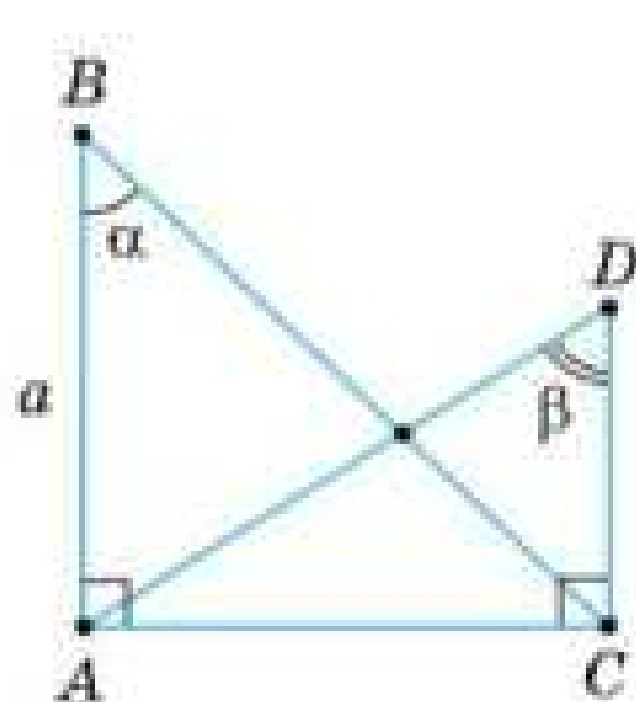
933. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза дорівнює 8 см, а кут при одному з катетів дорівнює 30° .

934. За даними, наведеними на малюнку, знайдіть довжину відрізків AD і CD .

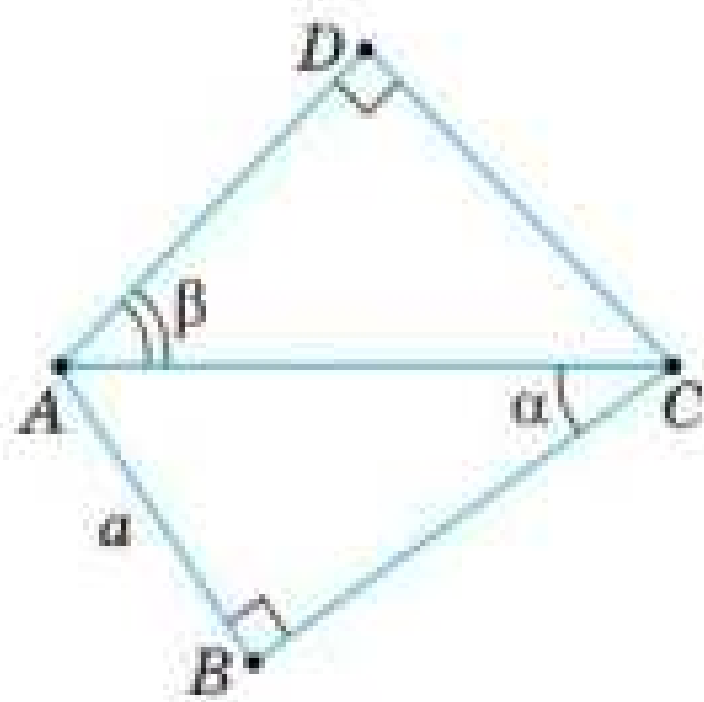
935. За даними, наведеними на малюнку, знайдіть довжину відрізків AD і CD .



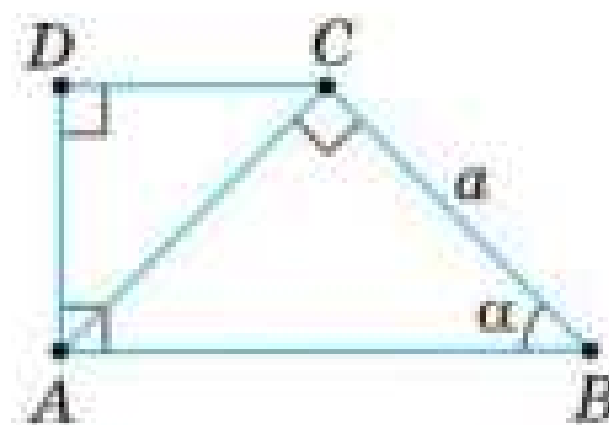
- 943.** Із точки до прямої проведено дві похилі, які утворюють із прямою кути по 45° . Знайдіть довжину кожної похилої, якщо відстань між їхніми основами дорівнює 10 см.
- 944.** У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AC = 18$ мм, $BC = 24$ мм. Знайдіть: 1) $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$; 2) $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.
- 945.** Побудуйте прямокутний трикутник ACB ($\angle C = 90^\circ$), у якому:
1) $\sin A = 0,4$;
2) $\operatorname{tg} A = \frac{1}{3}$.
- 946.** Побудуйте прямокутний трикутник MTO ($\angle T = 90^\circ$), у якому $\cos M = \frac{2}{7}$.
- 947.** У прямокутному трикутнику катет дорівнює b , а прилеглий до нього кут — α . Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.
- 948.** Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α , а бісектриса цього кута — l . Знайдіть катет, прилеглий до кута α .
- 949.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b , а кут при основі — α . Знайдіть:
1) основу трикутника;
2) висоту, проведену до основи.
- 950.** Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює h , а кут при основі — α . Знайдіть:
1) бічну сторону трикутника; 2) основу трикутника.
- 951.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a , а кут між бічними сторонами — α . Знайдіть:
1) висоту, проведену до основи; 2) бічну сторону трикутника.
- 952.** За даними, наведеними на малюнках 423, 424, знайдіть відрізки AD і CD .
- 953.** Знайдіть відрізки AD і CD за даними на малюнку 425.



Мал. 423



Мал. 424



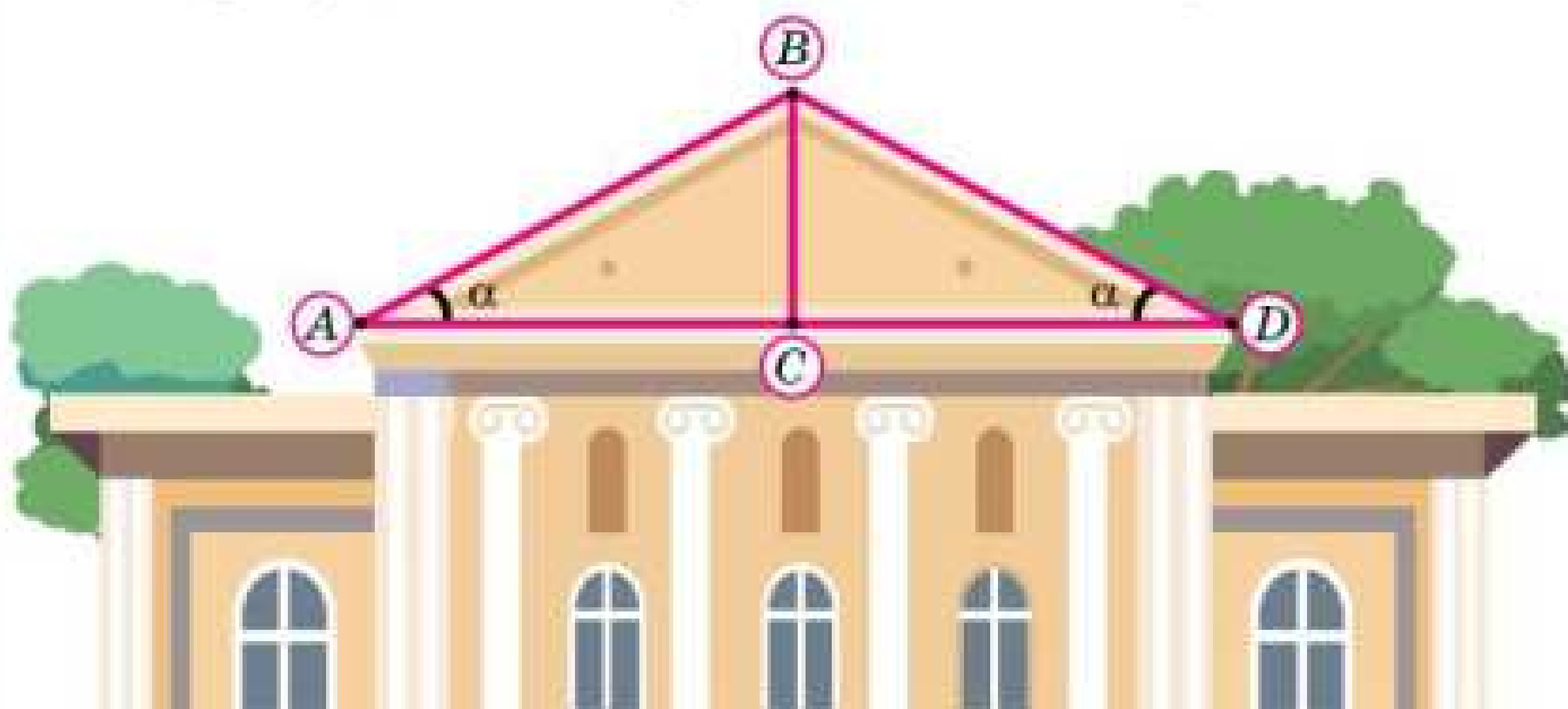
Мал. 425

- 954.** Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює m , а гострий кут трикутника — α .
- 955.** Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, якщо його катет дорівнює b , а гострий кут — α .
- 956.** У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α , а радіус вписаного кола — r . Знайдіть:
1) основу трикутника;
2) бічну сторону трикутника.
- 957.** Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює h , а кут при основі — α . Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.
- 958.** Сторона AD прямокутника $ABCD$ дорівнює a й утворює з діагоналлю AC кут α . Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника.
- 959.** Гострий кут між діагоналями прямокутника дорівнює α , а сторона, що лежить проти цього кута, — a . Знайдіть:
1) іншу сторону прямокутника; 2) діагональ прямокутника.
- 960.** Більша діагональ ромба дорівнює d , а його гострий кут — α . Знайдіть:
1) сторону ромба; 2) меншу діагональ ромба.
- 961.** Визначте знак різниці:
1) $\operatorname{tg} 64^\circ - \operatorname{tg} 58^\circ$; 2) $\sin 21^\circ - \sin 36^\circ$.
- 962.** Визначте знак різниці: $\cos 51^\circ - \cos 41^\circ$.
- 963*.** Дві висоти паралелограма, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 12 см і 18 см, а кут між ними — 30° . Знайдіть сторони паралелограма.
- 964*.** Дві висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, дорівнюють 5 см і 12 см, а кут між ними — 150° . Знайдіть сторони паралелограма.
- 965*.** Знайдіть сторони трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює r , а кути трикутника дорівнюють α, β, γ .
- 966*.** У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює b , а бічна сторона, завдовжки c , утворює з висотою кут α . Знайдіть більшу основу трапеції.
- 967*.** У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює a , а бічна сторона, завдовжки c , утворює з висотою кут α . Знайдіть меншу основу трапеції.

- 968*.** У рівнобічній трапеції висота h утворює з бічною стороною кут α , а менша основа дорівнює b . Знайдіть:
- 1) бічну сторону трапеції; 2) більшу основу трапеції.

Проявіть компетентність

- 969.** У будівництві часто замість градусної міри кута використовують його тангенс. Наприклад, під час будівництва будинку майстрові замість градусної міри кута α нахилу даху (мал. 426) дають відношення довжин сторін BC і AC , тобто $\operatorname{tg} \alpha$. Нехай потрібно побудувати дах, довжина затяжки AD якого дорівнює 20 м, а тангенс кута нахилу даху — 0,8. Скільки метрів буде висота BC кроквяної системи даху?



Мал. 426

- 970.** Ширина верхньої частини насипу шосейної дороги, поперечний переріз якого — рівнобічна трапеція, дорівнює 60 м (мал. 427). Яка ширина основи насипу, якщо його висота дорівнює 10 м, а кут укосу — 60° ?



Мал. 427

- 971.** Довжина тіні від фабричної труби заввишки 40 м дорівнює 50 м. Виразіть у градусах висоту Сонця над горизонтом (мал. 428), дотримуючись такого плану:
- 1) знайдіть тангенс кута α ;
 - 2) за знайденим значенням тангенса побудуйте $\angle A = \alpha$;
 - 3) виміряйте транспортиром $\angle A$.



Мал. 428

972. Спостерігачеві, який стоїть на висоті 50 м, видно автомобіль під кутом 30° до горизонту (мал. 429). Як знайти відстань від спостерігача до автомобіля?



Мал. 429

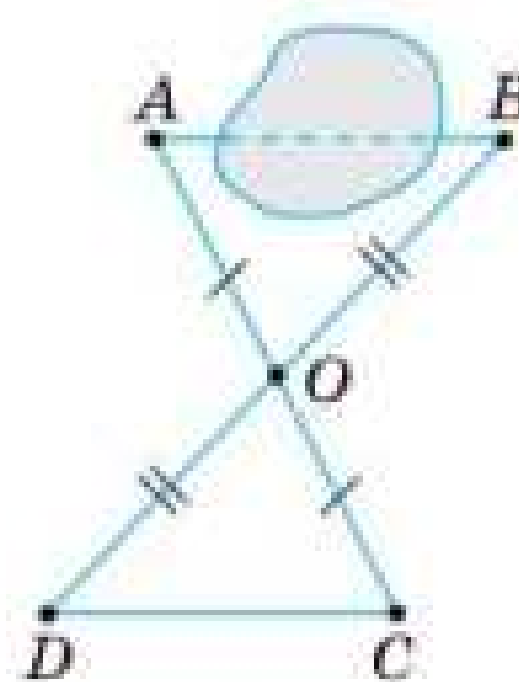
§ 17. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

1. Алгоритми розв'язування прямокутних трикутників

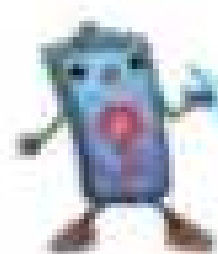
Ситуація. Анастасія Петрівна поставила 8-А класу запитання: **Яка необхідність використання нових прийомів обчислення довжин сторін і градусних мір кутів прямокутного трикутника?** Дівчата й хлопці хутко взялись за роботу і знайшли багато даних, з яких створили невеличку історію: «У далеку давнину відстані й кути спочатку вимірювали безпосередньо інструментами. Так, транспортиром вавилоняни користувалися ще за 2000 років до н. е. Проте на практиці безпосередньо виміряти відстані й кути не завжди можливо. Як виміряти відстань між двома пунктами, розділеними перешкодою (річкою, озером, лісом), відстань до Сонця, Місяця? Як виміряти висоту дерева, гори? Як знайти кут підйому дороги або кут, під яким спускаємося з гори? Були відкриті прийоми опосередкованого вимірювання відстаней і кутів. Стали використовувати рівні або подібні трикутники та геометричні побудови. Будували на місцевості допоміжний трикутник і вимірювали потрібні його елементи. Багато практичних задач зводилося до розв'язування прямокутних трикутників. Основою таких прийомів стало використання $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$ ».



qr.orioncentr.com.ua/NOT6n

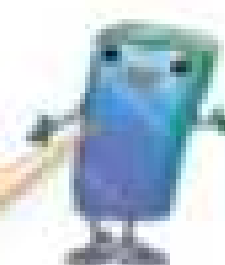


Мал. 430



Як розв'язати прямокутний трикутник?

Поміркуємо.



Запам'ятайте!

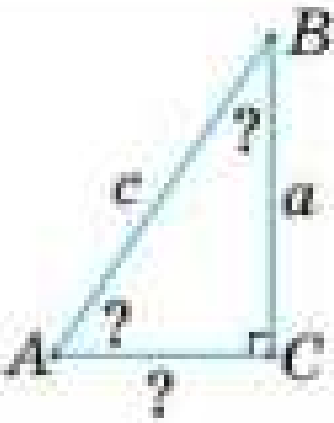
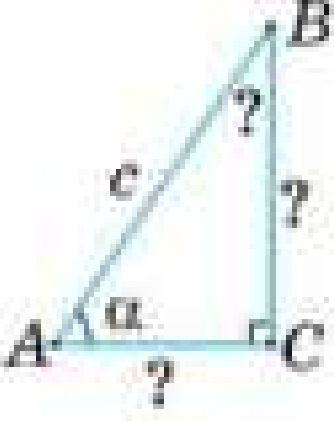
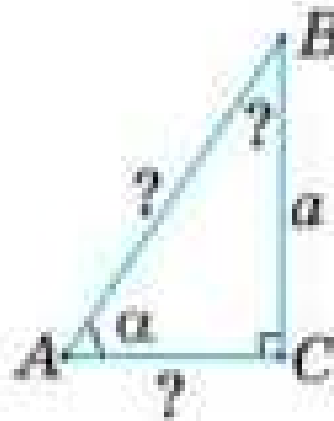
Розв'язати прямокутний трикутник означає — за даними двома сторонами або стороною та гострим кутом знайти інші його сторони й гострі кути.

Можливі такі види задач, у яких вимагається розв'язати прямокутний трикутник:

- 1) за катетами;
- 2) за гіпотенузою й катетом;
- 3) за гіпотенузою й гострим кутом;
- 4) за катетом і гострим кутом.

Алгоритми розв'язування цих чотирьох видів задач наведено в таблиці 35.

Таблиця 35

Умова задачі	Алгоритм розв'язування
 <p>Дано: $AC = b$, $BC = a$. Знайти: AB, $\angle A$, $\angle B$</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, 2) $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, 3) $\angle B = 90^\circ - \angle A$
 <p>Дано: $AB = c$, $BC = a$. Знайти: AC, $\angle A$, $\angle B$</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) $AC = \sqrt{c^2 - a^2}$, 2) $\sin A = \frac{a}{c}$, 3) $\angle B = 90^\circ - \angle A$
 <p>Дано: $AB = c$, $\angle A = \alpha$. Знайти: AC, BC, $\angle B$</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) $\angle B = 90^\circ - \alpha$, 2) $AC = c \cdot \cos \alpha$, 3) $BC = c \cdot \sin \alpha$
 <p>Дано: $BC = a$, $\angle A = \alpha$. Знайти: AB, AC, $\angle B$</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) $\angle B = 90^\circ - \alpha$, 2) $AB = \frac{a}{\sin \alpha}$, 3) $AC = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$

Задача 1 Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою $c = 16$ і кутом $\alpha = 76^\circ$ (мал. 431).

Розв'язання Це задача третього виду. Алгоритм її розв'язування наведено в таблиці 35.

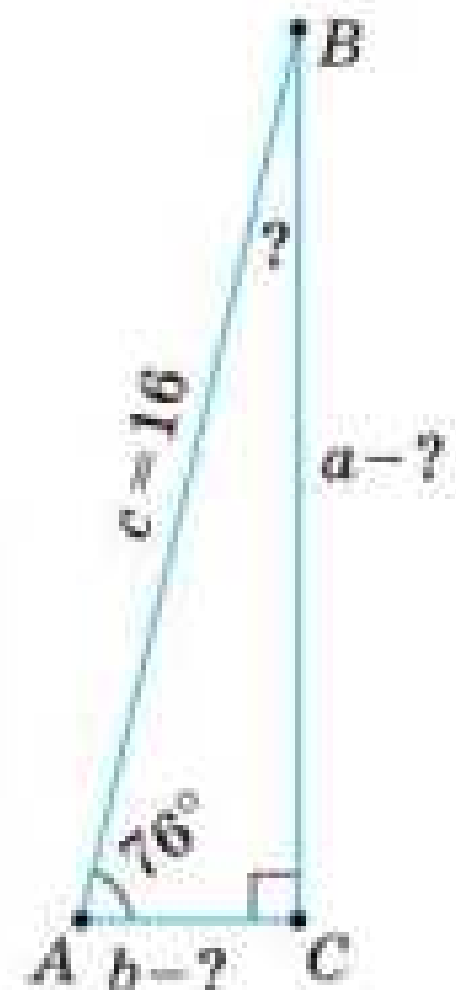
- 1) $\angle B = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 76^\circ = 14^\circ$;
- 2) $AC = c \cdot \cos \alpha = 16 \cdot \cos 76^\circ \approx 16 \cdot 0,242 \approx 3,9$;
- 3) $BC = c \cdot \sin \alpha = 16 \cdot \sin 76^\circ \approx 16 \cdot 0,970 \approx 15,5$.

Розглянемо кілька видів прикладних задач.

2. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого є доступною



qr.orioncentr.com.ua/HGypr

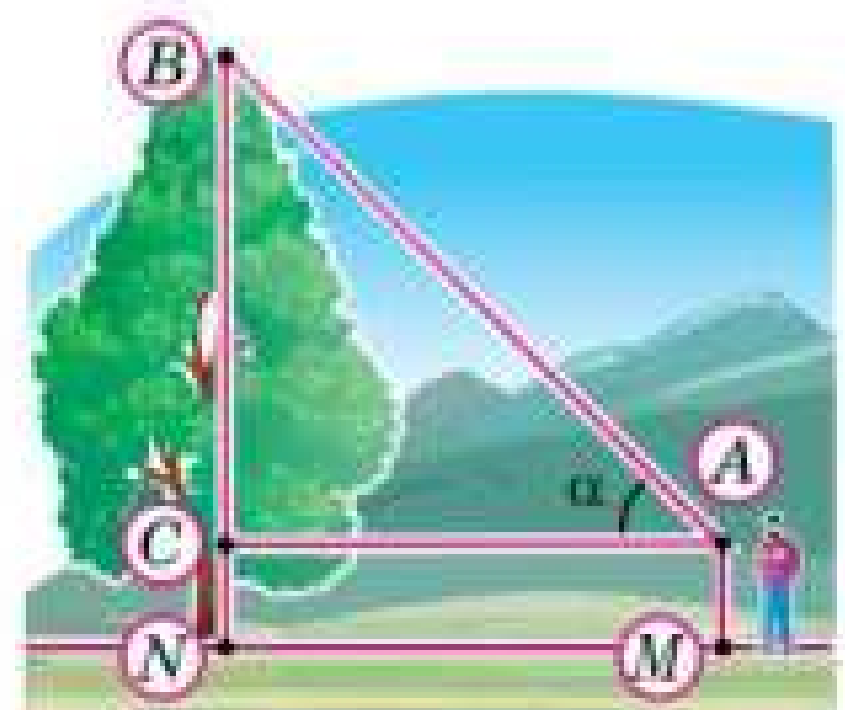


Мал. 431

Задача 2 Знайдіть висоту дерева (мал. 432).

Розв'язання На деякій відстані $MN = a$ від дерева встановлюємо кутомірний прилад AM (наприклад, теодоліт) і знаходимо кут α між горизонтальним напрямком AC і напрямком на верхню точку B дерева. Тоді з прямокутного трикутника ABC одержимо: $BC = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Урахувавши висоту кутомірного приладу $AM = h$, одержимо формулу для обчислення висоти дерева:

$$BN = a \cdot \operatorname{tg} \alpha + h.$$



Мал. 432

Нехай результати вимірювання такі:
 $a = 40$ м, $h = 1,5$ м і $\alpha = 31^\circ$.

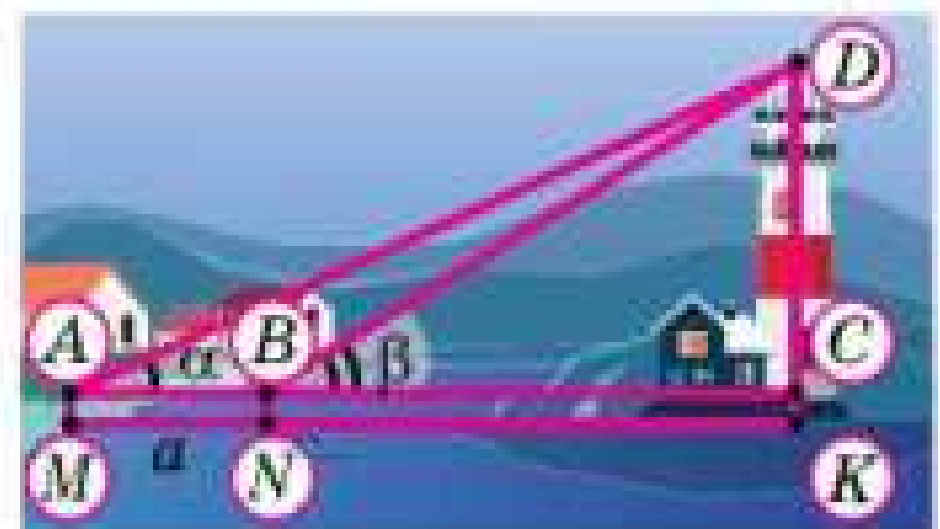
Тоді $BN = 1,5 + 40 \cdot \operatorname{tg} 31^\circ \approx 1,5 + 40 \cdot 0,601 \approx 25,5$ (м).

3. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого недоступна

Задача 3 Знайдіть висоту вежі, яка відокремлена від вас водною перешкодою (мал. 433).

Розв'язання На горизонтальній прямій, що проходить через основу вежі (мал. 433), позначаємо дві точки M і N та вимірюємо відрізок $MN = a$. Встановлюємо кутомірний прилад у точках M і N та вимірюємо кути α і β . Із прямокутних трикутників ADC і BDC одержимо:

$$AC = \frac{DC}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad BC = \frac{DC}{\operatorname{tg} \beta}.$$



Мал. 433

Почленно віднімемо знайдені рівності й отримаємо:

$$AC - BC = \frac{DC}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{DC}{\operatorname{tg} \beta},$$

$$AB = DC \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta},$$

$$DC = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Додавши до DC висоту приладу $AM = h$, яким вимірювали кути, одержимо формулу для обчислення висоти вежі:

$$DK = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha} + h.$$

Нехай результати вимірювання такі: $a = 10$ м, $h = 1,5$ м і $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 40^\circ$.

$$\text{Тоді } DK = \frac{10 \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ} + 1,5 \approx \frac{10 \cdot 0,700 \cdot 0,839}{0,839 - 0,700} + 1,5 \approx 43,8 \text{ (м)}.$$

4. Задачі на знаходження відстані між двома пунктами, що розділені перешкодою

Задача 4 Знайдіть відстань між пунктами A і B , розділеними річкою (мал. 434).

Розв'язання Провішуємо пряму $AD \perp AB$ та позначаємо на ній деяку точку C . Вимірюємо відстань $AC = a$ і кут α . Із прямокутного трикутника ABC одержимо формулу $AB = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$ для знаходження відстані між пунктами A і B .

Нехай результати вимірювання такі: $a = 50$ м, $\alpha = 72^\circ$.

$$\text{Тоді } AB = 50 \cdot \operatorname{tg} 72^\circ \approx 50 \cdot 3,08 \approx 154 \text{ (м)}.$$



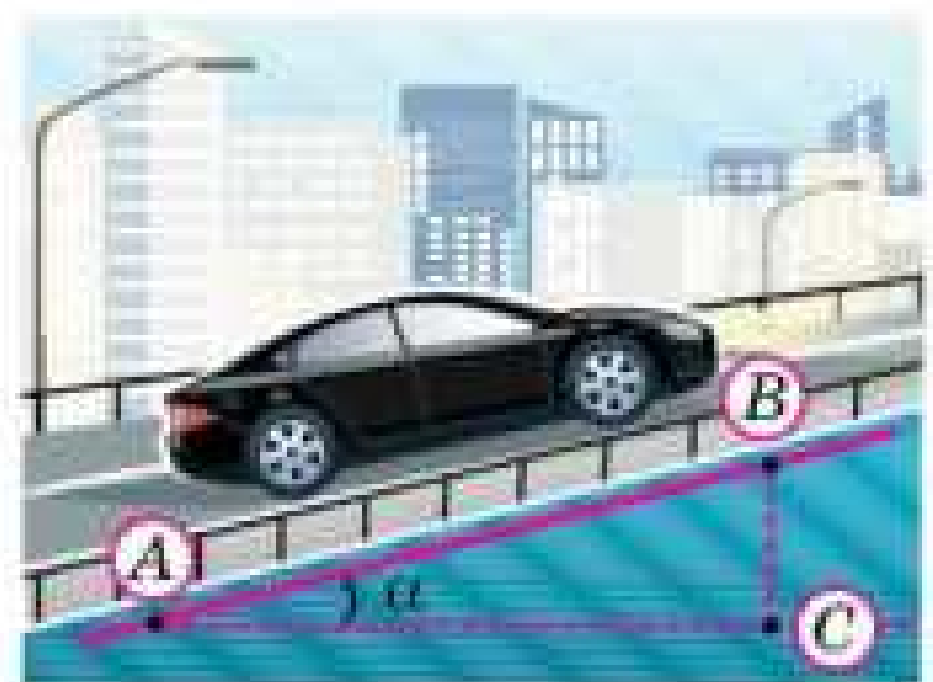
Мал. 434

5. Задачі на знаходження кутів (кута підйому дороги, кута відкосу, кута, під яким видно деякий предмет тощо).

Задача 5 Знайдіть кут підйому шосейної дороги, якщо на відстані 200 м висота підйому становить 8 м.

Розв'язання На малюнку 435 кут α — це кут підйому дороги, AC — горизонтальна пряма. Проведемо $BC \perp AC$, тоді BC — висота підйому дороги.

$$\text{За умовою, } AB = 200 \text{ м, } BC = 8 \text{ м.}$$



Мал. 435

Кут α знайдемо з прямокутного трикутника ABC :

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{200} = 0,04.$$

Тоді $\alpha \approx 2^\circ$.

Дізнайтеся більше

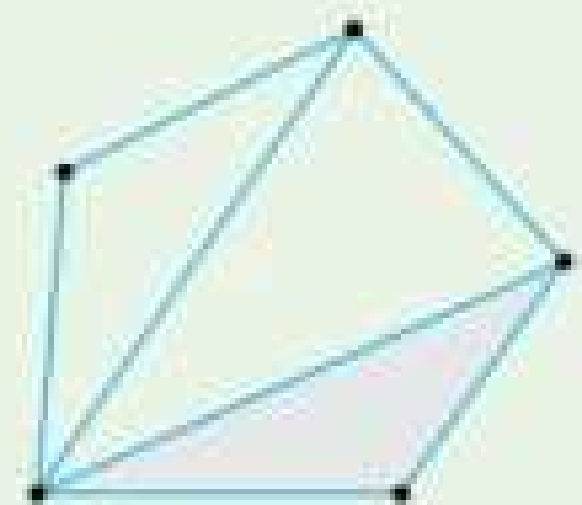
1. Накопичення обчислювальних прийомів розв'язування задач привело до створення нового розділу математики, який у XVI ст. називали *тригонометрією*. Слово «тригонометрія» походить від грецьких слів *trigonon* — трикутник і *metreo* — вимірюю.

Грецьких математиків Гіппарха (II ст. до н. е.) і Птолемея (II ст.) вважають першими, хто використав тригонометричні прийоми для розв'язування різних задач. Подальше їх удосконалення було зроблено індійським математиком Брахмагуптою (VI ст.), а потім узбецькими математиками аль-Каші й Улугбеком (XII ст.). У працях академіка Леонарда Ейлера (XVIII ст.) тригонометрія набула того вигляду, який в основному вона має й нині.

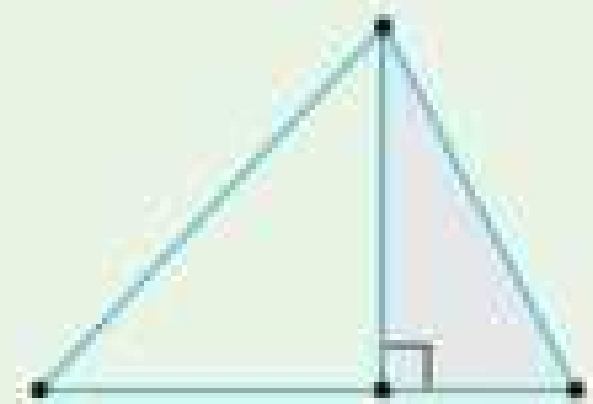
2. У вас могло виникнути запитання: Чому в геометрії особливу увагу приділяють саме прямокутному трикутнику, хоча в докільлі не часто можна натрапити на предмети такої форми?

Давайте поміркуємо. Як у хімії вивчають у першу чергу елементи, а потім — їхні сполуки, а в біології — одноклітинні, а потім — багатоклітинні організми, так і в геометрії вивчають спочатку простіші геометричні фігури — точки, відрізки і трикутники, з яких складаються інші геометричні фігури.

Серед цих фігур прямокутний трикутник відіграє особливу роль. Справді, будь-який багатокутник можна розбити на трикутники (мал. 436). Уміючи знаходити кутові й лінійні елементи цих трикутників, можна знайти й усі елементи багатокутника. Своєю чергою будь-який трикутник можна розбити однією з його висот на два прямокутні трикутники, елементи яких зв'язані простішою залежністю (мал. 437). Знайти елементи трикутника можна, звівши їх до розв'язування цих двох прямокутних трикутників. Наведемо приклад.



Мал. 436



Мал. 437

Задача 6 У $\triangle ABC$ $AC = 50$ см, $AB = 35$ см і $\angle A = 76^\circ$ (мал. 438). Знайдіть $\angle B$, $\angle C$ і сторону BC .

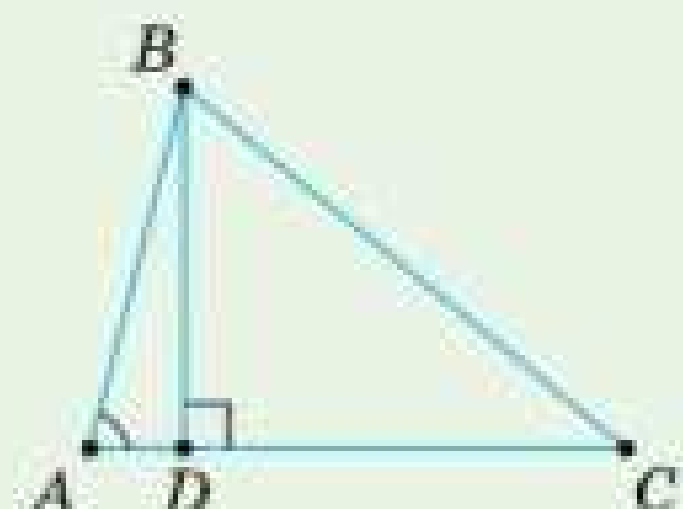
Розв'язання Проведемо висоту BD . Точка D лежатиме між точками A і C , оскільки $\angle A$ — гострий і $AC > AB$. Із прямокутного трикутника ABD :

$$BD = AB \cdot \sin A = 35 \cdot \sin 76^\circ \approx 35 \cdot 0,970 \approx 40 \text{ (см)}.$$

$$DC = AC - AD = AC - AB \cdot \cos A = 50 - 35 \cdot \cos 76^\circ \approx 50 - 35 \cdot 0,242 \approx 50 - 8,47 \approx 41,5 \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника BDC :

$$\operatorname{tg} C = \frac{BD}{DC} = \frac{40}{41,5} \approx 0,964.$$



Мал. 438

Звідси $\angle C \approx 44^\circ$.

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) \approx 180^\circ - (76^\circ + 44^\circ) \approx 180^\circ - 120^\circ \approx 60^\circ.$$

Із прямокутного трикутника BDC : $BC = \frac{BD}{\sin C} = \frac{40}{\sin 44^\circ} \approx \frac{40}{0,695} \approx 57,6$ (см).

Отже, $BC \approx 57,6$ см, $\angle B \approx 60^\circ$, $\angle C \approx 44^\circ$.

Словничок



Українська

Англійська/
English

Німецька/
Deutsch

Французька/
Français

прикладна
задача

applied
problem

angewandte
Übung-
saufgabe (f)

problème
appliqué

qr.orioncentr.com.ua/NIVgA

Пригадайте головне

1. Що означає — «розв'язати прямокутний трикутник»?
2. Назвіть види задач, у яких вимагається розв'язати прямокутний трикутник.
3. Запишіть алгоритм розв'язування кожного з видів цих задач.
4. Назвіть види прикладних задач.

Усне тренування

1. Обчисліть:

$$23^\circ + 37^\circ; \quad 34^\circ + 56^\circ; \quad 48^\circ + 42^\circ; \quad 51^\circ + 39^\circ.$$

2. Знайдіть x , якщо:

$$\frac{x}{7} = a + b; \quad \frac{4}{x} = c - d; \quad \frac{x}{10} = nm; \quad \frac{15}{x} = m(k - n).$$

Розв'яжіть задачі

973. Чи правильно, що для розв'язування прямокутного трикутника достатньо знати:

- 1) одну сторону;
- 2) дві сторони;
- 3) один гострий кут;
- 4) одну сторону і прямий кут;
- 5) одну сторону і гострий кут?

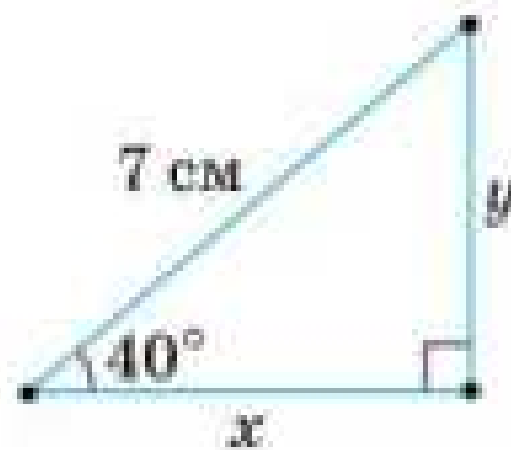
974. Чи правильно названо вид задачі, у якій вимагається розв'язати прямокутний трикутник:

- 1) за кутами;
- 2) за катетами;
- 3) за гіпотенузою;
- 4) за гіпотенузою і катетом;

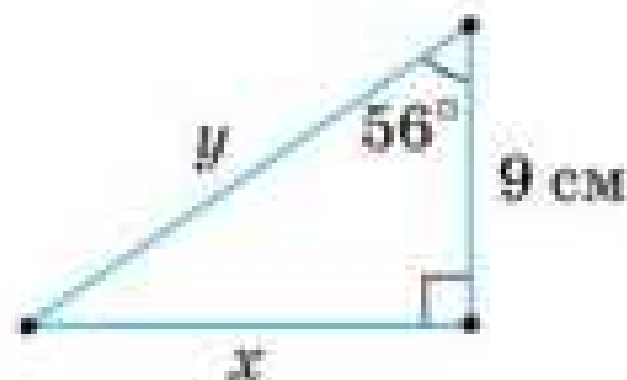
- 5) за гіпотенузою та прямим кутом;
- 6) за гіпотенузою й гострим кутом;
- 7) за катетом і прямим кутом;
- 8) за катетом і гострим кутом?

975'. За даними, наведеними на малюнках 439, 440, знайдіть x і y .

976'. За даними, наведеними на малюнках 441, 442, знайдіть кути α і β .



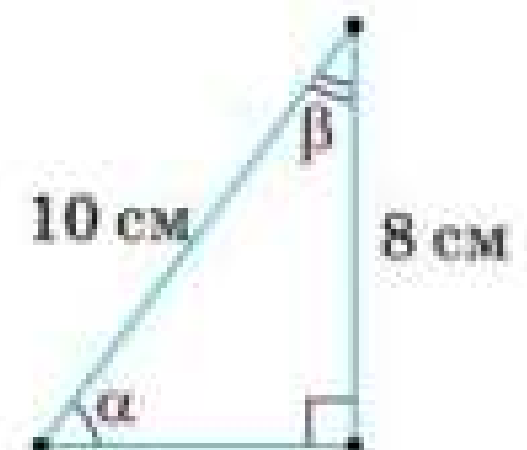
Мал. 439



Мал. 440



Мал. 441



Мал. 442

977'. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) знайдіть:



- 1) BC , якщо $AB = 5$ см, $\angle A = 55^\circ$;
- 2) AB , якщо $AC = 7$ см, $\angle B = 41^\circ$;
- 3) AC , якщо $BC = 6$ см, $\angle B = 38^\circ$.



qr.orioncentr.com.ua/uGQD6

978'. Знайдіть невідомі сторони прямокутного трикутника, якщо:



- 1) катет дорівнює 9 см, а протилежний йому кут — 38° ;
- 2) катет дорівнює 10 см, а прилеглий до нього кут — 54° .

979'. У прямокутному трикутнику з гіпотенузою 14 см і кутом 65° знайдіть:

- 1) катет, прилеглий до цього кута;
- 2) катет, протилежний цьому куту.

980'. Знайдіть кут A прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), якщо:

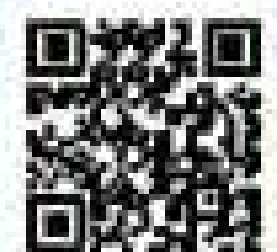


- 1) $AB = 12$ см, $BC = 9$ см;
- 2) $AB = 10$ см, $AC = 6$ см;
- 3) $AC = 8$ см, $BC = 16$ см.

981'. У прямокутному трикутнику з гіпотенузою 20 см і катетом 14 см знайдіть:

- 1) кут, прилеглий до цього катета;
- 2) кут, протилежний цьому катету.

982'. У прямокутному трикутнику катет становить 0,2 гіпотенузи. Знайдіть гострі кути трикутника.



983'. Знайдіть кут між діагоналлю й більшою стороною прямокутника, якщо його сторони дорівнюють:



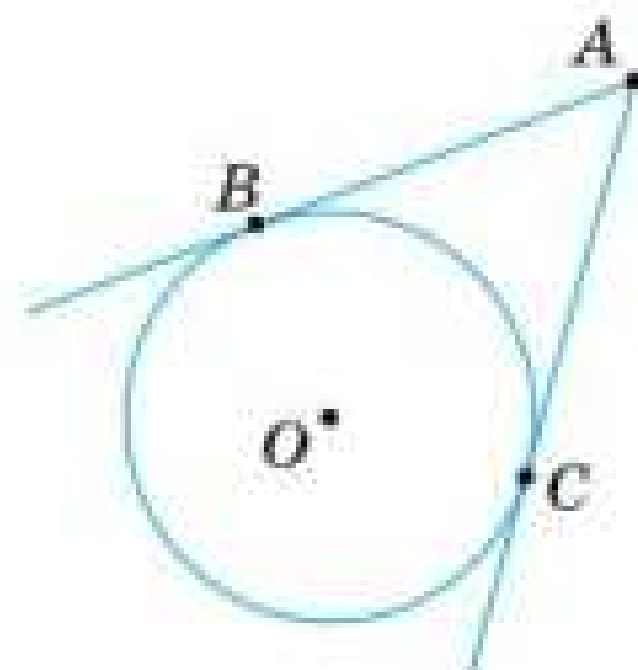
- 1) 6 см і 8 см; 2) 18 см і 20 см.

qr.orioncentr.com.ua/j3Dn0

984*. Сторони прямокутника дорівнюють 7 см і 14 см. Знайдіть кут між його діагоналлю й більшою стороною.

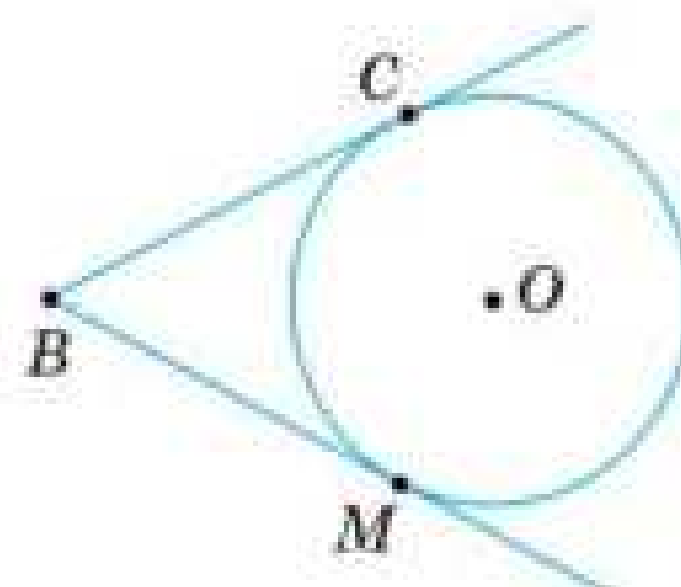


985*. Через точку A до кола радіусом 45 см проведено дотичні AB і AC (мал. 443). Знайдіть кут, утворений дотичними, якщо:
1) $AB = 60$ см; 2) $AB = 50$ см.



Мал. 443

986*. Через точку B до кола радіусом 30 см проведено дотичні BM і BC (мал. 444). Знайдіть кут, утворений дотичними, якщо $BM = 30$ см.



Мал. 444

987. Знайдіть невідомі сторони й гострі кути прямокутного трикутника за такими даними:

1) за двома катетами:

а) $a = 20$, $b = 21$; в) $a = 24$, $b = 18$;

б) $a = 9$, $b = 12$; г) $a = 23,5$, $b = 40,2$;

2) за гіпотенузою та катетом:

а) $c = 17$, $a = 15$; в) $c = 65$, $a = 56$;

б) $c = 20$, $a = 16$; г) $c = 2,93$, $b = 2,85$.

988. Знайдіть невідомі сторони й гострі кути прямокутного трикутника за такими даними:



1) за гіпотенузою та гострим кутом:

а) $c = 8$, $\angle A = 70^\circ$; в) $c = 18,2$, $\angle A = 32^\circ$;

б) $c = 82$, $\angle A = 42^\circ$; г) $c = 4,67$, $\angle A = 65^\circ$;

2) за катетом і прилеглим кутом:

а) $a = 12$, $\angle A = 32^\circ$; в) $a = 12$, $\angle A = 53^\circ$;

б) $a = 18$, $\angle A = 17^\circ$; г) $a = 3,71$, $\angle A = 19^\circ$.

989. Діагональ прямокутника дорівнює 25 см й утворює зі стороною кут 36° . Знайдіть сторони прямокутника.

990. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а кут при основі — 75° . Знайдіть:



1) основу трикутника; 2) висоту, проведену до основи.

991. У коло радіусом 5 см вписано рівнобедрений трикутник із кутом між бічними сторонами 70° . Знайдіть:

1) висоту, проведену до основи; 2) бічну сторону трикутника.

992. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 25 см, а висота, проведена до бічної сторони, — 21 см. Знайдіть:

1) бічну сторону трикутника;

2) кут між бічними сторонами трикутника.

993. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) $\angle A = 27^\circ$, $BC = 21$ см.



Знайдіть:

- 1) невідомий катет; 3) проєкцію кожного катета на гіпотенузу.
- 2) гіпотенузу;

994. Із точки, що розміщена на відстані 15 см від прямої, проведено дві похилі, які утворюють із прямою кути 24° і 61° . Знайдіть:

- 1) довжину похилих; 2) проєкції похилих на пряму.

995. Знайдіть висоту ромба, якщо його сторона дорівнює 7,5 см, а гострий кут — 22° .

996. Сторони паралелограма дорівнюють 5 см і 8 см, а гострий кут — 36° . Знайдіть висоти паралелограма.

997. Сторона ромба дорівнює 64,5 см, а гострий кут — 28° . Знайдіть діагоналі ромба.

998*. У трапеції кути при більшій основі дорівнюють 16° і 54° , висота трапеції — 24 см, а менша основа — 18 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

999*. Основи трапеції дорівнюють 15 см і 20 см, а бічна сторона, яка дорівнює 10 см, утворює з більшою основою кут 48° . Знайдіть висоту трапеції.

1000*. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 8 см, кут при основі — 41° , висота трапеції — 2 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

1001*. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює $49^\circ 54'$, а основа більша за бічну сторону на 10,8 см.

Проявіть компетентність

1002. Тінь від стовпа, висота якого дорівнює



9 м, становить 5 м. Виразіть у градусах висоту Сонця над горизонтом.

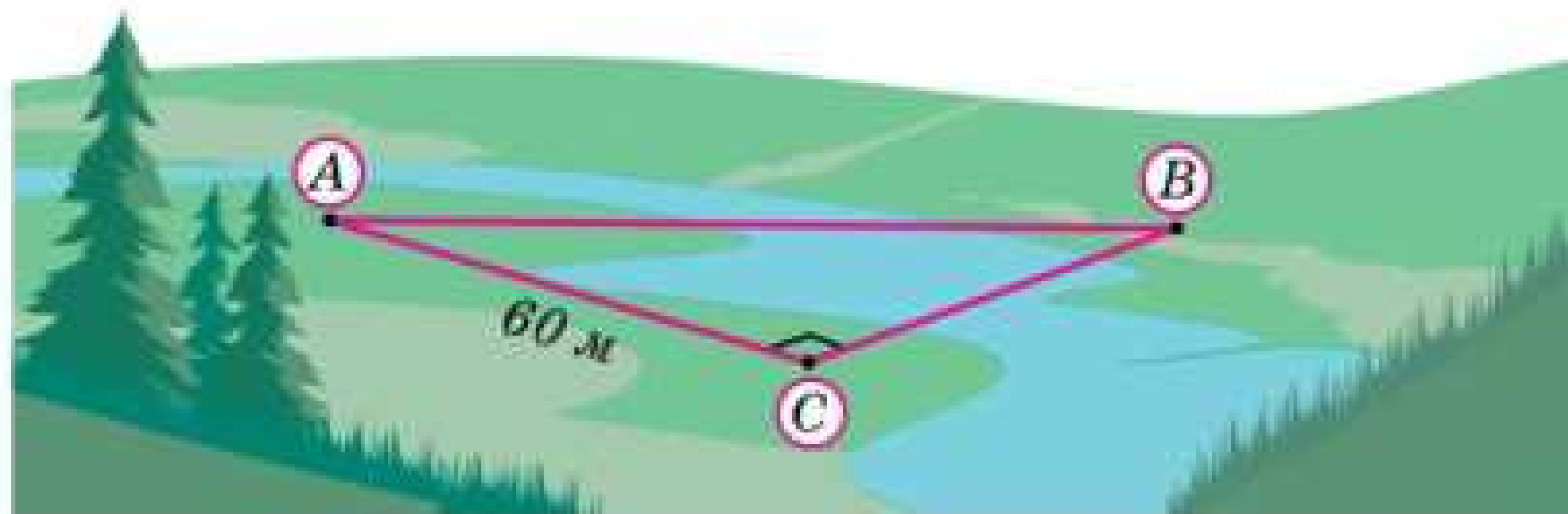
1003. Гірська залізниця на одному з перегонів підіймається на 1 м на кожні 60 м шляху. Знайдіть кут підйому дороги на цій ділянці.

1004. На яку висоту h піднявся пішохід, який пройшов l км прямою дорогою, що підіймається під кутом α до горизонту? Обчисліть h , якщо:

- 1) $l = 1,5$ км, $\alpha = 4^\circ 30'$;
- 2) $l = 3$ км, $\alpha = 8^\circ 18'$.



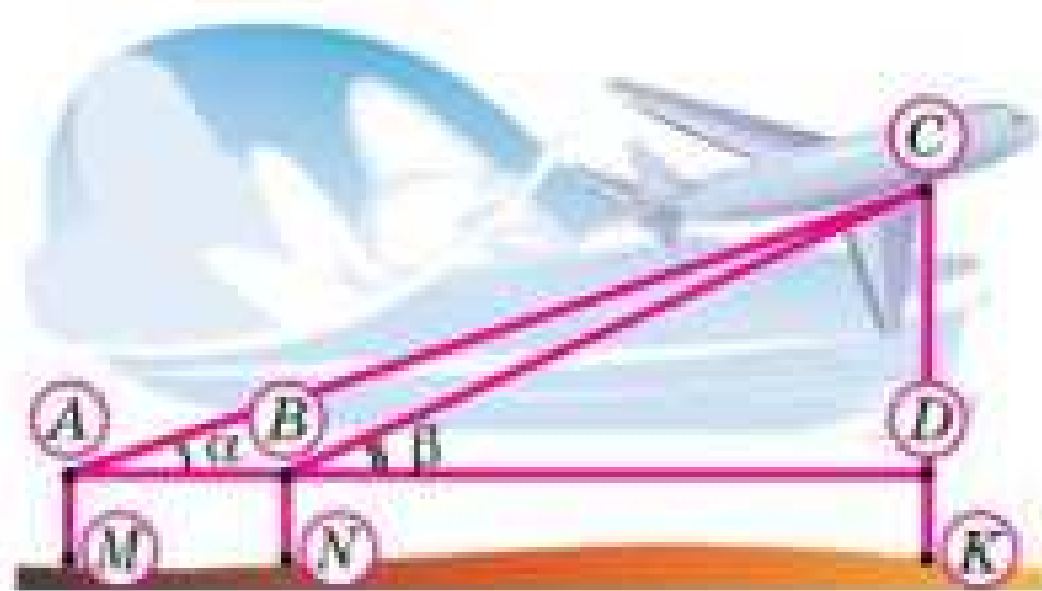
- 1005.** Вертикальний промінь прожектора перетинає хмару. Яка висота нижньої межі хмари, якщо спостерігач, який стоїть на відстані 600 м від прожектора, бачить місце перетину променя прожектора і хмари під кутом 75° ?
- 1006.** Знайдіть відстань між пунктами A і B (до пункту B підійти не можна), якщо $AC = 60$ м, $\angle BAC = 41^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$ (мал. 445).
- 1007.** Санаторій розташований на вершині гори. Пряма дорога до санаторію завдовжки 1500 м має кут підйому 5° . На якій висоті від підніжжя гори розташований санаторій?
- 1008.** Щогла закріплена трьома однаковими тросами, що нахилені до землі під кутом 64° . Нижні кінці тросів віддалені від щогли на 35 м. На якій висоті закріплені на щоглі верхні кінці тросів?
- 1009.** За вісімсот метрів від місця підйому літака ростуть дерева заввишки 20 м. Під яким кутом має підійматися літак, щоб не зачепити дерева?



Мал. 445



Мал. 446



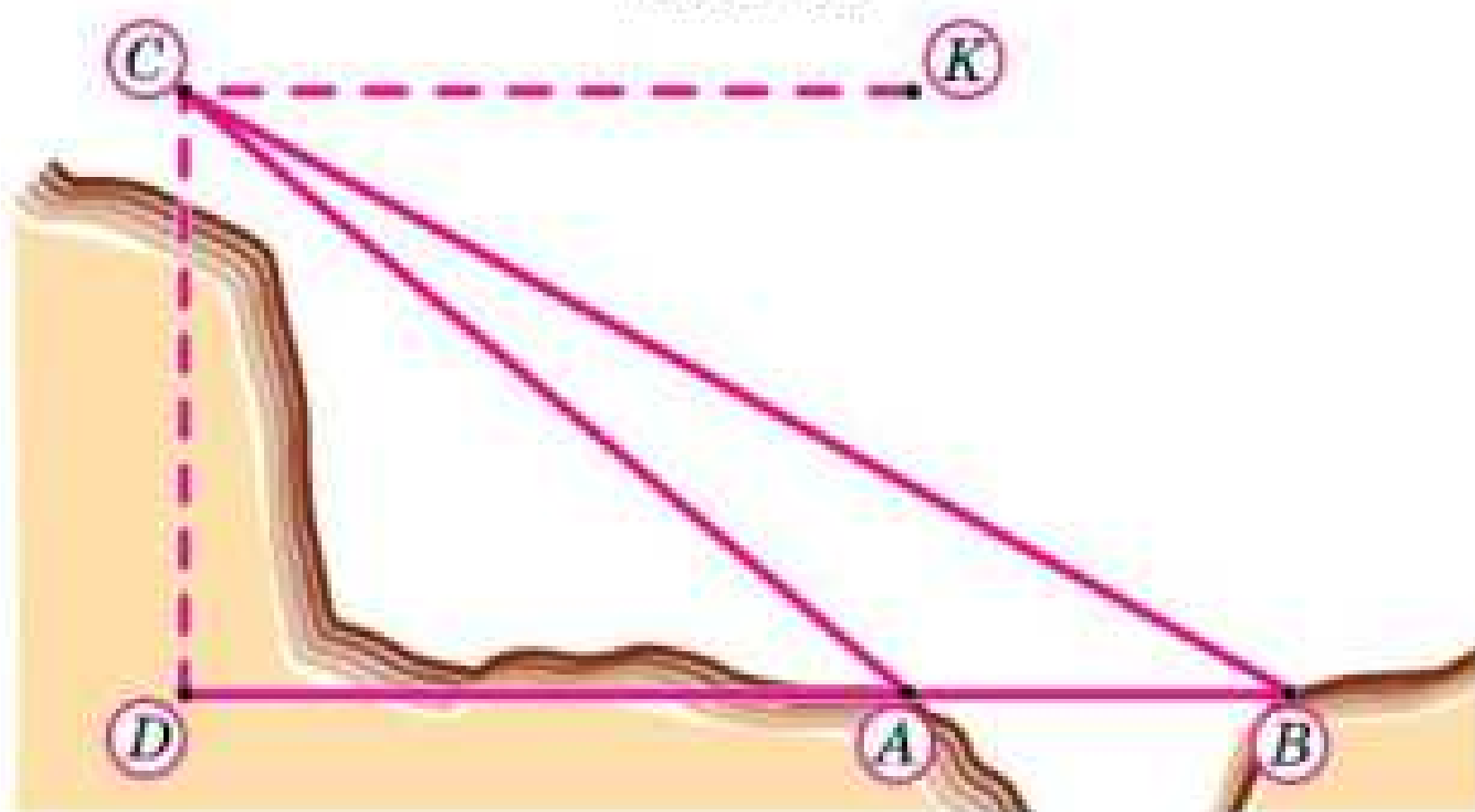
Мал. 447

- 1010.** Знайдіть кут підйому вулиці, на якій розташована школа, якщо довжина фундаменту школи — 40 м, а його висота на початку і в кінці будівлі дорівнює 180 см і 90 см (мал. 446).

- 1011.** Щоб знайти, на якій висоті $СК$ летить літак (мал. 447), два спостерігачі в пунктах M і N установили кутомірні прилади й виміряли відстань $MN = a$. У той момент, коли точки A , B і C лежали в одній вертикальній площині, виміряли одночасно кути α і β . Знаючи відстань a , кути α і β , висоту h приладів, визначили шукану висоту $СК$. Поясніть спосіб знаходження висоти. Знайдіть висоту, на якій перебував літак, якщо результати вимірювання такі: $a = 80$ м, $h = 1,5$ м, $\alpha = 39^\circ$, $\beta = 44^\circ$.
- 1012.** З башти маяка заввишки 75 м над рівнем моря видно корабель під кутом зниження 2° (мал. 448). Знайдіть відстань від маяка до корабля.
- 1013.** На малюнку 449 схематично зображено спосіб вимірювання недоступної відстані AB . Поясніть вимірювання. Знайдіть відстань AB , якщо $CD = 200$ м, $\angle KCB = 28^\circ$, $\angle KCA = 39^\circ$.



Мал. 448



Мал. 449

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 4

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте та доведіть теорему Піфагора.
2. Назвіть властивості похилих.
3. Дайте означення синуса, косинуса й тангенса гострого кута прямокутного трикутника.
4. Поясніть, як за однією зі сторін прямокутного трикутника і гострим кутом знайти дві інші його сторони.
5. Як за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його гострі кути?
6. Назвіть види задач на розв'язування прямокутних трикутників та поясніть, як їх розв'язувати.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачу та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

- 1*. Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його основа дорівнює 10 см, а висота — 12 см.

A. 22 см. B. 13 см.
Б. 14 см. Г. 15 см.
- 2*. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо катет дорівнює 8 см, а прилеглий до нього кут — 60° .

A. 10 см. B. 14 см.
Б. 48 см. Г. 16 см.
- 3*. Діагональ прямокутника дорівнює 2 см й утворює зі стороною кут 30° . Знайдіть сторони прямокутника.

A. 1 см і $\sqrt{3}$ см. B. 2 см і $\sqrt{3}$ см.
Б. 2 см і 1 см. Г. 3 см і 1 см.
4. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, якщо висота, проведена до основи, дорівнює h , а кут між бічними сторонами — α .

A. $h \cdot \sin \alpha$. B. $2h \cdot \operatorname{tg} \alpha$.
Б. $h \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. Г. $2h \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
- 5*. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 5 см і 14 см, а більша бічна сторона — 15 см. Знайдіть меншу діагональ трапеції.

A. 12 см.
Б. 13 см.
B. 22 см.
Г. 20 см.



Розділ 5. МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

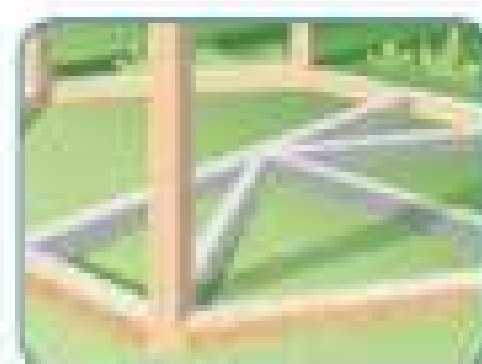
У розділі дізнаєтесь:

- про многокутник та його елементи;
- про суму кутів опуклого многокутника;
- які властивості многокутників, вписаних у коло та описаних навколо кола;
- що таке площа та які її властивості;
- як обчислити площу трикутника й окремих видів чотирикутників;
- як застосувати вивчене на практиці

§ 18. МНОГОКУТНИК ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

1. Що таке многокутник

Ситуація. Батько будував садову альтанку. Для її основи він з'єднав кілька брусів. Марина сказала, що він побудував многокутник.

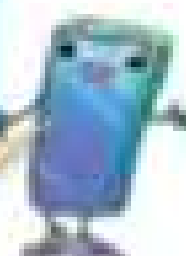


qr.orioncentr.com.ua/VCz4U



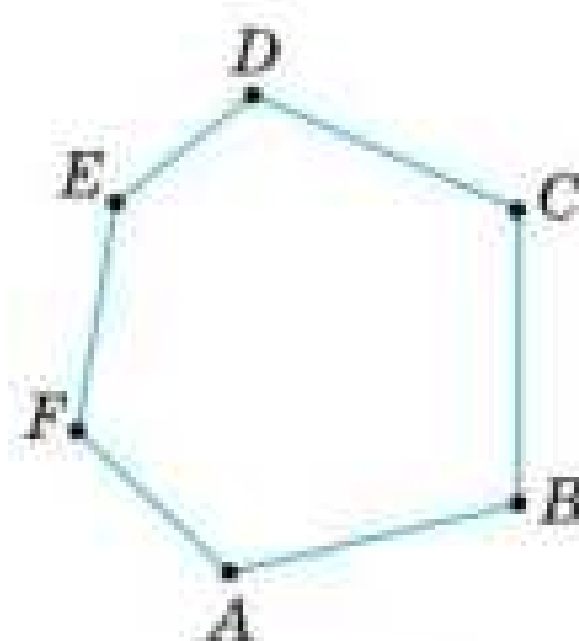
Чи мала рацію Марина?

Так.



На малюнку 450 ви бачите многокутник $ABCDEF$. Він складається з відрізків AB , BC , CD , DE , EF , FA , розміщених так, що суміжні відрізки не лежать на одній прямій, а несуміжні — не мають спільних точок. Відрізки, з яких складається многокутник, називають його *сторонами*, кути, утворені суміжними сторонами, — його *кутами*, а вершини цих кутів — *вершинами* многокутника.

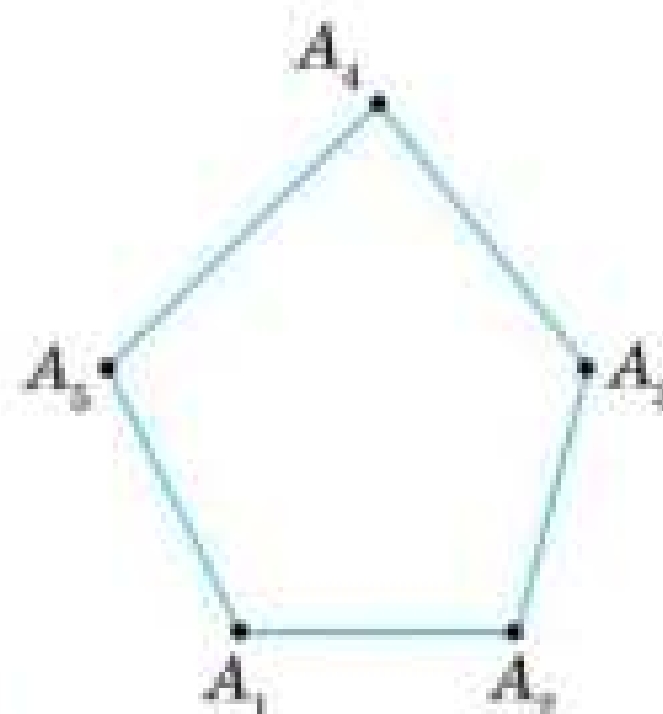
Залежно від кількості вершин (кутів або сторін) многокутник називають трикутником, чотирикутником, п'ятикутником і т. д. Многокутник, що має n вершин, називають n -*кутником*.



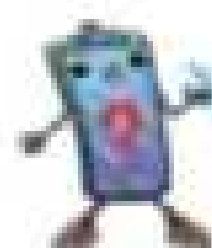
Мал. 450



Многокутник позначають назвами його вершин, наприклад шестикутник $ABCDEF$ (мал. 450), п'ятикутник $A_1A_2A_3A_4A_5$ (мал. 451).



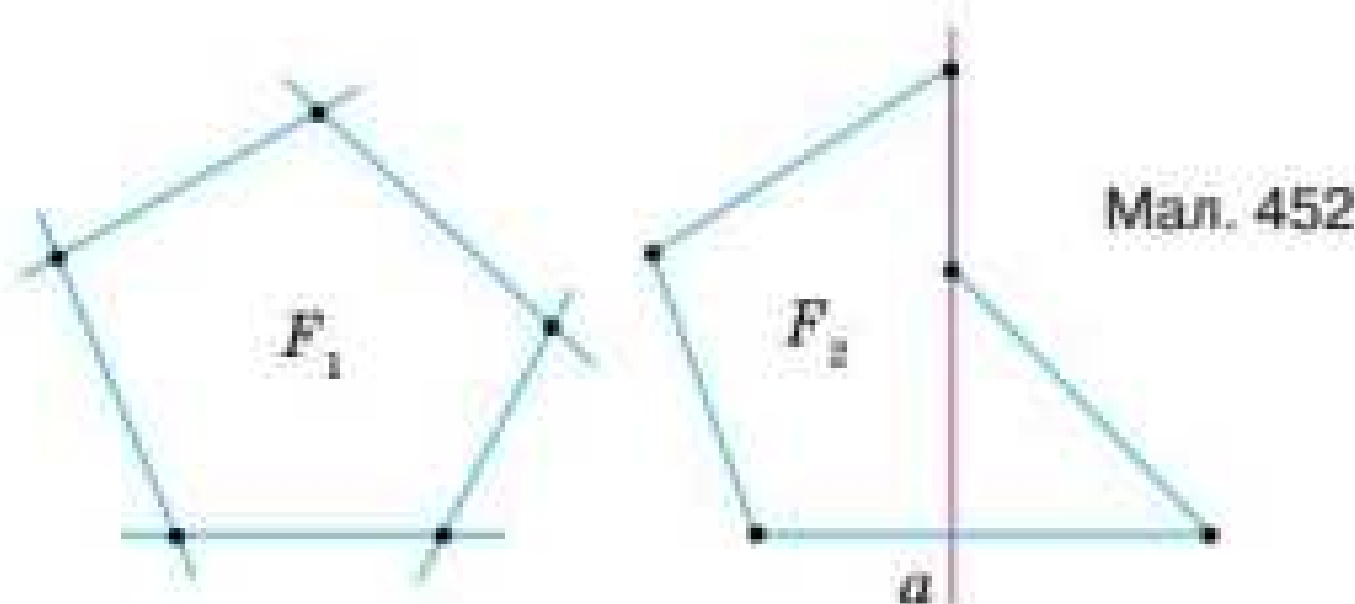
Мал. 451



У чому відмінність многокутників F_1 і F_2 на малюнку 452?

Поміркуємо.





Мал. 452

Жодна з прямих, що проходять через сторони многокутника F_1 , не перетинає інших його сторін. Він лежить по один бік від будь-якої з цих прямих. Такий многокутник називають *опуклим*. Многокутник F_2 не є опуклим.



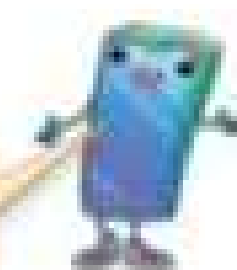
Надалі ми розглядатимемо лише опуклі многокутники.

2. Властивості многокутника



Чи мають многокутник і чотирикутник схожі властивості?

Так.



Чотирикутник є окремим видом n -кутника, коли $n = 4$. Тому многокутник і чотирикутник мають деякі спільні властивості.



Суму довжин усіх сторін n -кутника називають його *периметром*.

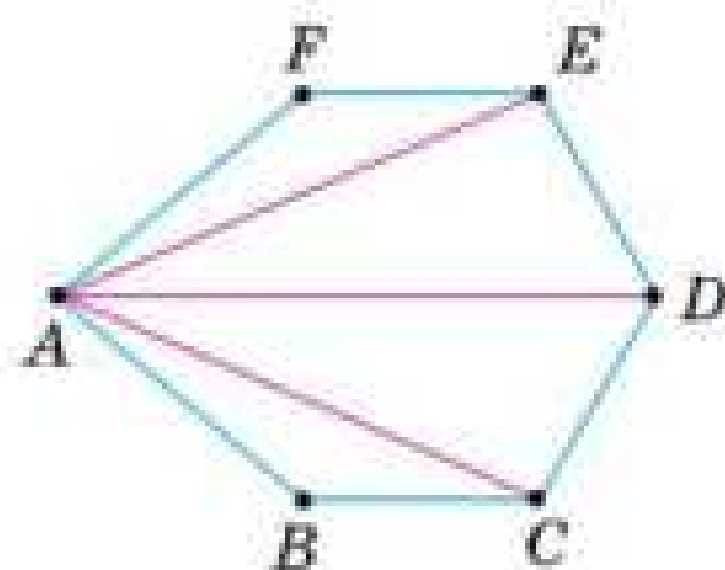
Наприклад, у шестикутника $ABCDEF$ (мал. 450):

$$P_{ABCDEF} = AB + BC + CD + DE + EF + FA.$$



Відрізок, що сполучає дві несусідні вершини n -кутника, називають його *діагоналю*.

Наприклад, у шестикутнику $ABCDEF$ (мал. 453) відрізки AC , AD , AE — його діагоналі.



Мал. 453

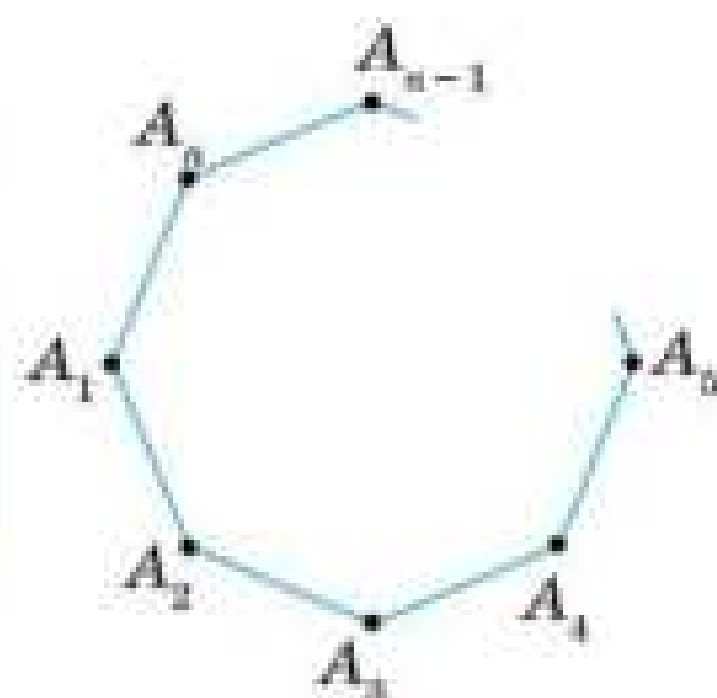
Запам'ятайте!

Теорема (про суму кутів n -кутника)

Сума кутів n -кутника дорівнює $180^\circ \cdot (n - 2)$.

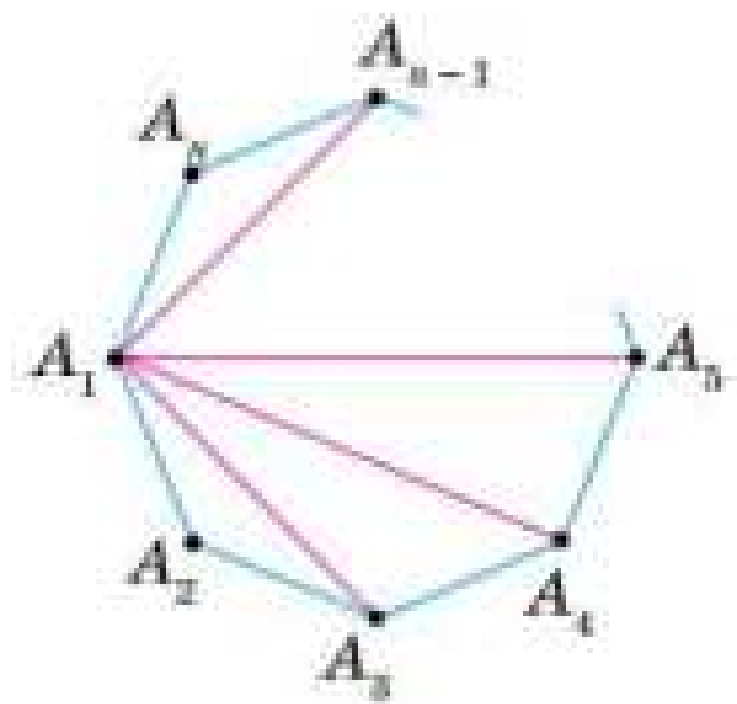
Дано: $A_1A_2A_3 \dots A_n$ — n -кутник (мал. 454).

Довести: $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \dots + \angle A_n = 180^\circ \cdot (n - 2)$.



Мал. 454

Доведення. З вершини A_1 у даному n -кутнику проведемо діагоналі $A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, \dots, A_1A_{n-1}$ (мал. 455). Вони розбивають n -кутник на $n - 2$ трикутники. Сума всіх кутів утворених трикутників дорівнює сумі кутів даного n -кутника. Оскільки в кожному трикутнику сума кутів дорівнює 180° , то сума кутів даного n -кутника дорівнює $180^\circ \cdot (n - 2)$.

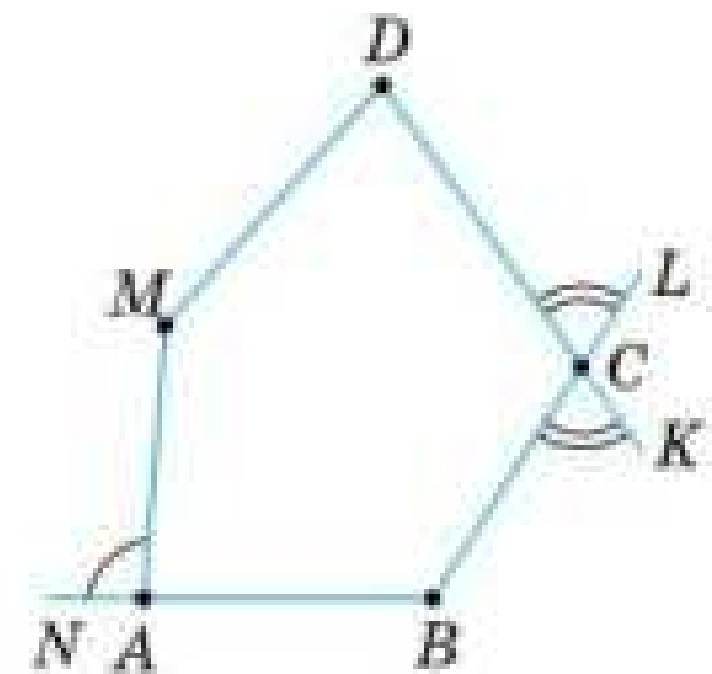


Мал. 455



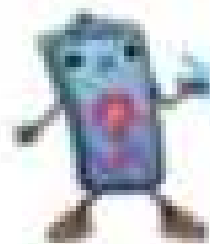
Кут, суміжний із кутом многокутника, називають **зовнішнім кутом многокутника**.

Наприклад, у п'ятикутнику $ABCDM$ (мал. 456) кут MAN є його зовнішнім кутом.



Мал. 456

3. Вписані й описані многокутники



Чи може n -кутник бути вписаним чи описаним, як чотирикутник?

Так.

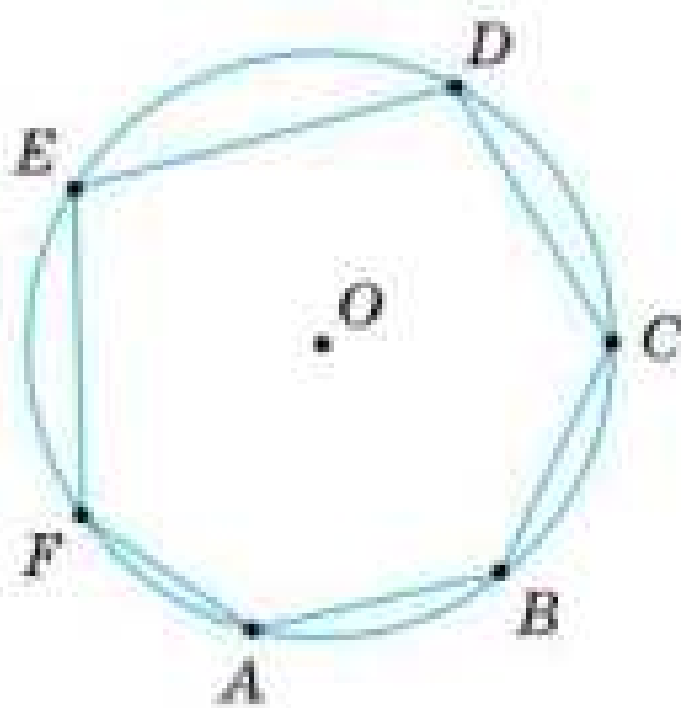


Запам'ятайте!

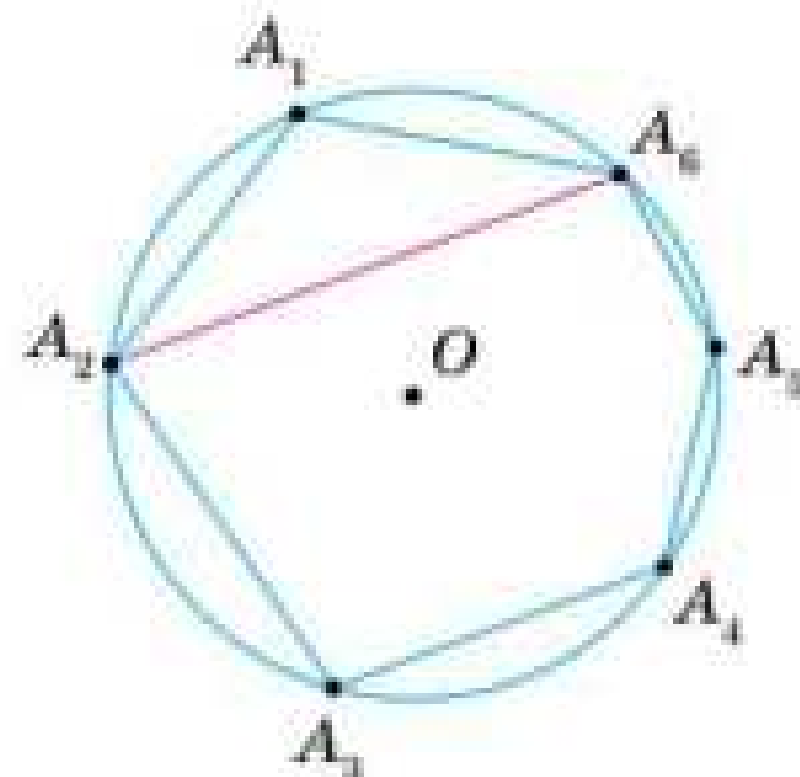
Многокутник, усі вершини якого лежать на колі, називається **вписаним у це коло**, а **коло** — **описаним навколо цього многокутника**.

Наприклад, шестикутник на малюнку 457 є вписаним у коло.

Сторони вписаного многокутника та його діагоналі є хордами кола. Кожний його кут є вписаним кутом (мал. 458).



Мал. 457

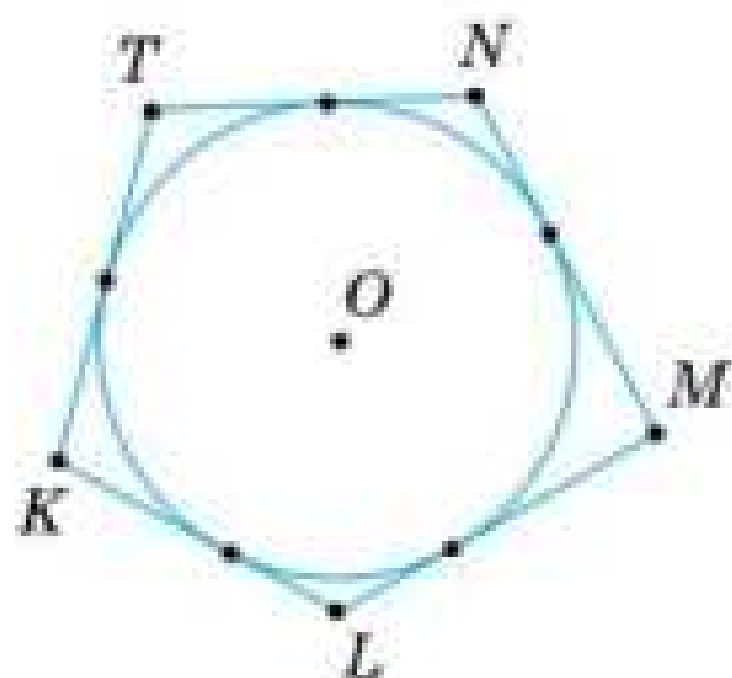


Мал. 458

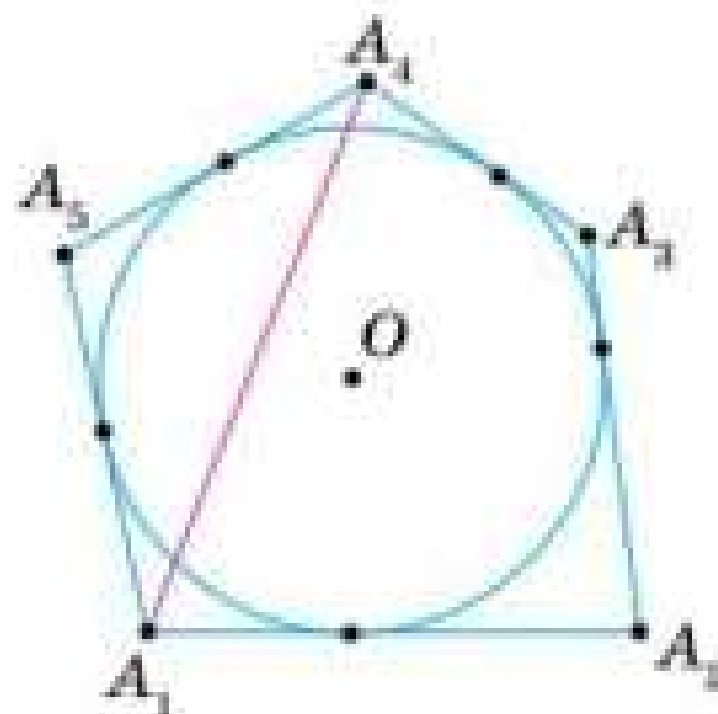
Запам'ятайте!

Многокутник, усі сторони якого дотикаються до кола, називається описаним навколо цього кола, а коло — вписаним у цей многокутник.

Наприклад, п'ятикутник на малюнку 459 є описаним навколо кола. Сторони описаного многокутника є дотичними до кола, а його діагоналі — січними (мал. 460).



Мал. 459

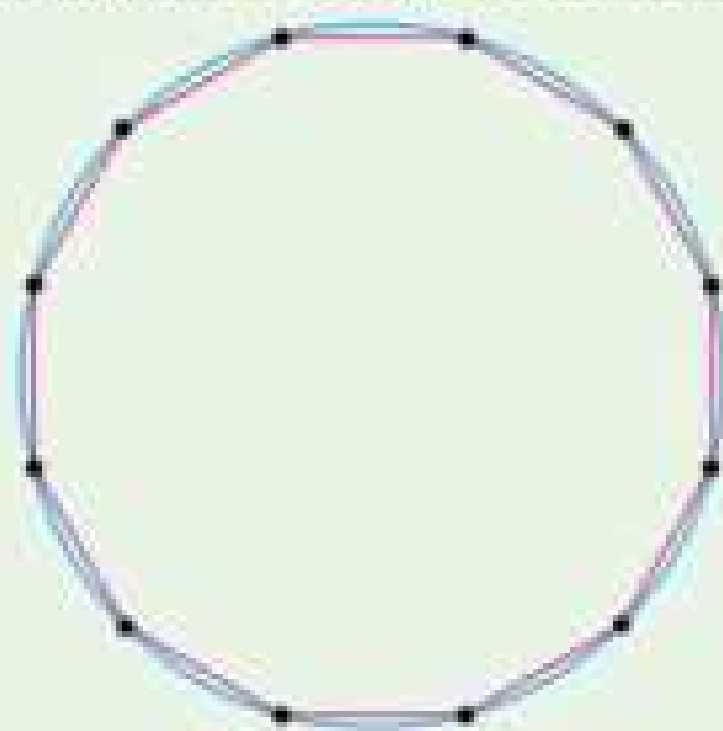


Мал. 460

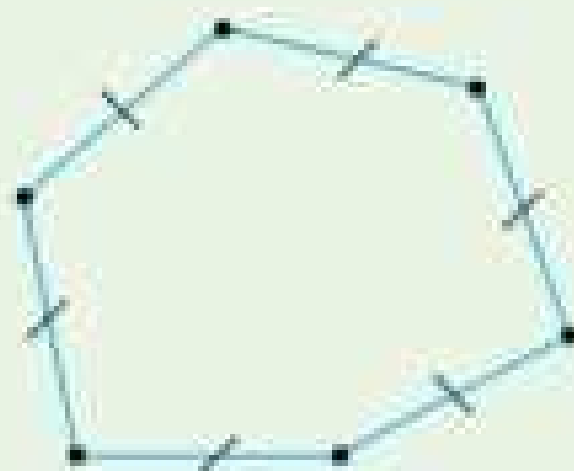
Дізнайтеся більше

1. Геометрична фігура називається *простою*, якщо її можна розбити на скінченну кількість трикутників. Многокутник — це проста фігура (див. мал. 453). А от коло не є простою фігурою (мал. 461). Навіть вписавши в коло многокутник із надзвичайно великою кількістю сторін, ми лише наблизимо його контур до кола. Тому довжину кола та площу круга знаходять в геометрії іншими методами, ніж периметр і площу многокутника.

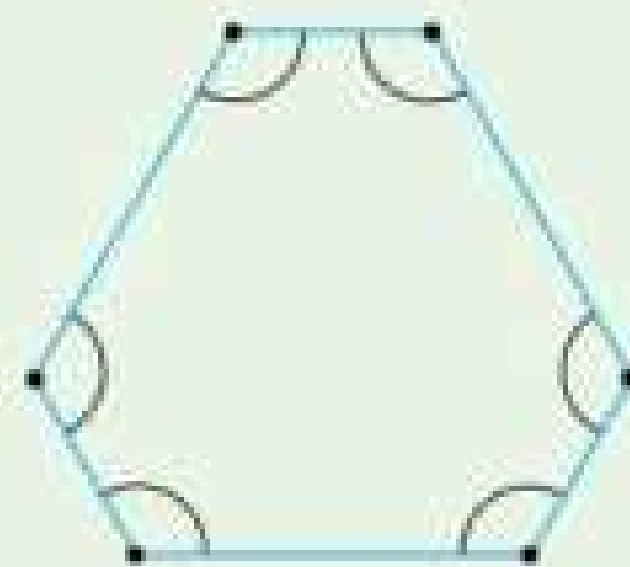
2. У вас могло виникнути запитання: Чи завжди з рівності сторін многокутника випливає рівність його кутів? Ні. Цю властивість має лише трикутник. Ви знаєте приклад чотирикутника, у якого всі сторони рівні, а кути — ні. Це ромб. У прямокутнику всі кути рівні, а от сторони — ні. Серед многокутників із більшою кількістю вершин також можна виділити й рівносторонні многокутники, у яких не всі кути рівні (мал. 462), і рівнокутні многокутники, у яких не всі сторони рівні (мал. 463).



Мал. 461



Мал. 462



Мал. 463

3. Кованцов Микола Іванович (1924–1988) — відомий український математик-геометр, доктор фізико-математичних наук, професор. Багато років обіймав посаду завідувача кафедри геометрії Київського державного університету імені Тараса Шевченка. Перу М. І. Кованцова належать наукові та науково-популярні праці в галузі геометрії, методики навчання математики, історії математики, філософських проблем природознавства. Серед них особливе місце займають навчальні посібники для студентів університетів: «Проективна геометрія» (1985), «Диференціальна геометрія» (1973), «Математика і романтика» (1980).



Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
описане коло	circum-scribed circle	umschriebene Kreis (m)	cercle circonscrit
вписане коло	inscribed circle	einbeschriebene Kreis (m)	cercle inscrit

qr.orioncentr.com.ua/Q2oYD

Пригадайте головне

1. Що таке многокутник; n -кутник? Як його позначають?
2. Який многокутник називають опуклим? А неопуклим?
3. Який відрізок називають діагоналлю многокутника?
4. Що таке периметр многокутника?
5. Сформулюйте теорему про суму кутів многокутника.
6. Що таке зовнішній кут многокутника?
7. Який многокутник називається вписаним у коло; описаним навколо кола?

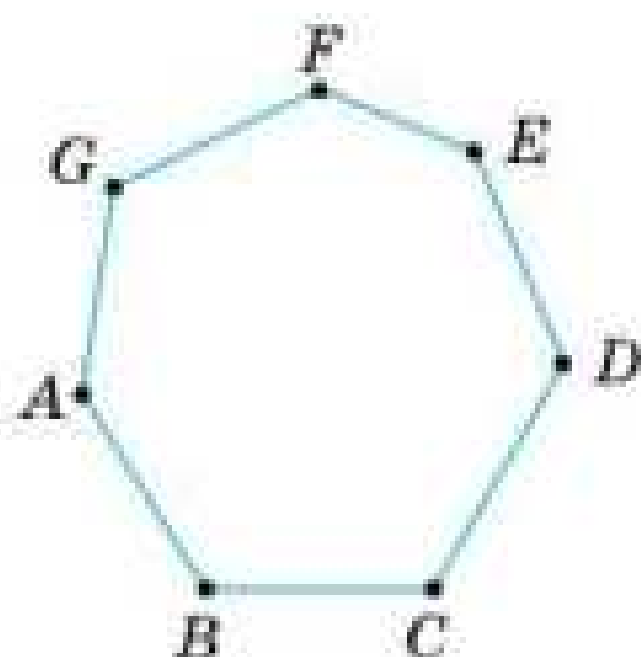
Усне тренування

Обчисліть:

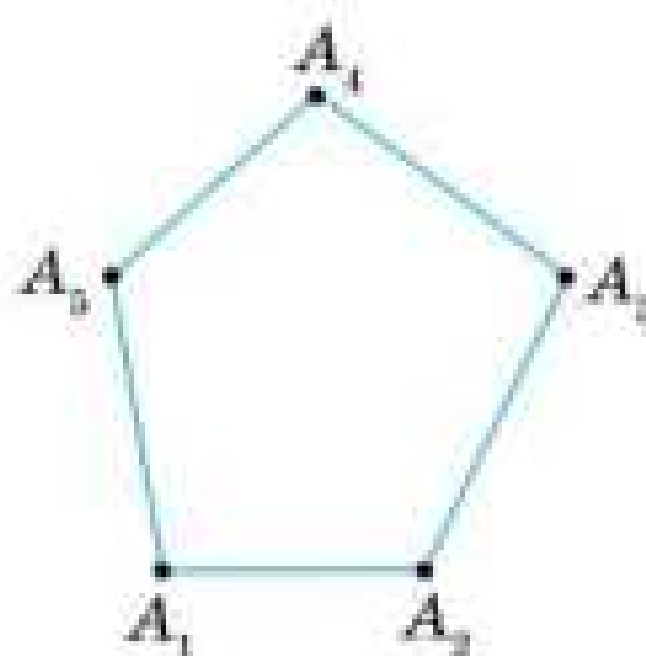
$$(36^\circ + 154^\circ) \cdot 2; \quad (143^\circ + 37^\circ) \cdot 3; \quad (109^\circ + 71^\circ) \cdot 4; \quad (22^\circ + 158^\circ) \cdot 5.$$

Розв'яжіть задачі

- 1014.** Чи правильно, що на малюнках 464, 465 зображено n -кутник? Якщо так, то назвіть його вершини, сторони й кути. Як по-іншому можна назвати цей n -кутник?



Мал. 464



Мал. 465

1015'. Чи правильно, що на малюнку 466 зображено опуклий багатокутник? Відповідь поясніть.

1016'. Чи правильно, що периметр багатокутника — це сума його: 1) кутів; 2) сторін?

1017'. Чи правильно, що діагональ багатокутника сполучає: 1) дві сусідні його вершини; 2) дві несусідні його вершини?

1018'. Чи правильно записано формулу для обчислення суми кутів n -кутника:

1) $90^\circ(n-1)$; 2) $180^\circ(n+2)$; 3) $180^\circ(n-2)$?

1019'. Назвіть зображені на малюнку 467 зовнішні кути п'ятикутника $KLMNP$ при вершині: 1) L ; 2) P ; 3) K .

1020'. Чи правильно, що у багатокутника, вписаного в коло, на колі лежать: 1) середини всіх його сторін; 2) усі вершини?

1021'. Чи правильно, що у багатокутника, описаного навколо кола, до кола дотикаються: 1) усі його діагоналі; 2) усі його сторони?

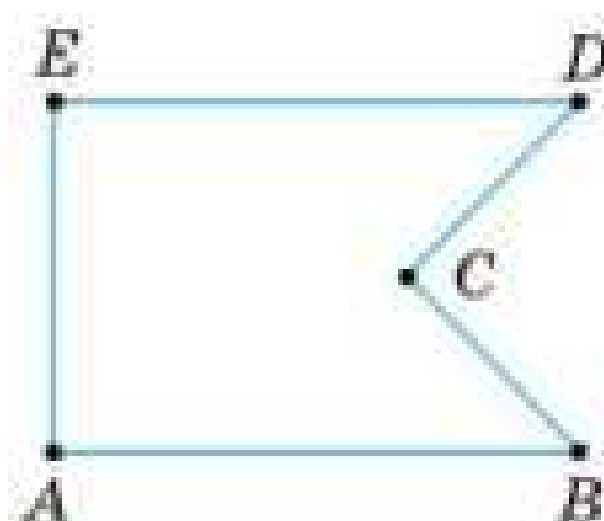
1022'. Знайдіть периметр n -кутника, якщо в ньому всі сторони дорівнюють по 2 см і: 1) $n = 7$; 2) $n = 10$; 3) $n = 9$.

1023'. Які діагоналі можна провести в n -кутнику $ABCDEF$ з вершини: 1) A ; 2) C ; 3) F ?

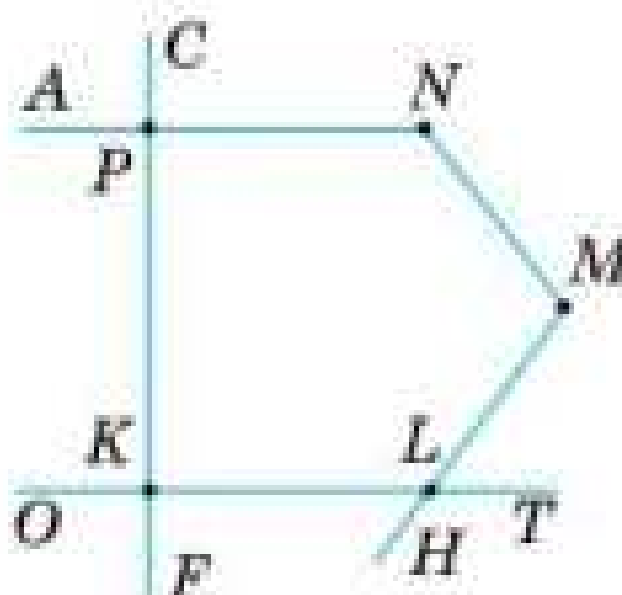
1024'. Накресліть семикутник $ABCDEOT$ і проведіть його діагоналі з вершини: 1) B ; 2) O . Скільки трикутників утворилося при даній вершині?

1025'. Чому дорівнює сума кутів:

1) п'ятикутника; 2) дев'ятикутника?



Мал. 466



Мал. 467



qr.orioncentr.com.ua/X6mAT

1026*. Чому дорівнює сума кутів сімнадцятикутника?



1027*. Скільки вершин у n -кутника, якщо сума його кутів дорівнює:
1) 1440° ; 2) 1080° ?

1028*. Скільки вершин у n -кутника, якщо сума його кутів дорівнює
 1620° ?

1029*. Скільки вершин у n -кутника, якщо кожний його кут дорівнює:
1) 90° ; 2) 144° ?

1030*. Скільки вершин у n -кутника, якщо кожний його кут дорівнює 156° ?

1031*. За даними таблиці 36 знайдіть кути п'ятикутника $ABCDM$.

Таблиця 36

$\angle A$	n°	$n^\circ - 30^\circ$	$n^\circ - 20^\circ$	n°
$\angle B$	$2n^\circ$	$n^\circ - 10^\circ$	$n^\circ - 10^\circ$	$5n^\circ$
$\angle C$	$4n^\circ$	n°	n°	$7n^\circ$
$\angle D$	$5n^\circ$	n°	$n^\circ - 30^\circ$	$9n^\circ$
$\angle M$	$6n^\circ$	$n^\circ + 30^\circ$	n°	$5n^\circ$

1032*. Знайдіть зовнішній кут при вершині n -кутника, якщо кожний його кут дорівнює:
1) 90° ; 2) 156° .

1033*. Знайдіть зовнішній кут при вершині n -кутника, якщо кожний
 його кут дорівнює 144° .

1034*. Накресліть коло й позначте на ньому вісім точок — від A_1 до A_8 . Послідовно сполучіть ці точки відрізками. Який n -кутник одержали?

1035*. Накресліть коло й позначте на ньому сім точок — від A_1 до A_7 . Послідовно сполучіть ці точки відрізками. Який n -кутник одержали?

1036*. Із центра кола провели радіуси так, що утворилося 7 центральних кутів. Одержані на колі точки сполучили відрізками. Який многокутник утворився?

1037*. Навколо кола опишіть: 1) шестикутник; 2) п'ятикутник. Позначте точки їх дотику до кола. Виміряйте утворені на сторонах відрізки. Чи справджується властивість відрізків дотичних? Як можна знайти периметр многокутника?

1038*. Накресліть коло та проведіть п'ять дотичних до кола так, щоб утворився описаний п'ятикутник. Виміряйте відрізки сторін п'ятикутника від його вершин до точок дотику з колом. Позначте на малюнку рівні відрізки.

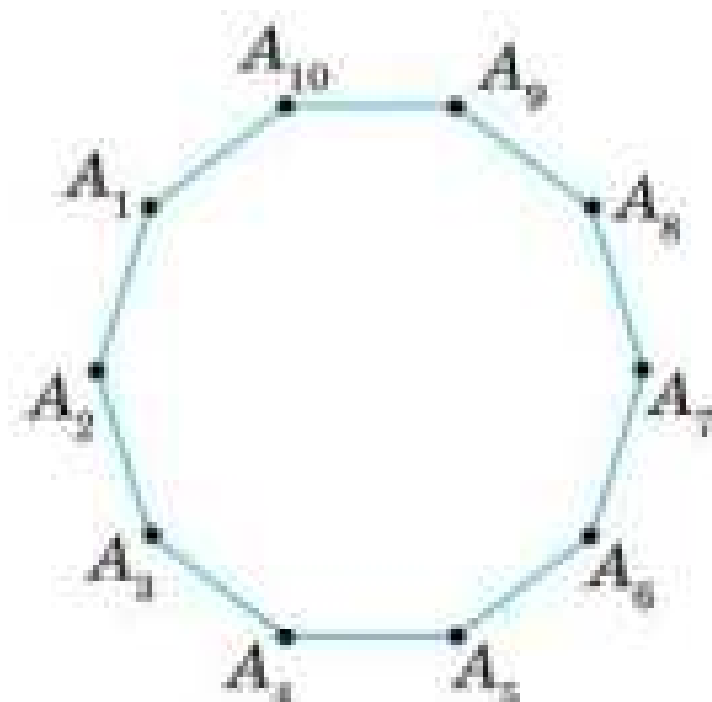
1039. Периметр п'ятикутника дорівнює 136,4 см. Довжини чотирьох сторін відносяться як 6 : 7 : 8 : 11. Знайдіть довжину п'ятої сторони п'ятикутника, якщо вона на 15,6 коротша від найменшої з чотирьох інших сторін.



1040. Доведіть, що кожна сторона многокутника менша від його півпериметра.

1041. Скільки діагоналей у n -кутника?

1042. Знайдіть кількість діагоналей у:
1) десятикутника (мал. 468);
2) сімнадцятикутника (мал. 469).



Мал. 468

1043. Чи існує п'ятикутник, у якого кути дорівнюють:

- 1) 100° , 90° , 120° , 116° , 113° ;
- 2) 110° , 100° , 118° , 112° , 101° ?

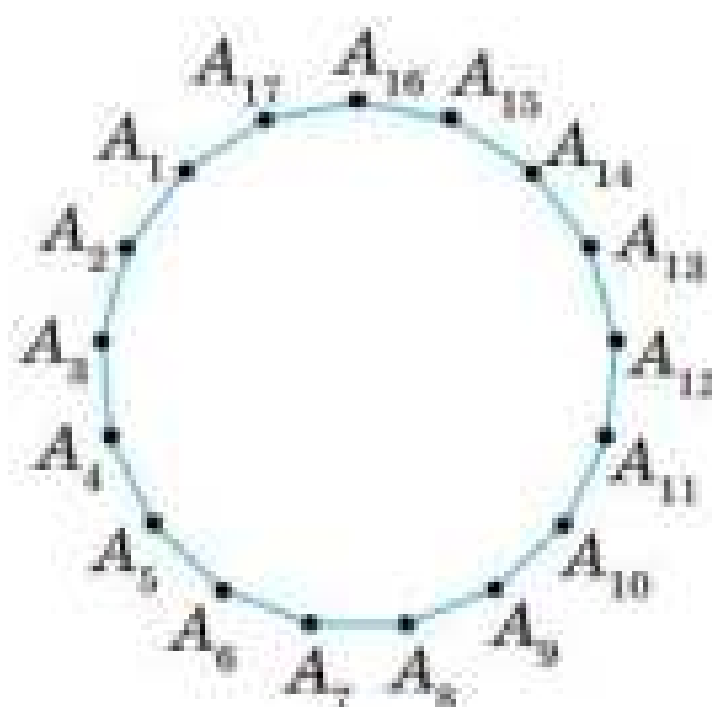
1044. Чи можна побудувати многокутник, крім трикутника, у якому всі кути гострі?

1045. Три кути многокутника дорівнюють:

- 1) по 80° ; 2) по 90° .

Усі інші кути дорівнюють по 150° .

Яка кількість вершин у многокутника?



Мал. 469

1046. Три кути многокутника дорівнюють по 100° . Усі інші кути дорівнюють по 120° .
Яка кількість вершин у многокутника?

1047. Зовнішні кути п'ятикутника відносяться як:

- 1) 3 : 4 : 5 : 7 : 8; 2) 1 : 2 : 4 : 5 : 6.

Як відносяться його внутрішні кути?

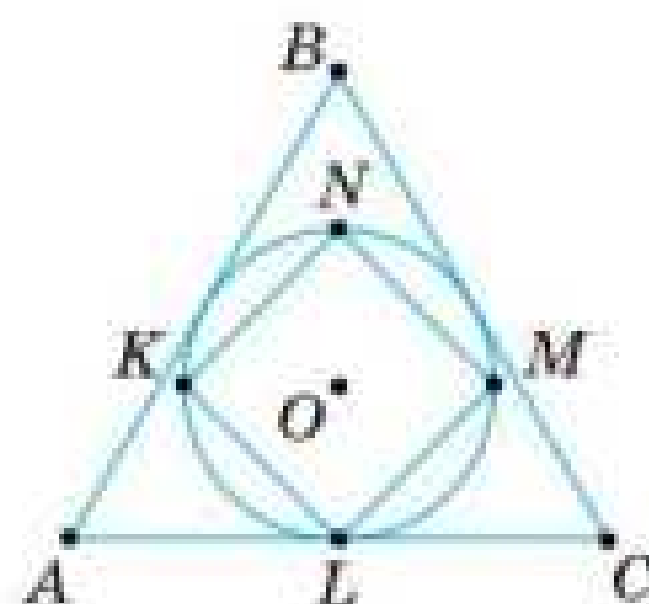
1048. Доведіть, що сума всіх внутрішніх і всіх зовнішніх кутів n -кутника пропорційна кількості його вершин.

1049. Скільки вершин у вписаному многокутника, якщо кожний центральний кут, що спирається на його сторону, дорівнює:

- 1) 60° ; 2) 40° ?

1050. За якою формулою можна обчислити центральний кут, що спирається на сторону вписаного многокутника, у якого всі сторони рівні?

1051. У рівносторонній трикутник зі стороною 6 см вписано коло (мал. 470). Знайдіть діагональ квадрата, вписаного в дане коло.

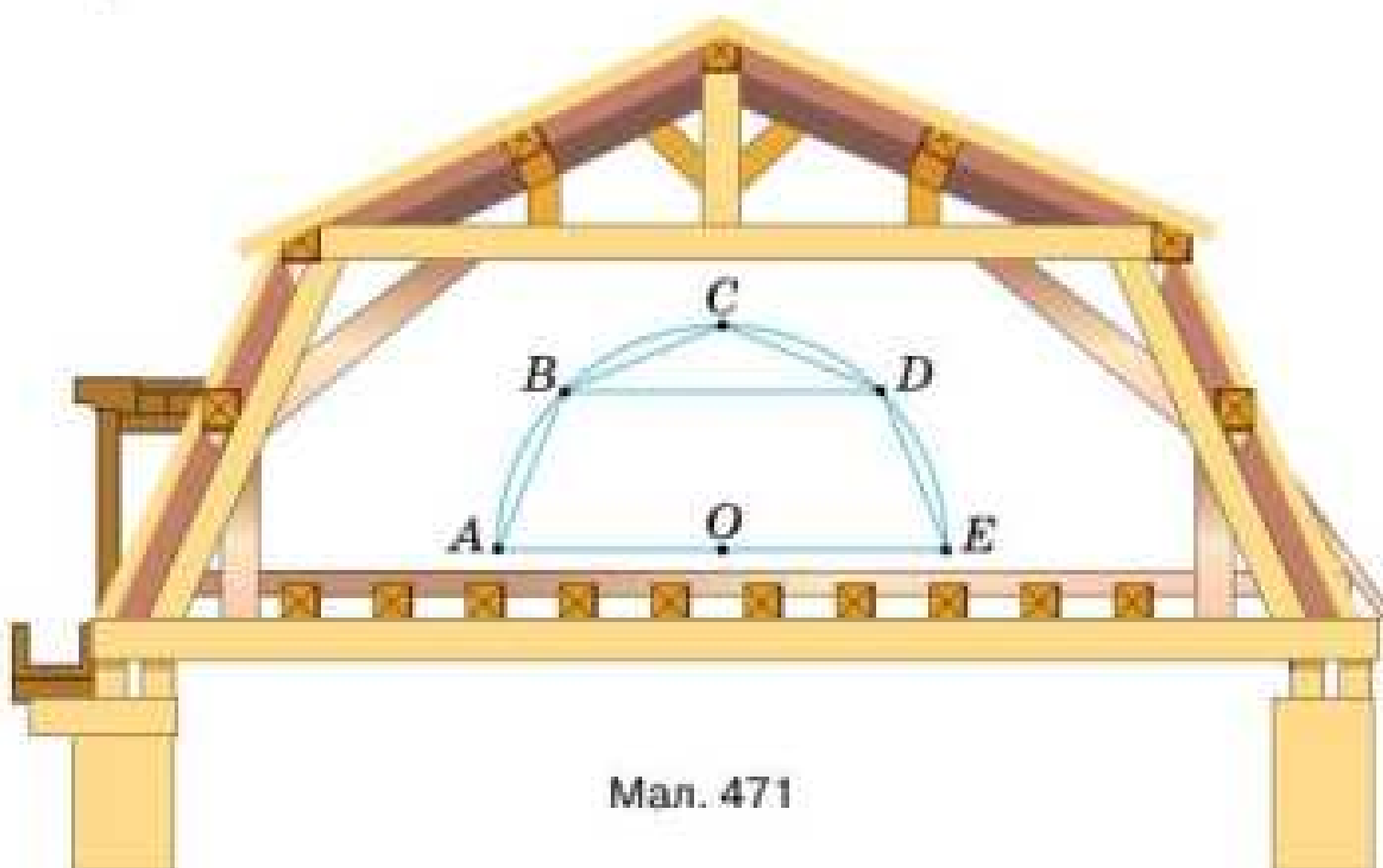


Мал. 470

- 1052***. Доведіть, що кожний кут многокутника менший від 180° .
- 1053***. У кожному з двох многокутників усі кути рівні. Кут першого многокутника:
- 1) удвічі менший від кута другого многокутника;
 - 2) дорівнює зовнішньому куту другого многокутника.
- Яку кількість вершин має кожний многокутник?
- 1054***. Доведіть, що вписаний многокутник, у якому всі сторони рівні, має: 1) рівні кути; 2) рівні зовнішні кути.
- 1055***. Скільки вершин у вписаному многокутнику з рівними сторонами, якщо його кут:
- 1) дорівнює зовнішньому куту;
 - 2) удвічі більший за зовнішній кут;
 - 3) відноситься до зовнішнього кута як $5 : 2$?
- 1056***. Доведіть, що у вписаному n -кутнику з рівними сторонами при $n > 4$ кут многокутника більший за його зовнішній кут.
- 1057***. Рівнобічну трапецію з кутом при основі 54° вписано в коло. Кут між діагоналями трапеції, який лежить проти бічної сторони, дорівнює 36° . Де розташований центр кола, вписаного в дану трапецію?

Проявіть компетентність

- 1058.** Найпростіше мансардне покриття утворює у вертикальному розрізі половину восьмикутника, у якому всі сторони рівні й усі кути рівні (мал. 471). Знайдіть ширину перекриття BD , сторону восьмикутника та висоту мансардної кімнати $ABDE$, якщо $AE = 6$ м.

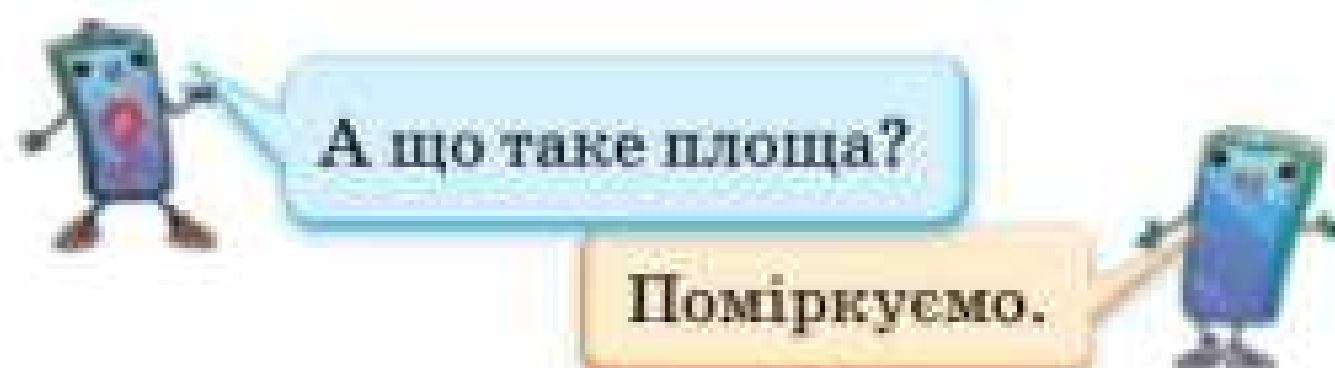


Мал. 471

§ 19. ПОНЯТТЯ ПЛОЩІ. ПЛОЩА ПРЯМОКУТНИКА

1. Поняття площі

Ситуація. Мама облаштовувала сучасну європейську фотостіну й запитала Дениса: «Як визначити, яка з рамок займає більше місця на стіні?» Денис відповів: «Порівняти фоторамки за площею.»



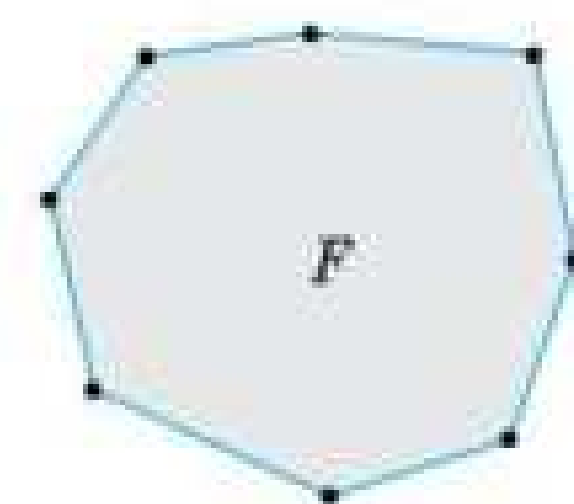
qr.orioncentr.com.ua/KBDjM

Будь-який опуклий многокутник розбиває площину на дві області — внутрішню і зовнішню (мал. 472). Многокутник разом з його внутрішньою областю називають *плоским многокутником*. Наприклад, рамка разом з фотографією є плоским многокутником.

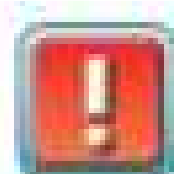
Кожний плоский многокутник (наприклад, многокутник F на мал. 473) займає частину площини. Якщо міру цієї властивості (займати частину площини) виразити деяким числом, то одержимо *площу многокутника*.



Мал. 472



Мал. 473



Далі будемо говорити «площа многокутника», маючи на увазі, що многокутник — плоский. Це стосується й інших плоских фігур.



Площа — геометрична величина.



Площу позначають буквою S . Іноді вказують назву фігури, наприклад S_p , а для кількох фігур використовують індекси, наприклад S_1, S_2 і т. д.

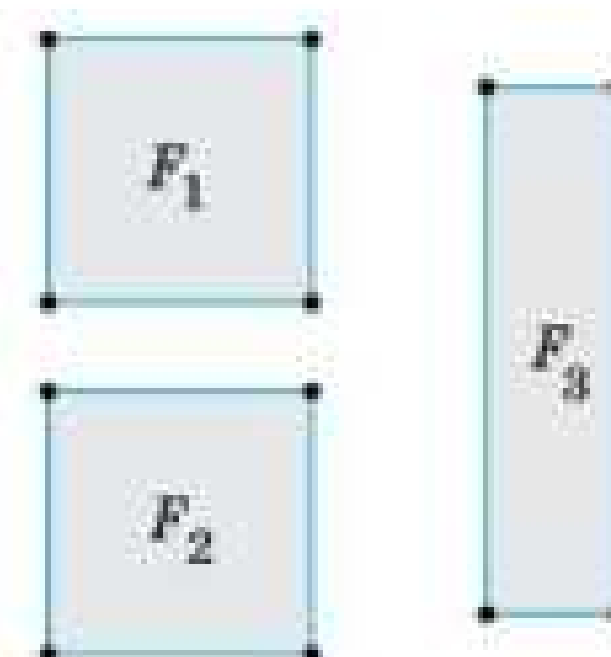
2. Властивості площі

На малюнку 474 фігури F_1 і F_2 рівні, бо суміщаються накладанням. Зрозуміло, що вони мають рівні площі.



Рівні фігури мають рівні площі.

Дві фігури, які мають рівні площі, називають *рівновеликими*. Наприклад, рівновеликими є всі три фігури на малюнку 474, оскільки фігури F_1 і F_2 є рівними, а фігуру F_3 складено з двох половинок фігури F_1 .

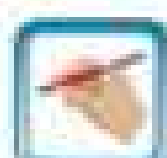


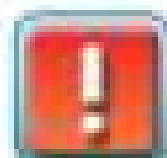
Мал. 474

-  Рівні фігури завжди є рівновеликими (наприклад, як фігури F_1 і F_2), але не будь-які рівновеликі фігури — рівні (наприклад, як фігури F_2 і F_1).

Щоб виміряти площу фігури, потрібно обрати *одиницю вимірювання*. Для цього використовують квадрат, у якому сторона дорівнює одиниці вимірювання довжини. Площа квадрата зі стороною 1 см — це одиниця вимірювання площі у *квадратних сантиметрах*, зі стороною 1 м — у *квадратних метрах* і т. д.

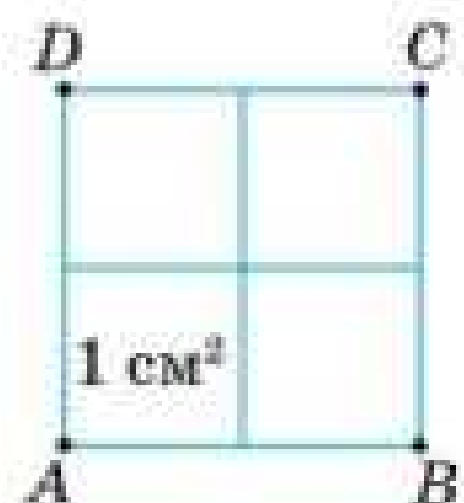
-  Одиницею вимірювання площі є площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини.

-  Коротко записують так: 1 см^2 , але говорять: «один квадратний сантиметр».

-  Говорити «сантиметр у квадраті» — **неправильно!**

Деякі одиниці вимірювання площі мають спеціальні назви: *ар* (площа квадрата зі стороною 10 м), *гектар* (площа квадрата зі стороною 100 м) та ін.

На малюнку 475 ви бачите квадрат $ABCD$ зі стороною 2 см. Він складається із чотирьох квадратів площею 1 см^2 , тому його площа дорівнює 4 см^2 .



Мал. 475

-  Записують: $S_{ABCD} = 4 \text{ см}^2$.

-  Площу будь-якої фігури виражають додатним числом.



Чи зміниться площа квадрата $ABCD$, якщо за одиницю вимірювання візьмемо 1 мм^2 ?

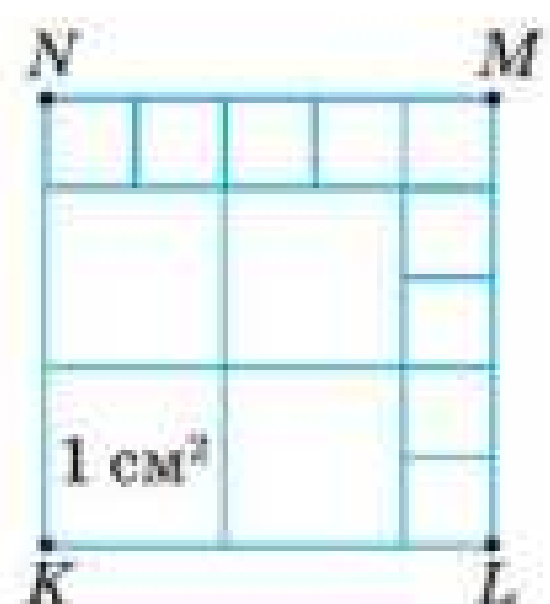
Ні, площа квадрата не зміниться, але буде виражена інакше: $S_{ABCD} = 400 \text{ мм}^2$.



На малюнку 476 довжина сторони квадрата $KLMN$ дорівнює 2,5 см. Він уміщує 4 квадрати площею 1 см^2 і ще 9 маленьких квадратів площею $0,25 \text{ см}^2$. Тому $S_{KLMN} = 4 + 9 \cdot 0,25 = 6,25 (\text{см}^2)$.

-  Площа будь-якої фігури дорівнює сумі площ частин, з яких вона складається.

Щоб наближено виміряти площу фігури F , використовують *палетку* (мал. 477). Для її виготовлення на прозорій плівці наносять сітку з горизонтальних



Мал. 476

і вертикальних прямих із кроком, що дорівнює деякій одиниці довжини. Палетку накладають на фігуру F і підраховують кількість n «цілих» квадратів, розміщених усередині неї. Потім підраховують кількість m квадратів, у яких лише частина розміщена всередині фігури. Після того до числа n додають половину числа m .

Два многокутники називають *рівноскладеними*, якщо їх можна розкласти на одне й те саме число попарно рівних многокутників. Такими є, наприклад, фігури F_1 і F_2 на малюнку 478, бо кожна з цих фігур складається з однакової кількості квадратів.

3. Площа прямокутника

Із попередніх класів ви знаєте, що площу квадрата зі стороною a можна обчислити по-іншому — за формулою площі квадрата:

$$S = a^2.$$

Для квадратів $ABCD$ (див. мал. 475) і $KLMN$ (див. мал. 476) одержимо:

$$S_{ABCD} = 2^2 = 4 \text{ (см}^2\text{)}, \quad S_{KLMN} = 2,5^2 = 6,25 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Оскільки $4 \text{ см}^2 < 6,25 \text{ см}^2$, можемо записати:

$$S_{ABCD} < S_{KLMN}.$$

Будемо вважати формулу площі квадрата основною і приймемо її без доведення. Для інших фігур формули площі треба *виводити*, спираючись на основні властивості площі.



Щоб вивести формулу площі многокутника, можна:
або розбити його на частини, формули площ яких відомі;
або доповнити його до такої фігури, формула площі якої відома.

Запам'ятайте!

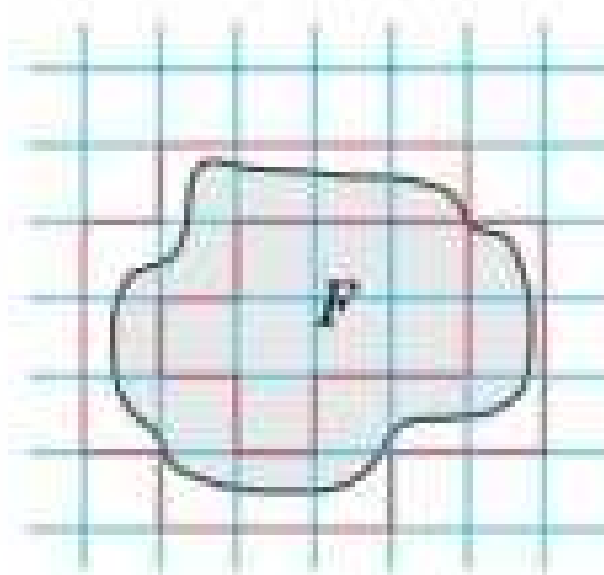
Теорема (про площу прямокутника)

Площа прямокутника дорівнює добутку його сусідніх сторін:

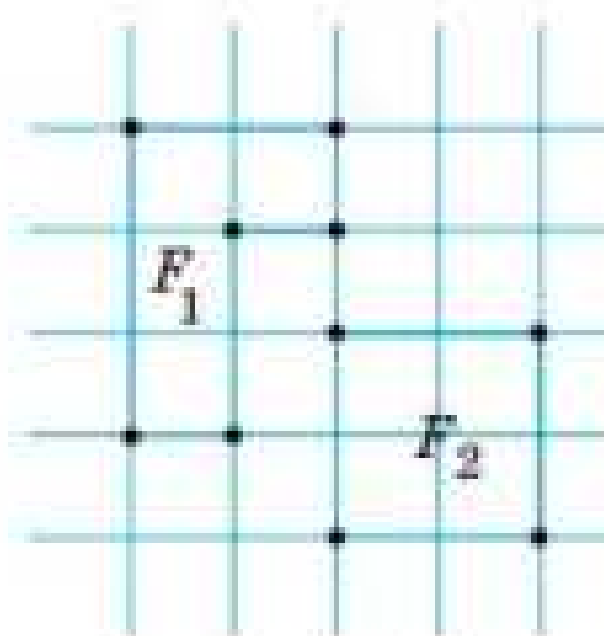
$$S = ab.$$

Дано: $ABCD$ — прямокутник (мал. 479),
 $AB = a$, $AD = b$.

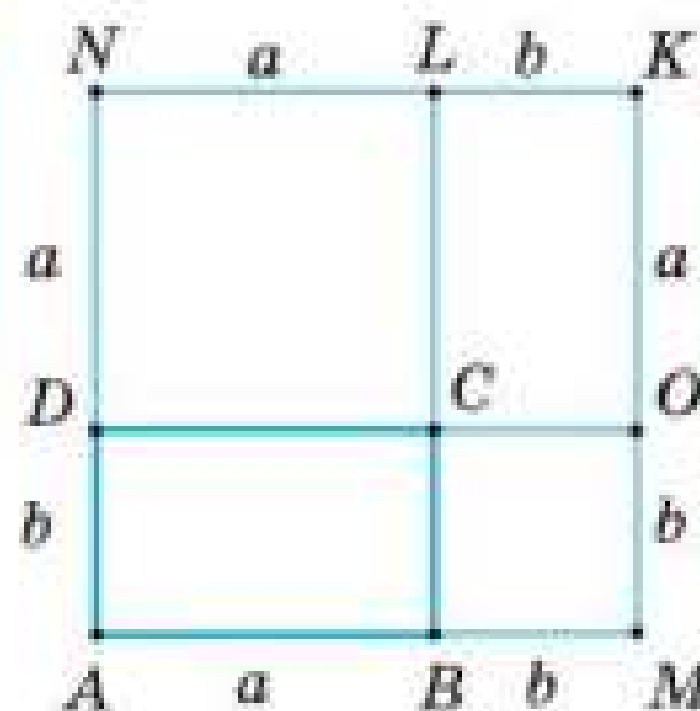
Довести: $S_{ABCD} = ab$.



Мал. 477



Мал. 478



Мал. 479

Доведення. Добудуємо даний прямокутник $ABCD$ до квадрата $AMKN$ зі стороною $a + b$ (мал. 479). Тоді:

$$S_{AMKN} = (a + b)^2.$$

З іншого боку, квадрат $AMKN$ складається з двох прямокутників $ABCD$ і $OKLC$ та двох квадратів $BMOC$ і $DNLC$. Тому, за властивостями площі:

$$S_{AMKN} = S_{ABCD} + S_{OKLC} + S_{BMOC} + S_{DNLC}.$$

Прямокутники $ABCD$ і $OKLC$ — рівні, бо мають рівні суміжні сторони a і b . Тому, за властивостями площі, $S_{ABCD} = S_{OKLC}$.

Квадрати $BMOC$ і $DNLC$ мають сторони b і a відповідно, тому $S_{BMOC} = b^2$, $S_{DNLC} = a^2$. Отже:

$$S_{AMKN} = 2S_{ABCD} + a^2 + b^2.$$

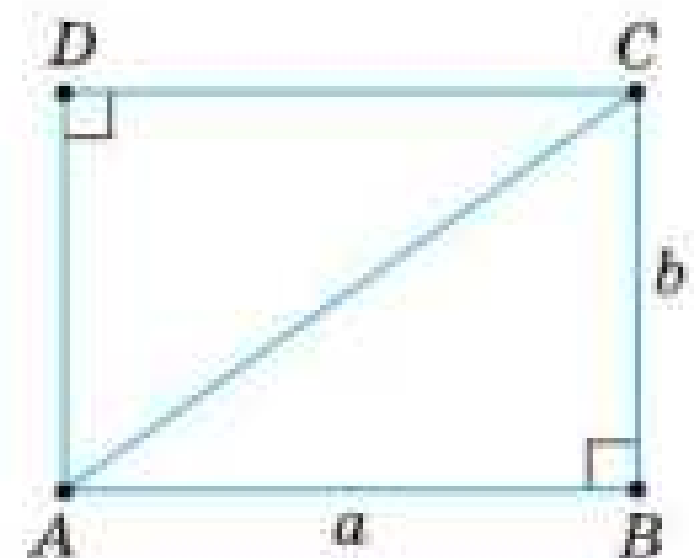
Далі одержуємо:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= 2S_{ABCD} + a^2 + b^2, \\ a^2 + 2ab + b^2 &= 2S_{ABCD} + a^2 + b^2, \\ S_{ABCD} &= ab. \end{aligned}$$

Наслідок. Площа прямокутного трикутника з катетами a і b дорівнює половині добутку катетів.

Справді, діагональ AC розбиває прямокутник $ABCD$ зі сторонами a і b (мал. 480) на два рівні прямокутні трикутники ABC і ADC з катетами a і b , тому:

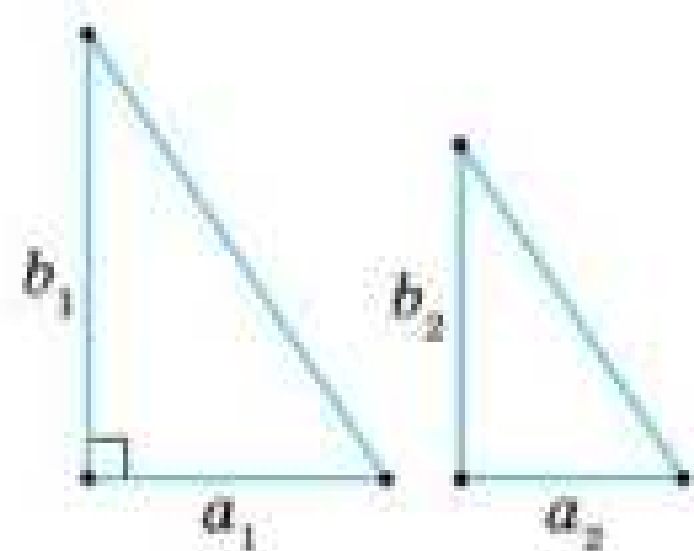
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab.$$



Мал. 480

Задача Доведіть, що відношення площ подібних прямокутних трикутників дорівнює квадрату їх коефіцієнта подібності.

Розв'язання Нехай один із даних прямокутних трикутників (мал. 481) має катети a_1 , b_1 і площу S_1 , інший — катети a_2 , b_2 і площу S_2 , а коефіцієнт їх подібності дорівнює k . Доведемо, що $\frac{S_1}{S_2} = k^2$.



Мал. 481

Оскільки трикутники подібні, то $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$. Знайдемо площі трикутників та їх відношення:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}a_1b_1 = \frac{1}{2}ka_2 \cdot kb_2 = \frac{1}{2}k^2a_2b_2; & S_2 &= \frac{1}{2}a_2b_2; \\ \frac{S_1}{S_2} &= \frac{\frac{1}{2}k^2a_2b_2}{\frac{1}{2}a_2b_2} = k^2. \end{aligned}$$

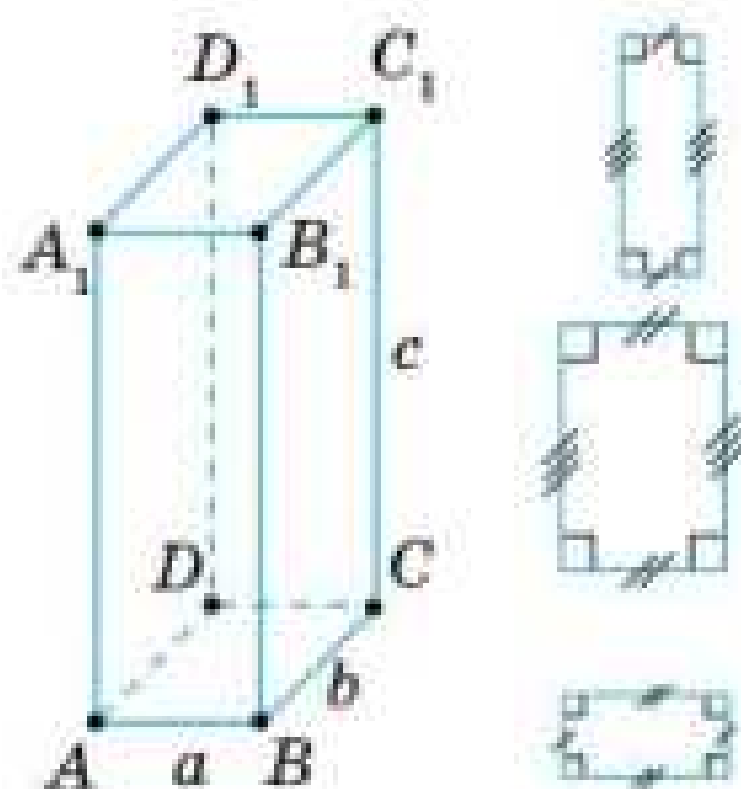
4. Площа поверхні прямокутного паралелепіпеда і куба

Поверхня прямокутного паралелепіпеда складається з шести граней, кожна з яких є прямокутником, а площа його поверхні дорівнює сумі площ усіх його граней. Протилежні грані прямокутного паралелепіпеда рівні (мал. 482), тому площа його поверхні обчислюється за формулою:

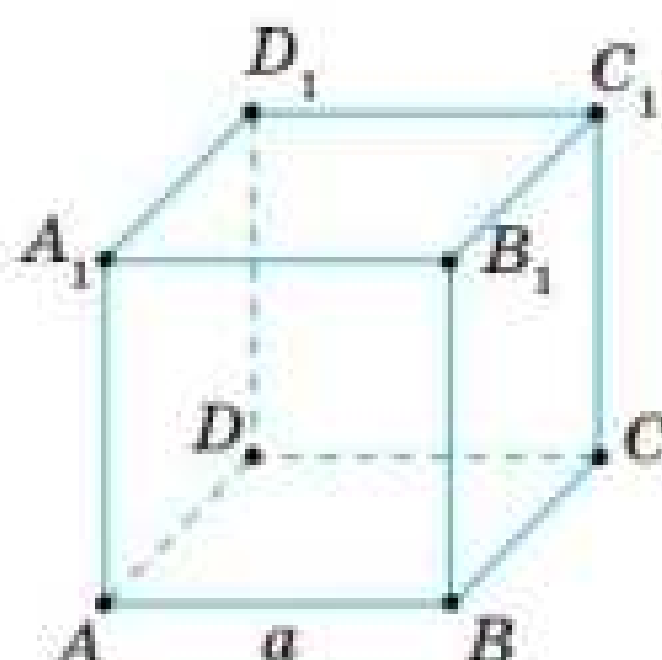
$$S_{\text{п.п.}} = 2(ab + bc + ac).$$

У куба з ребром a всі шість граней є рівними квадратами зі стороною a (мал. 483), тому площа його поверхні обчислюється за формулою:

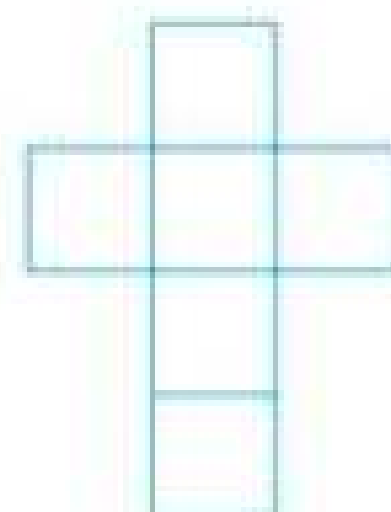
$$S_{\text{куба}} = 6a^2.$$



Мал. 482



Мал. 483



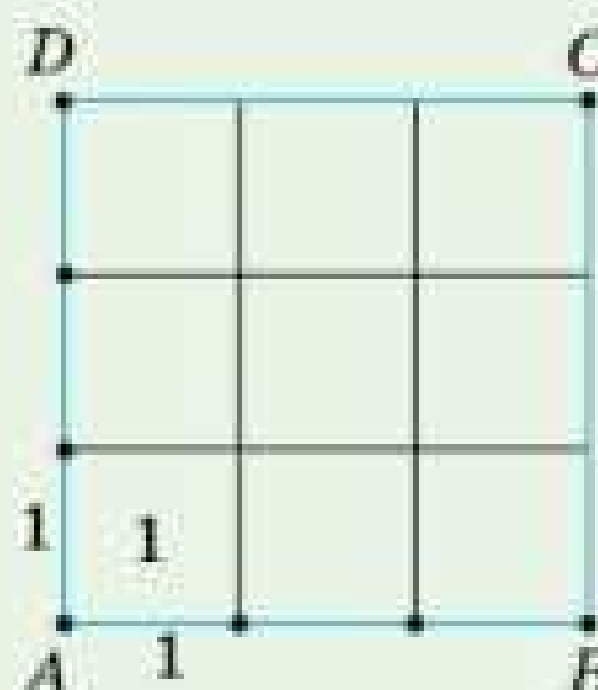
Щоб знайти площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, знайдіть площі усіх його граней і отримані значення додайте.

Дізнайтеся більше

1. У вас могло виникнути запитання: Як довести, що площа квадрата дорівнює квадрату його сторони?

Нехай сторона квадрата $ABCD$ дорівнює a . Можливі два випадки: сторону AB можна розбити на n одиничних відрізків, де n — натуральне число (мал. 484); на стороні AB можна розмістити n одиничних відрізків, але залишається остача — відрізок, коротший від одиничного відрізка (мал. 485).

Перший випадок (мал. 484). Розіб'ємо сторону AB на n одиничних відрізків (на малюнку їх 3), тоді $a = 1 \cdot n = n$. Так само розіб'ємо сторону AD . Через точки поділу проведемо прямі, перпендикулярні до AB і AD відповідно. Ці прямі розбивають квадрат $ABCD$ на $n \cdot n = n^2$ рівних квадратів площею 1. Тому $S_{ABCD} = 1 \cdot n^2 = 1 \cdot a^2 = a^2$.



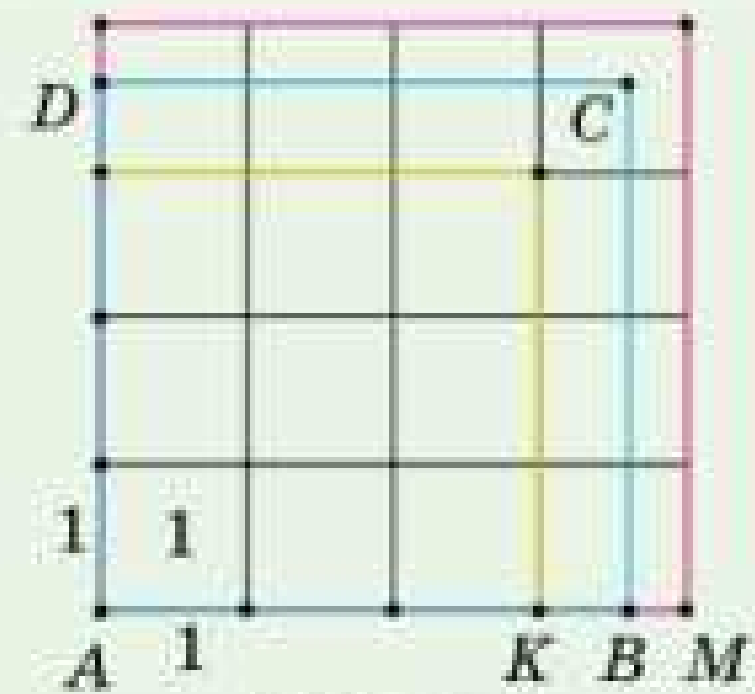
Мал. 484

Другий випадок (мал. 485). Нехай на відріжку AB уміщується n одиничних відрізків і залишається остача — відрізок меншої довжини, ніж 1. Це означає, що відрізок AK із n одиничних відрізків є меншим від відрізка AB , а відрізок AM із $n + 1$ одиничних відрізків — більшим за цей відрізок.

Одержали нерівність: $n < a < n + 1$.

Щоб точніше оцінити площу даного квадрата, поділимо одиничний відрізок на m рівних частин.

Тоді довжина кожної частини дорівнюватиме $\frac{1}{m}$.



Мал. 485

Нехай на відріжку AK їх уміститься $n + \frac{k}{m}$, а на відріжку AM — $n + \frac{k+1}{m}$.

Число a лежатиме в межах $n + \frac{k}{m} < a < n + \frac{k+1}{m}$, а квадрат цього числа —

у межах $\left(n + \frac{k}{m}\right)^2 < a^2 < \left(n + \frac{k+1}{m}\right)^2$.

Площа квадрата зі стороною AK дорівнюватиме $\left(n + \frac{k}{m}\right)^2$, а квадрата зі стороною AM — $\left(n + \frac{k+1}{m}\right)^2$.

Тому площа квадрата $ABCD$ лежатиме в межах $\left(n + \frac{k}{m}\right)^2 < S_{ABCD} < \left(n + \frac{k+1}{m}\right)^2$.

При збільшенні кількості точок поділу число m стане як завгодно великим. Площа квадрата $ABCD$ і квадрат числа a лежатимуть у межах, різниця між якими як завгодно мала:

$$\left(n + \frac{k+1}{m}\right)^2 - \left(n + \frac{k}{m}\right)^2 = 2\left(n + \frac{k}{m}\right) \cdot \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}.$$

А це можливо лише тоді, коли $S_{ABCD} = a^2$.

2. Символ S для позначення площі фігури походить від латинського слова *superficialis*, що означає «поверхня».

Словничок



Українська

Англійська/
English

Німецька/
Deutsch

Французька/
Français

площа

area

Flächeninhalt (m)

aire

qr.orioncentr.com.ua/1Oo5x

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке площа фігури. Які її властивості?
2. У яких одиницях вимірюють площу?

3. Що таке рівновеликі фігури? Рівноскладені фігури?
4. Як наближено виміряти площу фігури за допомогою палетки?
5. За якою формулою обчислюють площу квадрата? А прямокутника?
6. Як обчислити площу прямокутного трикутника?
7. Чому дорівнює відношення площ подібних прямокутних трикутників?
8. Як знайти площу поверхні прямокутного паралелепіпеда? А куба?

Усне тренування

Обчисліть:

$$(2 + 3)^2; \quad (4 + 6)^2; \quad (2 + 3)^2 : (4 + 6)^2; \quad (4 + 6)^2 : (2 + 3)^2.$$

Розв'яжіть задачі

1059'. Чи правильно, що площа — це: 1) фігура; 2) величина, що характеризує фігуру?

1060'. Чи правильно, що фігури на малюнках 486 і 487: 1) рівновеликі; 2) рівноскладені? Відповідь поясніть.

1061'. Чи правильно записано формулу площі квадрата зі стороною a :

- 1) $S = 2a$; 2) $S = a + 2$; 3) $S = a : 2$; 4) $S = a^2$?

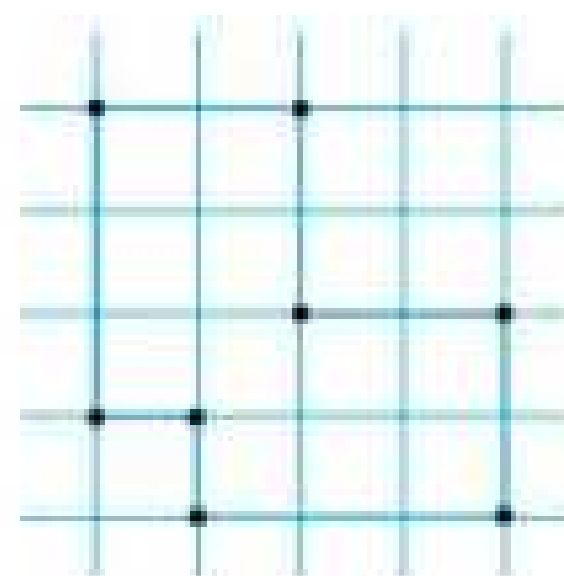
1062'. Чи правильно записано формулу площі прямокутника зі сторонами a і b :

- 1) $S = 2(a + b)$; 3) $S = a^2 b^2$;
2) $S = 2ab$; 4) $S = ab$?

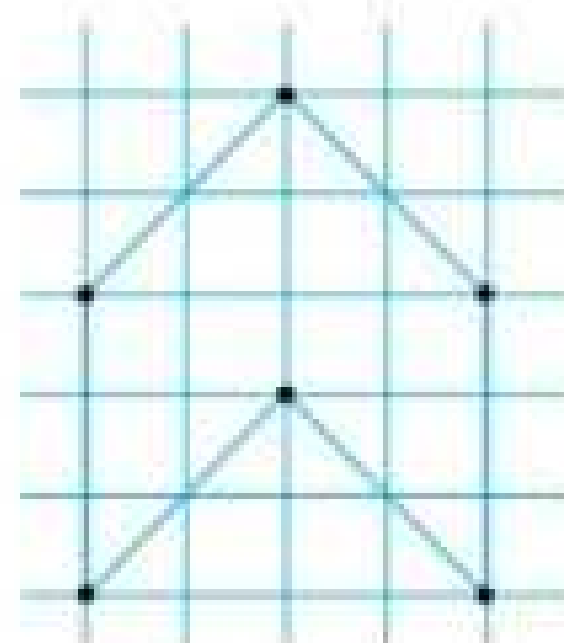
1063'. Чи правильно записано формулу площі прямокутного трикутника з катетами a і b :

- 1) $S = a + b$; 3) $S = \frac{1}{2} a^2 b^2$;
2) $S = ab$; 4) $S = \frac{1}{2} ab$?

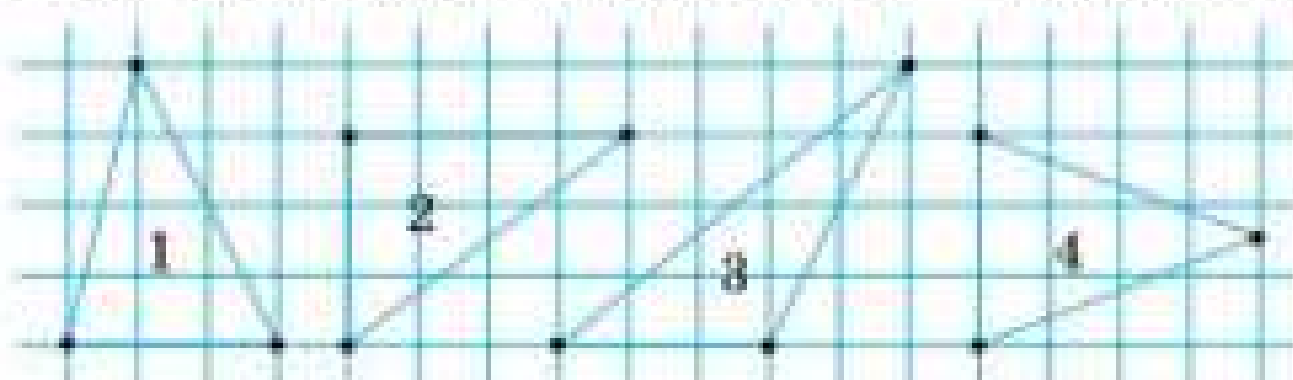
1064'. Знайдіть наближені значення площ фігур, зображених на малюнку: 1) 488; 2) 489 (одиниця площі — 1 клітинка).



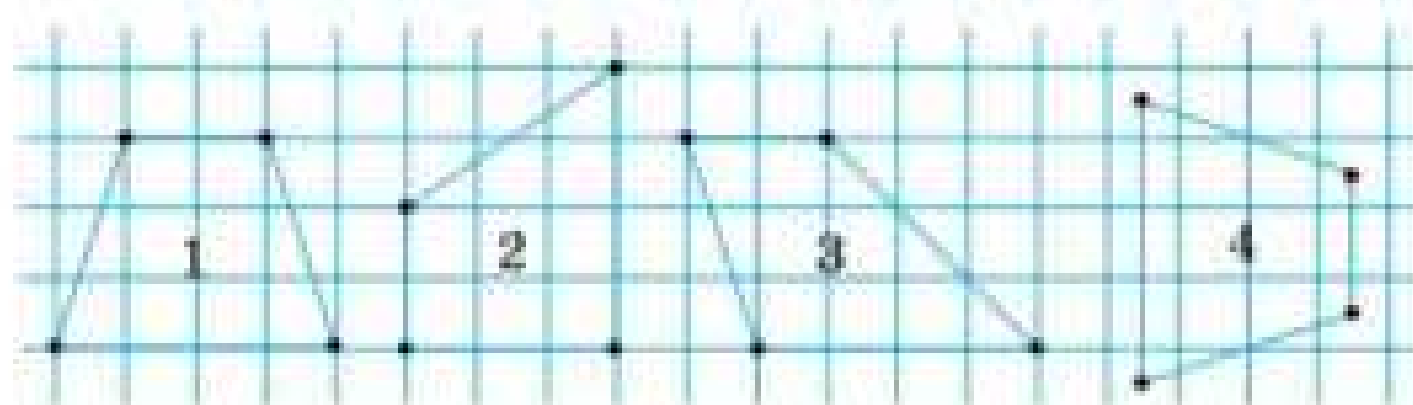
Мал. 486



Мал. 487



Мал. 488



Мал. 489

1065*. Знайдіть наближені значення площ фігур, зображених на малюнку 490 (одиниця площі — 1 клітинка).



1066*. Доведіть, що висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, ділить його на рівновеликі трикутники.

1067*. Доведіть, що діагональ прямокутника ділить його на рівновеликі трикутники.

1068*. Точку всередині трикутника сполучено відрізками з його вершинами. Знайдіть площу трикутника, якщо утворені частини мають площу 12 см^2 , 39 см^2 і 45 см^2 .

1069*. Точку всередині трикутника сполучено відрізками з його вершинами. Утворені частини трикутника мають площу 90 см^2 , 25 см^2 і 45 см^2 . Знайдіть площу трикутника.

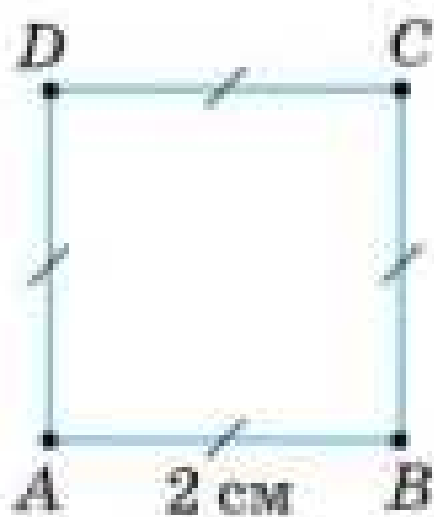
1070*. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює:
1) 16 см^2 ; 2) 9 см^2 ; 3) 121 см^2 .

1071*. Яка довжина сторони квадрата, площа якого дорівнює:

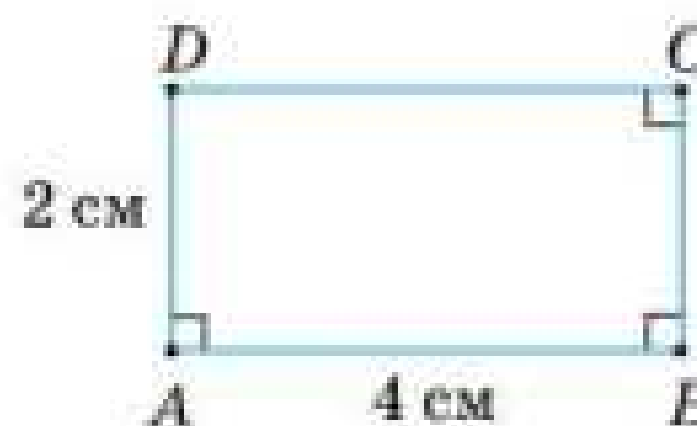


1) 25 см^2 ; 2) 49 см^2 ?

1072*. За даними на малюнках 491, 492 обчисліть площу прямокутника $ABCD$.



Мал. 491



Мал. 492

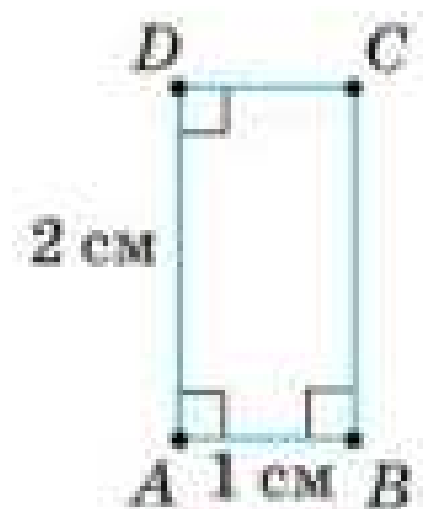
1073*. Яку площу має прямокутник $ABCD$ на малюнку 493?

1074*. Як зміниться площа прямокутника, якщо одну з його сторін:

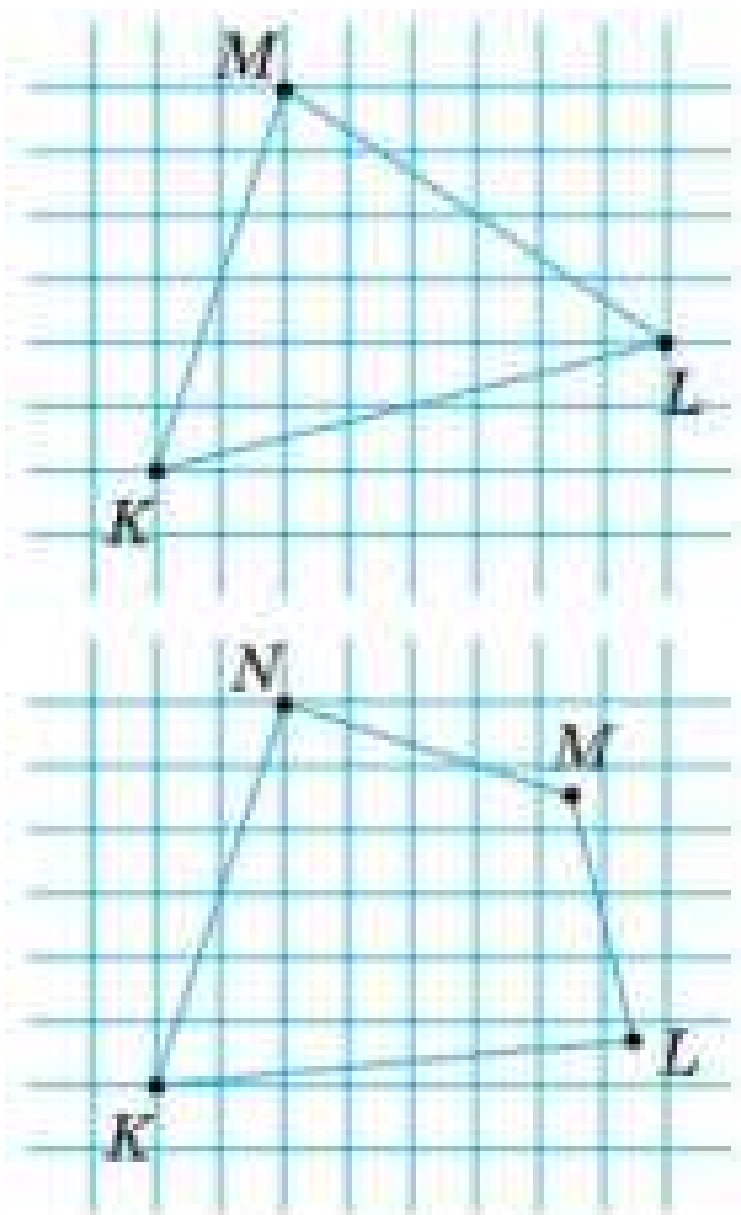
- 1) збільшити у 3 рази; 3) збільшити на 50 %?
- 2) зменшити в 4 рази;

1075*. Як зміниться площа прямокутника, якщо кожну з його сторін:

- 1) збільшити у 3 рази; 3) збільшити на 50 %?
- 2) зменшити в 4 рази;



Мал. 493



Мал. 490

- 1076*** Периметр прямокутника зі сторонами a і b дорівнює P , а його площа — S . Знайдіть невідомі величини за таблицею 37.



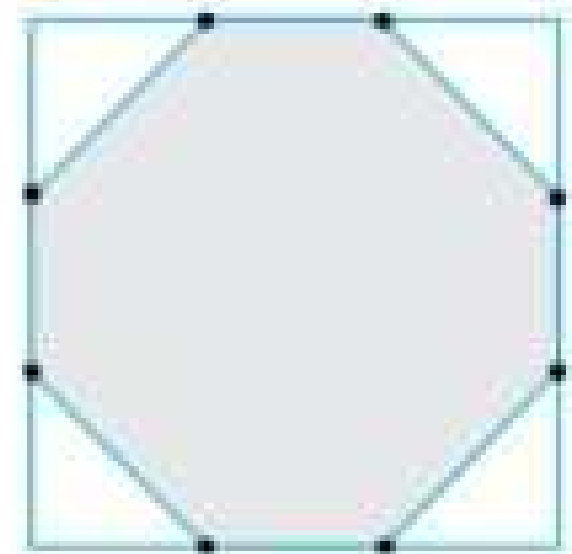
qr.orioncentr.com.ua/dyEo7

Таблиця 37

a	4 см			8 см
b		12 см	7 см	
P	11 см		21 см	
S		6 см ²		4 см ²

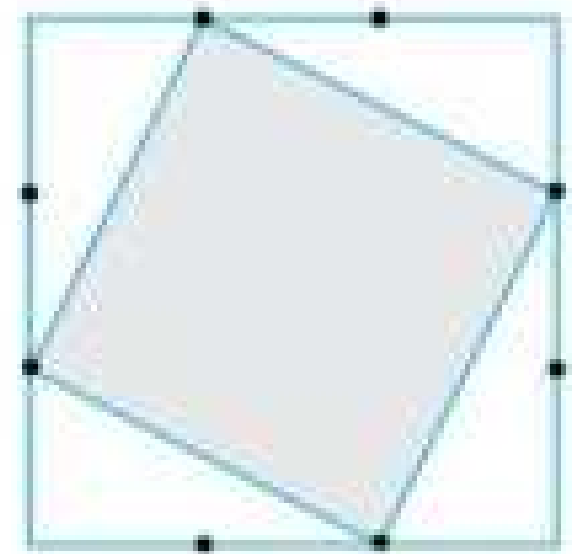
- 1077*** Прямокутники $ABCD$ і $MTOH$ мають рівні площі. У прямокутнику $ABCD$ сторони дорівнюють 10 см і 60 см. Знайдіть сторони прямокутника $MTOH$, якщо вони відносяться як:
1) 2 : 3; 2) 3 : 8; 3) 0,3 : 0,5.
- 1078*** Прямокутники $ABCD$ і $KLMN$ мають рівні площі. У прямокутнику $KLMN$ сторони дорівнюють 2 см і 9 см. Знайдіть сторони прямокутника $ABCD$, якщо вони відносяться як 1 : 2.
- 1079*** Чому дорівнює площа прямокутного трикутника з катетами:
1) 3 см і 5 см; 2) 2 см і 5 см; 3) 10 см і 4,5 см?
- 1080*** Яка площа прямокутного трикутника з катетами 4 см і 9 см?
- 1081*** Знайдіть площу прямокутного трикутника з гострим кутом 45° , якщо один з його катетів дорівнює: 1) 2 см; 2) 0,3 дм; 3) 0,05 м.
- 1082*** Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника, катет якого дорівнює 6 см.
- 1083*** Квадрат зі стороною a та прямокутник зі сторонами b і c мають рівні площі. Знайдіть периметр кожного чотирикутника, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 9$ см; 2) $a = 6$ см, $c = 2$ см.
Який із двох чотирикутників має менший периметр?
- 1084*** Квадрат зі стороною 10 см має таку саму площу, як і прямокутник, у якого одна зі сторін дорівнює 20 см. Знайдіть периметр кожного чотирикутника. Який із двох чотирикутників має менший периметр?
- 1085*** Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d , а сторони основи — a і b . Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 3$ см, $d = 13$ см;
2) $a = 8$ см, $b = 6$ см, $d = 15$ см.
- 1086*** Діагональ куба дорівнює d . Знайдіть площу його поверхні, якщо:
1) $d = 9$ см;
2) $d = 6$ см.

1087. Кожну сторону квадрата завдовжки a поділено на три рівні частини й одержані точки сполучено так, як показано на малюнку 494. Знайдіть площу зафарбованої фігури.



Мал. 494

1088. Кожну сторону квадрата завдовжки a поділено на три рівні частини й одержані точки сполучено так, як показано на малюнку 495. Знайдіть площу зафарбованої фігури.



Мал. 495

1089. Різниця периметрів двох квадратів дорівнює c , а різниця їхніх площ — d . Знайдіть площі квадратів, якщо:

1) $c = 16$ см, $d = 56$ см²; 2) $c = 12$ см, $d = 105$ см².

1090. Ширина прямокутної рамки дорівнює c , а її площа — S . Знайдіть периметри зовнішнього та внутрішнього контура рамки, якщо:

1) $c = 2$ см, $S = 96$ см²; 2) $c = 3$ см, $S = 564$ см².

1091. Площа прямокутника дорівнює S . Складіть вирази для знаходження сторін прямокутника, якщо сторони відносяться як $m : n$.

1092. Периметр прямокутника дорівнює P . Складіть вирази для знаходження сторін прямокутника, якщо сторони відносяться як $m : n$.

1093. Який геометричний зміст для $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ мають формули:

1) $(a + b)c = ac + bc$;

2) $(a - b)c = ac - bc$;

3) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$?

1094. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b . Точка O розміщена на відстані d від кожного катета. Знайдіть відстань від цієї точки до гіпотенузи, якщо:

1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $d = 1$ см;

2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $d = 2$ см.

1095*. Будь-які два рівноскладені многокутники є рівновеликими. Доведіть.

1096*. Точка M ділить відрізок AB навпіл, а точка N — на нерівні частини. Доведіть, що площа прямокутника зі сторонами AN і NB дорівнює різниці площ квадратів зі сторонами MB і MN .

1097*. У прямокутнику зі сторонами 4 см і 6 см проведено бісектриси кутів при його більшій стороні. Знайдіть площі частин, на які поділено прямокутник.

1098*. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 46° , а його площа — 545 см². Знайдіть сторони прямокутника.

- 1099*** Якщо точки A , B і C лежать на одній прямій, то виконується рівність $AB^2 + BC^2 = AC^2 - 2AB \cdot BC$. Чи правильне це твердження?
- 1100*** Доведіть, що площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку гіпотенузи та висоти, проведеної до гіпотенузи.
- 1101*** Доведіть, що площі трикутників, на які розбиває прямокутний трикутник висота, проведена до гіпотенузи, відносяться як проєкції катетів на гіпотенузу.

Проявіть компетентність

- 1102.** За картою України (див. QR-код) з'ясуйте: з яких частин складається площа України; яка частина має найменшу площу, найбільшу площу. Яку частину площі України становить площа області, у якій ви мешкаєте?
- 1103.** Побудуйте: 1) коло радіусом 2 см; 2) будь-який багатокутник. Із прозорої плівки виготовте палетку та визначте наближені значення площ зображених фігур.
- 1104.** Площа ділянки дорівнює 6 а. Чому дорівнює площа цієї ділянки у квадратних метрах; у гектарах?
- 1105.** Ділянка прямокутної форми на плані в масштабі 1 : 100 має сторони 10 см і 25 см. Яка площа цієї ділянки?
- 1106.** Прямокутний шматок лінолеуму має розмір 9×4 м. Чи вистачить його для покриття підлоги у двох кімнатах розмірами 2×8 м і 4×5 м?
- 1107.** Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість рулонів шпалер (без підгонки малюнка) необхідно придбати для ремонту кімнати у вас удома, якщо рулон має довжину 10,5 м і ширину 0,6 м.
- 1108.** Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість кахельної плитки розмірами 20×30 см необхідно придбати для ремонту ванної кімнати у вас удома.
- 1109.** Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість паркетних дощочок прямокутної форми розмірами 30×5 см необхідно придбати для настилання паркету в кімнаті у вас удома.
- 1110.** Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, яку кількість ламінату прямокутної форми розмірами $138 \times 19,5$ см необхідно придбати для його настилання в кімнаті у вас удома.



1111. Площу фігури можна визначити способом зважування (мал. 496). Для цього фігуру креслять на аркуші цупкого паперу або картону та вирізають за контуром. З того самого матеріалу вирізають квадрат певних розмірів. Потім порівнюють масу обох фігур. Поясніть, на чому ґрунтується такий спосіб.



Мал. 496

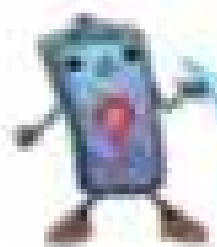
§ 20. ПЛОЩА ПАРАЛЕЛОГРАМА

1. Формула площі паралелограма

Ситуація. Іван і Марійка виготовляли шарнірний пристрій для проведення паралельних прямих. Прямокутну конструкцію вони стиснули так, що утворився паралелограм із тими самими сторонами, що й прямокутник.

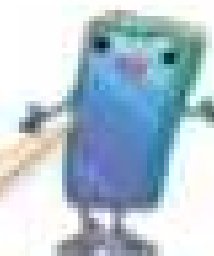


qr.orioncentr.com.ua/UMAcI



Чи рівні площі прямокутника й паралелограма?

Ні.



Щоб переконатися в цьому, виведемо формулу площі паралелограма.

Запам'ятайте!

Теорема (про площу паралелограма)

Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони:

$$S = ah_a$$

Дано: $ABCD$ — паралелограм (мал. 497), DH — висота, $AB = a$, $DH = h_a$.

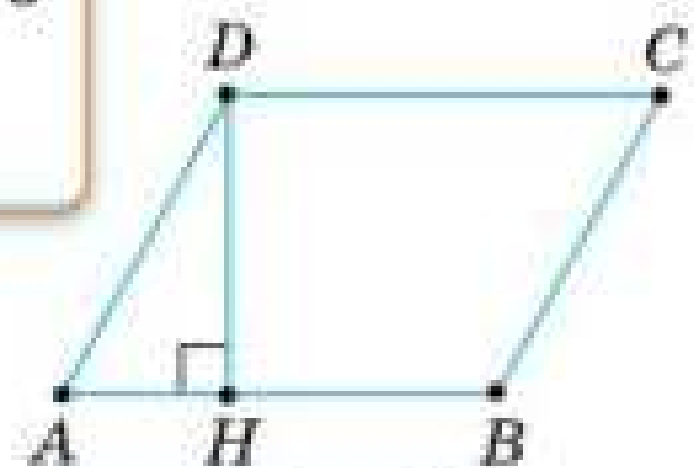
Довести: $S_{ABCD} = ah_a$.

Доведення. Проведемо з вершини C висоту $CM = DH = h_a$ (мал. 498). Одержали трапецію $AMCD$. Розглянемо дві пари фігур, які її складають:

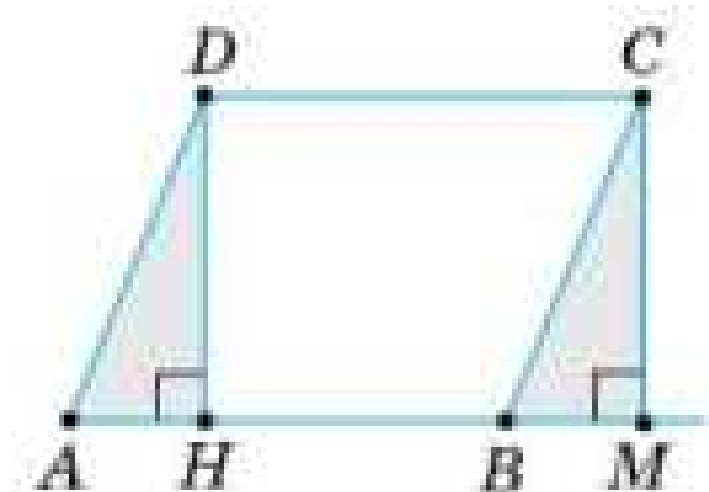
- 1) даний паралелограм $ABCD$ і $\triangle BMC$;
- 2) прямокутник $HMCD$ і $\triangle AHD$.

За властивостями площі одержуємо:

$$1) S_{AMCD} = S_{ABCD} + S_{\triangle BMC};$$



Мал. 497



Мал. 498

$$2) S_{AMCD} = S_{HMCD} + S_{\triangle AHD}.$$

$$\text{Тому } S_{ABCD} + S_{\triangle BMC} = S_{HMCD} + S_{\triangle AHD}.$$

Розглянемо $\triangle BMC$ і $\triangle AHD$.

У них: $CM = DH$ як висоти, проведені до однієї сторони AB паралелограма, $AD = BC$ як протилежні сторони паралелограма.

Отже, $\triangle BMC = \triangle AHD$ за катетом і гіпотенузою.

Тому, за властивостями площі, $S_{\triangle BMC} = S_{\triangle AHD}$.

Отже, $S_{ABCD} = S_{HMCD}$.

Для прямокутника $HMCD$ маємо:

$$S_{HMCD} = CD \cdot DH = AB \cdot DH = ah_a.$$

Оскільки, за доведеним, площа даного паралелограма $ABCD$ дорівнює площі прямокутника $HMCD$, то:

$$S_{ABCD} = ah_a.$$

Задача У паралелограмі сторони дорівнюють 8 см і 6,4 см, а висота, проведена до більшої сторони, — 6 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведenu до меншої його сторони.

Розв'язання Нехай $ABCD$ — даний паралелограм (мал. 499), у якому $AB = 6,4$ см, $BC = 8$ см, $DM = 6$ см.

Потрібно знайти висоту DH .

Площу паралелограма $ABCD$ можна виразити двома способами: як добуток сторони BC на висоту DM і як добуток сторони AB на висоту DH .

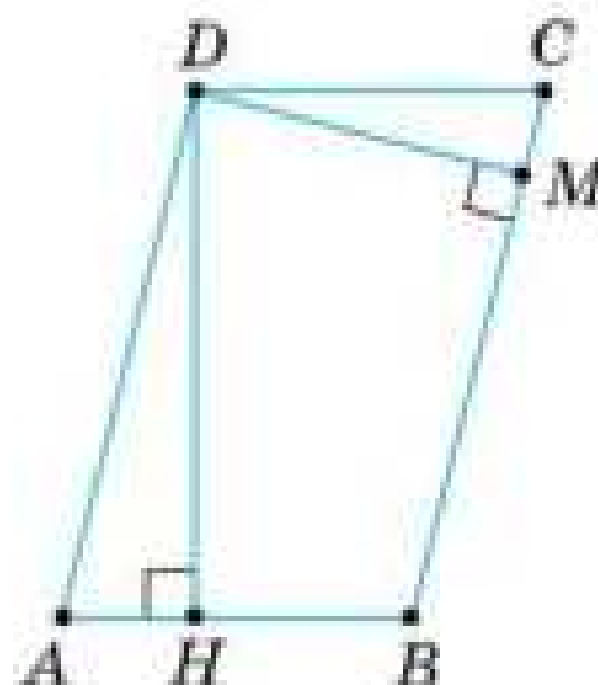
Звідси:

$$S_{ABCD} = BC \cdot DM = 8 \cdot 6 = 48 \text{ (см}^2\text{)}, (1)$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot DH. (2)$$

Із рівностей (1) і (2) одержуємо:

$$DH = S_{ABCD} : AB = 48 : 6,4 = 7,5 \text{ (см)}.$$



Мал. 499



Щоб знайти довжину невідомої сторони або висоти паралелограма:

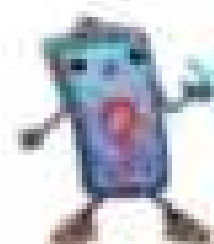
1) виразіть його площу двома способами:

- через одну із двох суміжних сторін паралелограма та висоту, проведenu до неї;
- через іншу суміжну сторону та відповідну їй висоту;

2) складіть і розв'яжіть рівняння відносно шуканої величини.

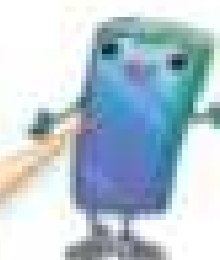
qr.orioncentr.com.ua/PH6Fg

2. Формули площі ромба



Чи можна знайти площу ромба за стороною та висотою, проведеною до неї?

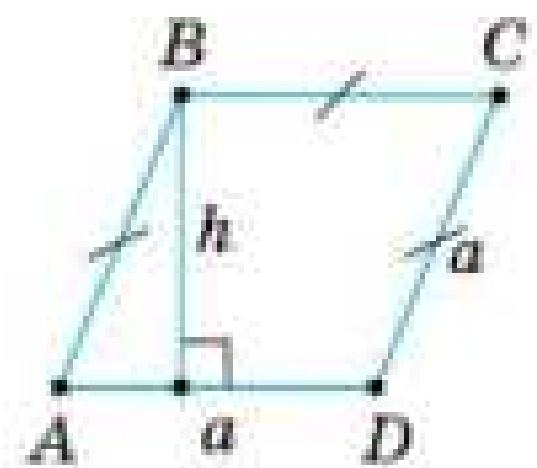
Так.



Справді, ромб (мал. 500) — окремий вид паралелограма, тому:

$$S = ah_a.$$

Ви знаєте, як знаходити площу прямокутного трикутника за його катетами. Скористаємося цим, щоб вивести ще одну формулу площі ромба.



Мал. 500

Запам'ятайте!

Теорема (про площу ромба за його діагоналями)

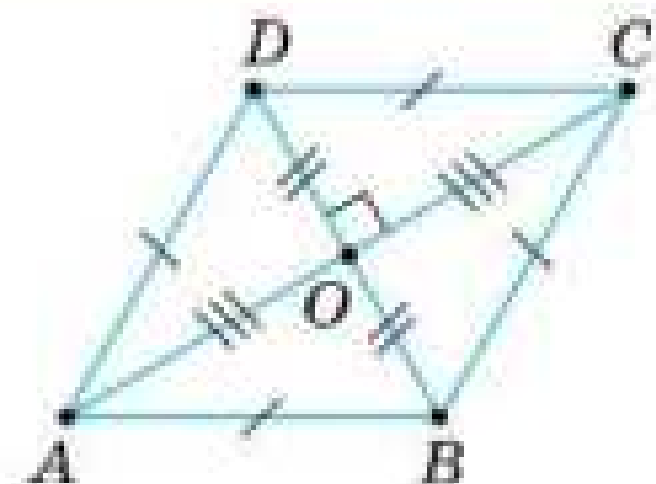
Площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

Дано: $ABCD$ — ромб (мал. 501), AC і BD — діагоналі, $AC = d_1$, $BD = d_2$.

Довести: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1d_2$.

Доведення. У ромбі $ABCD$ всі сторони рівні. Його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні й у точці перетину діляться навпіл. Тому вони розбивають ромб на чотири рівні прямокутні трикутники ABO , CBO , CDO і ADO з катетами $\frac{d_1}{2}$ і $\frac{d_2}{2}$.



Мал. 501

$$S_{ABO} = S_{ADO} = S_{CBO} = S_{CDO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1d_2}{8}.$$

Оскільки площа ромба дорівнює сумі площ цих трикутників, то

$$S_{ABCD} = 4S_{ABO} = 4 \cdot \frac{d_1d_2}{8} = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

Наслідок. Площа квадрата дорівнює половині квадрата його діагоналі.

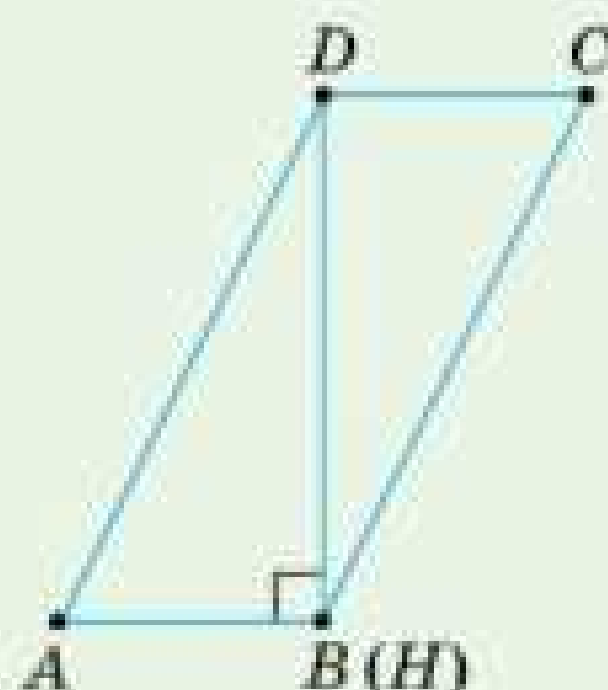
Твердження випливає з того, що квадрат є окремим видом ромба й має рівні діагоналі d . Отже, якщо d — діагональ квадрата, то $S = \frac{1}{2}d^2$.

Дізнайтеся більше

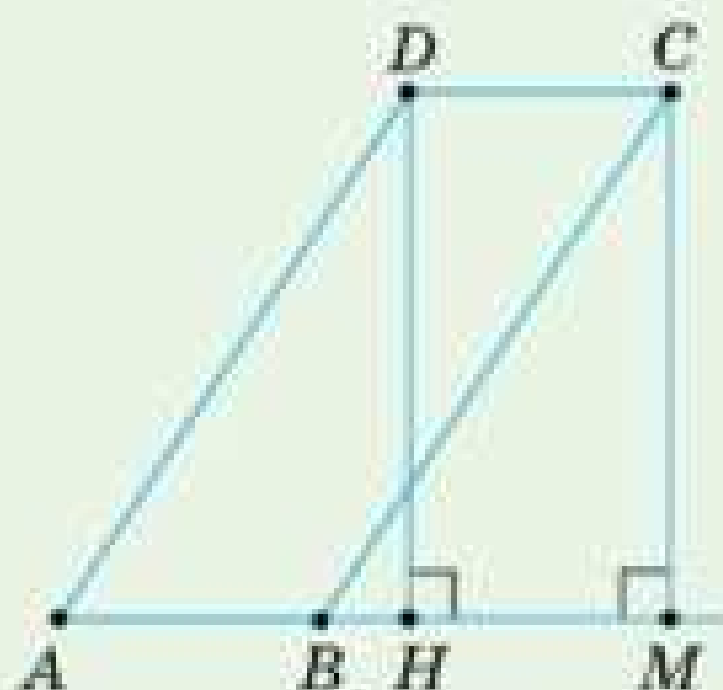
1. У вас могло виникнути запитання: Чи залежить формула площі паралелограма $ABCD$ від розміщення висоти DH (див. мал. 497)? Не залежить. У розміщенні точки H можливі три випадки. Один із них розглянуто в теоремі про площу паралелограма. Інші два випадки такі: точка H розміщується або у вершині B паралелограма (мал. 502), або на продовженні його сторони AB (мал. 503).

У другому випадку (мал. 502) паралелограм $ABCD$ складається з двох рівних прямокутних трикутників ABD і CDB , тому $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DH = ah_a$.

У третьому випадку (мал. 503) доведення аналогічне наведеному в підручнику. Проведіть його самостійно.



Мал. 502

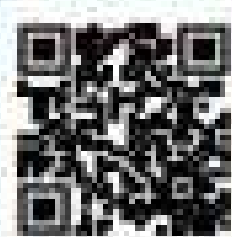


Мал. 503

2. Слєпкань Зінаїда Іванівна (1931–2008) — видатна вчена в галузі методики навчання математики в закладах загальної середньої і вищої освіти, перша жінка — доктор наук із цього фаху в Україні. З. І. Слєпкань була однією з розробників стандартів математичної освіти, автором підручників для учнів і студентів, посібників для вчителів.



Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
площа паралело- грама	area of the parallelo- gram	Flächeninhalt des Parallelo- gramms	aire du parallélogram

qr.orioncentr.com.ua/HilBu

Пригадайте головне

1. За якою формулою можна обчислити площу паралелограма?
2. Як вивести формулу площі паралелограма за стороною та висотою, проведеною до цієї сторони?
3. За якою формулою можна обчислити площу ромба, якщо відомі його діагоналі?
4. Виведіть формулу площі ромба за його діагоналями.
5. За якою формулою можна обчислити площу квадрата за його діагоналями?

Усне тренування

1. Чи є правильною рівність:

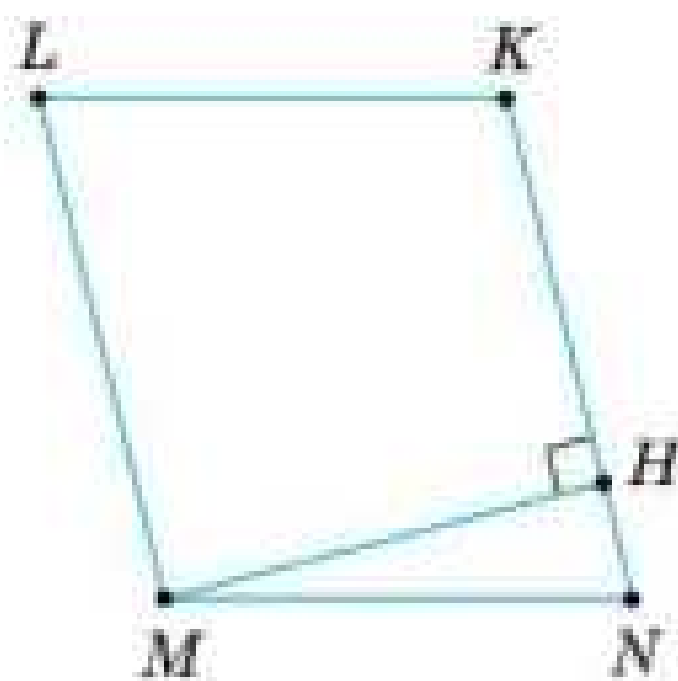
$$25 \cdot 8 = 20 \cdot 9; \quad 7 \cdot 9 = 21 \cdot 3; \quad 8 \cdot 12 = 16 \cdot 6; \quad 24 \cdot 5 = 6 \cdot 20?$$

2. Обчисліть:

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8; \quad \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12; \quad \frac{1}{2} \cdot 12^2; \quad \frac{1}{2} \cdot 15^2.$$

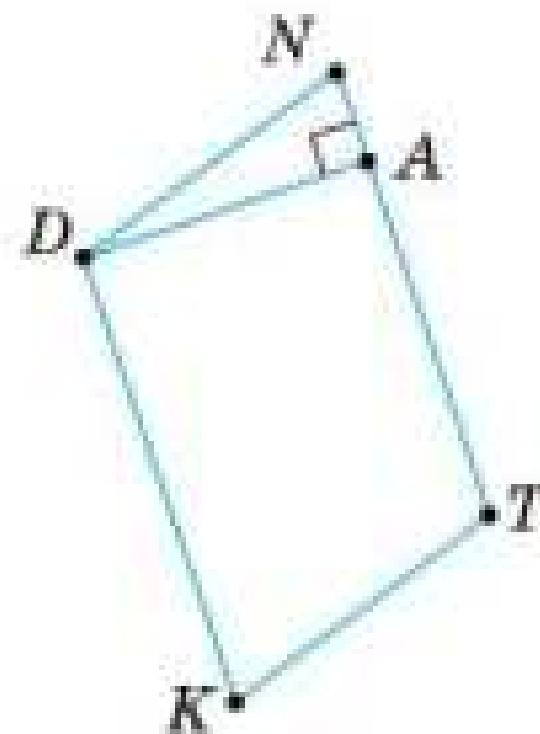
Розв'яжіть задачі

1112'. За даними на малюнках 504, 505 з'ясуйте, чи є правильною наведена рівність для обчислення площі паралелограма. Відповідь поясніть.



$$S = MN \cdot MH$$

Мал. 504



$$S = DA \cdot NT$$

Мал. 505

1113'. Чи є правильною формула площі ромба за його діагоналями d_1 і d_2 :

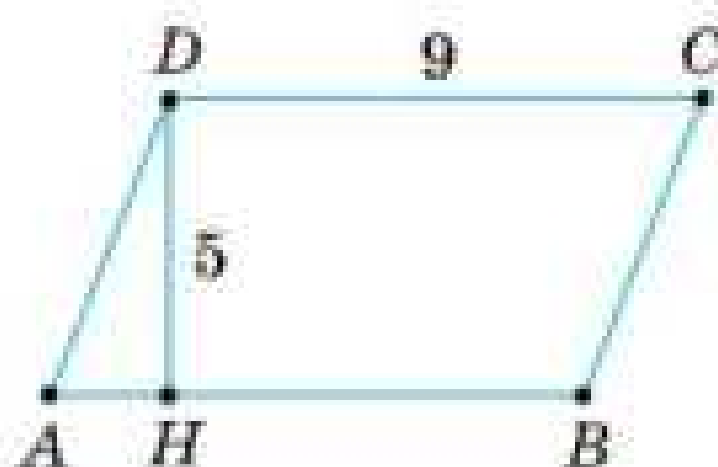
$$1) S = d_1 + d_2; \quad 2) S = d_1 d_2; \quad 3) S = 2d_1 d_2; \quad 4) S = \frac{1}{2} d_1 d_2?$$

1114'. Чи є правильною формула площі квадрата за його діагоналлю d :

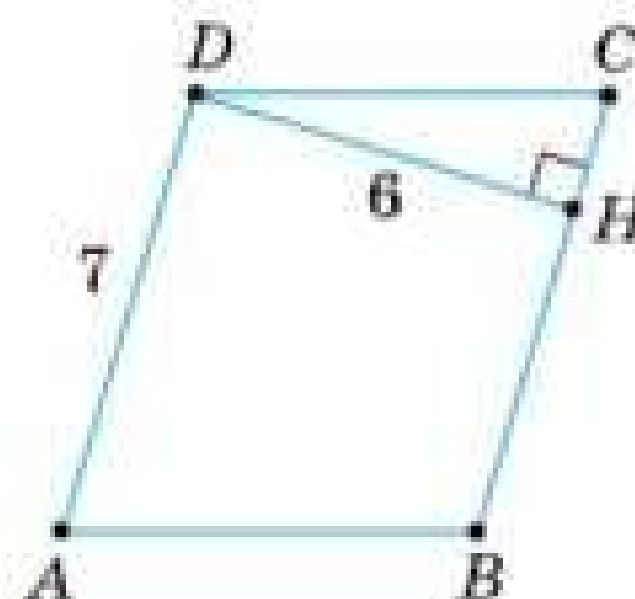
$$1) S = 2d; \quad 3) S = 2d^2; \\ 2) S = d^2; \quad 4) S = \frac{1}{2} d^2?$$

1115'. За даними на малюнку 506 знайдіть площу паралелограма $ABCD$.

1116'. За даними на малюнку 507 знайдіть площу паралелограма $ABCD$.



Мал. 506



Мал. 507

1117* У паралелограмі $ABCD$ проведено висоту BH до сторони CD . Знайдіть площу паралелограма, якщо:



- 1) $CD = 60$ см, $BH = 50$ см;
- 2) $CD = 25$ см, $BH = 40$ см.



qr.orioncentr.com.ua/uGiHc

1118* У паралелограмі $ABCD$ проведено висоту CM до сторони AB . Знайдіть площу паралелограма, якщо $AB = 25$ см, $CM = 100$ см.



1119* До сторони a паралелограма проведено висоту h_a . Знайдіть його площу, якщо: 1) $a = 10$ см, $h_a = 0,8a$; 2) $a = 2$ дм, $h_a = 0,75a$.

1120* Знайдіть площу паралелограма, у якому проведено висоту $h_b = 5$ см до сторони $b = 1,2h_b$.

1121* Площа паралелограма дорівнює S , а одна з його сторін — a . Знайдіть висоту, проведену до цієї сторони, якщо:

- 1) $S = 60$ см², $a = 15$ см;
- 2) $S = 175$ см², $a = 35$ см;
- 3) $S = 75$ см², $a = 25$ см;
- 4) $S = 96$ см², $a = 12$ см.

1122* Площа паралелограма дорівнює 180 см², а одна з його сторін — 15 см. Знайдіть висоту, проведену до цієї сторони.



1123* Знайдіть висоти паралелограма зі сторонами a і b та площею S за таблицею 38.

Таблиця 38

a	5 см	8,5 см	14 см	16 см
b	10 см	17 см	21 см	10 см
S	41 см ²	34 см ²	63 см ²	64 см ²
h_a				
h_b				

1124* Площа паралелограма дорівнює S . Знайдіть відстань між його сторонами, що мають довжину n , якщо:

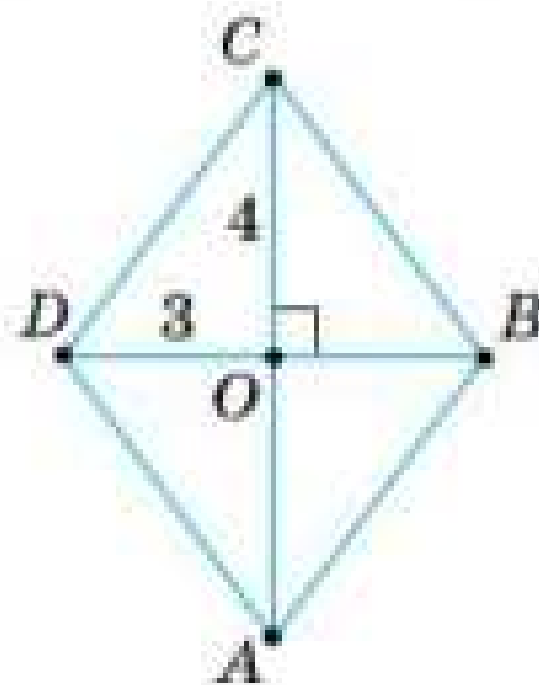
- 1) $S = 56$ см², $n = 7$ см;
- 2) $S = 90$ см², $n = 18$ см.

1125* Площа паралелограма дорівнює 24 см². Знайдіть відстань між його сторонами завдовжки 6 см.

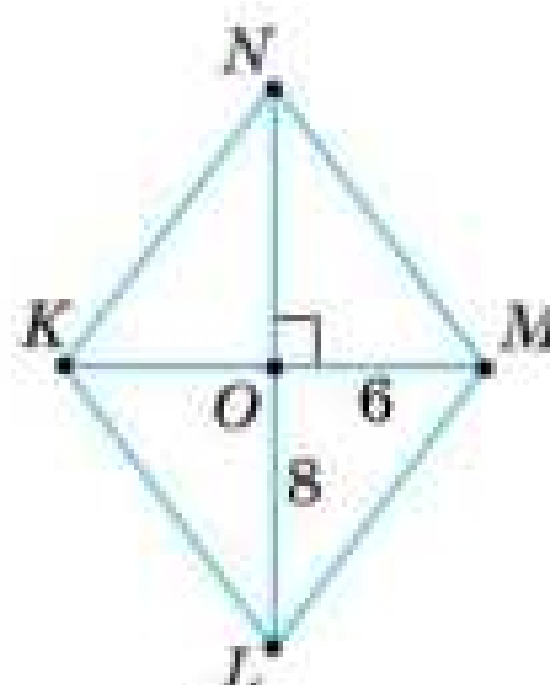
1126* Сторони паралелограма дорівнюють a і b , а висота, проведена до сторони a , дорівнює h_a . Знайдіть висоту, проведену до сторони b , якщо:

- 1) $a = 6$ см, $b = 3,6$ см, $h_a = 2,4$ см;
- 2) $a = 18$ мм, $b = 9$ мм, $h_a = 6$ мм.

- 1127***. Сторони паралелограма дорівнюють 30 см і 50 см, а висота, яку  проведено до меншої сторони, дорівнює 25 см. Знайдіть висоту, проведenu до більшої сторони.
- 1128***. Доведіть, що діагоналі паралелограма розбивають його на чотири трикутники з рівними площами.
- 1129***. Через точку перетину діагоналей паралелограма проведено довільну пряму. Чи рівні площі частин, на які вона ділить паралелограм?
- 1130***. Чому дорівнює площа ромба $ABCD$ на малюнку 508?
- 1131***. Чому дорівнює площа ромба $KLMN$ на малюнку 509?



Мал. 508



Мал. 509

- 1132***. Знайдіть площу ромба, якщо його  діагоналі дорівнюють:
1) 12 см і 16 см; 2) 1,6 дм і 3 дм.

- 1133***. Знайдіть площу ромба, якщо його  діагоналі дорівнюють 40 мм і 42 мм.



qr.orioncentr.com.ua/hT8YN

- 1134***. Доведіть, що діагоналі ромба розбивають його на чотири прямокутні трикутники з рівними площами.
- 1135***. У ромбі $KLMN$ діагоналі перетинаються в точці O . Знайдіть площу ромба, якщо площа прямокутного трикутника KOL дорівнює:
1) 25 см^2 ; 2) 30 см^2 .
- 1136***. У ромбі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O . Площа прямокутного трикутника AOB дорівнює 18 см^2 . Знайдіть площу ромба. 
- 1137***. Знайдіть площу квадрата $ABCD$, якщо його діагональ AC дорівнює:
1) 4 см; 2) 0,3 дм.
- 1138***. Знайдіть площу квадрата $KLMN$, якщо його діагональ KM дорівнює 1,2 м. 

- 1139***. Висота паралелограма, проведена до більшої сторони, утворює з меншою стороною кут 30° . Знайдіть площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють: 1) 10 мм і 15 мм; 2) 20 мм і 25 мм.

1140. Паралелограм має гострий кут 30° . Знайдіть площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють:



1) 15 см і 10 см; 2) 25 см і 20 см.

1141. Дві смуги завширшки m і n , перетинаючись, утворюють паралелограм із площею S . Знайдіть сторони паралелограма, якщо:

1) $m = 9$ см, $n = 24$ см, $S = 72$ см²; 2) $m = 4$ дм, $n = 1$ дм, $S = 6$ дм².

1142. Площа паралелограма дорівнює S . Відстані від точки перетину його діагоналей до сторін відповідно дорівнюють m і n . Знайдіть периметр паралелограма, якщо:

1) $S = 56$ см², $m = 4$ см, $n = 3,5$ см; 2) $S = 36$ см², $m = 2$ см, $n = 3$ см.

1143. У паралелограмі з периметром P точка перетину діагоналей віддалена від його сторін на відстань m і n . Знайдіть площу паралелограма, якщо:

1) $P = 64$ см, $m = n = 4$ см;

2) $P = 63$ см, $m = 4$ см, $n = 5$ см.

1144. Через довільну точку діагоналі паралелограма проведено дві прямі, паралельні його сторонам. Доведіть, що утворені чотирикутники, які лежать по різні боки від діагоналі, мають рівні площі.

1145. Знайдіть площу ромба з тупим кутом 150° , якщо його сторона дорівнює: 1) 1 дм; 2) 2,6 см.

1146. Площа ромба дорівнює 36 см². Знайдіть його діагоналі, якщо вони відносяться як: 1) 3 : 4; 2) 2 : 3; 3) 1 : 1.

1147. Площа ромба удвічі менша від площі квадрата із таким самим периметром. Знайдіть гострий кут ромба.



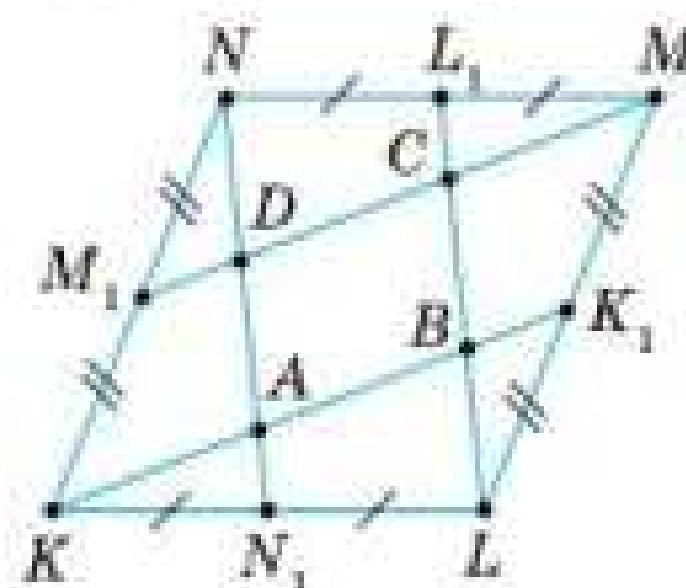
1148. Два квадрати мають діагоналі відповідно 5 см і 3 см. Яка довжина діагоналі квадрата, площа якого дорівнює різниці площ даних квадратів?

1149. У скільки разів площа квадрата, вписаного в коло, менша від площі квадрата, описаного навколо цього кола?

1150*. Висоти паралелограма відносяться як 2 : 3, його периметр дорівнює 40 см, а гострий кут — 30° . Знайдіть площу паралелограма.

1151*. Кут між висотами ромба дорівнює 60° . Доведіть, що площа ромба удвічі більша за площу трикутника, побудованого на даних висотах ромба.

1152*. За даними на малюнку 510 доведіть, що площа паралелограма $ABCD$ дорівнює 0,2 площі чотирикутника $KLMN$.



Мал. 510

- 1153***. Довільну точку M всередині паралелограма $ABCD$ сполучено відрізками з його вершинами. Доведіть, що сума площ трикутників AMD і BMC дорівнює сумі площ трикутників AMB і CMD .
- 1154***. У паралелограмі діагональ перпендикулярна до сторони. За яких умов площа даного паралелограма дорівнюватиме квадрату цієї діагоналі?
- 1155***. Радіус кола, вписаного в ромб, ділить його сторону на відрізки завдовжки m і n . Знайдіть площу ромба, якщо:
1) $m = 1,8$ см, $n = 3,2$ см; 2) $m = 4$ см, $n = 9$ см.
- 1156***. Знайдіть геометричне місце вершин паралелограмів зі спільною стороною, у яких площа дорівнює площі даного паралелограма.
- 1157***. На кожній стороні паралелограма взято по точці. Площа чотирикутника з вершинами в цих точках дорівнює половині площі паралелограма. Доведіть, що хоча б одна з діагоналей чотирикутника паралельна стороні паралелограма.

Проявіть компетентність

- 1158.** Поле має форму паралелограма зі стороною 250 м і висотою, проведеною до цієї сторони, завдовжки 100 м. Через поле проходить путівець завширшки 5 м, який перетинає край поля завдовжки 250 м і перпендикулярний до них. Яку площу поля можна засіяти?
- 1159.** Ділянку, що має форму паралелограма, потрібно поділити на 3 частини однакової площі. Як провести межі?
- 1160.** Проведіть необхідні вимірювання та розрахуйте, скільки кахельної плитки розміром 33×33 см потрібно придбати, щоб замостити підлогу коридору у вашому домі у спосіб «за діагоналлю», коли край плитки не паралельні стінам.



§ 21. ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

1. Формула площі трикутника

Ситуація. Учні й учениці 8-А класу знаходили площу трикутника ABC за даними на малюнку 511. Денис зазначив, що площу трикутника ABC можна знайти за частинами — обчислити площі прямокутних трикутників ABH і CBH за їхніми катетами, а потім додати ці площі:



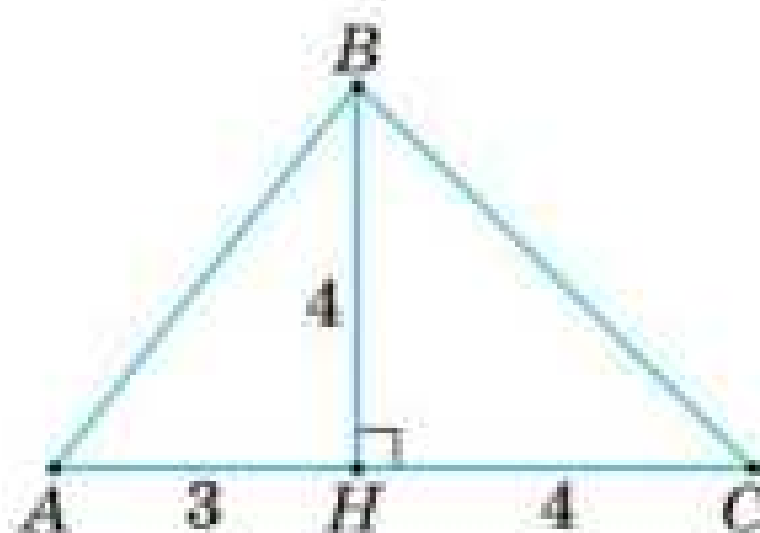
qr.orioncentr.com.ua/w1cka

$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6, S_{\triangle BHC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8,$$

$$S_{\triangle ABC} = 6 + 8 = 14.$$

Наталка помітила, що площу $\triangle ABC$ можна знайти інакше, якщо одразу помножити $\frac{1}{2}$ на всю сторону AC та висоту BH . Такий висновок вона отримала, спростивши вираз для знаходження площі трикутника ABC за його частинами:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot (3 + 4) \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14.$$



Мал. 511

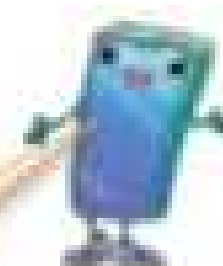


Щоб знайти площу фігури, можна скористатися способом **розбиття** її на частини, площі яких можна знайти.



Чи завжди можна знайти площу трикутника за стороною і висотою, проведеною до неї?

Так.

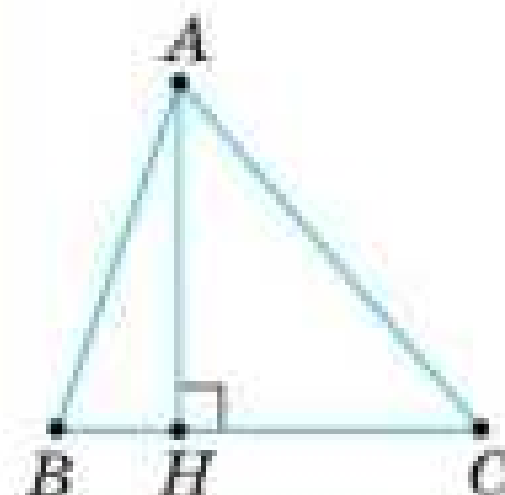


Запам'ятайте!

Теорема (про площу трикутника)

Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a h_a.$$



Мал. 512

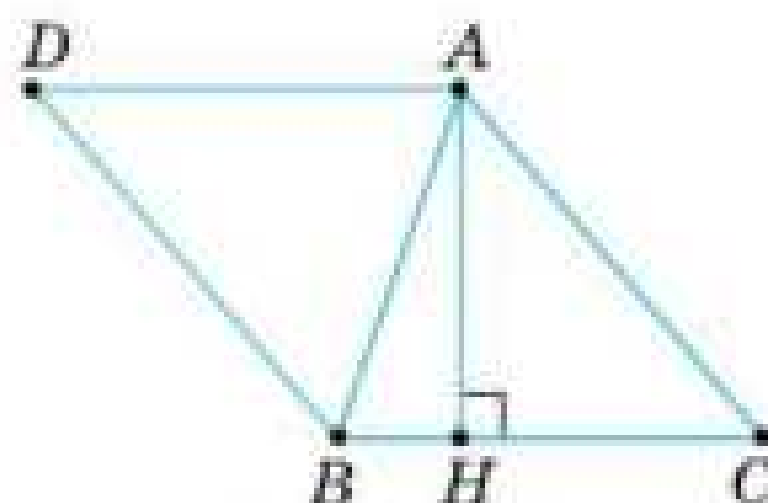
Дано: $\triangle ABC$ (мал. 512), AH — висота, $BC = a$, $AH = h_a$.

Довести: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a h_a$.

Доведення. На стороні AB даного трикутника ABC побудуємо рівний йому трикутник BAD (мал. 513). Утворений чотирикутник $ADBC$ — паралелограм, оскільки, за побудовою, $AD = BC$, $BD = AC$. У ньому сторона $BC = a$, висота $AH = h_a$, тому $S_{ADBC} = a h_a$. Оскільки паралелограм складений із двох рівних трикутників ABC і BAD , то площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма $ADBC$.

Звідси одержуємо:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{ADBC} = \frac{1}{2} a h_a.$$



Мал. 513



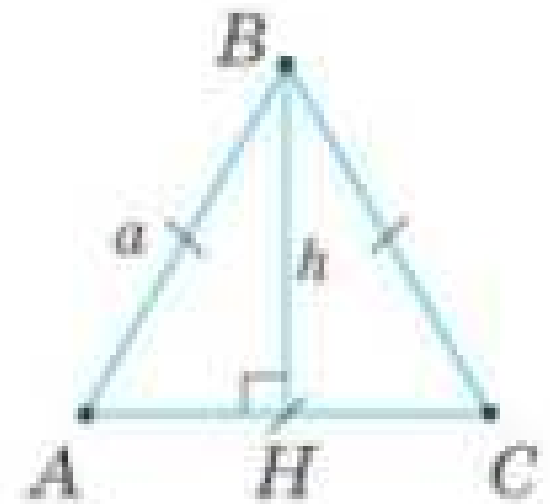
Щоб знайти площу фігури, можна скористатися способом **доповнення** її до такої фігури, формула площі якої відома. Для трикутника такою допоміжною фігурою є паралелограм.



qr.orioncentr.com.ua/qFIV5

Задача Виведіть формулу площі рівностороннього трикутника.

Розв'язання Нехай ABC — даний трикутник зі стороною a (мал. 514). Оскільки трикутник є рівностороннім, то всі його висоти — рівні. Проведемо висоту h до сторони AC . Утворилися рівні прямокутні трикутники ABH і CBH .



Мал. 514

Розглянемо $\triangle ABH$. У ньому $AB = a$, $AH = \frac{a}{2}$.

За теоремою Піфагора знаходимо висоту:

$$BH = h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Тоді, за формулою площі трикутника, маємо:

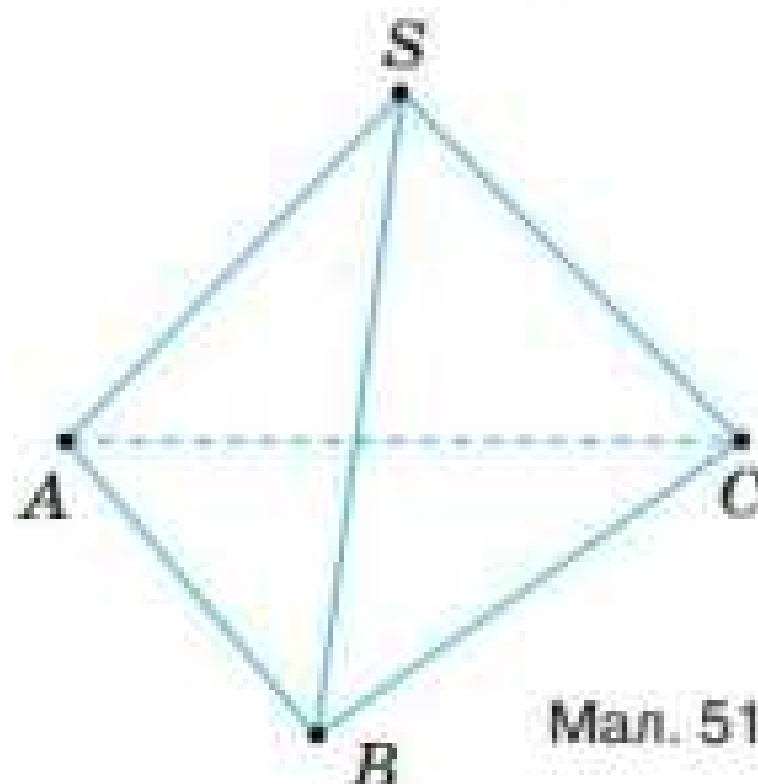
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Запам'ятайте!

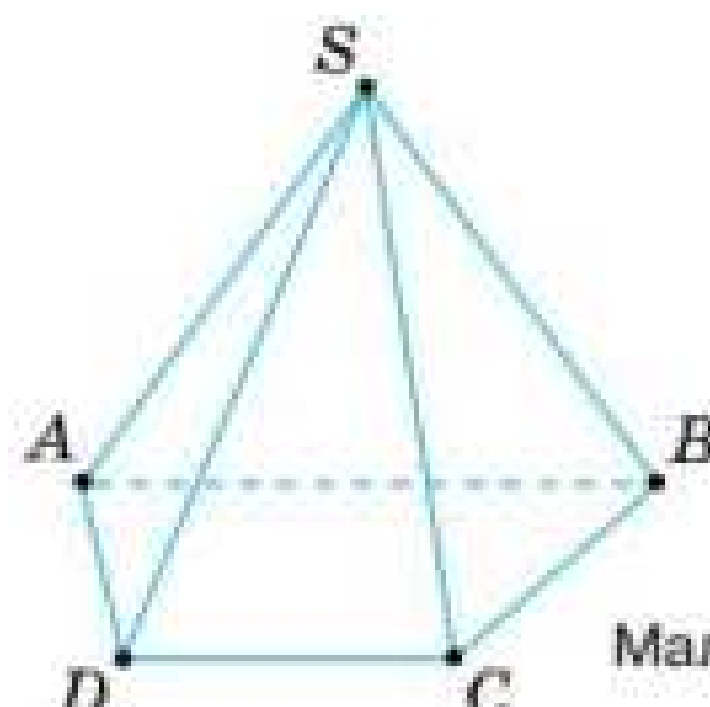
Формула площі рівностороннього трикутника: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

2. Площа поверхні піраміди

Розрізняють бічну і повну поверхні піраміди. Бічну поверхню утворюють лише бічні грані піраміди — трикутники, а повну поверхню — усі її грані. Якщо піраміда трикутна, то її основа — трикутник (мал. 515), а якщо піраміда чотирикутна, то її основа — чотирикутник (мал. 516).



Мал. 515



Мал. 516

Щоб знайти площу:

- **бічної** поверхні піраміди, знайдіть площі усіх її **бічних граней** і отримані значення додайте;
- **повної** поверхні піраміди, знайдіть площі **усіх** її **граней** і отримані значення додайте.

Дізнайтеся більше

1. Способи обчислення площі трикутника (а також прямокутника і трапеції) були відомі ще в Стародавньому Єгипті. Відомості про це дійшли до нас у папірусах. Найбільш відомі з них — папірус Рінда (близько 1800 р. до н. е.), який містить 84 задачі з розв'язаннями (сторінку з нього ви бачите на мал. 517), і так званий московський папірус (близько 1600 р. до н. е.), який містить 25 задач із розв'язаннями. Щоб знайти площу трикутника, стародавні єгиптяни основу трикутника ділили навпіл і множили на висоту.



Мал. 517



Мал. 518

2. Геометричні розрахунки за точними формулами проводились і в Стародавньому Вавилоні. Відомості збереглися на клинописних табличках (мал. 518). Тексти, які дійшли до нас, свідчать, що вавилоняни знали й використовували у практичних задачах пропорційність паралельних відрізків. Наприклад, вони вміли знаходити довжину відрізків MN , CM і BM (мал. 519) у трикутнику ABC за його стороною $AC = 30$, різницею $S_1 - S_2 = 42$ площ трапеції і трикутника, на які даний трикутник розбивається паралельною прямою MN , та різницею $BM - CM = 20$. Зараз для розв'язування цієї задачі нам довелося би скласти систему рівнянь.



Мал. 519

Словничок



Українська

Англійська/
English

Німецька/
Deutsch

Французька/
Français

площа
трикутника

area of
the triangle

Flächeninhalt
des Dreiecks

aire du
triangle

qr.orioncentr.com.ua/CqTvL

Пригадайте головне

1. За якими формулами можна обчислити площу трикутника?
2. Виведіть формулу площі трикутника за стороною та висотою, проведеною до цієї сторони.
3. Поясніть, як знайти площу бічної і повної поверхонь піраміди.

Усне тренування

1. Обчисліть:

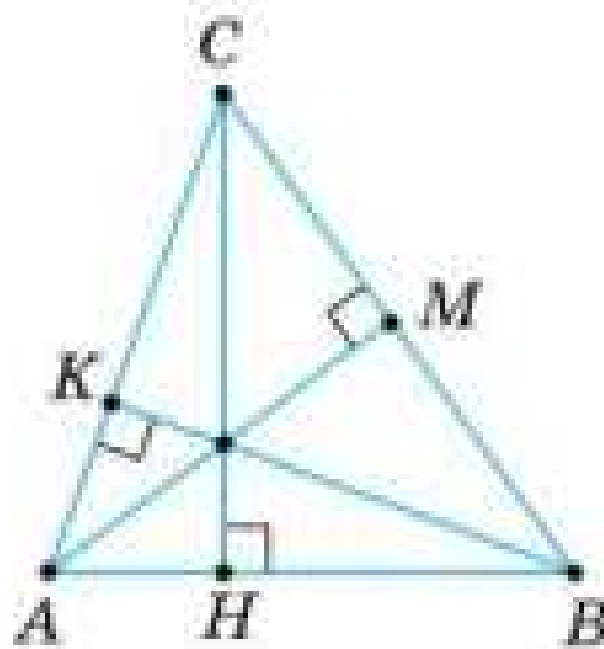
$$\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40; \quad \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 12; \quad \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 8; \quad \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3.$$

2. Знайдіть x із рівності:

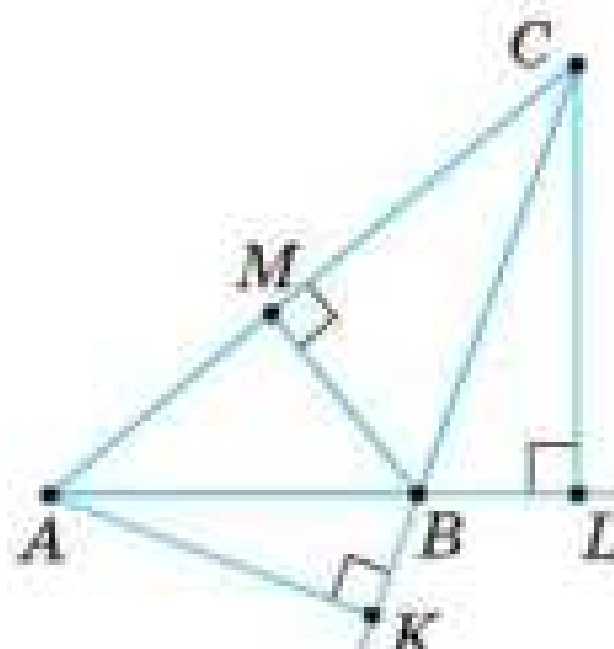
$$x \cdot 8 = 20 \cdot 10; \quad 7 \cdot x = 21 \cdot 3; \quad 8 \cdot 12 = x \cdot 6; \quad 24 \cdot 5 = 10 \cdot x.$$

Розв'яжіть задачі

- 1161'.** За даними на малюнках 520–522 назвіть сторони трикутника ABC та проведені до них висоти.



Мал. 520



Мал. 521



Мал. 522

- 1162'.** Чи є правильною рівність для обчислення площі трикутника:

1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AM$ (мал. 520);

4) $S_{\triangle ABC} = AB \cdot CL$ (мал. 521);

2) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK$ (мал. 520);

5) $S_{\triangle ABC} = AB \cdot AC$ (мал. 522);

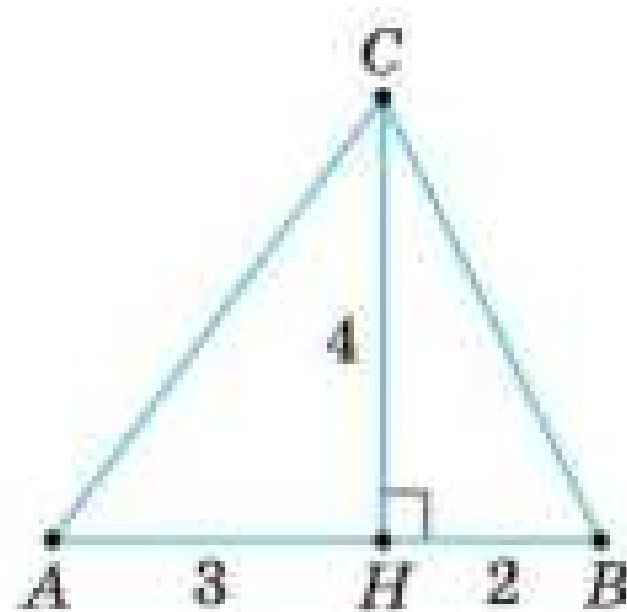
3) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BM \cdot AK$ (мал. 521);

6) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC$ (мал. 522)?

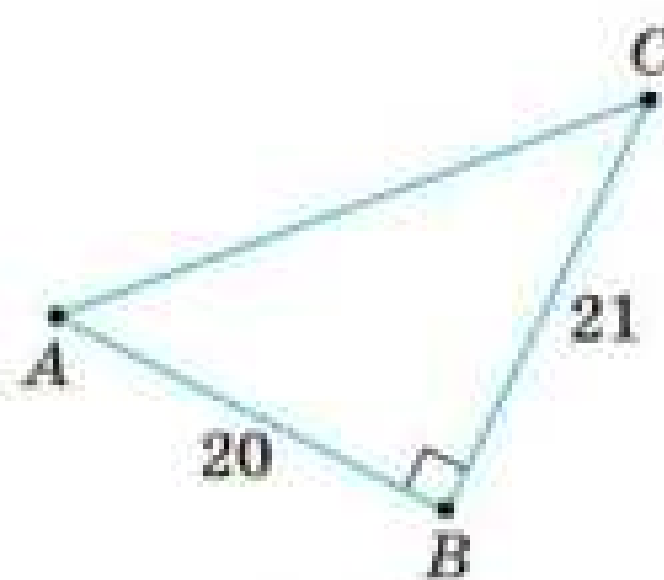
Відповідь поясніть.

- 1163'.** За даними на малюнках 523, 524 знайдіть площу трикутника ABC .

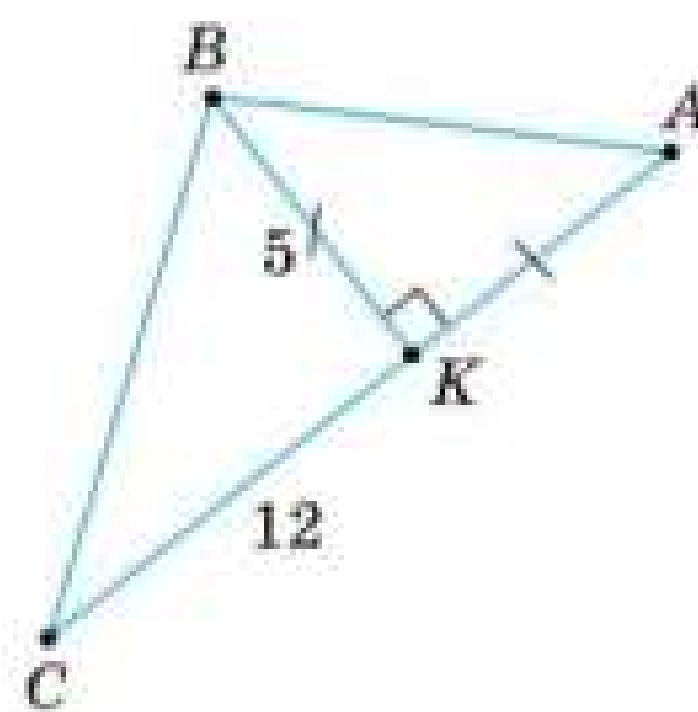
- 1164'.** За даними на малюнку 525 знайдіть площу трикутника ABC .



Мал. 523



Мал. 524



Мал. 525

1165*. У трикутнику ABC проведено висоту BH (мал. 526). Знайдіть площу трикутника, якщо:



- 1) $AC = 6$ см, $BH = 5$ см;
- 2) $AC = 25$ см, $BH = 100$ см.

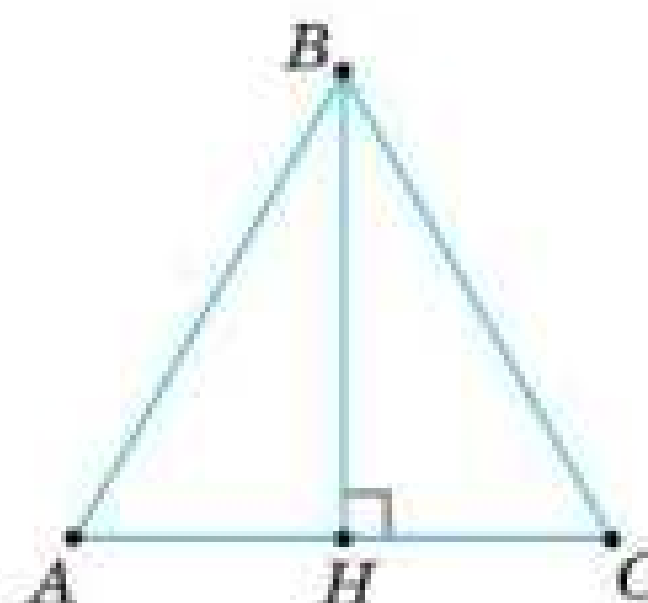
1166*. У трикутнику ABC проведено висоту BH завдовжки 4 дм. Знайдіть площу трикутника, якщо $AC = 2,5$ дм.



1167*. До сторони a трикутника проведено висоту h_a . Знайдіть його площу, якщо:

- 1) $a = 10$ см, $h_a = 0,8a$;
- 2) $h_a = 12$ мм, $a = 1,5h_a$.

1168*. До сторони $a = 2$ дм трикутника проведено висоту $h_a = 0,75a$. Знайдіть площу трикутника.



Мал. 526

1169*. Площа трикутника дорівнює S , а одна з його висот — h . Знайдіть сторону, до якої проведено цю висоту, якщо:

- 1) $S = 72$ см², $h = 12$ см;
- 2) $S = 155$ см², $h = 10$ см;
- 3) $S = 75$ см², $h = 7,5$ см.

1170*. Площа трикутника дорівнює 75 см², а одна з його висот — 7,5 см. Знайдіть сторону, до якої проведено цю висоту.



1171*. Знайдіть висоти трикутника зі сторонами a , b і c та площею S за таблицею 39.

Таблиця 39

a	13 см	13 см	7 см	9 см
b	14 см	20 см	15 см	10 см
c	15 см	21 см	20 см	17 см
S	84 см ²	126 см ²	42 см ²	36 см ²
h_a				



qr.orioncentr.com.ua/l50se

Таблиця 39 (продовження)

h_b				
h_c				

1172*. Як зміниться площа даного трикутника, якщо:

- 1) одну з його сторін збільшити у 2 рази, а висоту, проведену до цієї сторони, зменшити у 2 рази;
- 2) одну з його сторін зменшити у 2 рази, а висоту, проведену до цієї сторони, збільшити в 4 рази?

1173*. Як зміниться площа даного трикутника, якщо одну з його сторін збільшити в 4 рази, а висоту, проведену до цієї сторони, зменшити у 2 рази?

1174*. Знайдіть площу рівностороннього трикутника (мал. 527), якщо його сторона дорівнює:

- 1) 8 см; 2) 1,2 дм; 3) 2 м; 4) $2\sqrt{3}$ см; 5) $\sqrt{6}$ дм.

1175*. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює:

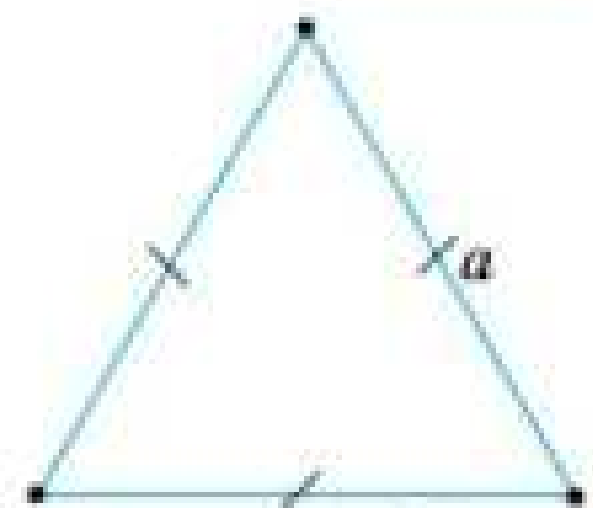
- 1) 10 см; 2) $\sqrt{3}$ дм.

1176*. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона та основа відповідно дорівнюють:

- 1) 26 см і 20 см; 2) 17 см і 16 см.

1177*. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона та основа відповідно дорівнюють 13 см і 10 см.

qr.orioncentr.com.ua/xzYKS

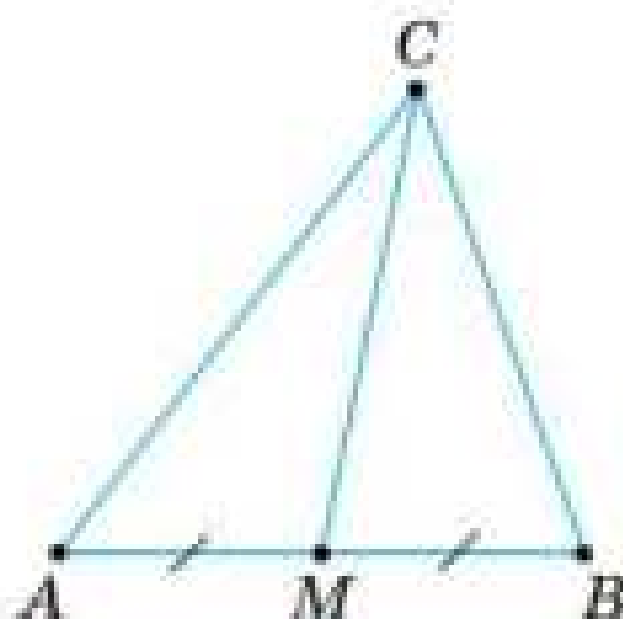


$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

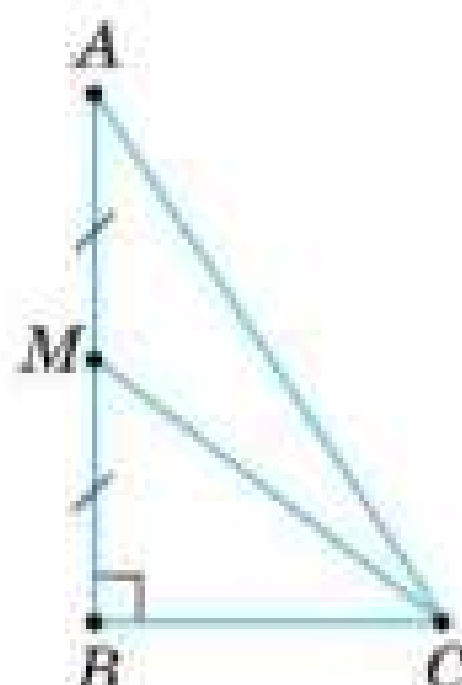
Мал. 527

1178*. За даними на малюнках 528, 529 доведіть, що трикутники AMC і BMC мають рівні площі.

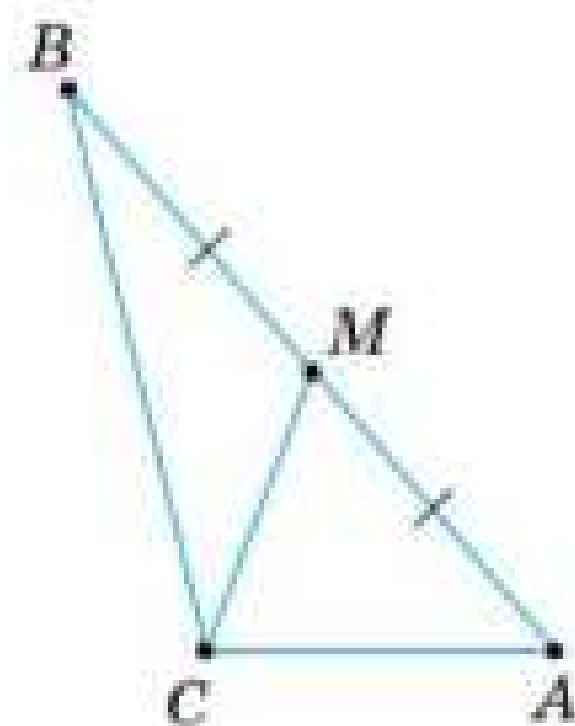
1179*. Доведіть, що трикутники AMC і BMC на малюнку 530 мають рівні площі.



Мал. 528



Мал. 529



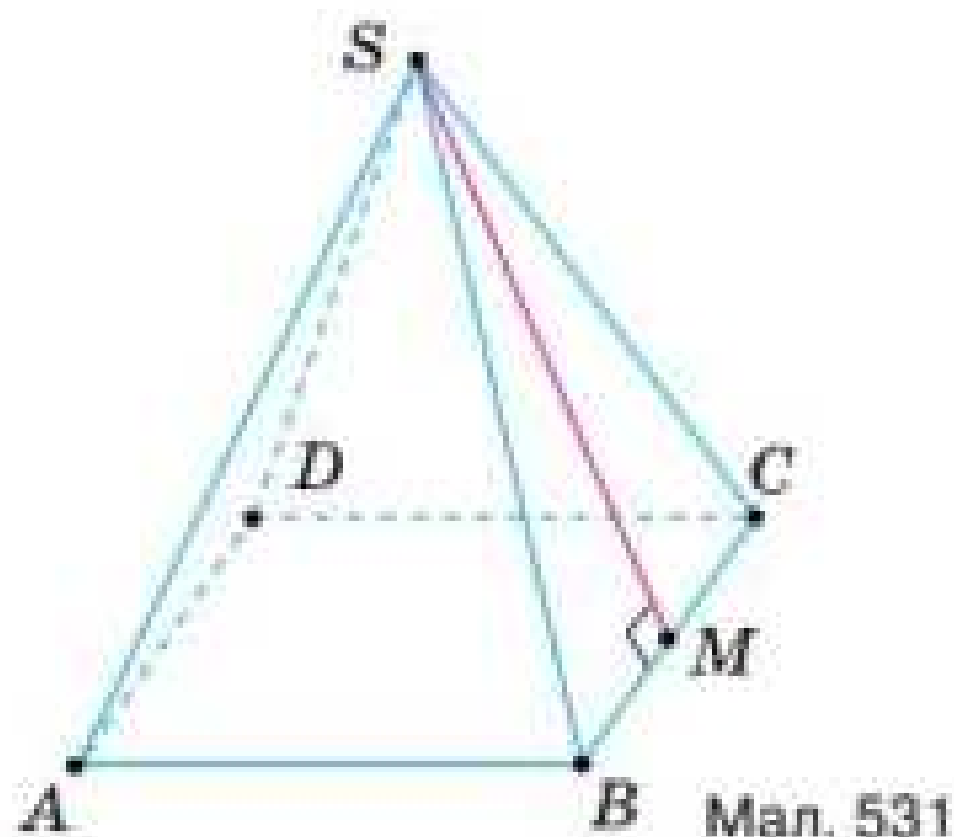
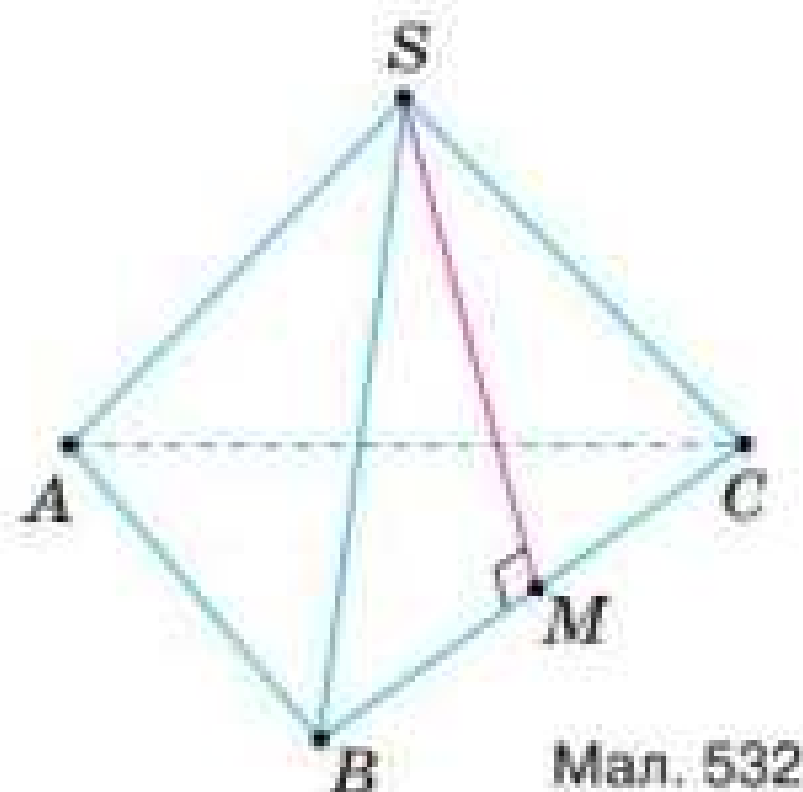
Мал. 530

- 1180***. У трикутнику проведено медіану. У якому відношенні поділилась його площа? Відповідь обґрунтуйте.
- 1181***. У трикутнику проведено середню лінію. Яку частину площі даного трикутника становить площа утвореного трикутника?
- 1182***. Середня лінія трикутника відтинає від нього трикутник із площею S . Чому дорівнює площа даного трикутника, якщо:
1) $S = 52,5 \text{ см}^2$; 2) $S = 105 \text{ см}^2$?
- 1183***. Середня лінія трикутника відтинає від нього трикутник із площею 21 см^2 . Чому дорівнює площа даного трикутника?
- 1184***. Площа трикутника дорівнює добутку півпериметра на радіус вписаного кола. Доведіть.
- 1185***. У трикутнику зі сторонами a , b і c радіус вписаного кола дорівнює r , а площа — S . Знайдіть невідомі величини за таблицею 40.

Таблиця 40

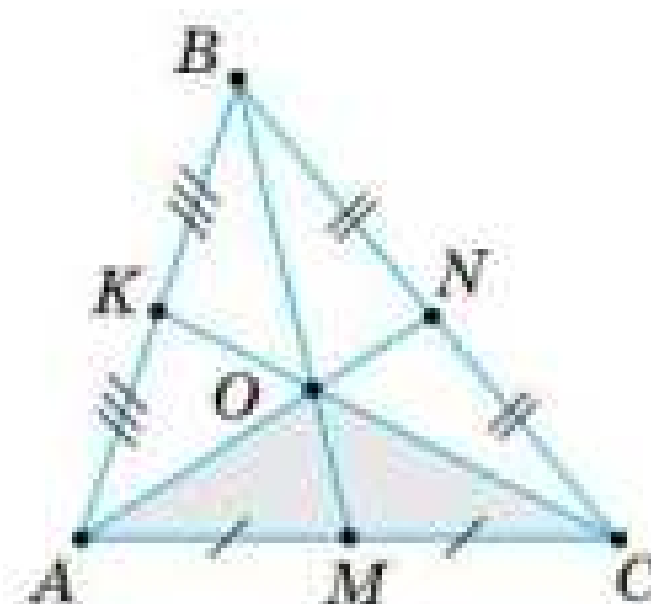
a	17 см	13 см	7 см	13 см
b	28 см	20 см	15 см	37 см
c	39 см	21 см	20 см	40 см
p				
r	5 см	$\frac{14}{3}$ см	2 см	$\frac{16}{3}$ см
S				

- 1186***. У прямокутному трикутнику з катетами 3 см і 4 см знайдіть радіус вписаного кола.
- 1187***. Основа піраміди — квадрат (мал. 531), а її бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники, у яких бічна сторона 15 см, а висота, проведена до основи, — 12 см. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь піраміди.
- 1188***. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь піраміди, у якій всі грані — рівносторонні трикутники зі стороною 12 см (мал. 532).



- 1189.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи як $m : n$, а висота, проведена до основи, дорівнює h . Знайдіть площу трикутника, якщо:
- 1) $m = 5, n = 6, h = 12$ см;
 - 2) $m = 17, n = 16, h = 15$ см.
- 1190.** У рівнобедреному трикутнику основа відноситься до бічної сторони, як $10 : 13$, а висота, проведена до основи, дорівнює 24 см. Знайдіть площу трикутника.
- 1191.** Середня лінія трикутника дорівнює q , а висота, перпендикулярна до неї, дорівнює h . Знайдіть площу трикутника, якщо:
- 1) $q + h = 12,5$ см, $q - h = 0,5$ см;
 - 2) $q + h = 23$ см, $h - q = 17$ см.
- 1192.** Доведіть, що два трикутники мають рівні площі, якщо в них рівні відповідні середні лінії та висоти, які перпендикулярні до середніх ліній.
- 1193.** Знайдіть площу прямокутного трикутника за його гіпотенузою та відношенням катетів:
- 1) 25 см, $3 : 4$;
 - 2) 5 см, $7 : 24$;
 - 3) $25,5$ см, $8 : 15$;
 - 4) 82 см, $9 : 40$.
- 1194.** Катети прямокутного трикутника відносяться як $5 : 12$. Знайдіть площу трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює:
- 1) 39 см;
 - 2) 26 см.
- 1195.** Площа прямокутного трикутника дорівнює S , а його катети відносяться як $m : n$. Знайдіть катети, якщо:
- 1) $S = 720$ см², $m = 9, n = 40$;
 - 2) $S = 1320$ см², $m = 11, n = 9,6$.
- 1196.** Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо його висота ділить гіпотенузу на відрізки:
- 1) 4 см і 9 см;
 - 2) 1 см і 16 см.
- 1197.** Знайдіть площу прямокутного трикутника з гострим кутом 30° , якщо його гіпотенуза дорівнює:
- 1) 8 см;
 - 2) 12 см.
- 1198.** Знайдіть площу прямокутного трикутника за півсумою t його катетів та радіусами r і R вписаного й описаного кіл, якщо:
- 1) $t = 7$ см, $r = 2$ см, $R = 5$ см;
 - 2) $t = 17$ см, $r = 4$ см, $R = 13$ см.
- 1199.** Трикутник має сторони a, b і c , причому $a < b < c$. Складіть нерівність для висот трикутника h_a, h_b і h_c . Відповідь обґрунтуйте.

1200. Доведіть, що площа трикутника з вершиною в точці перетину медіан даного трикутника та спільною з ним стороною становить третину площі даного трикутника (мал. 533).



Мал. 533

1201. Відома площа одного з двох подібних трикутників. Які вимірювання та обчислення треба виконати, щоб знайти площу іншого трикутника?

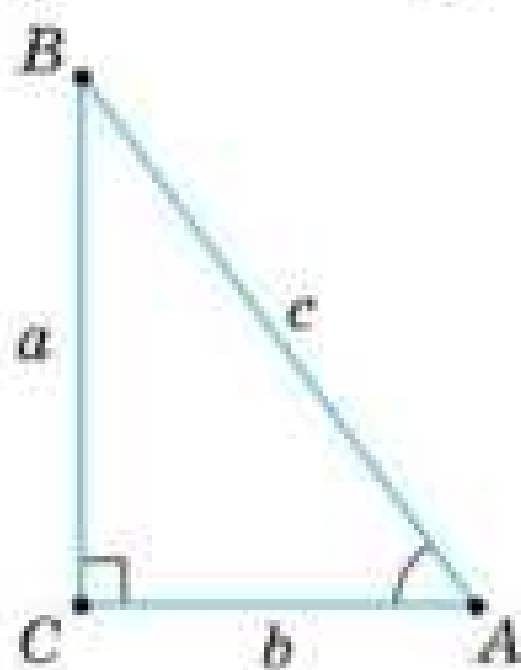
1202. У паралелограмі $ABCD$ вершина D розміщується на відстані 4 см від діагоналі AC , що дорівнює 16 см. $AB = 12$ см. Знайдіть відстань:

- 1) від точки D до прямої AB ;
- 2) між прямими AB і CD ;
- 3) від середини діагоналі до сторони CD паралелограма.

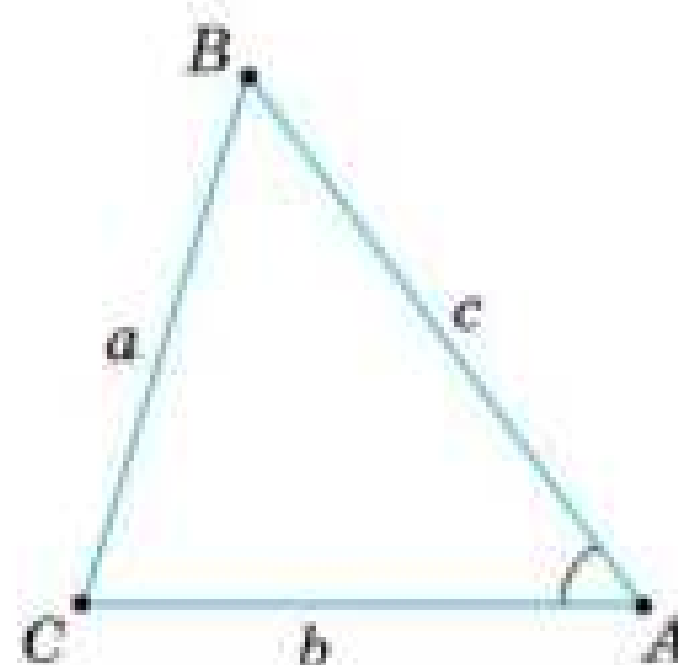
1203*. Доведіть, що площу прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) обчислюють за формулою: $S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin B$ (мал. 534).

1204*. Доведіть, що площу гострокутного трикутника ABC обчислюють за формулою:

$$S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin C \text{ (мал. 535).}$$



Мал. 534



Мал. 535

1205*. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки, що лежить всередині рівностороннього трикутника, до його сторін дорівнює висоті трикутника.

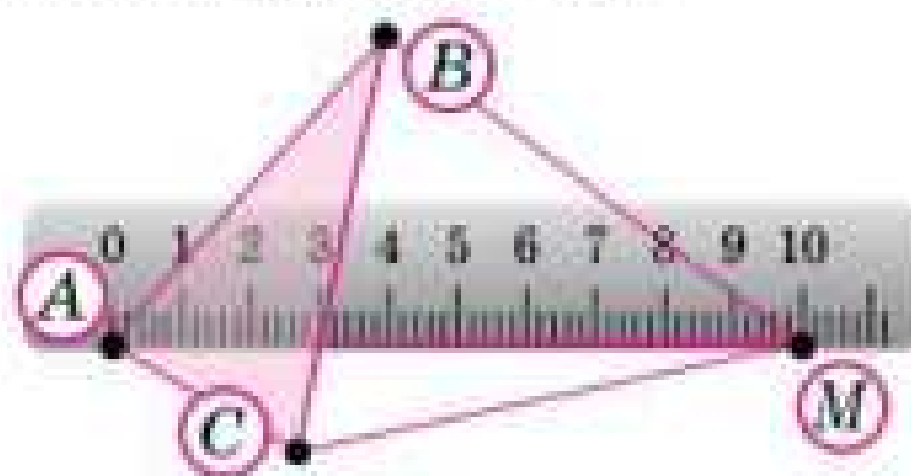
1206*. Кожний трикутник рівноскладений з прямокутником, у якого одна зі сторін дорівнює стороні трикутника, а інша дорівнює половині відповідної висоти трикутника. Доведіть.

1207*. Кожний трикутник рівноскладений з паралелограмом, який має однакову з трикутником основу і висоту, що дорівнює половині висоти трикутника. Доведіть.

- 1208***. Доведіть, що в трикутнику з висотами h_a , h_b і h_c та радіусом вписаного кола r має місце рівність: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.
- 1209***. Сторони трикутника продовжено (рухаючись за стрілкою годинника) на їхню власну довжину. Одержані точки сполучено відрізками. Яка площа утвореного трикутника?
- 1210***. У якому відношенні, рахуючи від вершини, потрібно поділити бічну сторону трикутника двома прямими, паралельними основі, щоб площа трикутника була поділена на три рівні частини?
- 1211***. Висота трикутника дорівнює 4 см. На якій відстані від вершини трикутника потрібно провести пряму, що перетинає ці дві сторони та паралельна третій його стороні, щоб площа трикутника поділилась у відношенні $m : n$, рахуючи від вершини?
- 1212***. Доведіть, що коло, вписане в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки, добуток яких дорівнює площі цього трикутника.

Проявіть компетентність

- 1213.** За допомогою паперових моделей трикутників проілюструйте рівності: $S = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot h = a \cdot \frac{h}{2}$.
- 1214.** Площу трикутника можна визначити за допомогою лінійки. Для цього потрібно прикласти лінійку до трикутника ABC так, як показано на малюнку 536, і через точку B провести $BM \parallel AC$. Поясніть, як обчислити шукану площу, знаючи ширину лінійки та довжину відрізка AM .



Мал. 536

- 1215.** Як потрібно нанести поділки на лінійку (мал. 536), щоб точка M відразу вказала значення площі трикутника ABC ?
- 1216.** Виготовлено серію деталей трикутної форми, у яких найбільша сторона має ту саму довжину, а відстані до цієї сторони від протилежної вершини дорівнюють одна одній. Задайте форму й розміри контейнера, у якому найзручніше транспортувати всі ці деталі одночасно.

1217. Повітря тисне із силою 1,03 кг на кожний квадратний сантиметр. Який тиск повітря на трикутний тент над вікном, якщо одна сторона тенту — 1,8 м, а відстань від його протилежної вершини до цієї сторони дорівнює 0,5 м?

1218. На луці трикутної форми потрібно провести межу так, щоб одержати дві частини з рівними площами. Як це зробити за допомогою віх і польового циркуля?



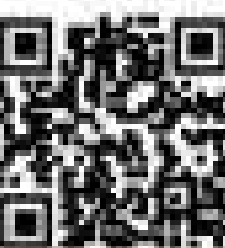
§ 22. ПЛОЩА ТРАПЕЦІЇ

Ситуація. Марія Іванівна поставила 8-А класу запитання: «Як знайти площу трапеції $AMNC$ на малюнку 537?» Юля запропонувала скористатися аркушем в клітинку як палеткою. Вона порахувала всередині трапеції кількість повних квадратиків n (їх виявилось 6), кількість неповних квадратиків l (їх виявилось теж 6) та скористалася формулою: $S \approx n + 0,5 l$. Після обчислень Юля отримала, що $S \approx 9$ кв. од. Оксана запропонувала інший спосіб — знайти площу двох трикутників ABC і MBN , а потім знайти різницю цих площ. Оксана отримала:

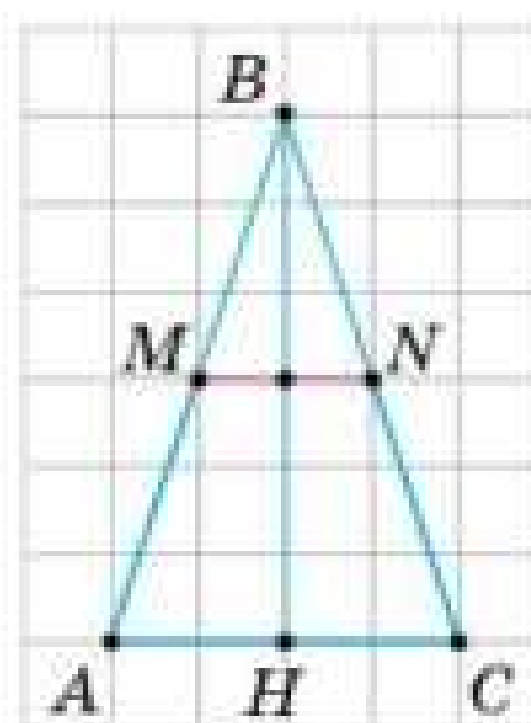
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ (кв. од.)}, \quad S_{\triangle MBN} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3 \text{ (кв. од.)},$$

$$S_{AMNC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle MBN} = 12 - 3 = 9 \text{ (кв. од.)}.$$

Максим же висунув гіпотезу, що площу даної трапеції можна обчислити ще легше, якщо знати відповідну формулу.



qr.orioncentr.com.ua/XQsNh



Мал. 537



Чи існує формула площі трапеції?

Так.



Запам'ятайте!

Теорема (про площу трапеції)

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту:

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Дано: $ABCD$ — трапеція (мал. 538),
 AB і CD — основи, CH — висота,
 $AB = a$, $CD = b$, $CH = h$.

Довести: $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Доведення. Проведемо в трапеції діагональ AC (мал. 539). Вона розбиває трапецію на два трикутники ABC і ADC . Висота h трапеції є висотою трикутника ABC , проведеною до сторони $AB = a$, і дорівнює висоті трикутника ADC , проведеної до сторони $CD = b$.

Площа трапеції дорівнює сумі площ цих трикутників, тому:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Наслідок. Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.

Справді, у трапеції $ABCD$ з основами $AB = a$ і $CD = b$ середня лінія дорівнює $\frac{a+b}{2}$, тому вираз $\frac{a+b}{2} \cdot h$ можна розуміти як добуток середньої лінії даної трапеції та її висоти h .

Задача Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O (мал. 540). Доведіть, що трикутники AOD і BOC мають рівні площі.

Розв'язання Розглянемо трикутники ABD і ABC . У них сторона AB — спільна, а висоти, проведені до цієї сторони, дорівнюють висоті трапеції.

Тому: $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC}$.

Трикутник ABD складений із трикутників AOB і AOD , а трикутник ABC — із трикутників AOB і BOC .

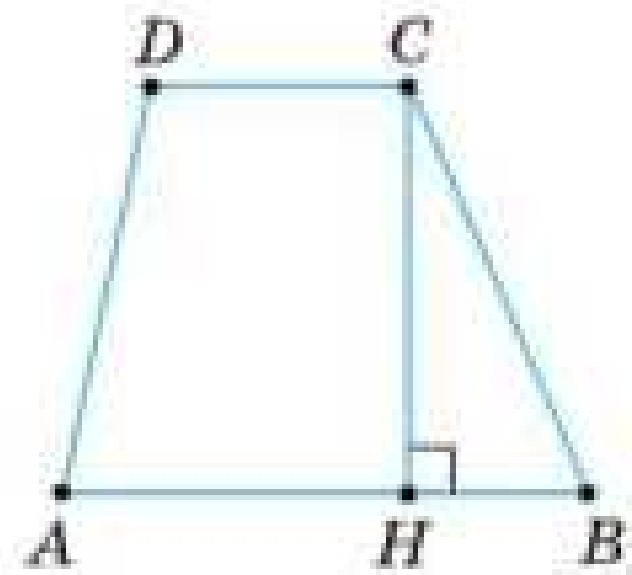
Звідси одержуємо:

$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOB}; \quad S_{\triangle BOC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOB}.$$

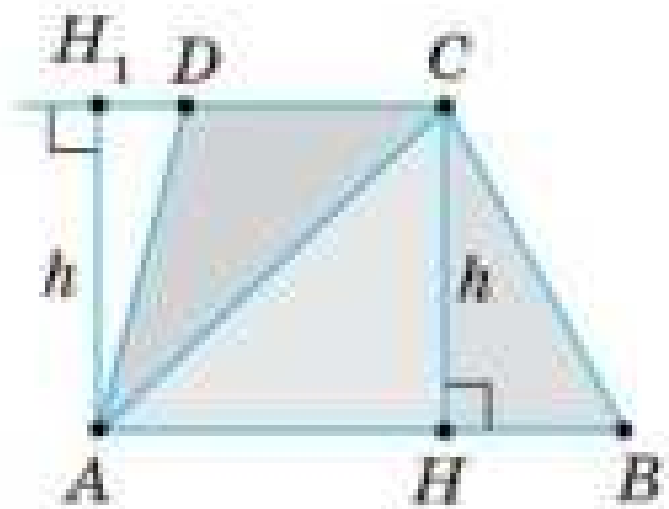
Отже, площі трикутників AOD і BOC рівні як різниці рівних площ.



Щоб установити, що нерівні фігури мають рівні площі, можна довести, що площі цих фігур дорівнюють або **сумі рівних площ**, або **різниці рівних площ**.



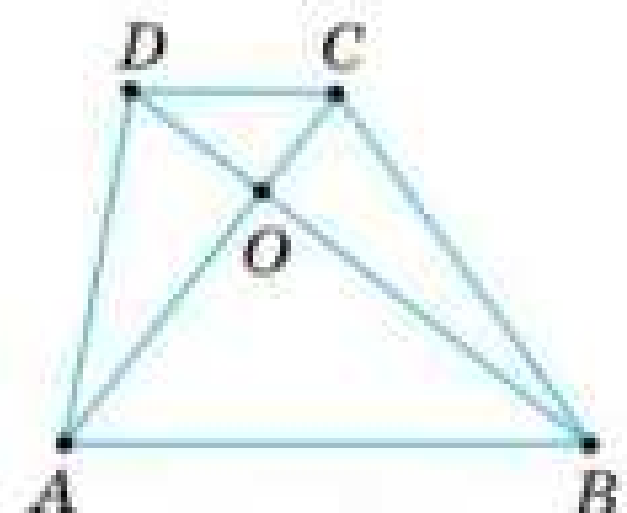
Мал. 538



Мал. 539



qr.orioncentr.com.ua/eHcJV



Мал. 540

Дізнайтеся більше

1. У вас може виникнути запитання: Чи існує трапеція, середня лінія якої ділить її площу навпіл?

Узагалі, питання існування фігури із заданими властивостями може розв'язуватися наведенням прикладу такої фігури. Однак не завжди цей шлях виявляється найлегшим. Історія свідчить про те, що інколи на пошук прикладу, який підтверджує існування деякого математичного об'єкта, вчені витрачали багато років.

Щоб спростити пошук, проводять попередні аналітичні розрахунки.

Нехай дана трапеція $ABCD$ (мал. 541) має основи a і b та висоту h . Середня лінія MN розбиває її на дві трапеції, які мають рівні висоти, що дорівнюють $\frac{h}{2}$ (доведіть це самостійно). Позначимо площі цих трапецій S_1 і S_2 та виразимо їх через основи даної трапеції та її висоту:

$$S_1 = \frac{CD + MN}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{b + \frac{a+b}{2}}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3b+a}{4} \cdot \frac{h}{2}, \quad S_2 = \frac{AB + MN}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3a+b}{4} \cdot \frac{h}{2}$$

Знайдемо відношення площ S_1 і S_2 . Після скорочень одержимо: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3b+a}{3a+b}$.

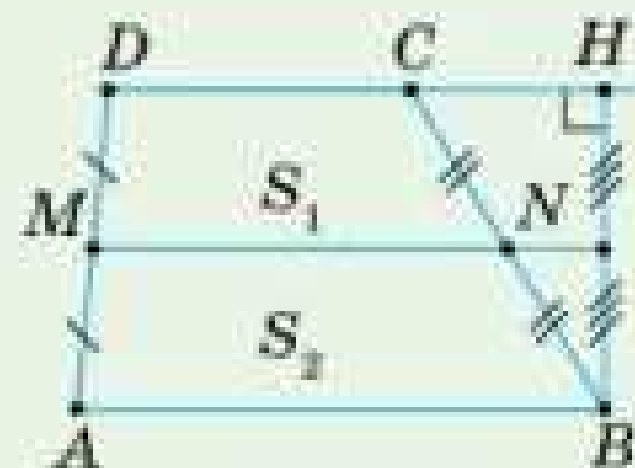
Рівність площ S_1 і S_2 можлива лише тоді, коли $3b+a = 3a+b$, тобто якщо $a=b$.

А такої трапеції не існує.

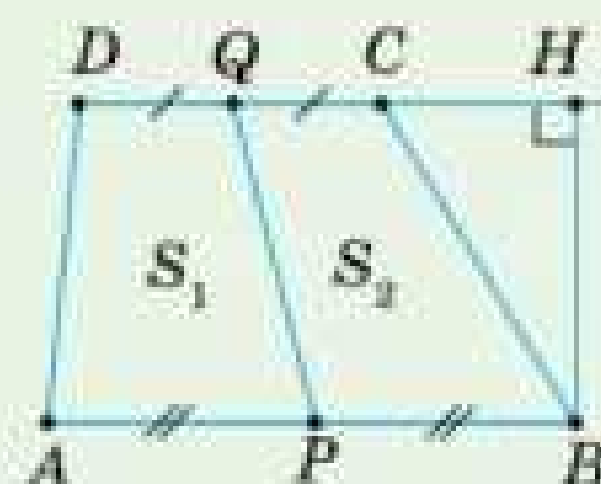
Цікавим є той факт, що відрізок, який з'єднує середини основ трапеції, ділить площу трапеції навпіл. Доведіть цей факт самостійно, спираючись на малюнок 542.

2. Вивчаючи чотирикутники, ви ознайомилися з дельтоїдом (мал. 543). Цей чотирикутник, як і ромб, має взаємно перпендикулярні діагоналі. Існують трапеції із взаємно перпендикулярними діагоналями (мал. 544), а також довільні чотирикутники з такою самою властивістю (мал. 545). І ромб, і дельтоїд, і названа трапеція є окремими видами чотирикутників із взаємно перпендикулярними діагоналями.

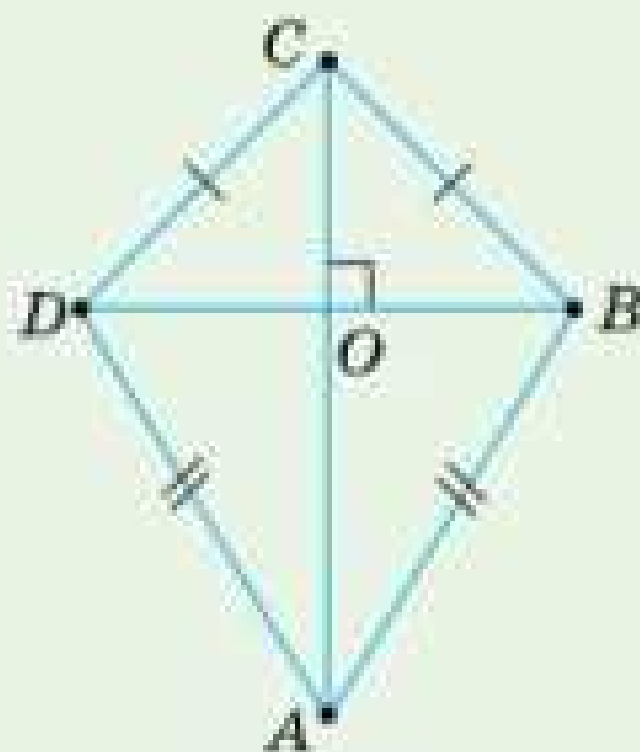
Доведіть самостійно, що площа чотирикутника із взаємно перпендикулярними діагоналями дорівнює половині добутку цих діагоналей.



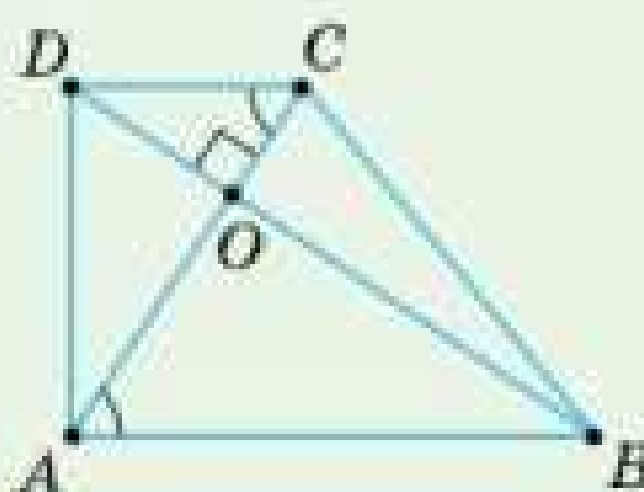
Мал. 541



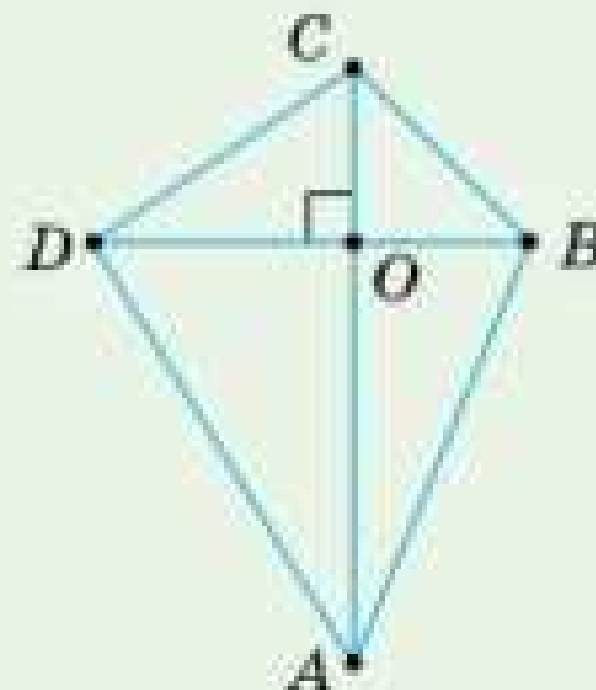
Мал. 542



Мал. 543



Мал. 544



Мал. 545

Словничок



Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
площа трапеції	area of the trapezoid	Flächeninhalt des Trapezes	aire du trapèze

qr.orioncentr.com.ua/v71c7

Пригадайте головне

1. За якою формулою обчислюють площу трапеції? Як її вивести?
2. Як знайти площу трапеції, знаючи її середню лінію і висоту?
3. Поясніть, як можна довести рівність площ двох нерівних фігур.

Усне тренування

1. Обчисліть: $\frac{32+44}{2}$; $\frac{23+17}{2}$; $\frac{39+7}{2}$; $\frac{5+19}{2}$.

2. Чи є правильною рівність:

$25 - 8 = 8 + 9$; $7 + 9 = 21 - 5$; $18 - 12 = 10 + 6$; $24 + 5 = 36 - 7$?

Розв'яжіть задачі

1219'. Чи є правильною рівність для обчислення площі трапеції:

1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot DH$ (мал. 546);

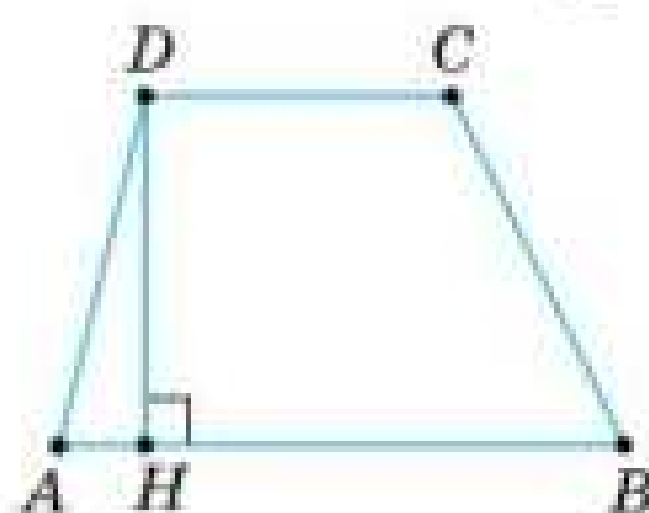
2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + DH)$ (мал. 546);

3) $S_{KLMN} = \frac{1}{2} (KL + NM) \cdot TL$ (мал. 547);

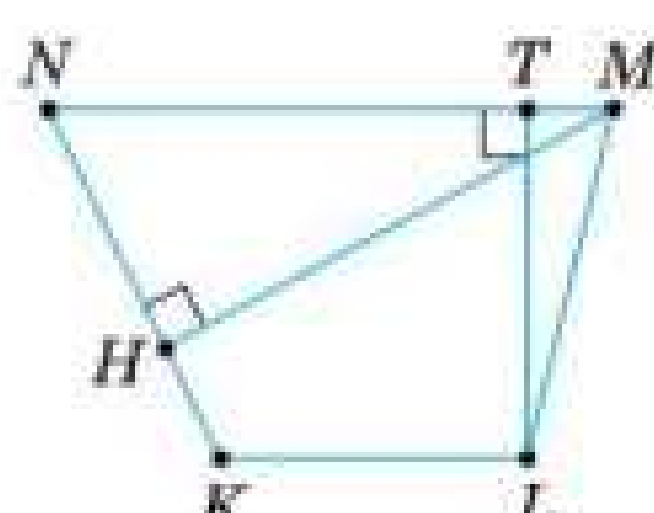
4) $S_{KLMN} = (KL + LM) \cdot \frac{MH}{2}$ (мал. 547);

5) $S_{PQHT} = PQ \cdot PT$ (мал. 548);

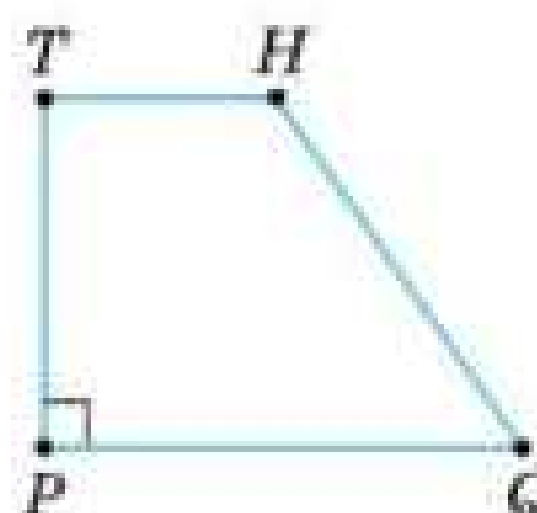
6) $S_{PQHT} = \frac{HT + PQ}{2} \cdot PT$ (мал. 548)?



Мал. 546

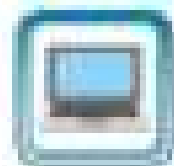


Мал. 547

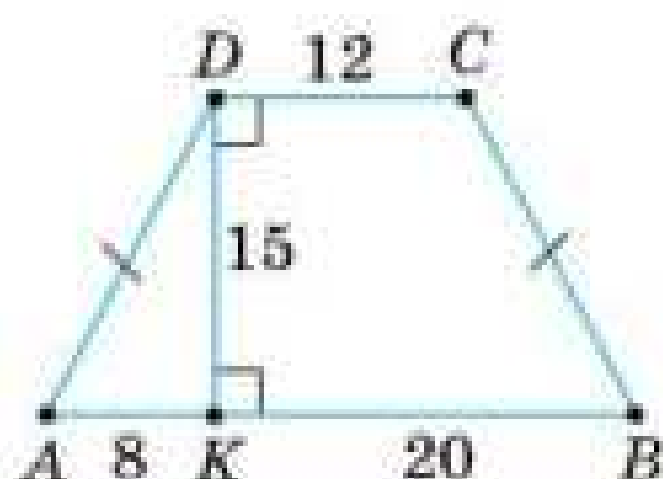


Мал. 548

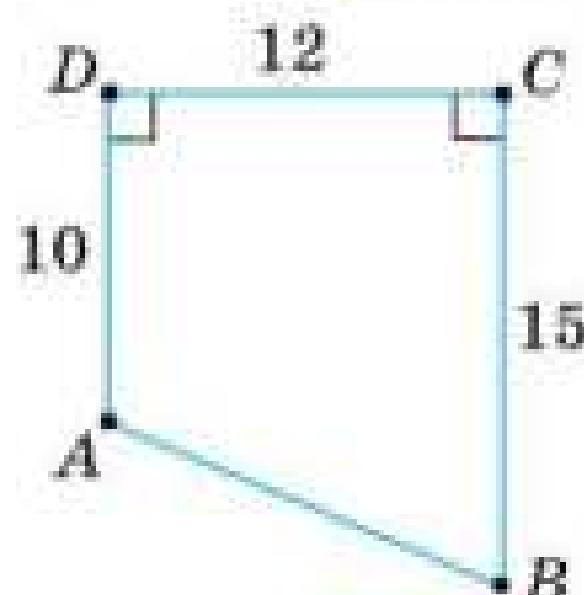
1220*. За даними на малюнках 549, 550 знайдіть площу трапеції $ABCD$.



qr.orioncentr.com.ua/oJXjh



Мал. 549



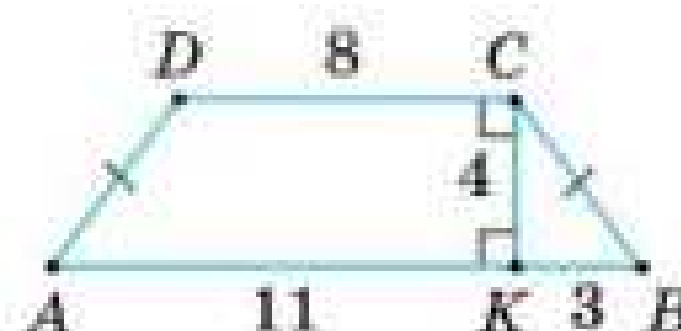
Мал. 550

1221*. За даними на малюнку 551 знайдіть площу трапеції $ABCD$.



1222*. У трапеції $ABCD$ з основами AB і CD проведено висоту CH . Знайдіть площу трапеції, якщо:

- 1) $AB = 60$ см, $CD = 36$ см, $CH = 50$ см;
- 2) $AB = 25$ см, $CD = 55$ см, $CH = 100$ см.



Мал. 551

1223*. У трапеції $ABCD$ з основами $AB = 25$ см і $CD = 45$ см проведено висоту $CH = 40$ см. Знайдіть площу трапеції.



1224*. Основи трапеції дорівнюють a і b , а висота — h . Знайдіть площу трапеції, якщо:

- 1) $a = 10$ см, $b = 0,8a$, $h = a$;
- 2) $a = 2$ дм, $b = 0,75a$, $h = 0,5a$.

1225*. Основи трапеції дорівнюють a і b , а висота — h . Знайдіть площу трапеції, якщо $b = 5$ см, $a = 1,2b$, $h = a$.

1226*. Площа трапеції дорівнює S , а її висота — h . Знайдіть суму основ трапеції, якщо:

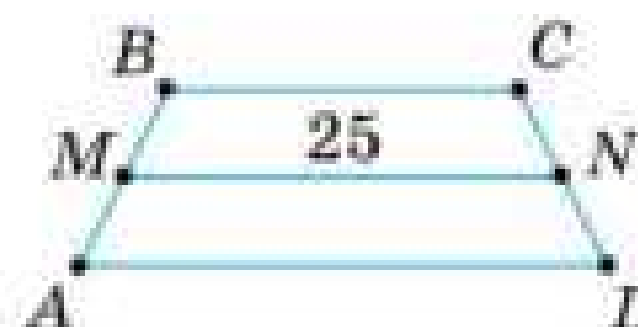
- 1) $S = 60$ см², $h = 12$ см;
- 2) $S = 150$ см², $h = 25$ см.

1227*. Площа трапеції дорівнює 90 см², а її висота — 15 см. Знайдіть суму основ трапеції.

1228*. Площа трапеції дорівнює S , а її середня лінія — q . Знайдіть висоту трапеції, якщо:

- 1) $S = 60$ см², $q = 15$ см;
- 2) $S = 175$ см², $q = 35$ см.

1229*. Площа трапеції дорівнює 75 см², а її середня лінія — 25 см (мал. 552). Знайдіть висоту трапеції.



Мал. 552

1230*. Основи трапеції дорівнюють a і b , середня лінія — q , висота — h , а площа — S . Знайдіть невідомі величини за таблицею 41.

Таблиця 41

a	10 см	23 см		
b	14 см		22 см	9 см
q		25 см		16 см
h	7 см		10 см	
S		125 см ²	210 см ²	176 см ²

1231*. Як зміниться площа трапеції, якщо:



- 1) обидві її основи зменшити у 2 рази, а висоту — збільшити у 2 рази;
- 2) середню лінію збільшити у 2 рази?



qr.orioncentr.com.ua/mA7Jb

1232*. Як зміниться площа трапеції, якщо обидві її основи збільшити у 2 рази, а висоту — зменшити у 2 рази?



1233*. Площа трапеції дорівнює S , висота — h , а її основи відносяться як $m : n$. Знайдіть основи трапеції, якщо:

- 1) $S = 36$ см², $h = 2$ см, $m = 4$, $n = 5$;
- 2) $S = 150$ см², $h = 5$ см, $m = 2$, $n = 3$.

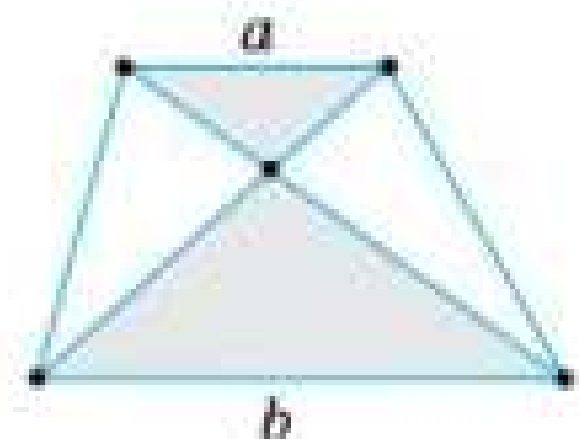
1234*. Площа трапеції дорівнює 90 см², висота — 6 см, а її основи відносяться як 1 : 2. Знайдіть основи трапеції.



1235*. У трапеції з основами a і b проведено діагоналі (мал. 553). Чому дорівнює відношення площ трикутників, що прилягають до основ?

1236. За даними основами a і b та бічною стороною c рівнобічної трапеції знайдіть її площу, якщо:

- 1) $a = 24$ см, $b = 12$ см, $c = 10$ см;
- 2) $a = 14$ см, $b = 8$ см, $c = 5$ см.



Мал. 553

1237. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 32 см і 14 см, а бічна сторона — 15 см. Знайдіть площу трапеції.



1238. Периметр трапеції дорівнює P , її бічні сторони дорівнюють c і d , а висота — h . Знайдіть площу трапеції, якщо:

- 1) $P = 120$ см, $c = d = 17$ см, $h = 15$ см;
- 2) $P = 58$ см, $c = 15$ см, $d = 13$ см, $h = 12$ см.

1239. Бічні сторони трапеції утворюють з її основою кути 45° і 30° . Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює висоті завдовжки 6 см.

1240. У прямокутній трапеції основи дорівнюють a і b . Її більша бічна сторона утворює з основою кут 45° . Знайдіть площу трапеції, якщо:

1) $a = 2$ см, $b = 5$ см; 2) $a = 5$ см, $b = 3$ см.

1241. У прямокутній трапеції дві найменші сторони мають довжину a .



Найбільший кут трапеції дорівнює 135° . Знайдіть площу трапеції, якщо:

1) $a = 2$ см; 2) $a = 3$ см.

1242. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і $3a$, а площа — $2a^2$.



Чому дорівнює гострий кут трапеції?

1243. У трапеції менша діагональ d перпендикулярна до її основ a і b . Знайдіть площу трапеції, якщо:

1) $a + 2b = 3,3$ см, $a - b = 1,8$ см, $d = 4$ см;

2) $3a + 2b = 44$ см, $a - 2b = 4$ см, $d = 12$ см.

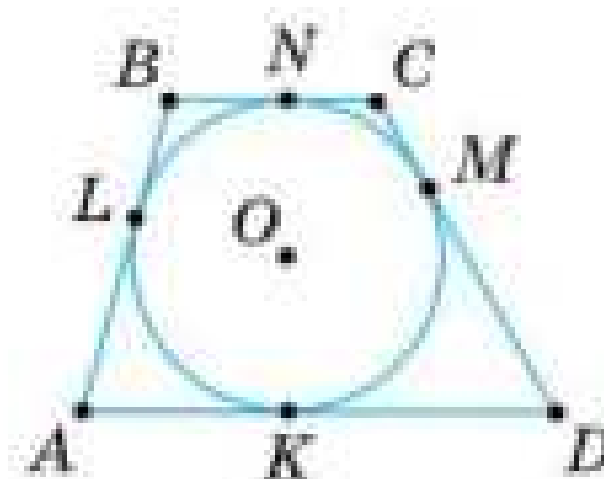
1244. Відрізок, проведений з вершини тупого кута трапеції паралельно її бічній стороні, ділить основу у відношенні $1 : 2$. Знайдіть основи трапеції, якщо площа утвореного трикутника дорівнює 6 см², а висота трапеції — 3 см. Скільки випадків потрібно розглянути?

1245. Менша основа трапеції дорівнює 4 см. Пряма a розбиває трапецію на паралелограм і трикутник з рівними площами. Знайдіть більшу основу трапеції.

1246. Доведіть, що площа трапеції, описаної навколо кола, дорівнює добутку півсуми її бічних сторін на висоту (мал. 554).

1247. Трапеція, описана навколо кола, має периметр P і площу S . Знайдіть радіус кола.

1248. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Одна з діагоналей дорівнює 8 см, а площа трапеції — 40 см². Знайдіть іншу діагональ.



Мал. 554

1249*. Основи трапеції дорівнюють 15 см і 20 см, а бічна сторона, яка дорівнює 10 см, утворює з більшою основою кут 48° . Знайдіть площу трапеції.

1250*. У прямокутній трапеції більша бічна сторона дорівнює 16 см. Менша діагональ є бісектрисою тупого кута, який дорівнює 120° . Знайдіть площу трапеції.

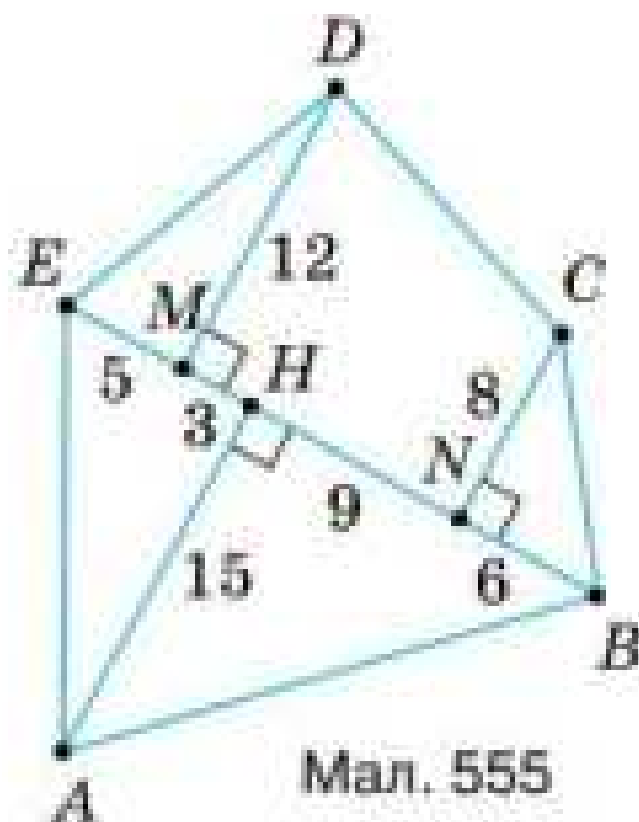
1251*. Доведіть, що існує безліч нерівних трапецій, які мають із трапецією $ABCD$ спільну середню лінію та однакову з нею площу.

1252*. У яких межах може змінюватися площа трапеції, більша основа якої дорівнює 16 см, а висота — 2 см?

- 1253***. Відрізок, паралельний основам a і b трапеції, ділить її на дві фігури із рівними площами. Яка довжина цього відрізка?
- 1254***. Діагоналі трапеції $ABCD$ з основами AB і CD перетинаються в точці O . Доведіть, що площа трикутника BOC є середнім пропорційним між площами трикутників AOB і COD .
- 1255***. Основи трапеції відносяться як $m : n$. Знайдіть відношення площ чотирьох частин трапеції, на які її розбивають діагоналі.
- 1256***. Висота рівнобічної трапеції дорівнює h , а її площа — h^2 . Під яким кутом перетинаються діагоналі трапеції?
- 1257***. Знайдіть площу рівнобічної трапеції з бічною стороною c і перпендикулярною до неї діагоналлю d , якщо основи трапеції відносяться як $3 : 5$.
- 1258***. У трапеції із взаємно перпендикулярними діагоналями відрізок, що сполучає середини основ, дорівнює середній лінії трапеції. Доведіть.
- 1259***. Якщо у трапеції середину бічної сторони з'єднати відрізками з кінцями іншої бічної сторони, то утворений трикутник має площу, удвічі меншу від площі трапеції. Доведіть.
- 1260***. У трикутнику через точку перетину медіан проведено три відрізки, кожний з яких паралельний одній зі сторін трикутника. Доведіть, що три утворені трапеції, які складають трикутник, мають рівні площі.

Проявіть компетентність

- 1261.** На малюнку 555 зображено план ділянки в масштабі $1 : 1000$. Яка площа цієї ділянки?
- 1262.** Як за планом на малюнку 556 знайти площу ділянки, якщо план виконано в масштабі $1 : 1000$?



1263. Ділянка має форму прямокутної трапеції. Як провести перпендикулярну пряму до її основ, щоб поділити площу ділянки навпіл?

1264. У ліхтаря скляні вставки мають форму трапеції, у якій паралельні сторони дорівнюють 20 см і 16 см, а відстань між ними — 10 см. Чи вистачить скла прямокутної форми розмірами 30×24 см, щоб вирізати чотири вставки для ліхтаря? Відповідь поясніть.



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 5

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке многокутник; л-кутник? Як його позначають?
2. Які елементи многокутника?
3. Що таке зовнішній кут многокутника; діагональ; периметр?
4. Сформулюйте та доведіть теорему про суму кутів многокутника.
5. Який многокутник називається вписаним у коло; описаним навколо кола?
6. Поясніть, що таке площа фігури.
7. Які основні властивості площі?
8. За якою формулою знаходять площу квадрата?
9. Виведіть формули площі прямокутника; паралелограма; трикутника; трапеції.
10. Чому дорівнює відношення площ подібних трикутників?
11. Як знайти площу поверхні прямокутного паралелепіпеда; куба?
12. Як знайти площу бічної і повної поверхонь піраміди?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

- 1*. Знайдіть суму кутів шестикутника.
А. 60° .
Б. 120° .
В. 540° .
Г. 720° .
- 2*. Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Периметр квадрата дорівнює 24 см, а одна зі сторін прямокутника — 4 см. Знайдіть іншу сторону прямокутника.
А. 6 см.
Б. 9 см.
В. 20 см.
Г. 36 см.
- 3*. Площа рівнобедреного трикутника ABC з основою AC дорівнює 4800 см^2 . Знайдіть висоти, проведені до бічних сторін трикутника, якщо $AB = 100 \text{ см}$.
А. 24 см і 48 см.
Б. 48 см і 48 см.
В. 48 см і 96 см.
Г. 96 см і 96 см.
4. У трапеції $ABCD$ менша основа CD і висота відповідно дорівнюють 7 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції, якщо площа трикутника ABC дорівнює 60 см^2 .
А. 45 см^2 .
Б. 56 см^2 .
В. 75 см^2 .
Г. 88 см^2 .
- 5*. У ромбі $ABCD$ діагоналі дорівнюють 9 см і 40 см. Більшу діагональ AC точка K ділить у відношенні 3 : 2, рахуючи від вершини A . Знайдіть площу трикутника AKB .
А. 90 см^2 .
Б. 135 см^2 .
В. 180 см^2 .
Г. 54 см^2 .



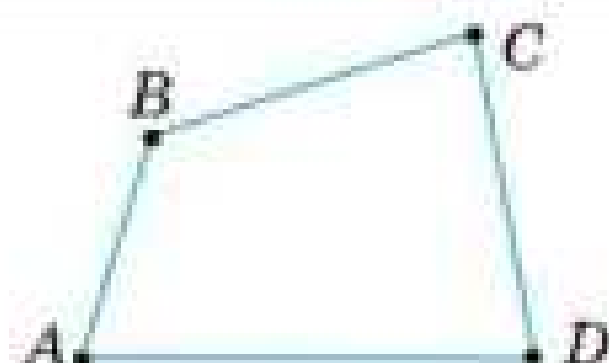
ПОВТОРЕННЯ ВИВЧЕНОГО

ЧОТИРИКУТНИКИ

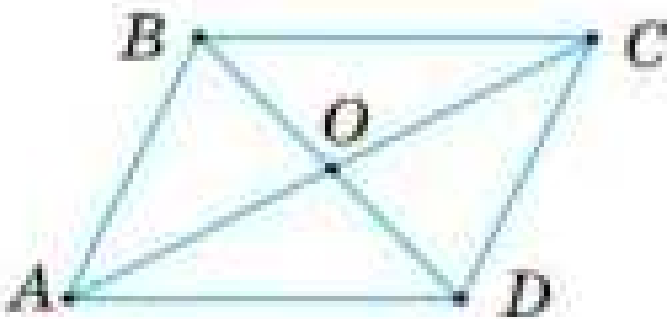
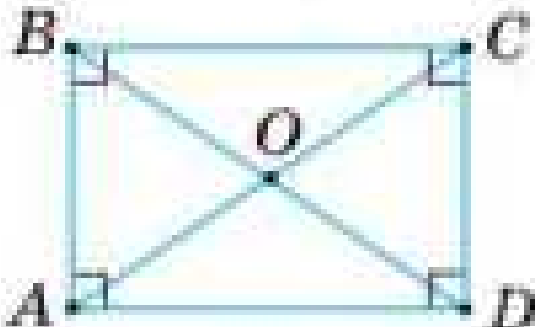
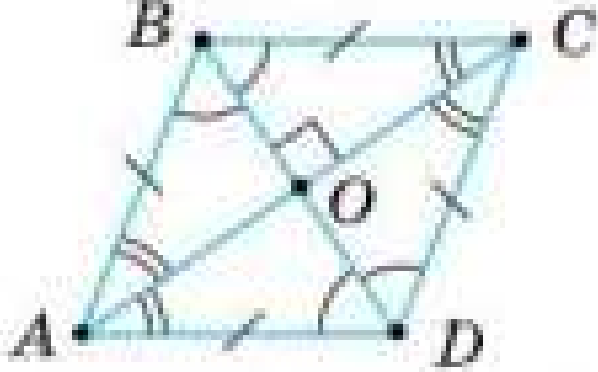
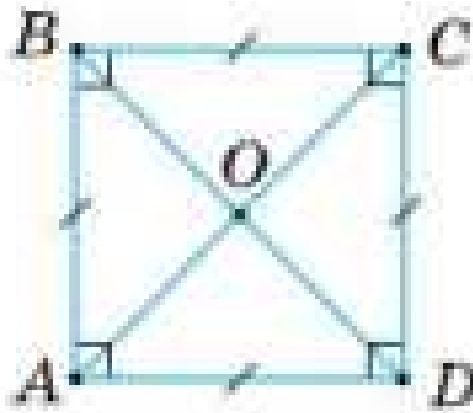
qr.orioncentr.com.ua/Ljlho



ЧОТИРИКУТНИК

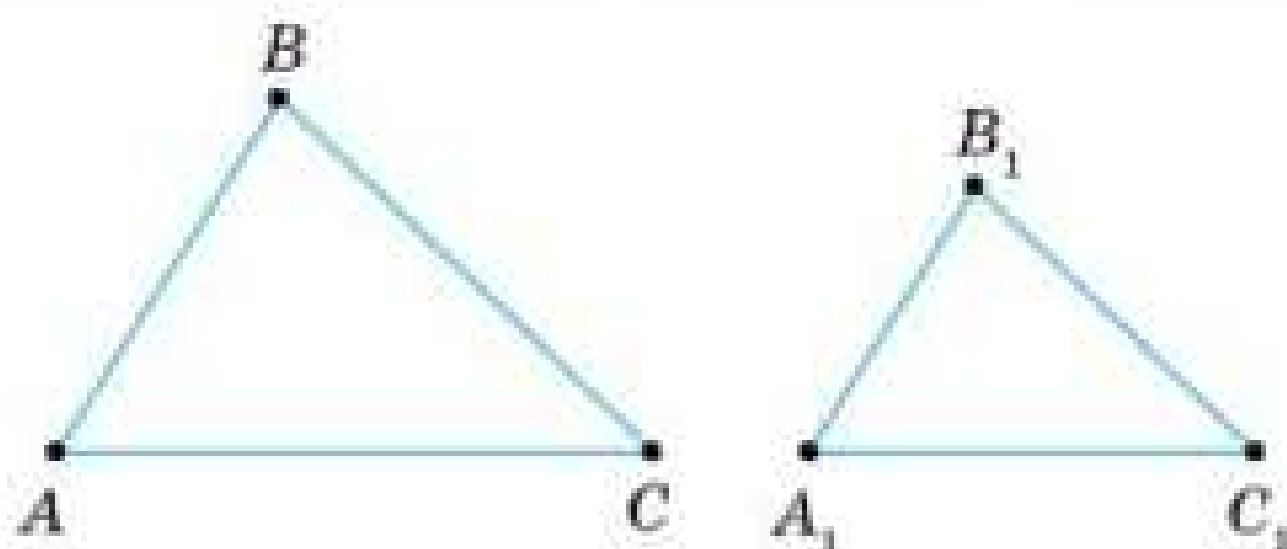


$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

Паралелограм	Властивості
 <p>$AD \parallel BC, AB \parallel DC$</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. $AB = DC, AD = BC$ 2. $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ 3. $AO = OC, BO = OD$
Види паралелограмів	Властивості
<p>Прямокутник</p>  <p>$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$</p>	<p>Властивості паралелограма</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $AB = DC, AD = BC$ 2. $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ 3. $AO = OC, BO = OD$ <p>Особлива властивість</p> <ol style="list-style-type: none"> 4. $AC = BD$
<p>Ромб</p>  <p>$AB = BC = CD = DA$</p>	<p>Властивості паралелограма</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $AB = DC, AD = BC$ 2. $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ 3. $AO = OC, BO = OD$ <p>Особливі властивості</p> <ol style="list-style-type: none"> 4. $AC \perp BD$ 5. $\angle ABD = \angle CBD, \angle BAC = \angle DAC$
<p>Квадрат</p> 	<p>Усі властивості паралелограма, прямокутника, ромба</p>

ТРАПЕЦІЇ		
нерівнобічна	рівнобічна	прямокутна
 $AB \neq CD$	 $AB = CD, \angle A = \angle D$	 $\angle A = \angle B = 90^\circ$
СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ		
трикутника	трапеції	
 $MN \parallel AC, MN = \frac{AC}{2}$	 $MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \frac{AD + BC}{2}$	
КУТИ В КОЛІ		
центральні	вписані	
 $\sphericalangle ALB = \angle AOB$	 $\angle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle ALC$	
ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ		
вписані	описані	
 $\angle A + \angle C = 180^\circ, \angle B + \angle D = 180^\circ$	 $AB + CD = AD + BC$	

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

qr.orioncentr.com.ua/fC6jz


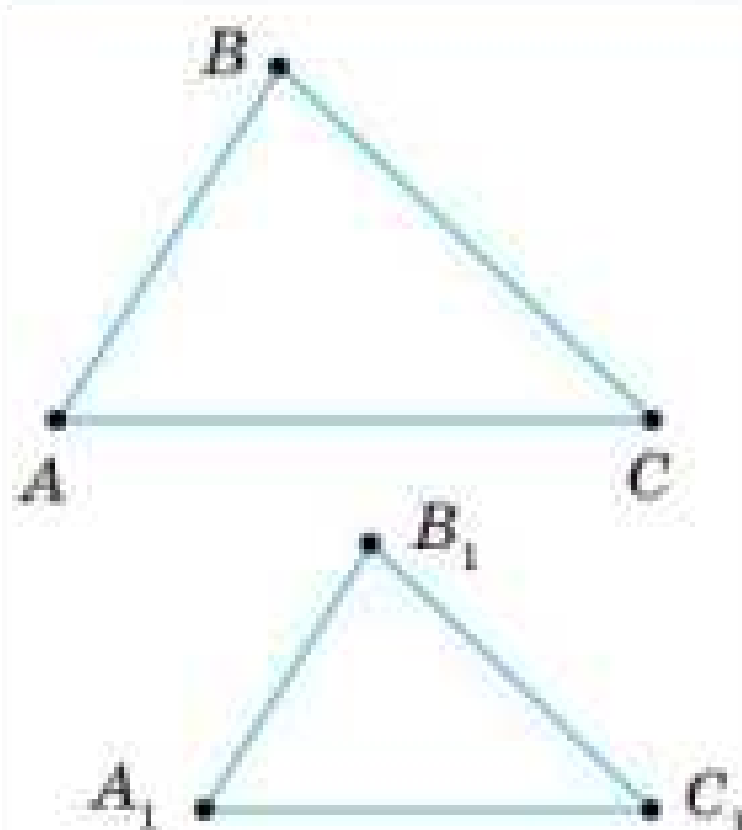
$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1,$$

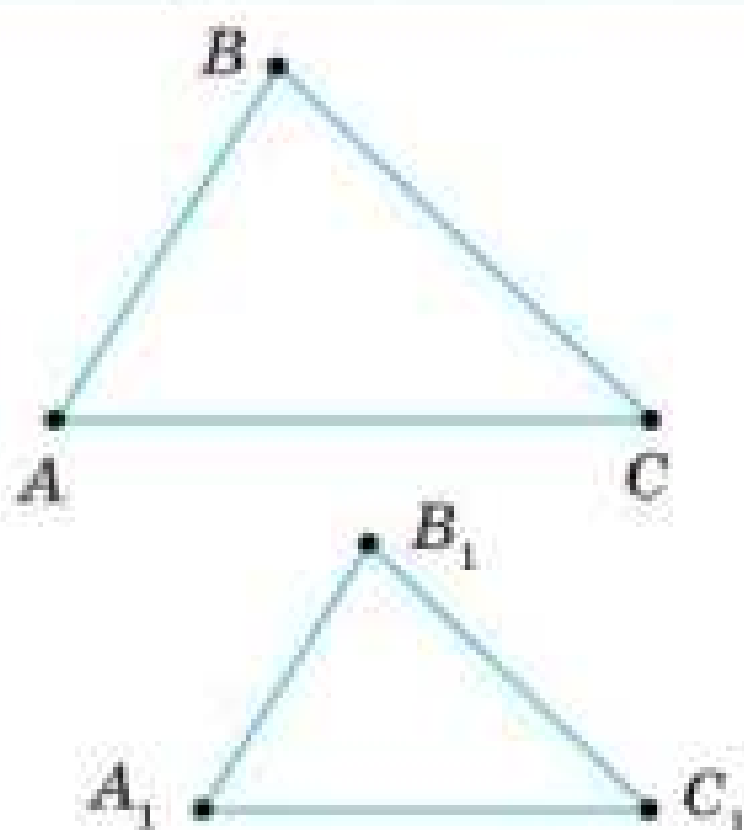
$$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = AC : A_1C_1$$

ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

за двома кутами



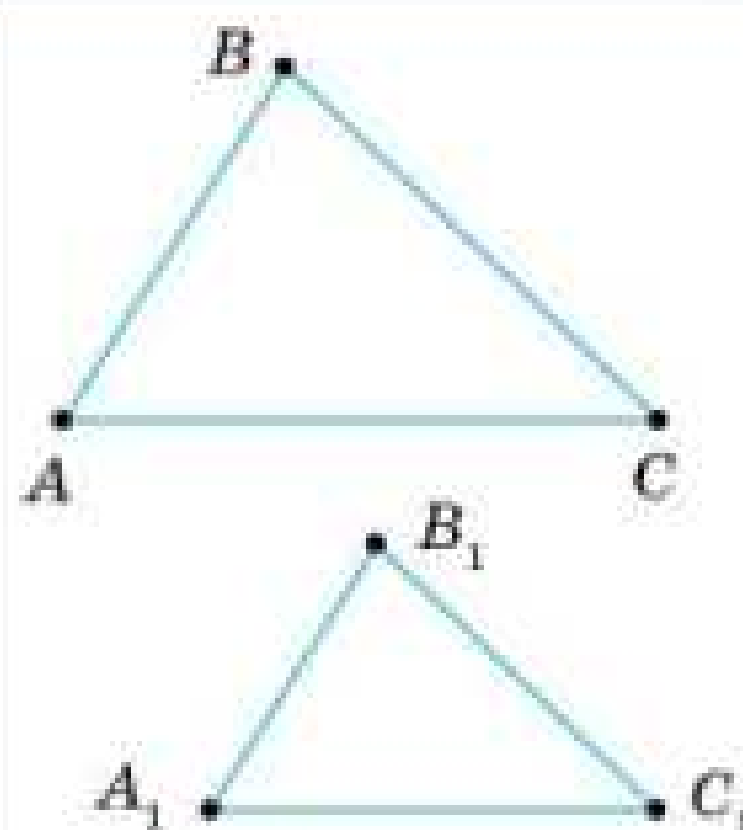
$$\angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1$$

за двома сторонами
та кутом між ними

$$AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1,$$

$$\angle A = \angle A_1$$

за трьома сторонами

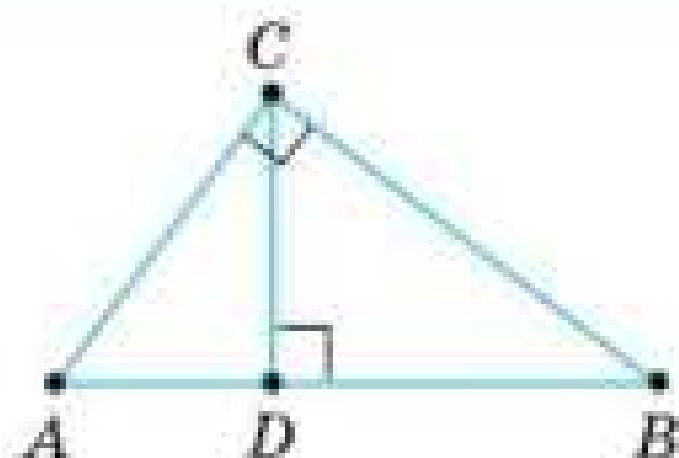


$$AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 =$$

$$AC : A_1C_1$$

ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ

у прямокутному трикутнику

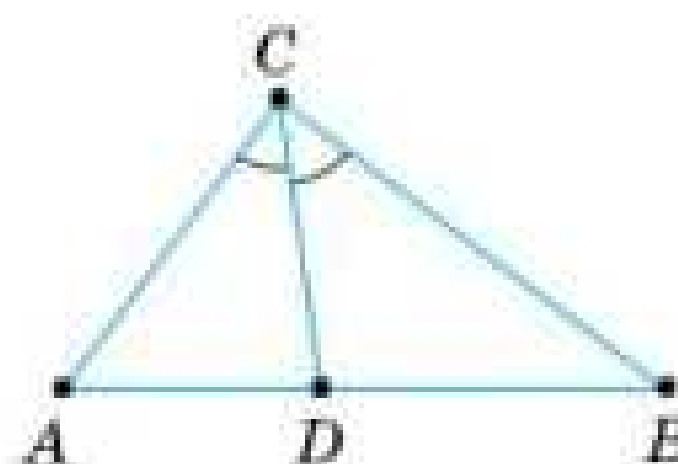


$$CD^2 = AD \cdot DB$$

$$AC^2 = AD \cdot AB$$

$$BC^2 = BD \cdot AB$$

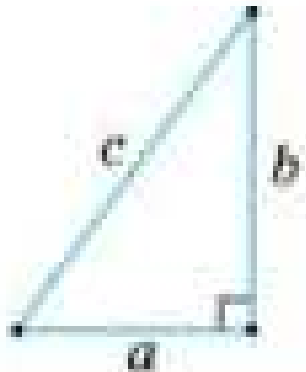
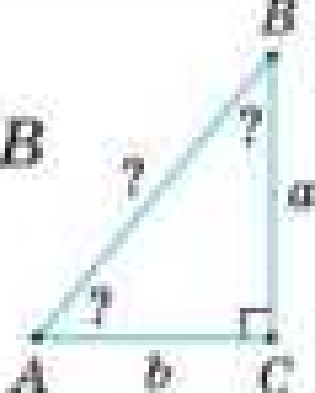
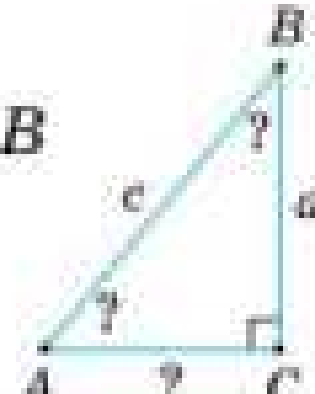
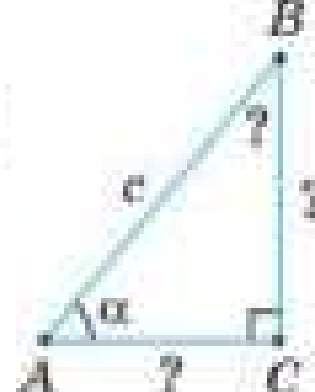
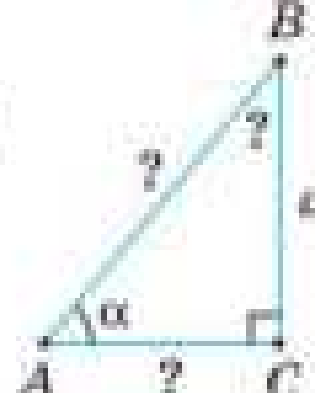
властивість бісектриси



$$AD : BD = AC : BC$$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

qr.orioncentr.com.ua/DjOoW


Теорема Піфагора	Наслідки
 $c^2 = a^2 + b^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$	<p> AC — перпендикуляр AB — похила BC — проекція похилої $AB > AC$, $AB > BC$ </p> 
Співвідношення між сторонами й кутами прямокутного трикутника	
 $\frac{a}{c} = \sin \alpha$ $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$	$a = c \cdot \sin \alpha, \quad b = c \cdot \cos \alpha, \quad a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ $c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\cos \alpha}$ $b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$
Види задач на розв'язування прямокутних трикутників	
Задача	Алгоритм розв'язування
<p>Дано: a, b Знайти: $c, \angle A, \angle B$</p> 	<ol style="list-style-type: none"> $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, $\angle B = 90^\circ - \angle A$
<p>Дано: a, c Знайти: $b, \angle A, \angle B$</p> 	<ol style="list-style-type: none"> $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $\sin A = \frac{a}{c}$, $\angle B = 90^\circ - \angle A$
<p>Дано: c, α Знайти: $a, b, \angle B$</p> 	<ol style="list-style-type: none"> $\angle B = 90^\circ - \alpha$, $a = c \cdot \sin \alpha$, $b = c \cdot \cos \alpha$
<p>Дано: a, α Знайти: $c, b, \angle B$</p> 	<ol style="list-style-type: none"> $\angle B = 90^\circ - \alpha$, $c = \frac{a}{\sin \alpha}$, 3) $b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$

Розв'яжіть задачі

Чотирикутники

- 1283.** Точки E і F — середини протилежних сторін AB і CD паралелограма — сполучено з вершинами B і D . Доведіть, що:
 1) $\triangle ADE = \triangle CBF$;
 2) $DE \parallel FB$.
- 1284.** Якщо сполучити точки E і F , задані в попередній задачі, то паралелограм розіб'ється на чотири рівні трикутники. Доведіть.
- 1285.** Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 5 см. Бісектриси кутів, прилеглих до меншої сторони, перетинають продовження протилежної їй сторони в точках M і N . Знайдіть довжину відрізка MN .
- 1286.** Діагоналі паралелограма дорівнюють d_1 і d_2 . Через вершини паралелограма проведено прямі, паралельні діагоналям, до взаємного їх перетину. Якого виду утворений чотирикутник? Знайдіть його периметр.
- 1287.** У паралелограмі бісектриса тупого кута, що дорівнює 120° , ділить сторону на відрізки 24 см і 16 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайдіть відрізки, на які ця бісектриса ділить більшу діагональ паралелограма.
- 1288.** Через середини сторін паралелограма проведено перпендикулярні до них прямі. Якого виду чотирикутник, утворений цими прямими?
- 1289.** Сторони паралелограма відносяться як 7 : 11, а діагоналі дорівнюють 24 см і 28 см. Знайдіть периметр паралелограма.
- 1290.** Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 15 см, а різниця їхніх діагоналей — 2 см. Знайдіть діагоналі паралелограма.
- 1291.** У прямокутнику діагональ ділить кут у відношенні 2 : 3. Знайдіть гострий кут між діагоналями прямокутника.
- 1292.** Знайдіть висоту ромба, якщо його сторона дорівнює a , а кут — 150° .
- 1293.** Доведіть, що висоти ромба рівні.
- 1294.** Знайдіть гострий кут ромба, якщо його периметр дорівнює 16 см, а висота — 2 см.


qr.orioncentr.com.ua/2ASiR

- 1295.** Діагональ ромба розбиває його на два трикутники. Знайдіть довжину цієї діагоналі, якщо сума периметрів обох трикутників на 15 см більша за периметр ромба.
- 1296.** Сума периметрів чотирьох трикутників, на які розбивається квадрат його діагоналями, більша за периметр квадрата на 20 см. Чому дорівнює діагональ квадрата?
- 1297.** Доведіть, що в рівнобічній трапеції квадрат діагоналі дорівнює квадрату бічної сторони, доданому до добутку основ.
- 1298.** Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.
- 1299.** У трапеції $ABCD$ з основами AD і BC кут A гострий, а кут D — тупий. Доведіть, що різниця проєкцій бічних сторін трапеції на основу дорівнює різниці основ.

Подібність трикутників

000

- 1300.** Поділ відрізка на два відрізки, більший з яких відноситься до меншого як весь відрізок до більшої його частини, має назву *золотий переріз*. Це відношення наближено дорівнює 1,62. Щоб одержати такий поділ відрізка AB , побудуйте на ньому, як на катеті, прямокутний трикутник ABC ($BC < AB$). На гіпотенузі AC від вершини C відкладіть відрізок $CM = BC$, а на катеті AB від вершини A — відрізок $AO = CM$. Точка O ділить відрізок AB у відношенні *золотого перерізу*. Виконайте побудову, виміряйте одержані відрізки й перевірте, чи справджується відношення *золотого перерізу*.


qr.orioncentr.com.ua/kTLD5

- 1301.** Відношення *золотого перерізу* в пропорціях тіла дорослої людини з прадавніх часів вважають основою краси й гармонії людської статури. У такому відношенні перебувають відстані від підшви ступні до кінця середнього пальця опущеної руки та від нього до верхівки голови; відстань від ліктьового згину до кисті та довжина кисті; відстані від передпліччя до ліктьового згину та від ліктьового згину до кінця кисті та ін. Виміряйте на собі ці відстані та знайдіть їхні відношення.
- 1302.** Прямокутник зі сторонами 10 і 16 називають *золотим*. Якщо від нього відрізати квадрат зі стороною 10, одержимо також *золотий* прямокутник. Квадрат з якою довжиною сторони потрібно відріза-

ти від цього другого прямокутника, щоб знову одержати золотий прямокутник? Сформулюйте узагальнене правило.

1303. У прямокутному трикутнику один із катетів продовжено за вершину прямого кута на деякий відрізок. Із побудованої точки проведено перпендикуляр до гіпотенузи трикутника. Які з утворених при цьому трикутників подібні даному трикутнику?

1304. Через вершини трикутника зовні нього проведено прямі, послідовно перпендикулярні до кожної його сторони. Від перетину цих прямих утворився трикутник. Чи подібний він даному трикутнику? Відповідь поясніть.

1305. Бісектриси зовнішніх кутів трикутника утворюють трикутник. Чи подібний він даному трикутнику? Відповідь поясніть.

1306. $ABCK$ і $MKTP$ — рівні квадрати зі спільною вершиною K . Сторони CK і KT взаємно перпендикулярні. Знайдіть площу чотирикутника $ASTM$, якщо $AB = 6$ см.

1307. З вершин гострих кутів паралелограма проведено висоти. Чи подібні утворені при цьому трикутники? Відповідь поясніть.

1308. Теорема Птолемея. Доведіть, що у вписаному чотирикутнику добуток діагоналей дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

1309. З точки M , що лежить поза колом радіуса 6 см, проведено до нього дві дотичні. Знайдіть відстань між точками дотику, якщо відстань від точки M до центра кола дорівнює 10 см.

1310. Трикутник ABC вписаний у коло. Бісектрису його кута C продовжено до перетину з колом, а одержану на колі точку сполучено з вершиною A . Знайдіть усі подібні трикутники, які при цьому утворилися.

Розв'язування прямокутних трикутників

000

1311. Знайдіть діагоналі рівнобічної трапеції з основами 3 см і 5 см та бічною стороною 7 см.

1312. Довжини катетів прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайдіть значення синуса й косинуса гострого кута між гіпотенузою та проведеною до неї медіаною.

1313. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а бічна сторона — 10 см. Знайдіть синуси кутів:
1) при більшій основі;
2) між діагоналлю й середньою лінією трапеції.

- 1314.** Знайдіть значення синуса й косинуса найменшого кута прямокутного трикутника, якщо:
- 1) $a - b = 17$ см, $c = 25$ см;
 - 2) $c - a = 1$ см, $c - b = 50$ см;
 - 3) $c + a = 49$ см, $c + b = 50$ см.
- 1315.** Точка A лежить на відстані 2 см від кола радіусом 3 см. Знайдіть косинус кута між дотичними, проведеними з точки A до цього кола.
- 1316.** Радіус кола дорівнює R . Знайдіть довжину хорди цього кола, яка стягує дугу n° .
- 1317.** a і b — катети прямокутного трикутника, c — гіпотенуза, A і B — гострі кути. Заповніть таблицю 42.



qr.orioncentr.com.ua/gjQ71

Таблиця 42

Елемент трикутника	1	2	3	4	5	6	7	8
a			47,2	10,2	17		12,7	
b						75	13,4	8
c	13,5	0,25			20			12
$\angle A$	40°		67°			52°		
$\angle B$		32°		53°				

- 1318.** Діагональ прямокутника дорівнює 32,5 см і ділить його кут у відношенні 4 : 11. Знайдіть периметр прямокутника.
- 1319.** Дві взаємно перпендикулярні хорди AB і AC дорівнюють 38,5 см і 21,3 см. Під якими кутами вони нахилені до діаметра AM ?
- 1320.** Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо кут між бічними сторонами дорівнює $47^\circ 12'$, а сума основи й бічної сторони — 59,4 см.
- 1321.** Два кола радіусами 3 см і 12 см дотикаються зовнішньо. Знайдіть кут між спільними зовнішніми дотичними цих кіл.

Многокутники. Площі многокутників

000



- 1322.** Раніше циркуль називали «шестернею». Така назва пов'язана з тим, що коли розхил циркуля дорівнює радіусу кола, то це коло можна поділити на 6 рівних частин. Перевірте це практично.



- 1323.** У шестикутнику є три пари рівних кутів. Відомо, що один кут дорівнює 120° , а два інші відносяться як 7 : 9. Знайдіть кути шестикутника.


qr.orioncentr.com.ua/rasRs

- 1324.** Сторони прямокутника відносяться як 8 : 15, а його діагональ дорівнює 34 см. Знайдіть площу прямокутника.

- 1325.** У паралелограмі одна зі сторін дорівнює 10 см, а один із кутів — 30° . Знайдіть площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює 56 см.

- 1326.** Знайдіть площу ромба зі стороною 4 см, якщо радіус вписаного кола дорівнює 1,5 см.



- 1327.** Висота трикутника дорівнює 4 см. Вона ділить сторону, до якої проведена, у відношенні 1 : 8. Знайдіть довжину відрізка з кінцями на сторонах трикутника, який паралельний висоті й ділить трикутник на частини з рівними площами.

- 1328.** Довжини найбільшої та найменшої сторін трикутника дорівнюють 6 см і 13 см. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо потроєний квадрат його найменшої висоти дорівнює добутку двох інших висот трикутника.

- 1329.** Висота трапеції втричі більша за одну з її основ, але вдвічі менша від її другої основи. Знайдіть основи трапеції, якщо її площа дорівнює 168 см^2 .



- 1330.** У трапеції $ABCD$ через середину O діагоналі AC проведено пряму MN паралельно діагоналі BD ($M \in AB$, $N \in AD$). Чи поділить навпіл площу трапеції відрізок:
1) DM ; 2) BN ?
Відповідь поясніть.

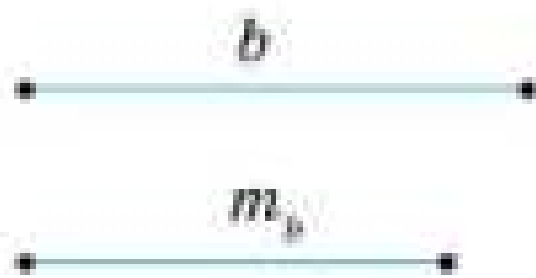
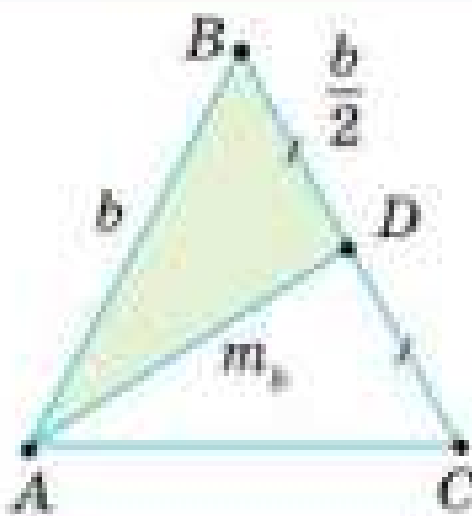
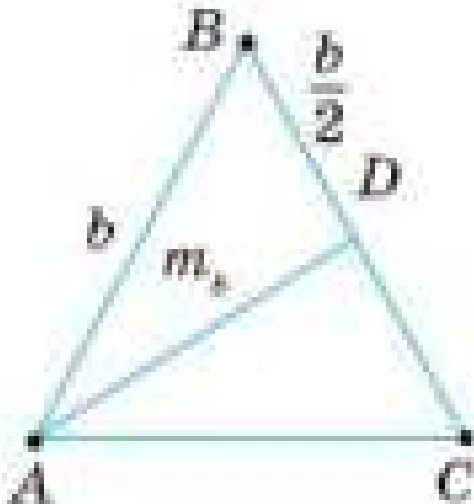
- 1331.** Двоє сходів мають однакові основи m (довжина за горизонталлю) й однакові висоти h (довжина за вертикаллю від основи до верхньої площадки). Чи однакової довжини знадобляться килимові доріжки, щоб покрити ці сходи, якщо одні сходи складаються з 9 сходинок, а другі — із 12 сходинок?

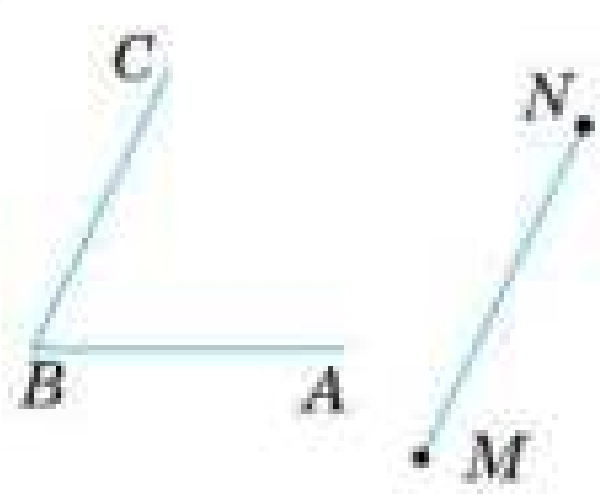
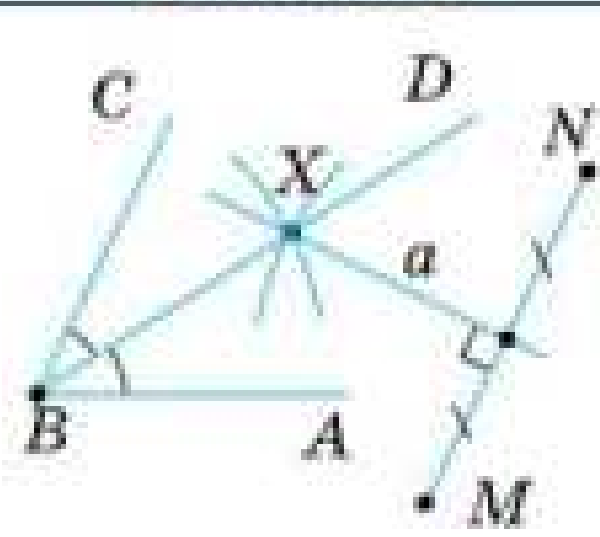




ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

1. ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

<p>За допомогою лінійки можна провести:</p> <ul style="list-style-type: none"> • довільну пряму; • пряму, що проходить через дану точку; • пряму, що проходить через дві дані точки 	<p>За допомогою циркуля можна:</p> <ul style="list-style-type: none"> • провести коло з даного центра даним радіусом; • відкласти відрізок заданої довжини на промені від його початку
Ніяких інших операцій виконувати циркулем і лінійкою не можна	
МЕТОД ДОПОМІЖНОГО ТРИКУТНИКА	
Задача	Аналіз
<p>Дано:</p>  <p>Побудувати $\triangle ABC$ так, щоб $AB = BC = b$, $AD = m_b$, $(D — середина BC)$</p>	 <p>1) виконуємо малюнок-ескіз; 2) $\triangle ABD$ — допоміжний ($AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$); 3) $BC = b$</p>
Побудова	Доведення
 <p>Будуємо:</p> <p>1) $\triangle ABD$ за трьома сторонами $AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$;</p> <p>2) відрізок $BC = b$ на промені BD; 3) відрізок AC; $\triangle ABC$ — шуканий</p>	<p>У $\triangle ABC$ $AB = BC = b$, $AD = m_b$, $(D — середина BC)$ за побудовою</p>

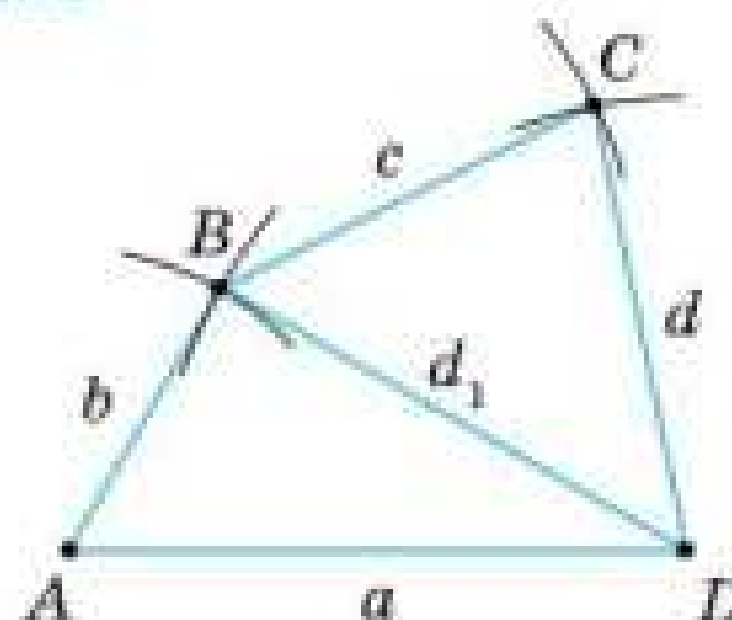
МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ	
Задача	Аналіз
<p>Дано:</p>  <p>Побудувати точку X, рівновіддалену від сторін кута ABC і точок M, N</p>	<p>Точка X:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) рівновіддалена від сторін кута ABC; 2) рівновіддалена від точок M і N <p>ГМТ, що задовольняє:</p> <ul style="list-style-type: none"> • умову 1 — бісектриса кута ABC; • умову 2 — серединний перпендикуляр до відрізка MN <p>X — точка перетину цих ГМТ</p>
Побудова	Доведення
 <p>Будуємо:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) бісектрису BD кута ABC; 2) серединний перпендикуляр a до відрізка MN; 3) X — точку перетину BD і a 	<p>$X \in BD$, тому X рівновіддалена від сторін кута ABC</p> <p>$X \in a$, тому $MX = NX$</p>

2. Побудова чотирикутників

1332. На малюнку 536 побудовано чотирикутник $ABCD$ за чотирма його сторонами a, b, c, d і діагоналлю d_1 . Складіть план побудови.



Щоб побудувати чотирикутник, побудуйте два допоміжні трикутники, з яких складається чотирикутник.



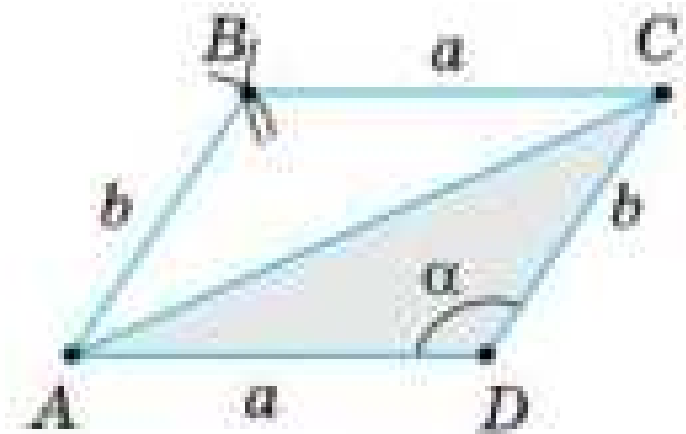
Мал. 557

Наприклад (мал. 557), спочатку побудуйте $\triangle ABD$, а потім — $\triangle BCD$. Для побудови трикутника ABD потрібно знати три його елементи, а для побудови трикутника BCD — лише два, бо сторона BD вже побудована.

1333. Побудуйте чотирикутник за чотирма його сторонами a, b, c, d і кутом α .

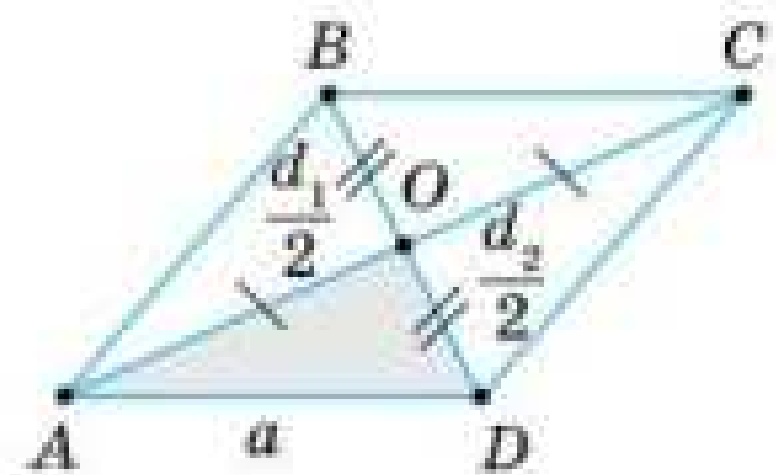
1334. Побудуйте чотирикутник за його сторонами a, b, c та діагоналями d_1 і d_2 .

1335. Складіть план побудови паралелограма:
1) за сторонами a, b і кутом α (мал. 558);
2) за стороною a та діагоналями d_1 і d_2 (мал. 559).



Мал. 558

 Щоб побудувати паралелограм (ромб), спочатку побудуйте допоміжний трикутник ($\triangle ADC$ на мал. 558 або $\triangle AOD$ на мал. 559). Потім добудуйте цей трикутник до паралелограма (ромба), спираючись на властивості паралелограма (ромба).



Мал. 559

1336. Побудуйте паралелограм:

- 1) за сторонами a і b та діагоналлю d ;
- 2) за діагоналями d_1 і d_2 та кутом α між ними;
- 3) за стороною a , діагоналлю d і кутом α , який лежить проти цієї діагоналі;
- 4) за стороною a , діагоналлю d і кутом α між ними.

1337. Побудуйте ромб:

- 1) за діагоналями d_1 і d_2 ;
- 2) за стороною a й діагоналлю d ;
- 3) за стороною a й кутом α .

1338. Побудуйте ромб за гострим кутом α й діагоналлю d , яка виходить із вершини цього кута.

1339. Побудуйте паралелограм за двома його висотами h_1 і h_2 , проведеними з однієї вершини, і кутом α між ними.

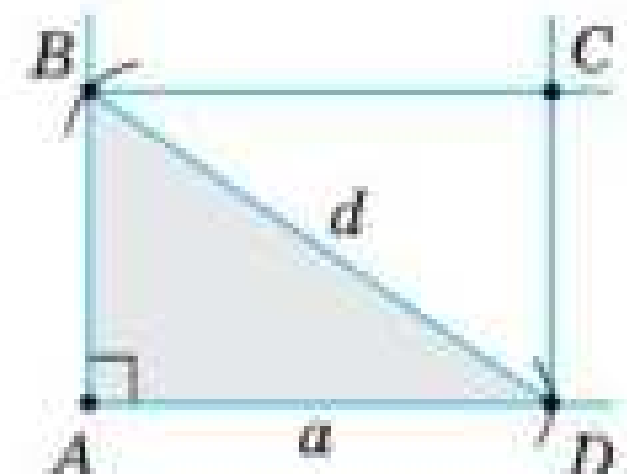
1340. Побудуйте ромб за його периметром $2p$ і висотою h .

1341. За малюнком 539 складіть план побудови прямокутника за стороною a й діагоналлю d .

 Щоб побудувати прямокутник, як і паралелограм, спочатку побудуйте допоміжний трикутник, а потім добудуйте його до прямокутника.

Допоміжним може бути:

- або прямокутний трикутник (мал. 560);
або рівнобедрений трикутник (мал. 561).



Мал. 560

1342. Побудуйте прямокутник:

- 1) за діагоналлю d і кутом α між діагоналлю та стороною;
- 2) за діагоналлю d і кутом α між діагоналями.

1343. Побудуйте квадрат:

- 1) за стороною a ;
- 2) за діагоналлю d .

1344. Побудуйте прямокутник:

- 1) за діагоналлю d і сумою s двох нерівних сторін;
- 2) за діагоналлю d і різницею m двох сторін.

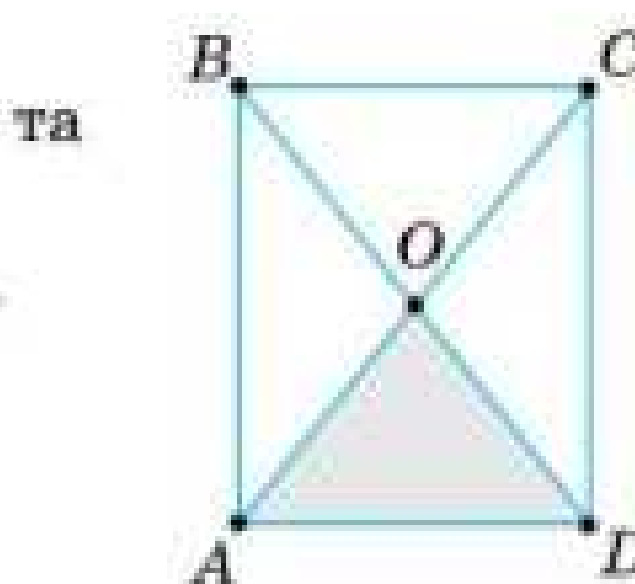
1345. Побудуйте квадрат:

- 1) за сумою s діагоналі та сторони;
- 2) за різницею m діагоналі та сторони.

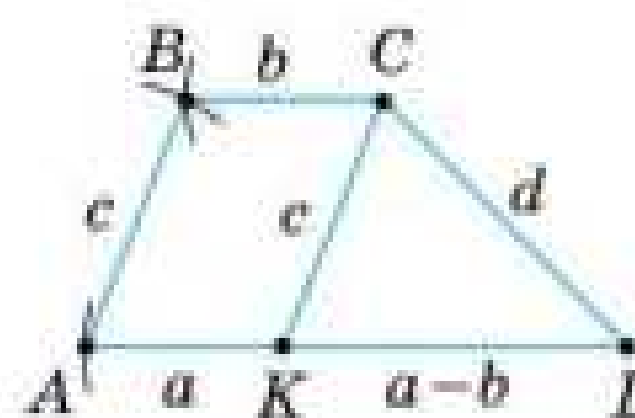
1346. За малюнком 541 складіть план побудови трапеції $ABCD$ за основами a і b ($a > b$) та бічними сторонами c і d .



Щоб побудувати трапецію, як і паралелограм, спочатку побудуйте допоміжний трикутник (наприклад, $\triangle KCD$ на мал. 562), а потім добудуйте його до трапеції.



Мал. 561



Мал. 562

1347. Побудуйте трапецію за основами a і b ($a > b$) та діагоналями d_1 і d_2 .

1348. Побудуйте трапецію за основою a , висотою h і двома діагоналями d_1 і d_2 .



Якщо потрібно побудувати чотирикутник за його елементами й радіусом описаного кола, то спочатку побудуйте коло даного радіуса, а потім на колі — інші елементи, дані в умові задачі.

1349. Побудуйте чотирикутник за радіусом R описаного кола та сторонами a , b , c .

1350. Побудуйте прямокутник за радіусом R описаного навколо нього кола і:

- 1) стороною a ;
- 2) кутом α між діагоналями.

3. Побудова трикутників методом подібності

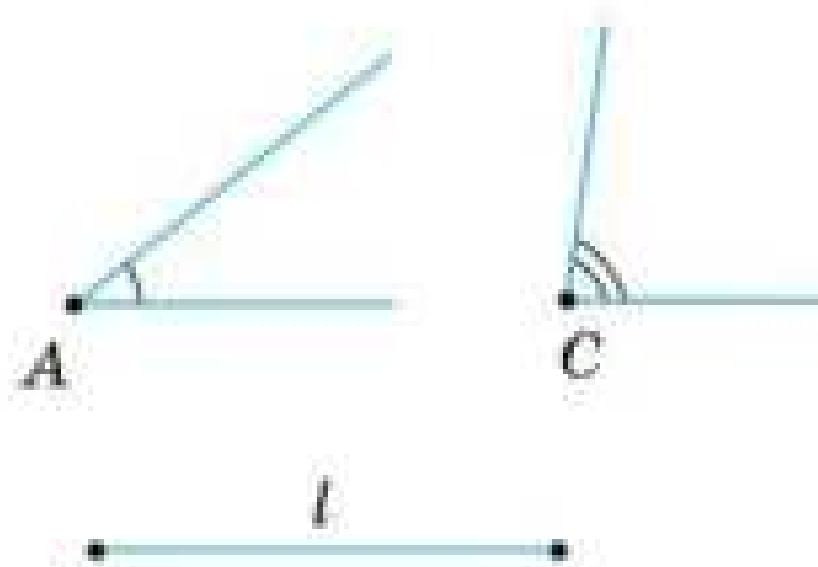
Подібність трикутників застосовують не лише в задачах на доведення чи обчислення, а й у задачах на побудову.

Задача Побудуйте трикутник за двома кутами A і C та бісектрисою l кута B .

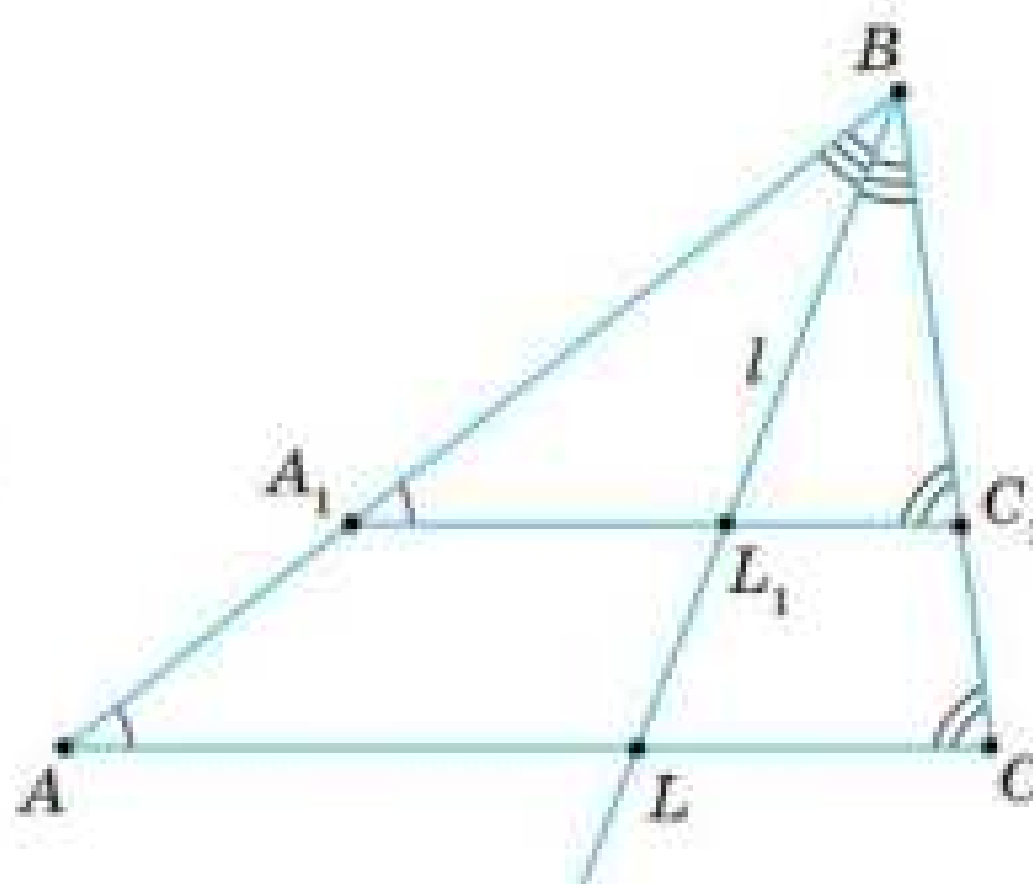
Побудувати. $\triangle A_1BC_1$, у якому $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, l — бісектриса кута B .

Розв'язання

Аналіз (мал. 563). Кути A і C визначають трикутники, подібні шуканому, а бісектриса — розміри шуканого трикутника.



Мал. 563



Нехай $\triangle A_1BC_1$ — шуканий. Відкинемо вимогу задачі, що l — бісектриса кута B , тобто що $BL_1 = l$. Тоді можна побудувати допоміжний $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ за двома даними кутами A і C . Через точку L_1 на бісектрисі кута B ($BL_1 = l$) проходить пряма $A_1C_1 \parallel AC$, яка відтинає від трикутника ABC подібний йому трикутник. Отже, вершини A_1 і C_1 шуканого трикутника є точками перетину прямої A_1C_1 зі сторонами BA і BC відповідно допоміжного трикутника ABC .

Побудова.

1. Будуємо допоміжний $\triangle ABC$ за двома кутами A і C .
2. Проводимо бісектрису BL кута B .
3. На промені BL відкладаємо відрізок $BL_1 = l$.
4. Через точку L_1 проводимо пряму $A_1C_1 \parallel AC$.

Доведення.

За побудовою, у трикутнику A_1BC_1 : $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, BL_1 — бісектриса кута B і $BL_1 = l$. Отже, $\triangle A_1BC_1$ — шуканий.

Спосіб застосування подібності трикутників у задачах на побудову називають *методом подібності*.



Щоб розв'язати задачу на побудову трикутника методом подібності:

- 1) виділіть з умови задачі ті дані, які визначають форму шуканого трикутника;
- 2) побудуйте за цими даними допоміжний трикутник, подібний шуканому;
- 3) побудуйте шуканий трикутник, використавши ті дані умови, які визначають його розміри.

- 1351.** Побудуйте трикутник за двома кутами й бісектрисою. Скільки випадків слід розглянути?
- 1352.** Побудуйте трикутник за його периметром P та двома гострими кутами α і β .
- 1353.** Побудуйте трикутник за відношенням сторін та:
1) найбільшою медіаною;
2) найменшою висотою.
- 1354.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за:
1) кутом при вершині та сумою основи й висоти;
2) відношенням двох нерівних сторін та висотою, проведеною до бічної сторони.
- 1355.** У дане коло впишіть трикутник:
1) подібний даному трикутнику;
2) сторони якого паралельні сторонам даного трикутника.
- 1356.** Побудуйте трикутник за двома кутами та найбільшою висотою.
- 1357.** Побудуйте трикутник за двома кутами та найменшою медіаною.
- 1358.** Побудуйте трикутник за відношенням двох сторін, кутом між ними та бісектрисою цього кута.
- 1359.** Побудуйте трикутник за серединами відрізків, які сполучають центр вписаного кола з вершинами.
- 1360.** Як побудувати відрізок, що є середнім пропорційним між двома даними відрізками a і b ?
- 1361.** Побудуйте прямокутний трикутник за найменшою висотою та відношенням проєкцій катетів на гіпотенузу.
- 1362.** Впишіть у трикутник ABC квадрат так, щоб дві його вершини лежали на більшій стороні трикутника, а дві інші вершини — на двох інших його сторонах.
- 1363.** Впишіть у трикутник ABC такий трикутник, сторони якого відповідно перпендикулярні до сторін трикутника ABC .
- 1364.** Впишіть у трикутник ABC прямокутник, у якому основа втричі більша за висоту й лежить на основі трикутника, а дві вершини лежать на його бічних сторонах.

ТАБЛИЦЯ СИНУСІВ І КОСИНУСІВ

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	β
0°	0,000	1,000	90°
1°	0,017	1,000	89°
2°	0,035	0,999	88°
3°	0,052	0,999	87°
4°	0,070	0,998	86°
5°	0,087	0,996	85°
6°	0,105	0,995	84°
7°	0,122	0,993	83°
8°	0,139	0,990	82°
9°	0,156	0,988	81°
10°	0,174	0,985	80°
11°	0,191	0,982	79°
12°	0,208	0,978	78°
13°	0,225	0,974	77°
14°	0,242	0,970	76°
15°	0,259	0,966	75°
16°	0,276	0,961	74°
17°	0,292	0,956	73°
18°	0,309	0,951	72°
19°	0,326	0,946	71°
20°	0,342	0,940	70°
21°	0,358	0,934	69°
22°	0,375	0,927	68°
23°	0,391	0,921	67°
24°	0,407	0,914	66°
25°	0,423	0,906	65°
26°	0,438	0,899	64°
27°	0,454	0,891	63°
28°	0,469	0,883	62°
29°	0,485	0,875	61°
30°	0,500	0,866	60°
31°	0,515	0,857	59°
32°	0,530	0,848	58°
33°	0,545	0,839	57°
34°	0,559	0,829	56°
35°	0,574	0,819	55°
36°	0,588	0,809	54°
37°	0,602	0,799	53°
38°	0,616	0,788	52°
39°	0,629	0,777	51°
40°	0,643	0,766	50°
41°	0,656	0,755	49°
42°	0,669	0,743	48°
43°	0,682	0,731	47°
44°	0,695	0,719	46°
45°	0,707	0,707	45°
α	$\cos \beta$	$\sin \beta$	β

Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ТАНГЕНСІВ

α	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\operatorname{tg} \alpha$	α	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,062	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	67°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	53°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

Додаток 3

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	589	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801



ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

РОЗДІЛ 1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ВИВЧЕНОГО В 7 КЛАСІ

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості

1. 1) Одну; 2) дві або три; 2) одну, чотири або шість. 5. 1) Так; 2) ні. 6. 15 км. 7. 6 см. 8. 36 см. 9. *Вказівка*: 2) перегніть шматок тканини навпіл, потім одну з половинок перегніть ще раз навпіл. Четвертину, яка ближче до середини, знову перегніть навпіл. 10. 8 км. 11. 1 км або 3 км. 12. 800 м. 13. 8 см. 14. 1) Ні; 2) так. 15. 1) 6° ; 2) 30° ; 3) 60° .

Взаємне розміщення прямих на площині

16. 1) 73° , 107° ; 2) 45° , 135° . 17. 60° , 120° . 18. 1) 42° , 42° , 138° , 138° ; 2) 111° , 111° , 69° , 69° . 19. 45° , 45° , 135° , 135° . 20. *Вказівка*: спочатку перегніть аркуш паперу по даній прямій AB так, щоб дана точка O була на видимій стороні аркуша. Не розгортаючи аркуш, перегніть його ще раз так, щоб лінія згину пройшла через точку O , а частини лінії першого згину збіглися. 21. Ні. 22. 1) 4 см або 20 см; 2) 10 см або 2 см. 23. 1) 4; 2) 4; 3) 8. 24. 60° , 60° , 60° , 60° , 120° , 120° , 120° , 120° . 25. 45° , 45° , 45° , 45° , 135° , 135° , 135° , 135° . 26. *Вказівка*: позначте внутрішні односторонні кути α і β . Доведіть, що $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \neq 180^\circ$. 27. *Вказівка*: скористайтесь наслідком з теореми про ознаку паралельності прямих. 28. *Вказівка*: за допомогою перегинання проведіть пряму, перпендикулярну до даної прямої (див. задачу 20). Потім проведіть через дану точку перпендикуляр до побудованої прямої. Остання пряма буде паралельною даній. 29. 1) Усі по 90° ; 2) 25° , 25° , 155° , 155° ; 3) 60° , 60° , 120° , 120° . 30. 1) 70° і 110° ; 2) 20° і 160° .

Трикутники

31. 1) Ні; 2) так. 32. 1) Ні; 2) так. 33. 1) Збільшиться на 9 см; 2) збільшиться у 3 рази; 3) зменшиться в 1,5 рази; 4) зменшиться на 4,5 см. 34. 1) Зменшиться на 4 см; 2) збільшиться в 6 разів. 35. 36 см. 36. 9 см. 37. 5 см. 38. 4 см. 39. 1) 6 см; 2) 7,5 см. 40. 4 м. 41. 1) $AC = 10$ см; 2) $\angle BAD = 72^\circ$. 42. 8 см. *Вказівка*: доведіть рівність $OC = OD$. 43. *Вказівка*: 1) скористайтесь властивістю рівнобедреного трикутника та другою ознакою рівності трикутників; 2) скористайтесь властивістю рівнобедреного трикутника та ознакою рівності прямокутних трикутників; 3) скористайтесь властивістю рівнобедреного трикутника та першою ознакою рівності трикутників. 44. *Вказівка*: скористайтесь означенням бісектриси кута і наслідком із властивості паралельних прямих. 45. 1) 72° , 72° ; 2) 60° , 90° . 46. 35° , 95° . 47. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 48. 30° , 60° , 90° . 49. 45° ; 45° ; 90° . 50. *Вказівка*: від вершини прямого кута, що утворюють краї дошки, відкладіть уздовж дошки відстань, яка дорівнює її ширині. Одержану точку сполучіть із вершиною протилежного прямого кута дошки. 51. 50° , 60° , 70° . 52. 90° .

Коло і круг

55. 1) 24 см; 2) 14 см. 56. 8 см. 57. 6 см і 2 см. 58. $\frac{m-n}{2}$ або $\frac{m+n}{2}$. 59. 2 мм.
 60. 4 см і 5 см. 61. 1) Ні; 2) так. 62. *Вказівка*: найкоротший маршрут катера збігається з хордою, перпендикулярною до радіуса, що проходить через острів. Якщо ж острів розташований у центрі кола, то всі маршрути матимуть однакову довжину. 63. 1) Коло з радіусом $\frac{R}{2}$; 2) Коло з радіусом $2R$. 64. *Вказівка*: магістраль повинна проходити через середину відрізка AB , де A і B — дані населені пункти. 65. *Вказівка*: скористайтесь властивістю серединного перпендикуляра до відрізка. 66. *Вказівка*: нехай A, B, C — дані населені пункти. Розглянемо випадок, коли два з даних населених пунктів, наприклад A і B , лежать по одну сторону магістралі, а третій — по іншу. Тоді магістраль проходитиме через середини відрізків AC і BC . 67. *Вказівка*: нехай A, B, C — точки розміщення дачних будинків, які не лежать на одній прямій. Проведіть серединні перпендикуляри до відрізків AB і BC . Точка O їх перетину — шукана, оскільки рівновіддалена від точок A, B , і C . 68. 3 см. 69. 4 см.

РОЗДІЛ 2. ЧОТИРИКУТНИКИ

§ 1. Чотирикутник

72. 1) Ні; 2) так. 73. Мал. 16. 74. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 75. 2). 76. Ні (мал. 18); так (мал. 19). 77. 1) $\angle ENM, \angle FNP$; 2) $\angle AMN, \angle CMK$; 3) $\angle DKM, \angle BKP$. 79. 5 см, 45 см, 45 см, 45 см. 80. 30 см, 60 см, 60 см, 60 см. 81. 1) Так; 2) ні. 82. Ні. 83. $100^\circ, 100^\circ, 100^\circ$ (мал. 21); $100^\circ, 100^\circ$ (мал. 22). 84. 60° . 85. 1) 60° ; 2) 70° . 86. 150° . 87. 1) Ні; 2) ні. 88. Так. 90. Ні. 91. $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$. 92. 180° . 93. *Вказівка*: знайдіть градусну міру четвертого кута. 94. 1) 105° ; 2) 90° . 95. 1) 100° ; 2) 60° . 96. Чотирикутником. 97. 5 граней і 8 ребер. 98. 15 см, 7 см, 23 см, 21 см. 99. 64 см. 100. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 101. *Вказівка*: скористайтесь нерівністю трикутника. 102. *Вказівка*: скористайтесь нерівністю трикутника. 103. *Вказівка*: скористайтесь ознакою рівності трикутників за стороною і прилеглими кутами. 104. *Вказівка*: скористайтесь ознакою рівності трикутників за трьома сторонами і властивістю рівнобедреного трикутника ABC . 105. 1) $36^\circ, 72^\circ, 108^\circ, 144^\circ$; 2) $40^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 140^\circ$. 106. $30^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ$. 107. 1) 2; 2) 4; 3) 2. 108. 1) Ні; 2) ні. 109. 90° . 110. 1) $142^\circ, 22^\circ, 136^\circ, 60^\circ$; 2) $131^\circ, 35^\circ, 89^\circ, 105^\circ$. 111. $130^\circ, 30^\circ, 115^\circ, 85^\circ$. 112. *Вказівка*: сума зовнішніх кутів чотирикутника дорівнює сумі кутів, суміжних із кутами цього чотирикутника. 113. 1) Так; 2) ні. 114. Так. 115. *Вказівка*: сума зовнішніх кутів чотирикутника вдвічі більша за суму його кутів. 116. 115° (мал. 25); 160° (мал. 26). 117. 100° . 118. 10 см. 119. *Вказівка*: нехай O — точка перетину діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$. Запишіть нерівності для сторін трикутників AOB і COD та зробіть висновок. 120. *Вказівка*: у $\triangle ABM \angle M = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle B$, у $\triangle CDN \angle N = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle C - \frac{1}{2}\angle D$. Додайте ці рівності та зробіть висновок. 122. 48 штук. 124. 3) *Вказівка*: місце будівництва заводу — точка перетину діагоналей чотирикутника.

§ 2. Паралелограм та його властивості

125. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 126. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 127. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. 128. Ні (мал. 37); ні (мал. 38). 129. 1,2 дм, 0,4 дм. 130. 10 см, 5 см. 132. 1) 3 см, 21 см, 3 см, 21 см; 2) 15,5 см, 8,5 см, 15,5 см, 8,5 см. 133. 6,5 см, 9,5 см, 6,5 см, 9,5 см. 134. $AB = CD = 4$ см, $AD = BC = 6$ см (мал. 39); $AB = CD = 10$ см, $AD = BC = 10$ см (мал. 40). 135. $AB = CD = 6$ см, $AD = BC = 6,8$ см. 136. Вказівка: скористайтесь властивістю внутрішніх односторонніх кутів. 137. 1) 120° , 60° ; 2) 90° , 90° . 138. 45° , 135° . 139. 35° , 145° , 35° , 145° ; 40° , 140° , 40° , 140° ; 75° , 105° , 75° , 105° ; 116° , 64° , 116° , 64° . 140. 1) Ні; 2) ні. 141. Ні. 142. $\angle A = \angle C = 45^\circ$, $\angle B = \angle D = 135^\circ$ (мал. 42); $\angle A = \angle C = 50^\circ$, $\angle B = \angle D = 130^\circ$ (мал. 43). 143. $\angle A = \angle C = 60^\circ$, $\angle B = \angle D = 120^\circ$. 144. 1) 65° , 115° , 65° , 115° ; 2) 60° , 120° , 60° , 120° . 145. 135° , 45° , 135° , 45° . 146. Вказівка: скористайтесь ознакою рівності трикутників за трьома сторонами. 147. Ні. 148. 1) $OC = 6$ см, $OD = 3$ см; 2) $AC = 12$ см, $BD = 6$ см; 3) $AD = 8$ см, $DC = 5$ см. 149. Вказівка: врахуйте, що протилежні кути паралелограма попарно рівні. 150. Вказівка: врахуйте, що протилежні сторони паралелограма попарно рівні. 151. Вказівка: доведіть, що трикутник, який утворюють бісектриси зі стороною паралелограма, — прямокутний. 152. Вказівка: скористайтесь ознакою паралельності прямих. 153. 1) 70 см; 2) 14 см. 154. 1) 6 см, 3 см; 2) 15 см. 155. 40 см. 156. Вказівка: скористайтесь ознакою рівнобедреного трикутника. 157. 30 см. 158. Вказівка: доведіть рівність відповідних трикутників. 159. По 9 см. 160. 1) 80° , 100° , 80° , 100° ; 2) 54° , 126° , 54° , 126° . 161. 1) 160° , 20° , 160° , 20° ; 2) 72° , 108° , 72° , 108° . 162. 1) 72° , 108° , 72° , 108° ; 2) 120° , 60° , 120° , 60° . 163. 60° (мал. 50); 50° (мал. 51). 164. 120° . 165. Вказівка: проведіть висоти з вершини тупого кута паралелограма й розгляньте утворені прямокутні трикутники. 166. 1) 35° , 145° , 35° , 145° ; 2) 45° , 135° , 45° , 135° ; 3) 89° , 91° , 89° , 91° . 167. 16° , 96° . 168. 45° , 135° , 45° , 135° . 169. 9,6 см, 14,4 см, 9,6 см, 14,4 см. 170. 6 см. 171. 1) 45° ; 2) 135° . 172. 2 см або 4 см. 173. 10 см, 15 см, 10 см, 15 см. 174. Сторони відносяться як 1 : 2. 175. 7 см, 14 см, 7 см, 14 см. 176. 1) $AB \parallel CD$.

§ 3. Ознаки паралелограма

178. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 180. За ознакою паралелограма. 181. На мал. 64. 184. 1) $MN = 4$ см, $LM = 6$ см; 2) $KL = 5,3$ дм, $NK = 3$ дм; 3) $MN = 1,5$ см, $NK = 25$ мм; 4) $KL = 0,3$ дм, $LM = 5$ см. 185. 1) $CD = 3$ см, $BC = 2$ см; 2) $AD = 2,5$ см, $AB = 3,7$ см. 186. Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма. 187. Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма. 188. 1) 4 см; 2) 2 см; 3) 120° ; 4) 60° . 189. 1) 35° ; 2) 5 см. 190. 1) $KL \parallel MN$; 2) $LM \parallel NK$; 3) $KL \parallel MN$; 4) $LM \parallel NK$. 191. 1) $AB \parallel CD$; 2) $AD \parallel BC$. 192. Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма. 193. Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма. 195. 1) $LO = 3$ см, $MO = 2$ см; 2) $KO = 1,9$ см, $NO = 3,5$ см. 196. Вказівка: кожний кут однієї пари рівних кутів позначте α , а іншої — β . Скористайтесь властивістю кутів чотирикутника, а потім ознакою паралельності прямих і ознакою паралелограма. 197. 1) Ні; 2) так. 198. Так. 199. Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма. 200. Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма: якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то такий чотирикутник — паралелограм. 201. Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма: якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони паралельні й рівні, то такий чотирикутник —

паралелограм. **202.** Вказівка: спочатку доведіть рівність трикутників EBM і KDN . **203.** Вказівка: спочатку доведіть, що $\triangle AKM = \triangle CNP$ і $\triangle BPK = \triangle DMN$. **204.** Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма. **205.** Вказівка: спочатку доведіть, що $AECF$ — паралелограм. **206.** Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма. **207.** Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма. **208.** Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма. **210.** Вказівка: спочатку доведіть рівність трикутників, а потім скористайтесь ознакою паралелограма. **211.** Вказівка: спочатку доведіть, що $MNKP$ — паралелограм, а потім скористайтесь властивістю паралелограма. **212.** Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма. **213.** Вказівка: скористайтесь ознакою паралельності прямих та ознакою паралелограма, а потім — властивістю паралелограма. **214.** Вказівка: доведіть, що чотирикутник — паралелограм та скористайтесь властивістю сторін паралелограма. **216.** Вказівка: спочатку доведіть рівність трикутників, а потім скористайтесь ознакою паралелограма. **217.** Вказівка: скористайтесь властивістю діагоналей паралелограма. **218.** Вказівка: скористайтесь ознакою паралельності прямих, а потім — ознакою паралелограма. **219.** Вказівка: скористайтесь ознакою паралелограма.

§ 4. Прямокутник

222. 1) Ні; 2) так. **223.** Так. **224.** Властивість діагоналей паралелограма. **225.** 1) Ні; 2) так. **226.** 1) Ні; 2) так. **227.** 1) $AD = 16$ см, $DC = 12$ см; 2) $BD = 20$ см; 3) $AO = OC = BO = OD = 10$ см. **228.** 54° , 36° , 54° . **229.** 1) по 6 см; 2) по 3 см; 3) по 9 мм. **230.** 1) 14 см і 14 см; 2) 28 см. **231.** Вказівка: скористайтесь властивостями діагоналей прямокутника. **232.** 35° , 125° , 55° (мал. 88); 30° , 60° , 30° (мал. 89). **233.** 65° , 130° , 25° . **234.** 30° (мал. 91); 60° (мал. 92). **235.** 90° . **237.** 1) 32 см; 2) 30 см. **238.** 56 см. **239.** 1) $LN = 4$ см; 2) $KM = 3$ дм; 3) $LN = 1,5$ дм; 4) $KL = 2,7$ см. **240.** 1) $BD = 2$ см; 2) $AC = 7$ см. **241.** Вказівка: доведіть рівність діагоналей KM і LN . **242.** Вказівка: доведіть рівність діагоналей AC і BD . **243.** Вказівка: доведіть, що всі кути даного паралелограма — прямі. **244.** Вказівка: доведіть, що паралелограм є прямокутником. **245.** 4 см і 20 см. **246.** 6 см і 24 см. **247.** 1) 2 см; 2) 7 мм; 3) 0,22 дм. **248.** 1) 20 см; 2) 0,5 дм; 3) 14 мм. **249.** Вказівка: скористайтесь тим, що кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60° . **250.** 1) 54° , 36° ; 2) 18° . **251.** 1) 9,6 см, 14,4 см; 2) 10 см, 14 см; 3) 8 см, 16 см. **252.** 1) 6 см; 2) 4,3 см. **253.** 1) 26 см або 22 см; 2) 14 см або 16 см. **254.** 1) 90° ; 2) 22,8 дм. **258.** Вказівка: обчисліть кути чотирикутника. **259.** Вказівка: нехай α — кут між діагоналлю та стороною паралелограма; знайдіть кути паралелограма. **260.** Вказівка: врахуйте, що сума кутів чотирикутника дорівнює 360° . **261.** Вказівка: врахуйте, що сума кутів чотирикутника дорівнює 360° . **262.** 12 см, 12 см, 13,1 см, 13,1 см. **263.** $2a - b$ (мал. 94); $b - 2a$ (мал. 95). **264.** 3 см, 3 см. **265.** Вказівка: через дану точку на основі проведіть пряму, паралельну бічній стороні трикутника; покажіть, що ця пряма відтинає від даного трикутника рівнобедрений трикутник, та скористайтесь властивістю висот, проведених до бічних сторін рівнобедреного трикутника. **266.** 2) 10 см. **271.** Вказівка: добудуйте трикутник до прямокутника; скористайтесь тим, що діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл. **272.** 1) $ABCD$ — прямокутник. **273.** Ні. **274.** Вказівка: можна, наприклад, перевірити, що в даного предмета протилежні сторони попарно рівні та діагоналі рівні. **275.** 2) Вказівка: у прямокутнику протилежні сторони рівні; 3) 20 см.

§ 5. Ромб. Квадрат

277. 1) Ні; 2) так. 278. Так. 279. Наприклад, взаємна перпендикулярність діагоналей. 280. 1) Ні; 2) так; 3) так. 281. 1) Ні; 2) так. 282. 1) Ні; 2) так. 283. Так. 284. Так. 285. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. 286. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. 287. Ні. 288. 1) $BC = AD = DC = 10$ см; 2) $AC = 16$ см, $BD = 12$ см. 289. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 25^\circ$. 290. 1) 0,6 дм; 2) 70 мм. 291. 3 см. 292. Вказівка: скористайтеся тим, що діагоналі ромба перпендикулярні й точкою перетину діляться навпіл. 293. Вказівка: скористайтеся означенням ромба й ознакою рівності трикутників за трьома сторонами. 294. $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = 25^\circ$, $\angle 2 = 65^\circ$, $\angle 5 = 90^\circ$. 295. 1) 18° , 72° ; 2) 27° , 63° . 296. 30° , 60° . 297. 60° , 120° , 60° , 120° . Вказівка: діагональ даного ромба розбиває його на два рівносторонні трикутники. 298. 1) 60° , 120° , 60° , 120° ; 2) 75° , 105° , 75° , 105° ; 3) 25° , 155° , 25° , 155° . 299. 70° , 110° , 70° , 110° (мал. 110); 36° , 144° , 36° , 144° (мал. 111). 300. 60° , 120° , 60° , 120° . 301. 1) 12,8 дм; 2) 180 мм. 302. 40 см. 303. 1) $KM \perp LN$; 2) $KM \perp LN$; 3) $KM \perp LN$; 4) $KM \perp LN$. 304. 1) $AC \perp BD$; 2) $AC \perp BD$. 305. 1) по 5 см; 2) по 7 см; 3) $\angle 1 = \angle 3 = \angle 4 = 45^\circ$, $\angle 2 = 90^\circ$. 306. 1) 64 см; 2) 2,4 дм. 307. 168 мм. 308. 1) $KL \perp LM$; 2) $LM \perp MN$; 3) $MN \perp NK$; 4) $KL \perp NK$. 309. Вказівка: обчисліть кути чотирикутника. 311. Не може. 312. 96 см^2 . 313. 726 см^2 . 314. Вказівка: скористайтеся означеннями паралелограма та ромба. 315. Вказівка: покажіть, що сторони даного паралелограма рівні. 316. 30° , 150° , 30° , 150° . 317. Вказівка: нехай $ABCD$ — ромб, AM і AP — його висоти, проведені відповідно до сторін BC і CD ; доведіть, що $\triangle ABM = \triangle ADP$. 318. 1) 60° , 120° , 60° , 120° ; 2) 80 см. 319. 1) 70° , 110° , 70° , 110° ; 2) 40° , 140° , 40° , 140° . 320. 80° , 100° , 80° , 100° . 321. 1) 72° , 108° , 72° , 108° ; 2) 40° , 140° , 40° , 140° . 322. 60° , 120° , 60° , 120° . 323. 1) 16 см; 3) всі по 4 см. 324. 1) 16 см; 2) 58 мм; 3) 0,82 дм. 325. Вказівка: обчисліть кути ромба. 328. Вказівка: доведіть, що $\triangle AND = \triangle CND = \triangle AMB = \triangle CMB$. 329. 1) Так; 2) так; 3) ні. 330. Вказівка: нехай $ABCD$ — ромб, AM , AP — його висоти, проведені відповідно до сторін BC і CD ; доведіть, що $\triangle ACM = \triangle ACP$; див. задачу 317. 331. 30° , 150° , 30° , 150° . 332. Вказівка: проведіть діагоналі ромба та покажіть, що кути ACN і CAL та кути BDK і DBM відповідно рівні. 333. Вказівка: обчисліть кути чотирикутника $MPKN$. 334. Вказівка: покажіть спочатку, що точка перетину діагоналей та основи перпендикулярів, проведених до протилежних сторін ромба, лежать на одній прямій; потім покажіть, що діагоналі чотирикутника з вершинами в основах побудованих перпендикулярів є рівними. 335. Вказівка: доведіть, що сторони чотирикутника паралельні діагоналям прямокутника й дорівнюють їх половині. 336. 5 см. 338. Вказівка: покажіть спочатку, що бісектриси двох пар сусідніх кутів прямокутника перетинаються під прямим кутом; потім доведіть, що одержаний прямокутник є квадратом. 339. Вказівка: якщо перегнути тканину за діагоналями, то краї тканини мають суміститися. 340. 1) Вказівка: покажіть, що промені BA і BC є доповняльними. 341. Два. 342. 1) Ні, бо може бути ромб. 343. Вказівка: позначте стовпці — A і B ; проведіть пряму через середину O відрізка AB перпендикулярно до прямої AB ; на побудованій прямій від точки O по обидві сторони відкладіть відрізки завдовжки OA . 344. 2) Порада не є правильною. Може бути ромб.

§ 6. Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника

345. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так. 346. 1) Ні; 2) так. 347. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. 348. 4 см (мал. 133); 3 см (мал. 134). 349. Ні. 350. 1) 6 см; 2) 4 см. 351. 15 см. 355. 4 см (мал. 138); 12 см (мал. 139). 356. Ні. 357. 1) 4 см; 2) 7 см. 358. 1) 4 см, 2,5 см, 3,5 см; 2) 15 мм, 20 мм, 25 мм. 359. 4,5 см; 5 см; 7 см. 360. *Вказівка:* виразіть середні лінії трикутника через його сторони. 361. 1) По 4 дм; 2) по 8 мм. 362. По 2 см. 363. 1) 4,8 дм; 2) 600 мм. 364. 24 см. 365. 1) 28 см; 2) 56 см; 3) 60 см. 366. 1) Рівносторонній; 2) рівнобедрений. 367. 1) 1,2 дм і 1,8 дм; 2) 200 мм і 28 см. 368. 10 см і 22 см. 369. 96 см. 370. 36 см. 373. 1) 9 см; 2) 12 см; 3) 20 см. 374. 1) 4 см, 5 см, 6 см; 2) 0,25 дм, 6 см, 6,5 см. 375. 1) 36 см; 2) 4,8 дм; 3) 600 мм. 376. 10 см; 10 см; 5 см. 377. 15 см; 15 см; 10 см. 378. 2 см. *Вказівка:* продовжте відрізок AM на 4 см за точку M , одержите точку P ; продовжте відрізок OK за точку K на 4 см, одержите точку D ; розгляньте трикутник $ВАР$. 379. 1) 7,5 см, 10 см, 12,5 см; 2) 6 см, 8 см, 10 см. 380. 1) 28 см, 32 см, 36 см; 2) 1,4 дм, 1,6 дм, 1,8 дм. 381. *Вказівка:* виразіть периметри трикутників через сторони одного з них. 382. 2) 12 см, 24 см, 30 см; 3) 24 см. 383. 1) По 4 см і по 6 см; 2) 6 см і 12 см; 4 см і 8 см. 384. *Вказівка:* виразіть сторони кожного з чотирьох трикутників через сторони даного трикутника. 385. *Вказівка:* скористайтесь теоремою Фалеса для кутів ADB і DBC та прямих MC і AN . 386. 1) 25 см; 2) 3,5 дм. 387. 1) 10 см; 2) 49 см. 388. 1) 16 см; 2) 2,6 дм. 391. *Вказівка:* проведіть прямі, що проходять через дані точки паралельно середнім лініям трикутника. 392. *Вказівка:* через точку M проведіть пряму паралельно BD ; скористайтесь теоремою Фалеса. 394. *Вказівка:* через основу медіани трикутника проведіть пряму паралельно іншій його медіані; скористайтесь теоремою Фалеса. 397. 1) 36 см. 398. *Вказівка:* через точку M проведіть пряму, паралельну BC ; скористайтесь теоремою Фалеса. 400. 2) *Вказівка:* відкладіть відрізок AB так, щоб точка B лежала на першій лінії аркуша, а точка A — на п'ятій лінії. 401. *Вказівка:* MN — середня лінія трикутника ABC . 404. 2) Таких доріг є три. Вони є середніми лініями трикутника ABC .

§ 7. Трапеція

405. 1) Ні; 2) так. 406. 1) Ні; 2) так. 407. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 408. 1) Ні; 2) так; 3) так. 409. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 410. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) так. 411. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 412. 1) BC і AD ; 2) AB і CD ; 3) $\angle A$ і $\angle D$ — прилеглі до основи AD , $\angle B$ і $\angle C$ — прилеглі до основи BC ; 4) $\angle A$ і $\angle B$ — прилеглі до бічної сторони AB , $\angle C$ і $\angle D$ — прилеглі до бічної сторони CD . 413. 1) 3 см (мал. 169); 2) 90° (мал. 170). 414. *Вказівка:* скористайтесь властивістю паралельних прямих. 415. $\angle B = 130^\circ$, $\angle D = 40^\circ$ (мал. 171); $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 134^\circ$ (мал. 172); $\angle B = 140^\circ$, $\angle C = 144^\circ$ (мал. 173). 416. 1) $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 150^\circ$; 2) $\angle A = 55^\circ$, $\angle D = 35^\circ$. 417. 1) 20° ; 2) 45° ; 3) 85° . 418. 1) $\angle A = 140^\circ$, $\angle C = 60^\circ$; 420. $KCDM$ — трапеція. 421. $ABCD$ — трапеція. 422. *Вказівка:* 1) скористайтесь означенням трапеції і паралелограма. 423. 1) 7 см; 2) 3 см. 424. *Вказівка:* скористайтесь ознакою рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом. 425. 4 см (мал. 178); 7 см (мал. 179); 15 см (мал. 180). 426. Ні. 427. 1) 4 см; 2) 15 см; 3) 17 см; 428. 7 см. 429. 1) 8 см; 2) 9 см; 3) 13 см; 4) 9 см; 5) 12 см. 430. 8 см, 16 см, 12 см. 431. 4 см, 11 см, 7,5 см. 432. 1) 40 см; 2) 62 см. 433. 62 см. 434. 1) 134° і 36° ; 2) 145° і 25° . 435. 128° і 56° . 436. 1) 2 см; 2) 38 мм. 437. *Вказівка:* нехай $ABCD$ —

дана трапеція з основами BC і AD ($BC < AD$). Проведіть $CE \parallel AB$ і доведіть, що трикутник CED — рівнобедрений. 438. $\angle A = \angle D = 58^\circ$, $\angle B = \angle C = 122^\circ$ (мал. 185); $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 120^\circ$ (мал. 186); $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 120^\circ$ (мал. 187). 439. Вказівка: скористайтесь властивістю рівнобічної трапеції та властивістю паралельних прямих. 440. 70° , 110° , 110° , 70° . 441. 36° , 144° , 144° , 36° . 442. Вказівка: скористайтесь ознакою рівності трикутників за стороною і прилеглими кутами. 443. Вказівка: доведіть рівність трикутників ABD і DCA . 444. 6 см. 445. 34 см. 446. 1) Вказівка: доведіть, що $\triangle ABK = \triangle DCM$. 447. 1) 4 см і 12 см; 2) 5 см і 9 см. 448. Вказівка: скористайтесь властивістю рівнобедреного трикутника і властивістю паралельних прямих. 449. 1) 26 см; 2) 286 мм. 451. 6 см. 452. 8 см і 12 см. 453. Вказівка: продовжте відрізок до перетину з бічними сторонами трапеції та скористайтесь теоремою Фалеса; потім скористайтесь властивостями середньої лінії трапеції та середньої лінії трикутника. 454. 1) 14 см; 2) 9 см. 455. Вказівка: скористайтесь властивостями паралельних прямих. 456. 120° , 60° , 120° , 60° . 457. Вказівка: нехай трапеція $ABCD$ має основи AB і CD , а її діагоналі перетинаються в точці O ; доведіть рівність трикутників ABC і BAD . 458. Вказівка: скористайтесь властивістю паралельних прямих. 459. Вказівка: з вершини тупого кута трапеції проведіть пряму, паралельну діагоналі, до перетину з продовженням більшої основи та скористайтесь властивістю висоти рівнобедреного трикутника. 460. Вказівка: проведіть висоту з середини основи, з'єднайте відрізками середини всіх сторін трапеції та доведіть, що утворений чотирикутник — квадрат. 461. 1) 60° ; 2) 12 см і 24 см. 462. $\frac{3a}{4}$. 464. EF — середня лінія трапеції, $EF = 3$ см. 466. 3,5 м. 467. Так.

§ 8. Центральні та вписані кути

468. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 469. 1) Ні; 2) так. 470. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 471. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 472. 1) Ні; 2) так. 473. 1) Ні; 2) так. 475. 90° (мал. 221); 180° (мал. 222). 476. 60° . 477. 1) 180° ; 2) 120° ; 3) 240° . 478. 1) 30° і 330° ; 2) 62° і 298° ; 3) 100° і 260° . 479. 1) 70° ; 2) 210° . 480. 1) 12 см; 2) 0,2 дм; 3) 39 мм. 481. Вказівка: доведіть рівність дуг AC і BD . 482. Вказівка: скористайтесь тим, що дуга BC є спільною. 483. 60° (мал. 227); 25° (мал. 228); 90° (мал. 229). 484. 70° (мал. 230); 20° (мал. 231). 485. 1) 26° ; 2) 63° ; 3) 100° . 486. 1) 32° ; 2) 64° ; 3) 220° . 487. 70° (мал. 232); 140° (мал. 233); 190° (мал. 234). 488. 1) 60° , 60° , 60° ; 2) 36° , 72° , 72° . 489. 30° , 60° , 90° . 490. 1) 120° , 60° , 180° ; 2) 56° , 84° , 220° . 491. 70° , 130° , 160° . 492. 1) 32° , 32° , 116° ; 2) 72° , 72° , 36° . 493. 60° , 60° , 60° . 494. Вказівка: скористайтесь наслідком 1 з теореми про вписаний кут. 495. Вказівка: нехай AB і CD — хорди кола і $AB = CD$; сполучіть точки A , B , C і D із центром O кола; доведіть, що $\triangle AOB = \triangle COD$. 496. Вказівка: нехай хорда AC і діаметр BD кола із центром O перетинаються в точці K ; доведіть рівність трикутників AKO і CKO . 497. Вказівка: нехай хорда AC і діаметр BD кола із центром O перетинаються в точці K , причому $AK = KC$; доведіть рівність трикутників AKO і CKO . 500. 1) 72° і 108° ; 2) 80° і 100° . 501. 1) $67^\circ 30'$ і $112^\circ 30'$; 2) 40° і 140° . 502. Вказівка: скористайтесь теоремою про вписаний кут. 503. 30° або 150° . 504. 1) 45° і 135° ; 2) 36° і 144° . 505. Вказівка: скористайтесь тим, що градусна міра всього кола дорівнює 360° , і теоремою про вписаний кут. 506. 100° (мал. 235); 120° (мал. 236); 145° (мал. 237). 507. 1) 70° і 35° ; 2) 90° і 45° . 508. Вказівка: ско-

ристайтесь наслідком 2 з теореми про вписаний кут. 509. Вказівка: див. задачу 508. 511. 1) 45° ; 2) 40° . 512. Вказівка: скористайтесь теоремою про зовнішній кут трикутника і знайдіть кут ABC . 513. Вказівка: скористайтесь теоремою про суму кутів трикутника і теоремою про суміжні кути; знайдіть кут DBC трикутника DBC . 514. 50° (мал. 241); 80° (мал. 242). 515. 40° , 60° , 80° . 318. 1) Коло, радіус якого дорівнює половині відрізка, що сполучає дані точки; 2) дуга кола, описаного навколо трикутника зі стороною AB і протилежним гострим кутом α . 519. Вказівка: скористайтесь наслідком 2 з теореми про вписаний кут. 520. Вказівка: прикладіть вершину прямого кута косинця до будь-яких двох точок кола, що є зовнішнім контуром диска, та проведіть два діаметри кола.

§ 9. Вписані й описані чотирикутники

521. Мал. 255. 522. Мал. 258. 523. Ні. 524. Ні. 525. 1) 9 см; 2) 180° . 526. $\angle B = 100^\circ$, $\angle C = 85^\circ$ (мал. 262); $\angle M = 75^\circ$, $\angle N = 120^\circ$, $\angle K = 105^\circ$ (мал. 263); $\angle F = 90^\circ$, $\angle E = 60^\circ$, $\angle Q = 90^\circ$, $\angle P = 120^\circ$ (мал. 264). 527. а) Ні; б) так. 528. а) Так; б) ні. 529. 1) 125° ; 2) 108° ; 3) 120° . 530. 1) Так; 2) так; 3) ні. 531. Вказівка: скористайтесь наслідком 2 з теореми про вписаний кут. 532. 1) Вказівка: скористайтесь наслідком 2 з теореми про вписаний кут; 2) за умови, що $AD \perp BC$. 533. 10 см (мал. 266); 3 см і 7 см (мал. 267); $3\frac{1}{3}$ см і $6\frac{2}{3}$ см (мал. 268). 534. 1) Так; 2) ні. 635. 1) 40 см; 2) 6,4 дм. 636. 1) 80 см; 2) 52 см. 538. 1) Ні; 2) так; 3) так. 539. 1) 90° ; 2) 60° . 540. 1) 10 см; 2) 2,3 дм. 541. 1) Так; 2) ні. 545. 1) Так; 2) ні. 546. Так. 547. Вказівка: в утвореному чотирикутнику сусідні сторони мають бути рівними. 548. 1) 3 мм, 10,5 мм, 18 мм, 10,5 мм; 2) 4 см, 14 см, 24 см, 14 см. 549. Середня лінія трапеції дорівнює $\frac{1}{4}P$, тому: 1) 4 см; 2) 50 мм. 550. 20 см. 552. 1) Вказівка: побудуйте коло радіусом R та проведіть у ньому два перпендикулярні діаметри; послідовно сполучіть точки перетину діаметрів з колом. 557. Так. Вказівка: скористайтесь ознакою описаного чотирикутника. 560. Вказівка: діаметр круга дорівнює меншій стороні прямокутника. 561. Вказівка: проведіть у даному крузі два перпендикулярні діаметри. 562. 2) Вказівка: криниця має бути розміщена в центрі кола, описаного навколо трапеції.

РОЗДІЛ 3. ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

§ 10. Подібні трикутники

563. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так. 564. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так. 565. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 566. 1) Ні; 2) так. 567. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так; 5) так; 6) так. 568. $\triangle ABC$ і $\triangle LMK$ (мал. 280): 1) $\angle A$ і $\angle L$, $\angle B$ і $\angle M$, $\angle C$ і $\angle K$; 2) AB і LM , BC і MK , AC і LK ; $\triangle ABC$ і $\triangle PTQ$ (мал. 281): 1) $\angle A$ і $\angle P$, $\angle B$ і $\angle T$, $\angle C$ і $\angle Q$; 2) AB і PT , BC і TQ , AC і PQ . 569. 1) $1\frac{1}{3}$; 2) 2. 570. 1) $\frac{KC}{AC}$ і $\frac{DC}{BC}$; 2) $\frac{AB}{KD}$ і $\frac{BC}{DC}$; 3) $\frac{AB}{KD}$ і $\frac{AC}{KC}$. 571. 1) Ні; 2) ні; 3) ні. 572. 1) $\angle A_1 = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$; 2) $\angle A = \angle A_1 = 45^\circ$, $\angle B_1 = 110^\circ$, $\angle C = 25^\circ$. 573. $\angle A = \angle A_1 = 80^\circ$, $\angle B = \angle C_1 = 50^\circ$.

574. 1) Так; 2) ні. 575. Так. 576. 1) 6 см, 7 см; 2) 13 см, 18,5 мм. 577. $AB = \frac{169}{15}$ см;
 $A_1C_1 = \frac{630}{13}$ см. 578. Вказівка: скористайтесь означенням подібних трикутників. 579. 1) $\triangle ABC \sim \triangle MBC$; 2) $\triangle ABC \sim \triangle AMN$. 580. $MN \parallel BC$. 583. 1) 17,1 од.; 20,52 од.; $\frac{5}{6}$; 2) 17,9 од.; 14,32 од.; $\frac{5}{4}$; 3) 15 од.; 7,5 од.; 2. 584. 36 од.; 27 од.; $\frac{4}{3}$. 586. 1) 3 см; 2) 3,75 см; 3) 6 см. 587. 1) 5 см, $8\frac{1}{3}$ см, $11\frac{2}{3}$ см. 588. 6 см, 9 см, 12 см. 589. Вказівка: скористайтесь тим, що в подібних трикутниках відповідні кути рівні. 590. 1) Ні; 2) ні. 591. 1) Так; 2) так. 592. Так, $k = \frac{2}{3}$. 593. Так, $k = 2$. 594. 6 см. 595. 37,5 см. 596. 112 см, 64 см. 597. 30 см, 45 см. 598. 1) 12 см; 2) 10 см. 599. Так. 600. Так. 601. Так, $k = 1$. 602. $k = \frac{1}{2}$. 603. 1) 15 см, 30 см, 30 см; 2) 3,75 см, 11,25 см, 11,25 см. 604. Вказівка: скористайтесь властивістю периметрів подібних трикутників. 605. Вказівка: скористайтесь властивістю периметрів подібних трикутників. 606. Вказівка: під мікроскопом градусні міри кутів не змінюються. 608. 1) Масштаб 1 : 250 000; 2) 10 км; 3) 12,5 км. 609. 45 см, 50 см, 25 см. 610. 1) Так.

§ 11. Узагальнена теорема Фалеса

611. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так. 612. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 613. 3 : 5 (мал. 292); 4 : 2 (мал. 293). 614. 4 : 3. 615. 1) PM ; 2) MN . 616. PH . 617. 1) Ні; 2) ні. 618. 1) 2 : 3; 2) 5 : 1. 619. 2 : 1. 620. 4. 621. Так. 622. Так. 623. 1) 4 см, 6 см; 2) 12 см, 4 см. 624. 6 см, 8 см. 630. 1) Ні; 2) ні. 631. Так. 632. 1) 6 або 1,5; 2) 8 або 4,5; 3) $11\frac{2}{3}$ або 4,2. 633. 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. 634. Так. 635. Вказівка: скористайтесь наслідком з узагальненої теореми Фалеса. 637. $AC = \frac{am}{m+n}$;
 $CB = \frac{an}{m+n}$. 638. 1) 16 см, 32 см, 30 см; 2) 10 см, 24 см, 16 см. 639. 1) 15 см, 10 см; 2) 20 см, 4 см. 640. 1) $BC = 16$ мм, $CL = 24$ мм, $LF = 16$ мм, $DC = 50$ мм, $KL = 20$ мм; 2) $BC = 6$ см, $CL = 9$ см, $LF = 6$ см, $DC = 15$ см, $KL = 6$ см. 641. 1) $\frac{125}{34}$ см, $\frac{100}{17}$ см, $\frac{50}{17}$ см, 2) $\frac{250}{17}$ см, $\frac{400}{17}$ см, $\frac{200}{17}$ см. 642. 1) 15 см; 2) 22 см. 643. 1) 3 см, 6 см; 2) 5,6 см, 8,4 см. 644. 1) 12 см; 2) 1,2 дм. 645. 1) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$. 646. 1) 4 см, 8 см, 12 см; 2) 3,1 см, 6,2 см, 9,3 см. 647. Вказівка: скористайтесь властивістю периметрів подібних трикутників. 648. 1) $\frac{10}{3}$; 2) 4,5. 651. $\frac{a}{a+b+c}$; $\frac{b}{a+b+c}$; $\frac{c}{a+b+c}$; $\frac{a+b}{a+b+c}$; $\frac{b+c}{a+b+c}$. 652. 1) 21,6 см;

2) 36 см. 653. Вказівка: скористайтесь узагальненою теоремою Фалеса. 654. 1) Вказівка: спочатку доведіть, що $\triangle AOB \sim \triangle DOC$; 2) 6,25 і 3,75. 655. Вказівка: нехай AA_1 перетинає MN в точці O ; доведіть, що $\triangle AMO \sim \triangle ABA_1$ і $\triangle ANO \sim \triangle ACA_1$. 656. 1) Так; 2) лише для рівнобічної трапеції. 657. 1) 8 см, 9 см; 2) $11\frac{1}{3}$ см, $12\frac{2}{3}$ см. 658. 1) $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$, $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$; 2) $\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, $\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b$. 660. 10 хв. 661. 28 м. 662. 36 м.

§ 12. Перша ознака подібності трикутників

663. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) ні; 5) так. 664. 1) Ні; 2) так. 666. Так. 669. $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$, $\triangle ABC \sim \triangle RQC$, $\triangle PBQ \sim \triangle RQC$. 670. $\triangle ABC$ і $\triangle MNC$. 672. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні. 673. Так. 674. Тому, що з рівності даних відношень не випливає рівність відповідних кутів трикутників. 675. 1) $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$, $AB = BC = AC = 2$ см, $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = 60^\circ$, $AB_1 = BC_1 = AC_1 = 6$ см; 2) $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$, $AB = BC = AC = 4$ см, $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = 60^\circ$, $AB_1 = BC_1 = AC_1 = 2$ см. 676. $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$, $AB = BC = AC = 9$ см, $\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = 60^\circ$, $AB_1 = BC_1 = AC_1 = 3$ см. 677. Вказівка: скористайтесь ознакою рівнобедреного трикутника та ознакою подібності трикутників за двома кутами. 678. 1) Так; 2) ні. 679. Так. 680. Вказівка: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. 681. Вказівка: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. 683. 1) Так; 2) так. 684. Ні. 685. Вказівка: знайдіть гострі кути трикутників та скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. 686. $a : b$ або $b : a$. 687. 1) 66 мм, 132 мм; 2) 0,9 дм, 1,5 дм. 688. $6\frac{9}{11}$ см, $18\frac{2}{11}$ см. 689. Вказівка: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. 690. Вказівка: скористайтесь паралельністю відрізків MK і AC . 691. 1) $\frac{P}{3}$; 2) $3m - P$. 692. Вказівка: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. 693. Вказівка: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. 694. Вказівка: скористайтесь ознакою паралельності прямих та ознакою подібності трикутників за двома кутами. 695. 1) 5 см, 7 см, 3 см; 15 см, 21 см, 9 см; 2) 6 см, 8 см, 4 см; 4,5 см, 6 см, 3 см. 696. 8 см, 10 см, 6 см; 16 см, 20 см, 12 см. 697. 10 см, 8 см. 698. Вказівка: скористайтесь тим, що медіани трикутника точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини, та розгляньте подібні трикутники, що утворилися. 699. 1) 12 см; 2) 4 см. 700. Вказівка: один із кутів, що утворює дана пряма з найбільшою стороною даного трикутника, має дорівнювати найбільшому його куту. 701. 1) 4; 2) 3; 3) 2. 702. 1) 4,2 см; 2) 6 см. 703. Вказівка: див. задачу 702. 704. 1) 5 : 3; 2) 13 : 5. 705. Вказівка: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. 706. Вказівка: рівні висоти можуть не бути відповідними. 707. Вказівка: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. 708. 8 см, 12 см. 709. 12 см, 36 см. 710. 18 см, 30 см. 711. Вказівка: розгляньте дві пари подібних трикутників та почленно додайте одержані пропорції. 712. 20 см, 30 см. 713. 9 см, 18 см. 714. Вказівка: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. 715. Вказівка: скористайтесь тим, що медіани точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини,

та розгляньте подібні трикутники, що утворилися. 716. 1) $\frac{3}{4}$ см; 2) 1 см; 3) $1\frac{1}{4}$ см. 717. *Вказівка:* проведіть дві висоти та розгляньте два подібні трикутники, катетами яких є дані висоти. 718. 1) 12, 24; 2) 30, 20. 719. *Вказівка:* проведіть діаметр кола BD та скористайтесь властивістю вписаних кутів, що спираються на хорду BC . 720. *Вказівка:* доведіть подібність спочатку трикутників AOM і NKM та BON і BKA , а потім трикутників BKA і MKN . 721. *Вказівка:* доведіть подібність $\triangle ABC$ і, наприклад, $\triangle ALK$. 722. *Вказівка:* скористайтесь тим, що навколо чотирикутника $BDCM$ можна описати коло, а вписані кути BCD і BMD спираються на одну хорду. 723. *ab*. 725. 195 м. 726. *Вказівка:* побудуйте подібний трикутник, сторони якого відповідно паралельні сторонам даного трикутника. 727. 4) 189,65 м. 728. *Вказівка:* на одному з трьох променів візьміть дві точки і проведіть із них перпендикуляри до двох інших променів; розгляньте дві пари подібних прямокутних трикутників, які при цьому утворилися.

§ 13. Друга і третя ознаки подібності трикутників

729. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) ні; 5) ні; 6) так. 730. 1) Ні; 2) так. 731. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 732. $\triangle ABC \sim \triangle KLM$. 733. Ні. 734. Наприклад, 10 см і 16 см та кут 50° між ними. 736. $\triangle ABC$ і $\triangle MNC$. 738. Перший і третій. 739. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 740. 1) Так; 2) ні. 741. Так. 742. Ні. 743. Наприклад, 10 см, 12 см, 18 см. 744. Перший і другий. 745. 1) 27 см, 36 см; 2) 119 см, 105 см. 746. 30 см, 45 см. 747. Так. 748. Перший і третій. 749. Другий і третій. 750. 1) 24 см; 2) 128 см. 751. 27 см. 752. 1) 36 мм; 2) 0,9 дм. 753. 16 см. 754. 1) 144 см, 96 см, 48 см; 2) 56 см, $37\frac{1}{3}$ см, $18\frac{2}{3}$ см. 755. 40 см, $26\frac{2}{3}$ см, $13\frac{1}{3}$ см. 756. 1) 6,4 мм, 10,4 мм, 38,4 мм, 62,4 мм; 2) 6 см, 10 см, 12 см, 20 см. 757. $2\frac{2}{3}$ см, $6\frac{2}{3}$ см, $6\frac{2}{3}$ см, $16\frac{2}{3}$ см. 758. *Вказівка:* перетворіть дану рівність добутків у пропорцію. 759. 1) $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 3$ см, $KL = 15$ см, $LM = 21$ см, $KM = 9$ см; 2) $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 4$ см, $KL = 4,5$ см, $LM = 6$ см, $KM = 3$ см. 760. $TO = 8$ см, $OM = 10$ см, $TM = 6$ см, $BC = 16$ см, $CE = 20$ см, $BE = 12$ см. 761. *Вказівка:* скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома сторонами й кутом між ними. 762. Рівні медіани можуть не бути відповідними. 763. 12 см. 764. 1) 2 : 7; 2) 1 : 4. 765. *Вказівка:* нехай O — точка перетину висот BH і CM ; спочатку на стороні BC як на діаметрі побудуйте допоміжне коло та доведіть подібність трикутників BOC і MOH . 766. 2. 767. 1) 2 : 1; 2) 1 : 2. 768. 1) 1 : 3; 2) 1 : 2. 769. 1) Ні; 2) так; 3) так. 770. *Вказівка:* скористайтесь способом, аналогічним способу доведення ознаки подібності трикутників за трьома сторонами. 771. $\frac{ma}{1+m}$. 772. 2 : 1. 773. 60° , 120° , 60° , 120° . 774. 1) $\frac{a+mb}{1+m}$; 2) $\frac{2ab}{a+b}$; 3) $\frac{2ab}{a-b}$. 775. *Вказівка:* розгляньте три пари подібних трикутників.

776. 1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{3}{7}$. 777. Вказівка: доведіть, що вказані чотири точки є вершинами чотирикутника, у якому суми протилежних кутів становлять по 180° . 778. 3 : 2. 779. 1 : 1. 780. Вказівка: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними. 781. Вказівка: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома кутами. 782. 9,8 м. 784. Вказівка: у трикутнику AKB проведіть допоміжну середню лінію, паралельну AB , та розгляньте дві пари подібних трикутників, які при цьому утворилися.

§ 14. Застосування подібності трикутників

785. 1) Так; 2) ні; 3) так. 787. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так; 7) ні; 8) ні; 9) так. 788. 1) 6 см і 3 см, 8 см і 4 см, 10 см і 5 см; 2) 4 см і 2 см, 4 см і 2 см, 2 см і 1 см; 3) 30 см і 15 см, 30 см і 15 см, 30 см і 15 см. 789. 12 см і 6 см, 12 см і 6 см, 18 см і 9 см. 790. 1) 18 см, 24 см, 36 см; 2) 6 см, 6 см, 9 см; 3) 12 см, 12 см, 12 см. 791. 9 см, 15 см, 21 см. 792. 1) $AD = 8$ см, $DC = 12$ см; 2) $AC = 26$ см, $DC = 12$ см; 3) $AD = 1,5$ см, $BC = 5$ см; 4) $AC = 12$ см, $DC = 9$ см. 793. Л. Вказівка: скористайтесь властивістю бісектриси і властивістю медіани трикутника. 794. Н. 795. Мал. 338: 1) 25 од.; 2) 15 од. і 20 од.; 3) 12 од.; мал. 339: 1) 169 од.; 2) 65 од. і 156 од.; 3) 60 од. 796. 1) 289 од.; 2) 136 од. і 255 од.; 3) 120 од. 797. 2 од. (мал. 341); 2 од. (мал. 342); 6 од. (мал. 343). 798. 1) 4 см; 2) 2 см. 799. 6 см. 801. 8 см, 12 см, 16 см. 802. 1 : 2. 803. 1) Так; 2) Ні. 804. 6 см, 9 см. 805. 22,5 см, 37,5 см. 806. $6\sqrt{2}$ см, $3\sqrt{2}$ см. 807. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{6}$. 808. 4,8 см. 809. 6,72 см. 810. 1) 24 см; 2) 120 мм. 811. Вказівка: скористайтесь ознакою подібності трикутників за двома сторонами та кутом між ними. 812. Вказівка: див. задачу 811 (1). 813. Вказівка: див. задачу 811 (2). 814. Вказівка: див. задачу 811 (3). 817. Вказівка: через вершину тупого кута проведіть пряму, паралельну бічній стороні; розгляньте утворений прямокутний трикутник та скористайтесь властивістю висоти, проведеної до гіпотенузи. 818. Вказівка: доведіть, що трикутник з вершинами в центрі середнього кола й точках дотику двох інших кіл до однієї зі сторін даного кута є прямокутним. 819. Вказівка: скористайтесь властивістю вписаних кутів, що спираються на одну хорду. 821. Вказівка: щоб побудувати точки, які не є кінцями двох перпендикулярних діаметрів, поділіть діаметр у відношенні 1 : 9 та скористайтесь властивістю висоти, проведеної до гіпотенузи прямокутного трикутника. 823. Вказівка: три точки — око, верхівка віхи й верхівка дерева мають лежати на одній прямій. Це можна зробити, якщо поставити віху й відійти від неї на таку відстань, щоб, коли дивитись одночасно на верхівку віхи та верхівку дерева, вони суміщались.

РОЗДІЛ 4. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

§ 15. Теорема Піфагора. Перпендикуляр і похила

824. 3). 825. Так (мал. 366); ні (мал. 367). 826. 3). 827. 1) 13 см; 2) 15 м; 3) 16 см. 828. 1) 5 см; 2) 8 м; 3) $12a$. 829. 1) $a = 12$ см; 2) $b = 16$ см; 3) $c = 10a$. 830. 1) $d = 25$ см; 2) $b = 24$ см; 3) $b = 9a$. 831. Вказівка: у даному прямокутнику проведіть діагональ та скористайтесь теоремою Піфагора в утвореному прямо-

кутному трикутнику. 832. 4 см. 833. 1) $\sqrt{2}$ см; 2) 8 см; 3) $a\sqrt{2}$. 834. 1) 1 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$. 835. 1) 1,5 см; 2) $5\sqrt{3}$ см; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 836. 1) 24 см; 2) 15 см; 3) 12 см. 837. 1) 15 см; 2) 20 см. 838. 1) 5 см; 2) 15 см; 3) 10 см. 839. *Вказівка:* застосуйте теорему Піфагора до прямокутного трикутника з вершинами у двох сусідніх вершинах ромба й точці перетину його діагоналей. 840. *Вказівка:* застосуйте теорему Піфагора до трикутників AA_1C і ABC . 841. 12 см. 842. 17 см. 843. $\frac{m\sqrt{3}}{2}$. 844. 1) 26 см; 2) 8 см; 3) 15 см. 845. 1) 5 см; 2) 5 см; 3) 24 см. 846. 19 см (мал. 382); $6\sqrt{2}$ см (мал. 383). 847. 13 см. 848. 1) 5 см, 12 см, 13 см; 2) 7 см, 24 см, 25 см. 849. 1) 15 см, 20 см; 2) 12 см, 16 см. 850. 9 см, 12 см, 15 см. 851. 30 см, 16 см, 34 см. 852. 1) 15 см, 18 см; 2) 16 см, 17 см. 853. 1) 12 см, $2\sqrt{117} \approx 21,6$ см; 2) 24 см, $2\sqrt{193} \approx 27,8$ см. 854. 1) 10 см; 2) 29 см. 855. *Вказівка:* розгляньте два прямокутні трикутники, одним із катетів яких є менша бічна сторона трапеції. 856. 8 см (мал. 385); 5 см (мал. 386). 857. 14 см. 858. 1) 20 см; 2) 13 см. 859. 1) 10 см; 2) 25 см. 860. 1) 4 см; 2) 6 см. 861. 1) 8 см або 22 см; 2) 38 см або 88 см. 862. 8 см. 863. 1) 10 см; 2) $5\sqrt{2}$ см. 864. 21 см або 11 см. 865. 1) 6 см, 15 см; 2) 8 см. 866. *Вказівка:* скористайтесь ознакою рівності прямокутних трикутників за двома катетами. 867. *Вказівка:* скористайтесь теоремою Піфагора. 868. 1) 120 см; 2) $\approx 80,7$ см. 869. 1) 61 см, 11 см; 2) 37 см, 12 см. 870. 1) 37 см, $\sqrt{769} \approx 27,7$ см; 2) 20 см, $2\sqrt{205} \approx 28,6$ см. 871. 1) 8 см, 9,6 см, 9,6 см; 2) 12 см, 5,6 см, 4,2 см. 872. *Вказівка:* нехай $ABCD$ — даний паралелограм, O — точка перетину його діагоналей. Проведіть перпендикуляри з вершин B і C до прямої AD ; розгляньте прямокутні трикутники, що утворилися, та скористайтесь теоремою Піфагора. 873. *Вказівка:* див. задачу 872. 874. *Вказівка:* скористайтесь теоремою Піфагора. 876. 6 см. 877. *Вказівка:* проведіть $BE \parallel CD$ та обґрунтуйте, що AE — діаметр і $CE = DB$. 879. $\sqrt{241} \approx 15,5$ м. 880. 328 м. 881. 1) 6,5 м; 2) $\approx 6,7$ м. 882. 12 футів.

§ 16. Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника

884. 1) 6; 2) в; 3) 6. 885. 1) а; 2) 6; 3) в. 886. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так. 887. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні. 889. $\sin \alpha = \frac{BD}{AB}$, $\cos \alpha = \frac{AD}{AB}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AD} (\triangle BDA)$, $\sin \alpha = \frac{BC}{AC}$, $\cos \alpha = \frac{AB}{AC}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AB} (\triangle ABC)$. 890. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 891. 1) Так; 2) так; 3) так. 892. 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) $3\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{3}$; 6) 8. 893. 1) $2\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 3. 894. 1) 1; 2) 1; 3) 2,5; 4) 2. 895. 1) 2; 2) 0. 896. 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° ; 4) 60° ; 5) 60° ; 6) 45° . 897. 1) 45° ; 2) 30° ; 3) 30° . 898. 1) $\sin 10^\circ$, $\sin 11^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\sin 46^\circ$, $\sin 75^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 17^\circ$, $\operatorname{tg} 37^\circ$, $\operatorname{tg} 48^\circ$, $\operatorname{tg} 66^\circ$, $\operatorname{tg} 87^\circ$. 899. $\cos 72^\circ$, $\cos 50^\circ$, $\cos 34^\circ$, $\cos 25^\circ$, $\cos 20^\circ$. 900. 2 см (мал. 407); 4 см (мал. 408); 10 см (мал. 409). 901. 12 см (мал. 410); 10 см (мал. 411); 7 см (мал. 412). 902. 1) 2 см; 2) 6 см; 3) 8 см. 903. 1) 6 см; 2) 6 см; 3) 7 см. 904. 1) 2 см; 2) 5 см; 3) 9 см. 905. 1) $\sin 70^\circ$; $\sin 55^\circ$; $\sin 40^\circ$; 2) $\cos 80^\circ$; $\cos 25^\circ$; $\cos 5^\circ$. 906. 1) $\sin 50^\circ$, $\sin 16^\circ$; 2) $\cos 35^\circ$, $\cos 65^\circ$. 907. 1) $\sin \alpha$; 2) $2 \sin \alpha$; 3) $\cos \alpha$; 4) $-\cos \alpha$. 908. 1) 0; 2) $-\cos \alpha$.

911. $c \cdot \cos \alpha$ (мал. 413); $c \cdot \sin \alpha$ (мал. 414); $b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ (мал. 415). 912. $\frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$ (мал. 416);

$\frac{a}{\sin \alpha}$ (мал. 417); $\frac{b}{\cos \alpha}$ (мал. 418). 913. 1) 3 см; 2) 8 см; 3) 12 см; 4) 6 см.

914. 1) 2 см; 2) 4 см. 915. 1) 128 см; 2) 16 см; 3) 10 см; 4) 10 см. 916. 1) 64 см; 2) 50 см. 917. 1) 4,8 см; 2) 48 см; 3) 16,5 см. 918. 1) $BC = c \cdot \cos \beta$, $AC = c \cdot \sin \beta$;

2) $AB = \frac{a}{\sin \alpha}$, $AC = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$; 3) $AB = \frac{b}{\sin \beta}$, $AC = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}$. 919. 1) $\approx 0,682$; $\approx 0,731$; $\approx 0,933$.

920. 1) $\alpha = 39^\circ$; 0,629; 0,777; 0,809; $\alpha = 54^\circ 12'$; 0,811; 0,585; 1,387; 2) $48^\circ 35'$; 31° ; $52^\circ 59'$; $23^\circ 48'$; $43^\circ 3'$; $37^\circ 59'$. 921. 1) 0,342; 0,966; 0,545; 0,996; 2) 0,994; 0,391; 0,629; 0,913; 3) 2,14; 0,017; 3,27; 0,344. 922. 1) 0,799; 0,035; 2) 0,469; 0,974; 3) 0,176; 0,287. 923. 1) 88° , 1° , 35° ; 2) 40° , 15° , 77° ; 3) 42° , 19° , 38° .

924. 1) 36° ; 2) 43° ; 3) 40° . 925. 1) $\sin A = 0,8$; $\cos A = 0,6$; $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$; 2) $\sin B = 0,6$;

$\cos B = 0,8$; $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$. 926. 1) $\sin A = 0,8$; $\cos A = 0,6$; 2) $\sin B = 0,6$; $\cos B = 0,8$.

927. 1) 0,96; 2) 0,96; 3) $\frac{24}{7}$. 928. 1) $\sqrt{3}$; 2) 6. 929. 2. 930. 4 см. 931. 18 см.

932. 1) $10\sqrt{3}$ см; 2) 5 см; 3) $5\sqrt{3}$ см. 933. 1) 8 см і $8\sqrt{3}$ см; 2) $8\sqrt{2}$ см і $8\sqrt{2}$ см.

934. $2\sqrt{3}$ см і 6 см (мал. 420); $3\sqrt{3}$ см і 9 см (мал. 421). 935. 4 см і $2\sqrt{3}$ см.

936. 4 см, $4\sqrt{3}$ см. 937. 12 см і 12 см. 938. 1) $12\sqrt{3}$ см і 24 см; 2) 12 см і $12\sqrt{3}$ см.

939. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. 940. 1) 4 см; 2) $4\sqrt{3}$ см. 941. $1:\sqrt{2}$. 942. 1) $5\sqrt{2}$ см і 10 см;

2) 5 см і $5\sqrt{3}$ см. 943. $5\sqrt{3}$ см. 944. 1) $\sin A = 0,8$; $\cos A = 0,6$; $\operatorname{tg} A = \frac{4}{3}$;

2) $\sin B = 0,6$; $\cos B = 0,8$; $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$. 947. $b \cdot \sin \alpha$. 948. $l \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. 949. 1) $2b \cdot \cos \alpha$;

2) $b \cdot \sin \alpha$. 950. 1) $\frac{h}{\sin \alpha}$; 2) $\frac{2h}{\operatorname{tg} \alpha}$. 951. 1) $\frac{a}{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{a}{2\sin \frac{\alpha}{2}}$. 952. $\frac{a\operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta}$ і $\frac{a\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$

(мал. 423); $\frac{a\cos \beta}{\sin \alpha}$ і $\frac{a\sin \beta}{\sin \alpha}$ (мал. 424). 953. $a \cdot \sin \alpha$ і $a \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$. 954. $2m \cdot \cos \alpha$,

$2m \cdot \sin \alpha$. 955. $\frac{b}{2\cos \alpha}$. 956. 1) $\frac{2r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{r}{\cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$. 957. $\frac{h\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \alpha}$. 958. $\frac{a}{2\cos \alpha}$.

959. 1) $\frac{a}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$; 2) $\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. 960. 1) $\frac{d}{2\sin \frac{\alpha}{2}}$; 2) $d\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 962. $+-+$. 963. 24 см і 36 см.

964. 10 см і 24 см. 965. $r\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}\right)$, $r\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}\right)$, $r\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}\right)$.

966. $b + 2c \cdot \cos \alpha$. 967. $a - 2c \cdot \sin \alpha$. 968. 1) $\frac{h}{\cos \alpha}$; 2) $b + 2h \cdot \operatorname{tg} \alpha$. 969. 8 м.
 970. $60 + \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 71,5$ м. 971. 1) $\operatorname{tg} \alpha = 0,8$. 972. 100 м. *Вказівка:* скористайтесь властивістю прямокутного трикутника з кутом 30° .

§ 17. Розв'язування прямокутних трикутників

973. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так. 974. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) ні; 6) так; 7) ні; 8) так. 975. $y \approx 4,5$ см і $x \approx 5,36$ см (мал. 439); $x \approx 13,37$ см і $y \approx 16,09$ см (мал. 440). 976. $\alpha \approx 51^\circ$ і $\beta \approx 38^\circ$ (мал. 441); $\alpha \approx 53^\circ$ і $\beta \approx 36^\circ$ (мал. 442). 977. 1) $\approx 4,1$ см; 2) $\approx 10,67$ см; 3) $\approx 4,69$ см. 978. 1) $\approx 11,52$ см і $\approx 14,62$ см; 2) $\approx 13,76$ см і $\approx 17,01$ см. 979. 1) $\approx 5,92$ см; 2) $\approx 12,64$ см. 980. 1) $\approx 48^\circ 36'$; 2) $\approx 53^\circ 6'$; 3) $\approx 63^\circ 24'$. 981. 1) $\approx 45^\circ 34'$; 2) $\approx 44^\circ 26'$. 982. $\approx 78^\circ 28'$, $\approx 11^\circ 32'$. 983. 1) $\approx 36^\circ 54'$; 2) $\approx 41^\circ 59'$. 984. $\approx 26^\circ 36'$. 985. 1) $\approx 73^\circ 44'$; 2) $\approx 83^\circ 58'$. 986. 90° . 987. 1) а) $c = 29$, $\alpha \approx 43^\circ 36'$, $\beta \approx 46^\circ 24'$; б) $c = 15$, $\alpha \approx 36^\circ 52'$, $\beta \approx 53^\circ 8'$; в) $c = 30$, $\alpha \approx 36^\circ 56'$, $\beta \approx 53^\circ 4'$; г) $c \approx 46,56$; $\alpha \approx 30^\circ 19'$; $\beta \approx 59^\circ 41'$; 2) а) $b = 8$, $\alpha \approx 61^\circ 56'$, $\beta \approx 28^\circ 4'$; б) $b = 12$, $\alpha \approx 53^\circ 8'$, $\beta \approx 36^\circ 52'$; в) $b = 33$, $\alpha \approx 59^\circ 29'$, $\beta \approx 30^\circ 31'$; г) $a \approx 0,68$; $\alpha \approx 13^\circ 25'$; $\beta \approx 76^\circ 35'$. 988. 1) а) $a \approx 7,52$; $b \approx 2,74$; $\angle B = 20^\circ$; б) $a \approx 54,87$; $b \approx 60,94$; $\angle B = 48^\circ$; в) $a \approx 9,64$; $b \approx 15,43$; $\angle B = 58^\circ$; г) $a \approx 4,23$; $b \approx 1,97$; $\angle B = 25^\circ$; 2) а) $b \approx 7,5$, $c \approx 14,15$, $\angle B = 58^\circ$; б) $b \approx 5,5$, $c \approx 18,82$, $\angle B = 73^\circ$; в) $b \approx 15,92$, $c \approx 19,4$, $\angle B = 37^\circ$; г) $b \approx 1,71$, $c \approx 3,92$, $\angle B = 71^\circ$. 989. $\approx 14,69$ см і $\approx 20,22$ см. 990. 1) $\approx 6,21$ см; 2) $\approx 11,59$ см. 991. 1) $\approx 6,71$ см; 2) $\approx 8,19$ см. 992. 1) $\approx 23,04$ см; 2) $\approx 65^\circ 44'$. 993. 1) $\approx 41,22$ см; 2) $\approx 46,26$ см; 3) $\approx 36,72$ см і $\approx 9,53$ см. 994. 1) $\approx 17,15$ см і $\approx 36,88$ см; 2) $\approx 8,31$ см і $\approx 33,69$ см. 995. 2,81 см. 996. $\approx 2,94$ см і $\approx 4,70$ см. 997. $\approx 31,25$ см і $\approx 125,16$ см. 998. $\approx 119,14$ см. 999. $\approx 7,43$ см. 1000. $\approx 3,4$ см. 1001. $\approx 73,1$ см. 1002. $\approx 61^\circ$. 1003. $\approx 0^\circ 57'$. 1004. 1) $\approx 0,118$ км; 2) $\approx 0,438$ км. 1005. $\approx 2239,2$ м. 1006. $\approx 79,5$ м. 1007. $\approx 130,8$ м. 1008. $\approx 71,76$ м. 1009. $\approx 1^\circ 26'$. 1010. $\approx 1^\circ 17'$. 1011. ≈ 403 м. 1012. ≈ 2149 м. 1013. $\approx 129,1$ м.

РОЗДІЛ 5. МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

§ 18. Многокутник та його властивості

1015. Ні. 1016. 1) Ні; 2) так. 1017. 1) Ні; 2) так. 1018. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 1020. 1) Ні; 2) так. 1021. 1) Ні; 2) так. 1022. 1) 14 см; 2) 20 см; 3) 18 см. 1024. 1) 5; 2) 5. 1025. 1) 540° ; 2) 1260° . 1026. 2700° . 1027. 1) 10; 2) 8. 1028. 11. 1029. 1) 4; 2) 10. 1030. 15. 1031. 1) 30° , 60° , 120° , 150° , 180° ; 2) 80° , 100° , 110° , 140° ; 3) 100° , 110° , 120° , 90° , 120° ; 4) 20° , 100° , 140° , 180° , 100° . 1032. 1) 90° ; 2) 24° . 1033. 36° . 1034. Восьмикутник. 1035. Семикутник. 1036. Семикутник. 1039. 8,4 см. 1040. *Вказівка:* скористайтесь нерівністю трикутника. 1041. $\frac{n(n-3)}{2}$. 1042. 1) 35; 2) 119. 1043. 1) Ні; 2) ні. 1044. Ні. 1045. 1) 5; 2) 6. 1046. 5. 1047. 1) $6 : 5 : 4 : 2 : 1$; 2) $8 : 7 : 5 : 4 : 3$. 1048. *Вказівка:* сума внутрішнього й зовнішнього кутів многокутника дорівнює 180° . 1049. 1) 6; 2) 9. 1050. $\frac{360^\circ}{n}$. 1051. $2\sqrt{3}$. 1052. *Вказівка:* скористайтесь означен-

ням опуклого многокутника. 1053. 1) 3 і 6; 2) 6 і 3; 4 і 4. 1054. 1) *Вказівка*: проведіть радіуси до вершин многокутника та розгляньте утворені трикутники. 1055. 1) 4; 2) 6; 3) 7. 1056. *Вказівка*: розгляньте трикутник, сторона якого є стороною даного многокутника, а протилежна вершина лежить у центрі описаного кола. 1058. $6\sqrt{2}$ см, $\approx 4,6$ см, $3\sqrt{2}$ см. *Вказівка*: нехай O — центр кола; доведіть, що $\triangle BOD$ — прямокутний.

§ 19. Поняття площі. Площа прямокутника

1059. 1) Ні; так. 1060. 1) Ні; 2) ні. 1061. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 1062. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 1063. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 1064. 1) $S_1 \approx 6$ кв. од. 1065. $S_{KLM} \approx 22,5$ кв. од. 1068. 96 см^2 . 1069. 160 см^2 . 1070. 1) 4 см; 2) 3 см; 3) 11 см. 1071. 1) 5 см; 2) 7 см. 1072. 4 см^2 (мал. 491); 8 см^2 (мал. 492). 1073. 2 см^2 . 1074. 1) Збільшиться у 3 рази; 2) зменшиться в 4 рази; 3) збільшиться на 50 %. 1075. 1) Збільшиться в 9 разів; 2) зменшиться в 16 разів; 3) збільшиться на 125 %. 1076. 1) $b = 1,5$ см; $S = 6 \text{ см}^2$; 2) $a = 0,5$ см; $P = 25$ см; 3) $a = 3,5$ см; $S = 24,5 \text{ см}^2$; 4) $b = 0,5$ см; $P = 17$ см. 1077. 1) 20 і 30; 2) 15 і 40; 3) $6\sqrt{10}$ і $10\sqrt{10}$. 1078. 3 см і 6 см. 1079. 1) $7,5 \text{ см}^2$; 2) 5 см^2 ; 3) $22,5 \text{ см}^2$. 1080. 18 см^2 . 1081. 1) 2 см^2 ; 2) $4,5 \text{ см}^2$; 3) $\frac{25}{2} \text{ см}^2$. 1082. 18 см^2 . 1083. 1) 24 см, 26 см; 2) 24 см, 40 см. Квадрат. 1084. 40 см, 50 см. Квадрат. 1085. 1) 192 см^2 ; 2) $2(48 + 70\sqrt{5}) \text{ см}^2$. 1086. 1) 162 см^2 ; 2) 72 см^2 . 1087. $\frac{7a^2}{9}$. 1088. $\frac{5a^2}{9}$. 1089. 1) 81 см^2 , 25 см^2 ; 2) 19 см^2 , 16 см^2 . 1090. 1) 56 см, 40 см; 2) 200 см, 176 см. 1091.) $\sqrt{\frac{mS}{n}}$; $\sqrt{\frac{nS}{m}}$. 1092. $\frac{nP}{2(m+n)}$; $\frac{nP}{2(m+n)}$. 1093. 1) Площа прямокутника зі сторонами $b + a$ і c дорівнює сумі площ прямокутників зі сторонами a і c та b і c ; 2) площа прямокутника зі сторонами $a - b$ і c дорівнює різниці площ прямокутників зі сторонами a і c та b і c . 1094. 1) 1 см; 2) 2 см. 1095. *Вказівка*: скористайтесь означенням рівноскладених фігур. 1096. *Вказівка*: скористайтесь властивостями площі. 1097. 9 см^2 , 1 см^2 , 7 см^2 , 7 см^2 . 1098. $\approx 15,21$ см і $\approx 35,83$ см. 1099. Так. *Вказівка*: покажіть, що сума площ квадратів зі сторонами відповідно AB і BC дорівнює площі квадрата зі стороною AC без подвоєної площі прямокутника зі сторонами AB і BC . 1100. *Вказівка*: площа прямокутного трикутника дорівнює сумі площ прямокутних трикутників, на які його розбиває висота. 1101. *Вказівка*: скористайтесь властивостями середніх пропорційних у прямокутному трикутнику. 1104. 600 м^2 , $0,06$ га. 1105. 250 м^2 . 1106. Так.

§ 20. Площа паралелограма

1112. Ні (мал. 504); так (мал. 505). 1113. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 1114. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 1115. 45 кв. од. 1116. 42 кв. од. 1117. 1) 3000 см^2 ; 2) 1000 см^2 . 1118. 2500 см^2 . 1119. 1) 80 см^2 ; 2) 300 см^2 . 1120. 30 см^2 . 1121. 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 3 см; 4) 8 см. 1122. 12 см. 1123. 1) $h_a = 8,2$ см; $h_b = 4,1$ см; 2) $h_a = 4$ см; $h_b = 2$ см; 3) $h_a = 4,5$ см; $h_b = 3$ см; 4) $h_a = 4$ см; $h_b = 6,4$ см. 1124. 1) 8 см; 2) 5 см. 1125. 4 см. 1126. 1) 4 см; 2) 12 мм. 1127. 15 см. 1128. *Вказівка*: проведіть діагоналі паралелограма та прямі, що проходять через точку перетину діагоналей паралельно

сторонам; покажіть, що площа кожного з восьми трикутників дорівнює $\frac{1}{8}$ площі даного паралелограма. 1129. Так. 1130. 24 кв. од. 1131. 96 кв. од. 1132. 1) 96 см^2 ; 2) $2,4 \text{ дм}^2$. 1133. 840 мм^2 . 1134. Вказівка: скористайтеся тим, що діагоналі ромба перпендикулярні й точкою перетину діляться навпіл. 1135. 1) 100 см^2 ; 2) 120 см^2 . 1136. 72 см^2 . 1137. 1) 8 см^2 ; 2) $0,45 \text{ см}^2$. 1138. $0,72 \text{ м}^2$. 1139. 1) $75\sqrt{3} \text{ мм}^2$; 2) $250\sqrt{3} \text{ мм}^2$. 1140. 1) 75 см^2 ; 2) 250 см^2 . 1141. 1) 8 см, 3 см; 2) 1,5 дм, 6 дм. 1142. 1) 30 см; 2) 30 см. 1143. 1) 128 см^2 ; 2) 140 см^2 . 1144. Вказівка: якщо від трикутників, що мають рівні площі, відрізати трикутники з рівними площами, то дістанемо фігури з рівними площами. 1145. 1) $0,5 \text{ дм}^2$; 2) $3,38 \text{ см}^2$. 1146. 1) $3\sqrt{6} \text{ см}$; $4\sqrt{6} \text{ см}$; 2) $4\sqrt{3} \text{ см}$; $6\sqrt{3} \text{ см}$; 3) $6\sqrt{2} \text{ см}$; $6\sqrt{2} \text{ см}$. 1147. 30° . 1148. 4 см. 1149. У 2 рази. 1150. 48 см^2 . 1151. Вказівка: спочатку покажіть, що діагональ ромба розбиває його на два рівносторонні трикутники, а потім виразіть площу ромба і площу трикутника, утвореного висотами, через сторону й висоту ромба. 1153. Вказівка: трикутники AMD і CMD розбийте висотами, проведеними з вершини M , на прямокутні трикутники та покажіть, що сума їхніх площ дорівнює половині площі паралелограма. 1154. Діагональ дорівнює стороні, до якої ця діагональ перпендикулярна. 1155. 1) 24 см^2 ; 2) 156 см^2 . 1156. Дві прямі, які паралельні даній стороні паралелограма й віддалені від неї на відстань $\frac{S}{h}$. 1158. $23\,750 \text{ м}^2$.

§ 21. Площа трикутника

1162. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) ні; 6) ні. 1163. 10 кв. од. (мал. 523); 210 кв. од. (мал. 524). 1164. $42,5 \text{ кв. од.}$ 1165. 1) 15 см^2 ; 2) 1250 см^2 . 1166. 5 дм^2 . 1167. 1) 40 см^2 ; 2) 108 мм^2 . 1168. $1,5 \text{ дм}^2$. 1169. 1) 12 см; 2) 31 см; 3) 20 см. 1170. 12 см. 1171. 1) $h_a = \frac{168}{13} \text{ см}$, $h_b = 12 \text{ см}$, $h_c = \frac{168}{15} \text{ см}$; 2) $h_a = \frac{252}{13} \text{ см}$, $h_b = 12,6 \text{ см}$, $h_c = 12 \text{ см}$; 3) $h_a = 12 \text{ см}$, $h_b = \frac{42}{15} \text{ см}$, $h_c = 2,1 \text{ см}$; 4) $h_a = 8 \text{ см}$, $h_b = 7,2 \text{ см}$, $h_c = \frac{72}{17} \text{ см}$. 1172. 1) Не зміниться; 2) збільшиться у 2 рази. 1173. Збільшиться у 2 рази. 1174. 1) $16\sqrt{3} \text{ см}^2$; 2) $0,36\sqrt{3} \text{ дм}^2$; 3) $\sqrt{3} \text{ м}^2$; 4) $3\sqrt{3} \text{ см}^2$; 5) $\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ дм}^2$. 1175. 1) $25\sqrt{3} \text{ см}^2$; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ дм}^2$. 1176. 1) 240 см^2 ; 2) 120 см^2 . 1177. 60 см^2 . 1178. Вказівка: порівняйте основи та висоти трикутників. 1179. Вказівка: порівняйте основи та висоти трикутників. 1180. Навпіл. 1181. 0,25. 1182. 1) 210 см^2 ; 2) 420 см^2 . 1183. 84 см^2 . 1184. Вказівка: проведіть у трикутнику відрізки, що з'єднують центр вписаного кола з вершинами трикутника. Площу трикутника виразіть через площі трьох утворених трикутників. 1185. 1) $p = 42 \text{ см}$, $S = 210 \text{ см}^2$; 2) $p = 27 \text{ см}$, $S = 126 \text{ см}^2$; 3) $p = 21 \text{ см}$, $S = 42 \text{ см}^2$; 4) $p = 45 \text{ см}$, $S = 240 \text{ см}^2$. 1186. 1 см. 1187. 432 см^2 ; 756 см^2 . 1188. $\sqrt{3} \text{ см}^2$; $144\sqrt{3} \text{ см}^2$. 1189. 1) 108 см^2 ; 2) 136 см^2 . 1190. 260 см^2 . 1191. 1) 39 см^2 ; 2) 60 см^2 . 1192. Вказівка: скористайтеся властивостями середньої лінії трикутника. 1193. 1) 150 см^2 ; 2) $3,36 \text{ см}^2$; 3) 135 см^2 ; 4) 720 см^2 . 1194. 1) 270 см^2 ; 2) 120 см^2 . 1195. 1) 18 см, 80 см; 2) 48 см, 55 см. 1196. 1) 39 см^2 ; 2) 34 см^2 . 1197. 1) $8\sqrt{3} \text{ см}^2$;

2) $18\sqrt{3}$ см². 1198. 1) 24 см²; 2) 120 см². 1199. $h_c < h_b < h_a$. 1200. *Вказівка*: скористайтеся тим, що медіани трикутника точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини. 1201. *Вказівка*: виміряйте відповідні сторони трикутників. 1202. 1) $\frac{16}{3}$ см; 2) $\frac{16}{3}$ см; 3) $\frac{8}{3}$ см. 1203. *Вказівка*: скористайтеся формулою площі прямокутного трикутника й виразіть один із катетів за формулами 1 і 2 таблиці 33 (с. 175). 1205. *Вказівка*: спочатку з'єднайте дану точку з вершинами трикутника, потім знайдіть площу трикутника як суму площ одержаних трьох трикутників. 1206. *Вказівка*: скористайтеся означенням рівноскладених фігур. 1208. *Вказівка*: скористайтеся двома формулами площі трикутника. 1209. $7S$, де S — площа даного трикутника. 1210. $1 : (\sqrt{2} - 1) : (\sqrt{3} - \sqrt{2})$. 1211. $4\sqrt{\frac{m}{m+n}}$. 1214. *Вказівка*: трикутники ABC і ACM мають рівні площі, тому площа трикутника ABC дорівнює половині добутку довжини відрізка AM на ширину лінійки. 1217. 0,927 кг.

§ 22. Площа трапеції

1219. 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) ні; 6) так. 1220. 300 кв. од. (мал. 549); 150 кв. од. (мал. 550). 1221. 44 кв. од. 1222. 1) 2400 см²; 2) 4000 см². 1223. 1400 см². 1224. 1) 90 см²; 2) 1,75 дм². 1225. 33 см². 1226. 1) 10 см; 2) 12 см. 1227. 12 см. 1228. 1) 4 см; 2) 5 см. 1229. 3 см. 1230. 1) $q = 12$ см, $S = 84$ см²; 2) $b = 27$ см, $h = 5$ см; 3) $a = 20$ см, $q = 21$ см; 4) $a = 23$ см, $h = 11$ см. 1231. 1) Не зміниться; 2) збільшиться у 2 рази. 1232. Не зміниться. 1233. 1) 20 см, 16 см; 2) 36 см, 24 см. 1234. 20 см, 10 см. 1235. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. 1236. 1) 144 см²; 2) 44 см². 1237. 276 см². 1238. 1) 645 см²; 2) 180 см². 1239. $18(3 + \sqrt{3})$ см². 1240. 1) 10,5 см²; 2) 8 см². 1241. 1) 6 см²; 2) 13,5 см². 1242. 45°. 1243. 1) 5,6 см²; 2) 96 см². 1244. Розгляньте два випадки: 8 см і 12 см або 2 см і 6 см. 1245. 12 см. 1246. *Вказівка*: якщо трапеція є описаною навколо кола, то сума її основ дорівнює сумі бічних сторін. 1247. $\frac{2S}{P}$. 1248. 10 см. 1249. $\approx 130,03$ см². 1250. $96\sqrt{3}$ см². 1251. *Вказівка*: скористайтеся властивістю середньої лінії трапеції. 1252. Від 16 см до 32 см. 1253. $\frac{2ab}{a+b}$. 1254. *Вказівка*: доведіть, що площі трикутників BOC і COD та площі трикутників AOB і BOC відносяться як $AB : CD$. 1255. $\left(\frac{m}{n}\right)^2 : 1 : \frac{m}{n} : \frac{m}{n}$. 1256. 90°. 1257. $\frac{4dc}{5}$. 1258. *Вказівка*: скористайтеся властивістю медіани прямокутного трикутника, проведеної до його гіпотенузи. 1259. *Вказівка*: покажіть, що сума площ двох інших з утворених трикутників дорівнює половині площі трапеції. 1260. *Вказівка*: покажіть, що площа кожної такої трапеції дорівнює половині площі даного трикутника. 1261. 346 500 кв. од. 1262. *Вказівка*: розбийте чотирикутник на прямокутні трикутники та обчисліть їхні площі. 1263. *Вказівка*: покажіть, що відстань від меншої бічної сторони трапеції до шуканої прямої дорівнює половині середньої лінії трапеції. 1264. Не вистачить, оскільки не можна розмістити всі чотири вставки на склі даних розмірів.



ПРЕДМЕТНИЙ

Висота трапеції 73

Відрізок четвертий пропорційний
119

Властивість бісектриси
трикутника 150

— діагоналей паралелограма 24

— кутів вписаного
чотирикутника 97

— рівнобічної трапеції 74

— сторін описаного
чотирикутника 98

— діагоналей прямокутника 41

Властивості діагоналей ромба 50

— медіан трикутника 149

— середніх пропорційних
у прямокутному трикутнику 151

Площа 212

Розв'язати прямокутний
трикутник 192

Ромб 50

Середня лінія трапеції 74

— — трикутника 63

Середнє пропорційне
двох відрізків 151

Синус гострого кута прямокутного
трикутника 172

Співвідношення між сторонами
та кутами прямокутного
трикутника 176

Сторін відношення 108

Сторони пропорційні 108

Тангенс гострого кута
прямокутного трикутника 172



ЗМІСТ

Дорогі учні й учениці

РОЗДІЛ 1. Узагальнення та систематизація

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості

Взаємне розміщення прямих на площині.

Трикутники

Коло і круг

РОЗДІЛ 2. Чотирикутники

§ 1. Чотирикутник

§ 2. Паралелограм та його властивості.

§ 3. Ознаки паралелограма

§ 4. Прямокутник

§ 5. Ромб. Квадрат

§ 6. Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника

§ 7. Трапеція

§ 8. Центральні та вписані кути.

§ 9. Вписані й описані чотирикутники

Перевірте, як засвоїли матеріал розділу 2

РОЗДІЛ 3. Подібність трикутників

Навчальна

**БУРДА Миха
ТАРАСЕНКОВА І**

ГЕОМІ

**Підручник д
закладів загально**

Рекомендовано Міністерст

Підручник відповідає Державним
«Гігієнічні вимоги до друко

Головна редактор
Редакторка І
Головна художниця

ФОРМУЛИ

НАЗВА ФОРМУЛИ	ФОРМУЛА	ПОЗНАЧЕННЯ
Довжина середньої лінії трикутника	$m = \frac{a}{2}$	m — середня лінія, a — сторона, якій паралельна середня лінія
Довжина середньої лінії трапеції	$n = \frac{a+b}{2}$	n — середня лінія, a, b — основи
Площа квадрата	$S = a^2$	a — сторона
	$S = \frac{1}{2}d^2$	d — діагональ
Площа прямокутника	$S = ab$	a, b — сторони
Площа паралелограма і ромба	$S = ah_a$	a — сторона, h_a — висота, проведена до цієї сторони
Площа ромба (інший вигляд формули)	$S = \frac{1}{2}d_1d_2$	d_1, d_2 — діагоналі
Площа трикутника	$S = \frac{1}{2}ah_a$	a — сторона, h_a — висота, проведена до цієї сторони
	$S = mh$	m — середня лінія, h — висота, проведена до сторони, якій паралельна середня лінія
	$S = pr$	p — півпериметр, r — радіус вписаного кола
Площа трапеції	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$	a, b — основи, h — висота
	$S = nh$	n — середня лінія, h — висота