

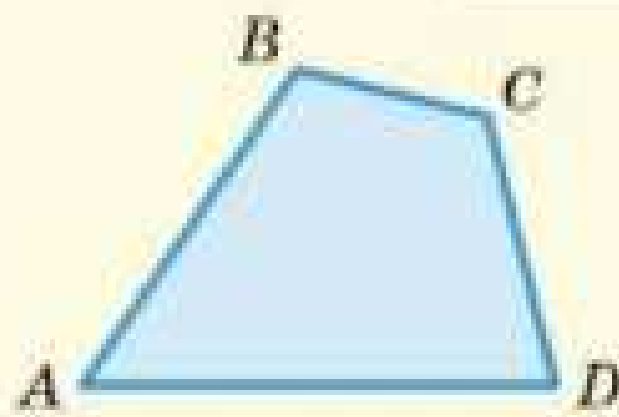
Григорій Бевз, Валентина Бевз,
Дарина Васильєва, Наталія Владімірова

ГЕОМЕТРІЯ



8
КЛАС

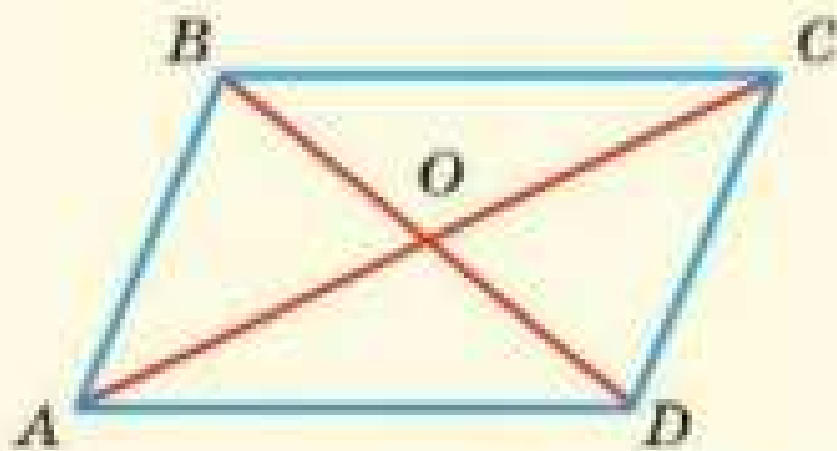
Чотирикутники



$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$AD < AB + BC + CD$$

Паралелограми

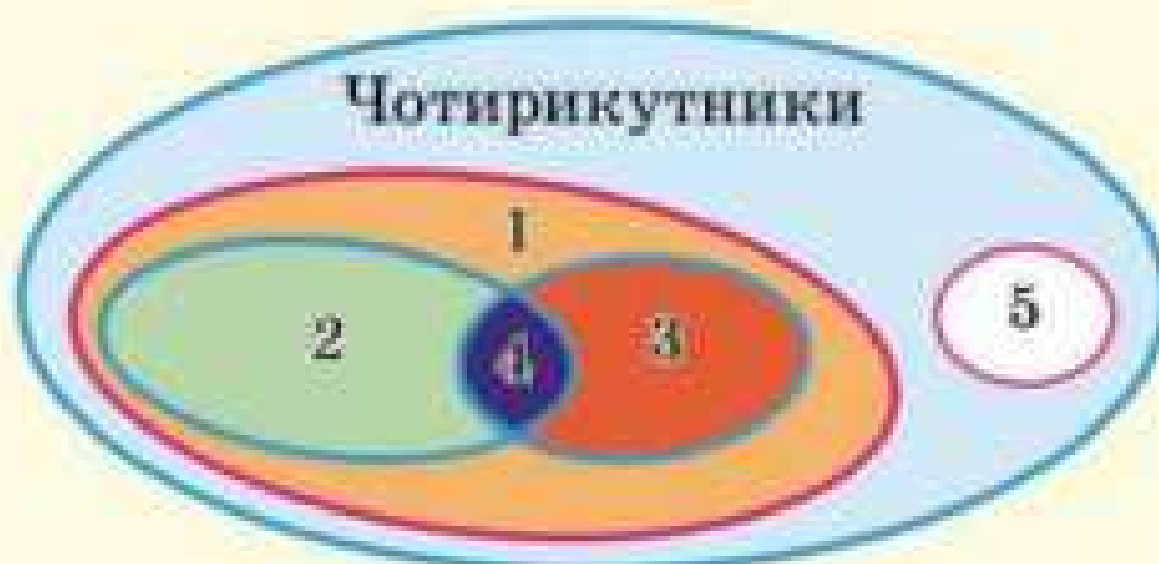


$AB \parallel CD$ і $AD \parallel BC$ — означення

$AB = CD$ і $AD = BC$ — ознака

$AB = CD$ і $AB \parallel CD$ — ознака

$OA = OC$ і $OB = OD$ — ознака



1 — паралелограми

2 — прямокутники

3 — ромби

4 — квадрати

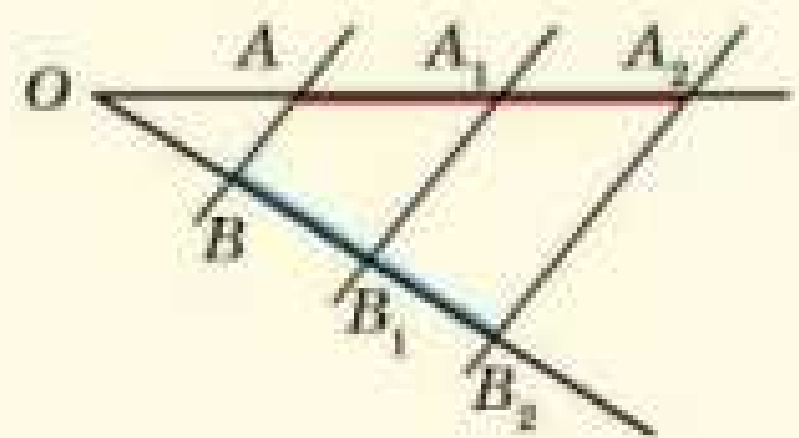
5 — трапеції

Теорема Фалеса. Якщо $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$, то:

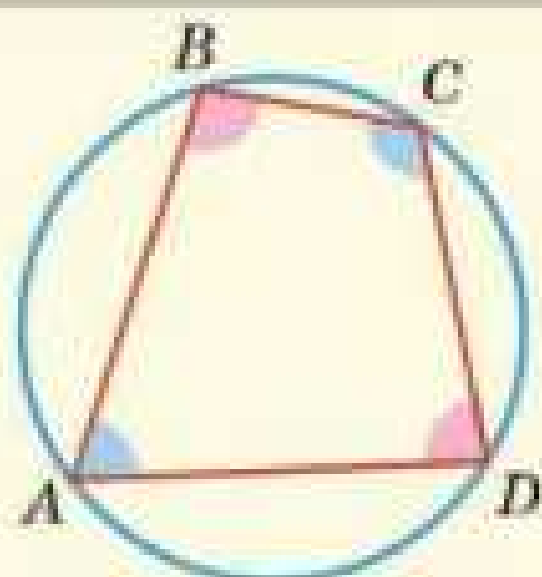
з $AA_1 = A_1A_2$ випливає,

що $BB_1 = B_1B_2$

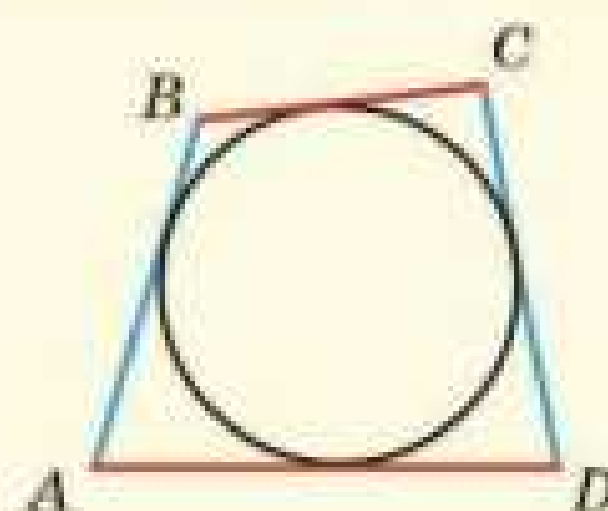
$$\frac{AA_1}{A_1A_2} = \frac{BB_1}{B_1B_2}$$



Вписані й описані чотирикутники

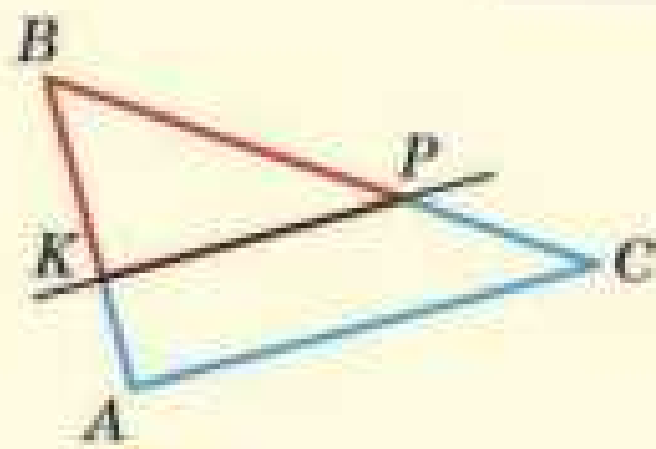


$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$



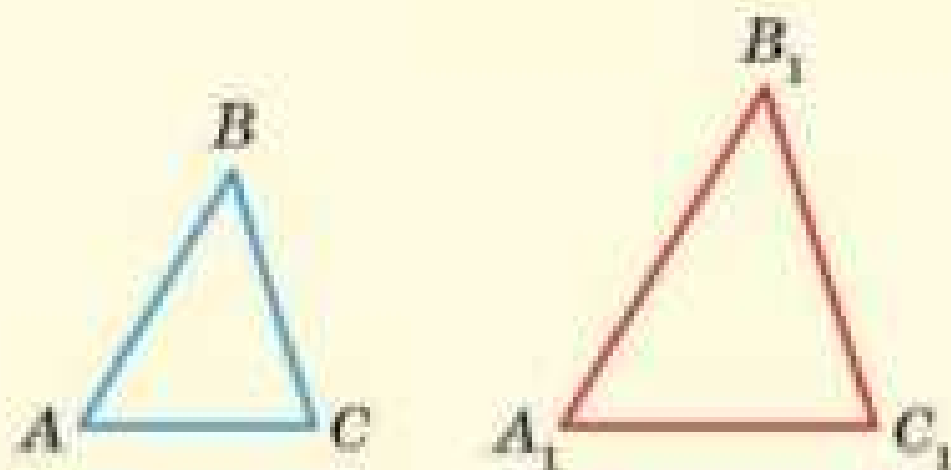
$$AB + CD = AD + BC$$

Подібні трикутники



Якщо $KP \parallel AC$, то $\triangle KVP \sim \triangle ABC$.

Ознаки подібності трикутників

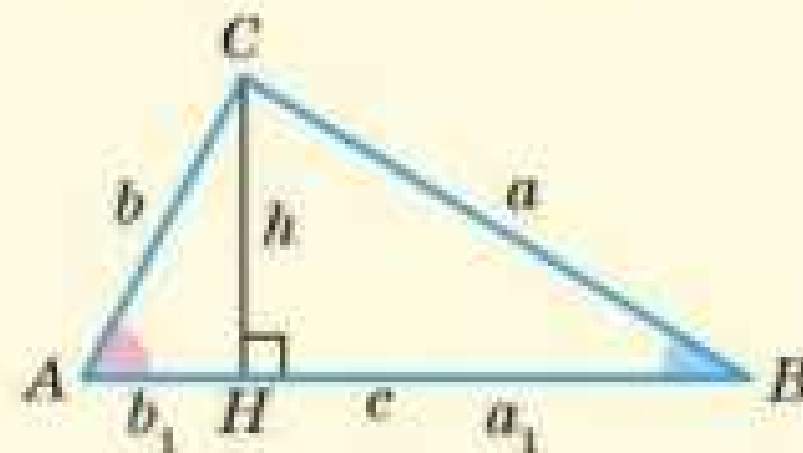


$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, якщо:

- 1) $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$;
- 2) $\angle A = \angle A_1$ і $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$;
- 3) $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1$.

Якщо $\angle C = 90^\circ$ і $CH \perp AB$, то:

- 1) $\triangle ACH \sim \triangle CBH \sim \triangle ABC$;
- 2) $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$;
- 3) $h^2 = a_1b_1$.



Теорема Піфагора: $a^2 + b^2 = c^2$

Таблиця квадратів

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
20	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
30	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
40	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
50	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
60	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
70	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
80	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
90	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801
100	10 000	10 201	10 404	10 609	10 816	11 025	11 236	11 449	11 664	11 881
110	12 100	12 321	12 544	12 769	12 996	13 225	13 456	13 689	13 924	14 161
120	14 400	14 641	14 884	15 129	15 376	15 625	15 876	16 129	16 384	16 641
130	16900	17 161	17 424	17 689	17 956	18 225	18 496	18 769	19 044	19 321
140	19 600	19 881	20 164	20 449	20 736	21 025	21 316	21 609	21 904	22 201
150	22 500	22 801	23 104	23 409	23 716	24 025	24 336	24 649	24 964	25 281

Григорій Бевз, Валентина Бевз, Дарина Васильєва, Наталія Владімірова

«Геометрія»

підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти

Видавничий дім «Освіта»
2025

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 21.02.2025 № 347)

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою
«Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авт. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.)

Умовні позначення

-  — попрацюйте в парах
-  — попрацюйте в групах
-  — склади розповідь чи задачу
-  — завдання з логічним навантаженням
-  — завдання для обговорення в парі
-  — завдання дослідницького характеру
-  — завдання з використанням ІКТ
-  — завдання підвищеної складності
-  **21.** — завдання, рекомендоване для домашньої роботи

До підручника розроблено інтерактивний електронний додаток. Щоб ознайомитись із матеріалами додатка, перейдіть за посиланням

<https://profile.gioschool.com/ua/>

та введіть логін і пароль.

Логін: demo-student011@gioschool.com

Пароль: Qwerty1234

ДОРОГІ ВОСЬМИКЛАСНИКИ ТА ВОСЬМИКЛАСНИЦІ!

- Користуючись підручником, ви значно розширите свої математичні знання й уміння. Ви ознайомитесь з різними видами чотирикутників і їх властивостями, розглянете вписані та центральні кути, вписані та описані чотирикутники та інші многокутники. Ознайомитесь з двома перлинами геометрії — теоремою Фалеса та теоремою Піфагора. Розглянувши подібність трикутників і площі фігур, ви переконаєтесь, наскільки широко геометрія використовується в нашому житті.
- Вивчаючи теоретичний матеріал, звертайте увагу на слова, надруковані жирним курсивом, — це нові геометричні терміни. Ви повинні усвідомити, що вони означають, і запам'ятати їх.
- Виділені **жирним шрифтом** речення є основними означеннями, теоремами та іншими важливими математичними твердженнями. Слід навчитися їх формулювати (можна — своїми словами) та застосовувати до розв'язування пропонованих вправ і задач.
- Підручник містить вправи різних рівнів складності: для усного розв'язування та письмові рівнів А і Б. У рубриці «Виконаємо разом!» наведено зразки розв'язань важливих видів задач. Корисно ознайомитися з ними перед виконанням домашніх завдань.
- Рубрика «Готуємося до тематичного оцінювання» допоможе якнайкраще підготуватися як до тематичного оцінювання, так і до зовнішнього незалежного оцінювання чи національного мультипредметного тесту в подальшому.

Перш ніж працювати з підручником, перейди за QR-кодом та повтори відомості за 7-й клас.



РОЗДІЛ 1

Чотирикутники

У цьому розділі ти ознайомишся з найважливішими властивостями чотирикутників, зокрема паралелограмів, прямокутників, ромбів, квадратів і трапецій, а також із властивостями чотирикутників, вписаних у коло й описаних навколо нього.

§ 1 Загальні властивості чотирикутників
Quadrangles General Features

§ 2 Паралелограми
Parallelograms

§ 3 Прямокутник, ромб і квадрат
Rectangle, Rhombus and Square

§ 4 Застосування властивостей паралелограма
Parallelogram Properties Application

§ 5 Трапеція
Trapezoid

§ 6 Центральні і вписані кути
Central and Inscribed Angles

§ 7 Вписані й описані чотирикутники
Inscribed and Tangent Quadrangles



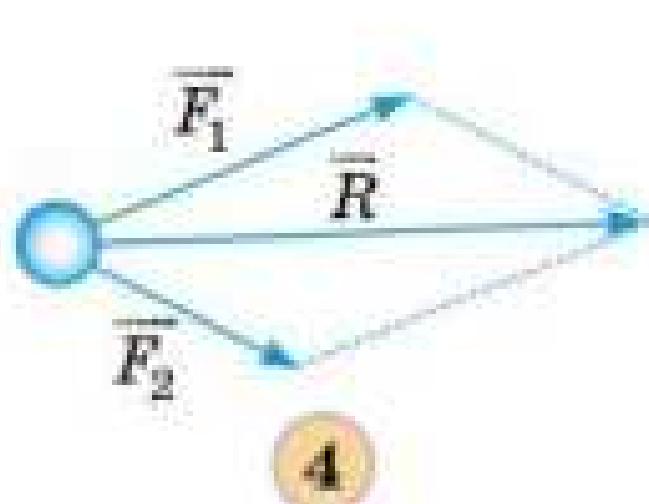
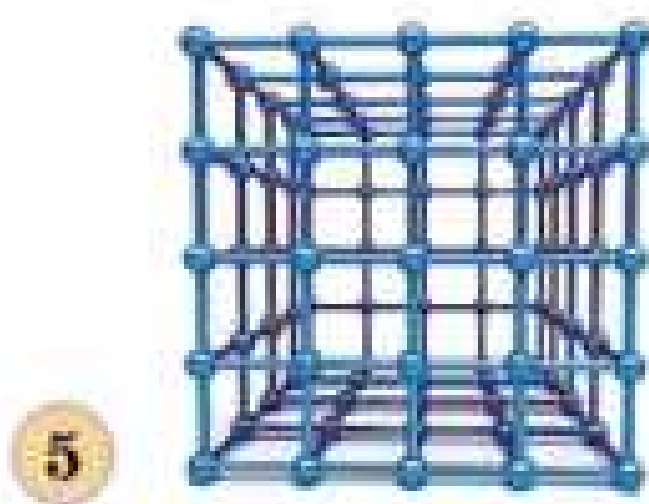
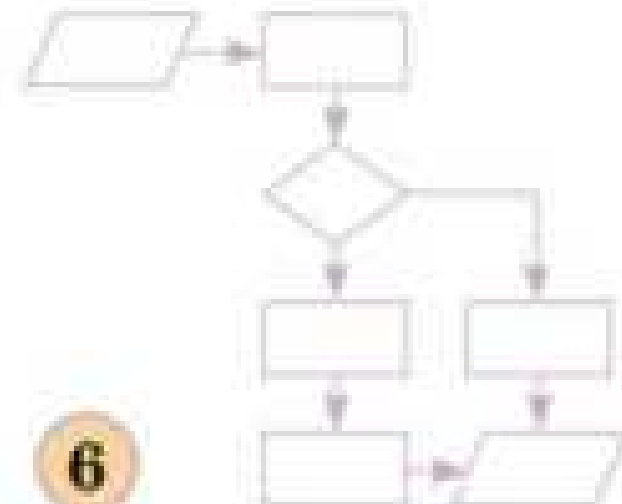
Для чого вивчати чотирикутники та їх властивості?

Чотирикутники часто трапляються у повсякденному житті (вікна та двері, поверхня столу та шафи, плитка для стін і підлоги, паркет і килим, рушники і простирадла, басейни, тротуарна плитка).



Властивості чотирикутників використовують у фізиці, хімії, інформатиці. У фізиці рівнодійна двох сил визначається переважно, як діагональ паралелограма.

У хімії на основі чотирикутників будують структурні формули деяких органічних речовин. В інформатиці чотирикутниками позначають основні елементи схем алгоритму. Блок вхідних та вихідних даних прийнято позначати паралелограмом, блок обчислень даних — прямокутником, блок прийняття рішень — ромбом.



**А де ще можна побачити чотирикутники?
Наведи свої приклади.**

Вивчивши матеріал розділу, ти дізнаєшся: чому домкрат має таку форму, що таке дельтоїд, як зробити повітряного змія, як гарно скласти серветки для святкових обідів тощо.

§ 1

ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ
ЧОТИРИКУТНИКІВ

Нехай дано чотири точки A, B, C, D , з яких ніякі три не лежать на одній прямій. Якщо їх сполучити послідовно відрізками, що не перетинаються, утвориться **чотирикутник** (мал. 1.1). Він поділяє площину на дві області: внутрішню і зовнішню.

Фігуру, що складається із чотирикутника і його внутрішньої області, також називають чотирикутником (мал. 1.2).

Точки A, B, C, D — *вершини* чотирикутника $ABCD$; відрізки AB, BC, CD, DA — його *сторони*.

Кутами чотирикутника $ABCD$ називають кути ABC, BCD, CDA, DAB .

Вершини чотирикутника, що є кінцями однієї його сторони, називають *сусідніми*. *Несусідні* вершини називають *протилежними*.

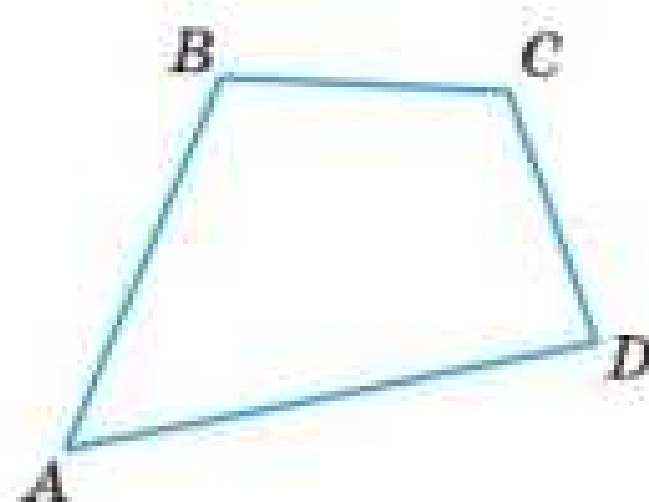
Сторони чотирикутника називають *протилежними*, якщо вони не мають спільних точок.

Кути чотирикутника називають *протилежними*, якщо їх вершини — протилежні вершини чотирикутника.

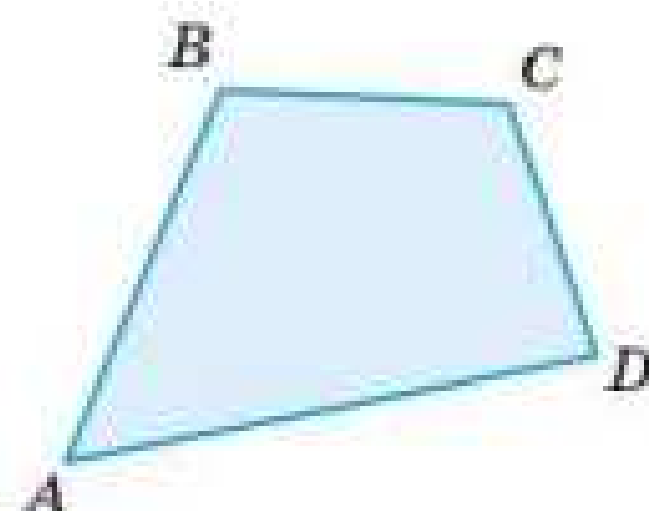
У чотирикутнику $ABCD$ (мал. 1.2) протилежні вершини A і C , B і D , протилежні сторони AB і CD , BC і AD , протилежні кути ABC і ADC , BAD і BCD .

КЛЮЧОВІ СЛОВА

convex quadrilaterals — опуклі чотирикутники
sides of a quadrilateral — сторони чотирикутника



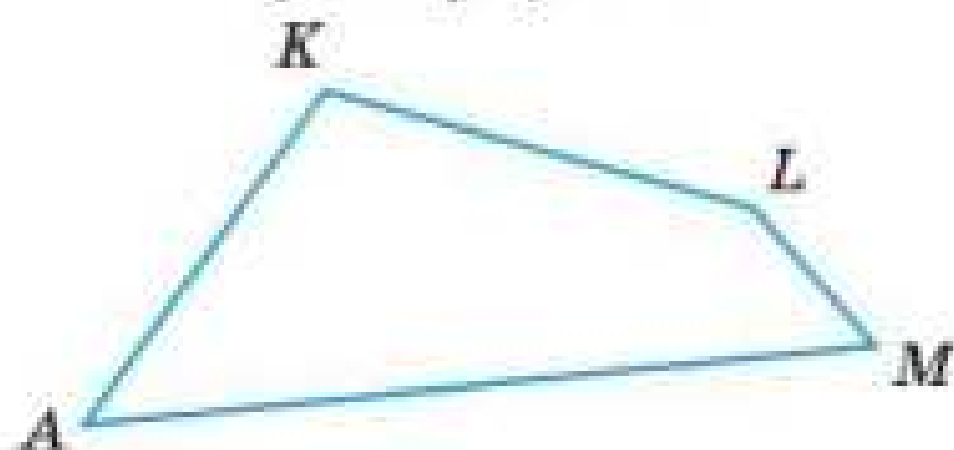
Мал. 1.1



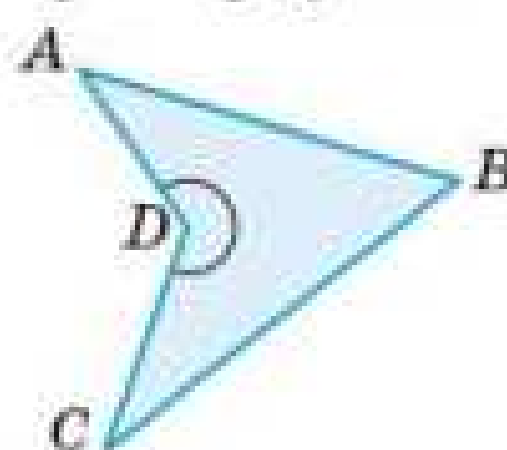
Мал. 1.2

Чотирикутники

Опуклі чотирикутники
всі кути менші від розгорнутого



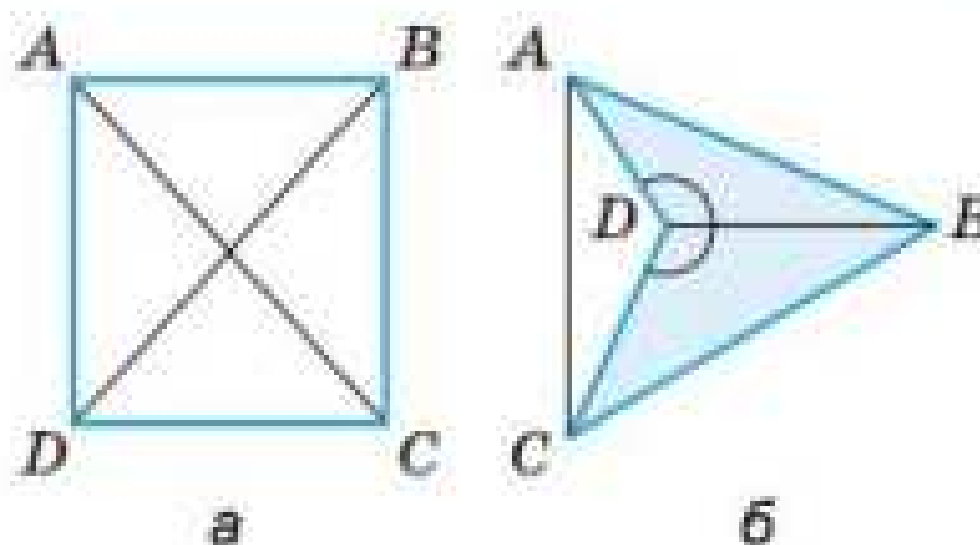
Неопуклі чотирикутники
один кут більший від розгорнутого



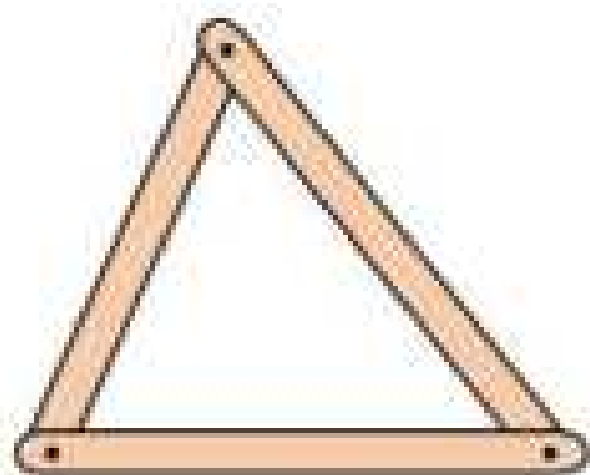
Відрізок, що сполучає дві протилежні вершини чотирикутника, називають його *діагоналлю*. Кожний чотирикутник має дві діагоналі. Діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються (мал. 1.3, а).

Подумай, чи перетинаються діагоналі неопуклого чотирикутника на малюнку 1.3, б.

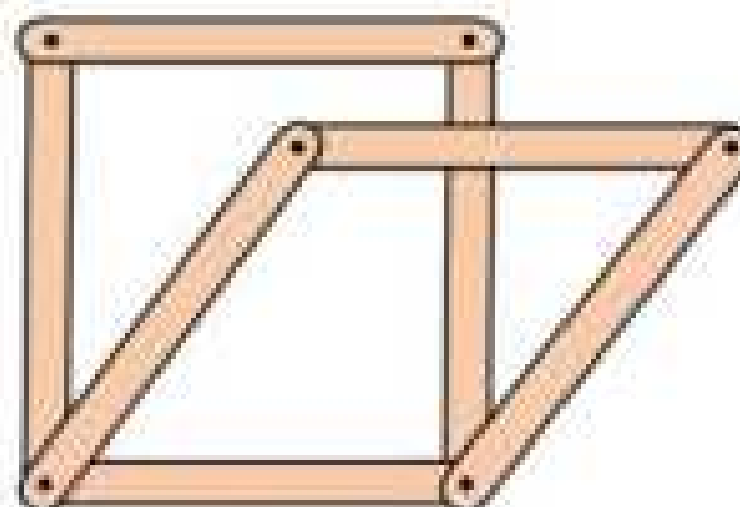
На відміну від трикутника (мал. 1.4, а), чотирикутник без внутрішньої області — фігура не жорстка. Чотири сторони не задають однозначно чотирикутник (мал. 1.4, б).



Мал. 1.3



а



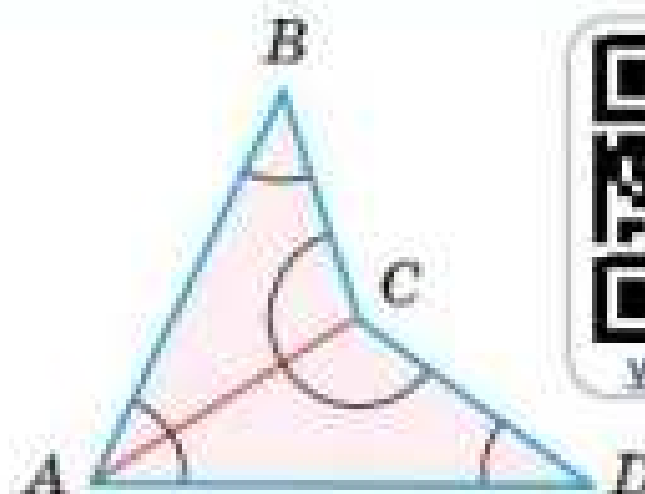
б

Мал. 1.4

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають його периметром.

Теорема 1. Сума кутів кожного чотирикутника дорівнює 360° .

Доведення. Нехай дано чотирикутник $ABCD$ (мал. 1.5). Одна з його діагоналей розбиває його на два трикутники. Сума кутів чотирикутника дорівнює сумі всіх кутів обох трикутників. Отже,
 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

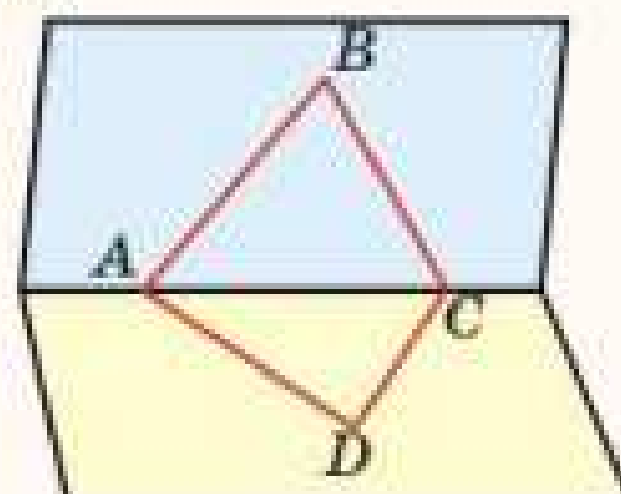


Мал. 1.5



ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

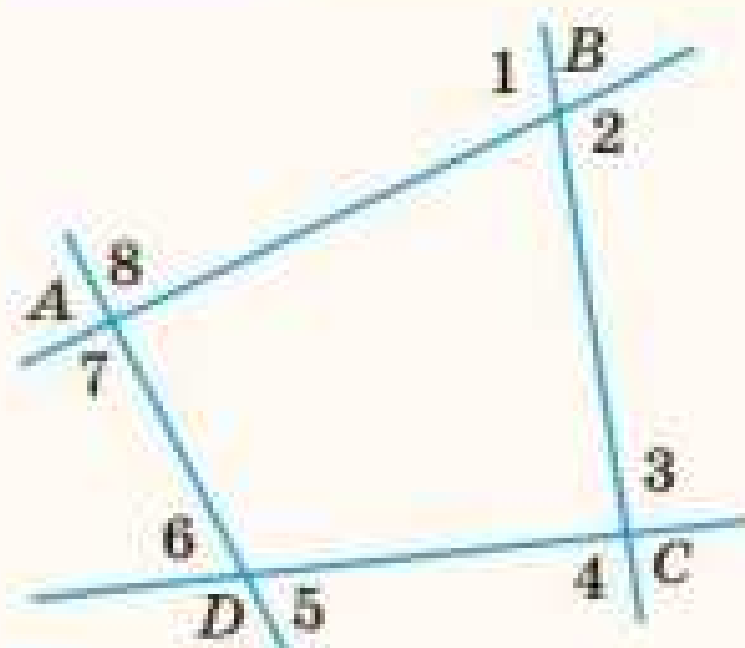
Чотирикутники, про які йшлося досі, називають ще плоскими чотирикутниками. Крім них, існують також неплоскі (просторові) чотирикутники, не всі точки яких лежать в одній площині. Уяви, що відрізки AB і BC лежать в одній площині, а CD і DA — в іншій (мал. 1.6). Замкнену ламану $ABCD$ також називають чотирикутником, але неплоским. Неплоскі чотирикутники істотно відрізняються від плоских. Наприклад, сума кутів неплоского чотирикутника не дорівнює 360° . З деякими властивостями неплоских чотирикутників ти ознайомишся в старших класах. Далі, коли говоритимемо про чотирикутники, матимемо на увазі тільки плоскі чотирикутники.



Мал. 1.6



Як ти вже знаєш, крім кутів (внутрішніх) трикутника, розглядають ще його зовнішні кути. Подібно до цього розглядають і зовнішні кути опуклих чотирикутників. Їх можна утворити, продовживши кожен сторону такого чотирикутника в обидва боки. На малюнку 1.7 цифрами позначено 8 попарно рівних зовнішніх кутів чотирикутника $ABCD$. Якщо чотирикутник не опуклий, то при вершині найбільшого його кута поняття зовнішнього кута визначити важко, тому далі розглядатимемо зовнішні кути тільки опуклих чотирикутників.

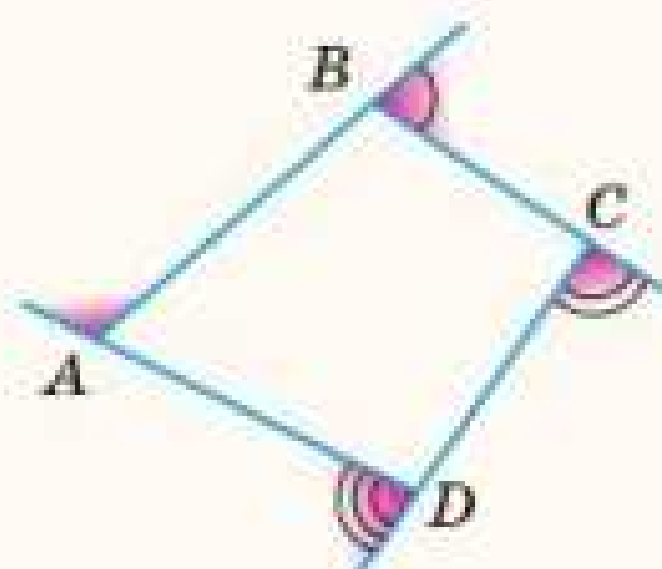


Мал. 1.7

Теорема 2. Сума зовнішніх кутів опуклого чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° .

Доведення. Додавши до кожного зовнішнього кута чотирикутника суміжний із ним внутрішній кут, дістанемо 4 пари суміжних кутів, загальна сума яких дорівнює $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ (мал. 1.8). Якщо від 720° відняти 360° — суму внутрішніх кутів чотирикутника, буде 360° .

Спробуй узагальнити цю теорему для довільних опуклих n -кутників.



Мал. 1.8

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй означення чотирикутника.
2. Які вершини чотирикутника називаються сусідніми? Які — протилежними?
3. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?
4. Який чотирикутник називають опуклим? Який — неопуклим?
5. Скільки діагоналей має чотирикутник?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Знайди міри кутів чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 2, 3 і 5.

• За такої умови можна вважати, що шукані міри кутів дорівнюють $2x$, $2x$, $3x$ і $5x$, де x — деяке число. Сума всіх кутів чотирикутника дорівнює 360° , тому

$$2x + 2x + 3x + 5x = 360^\circ, 12x = 360^\circ, x = 30^\circ.$$

$$2 \cdot 30^\circ = 60^\circ, 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ, 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ.$$

Відповідь. 60° , 60° , 90° і 150° .

2. Чи існує чотирикутник, три сторони якого дорівнюють 2 см, 3 см, 5 см, а периметр 2 дм?



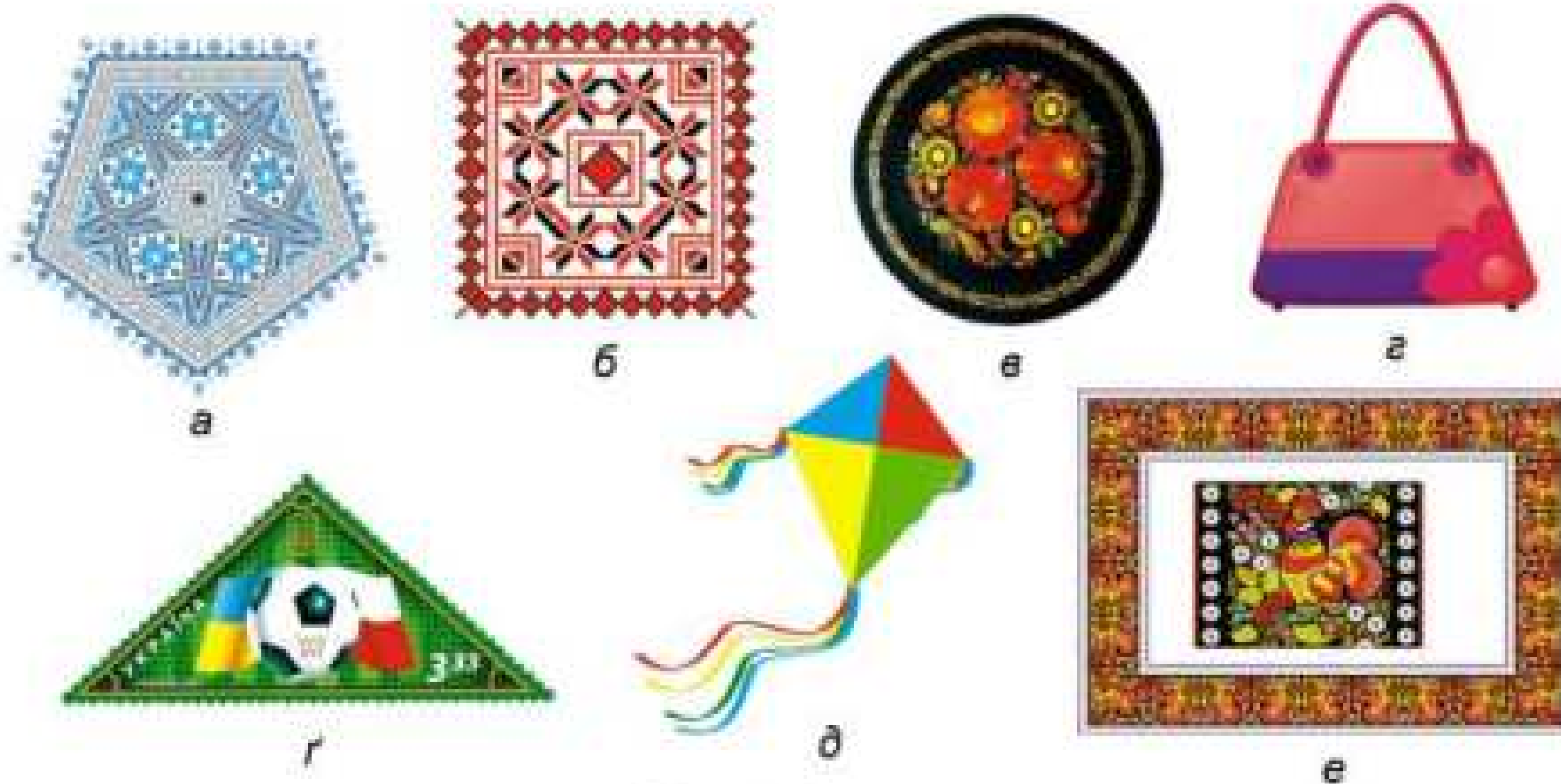
- $2 \text{ дм} = 20 \text{ см}$. Якщо такий чотирикутник існує, то його четверта сторона завдовжки $20 - (2 + 3 + 5) = 10 \text{ см}$. Виходить, четверта сторона чотирикутника дорівнює сумі трьох інших. Цього не може бути.

Відповідь. Не існує.

ВИКОНАЄМО УСНО



1. Три кути чотирикутника дорівнюють 50° , 60° і 100° . Знайди міру четвертого кута.
2. Чи існує чотирикутник, який має три кути по 120° ?
3. Чи існує чотирикутник, який має три тупі кути?
4. Чи можуть усі кути чотирикутника бути гострими?
5. Які з наведених нижче предметів мають форму чотирикутника (мал. 1.9)?



Мал. 1.9

6. Знайди сторони чотирикутника, якщо кожна з них менша від його периметра на 6 см.
7. Периметр чотирикутника дорівнює 20 м. Як він зміниться, якщо кожную сторону збільшити на 1 м?
8. Периметр чотирикутника дорівнює 10 дм. Як він зміниться, якщо кожную сторону збільшити втричі?
9. Яку найбільшу кількість гострих кутів може мати опуклий чотирикутник?
10. Поміркуйте, чи в кожному чотирикутнику діагоналі перетинаються.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

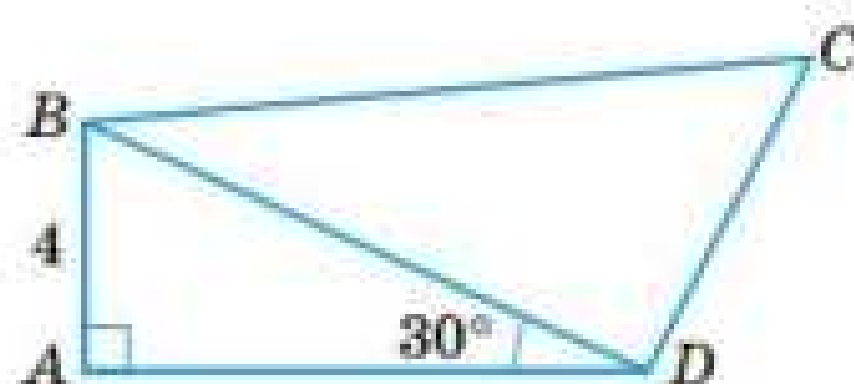
РІВЕНЬ А



11. Накресли чотирикутник $ABCK$. Назви його протилежні сторони, протилежні вершини, протилежні кути.
12. Накресли чотирикутник $MNPK$. Виміряй довжини його сторін і знайди периметр.
13. Чи існує чотирикутник, у якого один із кутів дорівнює 60° , а кожний наступний на 20° більший від попереднього?
14. Три кути чотирикутника дорівнюють 37° , 58° і 75° . Опуклим чи неопуклим буде цей чотирикутник?
15. Знайди кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам: а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 2, 13. Опуклим чи неопуклим буде чотирикутник?
16. Кути чотирикутника, взяті послідовно, пропорційні числам 3, 4, 5 і 6. Знайди кути чотирикутника. Чи має цей чотирикутник паралельні сторони?
17. Знайди сторони одного із чотирикутників на поверхні вази, якщо його периметр дорівнює 38 см, а сторони пропорційні числам 2, 3, 5 і 9 (мал. 1.10).
18. Знайди довжини сторін чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 21 см, а одна зі сторін удвічі коротша від кожної з інших.
19. Одна зі сторін чотирикутника вдвічі більша за кожну з інших сторін. Знайди сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 20 см.
20. Find the lengths of the sides of a quadrilateral if its perimeter is 15 cm and one of the sides is twice as long as each of the others.
21. Чи існує чотирикутник зі сторонами 3 см, 5 см, 8 см і 16 см?
22.  **Гра.** Кожен із чотирьох учасників / учасниць називає довжину сторони чотирикутника, а перший / перша зазначає, чи існує такий чотирикутник. Потім гра починається знову з другого учасника.
23. Доведи, що довжина будь-якої сторони чотирикутника менша від суми довжин трьох інших його сторін.
24. Знайди діагональ BD чотирикутника $ABCD$, якщо $\angle A = 90^\circ$, $\angle ADB = 30^\circ$ і $AB = 4$ см (мал. 1.11).

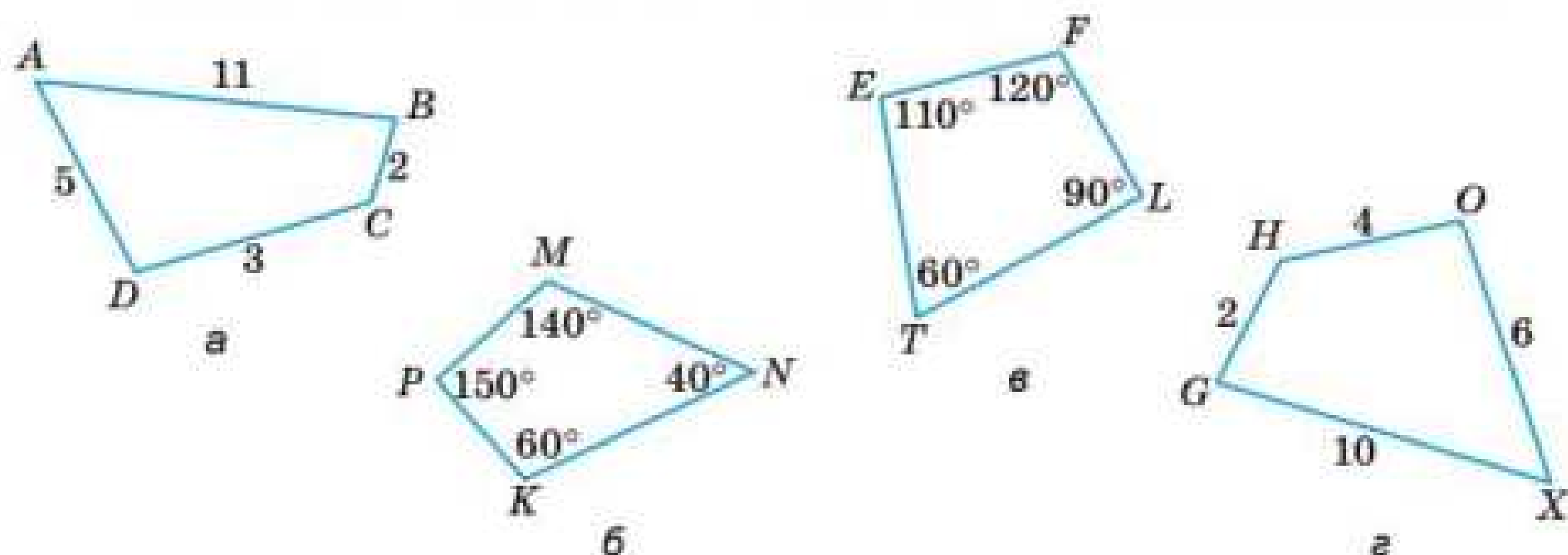


Мал. 1.10



Мал. 1.11

25. Чи існують чотирикутники з такими даними, як на малюнку 1.12? Якщо ні, то як змінити сторони і кути, щоб чотирикутник існував?



Мал. 1.12

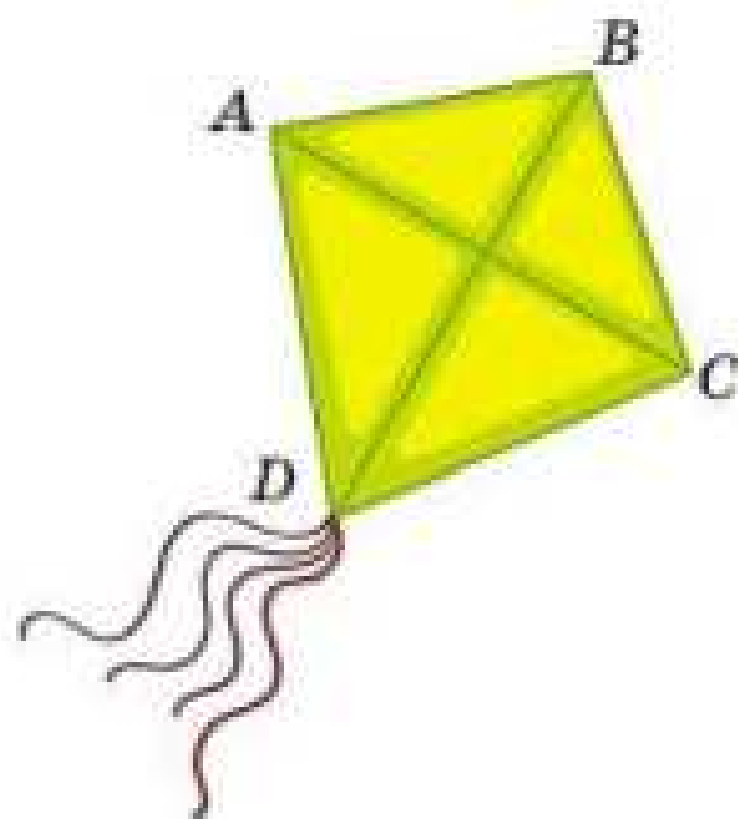
26. Знайди довжину планки AC повітряного змія $ABCD$, якщо його периметр дорівнює 26 дм, а периметри трикутників ABC і ADC дорівнюють відповідно 17 дм і 25 дм (мал. 1.13).

27. Знайди довжину діагоналі чотирикутника, якщо його периметр дорівнює c , а периметри трикутників, на які ця діагональ ділить даний чотирикутник, дорівнюють a і b .

28. Знайди кути чотирикутника $ABCD$, якщо $AB = BC = CD = DA = CA = a$.

29. Усі сторони чотирикутника рівні. Доведи, що його протилежні кути рівні.

30. Три кути чотирикутника прямі. Доведи, що і четвертий його кут прямий.



Мал. 1.13

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

31. Зовнішні кути опуклого чотирикутника пропорційні числам 7, 8, 9 і 12. Знайди міри його внутрішніх кутів.
32. Один із зовнішніх кутів опуклого чотирикутника на 20° менший від другого, на 30° менший від третього і на 50° більший за четвертий. Знайди міри його зовнішніх і внутрішніх кутів.
33. У трикутнику MNK $\angle M = 44^\circ$, а $\angle N = 56^\circ$. Бісектриси NE і MP цього трикутника перетинаються в точці O . Установіть відповід-



ність між кутами (1–4) утвореного чотирикутника $EOPK$ і кутами, визначеними умовами (А–Д).

- 1 $\angle EOP$
2 $\angle OPK$
3 $\angle PKE$
4 $\angle KEO$

- А Більший кут рівнобедреного трикутника, у якого менші кути дорівнюють по 50°
Б Кут, суміжний з кутом 50°
В Менший кут чотирикутника, у якого три кути рівні між собою, а четвертий на 16° менший від кожного з них
Г Зовнішній кут рівностороннього трикутника
Д Найменший кут чотирикутника, кути якого пропорційні числам 4, 5, 5 і 6

34. У чотирикутнику $ABCD$ сторона BC на 1 см, а сторона AD на 6 см більша за AB . Знайди периметр чотирикутника, якщо довжина сторони CD є середнім арифметичним сторін AB та AD і $CD = 5$ см.

35. Одна зі сторін чотирикутника дорівнює середньому арифметичному трьох інших сторін, які пропорційні числам 2, 3 і 6. Знайди сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 44 см. Доведи, що такий чотирикутник існує.

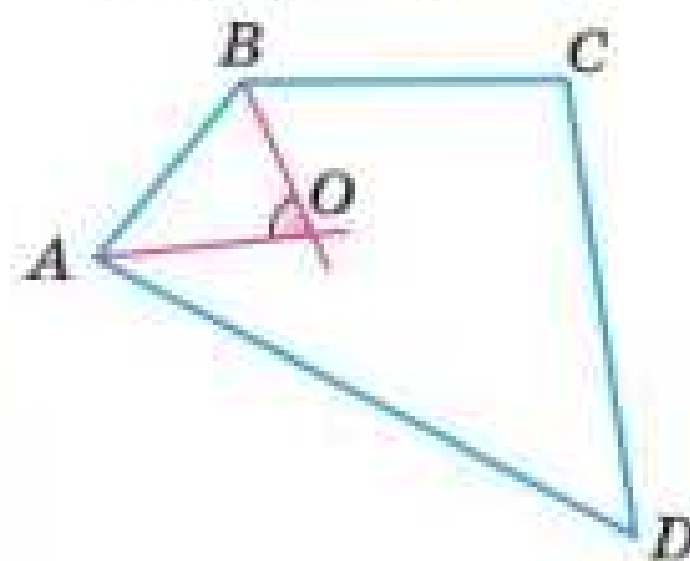
36. У чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$, $\angle A = 50^\circ$, $\angle ADB = 70^\circ$, $\angle BDC = 60^\circ$. Доведіть, що $BC = AD$ і $AB = CD$.

37. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $\angle BAD = \angle CDA$. Доведи, що діагоналі чотирикутника рівні.

38. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $\angle BAC = \angle DCA$. Доведи, що протилежні сторони чотирикутника паралельні.

39. Доведи, що сума діагоналей опуклого чотирикутника менша від периметра цього чотирикутника.

40. Доведи, що коли бісектриси кутів A і B чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O (мал. 1.14), то кут AOB дорівнює півсумі кутів C і D .

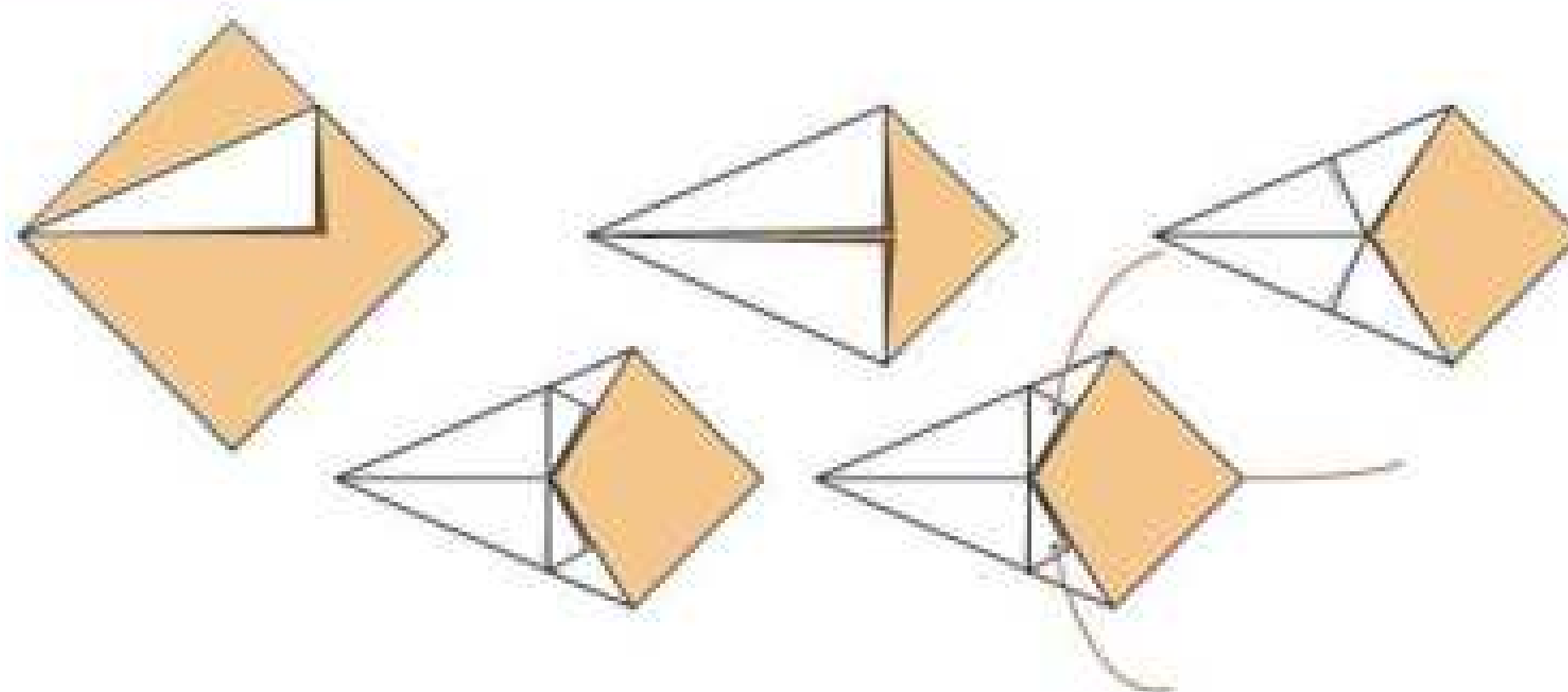


Мал. 1.14

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

41. *Повітряний змій своїми руками.* Виріж із кольорового або білого паперу квадрат розміром 50×50 . Склади його так, як показано на малюнку 1.15. Приклей до змія хвіст і вуздечки. Прикрась його симетричним геометричним візерунком. Запускай його проти вітру. Дізнайся, як можна виготовити інші моделі повітряного змія.





Мал. 1.15

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

42. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = BO$, $CO = DO$. Доведи, що $AC = BD$ і $AC \parallel BD$.
43. Знайди кути трикутника, якщо один із них на 20° більший за другий і вдвічі менший від третього.
44. Знайди міри внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих та січній, якщо вони пропорційні числам 2 і 3.



§ 2 ПАРАЛЕЛОГРАМИ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

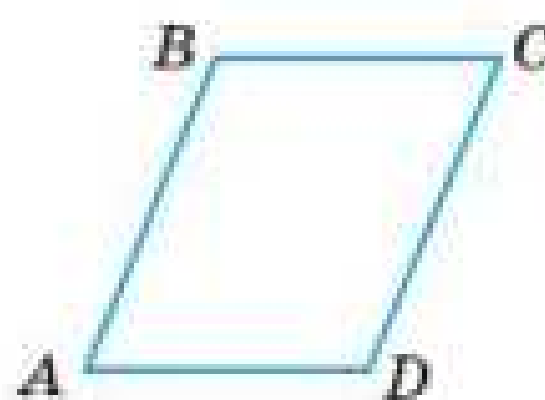
- properties of a parallelogram — властивості паралелограма
- diagonal — діагональ

Розглянь малюнок 2.1. Він складається із багатьох чотирикутників, у кожного із яких протилежні сторони паралельні.

Чотирикутник, у якого кожна сторона паралельна протилежній стороні, називають паралелограмом (мал. 2.2).



Мал. 2.1

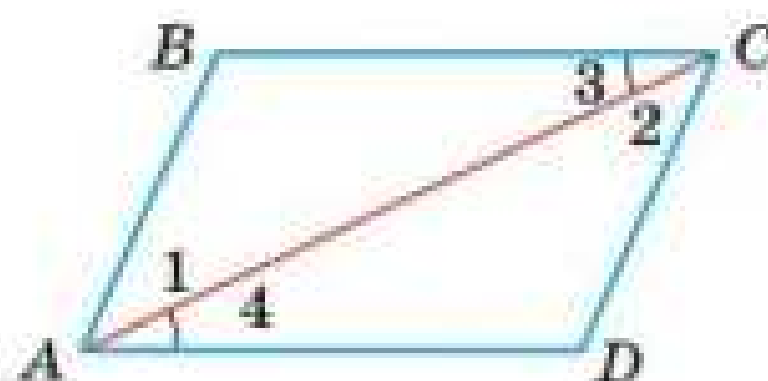


Мал. 2.2

Теорема 3 (властивості паралелограма).**У паралелограмі:**

- 1) діагональ ділить його на два рівні трикутники;
- 2) протилежні сторони рівні;
- 3) протилежні кути рівні;
- 4) сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180° ;
- 5) діагоналі, перетинаючись, діляться навпіл.

Доведення. 1) Нехай $ABCD$ — довільний паралелограм (мал. 2.3). Його діагональ AC — січна паралельних прямих AB і CD та паралельних прямих AD і CB . Тому $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих. За стороною і прилеглими кутами $\triangle ABC = \triangle CDA$.



Мал. 2.3

2) З рівності трикутників ABC і CDA випливає: $AB = CD$, $AD = CB$.

3) З рівності трикутників ABC і CDA випливає: $\angle B = \angle D$. А оскільки $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$, то $\angle A = \angle C$.

4) Оскільки $\angle A$ і $\angle B$ — внутрішні односторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній AB , то $\angle A + \angle B = 180^\circ$.

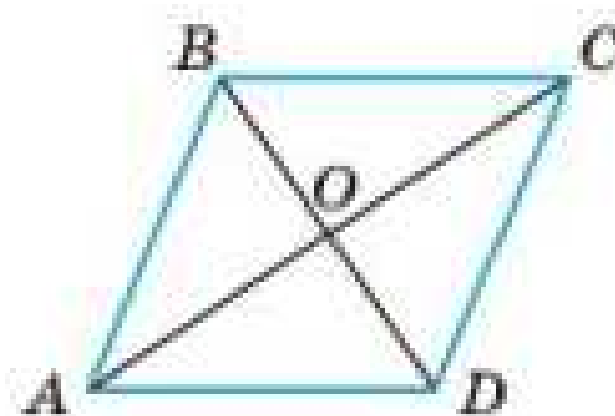
5) Нехай AC і BD — діагоналі паралелограма $ABCD$, а O — точка їх перетину (див. мал. 2.4). $BAC = DCA$ — як внутрішні різносторонні, утворені січною AC з паралельними прямими AB і CD . Так само $\angle ABD = \angle CDB$. За стороною і прилеглими кутами трикутники OAB і OCD рівні. Отже, $OA = OC$ і $OB = OD$.

Теорема 4 (ознаки паралелограма).**Якщо в чотирикутнику:**

- 1) кожна сторона дорівнює протилежній стороні, або
- 2) дві протилежні сторони рівні і паралельні, або
- 3) діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм.

Доведення. 1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $BC = AD$ (мал. 2.3). Діагональ AC розбиває його на два рівні трикутники ABC і CDA (за трьома сторонами). Тому $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. З рівності кутів 1 і 2 випливає, що $AB \parallel CD$, а з рівності кутів 3 і 4, що $CB \parallel AD$. Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $AB \parallel CD$ (див. мал. 2.3). Оскільки $AB \parallel CD$, то $\angle 1 = \angle 2$ як внутрішні різносторонні кути. Тоді $\triangle ABC = \triangle CDA$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle 3 = \angle 4$, тоді $AD \parallel CB$. Згідно з умовою $AB \parallel CD$. Тому чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.



Мал. 2.4

3) Якщо діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O і $OA = OC$, $OB = OD$ (мал. 2.4), то $\triangle OAB = \triangle OCD$ і $\triangle OBC = \triangle ODA$ (за двома сторонами і кутом між ними). Тому $AB = CD$ і $AD = CB$. Згідно з доведеною ознакою 1 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо виконується одна з таких умов:

- 1) $AB \parallel CD$ і $BC \parallel AD$ (означення);
- 2) $AB = CD$ і $BC = AD$ (ознака 1);
- 3) $AB = CD$ і $AB \parallel CD$ (ознака 2);
- 4) $AO = OC$ і $BO = OD$ (ознака 3).

Оскільки кожний кут паралелограма дорівнює протилежному куту, а сума всіх його кутів дорівнює 360° , то жоден з кутів не може бути більшим за 180° . Отже, паралелограм — чотирикутник опуклий.

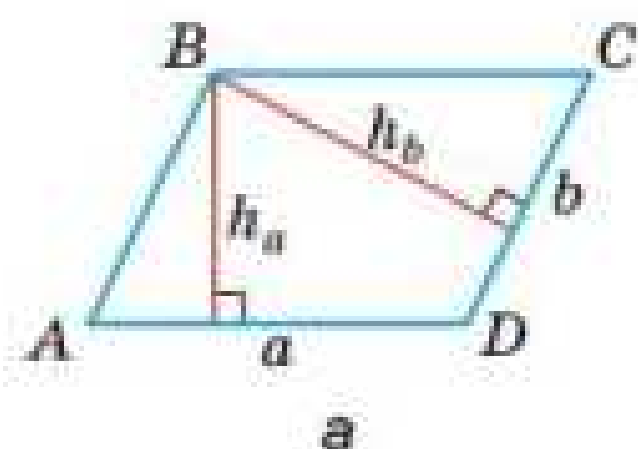
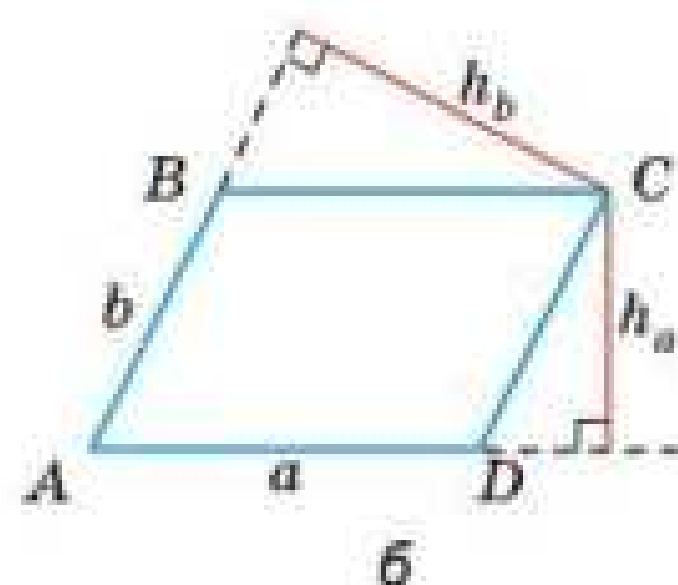
Щоб задати паралелограм, досить вказати довжини двох його сусідніх сторін і кут між ними, або довжини двох сусідніх сторін і однієї діагоналі, або довжини двох діагоналей і кут між ними.

У паралелограмі, як і в трикутнику, можна провести висоти.

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки сторони паралелограма на пряму, що містить протилежну сторону.

Найчастіше висоти паралелограма проводять з його вершин (мал. 2.5, а, б).

Форму паралелограмів мають частини поручнів на сходах (мал. 2.6), деяких домкратів (мал. 2.7). На сторінці зошита в косу лінійку є багато сотень різних паралелограмів.



Мал. 2.5



Мал. 2.6



Мал. 2.7

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Чотирикутники. Урок 2).



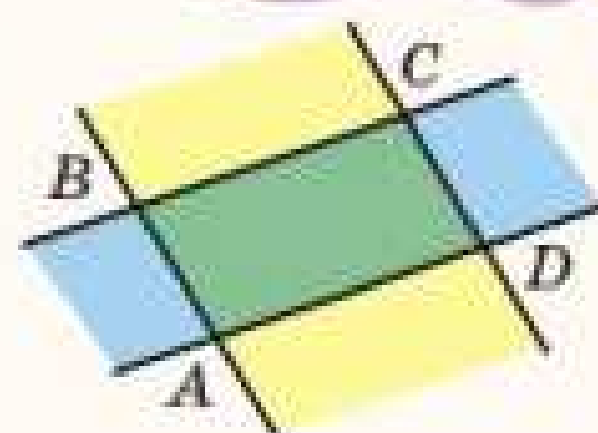
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Частину площини, обмежену двома паралельними прямими, називають смугою. Кожний паралелограм є спільною частиною (перетином) двох смуг (мал. 2.8).

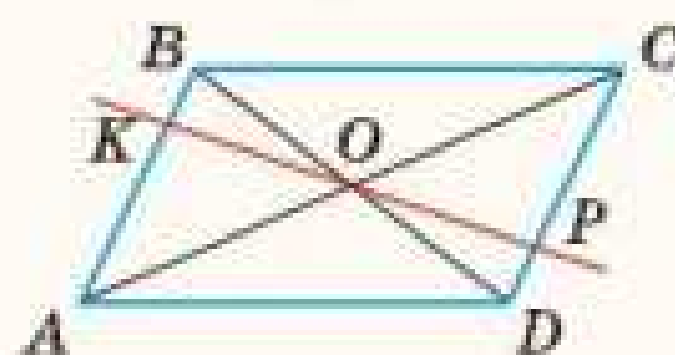
Кожний паралелограм має дві діагоналі. Точку перетину діагоналей паралелограма називають його центром. Центр паралелограма — середина кожної з його діагоналей.

Кожна пряма, яка проходить через центр паралелограма і не проходить через його вершини, розбиває даний паралелограм на два рівні чотирикутники. Наприклад, пряма KP , що проходить через центр O паралелограма $ABCD$ (мал. 2.9), розбиває його на чотирикутники $AKPD$ і $CPKB$, які можна сумістити. Для цього досить перший із них повернути навколо точки O на 180° .

Спробуй зробити модель з паперу, якою можна проілюструвати останнє твердження.



Мал. 2.8



Мал. 2.9

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй означення паралелограма.
2. Які властивості мають: а) сторони паралелограма; б) кути паралелограма?
3. Сформулюй і доведи ознаки паралелограма.
4. Як задати паралелограм?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Знайди кути паралелограма, якщо один із них удвічі більший від другого.

• Якщо міра меншого з кутів дорівнює x , то міра більшого — $2x$. Їх сума $x + 2x = 180^\circ$, звідки $x = 60^\circ$, а $2x = 120^\circ$.

Відповідь. $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.

2. Точки M і K — середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$ (мал. 2.10). Доведи, що чотирикутник $AMCK$ — паралелограм.

• Якщо $ABCD$ — паралелограм, то $AB = CD$ і $AB \parallel CD$. Тоді $AM = CK$ (як половини рівних відрізків AB і CD) і $AM \parallel CK$. Отже, у чотирикутнику $AMCK$ дві протилежні сторони рівні



Мал. 2.10



і паралельні. Значить, чотирикутник $AMCK$ — паралелограм (за ознакою).

Зауваження. Можна було довести рівність трикутників MBC і KDA (за першою ознакою). Тоді $MC = AK$. Значить, протилежні сторони чотирикутника $AMCK$ рівні. Отже, $AMCK$ — паралелограм.

3. Якщо задача має недостатню кількість даних, то її називають відкритою. Ти маєш доповнити її умову на свій розсуд і розв'язати отриману задачу. Бажано розглянути якомога більшу кількість можливих варіантів задачі та її розв'язання.

Відкрита задача. Знайди сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 30 см і...

- Умову задачі можна доповнити так:
 - а) сторони пропорційні числам 2 і 3;
 - б) різниця суміжних сторін дорівнює 7 см;
 - в) бісектриса гострого кута ділить протилежну сторону паралелограма навпіл;
 - г) висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 3 см і утворює з меншою стороною кут 60° ;
 - г) діагональ утворює зі сторонами рівні кути;
 - д) одна зі сторін менша від його периметра на 25 см, а друга — на 20 см.

Розв'яжемо задачу з останнім доповненням.

Нехай довжини сусідніх сторін паралелограма x см і y см. Тоді його периметр дорівнює

$(2x + 2y)$ см. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 2y - x = 25, \\ 2x + 2y - y = 20. \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 25 \big| \cdot 2, \\ 2x + y = 20 \big| \cdot (-1) \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 50, \\ -2x - y = -20 \end{cases}$$

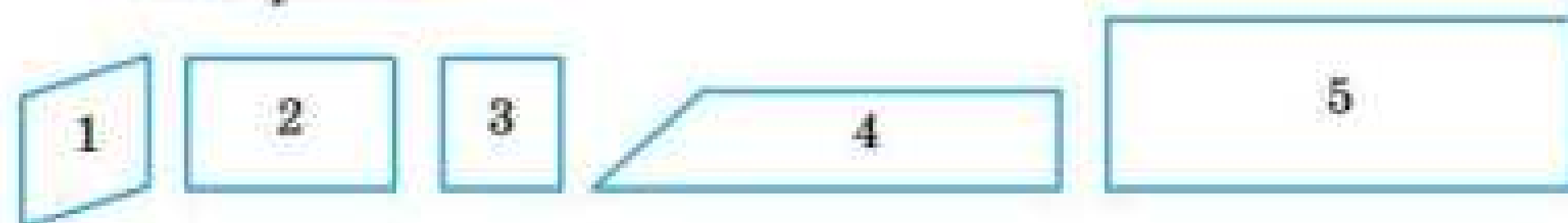
$$3y = 30, y = 10.$$

Тоді, $x + 2 \cdot 10 = 25$, $x = 5$.

Отже, сторони паралелограма: 10 см і 5 см.

ВИКОНАЄМО УСНО

45. Які з фігур, зображених на малюнку 2.11, — паралелограми?



Мал. 2.11

46. Сторони паралелограма завдовжки 3 см і 5 см. Знайди його периметр.



47. Периметр паралелограма 60 см, а одна зі сторін 10 см. Знайди другу сторону паралелограма.

А 50 см Б 40 см В 20 см Г 10 см

48. Знайди периметр паралелограма, якщо середнє арифметичне всіх його сторін дорівнює 3 м.

49. Один із кутів паралелограма дорівнює 70° . Знайди інші кути паралелограма.

50. Знайдіть менший кут паралелограма, якщо сума двох із них дорівнює 120° .

А 120° Б 60° В 45° Г 30°

51. Гра. Один з учасників /одна із учасниць називає суму двох протилежних кутів паралелограма, а другий / друга знаходить усі його кути.

52. Знайди кути паралелограма, якщо сума трьох із них дорівнює 300° .

53. Розглянь малюнки 2.12, а, б. Поясни дію механізмів, заснованих на властивостях паралелограма. Наведи свої приклади таких механізмів.



а



б

Мал. 2.12

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

54. Знайди кути паралелограма, якщо один із них дорівнює: а) 50° ; б) 90° .

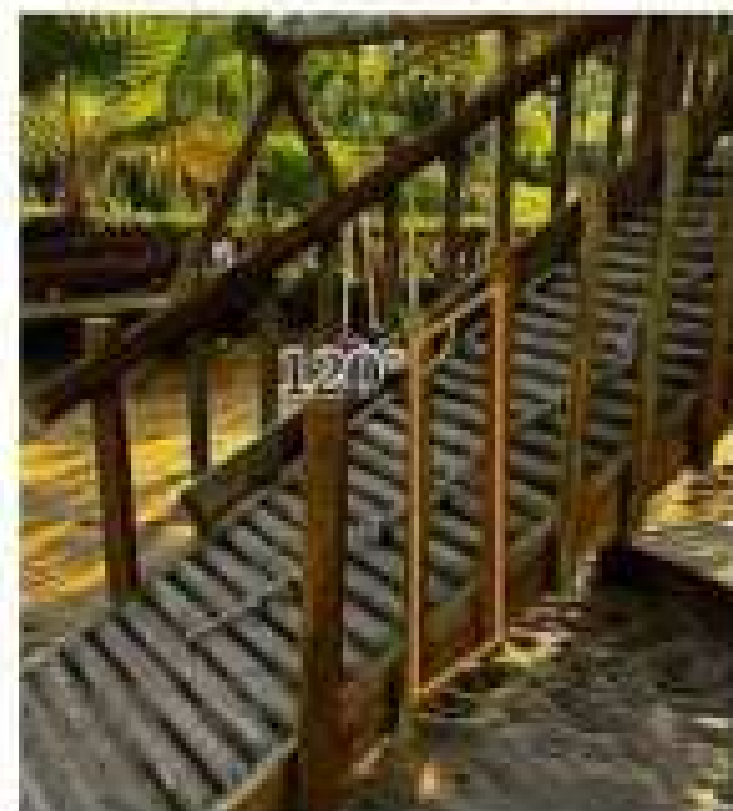
55. Знайди кути паралелограма, що утворюється на перилах гірки, якщо один із них дорівнює 120° (мал. 2.13).

56. Кути чотирикутника пропорційні числам 2, 3, 2 і 5. Чи може бути даний чотирикутник паралелограмом?

57. Знайди менший кут паралелограма, якщо сума двох із них дорівнює 124° .

58. Сума двох кутів паралелограма дорівнює 156° . Знайди кути паралелограма.

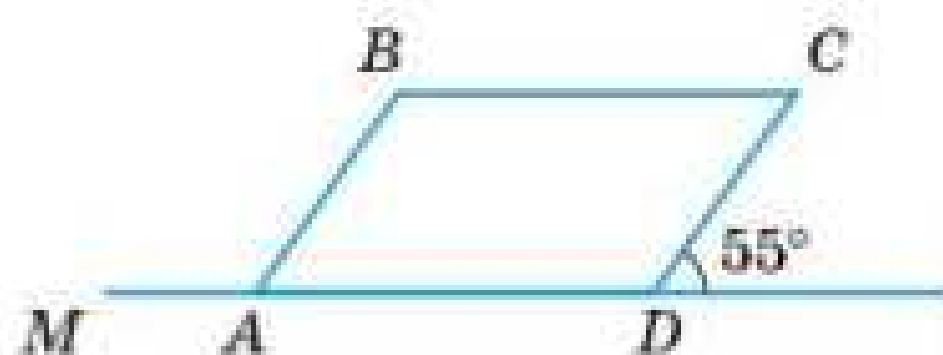
59. Обчисли кути паралелограма, якщо:
а) один із кутів на 20° менший від другого;
б) один із кутів у 5 разів більший за другий;
в) два з них пропорційні числам 4 і 5;
г) різниця двох із них дорівнює 40° .



Мал. 2.13

60. Обчисли кути паралелограма, якщо:
 а) один із кутів на 42° більший за другий;
 б) один із кутів у 3 рази менший від другого;
 в) два з них пропорційні числам 2 і 3.

61. **НМТ** Сторона CD паралелограма $ABCD$ утворює з прямою AD кут, градусна міра якого дорівнює 55° (мал. 2.14). Знайди градусну міру кута MAV .



Мал. 2.14

62. Обчисли кути паралелограма $ABCD$, якщо $\angle CAD = 32^\circ$, $\angle ACD = 37^\circ$.
63. Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O . Знайди міру кута AOB , якщо $\angle C = 100^\circ$.
64. Під яким кутом перетинаються бісектриси двох кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони?
65. Знайдіть кути паралелограма, якщо всі його сторони рівні і кожна з них дорівнює одній діагоналі.
66. Знайди кути паралелограма, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні паралелограма і перпендикулярна до неї.
67. Бісектриса кута паралелограма перетинає його сторону під кутом 29° . Знайди кути паралелограма.

68. В давнину українці для створення візерунків на тканині наносили фарбу на дерев'яні штампи та робили відтиски на тканині (мал. 2.15). Периметр паралелограма на заданому штампі дорівнює 4,8 см, а одна зі сторін 1,3 см. Знайди довжину іншої сторони паралелограма на штампі.



Мал. 2.15

Дізнайся більше про цю техніку, що має назву вибійка.

69. Знайди довжину діагоналі AC паралелограма $ABCD$, якщо його периметр дорівнює 40 дм, а периметр трикутника ABC становить 27 дм.
70. Find the length of the diagonal KP of parallelogram $KBPD$ if its perimeter is 30 cm and the perimeter of triangle KBP is 21 cm.
71. Обчисліть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 42 см і:
 а) одна зі сторін на 5 см більша за другу;
 б) одна зі сторін у 2 рази більша за другу;
 в) різниця сторін дорівнює 7 см;
 г) сторони відносяться як 3 : 4.
72. Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Знайди довжини його сторін, якщо: а) сума двох із них дорівнює 32 см; б) дві з них відносяться як 3 : 5; в) одна зі сторін на 6 см менша від другої.

73. На стороні BC рівностороннього трикутника ABC взято точку M , через яку проведено прямі, паралельні до сторін AB і AC . Знайди кути утвореного чотирикутника.
74. На основі AC рівностороннього трикутника ABC взято точку M , через яку проведено прямі, паралельні сторонам AB і BC . Знайди кути утвореного чотирикутника.
75. Сторони грані гумки, що є паралелограмом, дорівнюють 8 см і 3 см (мал. 2.16). Знайди висоту гумки, якщо гострий кут паралелограма дорівнює 30° .
76. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 10$ см, $BC = 15$ см, $\angle B = 150^\circ$. Знайди висоти, проведені з вершини B .
77. На сторонах BC і AD паралелограма $ABCD$ позначено точки M і K такі, що $MK \parallel AB$ (мал. 2.17). Доведи, що чотирикутник $ABMK$ — паралелограм.
78. Бісектриси кутів A і C паралелограма $ABCD$ перетинають сторони BC і AD у точках M і N відповідно. Доведи, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.
79. Точки M, N, P, K — середини сторін паралелограма $ABCD$. Доведи, що $MNP K$ — паралелограм.
80. У колі проведено діаметри AB і CD . Доведи, що чотирикутник $ACBD$ — паралелограм.



Мал. 2.16



Мал. 2.17

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

81. **НМТ** Які з наведених тверджень є правильними?
 I. Діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники.
 II. Діагоналі паралелограма є бісектрисами його кутів.
 III. Менша діагональ паралелограма ділить його на два гострокутні трикутники.
82. З вершини B паралелограма $ABCD$ до сторони AD проведено висоту BH . Знайди кути паралелограма, якщо $AH = BH$ і: а) $\angle B$ — тупий; б) $\angle B$ — гострий.
83. На стороні BC паралелограма $ABCD$ взято точку P так, що $AB = BP$. Знайди $\angle PAD$, якщо $\angle ABC = 100^\circ$.
84. Бісектриса $\angle A$ ділить сторону BC паралелограма $ABCD$ навпіл. Знайди периметр паралелограма, якщо сторона $AB = 5$ см.



85. Бісектриса $\angle A$ ділить сторону BC паралелограма $ABCD$ на відрізки $BM = 6$ см, $MC = 8$ см. Знайди периметр паралелограма.

86. Бісектриса $\angle A$ ділить сторону CD паралелограма $ABCD$ у точці M так, що $CM - MD = 2$ см. Знайди сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 34 см.

87. Знайдіть периметр паралелограма, якщо бісектриса його кута ділить одну зі сторін на відрізки завдовжки 5 см і 3 см. Скільки розв'язків має задача?

88. AE і DK — бісектриси кутів A і D паралелограма $ABCD$, які перетинають сторону BC у точках E і K так, що $BK = KE = EC$. Знайди сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.

89. AE і DK — бісектриси кутів A і D паралелограма $ABCD$, які перетинають сторону BC у точках E і K так, що $BE = EK = KC$. Знайди сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см.

90. $ABCD$ — паралелограм, точки M і N — середини сторін BC і AD . Доведи, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.

91. На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначили точки M і N так, що $AM = CN$. Доведи, що чотирикутник $MBND$ — паралелограм.

92. $ABCD$ — паралелограм (мал. 2.18). Доведи, що $MNPK$ — паралелограм, якщо $AM = AK = CN = CP$.

93. Середини півдіагоналей M, N, P, K паралелограма $ABCD$ послідовно сполучили відрізками (мал. 2.19). Доведи, що чотирикутник $MNPK$ — паралелограм.

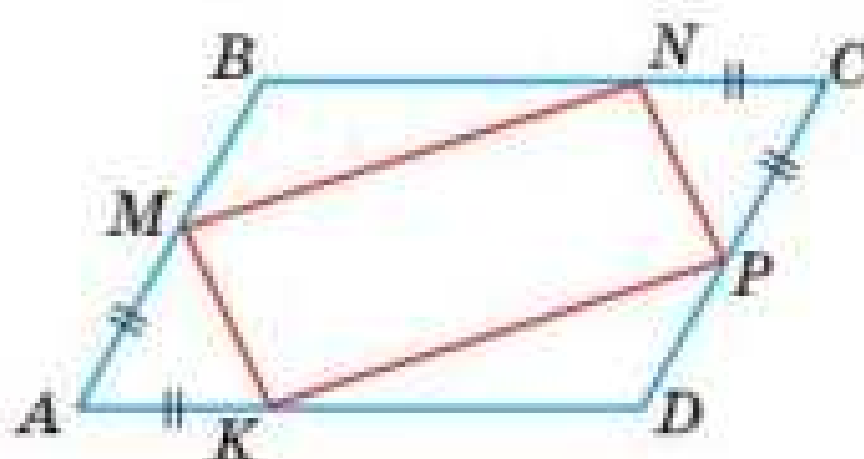
94. Доведи, що бісектриси кутів паралелограма з нерівними сторонами, перетинаючись, утворюють паралелограм.

95. Доведи, що бісектриси зовнішніх кутів паралелограма, перетинаючись, утворюють паралелограм.

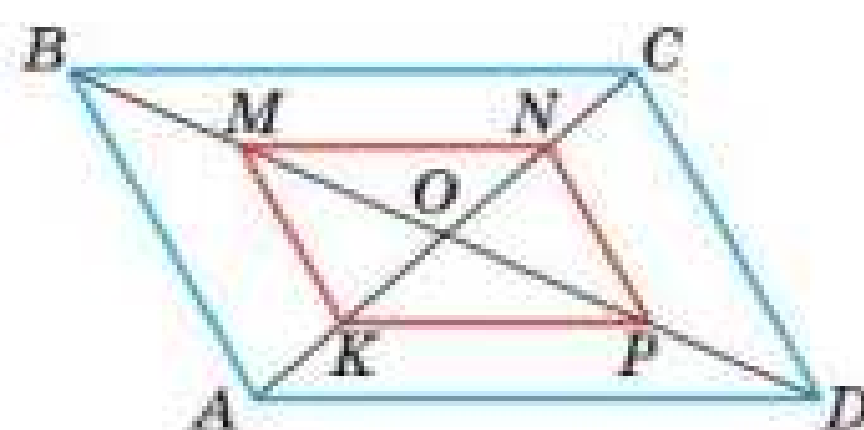
96. У паралелограма $ABCD$ $AB = 12$ дм, $\angle A = 30^\circ$. Знайдіть відстань від точки C : 1) до прямої AD ; 2) до відрізка AD .

97. Діагональ AC паралелограма $ABCD$ є бісектрисою кута A . Доведи, що діагоналі паралелограма перпендикулярні.

98. На поверхні будівлі металеві конструкції утворюють паралелограми (мал. 2.20).



Мал. 2.18



Мал. 2.19



Мал. 2.20

Діагональ BD паралелограма $ABCD$ є бісектрисою кута B . Доведи, що сторони паралелограма рівні.

99. Діагональ паралелограма утворює з його сторонами рівні кути. Знайди сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 48 см.

100. Установи відповідність між найменшим кутом вказаного трикутника (1–4) та найменшим кутом паралелограма, для якого виконуються умови (А–Д).

Трикутник, у якого
1 всі кути рівні
2 катет дорівнює половині гіпотенузи
3 катети рівні
4 зовнішні кути дорівнюють 150° і 162°

Паралелограм, у якого
А всі кути рівні
Б сума протилежних кутів дорівнює 90°
В один із кутів на 60° менший від другого
Г найбільший із кутів у 9 разів більший за найменший
Д два кути пропорційні числам 1 і 5

101. Скільки різних паралелограмів можна скласти, прикладаючи один до одного два рівні різносторонні трикутники?

102. Із двох рівних прямокутних трикутників з кутом 30° склали паралелограм. Знайди кути цього паралелограма.

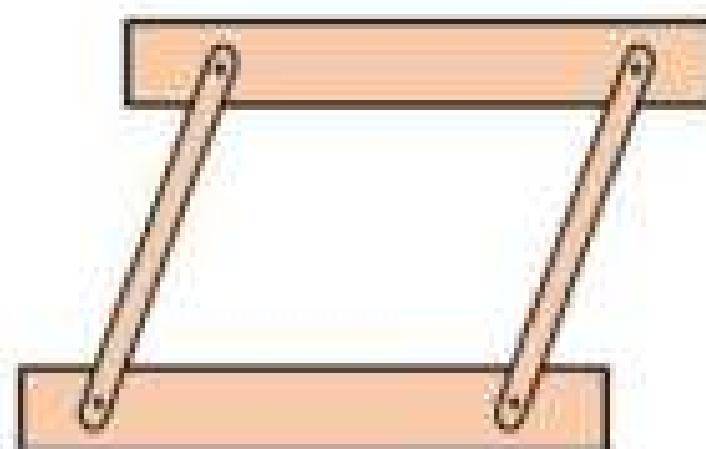
103. Сторони трикутника дорівнюють a , b і c . Знайди периметр паралелограма, складеного з двох таких трикутників. Розглянь три випадки.

104. $ABCD$ — паралелограм. Зовні нього побудовано рівносторонні трикутники ABM і DCT . Доведи, що $MD = BT$ і $MC = AT$.

105. Дано три точки, що не лежать на одній прямій. Скільки можна побудувати паралелограмів з вершинами в цих точках?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

106. Штурмани кораблів на морській карті можуть проводити паралельні прямі за допомогою паралельних лінійок (мал. 2.21). Зроби модель паралельних лінійок і покажи, як ними користуватись.



Мал. 2.21



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

107. *Відкрита задача.* Знайди сторони чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 5, 6 і 10, а ...
108. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle C$, $\angle B = 3\angle A$, а $\angle D = 135^\circ$. Чи має чотирикутник паралельні сторони?
109. Чи буде чотирикутник опуклим, якщо один із його кутів дорівнює 65° , другий на 25° більший, а третій у 5 разів менший від першого?



ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



Палац Потоцьких у Львові
було побудовано у 1880 р.

§ 3

ПРЯМОКУТНИК,
РОМБ І КВАДРАТ

Паралелограм, усі кути якого прямі, називають прямокутником (мал. 3.1).

Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називають ромбом (мал. 3.2).

Ромб, усі кути якого прямі, називають квадратом (мал. 3.3). Можна сказати й так: квадрат — це прямокутник, усі сторони якого рівні.

Прямокутник, ромб і квадрат — окремі види паралелограма, тому вони мають усі властивості паралелограма:

- діагональ ділить його на два рівні трикутники;
- протилежні сторони рівні;
- протилежні кути рівні;
- сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180° ;
- діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

Ще одну важливу властивість прямокутника доведемо як теорему.

Теорема 5. Діагоналі прямокутника рівні.

Доведення. Якщо $ABCD$ — прямокутник (мал. 3.4), то $\triangle ABC = \triangle DCB$ (за двома катетами). Отже, $AC = DB$.

Цікаву властивість має ромб. Доведемо її як теорему.

Теорема 6. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і ділять кути ромба навпіл.

Доведення. Нехай $ABCD$ — ромб, O — точка перетину його діагоналей (мал. 3.5). Доведемо, що $AC \perp BD$ і що, наприклад, $\angle ABD = \angle CBD$.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

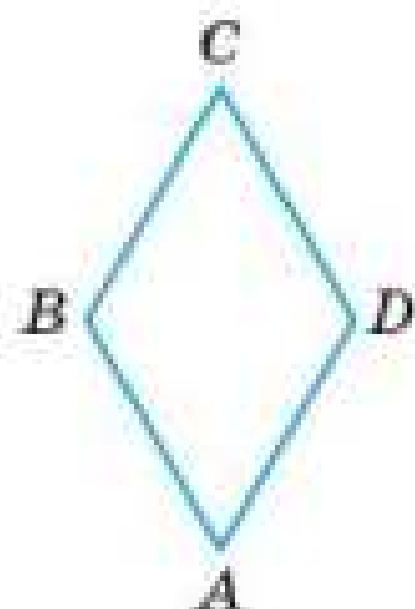
rectangle — прямокутник

rhombus — ромб

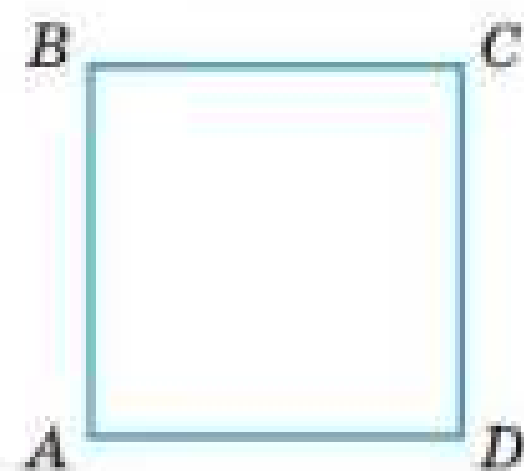
square — квадрат



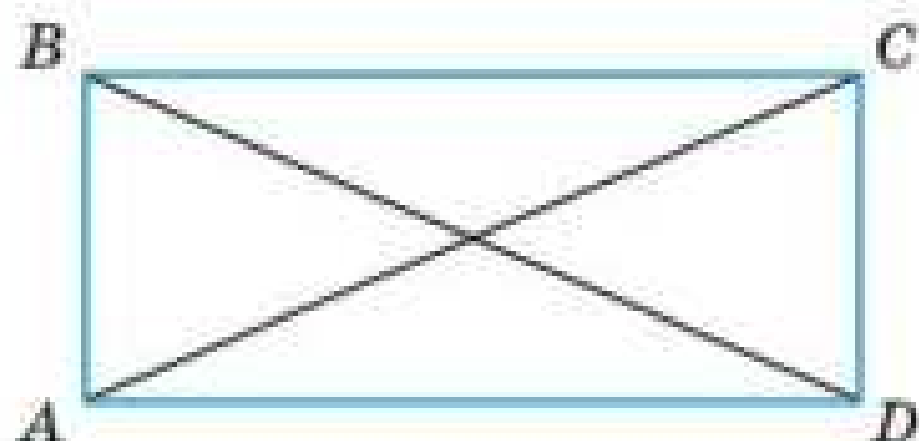
Мал. 3.1



Мал. 3.2



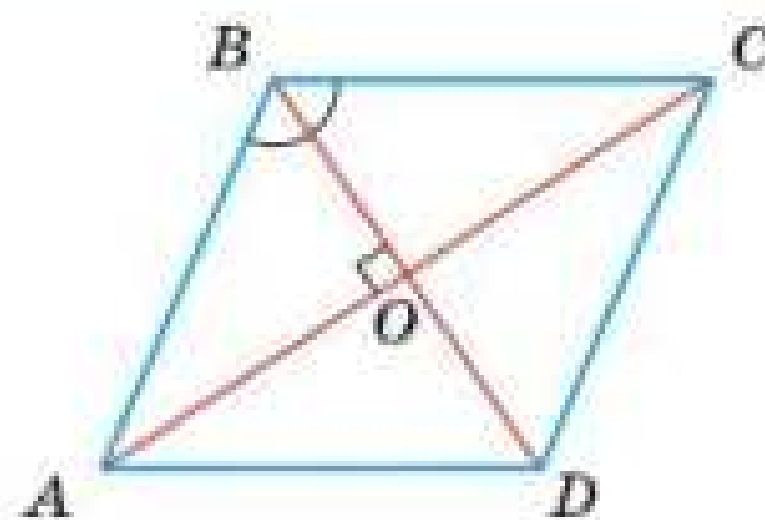
Мал. 3.3



Мал. 3.4

Оскільки O — середина діагоналі AC і $AB = BC$, то медіана BO рівнобедреного трикутника ABC є його висотою і бісектрисою. Отже, $BO \perp AC$ і $\angle ABO = \angle CBO$. Тоді й $\angle ABD = \angle CBD$.

Оскільки квадрат є і ромбом, і прямокутником, то він має всі властивості ромба і прямокутника.



Мал. 3.5

У квадраті:

- всі кути прямі;
- всі сторони рівні;
- діагоналі рівні;
- діагоналі взаємно перпендикулярні;
- діагоналі ділять кути навпіл.

Пам'ятаємо, що квадрат є видом паралелограма, тому має всі властивості паралелограма.

Співвідношення між розглянутими видами паралелограмів можна зобразити, як показано на малюнку 3.6.

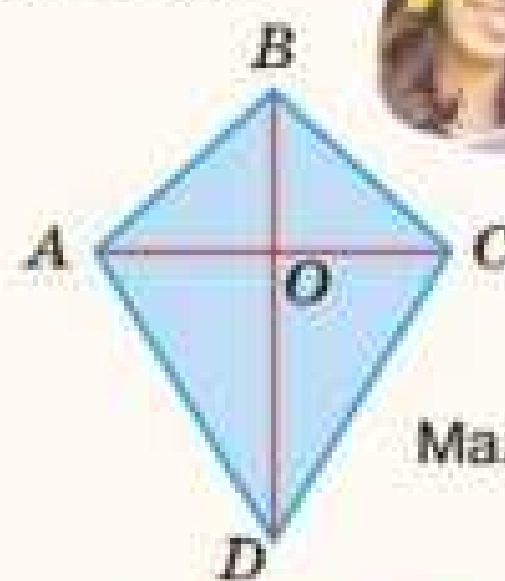


Мал. 3.6

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Опуклий чотирикутник $ABCD$, у якого $AB = BC$ і $CD = DA$, називають дельтоїдом (мал. 3.7). Діагональ BD такого дельтоїда розбиває його на два рівні трикутники, а діагональ AC — на два рівнобедрені трикутники. Спробуй довести, що діагоналі такого чотирикутника взаємно перпендикулярні і одна з них проходить через середину другої. Чи правильне обернене твердження: якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні і одна з них проходить через середину другої, то такий чотирикутник — дельтоїд?

Окремий вид дельтоїда — ромб. Співвідношення між поняттями дельтоїд, ромб, квадрат можна проілюструвати такою діаграмою (мал. 3.8). Дельтоїд, відмінний від ромба, не є паралелограмом.



Мал. 3.7



Мал. 3.8

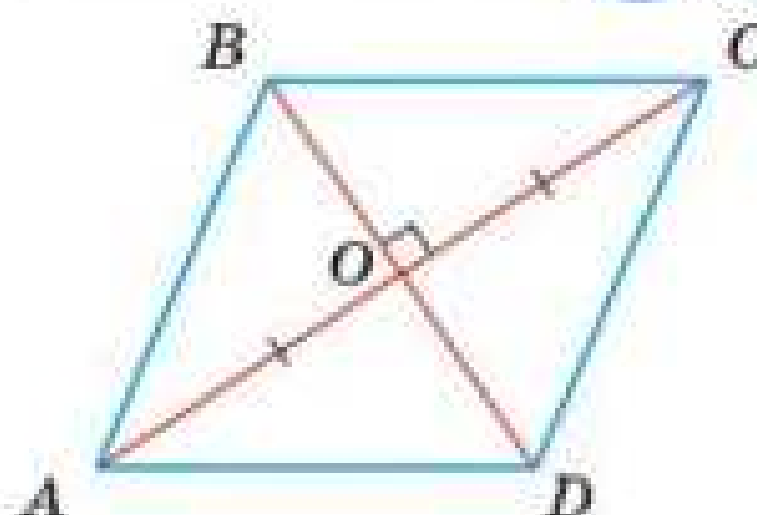
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй означення: а) прямокутника; б) ромба; в) квадрата.
2. Які властивості має: а) прямокутник; б) ромб; в) квадрат? Доведи їх.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Доведи, що паралелограм, у якого діагоналі перпендикулярні, — ромб (мал. 3.9).

- За властивістю діагоналей паралелограма $AO = CO$, а за умовою задачі $BO \perp AC$. Отже, у трикутнику ABC BO — медіана і висота. Тоді трикутник ABC — рівнобедрений, $AB = BC$. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то $AB = BC = CD = AD$. Отже, $ABCD$ — ромб.



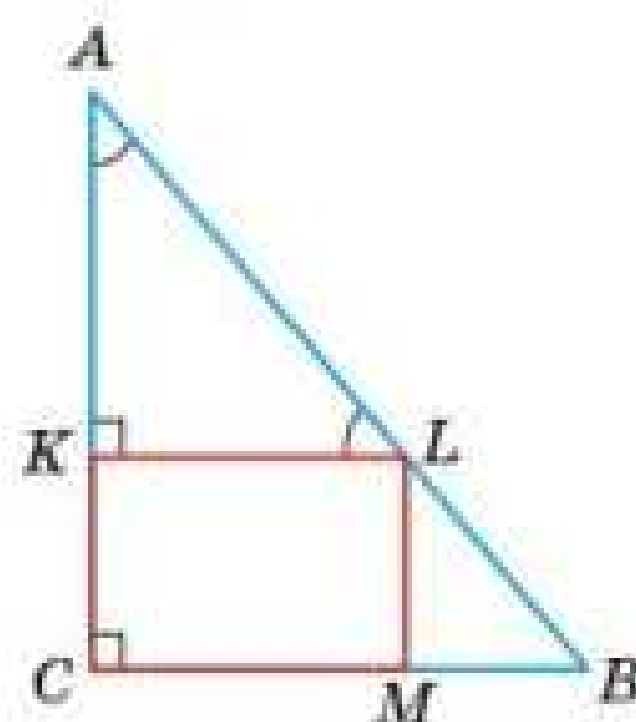
Мал. 3.9

2. У рівнобедрений прямокутний $\triangle ABC$ вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут C (мал. 3.10). Знайди довжину катета, якщо периметр прямокутника дорівнює 12 см.

- Оскільки $\triangle ABC$ — рівнобедрений прямокутний, то $\angle A = 45^\circ$, тоді $\angle ALK = 45^\circ$. Отже, $\triangle AKL$ — рівнобедрений, $AK = KL$. Тому

$$AC = AK + KC = KL + KC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ см.}$$

Відповідь. 6 см.



Мал. 3.10

ВИКОНАЄМО УСНО

110. Сторона ромба дорівнює a (мал. 3.11). Знайди його периметр. Сформулюй та розв'яжи обернену задачу.

111. Гра. Один із гравців / одна із гравчинь задає периметр квадрата. А другий / друга має знайти його сторону. Потім гравці / гравчині міняються ролями.

112. Знайди периметр квадрата, якщо він на 30 дм довший за одну сторону.

А 10 см Б 20 см В 30 см Г 40 см

113. Знайди більший кут ромба, якщо один із них має 40° .

А 40° Б 140° В 50° Г 280°

114. Знайди кути ромба, якщо сума двох із них дорівнює 200° .

115. Знайди кути ромба, якщо його діагоналі рівні.



Мал. 3.11

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А



116. Доведи, що кожна сторона прямокутника коротша від його діагоналі.
117. Доведи, що діагональ ділить прямокутник на два рівні трикутники.
118. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 48 см і: а) одна зі сторін дорівнює 10 см; б) одна зі сторін на 6 см більша за іншу; в) одна зі сторін у 3 рази більша за іншу; г) сторони пропорційні числам 3 і 5.
119. Знайди сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 64 см і: а) одна зі сторін дорівнює 12 см; б) одна зі сторін на 10 см менша від іншої; в) сторони пропорційні числам 7 і 9.
120. **HINT** На малюнку 3.12 зображено прямокутник $ABCD$, периметр якого дорівнює 46 см. Визнач довжину сторони BC , якщо $AB + CD = 18$ см.
121. Знайди довжини діагоналей прямокутника, якщо вони перетинаються під кутом 60° , а менша сторона прямокутника дорівнює 7 см.
122. Діагоналі прямокутника дорівнюють 12 см і перетинаються під кутом 60° . Знайди довжину меншої сторони прямокутника.
123. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 40° . Знайди кути, які діагональ утворює зі сторонами прямокутника.
124. Діагональ прямокутника утворює з більшою стороною кут 40° . Знайди кут між діагоналями прямокутника.
125. Діагональ прямокутника дорівнює 15 см і утворює зі стороною кут 30° . Знайди довжину меншої сторони прямокутника.
126. Діагональ екрана монітора дорівнює 5 дм і утворює з його сторонами кути, один з яких удвічі більший за другий (мал. 3.13). Знайди довжину меншої сторони екрана монітору.
127. Менша сторона прямокутника дорівнює 8 см і утворює з діагоналлю кут 60° . Знайди довжину діагоналі прямокутника.
128. Менша сторона прямокутника дорівнює 22 см. Знайди довжину діагоналі прямокутника, якщо вона утворює зі сторонами кути, один із яких на 30° більший за другий.
129. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Знайди довжини діагоналей, якщо периметр трикутника $COD = 12$ см, а $\angle CAD = 30^\circ$.



Мал. 3.12



Мал. 3.13

130. Бічні грані коробки для серветок є прямокутниками (мал. 3.14). Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Знайди периметр трикутника COD , якщо $AC = 24$ см, $\angle CAD = 30^\circ$.



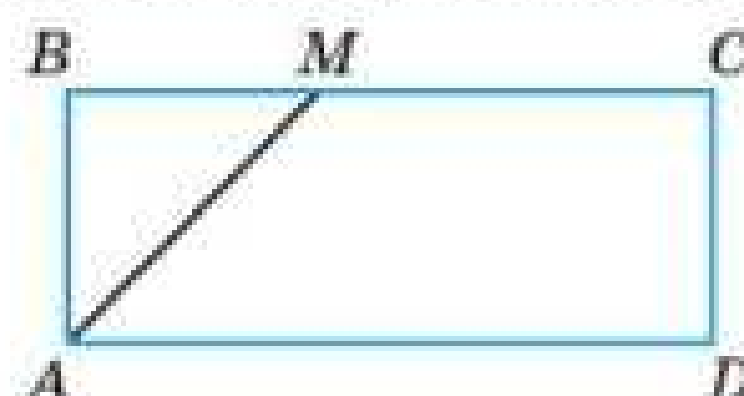
Мал. 3.14

131. Бісектриса $\angle A$ ділить сторону BC прямокутника $ABCD$ навпіл. Знайди периметр паралелограма, якщо сторона $AB = 7$ см.

132. Бісектриса $\angle A$ ділить сторону BC прямокутника $ABCD$ на відрізки $BM = 12$ см, $MC = 9$ см. Знайди периметр прямокутника.

133. Бісектриса $\angle B$ ділить сторону AD прямокутника $ABCD$ у точці M так, що $AM : MD = 2 : 3$. Знайди сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 56 см.

134. **НМТ** У прямокутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці M , $BM : MC = 4 : 5$ (мал. 3.15). Обчисли периметр прямокутника $ABCD$, якщо $BC = 18$ см.



Мал. 3.15

135. Якщо діагоналі паралелограма рівні, то він — прямокутник. Доведи.

136. Доведи: а) якщо всі кути чотирикутника рівні, то він — прямокутник; б) якщо один кут паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.

137. Через точку M , що лежить на гіпотенузі прямокутного трикутника ABC , проведено прямі, паралельні катетам. Вони перетинають катети BC і AC у точках F і E . Доведи, що $MFCE$ — прямокутник.

138. Через точку P , що лежить на гіпотенузі прямокутного трикутника ABC , проведено прямі, паралельні катетам. Вони перетинають катети BC і AC у точках M і K . Доведи, що $MK = PC$.

139. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M так, що $AM = MC$. Знайди кути трикутника AMC .

140. Серединний перпендикуляр діагоналі BD прямокутника $ABCD$ перетинає сторону AD у точці K так, що $AK : KD = 1 : 2$. Знайди: $\angle ABK$, $\angle KBD$, $\angle DBC$.

141. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$, якщо бісектриси його кутів A і B ділять сторону CD на три відрізки по 3 см.

142. Знайди кути ромба, якщо:
а) один із них дорівнює 40° ; б) сума двох із них дорівнює 130° ;
в) один із них у 3 рази більший за другий; г) один із них на 20° менший від другого.

143. Знайди кути ромба, якщо:
а) сума двох із них дорівнює 40° ; б) один із них у 5 рази менший від другого; в) один із них на 50° більший за другий.

144. Один із кутів поверхні серезки у формі ромба дорівнює 50° (мал. 3.16). Знайди кут між меншою його діагоналлю і стороною.

145. Знайди кути ромба, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні.

146. Кути ромба пропорційні числам 1 і 2. Знайди меншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 40 см.

147. Один із кутів ромба на 60° менший від другого. Знайди периметр ромба, якщо менша його діагональ дорівнює 6 см.

148. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону навпіл. Знайди: а) кути ромба; б) периметр ромба, якщо менша його діагональ дорівнює 5 см.

149. Кут A ромба $ABCD$ дорівнює 140° . Знайди кути трикутника AOB , якщо O — точка перетину діагоналей ромба.

150. Знайди кути ромба $ABCD$, якщо $\angle CBO : \angle BCO = 2 : 3$ де O — точка перетину діагоналей ромба.

151. Сторона ромба дорівнює a см, а кут 150° . Знайди відстань між протилежними сторонами ромба.

152. M, N, P, K — середини сторін квадрата $ABCD$. Доведи, що $MNP K$ — квадрат.

153. Доведи, що ромб, у якого діагоналі рівні, — квадрат.

154. Доведи, що прямокутник, у якого діагоналі перпендикулярні, — квадрат.

155. Доведи, що точка перетину діагоналей квадрата рівновіддалена від сторін квадрата.

156. Українці часто робили святкові прикраси із соломи. Периметр такої квадратної прикраси дорівнює 16 см (мал. 3.17). Знайди відстань від точки перетину діагоналей до сторін прикраси.

157. На діагоналі AC квадрата $ABCD$ взято точку M так, що $BM : MO = 2 : 1$, де O — точка перетину діагоналей квадрата. Установи відповідність між кутами, заданими умовами (1–3), та їх градусними мірами (А–Д).

158. На малюнку 3.18 зображено частину загону для коней. Скільки метрів дерев'яних рейок знадобиться для огорожі нового загону, якщо він матиме форму прямокутника зі сторонами 30 м і 40 м?



Мал. 3.16



Мал. 3.17

1 $\angle OBM$	А 15°
2 $\angle AMB$	Б 30°
3 $\angle MBC$	В 45°
	Г 75°
	Д 120°



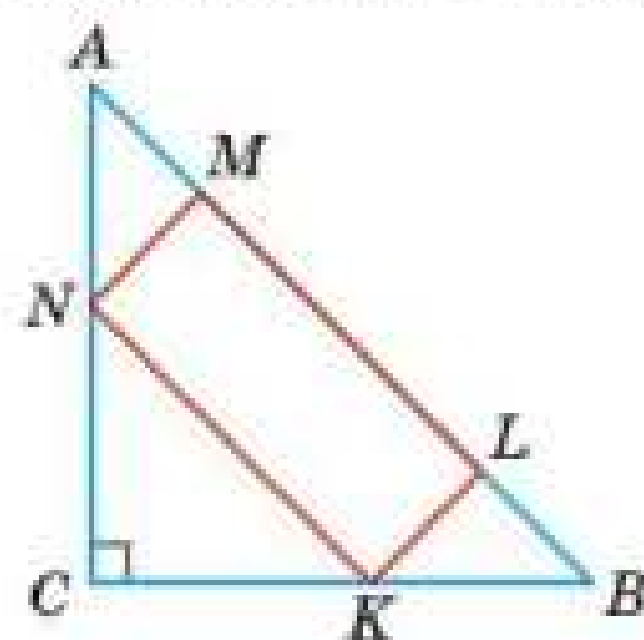
Мал. 3.18

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б



159. BE і CK — бісектриси кутів B і C прямокутника $ABCD$, які перетинають сторону AD у точках E і K так, що $AE = EK = KD$. Знайди сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 64 см.
160. BL and CP are the bisectors of the angles B and C of the rectangle $ABCD$, intersecting the side AD at points L and P so that $AL = LP = PD$. Find the sides of a rectangle if its perimeter is 32 cm.
161. З вершини B прямокутника $ABCD$ опущено перпендикуляр BK на діагональ AC , $K \in AC$. Знайди AK і KC , якщо $AC = 12$ см і $\angle BAK = 60^\circ$.
162. З вершини B прямокутника $ABCD$ опущено перпендикуляр BK на діагональ AC , $K \in AC$. У якому відношенні точка K ділить AC , якщо $AB = 6$ см і $\angle ABK : \angle KBC = 1 : 2$?
163. У прямокутний $\triangle ABC$ вписано прямокутник $CKLM$ так, що $\angle C$ у них спільний, а точка L — середина AB . Доведи, що $KM = \frac{1}{2} AB$.
164. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут. Знайди катети трикутника, якщо сторони прямокутника дорівнюють 2 см і 7 см.
165. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник, дві вершини якого лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах (мал. 3.19). Знайди периметр прямокутника, якщо його сторони пропорційні числам 2 і 5, а довжина гіпотенузи дорівнює 18 см.
166. Дано прямокутний рівнобедрений трикутник. Якщо з будь-якої точки гіпотенузи опустити перпендикуляри на катети, то утвориться прямокутник, півпериметр якого дорівнює катету. Доведи.
167. Якщо діагоналі паралелограма ділять його кути навпіл, то цей паралелограм — ромб. Доведи.
168. Доведи, що чотирикутник, у якого всі сторони рівні, — ромб.
169. Установи вид чотирикутника, вершини якого — середини сторін прямокутника.
170. Рамка для дзеркала має форму ромба (мал. 3.20). Знайди периметр цього ромба, якщо сума трьох його кутів дорівнює 210° , а висота ромба 17 см.



Мал. 3.19



Мал. 3.20

171. Один із кутів ромба у два рази більший за другий. З вершини тупого кута ромба проведено висоту, яка відтинає від сторони ромба відрізок довжиною 6 см. Знайди:

а) периметр ромба; б) довжину меншої діагоналі.

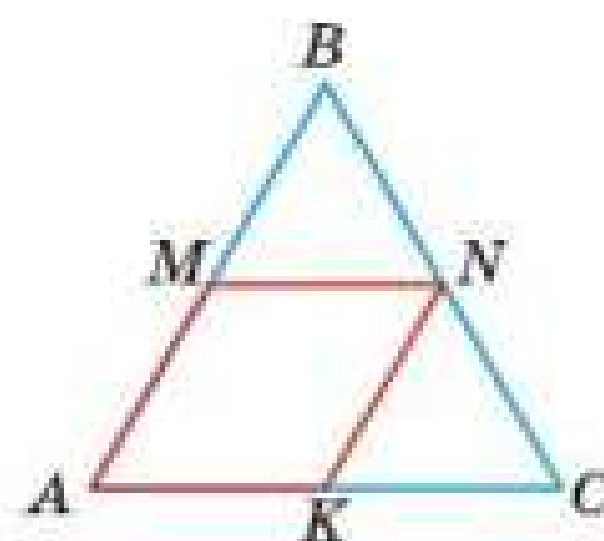
172. Один із кутів ромба на 120° менший від іншого, а периметр дорівнює 48 см. Знайди висоту ромба, проведenu з вершини тупого кута.

173. Один із кутів ромба у 5 разів більший за інший, а периметр дорівнює 56 см. Знайди висоту ромба, проведenu з вершини гострого кута.

174. Доведи, що точка перетину діагоналей ромба рівновіддалена від усіх його сторін.

175. У рівносторонній $\triangle ABC$ вписано ромб (мал. 3.21), периметр якого дорівнює 16 см. Знайди периметр трикутника.

176. З вершини тупого кута B ромба $ABCD$ до сторін CD і AD проведено перпендикуляри BM і BN ($M \in CD$, $N \in AD$). Доведи, що: а) $BM = BN$; б) $\angle NBM = \angle BAD$.

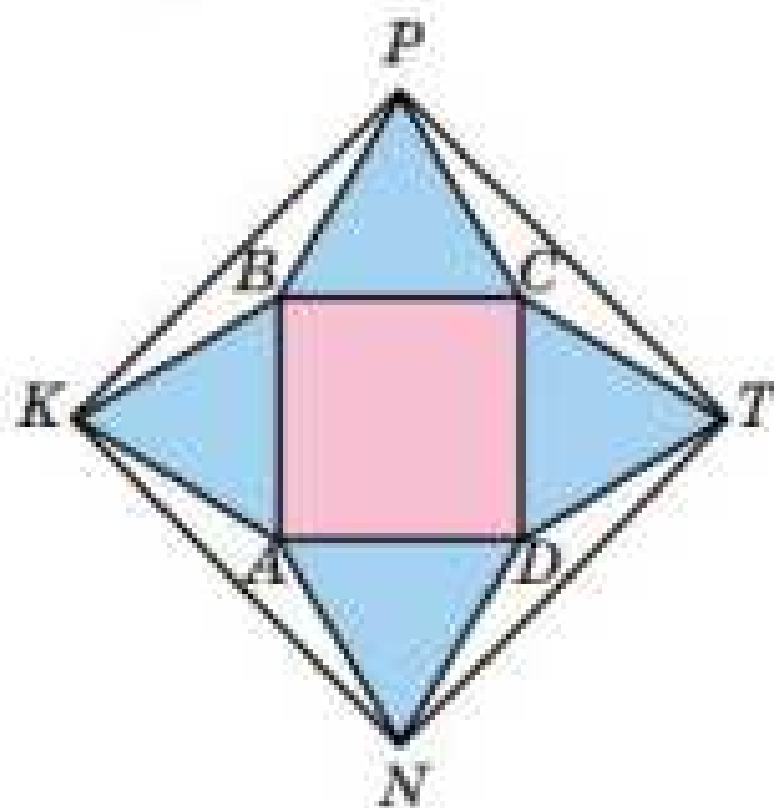


Мал. 3.21

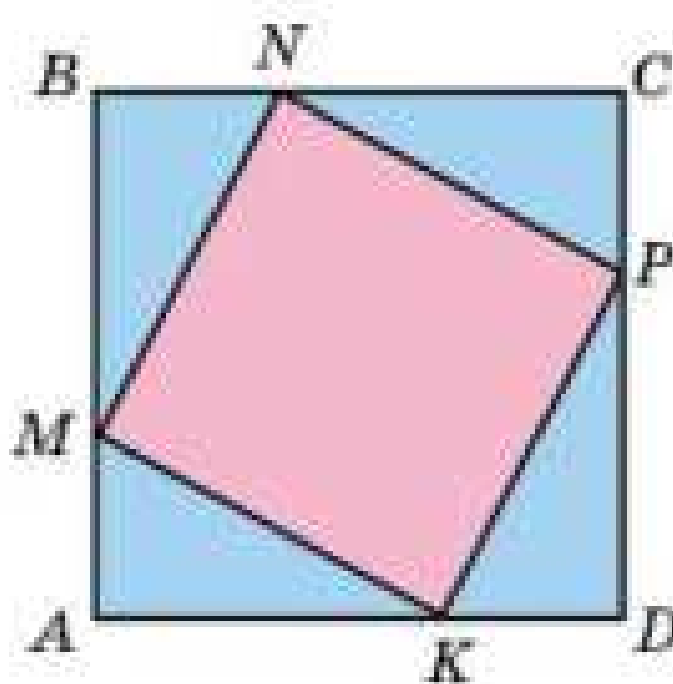
177. На сторонах квадрата, зовні від нього, побудовано рівносторонні трикутники, вершини яких послідовно сполучено. Доведи, що утворений чотирикутник — квадрат (мал. 3.22).

178. Точки M , N , P , K ділять сторони квадрата $ABCD$ у відношенні $1 : 2$ (мал. 3.23). Доведи, що $MNPK$ — квадрат.

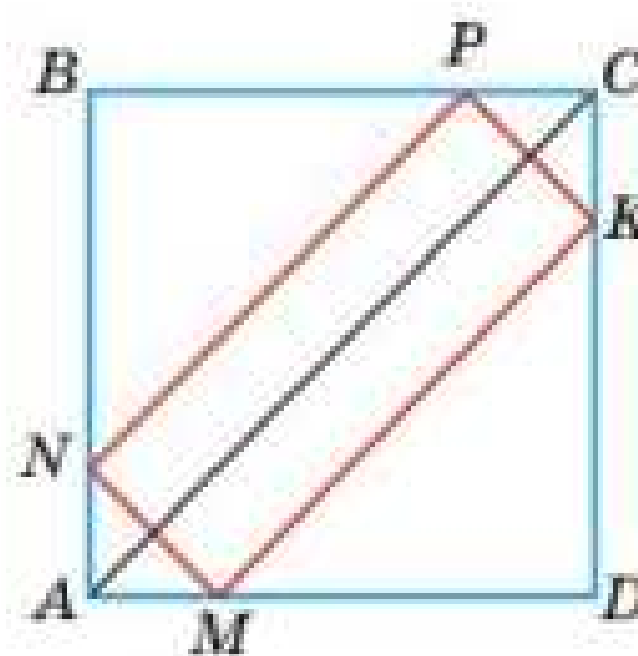
179. У квадрат $ABCD$ вписано прямокутник $MNPK$ (мал. 3.24). Доведи, що довжина діагоналі квадрата дорівнює півпериметру прямокутника.



Мал. 3.22



Мал. 3.23



Мал. 3.24

180. Установіть відповідність між множинами чотирикутників (1–4) і властивостями, які мають усі чотирикутники цих множин (А–Д).

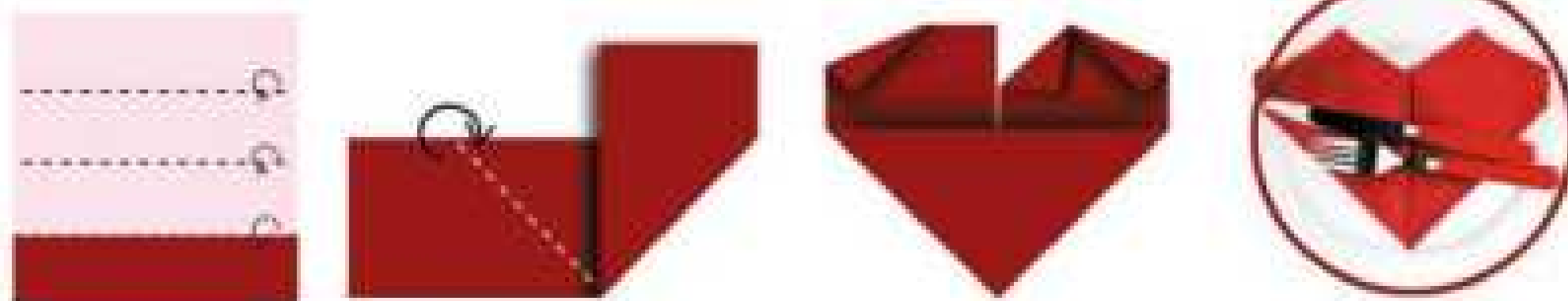
- 1 множина всіх паралелограмів
2 множина всіх прямокутників
3 множина всіх ромбів
4 множина всіх квадратів

- А суміжні сторони чотирикутника рівні між собою, а протилежні сторони не завжди рівні
Б усі кути і всі сторони чотирикутника рівні між собою
В діагоналі чотирикутника не завжди рівні, але є бісектрисами всіх внутрішніх кутів
Г протилежні тупі кути чотирикутника рівні між собою, а діагоналі не завжди є перпендикулярними
Д діагоналі чотирикутника рівні між собою, але не завжди перпендикулярні

181. На сторонах BC і CD ромба $ABCD$ у зовнішню сторону побудовано квадрати $BMNC$ і $CKPD$. Доведи, що $AM = AP$, $AM \perp AP$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

182. Складання серветок. Розглянь малюнок 3.25. Візьми паперову серветку і склади її за вказаним алгоритмом. Запропонуй інший спосіб складання серветок.



Мал. 3.25

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

183. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки 7 см і 3 см, починаючи від вершини B . Знайди периметр паралелограма.
184. З вершин B і D паралелограма $ABCD$ на діагональ AC опущено перпендикуляри BM і DN ($M \in AC$, $N \in AC$). Доведи, що $BMDN$ — паралелограм.
185. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 7 см. Якими натуральними числами може виражатися довжина третьої сторони?

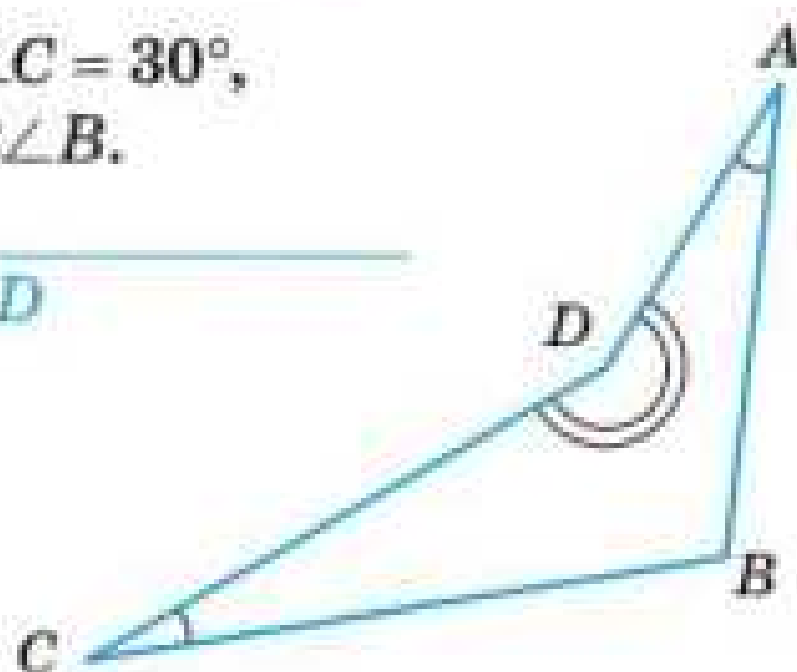
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

1

$\angle A = \angle C = 30^\circ$,
 $\angle D = 2\angle B$.

$\angle B, \angle D$



Б

$\square ABCD$,
 $\angle A : \angle B = 1 : 2$.

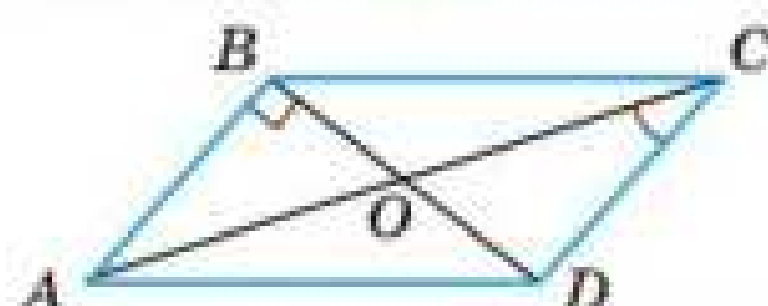
$\angle B, \angle C$



2

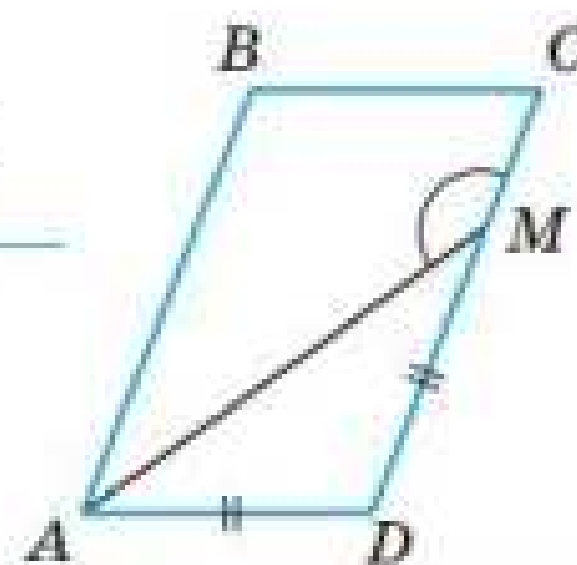
$\square ABCD$, $AB \perp BD$,
 $\angle ACD = 30^\circ$.

Довести: $AO = BD$.



$\square ABCD$,
 $AD = DM$,
 $\angle AMC = 140^\circ$.

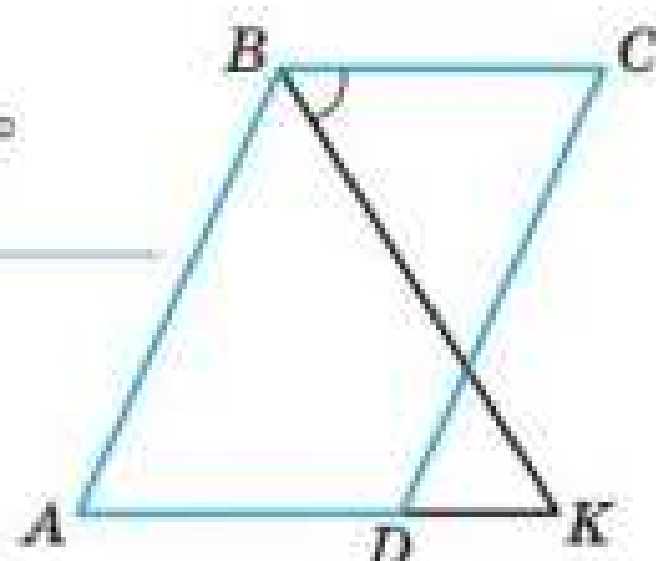
$\angle B, \angle C$



3

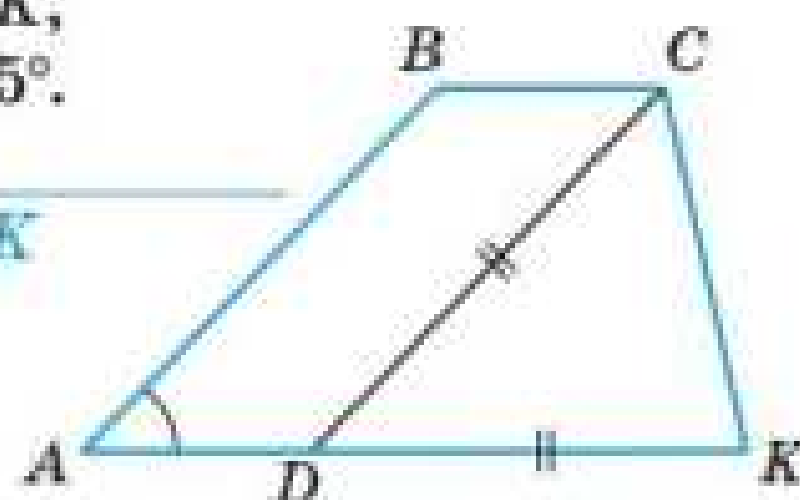
$\square ABCD$,
 $AB = AK$,
 $\angle CBK = 55^\circ$

$\angle A, \angle D$



$\square ABCD$,
 $CD = DK$,
 $\angle A = 45^\circ$.

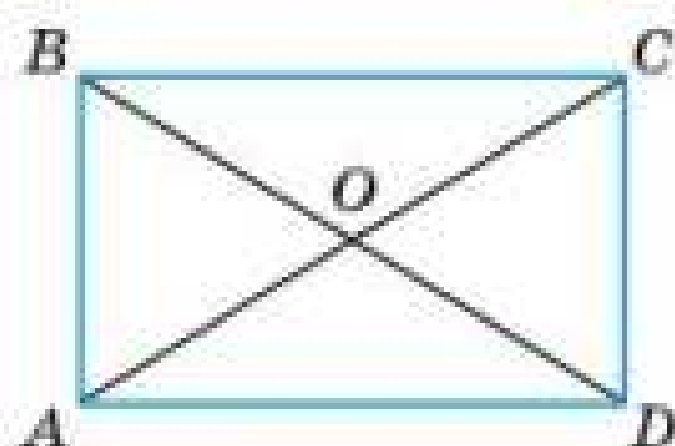
$\angle B, \angle K$



4

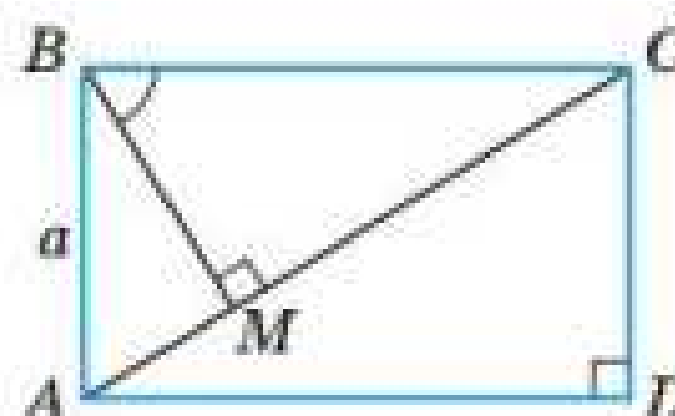
$ABCD$ — прямокутник,
 $AC = 2AB$.

$\angle COB$



$ABCD$ — прямокутник,
 $\angle MBC = 60^\circ$, $AB = a$,
 $BM \perp AC$.

MC



САМОСТІЙНА РОБОТА

ВАРІАНТ 1

1. Знайди кути паралелограма, якщо вони пропорційні числам 2 і 3.
2. Знайди сторони прямокутника, якщо одна з них на 3 см менша від другої, а периметр прямокутника дорівнює 34 см.
3. На діагоналі AC ромба $ABCD$ відклали рівні відрізки AM і CN . Доведи, що чотирикутник $DMBN$ — ромб.
4. У прямокутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону CD у точці M . Знайди периметр прямокутника, якщо $AB = 10$ см і $CM : MD = 1 : 4$.

ВАРІАНТ 2

1. Знайди кути ромба, якщо один із них на 30° більший за другий.
2. Знайди сторони паралелограма, якщо одна з них у 2 рази більша за другу, а периметр паралелограма дорівнює 36 см.
3. M і N — середини сторін BC і AD ромба $ABCD$. Доведи, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.
4. У прямокутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці M . Знайди сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 см і $BM : MC = 2 : 3$.

ВАРІАНТ 3

1. Знайди кути паралелограма, якщо різниця двох із них дорівнює 40° .
2. Знайди сторони прямокутника, якщо одна з них у 3 рази менша від другої, а периметр прямокутника дорівнює 48 см.
3. На сторонах BC і AD прямокутника $ABCD$ відклали рівні відрізки BK і DL . Доведи, що чотирикутник $AKCL$ — паралелограм.
4. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону CD у точці M . Знайди периметр паралелограма, якщо $AD = 6$ см і $CM : MD = 4 : 3$.

ВАРІАНТ 4

1. Знайди кути ромба, якщо один із них у 3 рази більший за другий.
2. Знайди сторони паралелограма, якщо одна з них на 5 см більша за другу, а периметр паралелограма дорівнює 46 см.
3. Бісектриси кутів A і C прямокутника $ABCD$ перетинають сторони BC і AD у точках M і N відповідно. Доведи, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.
4. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці M . Знайди сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см і $BM : MC = 1 : 3$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

- | | | | |
|----|---|---|--|
| 1 | $ABCD$ — прямокутник. Яке з тверджень хибне? | A $AB \perp BC$
Б $AC = BD$ | В $AC \perp BD$
Г $BC \parallel AD$ |
| 2 | $ABCD$ — ромб. Який знак слід поставити замість *:
$AC * BD$? | A =
Б $\perp$ | В $\parallel$
Г не можна визначити |
| 3 | Сума кутів чотирикутника дорівнює: | A 120°
Б 90° | В 180°
Г 360° |
| 4 | Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його більшу сторону навпіл. Знайди периметр паралелограма, якщо його менша сторона дорівнює 6 см. | A 12 см
Б 18 см | В 36 см
Г не можна визначити |
| 5 | Сума кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, дорівнює: | A 90°
Б 180° | В 360°
Г 120° |
| 6 | Одна зі сторін паралелограма дорівнює 5 см, а периметр 16 см. Знайди довжину другої сторони. | A 5 см
Б 6 см | В 11 см
Г 3 см |
| 7 | Знайдіть кути ромба, якщо вони пропорційні числам 2 і 7. | A 20° і 70°
Б 20° і 140° | В 40° і 140°
Г 80° і 280° |
| 8 | Менша сторона прямокутника дорівнює 5 см. Знайди довжину діагоналі, якщо вона утворює з більшою стороною кут 30° . | A 10 см
Б 5 см | В 2,5 см
Г 20 см |
| 9 | O — точка перетину діагоналей ромба $ABCD$. Визнач вид $\triangle AOB$. | A гострокутний
Б прямокутний
В тупокутний
Г рівносторонній | |
| 10 | Периметр квадрата 20 см. Знайди відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторони. | A 20 см
Б 10 см
В 5 см
Г 2,5 см | |

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Кути чотирикутника пропорційні числам 2, 4, 6 і 8. Знайди найбільший кут цього чотирикутника.
А 18° **Б** 36° **В** 108° **Г** 144°
2. Периметр паралелограма дорівнює 120 см, а менша сторона 25 см. Знайди довжину більшої сторони паралелограма.
А 25 см **Б** 95 см **В** 35 см **Г** 45 см
3. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 30° . Знайди довжину меншої сторони прямокутника.
А 5 см **Б** 10 см **В** 20 см **Г** 2,5 см
4. Діагональ паралелограма $ABCD$ утворює зі сторонами кути 42° і 34° . Установи відповідність між кутами, заданими умовами (1–3), та їх градусними мірами (А–Д).

- | | |
|--|----------------------|
| 1 менший кут паралелограма | А 14° |
| 2 більший кут паралелограма | Б 24° |
| 3 кут між AB і висотою BH ($H \in AD$) | В 76° |
| | Г 104° |
| | Д 116° |

5. Знайди кут між діагоналями прямокутника $ABCD$, якщо $\angle CAD = 35^\circ$.
6. Один із кутів ромба дорівнює 120° . Знайди меншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см.
7. Знайди периметр паралелограма $ABCD$, якщо його менша сторона дорівнює 5 см, а бісектриси кутів A і D перетинаються в точці K , яка лежить на стороні BC . Знайди міру $\angle AKD$.
8. У рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 15 см вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах. Знайди периметр прямокутника, якщо одна з його сторін утричі більша за другу.

Додаткове завдання

9. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ взято точки M і N такі, що $BM = DN$. Доведи, що $AMCN$ — ромб. Знайди його периметр, якщо $MN = 4$ см і $\angle BAM = 15^\circ$.

Серед рівних розумом — за однакових інших умов — переважає той, хто знає геометрію.

Б. Паскаль

§ 4

ЗАСТОСУВАННЯ
ВЛАСТИВОСТЕЙ
ПАРАЛЕЛОГРАМА

КЛЮЧОВІ СЛОВА

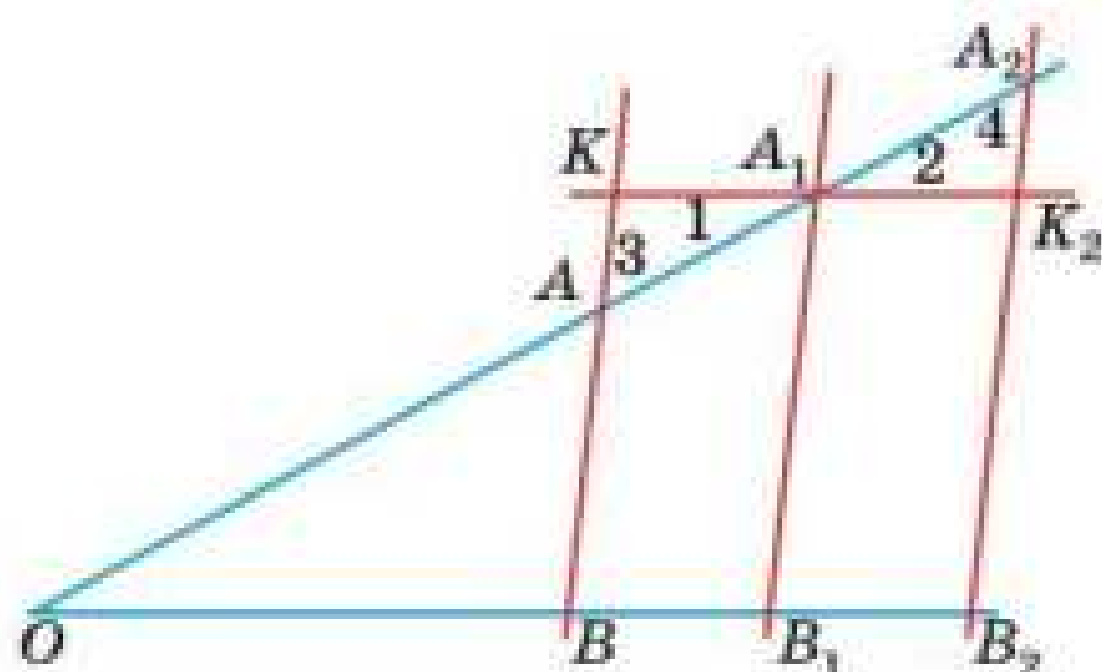
- Thales' theorem — теорема Фалеса
- midpoint — середина відрізка
- midline of triangle — середня лінія трикутника

Властивості паралелограма можна застосовувати під час доведення теорем і розв'язування задач.

Теорема 7 (Фалеса). Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні.

Доведення. Нехай паралельні прямі AB , A_1B_1 і A_2B_2 перетинають сторону OA кута AOB в точках A , A_1 , A_2 , а сторону OB — у точках B , B_1 , B_2 (мал. 4.1). Доведемо: якщо $AA_1 = A_1A_2$, то $BB_1 = B_1B_2$.

Проведемо через точку A_1 пряму KK_2 , паралельну OB . Нехай ця пряма перетинає прямі AB і A_2B_2 в точках K і K_2 . Тоді $\triangle AA_1K = \triangle A_2A_1K_2$ (бо $AA_1 = A_1A_2$, $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$). Отже, $KA_1 = A_1K_2$. Чотирикутники KA_1B_1B і $A_1K_2B_2B_1$ — паралелограми. Тому якщо $KA_1 = A_1K_2$, то $BB_1 = B_1B_2$.

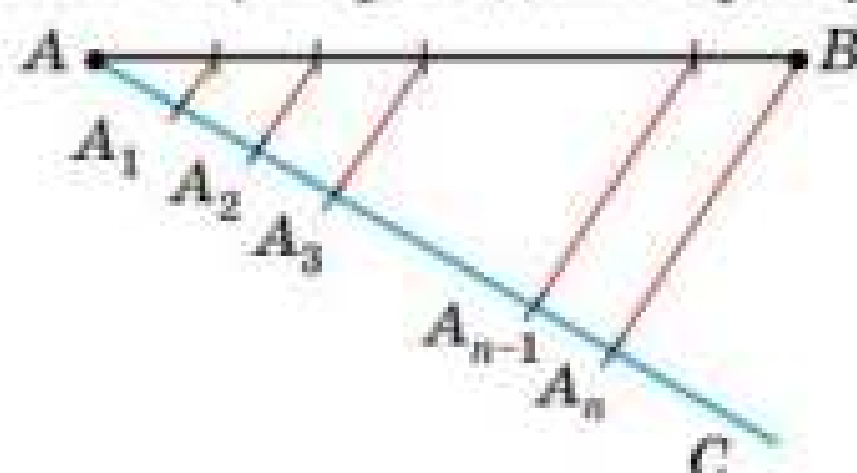


Мал. 4.1

Задача. Поділіть даний відрізок AB на n рівних частин.

Розв'язання. Проведемо довільний промінь AC і відкладемо на ньому рівні відрізки AA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , ..., $A_{n-1}A_n$ (мал. 4.2). Проведемо пряму A_nB , а через точки A_1 , A_2 , ..., A_{n-1} — прямі, паралельні A_nB . Вони поділять даний відрізок AB на n рівних частин. Це випливає з теореми Фалеса.

Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох сторін цього трикутника.



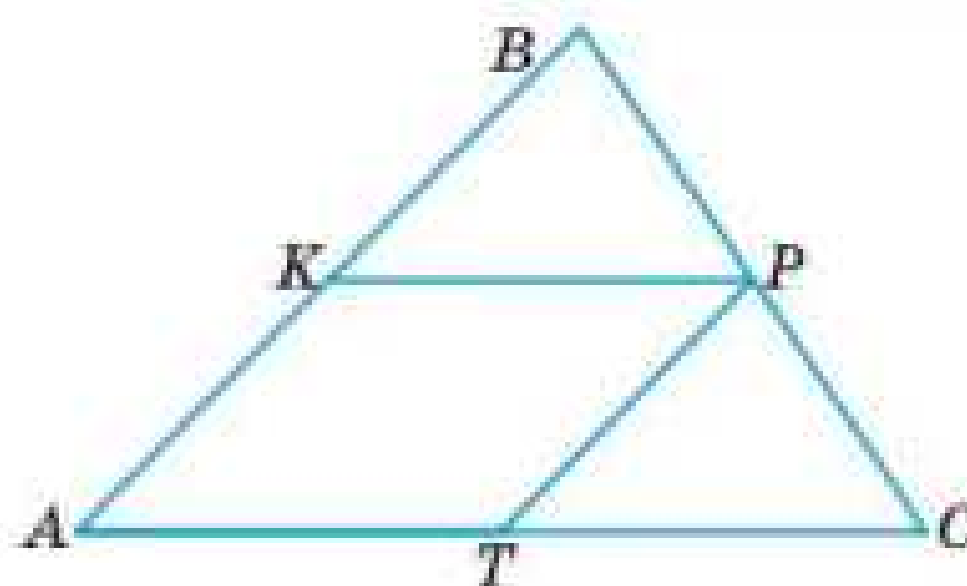
Мал. 4.2

Теорема 8. Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює її половині.



Доведення. Нехай KP — середня лінія $\triangle ABC$ (мал. 4.3). Проведемо через точку P пряму, паралельну AC . За теоремою Фалеса вона перетинає відрізок AB у його середині K , тобто містить середню лінію KP . Отже, $KP \parallel AC$. Цим доведено першу частину теореми.

Проведемо ще середню лінію PT . Вона паралельна AB , тому чотирикутник $AKPT$ — паралелограм. За властивістю паралелограма $KP = AT$, а за теоремою Фалеса $AT = TC$. Отже, $KP = \frac{1}{2} AC$.



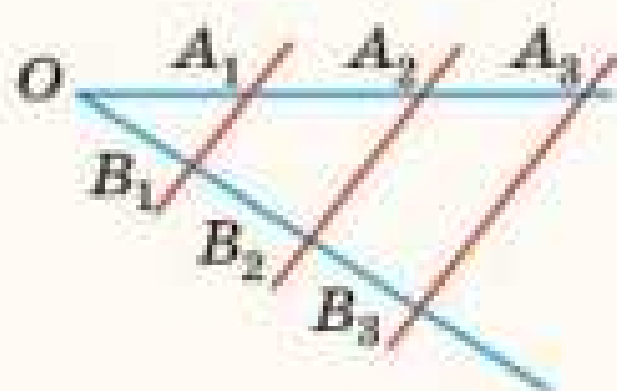
Мал. 4.3

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

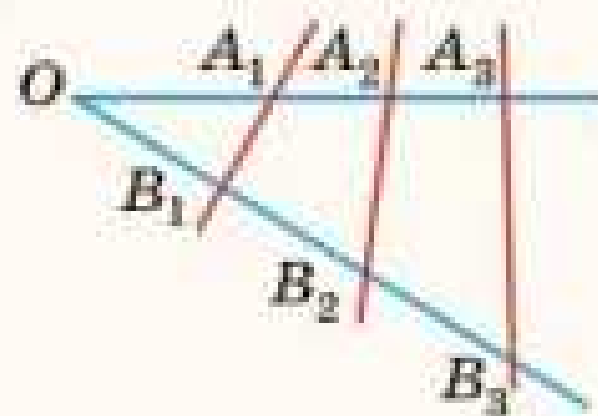
Чи правильне твердження, обернене до теореми Фалеса? Правильне, якщо розглядати відрізки на сторонах кута, починаючи від його вершини.

Якщо на одній стороні кута O відкласти рівні відрізки $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$, а на другій — також рівні між собою відрізки $OB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$, то прямі $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ паралельні одна одній (мал. 4.4). Спробуй довести це твердження самостійно.

Коли рівні відрізки відкладати на одній стороні кута O і на другій, але не від вершини кута, то прямі $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ можуть бути не паралельними (мал. 4.5).



Мал. 4.4



Мал. 4.5

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй і доведи теорему Фалеса.
2. Що називають середньою лінією трикутника?
3. Які властивості має середня лінія трикутника?
4. Доведи теорему про середню лінію трикутника.

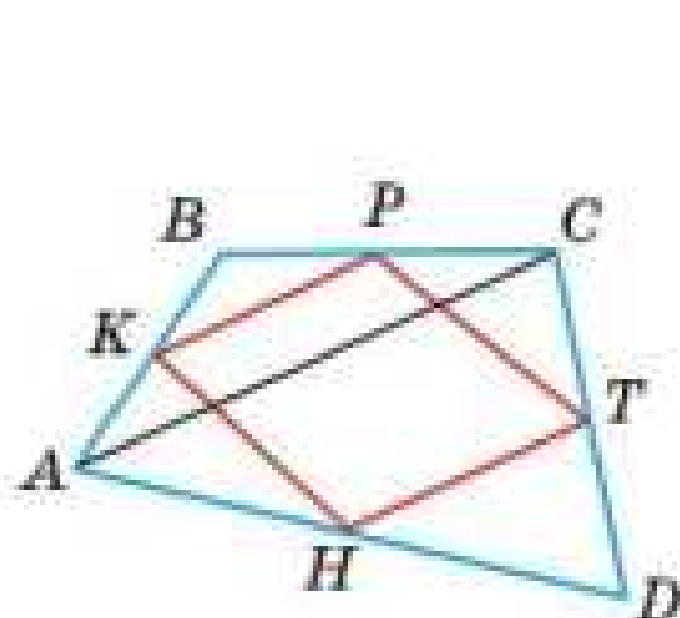
ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Доведи, що середини сторін довільного чотирикутника є вершинами паралелограма (теорема Варіньона).

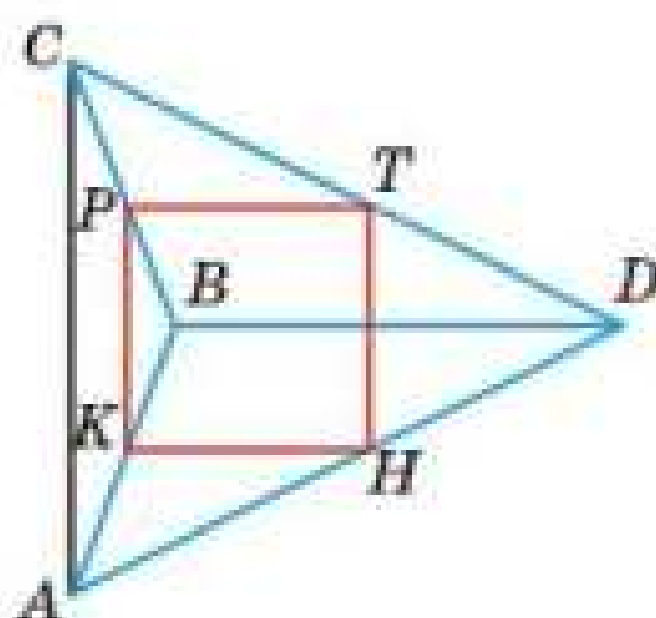
- Нехай $ABCD$ — довільний чотирикутник, а точки K, P, T, H — середини його сторін (мал. 4.6).

Проведемо діагональ AC даного чотирикутника і розглянемо трикутники ABC і ADC . KP — середня лінія $\triangle ABC$, тому $KP \parallel AC$ і $KP = 0,5AC$. TH — середня лінія $\triangle ADC$, тому $TH \parallel AC$ і $TH = 0,5AC$. За транзитивною властивістю відрізки KP і TH паралельні й рівні. Тому за ознакою паралелограма (теорема 4) чотирикутник $KPTH$ — паралелограм.

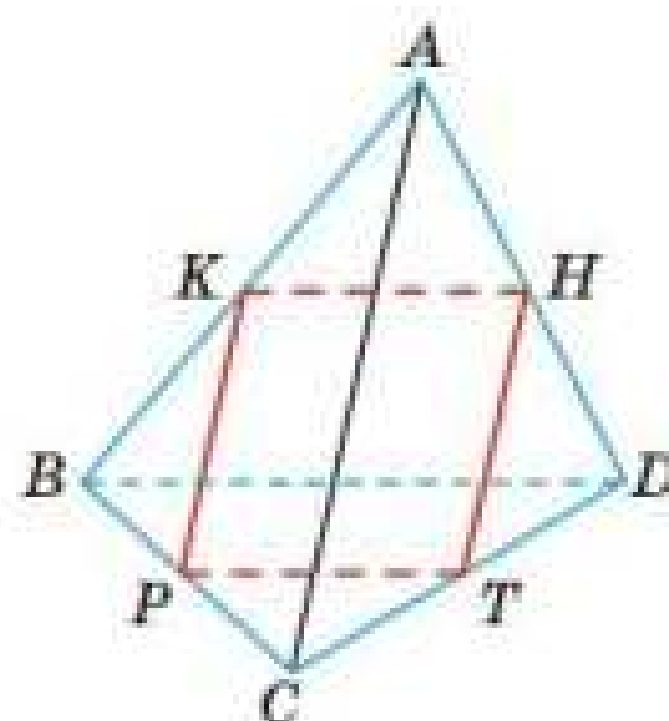
Примітка. Наведене доведення правильне для неопуклого чотирикутника (мал. 4.7) і для неплоского чотирикутника. Наприклад, якщо ламана $ABCD$ складається із чотирьох ребер трикутної піраміди, а точки K, P, T, H — середини цих ребер, то чотирикутник $KPTH$ — також паралелограм (мал. 4.8).



Мал. 4.6



Мал. 4.7



Мал. 4.8

2. Периметр $\triangle ABC$ дорівнює P . Знайди периметр трикутника MNK , сторони якого є середніми лініями $\triangle ABC$.

- Нехай сторони $\triangle ABC$ дорівнюють a, b і c . Тоді за властивістю середньої лінії трикутника сторони $\triangle MNK$ дорівнюють $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$, звідки $P_{\triangle MNK} = \frac{a + b + c}{2} = \frac{P}{2}$.

ВИКОНАЄМО УСНО

186. У якому трикутнику:
а) дві середні лінії рівні?
б) три середні лінії рівні?



187. Відомо, що довжина задньої будівлі школи $DE = 23$ м. Користуючись малюнком 4.9, знайди довжину фасадної частини школи BC .

188. Сторони трикутника дорівнюють 6 м, 8 м і 10 м. Знайди довжини його середніх ліній.

189. Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. Знайди довжину найбільшої середньої лінії трикутника.

А 18 см Б 6 см В 9 см Г 36 см

190. Гра. Кожен з трьох учасників /кожна з трьох учасниць задає довжини сторін трикутника. Четвертий учасник / четверта учасниця має перевірити існування такого трикутника і знайти довжини трьох середніх ліній цього трикутника.

191. K, P, T — середини сторін $\triangle ABC$, периметр якого дорівнює 40 см. Знайди периметр трикутника KPT .

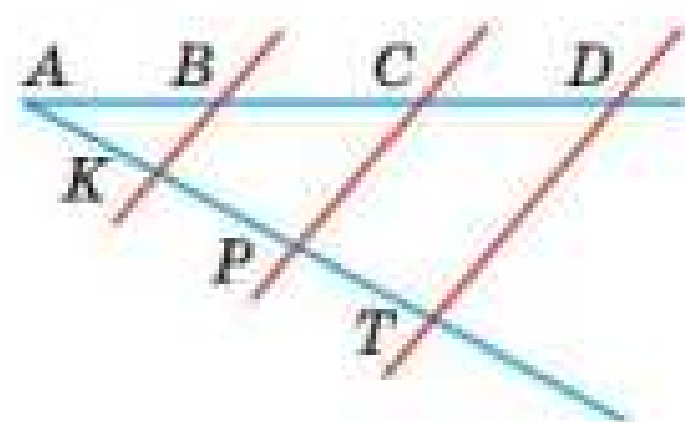
А 40 см Б 20 см В 80 см Г 10 см

192. Дві сторони трикутника відносяться як 2 : 3. Як відносяться його середні лінії, паралельні цим сторонам?

193. Три паралельні прямі перетинають одну сторону кута A в точках B, C і D , а другу — в точках K, P, T (мал. 4.10). При цьому $AB = BC = CD = 4$ см, $KP = 3$ см. Обчисли відстані AK, AP, AT, KT .



Мал. 4.9



Мал. 4.10

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

194. Побудуй довільний відрізок. Поділи даний відрізок на 3 рівні частини.

195. Побудуй довільний відрізок. Поділи даний відрізок на 4 рівні частини двома способами.

196. Накресли гострокутний трикутник, одна зі сторін якого дорівнює 6 см. Поділи кожну сторону трикутника на три рівні частини.

197. Накресли тупокутний трикутник, одна зі сторін якого дорівнює 8 см. Поділи кожну сторону трикутника на 4 рівні частини.

198. Сторону AB $\triangle ABC$, яка удвічі менша від BC , поділили на 4 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні AC . Порівняй довжини відрізків, утворених на сторонах AB і BC .

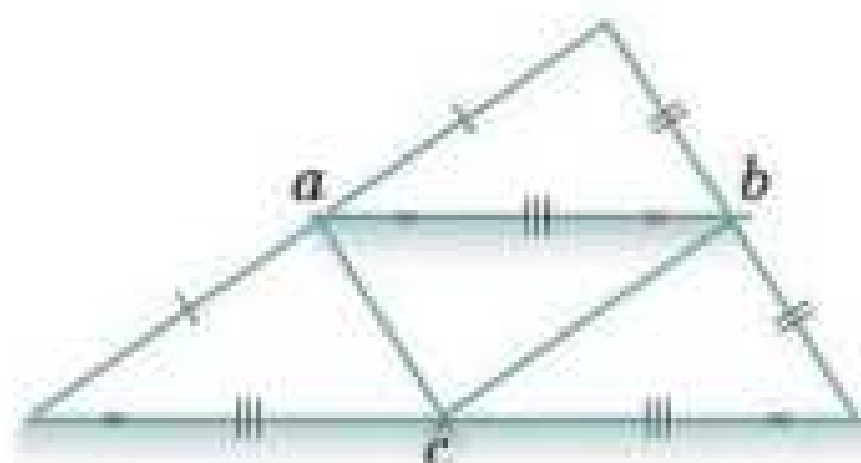


199. Сторону AB $\triangle ABC$, яка на 6 см менша від BC , поділили на 3 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні AC . Порівняй довжини відрізків, утворених на сторонах AB і BC .

200. Сторони трикутника дорівнюють 3 м, 4 м і 5 м. Знайди довжини його середніх ліній.

201. Середні лінії трикутника дорівнюють 2 см, 5 см і 6 см. Знайди довжини його сторін.

202. Сторони трикутника — a , b і c (мал. 4.11). Знайди периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.



Мал. 4.11

203. Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 6 см і 10 см. Знайди периметр трикутника, який відтинає від даного трикутника його:

- найменша середня лінія;
- найбільша середня лінія.

204. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 10 см і 14 см. Знайди периметр трикутника, який відтинає від даного трикутника його середня лінія. Скільки розв'язків має задача?

205. Підвіс із макраме утворює рівнобедрений трикутник. Середня лінія цього трикутника паралельна основі і дорівнює 8 см (мал. 4.12). Знайди сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 54 см.



Мал. 4.12

206. Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна бічній стороні, дорівнює 7 см. Знайди сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 48 см.

207. Доведіть, що середні лінії трикутника розбивають його на чотири рівні трикутники.

208. Сторони прямокутника дорівнюють 7 см і 10 см. Знайди відстані від точки перетину діагоналей до сторін прямокутника.

209. The sides of a rectangle are 23 cm and 15 cm. Find the distances from the intersection of the diagonals to the sides of the rectangle.

210. Відстані від точки перетину діагоналей прямокутника до його сторін дорівнюють 3 см і 4 см. Знайди периметр прямокутника.

211. Відстань від точки перетину діагоналей прямокутника до однієї зі сторін на 3 см більша, ніж до другої. Знайди сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 28 см.

212. K , P , T , H — середини сторін чотирикутника, діагоналі якого дорівнюють 45 дм і 32 дм. Знайди периметр чотирикутника $KPTH$.

213. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 18 см (мал. 4.13). Знайди периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін ромба.

214. Діагоналі чотирикутника дорівнюють d і d_1 . Знайди периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.

215. Знайди сторони трикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 5 і 7, а периметр трикутника, утвореного середніми лініями, дорівнює 30 см.

216. Знайди сторони трикутника, якщо одна з них у 2 рази менша від другої і на 3 см менша від третьої, а периметр трикутника, утвореного середніми лініями, дорівнює 9,5 см.

217. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайди відстань від середини гіпотенузи до катетів трикутника.

218. Точка A лежить на прямій a , а точка B віддалена від прямої на 8 см. Знайди відстань від середини відрізка AB до прямої a .



Мал. 4.13

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

219. На одній зі сторін кута відклали рівні відрізки і через їх кінці провели прямі, перпендикулярні до бісектриси кута. Доведи, що відрізки, утворені на обох сторонах кута, рівні.

220. На одній зі сторін кута відклали рівні відрізки і через їх кінці провели прямі, перпендикулярні до другої сторони. Доведи, що відрізки, утворені на другій стороні кута, рівні між собою.

221. K , P , T — середини сторін AB , BC і AC трикутника ABC . Доведи, що чотирикутник $AKPT$ — паралелограм.

222. Середини сторін ромба послідовно сполучили відрізками. Доведи, що утворений чотирикутник — прямокутник.

223. Середини сторін прямокутника послідовно сполучили відрізками. Доведи, що утворений чотирикутник — ромб.

224. *Відкрита задача.* M , N , P і K — середини сторін AB , BC , CD і AD чотирикутника $ABCD$. Установи вид чотирикутника $MNPK$, якщо $ABCD$ —

225. Основу рівнобедреного трикутника, яка дорівнює 8 см, поділили на 4 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні бічній стороні. Відрізки, утворені на бічній стороні, на 1 см більші за відповідні відрізки основи. Знайди периметр трикутника.



226. Діагональ AC ромба $ABCD$ поділили на 6 рівних частин і через точки поділу провели прямі, паралельні другій діагоналі. Знайди периметр ромба, якщо довжина одного з утворених на стороні AB відрізків дорівнює 2,5 см.

227. M — довільна точка відрізка AC . Доведи, що середня лінія $\triangle ABC$, паралельна AC , ділить відрізок BM навпіл.

228. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює c . Знайди, на які відрізки середня лінія трикутника ділить медіану, проведену до гіпотенузи.

229. Доведи, що пряма, яка містить середню лінію трикутника, рівновіддалена від усіх його вершин.

230. Сторону AB $\triangle ABC$ точками E, F, K поділили на 4 рівні частини і через них провели прямі, паралельні AC (мал. 4.14). Знайди AC і KP , якщо $FT = 5$ см.

231. Сторону AB $\triangle ABC$ точками E, F, K поділили на 4 рівні частини і через них провели прямі, паралельні AC (мал. 4.14). Знайди FT і KP , якщо $AC = 8$ см.

232. Відрізок AB точками M, N, K поділили на 4 рівні частини (мал. 4.15). Знайди відстані від точок M і N до прямої, яка проходить через точку A на відстані 12 см від точки B .

233. Як, користуючись властивістю середньої лінії трикутника, визначити відстань від пункту A до пункту B , між якими не можна пройти (мал. 4.16)?

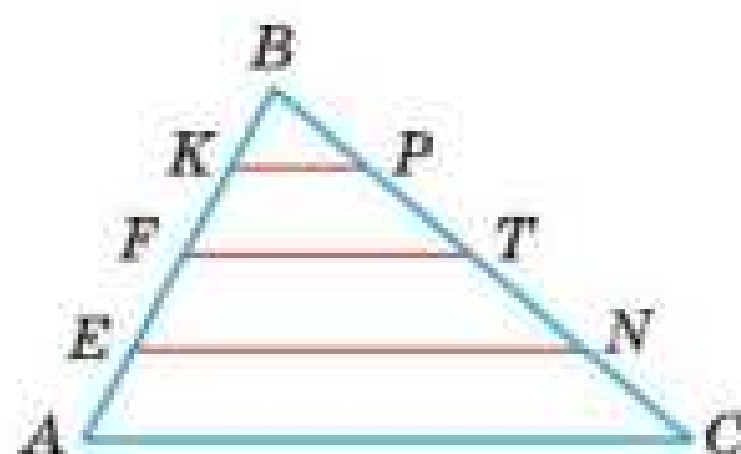
234. Сума діагоналей чотирикутника дорівнює a . Знайди периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.

235. K, P, T, H — середини сторін чотирикутника $ABCD$. За якої умови чотирикутник $KPTH$ є:

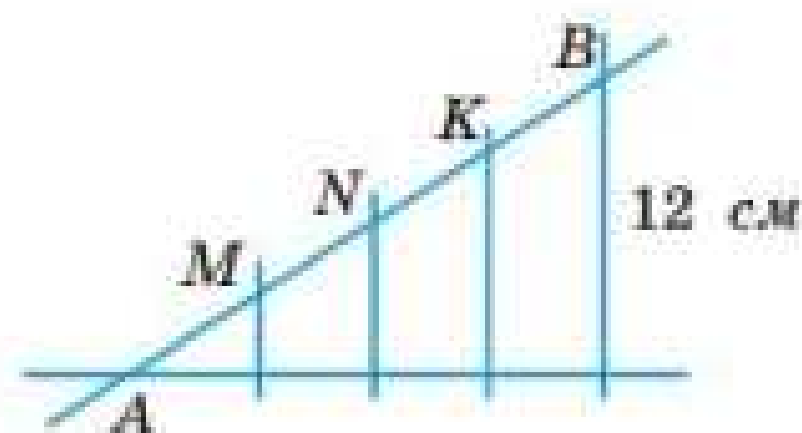
1) ромбом; 2) прямокутником?

236. S, P, F, R — середини сторін чотирикутника $ABCD$. За якої умови чотирикутник $SPFR$ є квадратом?

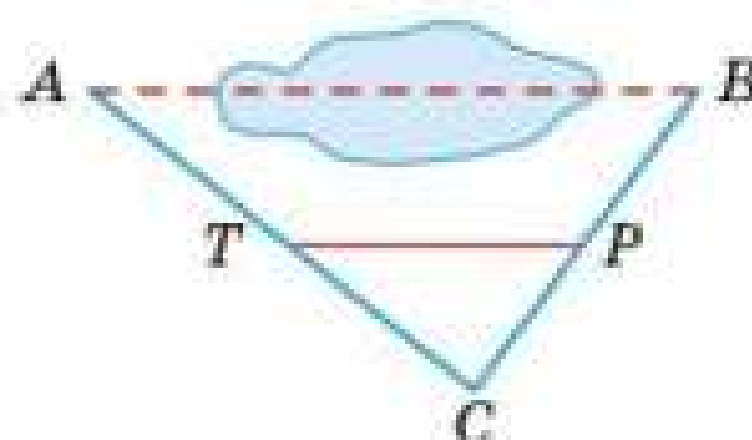
237. Якщо K, P, T — середини сторін $\triangle ABC$ (мал. 4.17), то $AK : AB = AT : AC = KT : BC$. Доведи.



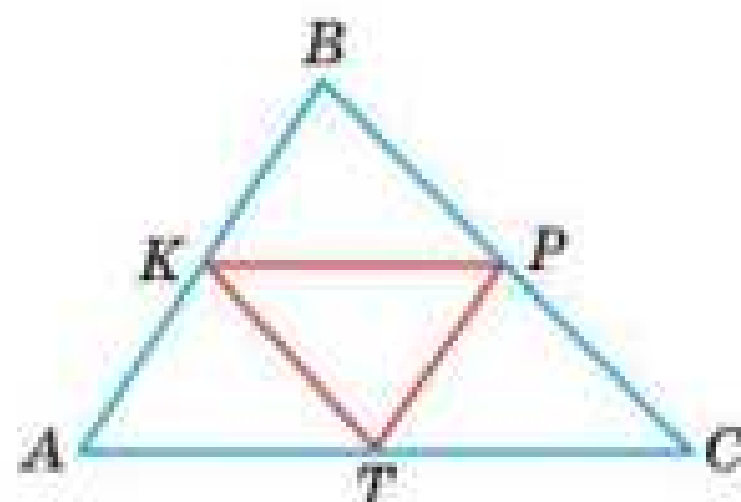
Мал. 4.14



Мал. 4.15



Мал. 4.16

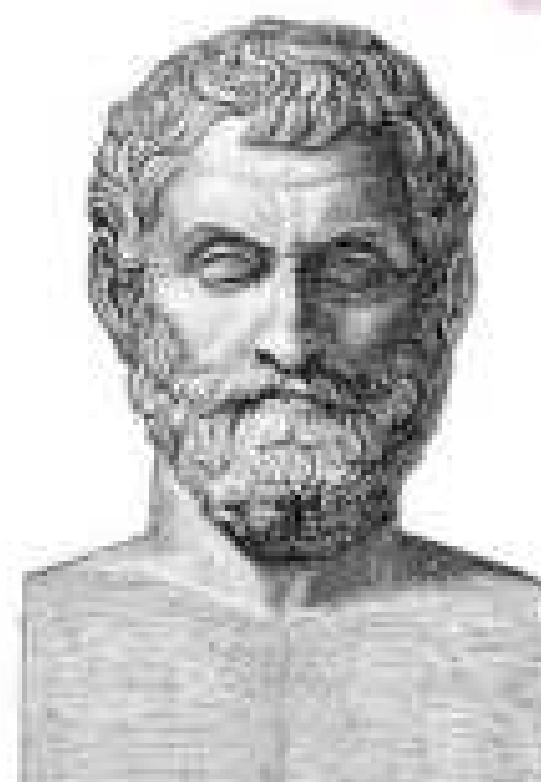


Мал. 4.17

238. Якщо на прямій a відкласти кілька рівних відрізків і через них провести паралельні прямі до перетину з прямою b , то і на прямій b вони відсічуть рівні відрізки. Доведи це твердження.
239. Як розрізати довільний трикутник на дві частини, щоб із них можна було скласти паралелограм?
240. Точки A і B лежать по різні боки від прямої a і віддалені від неї на 6 см і 10 см. Знайди відстань від середини відрізка AB до прямої a .
241. Одна з вершин трикутника міститься за межами зошита. Проведи медіани цього трикутника або їх частини.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

242. Виріж із паперу три рівні різносторонні трикутники. Один з них розріж по середній лінії і з двох утворених частин склади паралелограм. Інші трикутники розріж по інших середніх лініях і склади з них паралелограми. Чи рівні всі утворені таким способом паралелограми? Чи рівні їх периметри?
243. Підготуй презентацію на тему:
1. Фалес Мілетський — один із семи мудреців світу.
 2. Математичні здобутки в школі Фалеса.



Фалес Мілетський
(кінець VII —
початок VI ст. до н. е.)

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

244. На сторонах AB і CD прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AN і CM . Доведи, що $NBMD$ — паралелограм.
245. Доведи, що периметр ромба, вписаного в рівносторонній трикутник (гострий кут ромба збігається з кутом трикутника), дорівнює $2a$, де a — довжина сторони трикутника.
246. На скільки частин ділять площину два рівні квадрати, розміщені на ній?



§ 5 ТРАПЕЦІЯ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

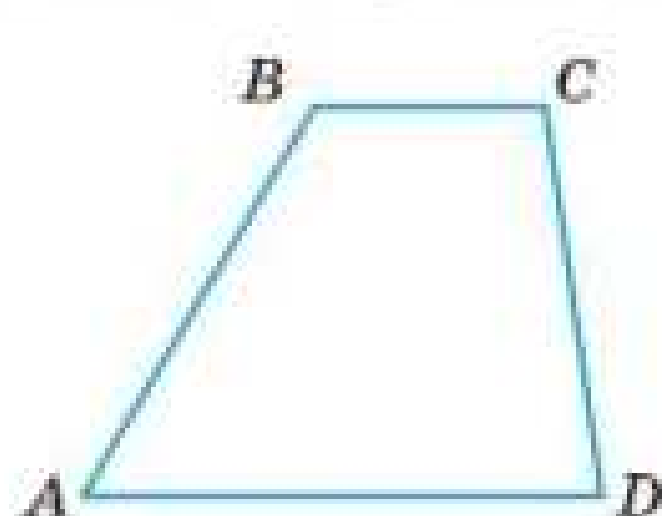
- isosceles trapezoid — рівнобедрена трапеція
- base — основа
- midline of trapezoid — середня лінія трапеції
- leg — бічна сторона

Чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні, називають трапецією (мал. 5.1). Паралельні сторони трапеції — її основи, дві інші — *бічні сторони*.

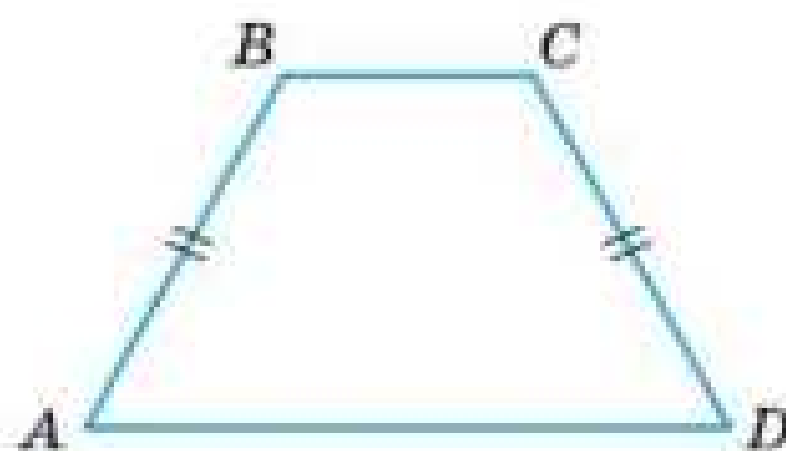
Трапецію з рівними бічними сторонами називають *рівнобічною*, або *рівнобедреною*.

Якщо трапеція має прямий кут, то її називають *прямокутною*.

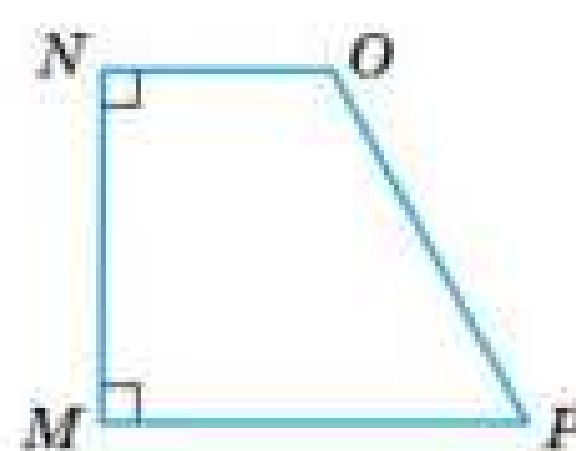
На малюнку 5.2 трапеція $ABCD$ — рівнобічна, а трапеція $MNOP$ — прямокутна.



Мал. 5.1



Рівнобічна трапеція



Прямокутна трапеція

Мал. 5.2

У кожній трапеції сума двох кутів, що прилягають до бічної сторони, дорівнює 180° . Чому?

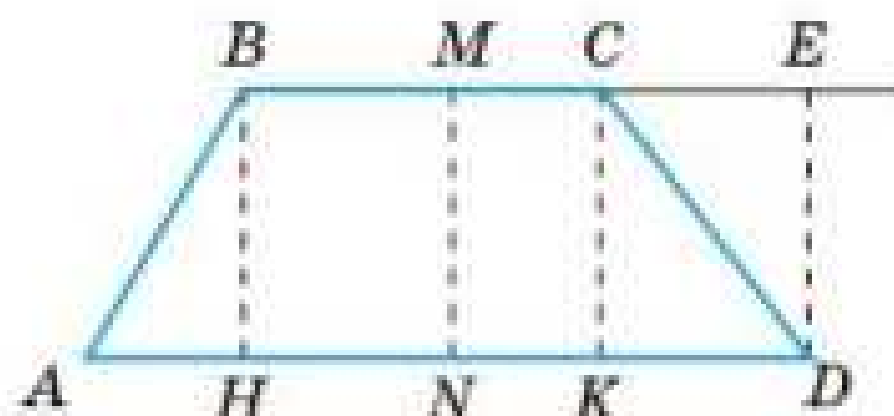
У рівнобічній трапеції:

- 1) кути при основі рівні;
- 2) діагоналі рівні.

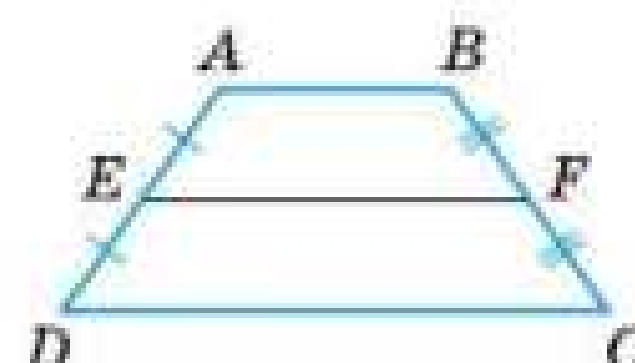
Доведення цих властивостей рівнобічної трапеції наведено у рубриці «Виконаємо разом».

Висотою трапеції називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ трапеції до прямої, що містить другу основу (мал. 5.3). BH , MN , CK , ED — висоти трапеції $ABCD$.

Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін (мал. 5.4).



Мал. 5.3

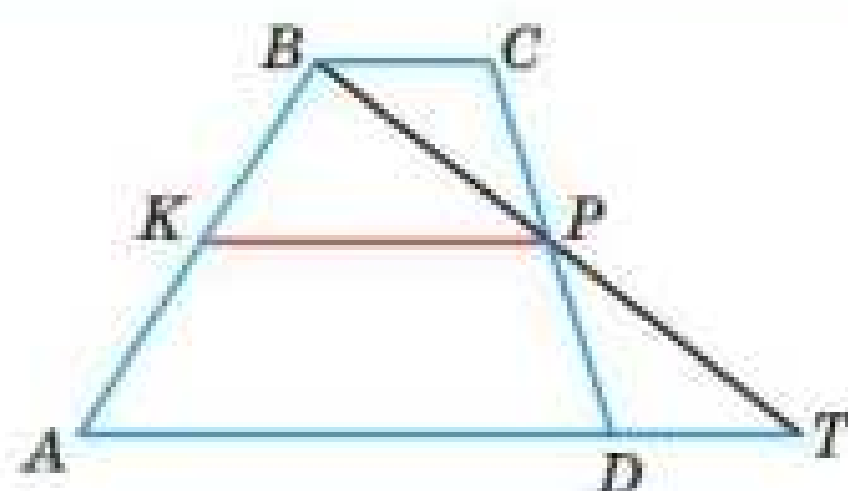


Мал. 5.4

Теорема 9. Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

Доведення. Нехай KP — середня лінія трапеції $ABCD$ (мал. 5.5), а прямі BP і AD перетинаються в точці T . Трикутники BSP і TDP рівні, бо $CP = PD$, $\angle BPC = \angle TPD$, $\angle BCP = \angle TDP$.

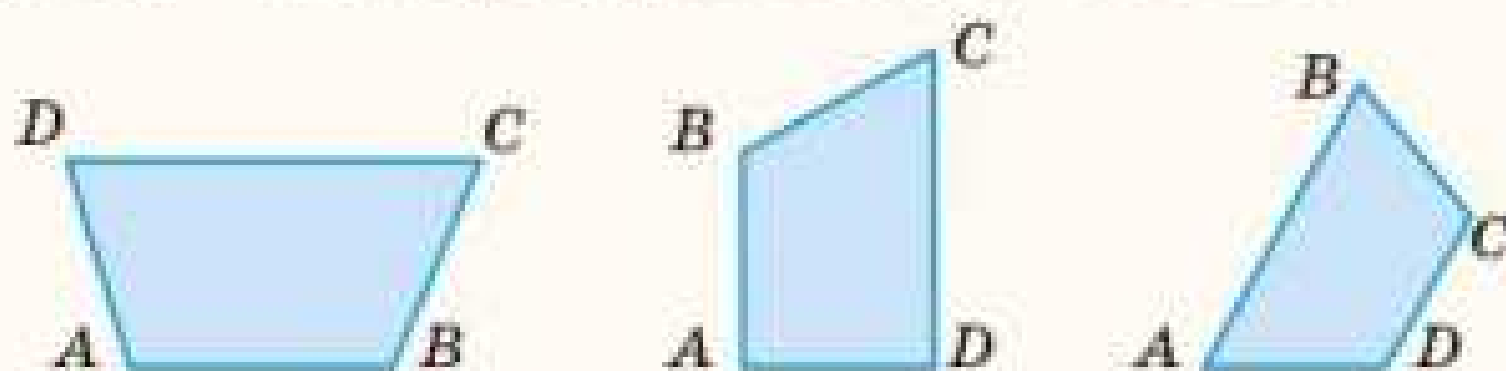
Отже, $BC = DT$ і $BP = PT$. Середня лінія KP трапеції $ABCD$ є також середньою лінією трикутника ABT . Тому $KP \parallel AT$ і $KP = \frac{1}{2} AT$. Отже, $KP \parallel AD$ і $KP = \frac{1}{2} (AD + BC)$.



Мал. 5.5

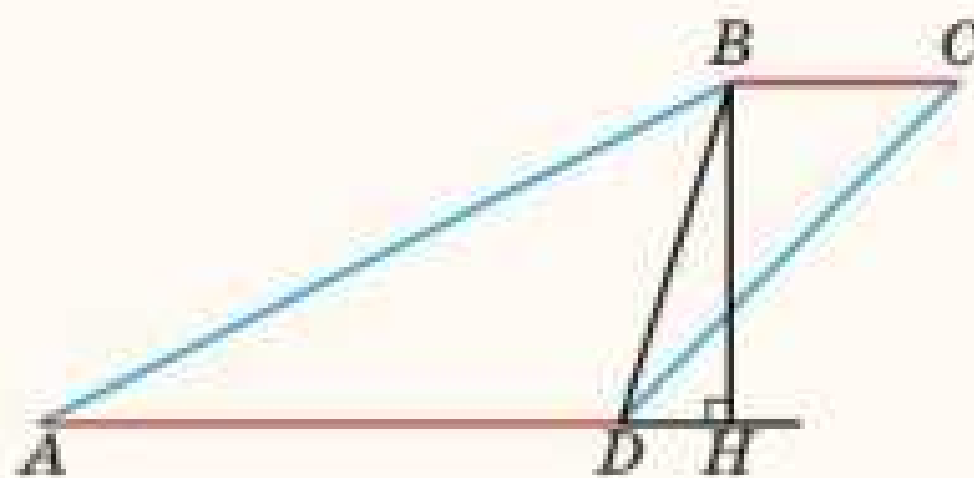
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Креслячи трапецію, найчастіше її більшу основу вважають нижньою основою. Це не обов'язково. Зображені на малюнку 5.6 чотирикутники — також трапеції. Їхні основи — AB і CD .



Мал. 5.6

Чи одне й те саме означають терміни відстань між основами трапеції і відстань між прямими, на яких лежать основи трапеції? Не завжди. Наприклад, на малюнку 5.7 зображено трапецію, відстань між основами якої дорівнює довжині діагоналі BD (відстані між найближчими точками відрізків AD і BC). А відстанню між прямими AD і BC є висота BH трапеції $ABCD$ і $BH < BD$.



Мал. 5.7

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

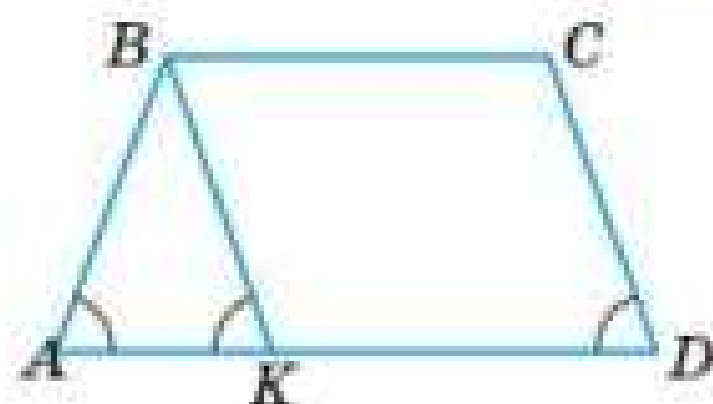
1. Сформулюй означення трапеції.
2. Як називають сторони трапеції?
3. Якими бувають трапеції? Сформулюй їх означення.
4. Чому дорівнює сума двох кутів трапеції, що прилягають до однієї бічної сторони?
5. Сформулюй означення середньої лінії трапеції.
6. Сформулюй і доведи теорему про середню лінію трапеції.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Кути при основі рівнобічної трапеції рівні. Доведи.

- Нехай $ABCD$ — трапеція, у якої $AB = CD$. Доведемо, що $\angle A = \angle D$ (мал. 5.8). Проведемо відрізок BK , паралельний CD . Оскільки $BC \parallel KD$ і $BK \parallel CD$, то $BCKD$ — паралелограм, $BK = CD = BA$. Отже, $\triangle ABK$ — рівнобедрений, тому $\angle A = \angle BKA$.

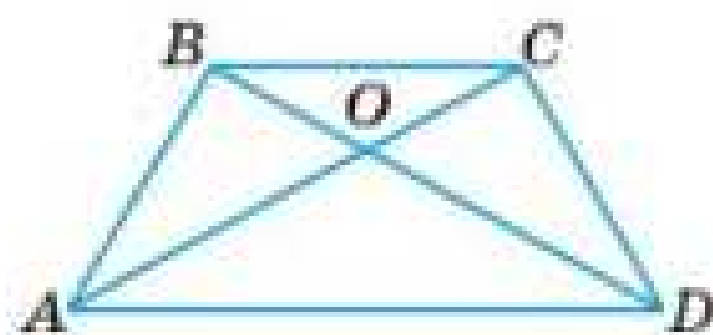
$\angle BKA = \angle D$ — як відповідні кути, утворені січною KD з паралельними прямими BK і CD . Тому $\angle A = \angle D$, що й треба було довести.



Мал. 5.8

2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні. Доведи.

- Розглянемо трикутники ABD і DCA (мал. 5.9). Якщо трапеція рівнобічна, то $AB = CD$ і $\angle BAD = \angle CDA$, AD — спільна. Тоді $\triangle ABD = \triangle DCA$ за першою ознакою рівності трикутників. Якщо трикутники рівні, то відповідні сторони рівні. Значить, $AC = BD$.



Мал. 5.9

3. Основи трапеції дорівнюють 4 дм і 10 дм. Знайди довжини відрізків, паралельних основам, якщо кінці цих відрізків кожен з бічних сторін трапеції ділять на три рівні частини.

- Нехай $ABCD$ — трапеція з основами $AD = 10$ см і $BC = 4$ дм, а точки E, K, F, P такі, що $AE = EK = KB$, $EF \parallel AD$ і $KP \parallel AD$ (мал. 5.10).

Проведемо відрізки EE_1, KK_1 і BB_1 , паралельні CD . Утворені при цьому чотирикутники $B_1BCD, K_1KMB_1, E_1ELK_1$ — паралелограми.

$AB_1 = AD - BC = 6$ дм.

За теоремою Фалеса

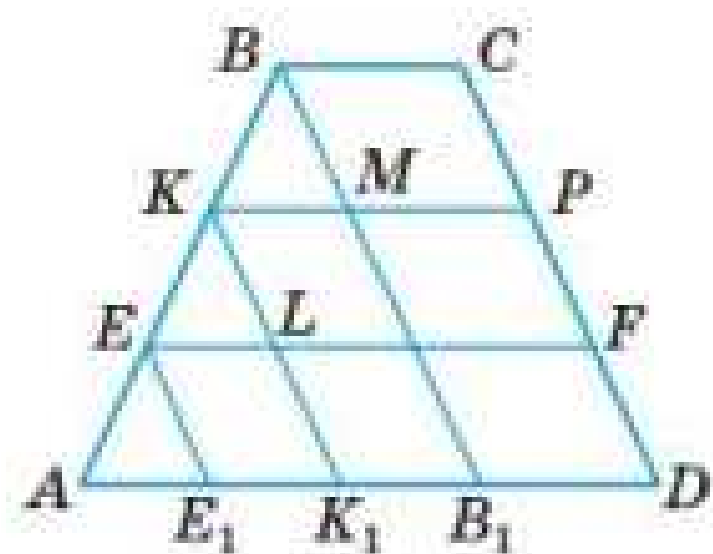
$$AE_1 = E_1K_1 = K_1B_1 = 6 : 3 = 2.$$

Отже, $KP = KM + MP = 2 + 4 = 6$ дм,

$EF = EL + LF = 2 + 6 = 8$ дм.

Відповідь. 6 дм і 8 дм.

Зауваження. Задачу можна було розв'язати і за допомогою рівняння, врахувавши, що KP — середня лінія трапеції $EBCF$, а EF — середня лінія трапеції $AKPD$.



Мал. 5.10

ВИКОНАЄМО УСНО

247. Чи існує трапеція, сторони якої дорівнюють 1 м, 2 м, 3 м і 7 м?

248. Один кут поверхні столу, що є рівнобічною трапецією, дорівнює 100° (мал. 5.11). Знайди інші кути поверхні столу.

249. Сума трьох кутів трапеції дорівнює 280° . Знайди її четвертий кут.

А 100° Б 140° В 70° Г 80°

250. Знайди кути рівнобічної трапеції, якщо сума трьох із них дорівнює 300° .

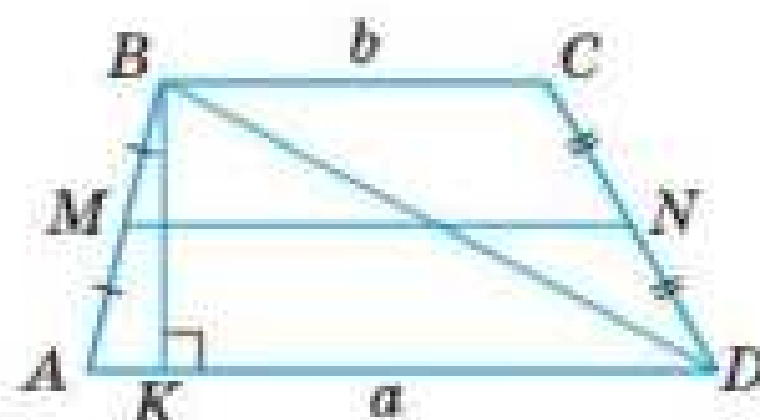
251. Два кути трапеції в сумі становлять 200° . Чи правильно, що вони — протилежні? Знайдіть суму двох інших кутів.

252. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 20 см, а сума її основ — 12 см. Знайди довжину бічної сторони.

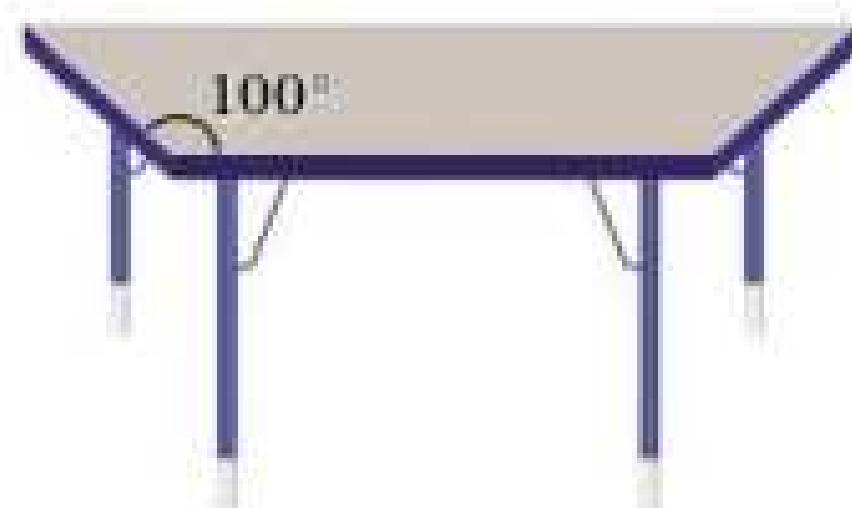
А 8 см Б 4 см В 12 см Г 6 см

253. Установи відповідність між елементами трапеції $ABCD$ (1–4) та відповідними відрізками (А–Д) (мал. 5.12).

1 основа	А BD
2 бічна сторона	Б MN
3 середня лінія	В CD
4 діагональ	Г BC
	Д BK



Мал. 5.12



Мал. 5.11

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

254. Накресли рівнобічну трапецію $MNPK$. Вкажи її основи і бічні сторони.

255. Накресли прямокутну трапецію $EFTP$. Вкажи її основи та бічні сторони.

256. Знайди периметр трапеції, основи якої дорівнюють 8 см і 12 см, а бічні сторони 7 см і 11 см.

257. **НМТ** Знайди периметр рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 18 см і 7 см, а бічна сторона — 11 см.

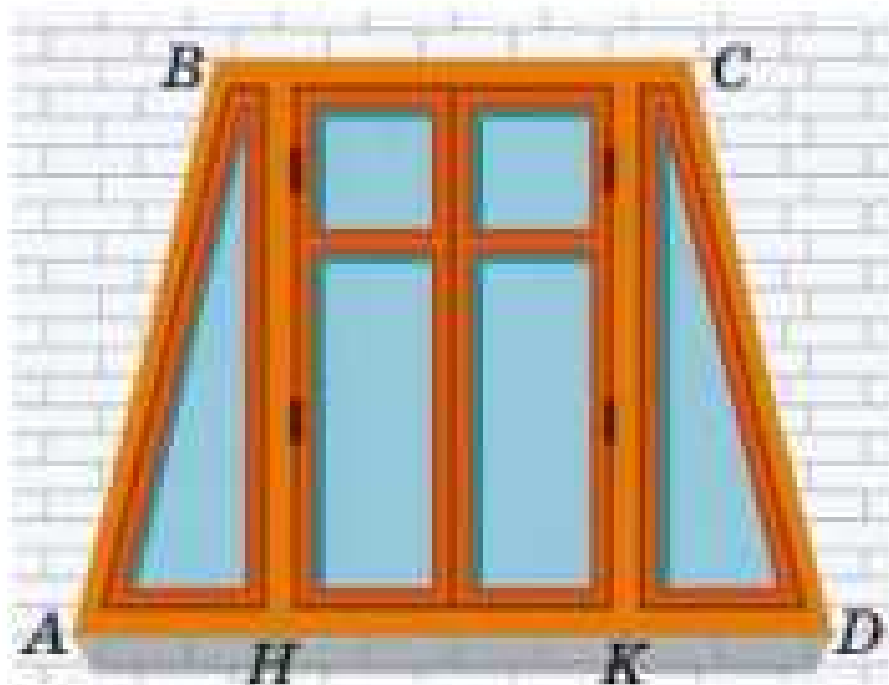
258. Бічними гранями пакування є рівнобічні трапеції з основами 15 см і 17 см та периметром 54 см (мал. 5.13). Знайди бічну сторону такої грані пакування.



15 см

Мал. 5.13

259. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 7 см, а периметр 41 см. Знайди основи трапеції, якщо одна з них:
а) на 3 см більша за другу; б) у 2 рази більша за другу.
260. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 11 см, а периметр 47 см. Знайди основи трапеції, якщо одна з них:
а) на 5 см менша від другої; б) у 4 рази менша від другої.
261. Один із кутів рівнобічної трапеції дорівнює 42° . Знайди інші кути трапеції.
262. Один із кутів рівнобічної трапеції дорівнює 128° . Знайди інші кути трапеції.
263. Менший із кутів прямокутної трапеції дорівнює 74° . Знайди інші кути трапеції.
264. Більший із кутів прямокутної трапеції дорівнює 139° . Знайди інші кути трапеції.
265. Знайди кути рівнобічної трапеції, якщо один із них на 10° більший за другий.
266. Знайди кути рівнобічної трапеції, якщо один із них у 4 рази більший за протилежний.
267. Знайди кути трапеції, якщо її можна розрізати на паралелограм і рівносторонній трикутник.
268. Знайди кути трикутника, якщо пряма, паралельна його стороні, відтинає від нього рівнобічну трапецію з кутом 100° .
269. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 80° . Знайди кути трапеції, яку відтинає від даного трикутника пряма, паралельна: а) основі трикутника; б) бічній стороні трикутника.
270. Два кути трапеції — 100° і 50° . Знайди інші її кути.
271. Два кути трапеції — 35° і 140° . Знайди інші її кути.
272. BC і AD — основи рівнобічної трапеції $ABCD$. BM і CK — висоти. Доведи, що:
а) $\triangle ABM = \triangle DCK$; б) $AM = KD$.
273. BH — висота вікна у формі рівнобічної трапеції з основами $AD = 2,4$ м і $BC = 1,6$ м (мал. 5.14). Знайди довжини відрізків AH та HD .
274. BK — висота рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AD і BC . Знайди основи трапеції, якщо $AK = 6$ см, $KD = 15$ см.
275. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 17 см, бічна сторона — 10 см, а кут між ними — 60° . Знайди її периметр.
276. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 14 см. Знайди периметр трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60° .



Мал. 5.14

277. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 13 см і 6 см, а тупий кут — 120° . Знайди довжину більшої бічної сторони.

278. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 7 дм і 4 дм, а гострий кут — 45° (мал. 5.15). Знайди довжину меншої бічної сторони.

279. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 5 см і 9 см, а тупий кут — 135° . Знайди відстань між основами трапеції.

280. **НМТ** Обчисли довжину середньої лінії трапеції, основи якої дорівнюють 7 м і 12 м.

281. Основи трапеції дорівнюють 0,5 м і 1,7 м. Знайди довжину її середньої лінії.

282. The bases of a trapezoid are 6 dm and 8 dm. Find the length of its midline.

283. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см. Знайди відрізки, на які діагональ ділить її середню лінію.

284. Діагональ ділить середню лінію трапеції на відрізки, довжини яких дорівнюють 2 см і 5 см. Знайди основи трапеції.

285. Середня лінія трапеції $ABCD$



($AD \parallel BC$) дорівнює 30 см (мал. 5.16).

Знайдіть основи трапеції, якщо:

- а) AD більша за BC на 6 см;
- б) AD більша за BC у 5 разів;
- в) $AD : BC = 2 : 3$.

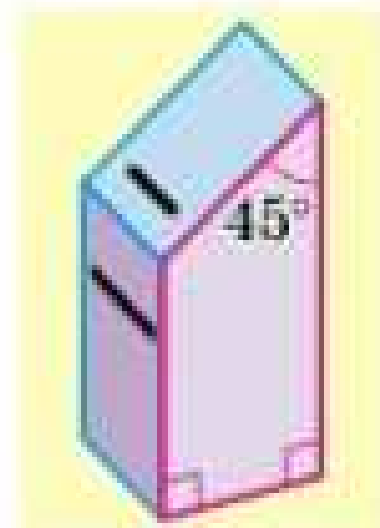
286. Середня лінія трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дорівнює 36 см. Знайди основи трапеції, якщо:

- а) одна з них на 6 см більша за другу;
- б) одна з них у 2 рази менша від другої;
- в) вони пропорційні числам 4 і 5.

287. Висота, проведена з вершини тупого кута прямокутної трапеції, поділяє її більшу основу на відрізки завдовжки 20 см і 30 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайди довжину середньої лінії трапеції.

288. Кінці відрізка, що не перетинає пряму, віддалені від цієї прямої на 6 см і 14 см. Знайди відстань від середини відрізка до цієї прямої.

289. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 10 см. Знайди довжину відрізка середньої лінії, який лежить між діагоналями.



Мал. 5.15



Мал. 5.16

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б



290. Доведи, що коли діагоналі трапеції рівні, то вона рівнобічна.
291. Кути при основі рівнобічної трапеції рівні. Сформулюйте обернене твердження. Чи правильне воно?
292. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайди периметр трапеції, якщо її основи дорівнюють 7 см і 12 см.
293. Гранями торшера є рівнобічні трапеції (мал. 5.17). Діагональ грані є бісектрисою її тупого кута. Знайдіть усі сторони грані, якщо її основи пропорційні числам 2 і 5, а периметр дорівнює 66 см.
294. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайди більшу основу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см і менший кут — 60° .
295. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута, а основи дорівнюють 3 см і 7 см. Знайди периметр трапеції.
296. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її тупого кута. Знайди сторони трапеції, якщо одна з її основ на 8 см менша від другої, а периметр дорівнює 32 см.
297. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайди кути трапеції.
298. Бісектриса тупого кута B трапеції $ABCD$ паралельна бічній стороні CD і перетинає сторону AD у точці M (мал. 5.18). Знайди периметр трапеції, якщо $MD = 30$ м, а периметр $\triangle ABM$ дорівнює 42 м.

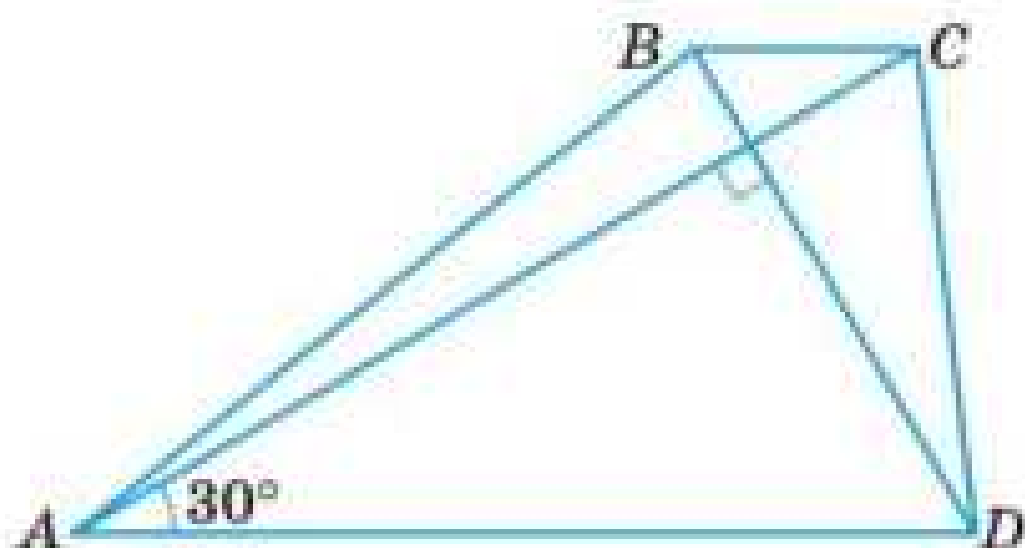


Мал. 5.17



Мал. 5.18

299. Сторону AB $\triangle ABC$ поділено на 3 рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні AC . Знайди довжини відрізків, які лежать між сторонами AB і BC , якщо найменший із них дорівнює 5 см.
300. Бічну сторону трапеції поділили на 4 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні основам. Знайди довжини відрізків, які містяться між бічними сторонами трапеції, якщо її основи дорівнюють 4 см і 10 см.
301. Бісектриса тупого кута B рівнобічної трапеції $ABCD$ паралельна бічній стороні CD і перетинає сторону AD у точці M . Знайди сторони трапеції, якщо її периметр 32 см і $AM : MD = 2 : 1$.
302. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагоналі перпендикулярні, $\angle CAD = 30^\circ$. Знайди довжину діагоналі BD , якщо основи трапеції дорівнюють 5 см і 9 см (мал. 5.19).
303. Діагоналі трапеції перпендикулярні, і одна з них утворює з більшою основою кут 30° . Доведи, що друга діагональ дорівнює середній лінії трапеції.
304. Сторони трапеції дорівнюють a , a , a і $2a$. Знайдіть її кути і кут між діагоналями. Чи існує точка, рівновіддалена від усіх вершин трапеції?
305. Кінці діаметра кола віддалені від дотичної до цього кола на 2 см і 7 см. Знайди радіус кола.
306. Діагоналі трапеції перетинають її середню лінію KP у точках E і F . Доведи, що $KE = FP$.
307. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три рівні частини. Як відносяться основи трапеції?
308. Доведи, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам трапеції і дорівнює їх піврізниці.
309. **НМТ** Довжини сторін трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) задовольняють співвідношення $AB : BC : CD : AD = 2 : 3 : 4 : 7$. Точки K і M — середини сторін AB і CD відповідно. Обчисли периметр чотирикутника $AKMD$, якщо периметр трапеції $ABCD$ дорівнює 80 см.
310. Доведи, що бісектриси кутів A і B трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються під прямим кутом і точка їх перетину лежить на середній лінії трапеції.



Мал. 5.19

311. Основи трапеції a і $2a$ (мал. 5.20). Дві прямі, паралельні її основам, ділять одну з бічних сторін на три рівні відрізки. Знайди довжини відрізків цих прямих, що лежать усередині трапеції.

312. Бічна сторона рівнобічної трапеції $ABCD$ дорівнює 5 см, а основа BC — 4 см. Яку з двох цих сторін трапеції перетинає бісектриса її кута A ?

313. Діагоналі трапеції перпендикулярні. Доведи, що середня лінія трапеції дорівнює відрізку, який з'єднує середини її основ.

314. У трапеції з основами AD і BC кути ABD і ACD прямі. Доведи, що вона рівнобічна.

315. Чи правильно, що довільну трапецію можна розрізати на два чотирикутники, з яких можна скласти паралелограм?



Мал. 5.20

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

316. Виріж з паперу дві рівні трапеції і склади з них паралелограм. Скільки різних паралелограмів можна з них скласти? Чи рівні периметри таких паралелограмів?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

317. Основа рівнобедреного трикутника на 2 см менша від бічної сторони. Знайди сторони трикутника, якщо периметр трикутника, утвореного середніми лініями, дорівнює 11 см.

318. Бісектриси кутів A і B прямокутника $ABCD$ перетинаються на стороні DC . Знайди сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 24 см.

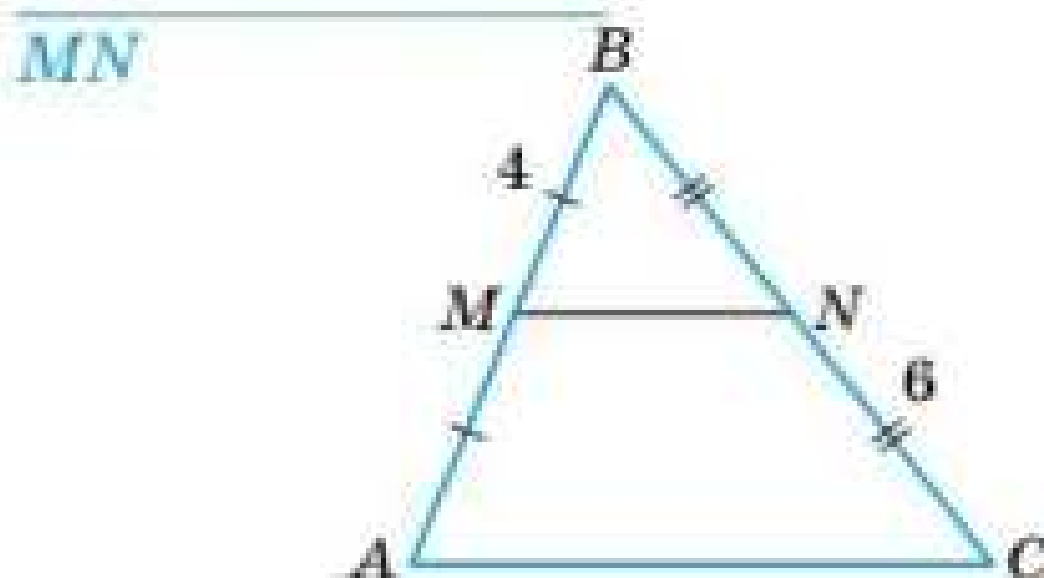
319. З точки A до кола із центром O проведено дотичні AB і AC . Доведи, що точка O лежить на бісектрисі $\angle BAC$.



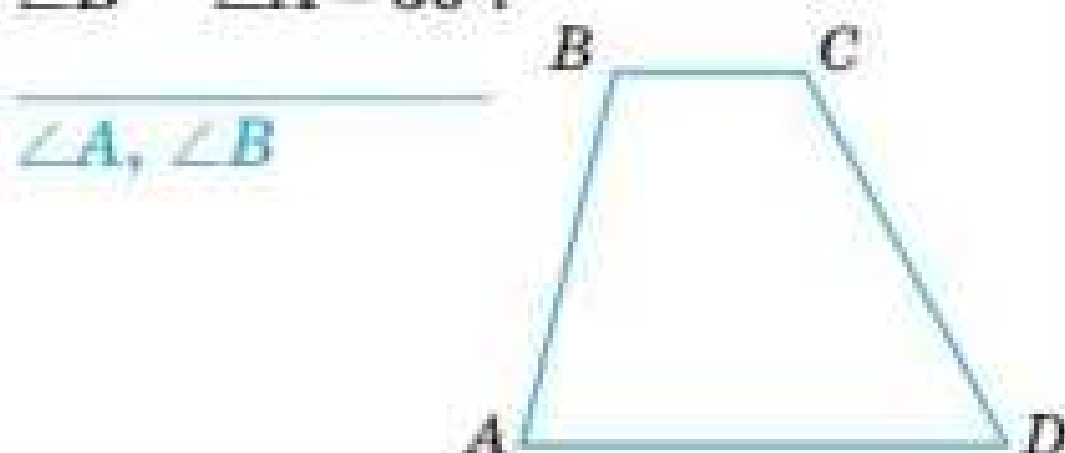
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

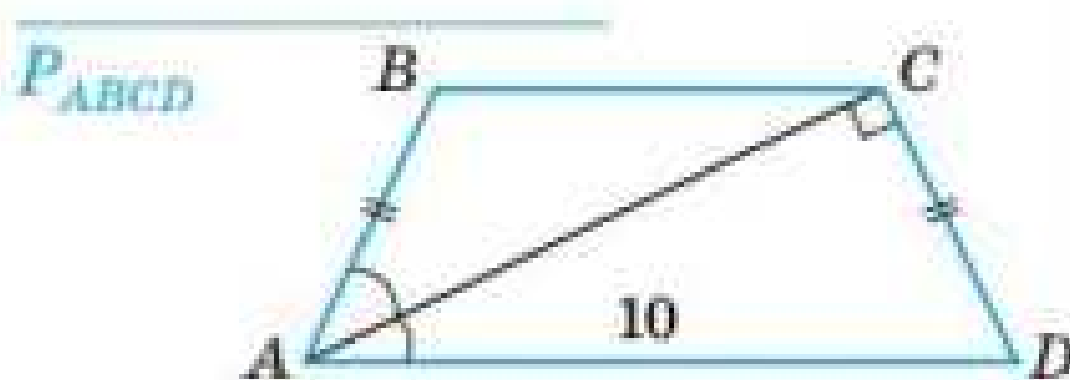
- 1 $P_{\triangle ABC} = 30$.



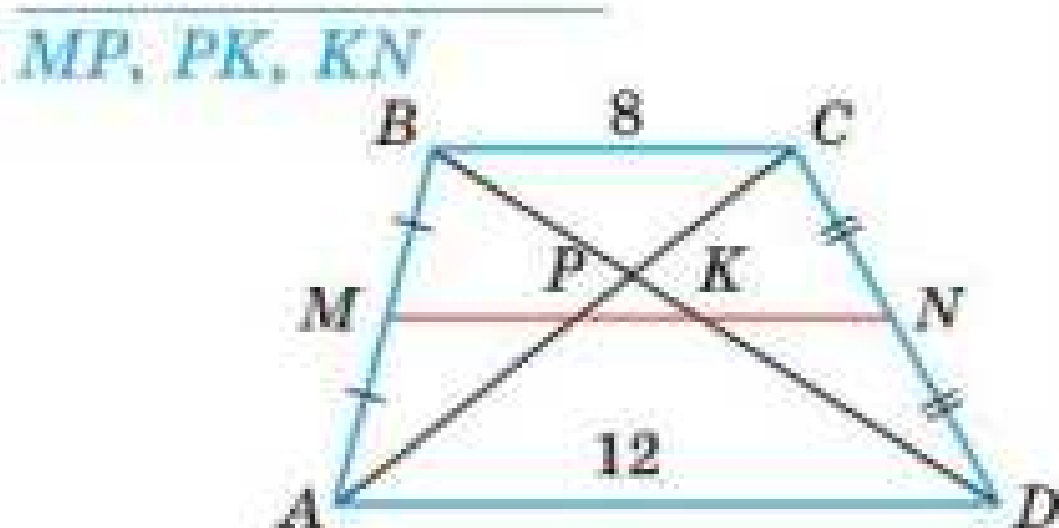
- 2 $ABCD$ — трапеція.
 $\angle B - \angle A = 30^\circ$.



- 3 $ABCD$ — трапеція.
 $AD = 10, \angle A = 60^\circ$.

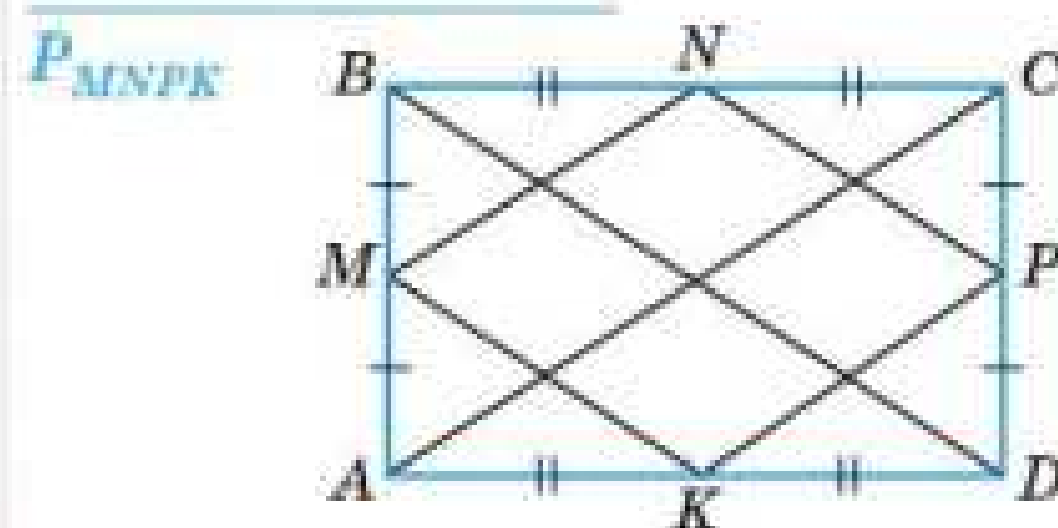


- 4 $ABCD$ — трапеція.
 $BC = 8, AD = 12$.

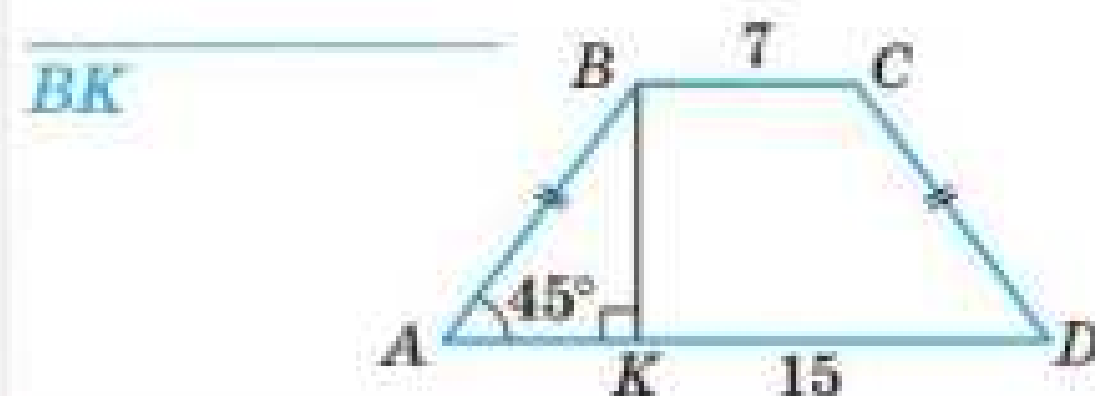


Б

- $ABCD$ — прямокутник.
 $AC = 16$.



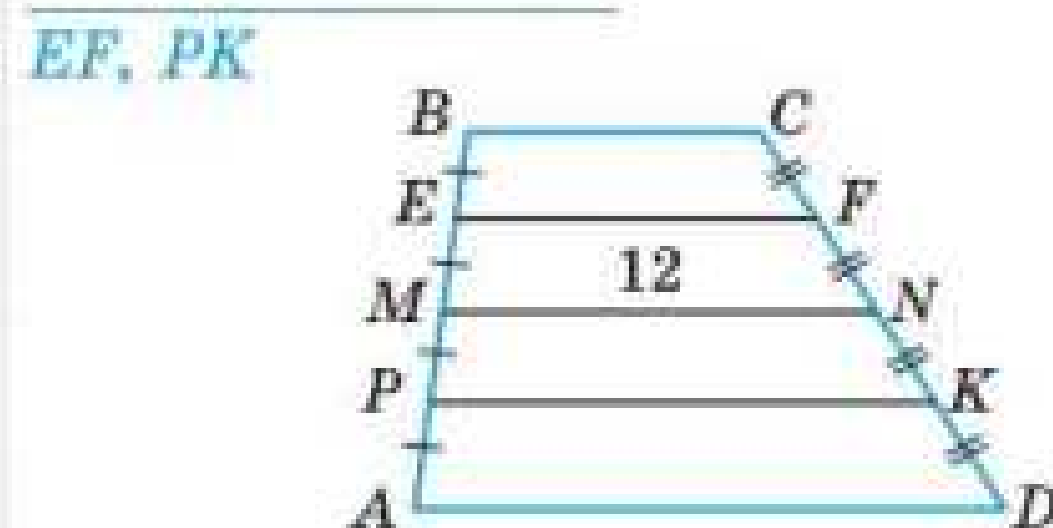
- $ABCD$ — трапеція.
 $BC = 7, AD = 15, \angle A = 45^\circ$.



- $ABCD$ — трапеція.
 $BC : AD = 2 : 3$.
 $P_{ABCD} = 66$.



- $ABCD$ — трапеція.
 $AD : BC = 5 : 3, MN = 12$.



САМОСТІЙНА РОБОТА

ВАРІАНТ 1

1. Кути трапеції дорівнюють 70° і 80° . Знайди інші кути трапеції.
2. MN — середня лінія $\triangle ABC$ ($MN \parallel AC$). Знайди периметри трикутника MBN і чотирикутника $AMNC$, якщо $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $MN = 9$ см.
3. Знайди основи трапеції, якщо вони пропорційні числам 3 і 7, а середня лінія трапеції дорівнює 25 см.
4. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайди периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 8 см, а тупий кут 120° .

ВАРІАНТ 2

1. Кути трапеції дорівнюють 40° і 130° . Знайди інші кути трапеції.
2. KP — середня лінія $\triangle ABC$ ($KP \parallel AB$). Знайди периметри трикутника KPC і чотирикутника $ABKP$, якщо $BC = 16$ см, $AC = 12$ см, $KP = 10$ см.
3. Знайди основи трапеції, якщо одна з них у 3 рази більша за другу, а середня лінія трапеції дорівнює 24 см.
4. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайди периметр трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 6 см, а гострий кут 60° .

ВАРІАНТ 3

1. Кути трапеції дорівнюють 110° і 100° . Знайди інші кути трапеції.
2. EF — середня лінія $\triangle ABC$ ($EF \parallel AC$). Знайди периметри трикутника EBF і чотирикутника $AEFC$, якщо $AB = 20$ см, $BC = 16$ см, $EF = 11$ см.
3. Знайди основи трапеції, якщо одна з них на 6 см більша за другу, а середня лінія трапеції дорівнює 10 см.
4. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайди периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 12 см, а гострий кут 60° .

ВАРІАНТ 4

1. Кути трапеції дорівнюють 50° і 115° . Знайди інші кути трапеції.
2. KP — середня лінія $\triangle ABC$ ($KP \parallel BC$). Знайди периметри трикутника AKP і чотирикутника $KBCP$, якщо $AB = 10$ см, $AC = 14$ см, $KP = 9$ см.
3. Знайди основи трапеції, якщо одна з них у 5 разів менша від другої, а середня лінія трапеції дорівнює 18 см.
4. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайди периметр трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 10 см, а тупий кут 120° .

§ 6

ЦЕНТРАЛЬНІ
І ВПИСАНІ КУТИ

Далі розглядатимемо властивості чотирикутників, вписаних в коло й описаних навколо кола. Для цього введемо поняття центрального кута і вписаного кута.

Кут, вершина якого збігається із центром кола, називають **центральним кутом**.

Сторони центрального кута ділять коло на дві дуги. Одна з них лежить у внутрішній області центрального кута. Говорять, що вона відповідає даному куту. Наприклад, виділена на малюнку 6.1, а дуга AC відповідає центральному куту AOC , і навпаки: центральний кут AOC відповідає дузі AC .

Центральний кут може бути і більшим від розгорнутого (мал. 6.1, б).

Кожна дуга кола має певну кутову міру — міру відповідного їй центрального кута. Кажуть також, що *центральний кут вимірюється дугою, яка йому відповідає*. Наприклад, якщо $\angle AOC = 60^\circ$, то і кутова міра дуги AC дорівнює 60° .

Пишуть: $\widehat{AC} = 60^\circ$.

Кутова міра всього кола дорівнює 360° .

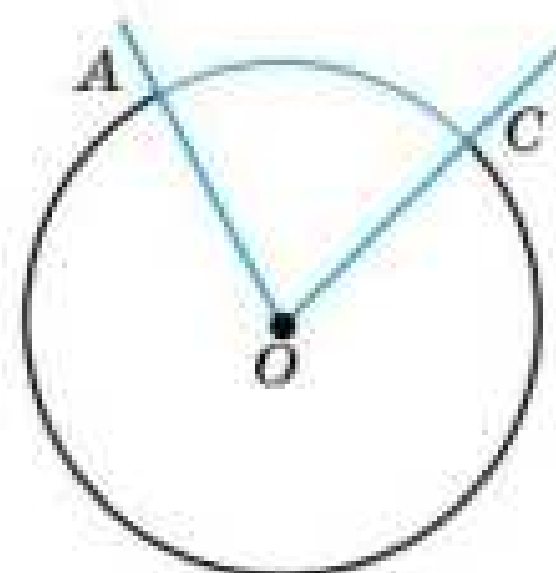
Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називають **вписаним кутом**. Якщо дуга AC лежить у внутрішній області вписаного кута ABC , то говорять, що даний вписаний кут *спирається на дугу AC* (мал. 6.2).

Теорема 10. Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

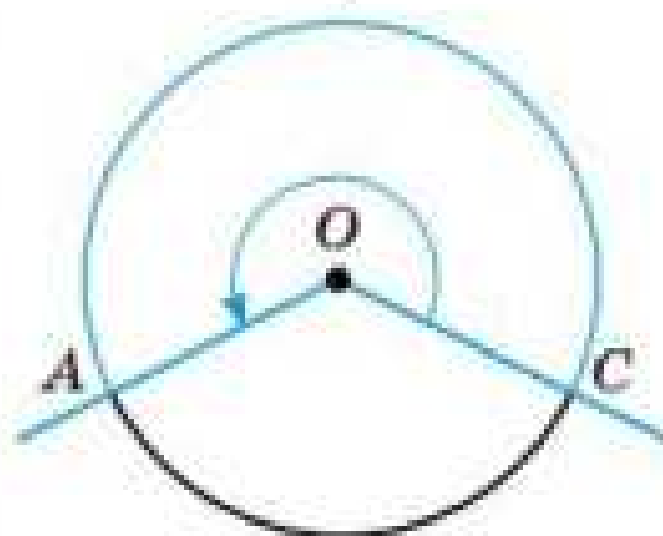
Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли одна сторона вписаного кута ABC , наприклад BC , проходить через центр кола O (мал. 6.3). Сполучивши точки A і O відрізком, одержимо трикутник AOB , у якому $OA = OB$, отже, $\angle A = \angle B$. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle AOC = \angle A + \angle B = 2\angle B$, звідки $\angle B = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \widehat{AC}$.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- central angle — центральний кут
- inscribed angle — вписаний кут
- arc — дуга

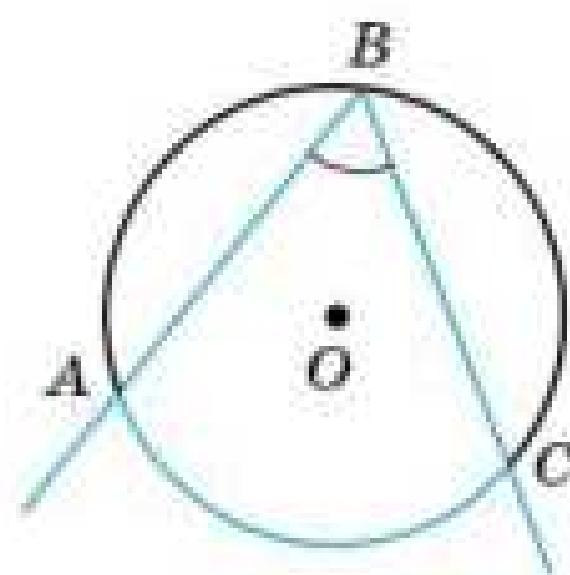


а

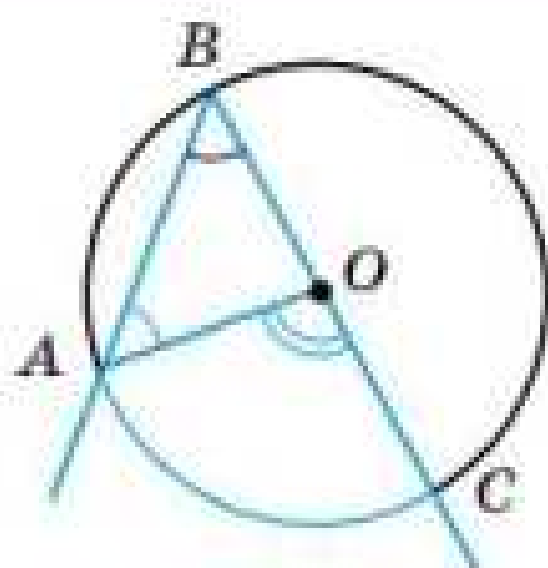


б

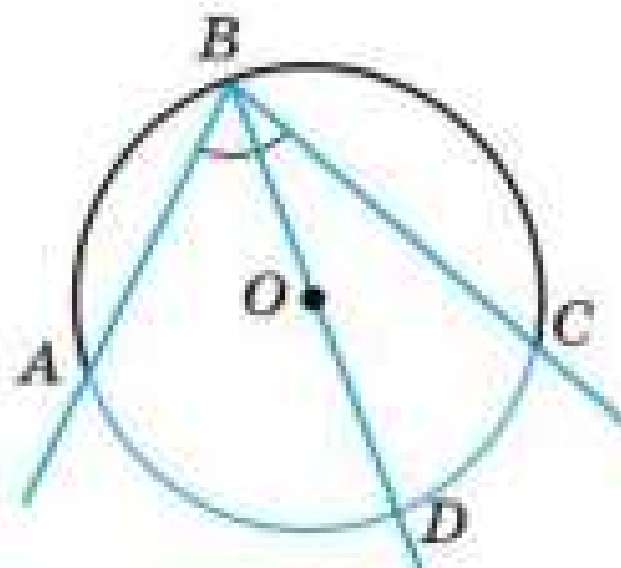
Мал. 6.1



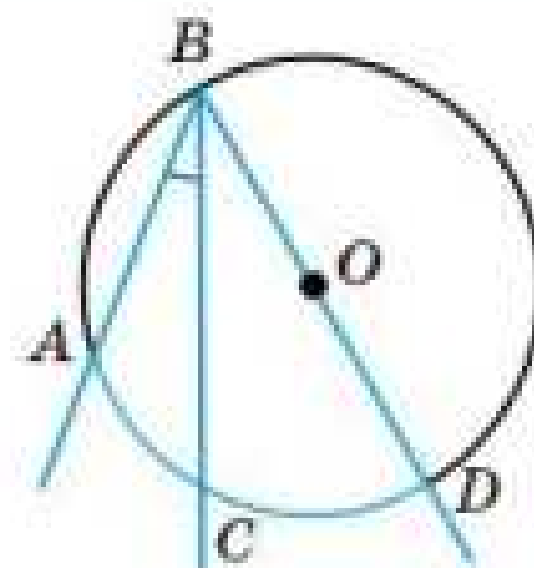
Мал. 6.2



Мал. 6.3



Мал. 6.4



Мал. 6.5

Якщо жодна зі сторін вписаного кута ABC не проходить через центр кола (мал. 6.4, 6.5), то, провівши діаметр BD , матимемо:

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \overline{AD} \text{ і } \angle DBC = \frac{1}{2} \overline{DC}.$$

Якщо центр кола лежить у внутрішній області $\angle ABC$ (див. мал. 6.4), то $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{DC}) = \frac{1}{2} \overline{AC}$.

Якщо центр кола лежить поза кутом ABC (див. мал. 6.5), то

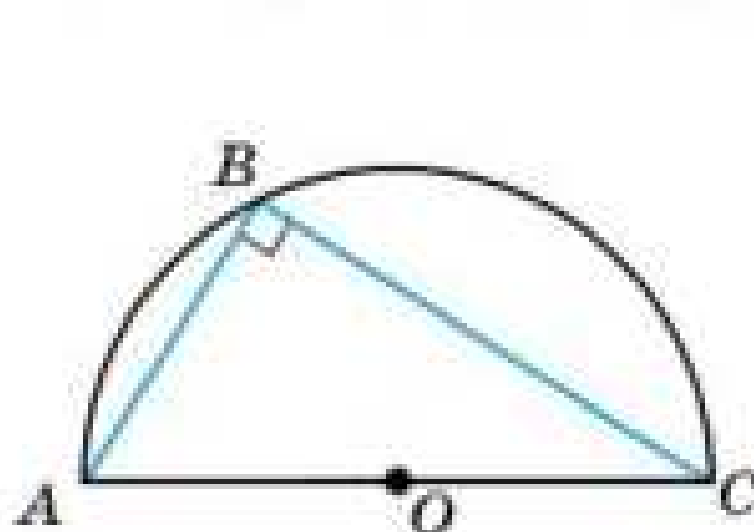
$$\angle ABC = \angle ABD - \angle DBC = \frac{1}{2} (\overline{AD} - \overline{DC}) = \frac{1}{2} \overline{AC}.$$

Розглянуто всі можливі випадки.

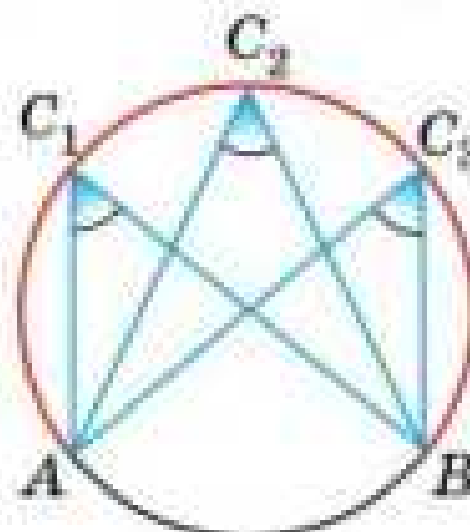
Отже, кожний вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

Наслідки

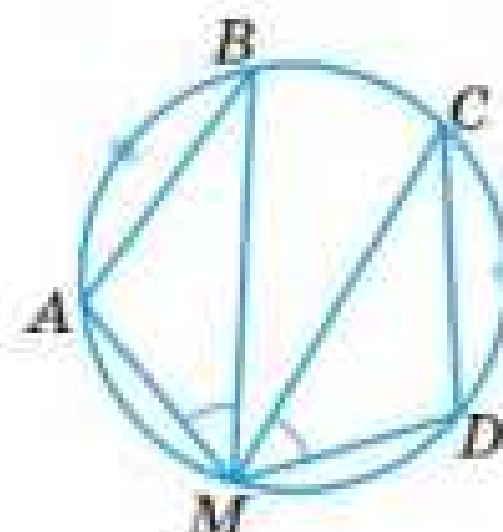
1. Вписаний кут, що спирається на діаметр, — прямий (мал. 6.6).
2. Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, — рівні (мал. 6.7).
3. Вписані кути, що спираються на рівні дуги, — рівні (мал. 6.8).



Мал. 6.6



Мал. 6.7



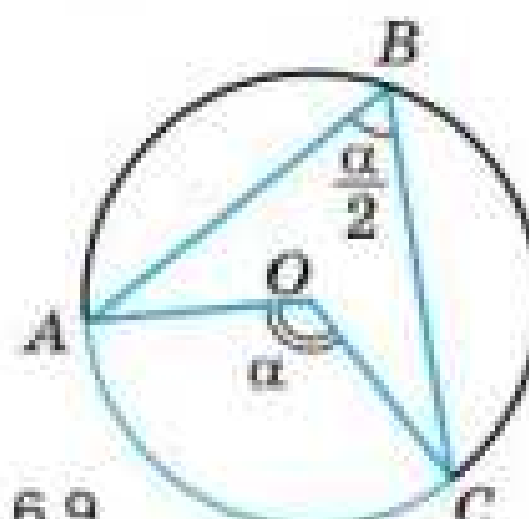
Мал. 6.8

Центральний кут AOC називають відповідним вписаному куту ABC , якщо він спирається на дугу AC , яка не містить точку B (мал. 6.9).

Теорема 11. Вписаний кут дорівнює половині відповідного центрального кута.

Доведення. Нехай $\angle AOC = \alpha$ (мал. 6.9), тоді $\overline{AC} = \alpha$. Вписаний $\angle ABC$ спирається на дугу AC .

Тому $\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$. Отже, $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$.



Мал. 6.9

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

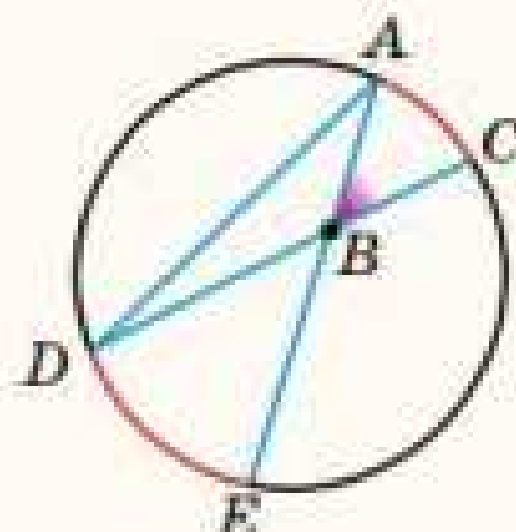
Теорема 12. Кут, вершина якого лежить усередині кола, вимірюється півсумою двох дуг, на які спираються даний і вертикальний до нього кути.

Доведення.

Нехай прямі AE і CD перетинаються в точці B , що міститься всередині кола (мал. 6.10). Доведемо, що кут ABC вимірюється півсумою дуг AC і DE .

Проведемо відрізок AD . $\angle ABC = \angle A + \angle D$ як зовнішній кут $\triangle ABD$. Кути A і D вписані, тому

$$\angle ABC = \angle A + \angle D = \frac{1}{2} \overline{DE} + \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} (\overline{DE} + \overline{AC}).$$



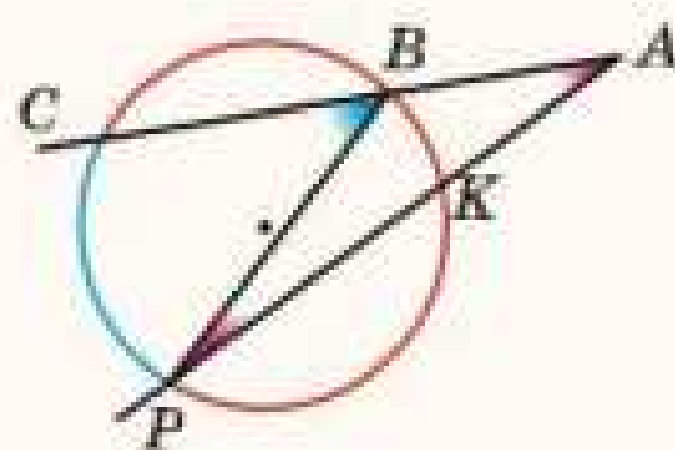
Мал. 6.10

Теорема 13. Кут, сторони якого перетинають коло, а вершина лежить поза колом, вимірюється піврізницею дуг цього кола, що лежать усередині кута.

Доведення. Нехай сторони довільного кута A перетинають коло в точках, позначених на малюнку 6.11. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle CBP = \angle A + \angle P$, звідси $\angle A = \angle CBP - \angle P$.

Кути $\angle CBP$ і $\angle P$ вписані, вони спираються відповідно на дуги CP і BK і вимірюються їх половинами. Тому

$$\angle A = \angle CBP - \angle BPK = \frac{1}{2} \overline{CP} - \frac{1}{2} \overline{BK} = \frac{1}{2} (\overline{CP} - \overline{BK}).$$



Мал. 6.11

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який кут називають: а) центральним; б) вписаним?
2. Що означає вислів «кут спирається на дугу»?
3. Як знайти міру центрального кута?
4. Сформулюй і доведи теорему про вписаний кут.
5. Яку міру має вписаний кут, що спирається на діаметр?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Доведи, що кут між хордою і дотичною, проведеною через кінець хорди, вимірюється половиною дуги, що лежить між ними.

• Нехай у колі із центром O проведено хорду AB , а через точку A — дотичну AC (мал. 6.12, а). Тоді дуга AMB , що лежить усередині кута CAB , є дугою між хордою AB і дотичною AC . Якщо M — середина дуги AB і промінь



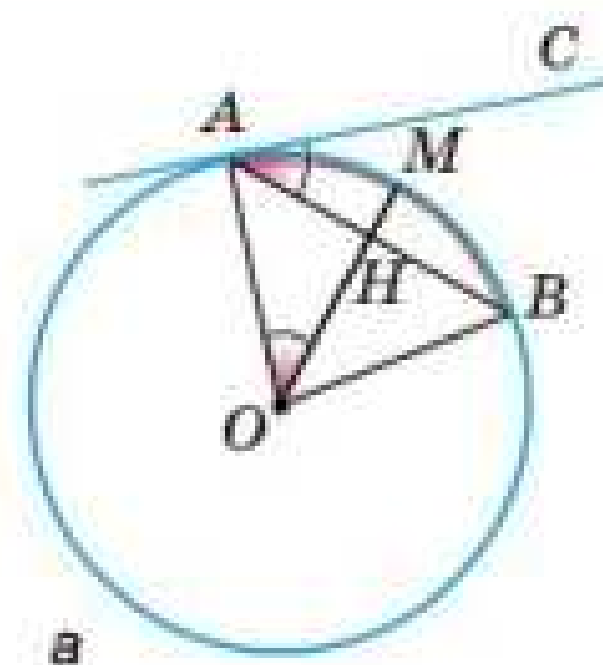
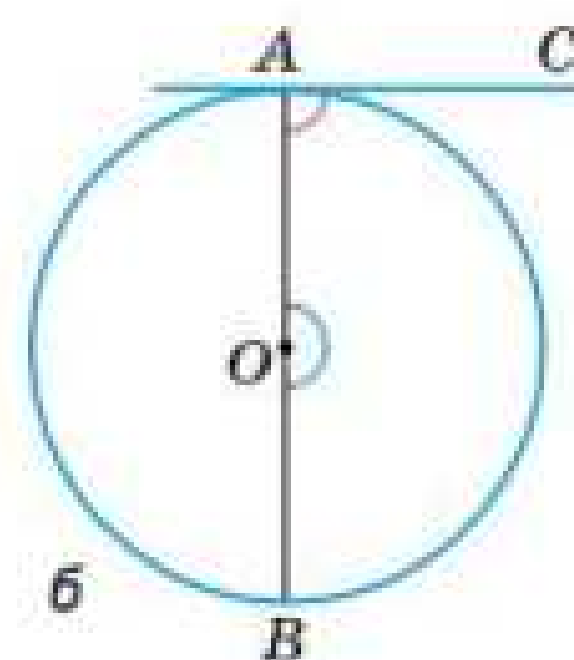
ОМ перетинає дану хорду в точці Н, то $\angle OHA = 90^\circ$. Адже ОН — бісектриса кута при вершині рівнобедреного $\triangle OAB$, а вона, як відомо, є водночас і його висотою. Оскільки $\triangle OHA = 90^\circ$, то $\angle AOH = 90^\circ - \angle OAH$.

І $\angle CAB = \angle OAC - \angle OAH = 90^\circ - \angle OAH$. Отже, кут САВ дорівнює $\angle AOM$, який вимірюється половиною дуги АМВ. Тому й кут САВ вимірюється половиною цієї дуги.

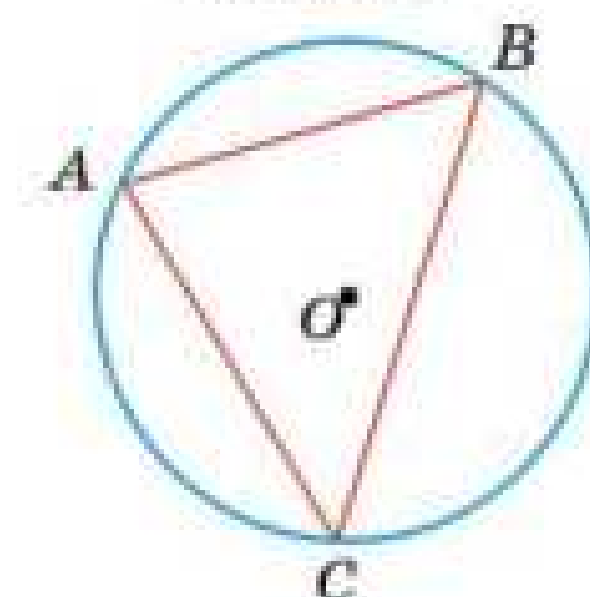
Якщо хорда АВ — діаметр кола (мал. 6.12, б), доводжуване твердження також правильне, бо в цьому випадку кут САВ прямий, а півколо, що лежить усередині цього кута, має 180° .

2. Точки А, В і С ділять коло на три дуги, одна з яких дорівнює 100° , а друга на 40° більша за третю. Знайди кути $\triangle ABC$.

- Нехай кутова міра дуги АС (мал. 6.13) дорівнює x . Тоді кутова міра дуги ВС дорівнює $x + 40^\circ$. Знаючи, що дуга АВ містить 100° , маємо рівняння $x + x + 40^\circ + 100^\circ = 360^\circ$, або $2x = 220^\circ$, звідки $x = 110^\circ$. Отже, кутова міра дуги АС дорівнює 110° , а дуги ВС — 150° . Тоді за властивістю вписаних кутів отримаємо: $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 55^\circ$, $\angle C = 50^\circ$.



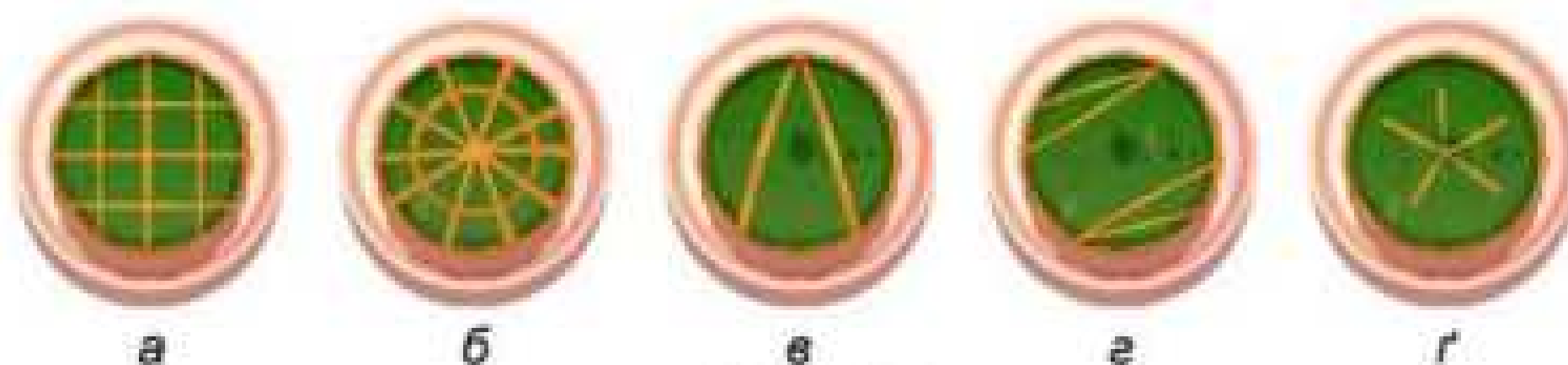
Мал. 6.12



Мал. 6.13

ВИКОНАЄМО УСНО

320. На яких малюнках (мал. 6.14) проілюстровано: а) центральний кут; б) вписаний кут?



Мал. 6.14

321. Знайди вписаний кут, якщо градусна міра дуги, на яку він спирається, дорівнює: а) 24° ; б) 40° ; в) 90° ; г) 138° .



322. Знайди центральний кут, якщо відповідний йому вписаний кут дорівнює: а) 32° ; б) 48° ; в) 62° ; г) 85° .

323. Чи може центральний кут бути тупим? А розгорнутим?

324. Вписаний кут прямий. Яким є відповідний йому центральний кут? А гострий Б прямий В тупий Г розгорнутий

325. Які значення мають бути у порожніх клітинках таблиці?

Центральний кут	60°	100°				n°
Відповідний вписаний кут			35°	120°	m°	

326. Чи може вписаний кут бути більшим за відповідний йому центральний кут?

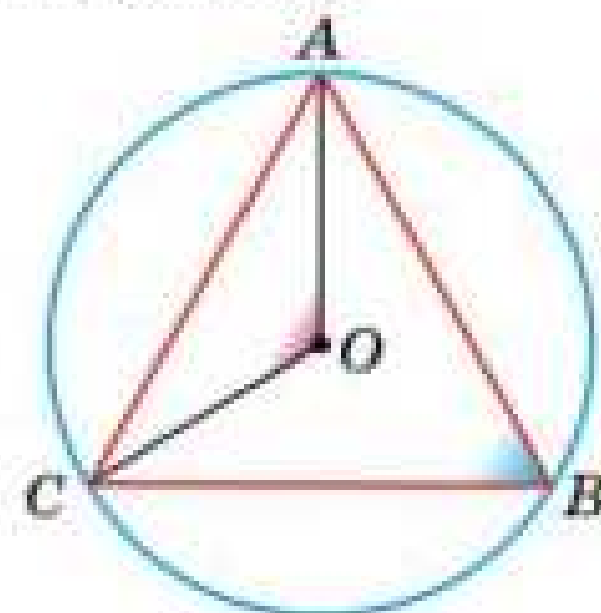
327. Чому дорівнює центральний кут, який спирається на дугу, що становить $\frac{1}{6}$ кола?

А 30° Б 60° В 90° Г 120°

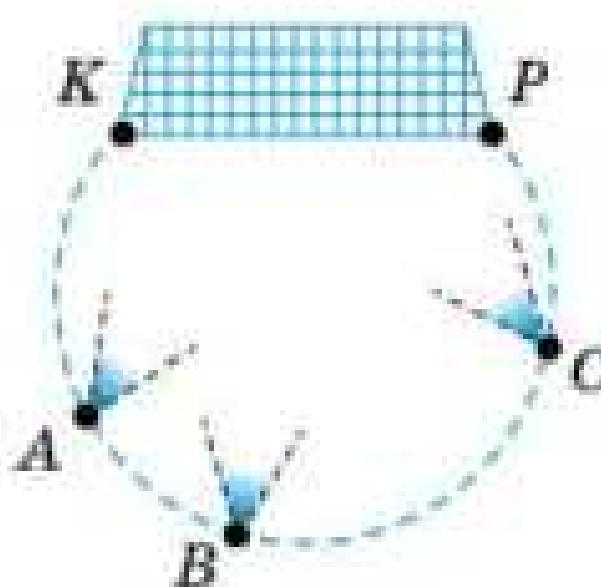
328. Коло із центром O точками A, B, C поділено на три рівні дуги. Знайди міри кутів ABC і AOC (мал. 6.15).

329. М'ячі A, B, C і штанги воріт K та P розміщені на одному колі (мал. 6.16). Який із кутів більший: KAP , KBP чи KCP ?

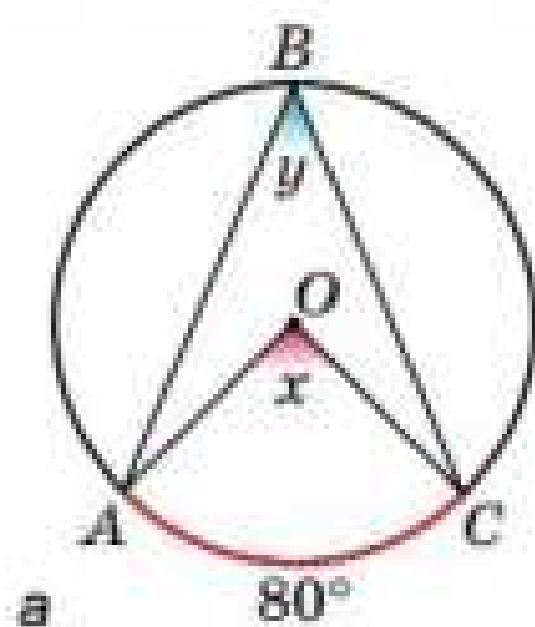
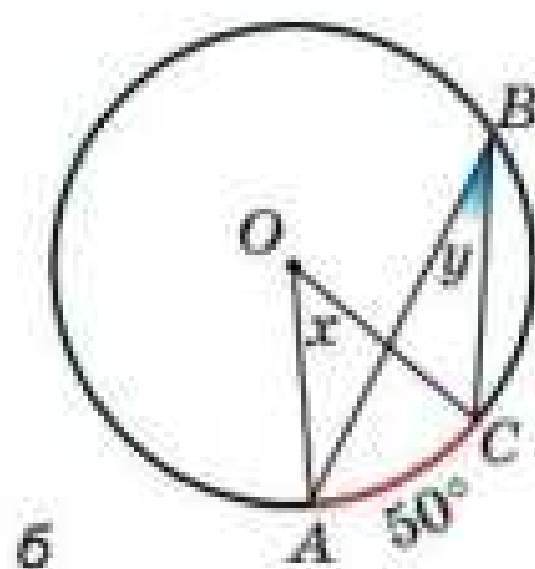
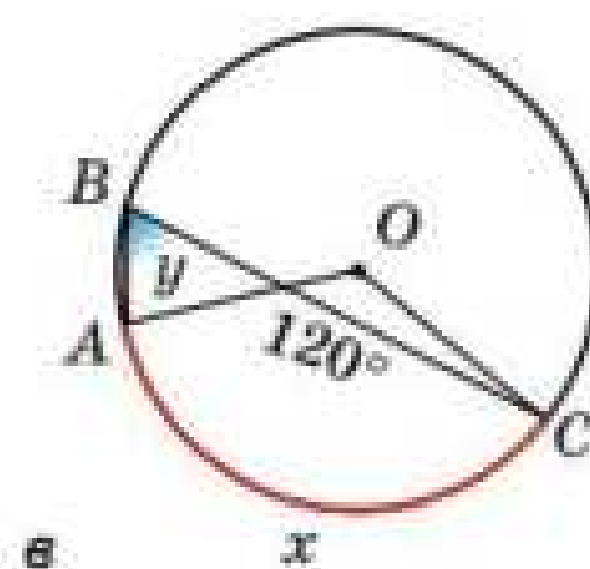
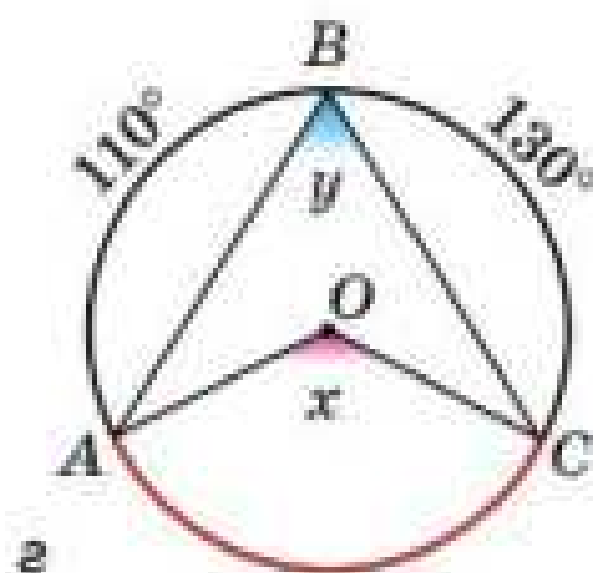
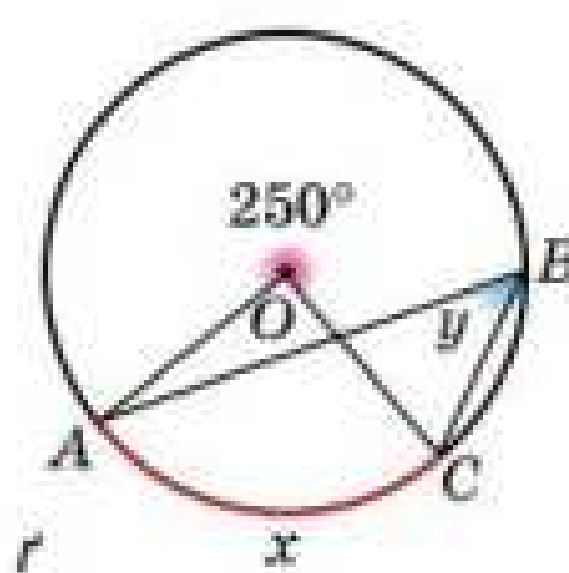
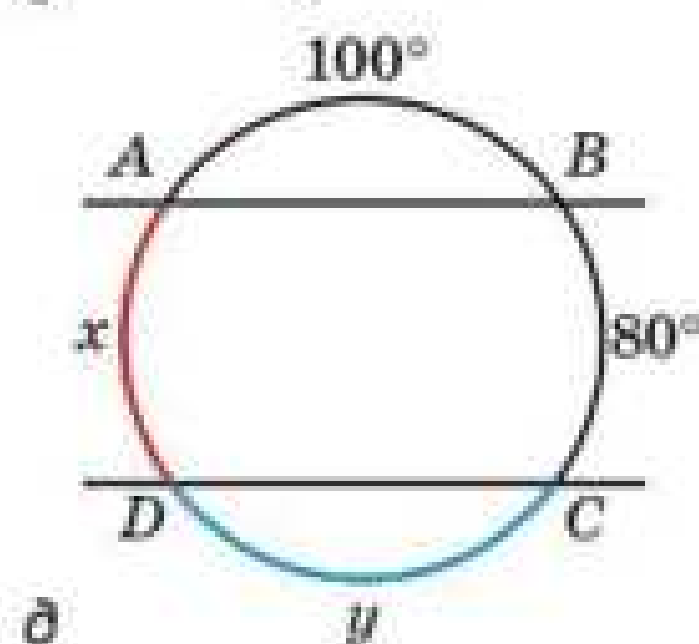
330. Користуючись малюнками 6.17, а, б, в, г, і, знайди невідомі елементи x і y .



Мал. 6.15



Мал. 6.16



Мал. 6.17

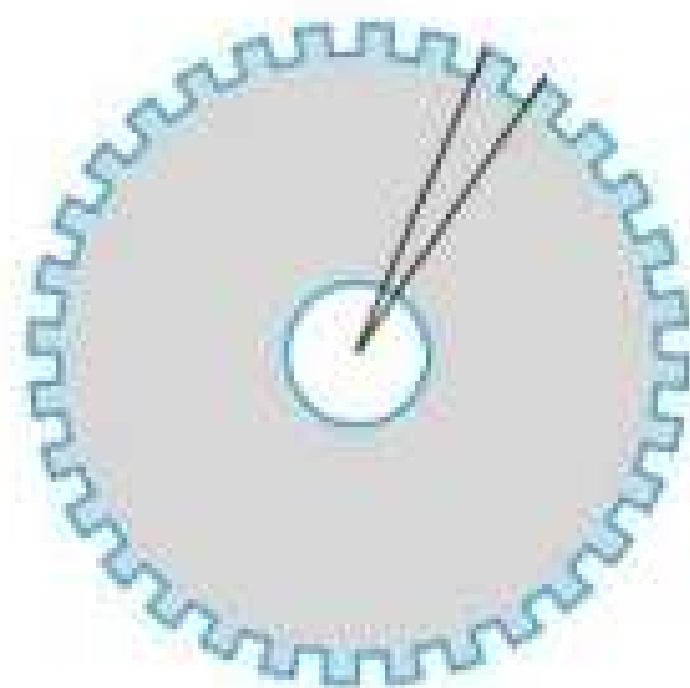
331. Знайди кутову міру: а) півкола; б) чверті кола.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А



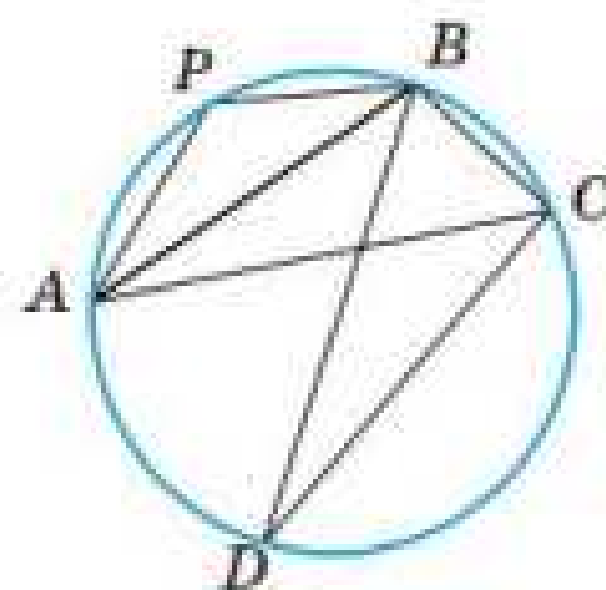
332. Познач на колі точки A і B та побудуй центральний кут, що відповідає дузі AB .
333. Познач на колі точки A , B і C та побудуй вписаний кут, що відповідає дузі AC .
334. Міра вписаного кута 70° . Знайди кутову міру дуги, на яку він спирається. Знайди міру відповідного центрального кута.
335. Міра вписаного кута 55° . Знайди кутову міру дуги, на яку він спирається. Знайди міру відповідного центрального кута.
336.  **Гра.** Один з учасників /одна з учасниць називає міру вписаного кута, а інший / інша — кутову міру дуги, на яку він спирається. Потім учасники/учасниці міняються ролями.
337. Міра центрального кута 130° . Знайди кутову міру дуги, на яку він спирається. Знайди міру відповідного вписаного кута.
338. Міра центрального кута 80° . Знайди кутову міру дуги, на яку він спирається. Знайди міру відповідного вписаного кута.
339. Знайди міру вписаного кута, який спирається на третю частину кола.
340. Знайди міру вписаного кута, який спирається на п'яту частину кола.
341.  Як співвідносяться кутові міри дуг, на які коло розбиває його центральний кут 60° ?
342. Як співвідносяться кутові міри дуг, на які коло розбиває його центральний кут 120° ?
343. Який центральний кут більший за відповідний йому вписаний кут на 70° ?
344. Який центральний кут більший за відповідний йому вписаний кут на 25° ?
345. Шестерня (мал. 6.18) має 32 зубці. Знайди міру центрального кута, який відповідає одному зубцеві і западині.
346. У колі проведено дві хорди AB і AC . Знайди міру кута BAC , якщо кутові міри дуг AC і AB дорівнюють $32^\circ 15'$ і $78^\circ 45'$.
347. У колі проведено дві хорди MK і MP . Знайди міру кута KMP , якщо кутові міри дуг MK і MP дорівнюють $17^\circ 42'$ і $105^\circ 18'$.
348. Кут між двома радіусами кола дорівнює 105° . Знайди кут між дотичними, проведеними через кінці цих радіусів.



Мал. 6.18

349. Дві точки ділять коло у відношенні 11 : 13. Знайди кут між дотичними, що проходять через ці точки.
350. Дві точки ділять коло на дві дуги, градусна міра однієї з яких на 40° більша за градусну міру другої. Знайди кут між дотичними, що проходять через ці точки.
351. Коло точками $A, B, C, \dots, K$ поділено на 10 рівних дуг. Знайди міри кутів: AKB, AKC, KAB, KAC .
352. Навколо трикутника ABC , у якого $\angle A = 40^\circ, \angle B = 60^\circ$, описано коло. Знайди кутові міри дуг AB, BC і CA .
353. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 40° . Знайди кутові міри дуг, на які вершини трикутника розбивають описане коло.
354. Точки A, B і C ділять коло на три дуги, кутові міри яких пропорційні числам 6, 7 і 11. Знайди кути трикутника ABC .
355. Хорда ділить коло на дві дуги, одна з яких у 5 разів більша за другу. Знайди міри вписаних кутів, які опираються на цю хорду.
356. A chord divides a circle into two arcs, one of which is 2 times larger than the other. Find the measures of the inscribed angles that are based on this chord.
357. Хорда ділить коло на дві дуги, одна з яких на 46° менша від другої. Знайди міри вписаних і центральних кутів, які опираються на цю хорду.
358. BD — діаметр кола, точки A, P і C лежать на колі (мал. 6.19). Установи відповідність між кутами, заданими умовами (1–4), та їх градусними мірами (А–Д), якщо $\angle ABD = 40^\circ$.

1 $\angle ACD$	А 20°
2 $\angle ADB$	Б 40°
3 $\angle APB$	В 50°
4 $\angle BCD$	Г 90°
	Д 130°



Мал. 6.19

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

359. Доведи, що рівні хорди стягують рівні дуги.
360. Доведи, що коли дві дуги кола рівні, то рівні і хорди, які їх стягують.



361. **НМТ** Рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) вписано в коло (мал. 6.20). Визнач градусну міру меншої дуги AB , якщо $\angle ABC = 20^\circ$.

362. На стороні AC $\triangle ABC$, як на діаметрі, побудовано коло, яке перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Доведи, що AN і CM — висоти $\triangle ABC$.

363. На стороні AC $\triangle ABC$ як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає сторону BC у точці M так, що $BM = CM$. Доведи, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

364. На стороні AC $\triangle ABC$, як на діаметрі, побудовано коло, яке перетинає сторону AB у точці P так, що $\angle ACP = \angle BCP$. Доведи, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

365. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 40° . На бічній стороні, як на діаметрі, побудовано півколо, яке ділиться сторонами трикутника на 3 частини. Знайди кутові міри утворених дуг.

366. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 50° . На бічній стороні, як на діаметрі, побудовано півколо, яке ділиться сторонами трикутника на 3 частини. Знайди кутові міри утворених дуг.

367. Коло, вписане в $\triangle ABC$, дотикається до нього у точках M , N , K . Знайди кути $\triangle MNK$, якщо $\angle A = 56^\circ$, $\angle B = 48^\circ$.

368. Кути $\triangle ABC$ пропорційні числам 2, 3 і 5. Яким числам пропорційні кути $\triangle EFK$, якщо E , F і K є точками, у яких коло, вписане в $\triangle ABC$, дотикається до його сторін?

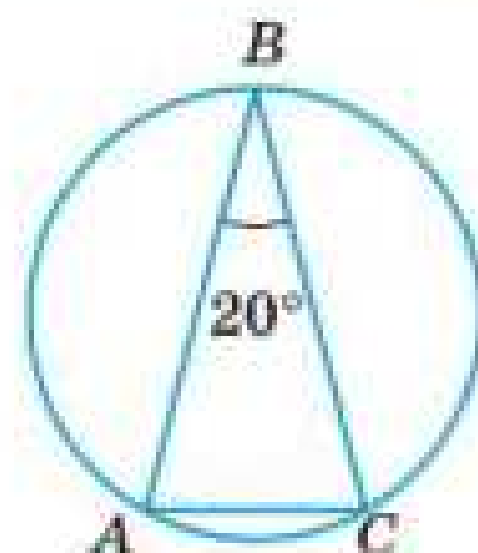
369. **Відкрита задача.** Дві рівні непаралельні хорди AB і CD не мають спільних точок. Доведи, що $ABCD$ — ...

370. Хорди AB і PK перетинаються в точці C так, що $\widehat{AK} = 42^\circ$, $\widehat{BP} = 106^\circ$. Знайди $\angle ACK$.

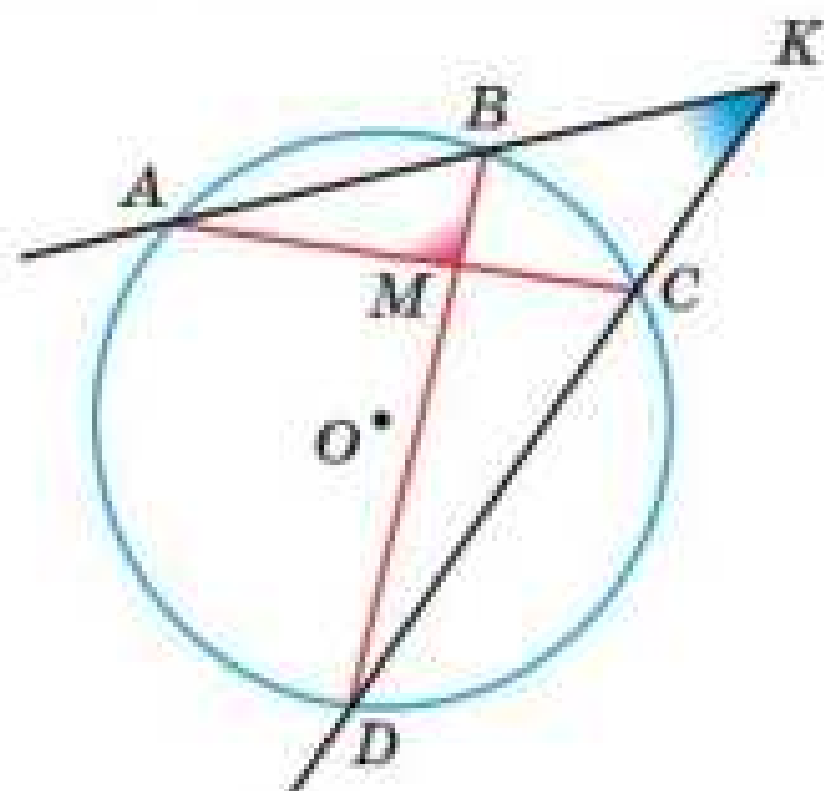
371. Хорди AB і CD перетинаються в точці M , $\angle AMC = 80^\circ$. Знайди кутові міри дуг AC і BD , якщо дуга BD на 20° більша за дугу AC .

372. Хорди MB і KP перетинаються в точці O , $\angle POB = 66^\circ$. Знайди кутові міри дуг MK і BP , якщо дуга BP у 2 рази більша за дугу MK .

373. На колі послідовно взято точки A , B , C , D , які ділять коло на частини, пропорційні числам 6, 5, 12 і 13. Знайди $\angle AMB$ і $\angle AKD$, де M — точка перетину хорд AC і BD , а K — точка перетину прямих AB і CD (мал. 6.21).

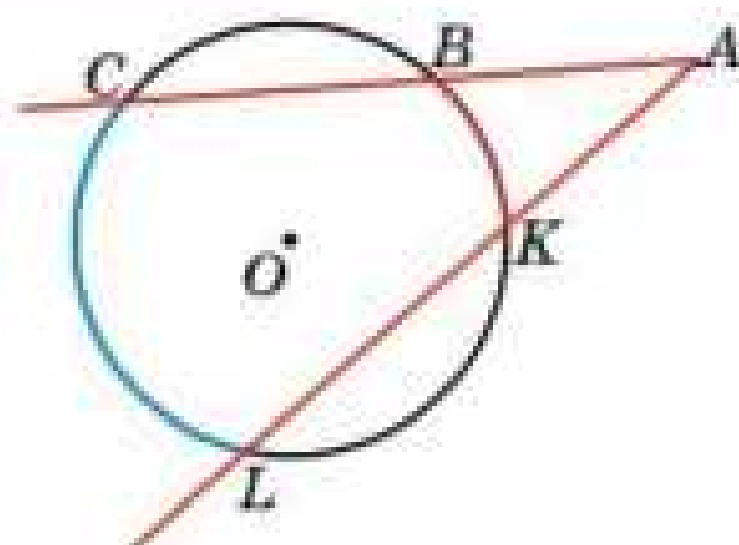


Мал. 6.20



Мал. 6.21

374. Сторони $\angle A = 40^\circ$ перетинають коло в точках B, C, K і L (мал. 6.22). Знайди кутові міри дуг CL і BK , якщо $\widehat{CB} = \widehat{LK} = 100^\circ$.



Мал. 6.22

375. Через кінець хорди, яка ділить коло у відношенні $3 : 5$, проведено дотичну. Знайди гострий кут між даною хордою і дотичною.

376. Через кінець хорди, яка ділить коло на дві дуги, одна з яких на 80° більша за другу, проведено дотичну. Знайди гострий кут між даною хордою і дотичною.

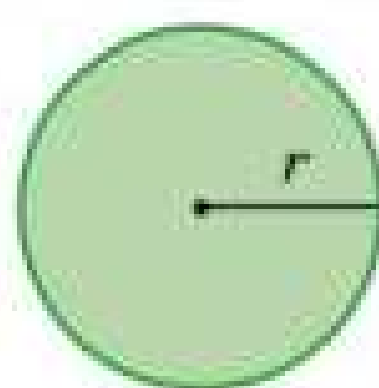
377. Якщо дві рівні хорди перетинаються і одна з них точкою перетину ділиться на відрізки m і n , то на такі самі відрізки ділиться і друга хорда. Доведи.

378. Як, маючи лише косинець, знайти центр кола?

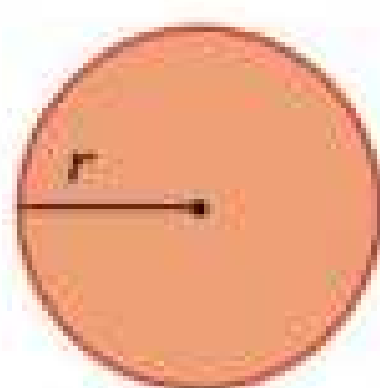


ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

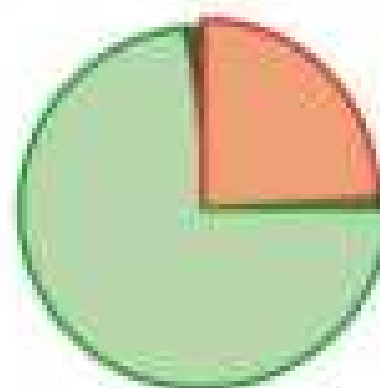
379. Із цупкого різнокольорового паперу виріж два кола одного радіуса. Розріж кожен із них по радіусу (мал. 6.23, а). Вклади один круг в інший через прорізи, щоб утворився центральний кут, як на малюнку 6.23, б. Покажи за допомогою виготовленої моделі центральні кути: а) 180° ; б) 120° ; в) 45° ; г) 30° .



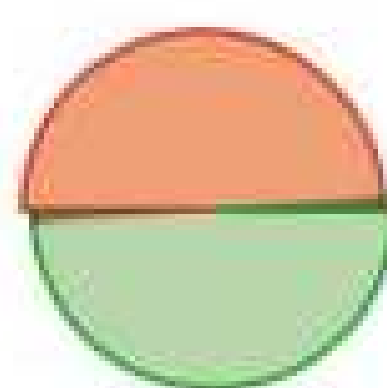
а



Мал. 6.23



б



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

380. Обчисли кути рівнобічної трапеції, якщо один з них на 42° більший за інший.

381. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 15 см. Знайди периметр трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60° .

382. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 23,6 см, а висота — 11,8 см. Знайди тупий кут між бісектрисами кутів при основі. Скільки розв'язків має задача?



§ 7

ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ
ЧОТИРИКУТНИКИ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

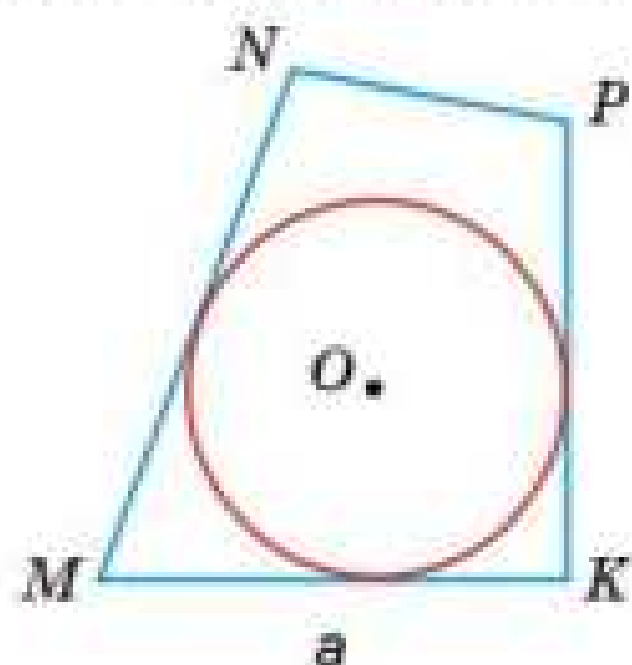
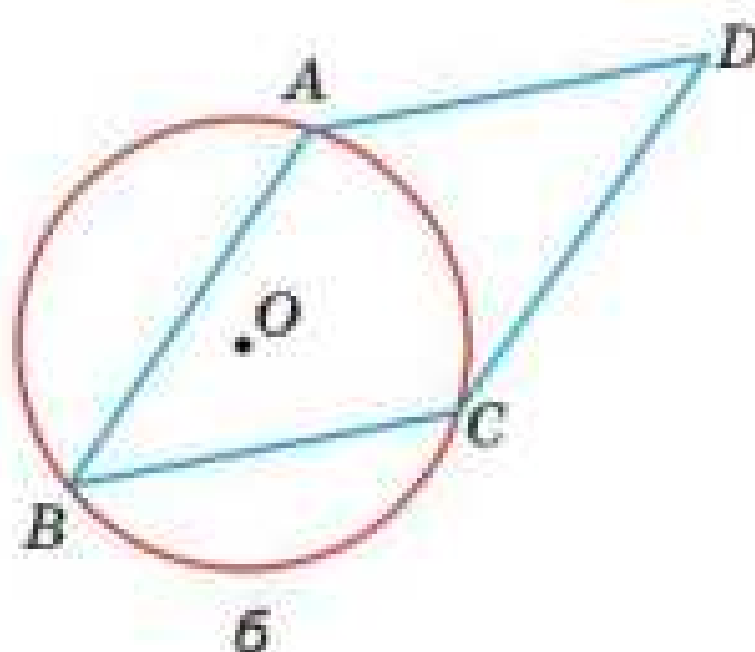
- inscribed quadrilateral — вписані чотирикутники
- circumscribed quadrilateral — описані чотирикутники
- consecutive sides — сусідні сторони
- opposite sides — протилежні сторони

Якщо всі вершини чотирикутника лежать на колі, його називають **вписаним у коло**, а коло — **описаним навколо чотирикутника**.

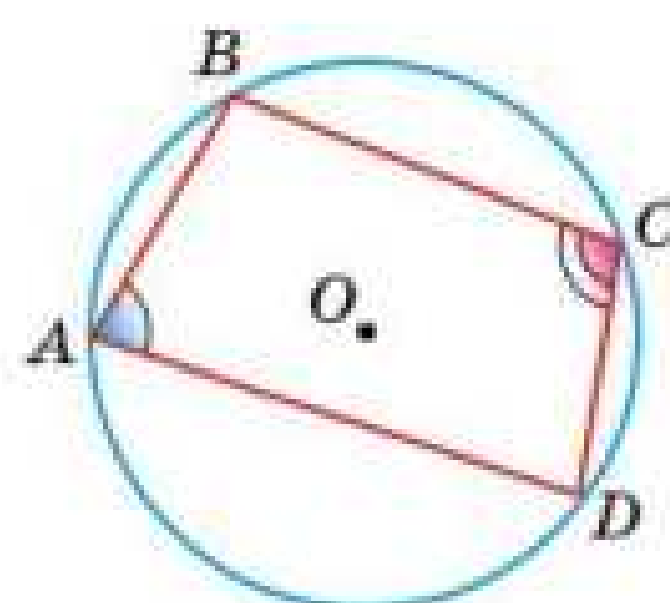
Якщо коло дотикається до всіх сторін чотирикутника, такий чотирикутник називають **описаним**, а коло — **вписаним у чотирикутник**.

Як і в трикутнику, центр кола, вписаного в чотирикутник, знаходиться в точці перетину бісектрис його кутів, а центр кола, описаного навколо чотирикутника, — у точці перетину серединних перпендикулярів, проведених до його сторін.

Не в кожний чотирикутник можна вписати коло і не навколо кожного чотирикутника — описати коло (мал. 7.1, а, б).



Мал. 7.1



Мал. 7.2

Розглянемо найважливіші властивості чотирикутників, описаних навколо кола і вписаних у коло.

Теорема 14. Сума двох протилежних кутів чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює 180° .

Доведення. Нехай $ABCD$ — вписаний у коло чотирикутник (мал. 7.2). Його протилежні кути A і C вписані. Перший вимірюється половиною дуги BAD , другий — половиною дуги BCD . Сума кутів A і C вимірюється півсумою цих дуг, тобто півколом. Півколу відповідає 180° . Отже, $\angle A + \angle C = 180^\circ$.



Аналогічно можна показати, що $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Для сформульованої теореми правильна також обернена теорема.

Теорема 15. Якщо сума двох протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180° , то цей чотирикутник можна вписати в коло.

Доведення цієї теореми дивись у рубриці «Для допитливих».

Наслідки

1. Навколо кожного прямокутника можна описати коло.
2. Навколо кожної рівнобічної трапеції можна описати коло.

Сформулюємо теореми 14 і 15 у вигляді однієї теореми:

Чотирикутник вписаний в коло тоді й тільки тоді, коли сума двох його протилежних кутів дорівнює 180° .

Теорема 16. Якщо чотирикутник описаний навколо кола, то сума двох його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін.

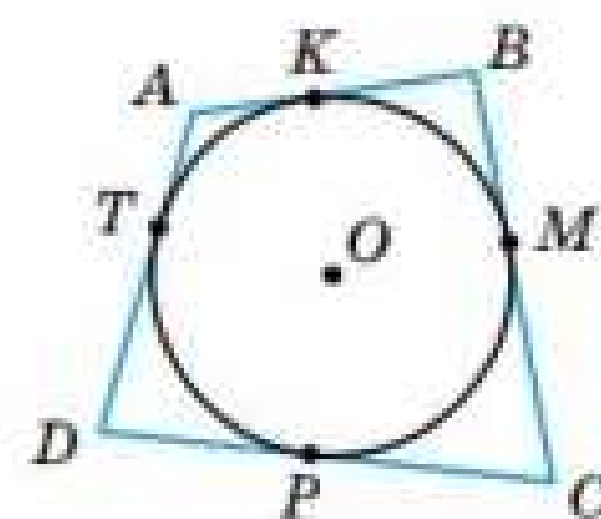
Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола. Доведемо, що $AB + CD = BC + AD$ (мал. 7.3). Позначимо точки дотику сторін чотирикутника до вписаного кола буквами K, M, P, T . Оскільки відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні, то

$$AK = AT, BK = BM, CP = CM, DP = DT.$$

Додавши почленно всі ці рівності, дістаємо:

$$AK + BK + CP + DP = BM + CM + DT + AT, \text{ або } AB + CD = BC + AD.$$

Має місце і обернена теорема.



Мал. 7.3

Теорема 17. Якщо сума двох протилежних сторін опуклого чотирикутника дорівнює сумі двох інших його сторін, то такий чотирикутник можна описати навколо кола.

Цю теорему можна довести методом від супротивного. Спробуй зробити це самостійно.

Теореми 16 і 17 сформулюємо у вигляді однієї теореми:

Опуклий чотирикутник описаний навколо кола тоді й тільки тоді, коли сума двох його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших сторін.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Подібність трикутників. Урок 3).

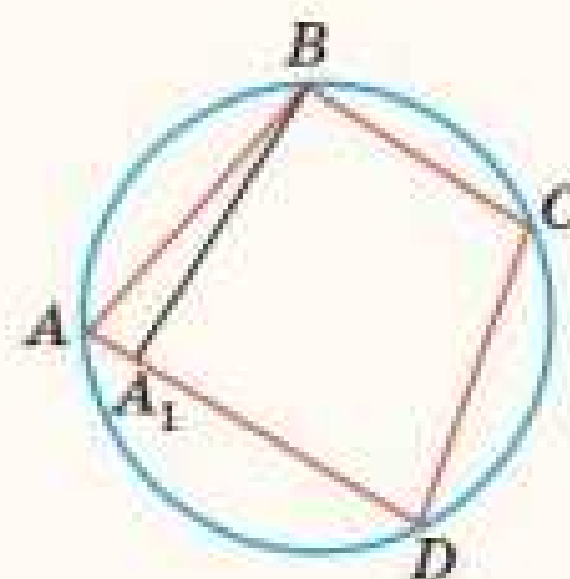


ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Доведемо твердження, сформульоване в теоремі 15.

Якщо сума двох протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180° , то цей чотирикутник можна вписати в коло.

Доведення. Нехай дано чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A + \angle C = 180^\circ$ (мал. 7.4). Покажемо, що навколо нього можна описати коло. Через точки B , C і D можна описати єдине коло. Воно обов'язково пройде і через точку A . Бо коли б це коло перетинало пряму AD не в точці A , а в іншій точці A_1 , то був би вписаний чотирикутник A_1BCD , і ми б мали: $\angle BA_1D + \angle C = 180^\circ$. За умовою $\angle BAD + \angle C = 180^\circ$. Із цих двох рівностей випливає, що $\angle BAD = \angle BA_1D$, тобто зовнішній кут трикутника AA_1B дорівнює його внутрішньому куту. Цього не може бути. Отже, зроблене припущення неправильне. За умови $\angle A + \angle C = 180^\circ$ коло, яке проходить через точки B , C , D , обов'язково проходить і через точку A .



Мал. 7.4

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який чотирикутник називають вписаним у коло?
2. Який чотирикутник називають описаним навколо кола?
3. Чи в будь-який чотирикутник можна вписати коло?
4. Чи навколо будь-якого чотирикутника можна описати коло?
5. Поясни, яку властивість мають кути чотирикутника, вписаного в коло.
6. Поясни, яку властивість мають сторони чотирикутника, описаного навколо кола.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. У коло вписано чотирикутник, два послідовні кути якого дорівнюють 100° і 90° . Знайди міри двох інших його кутів.

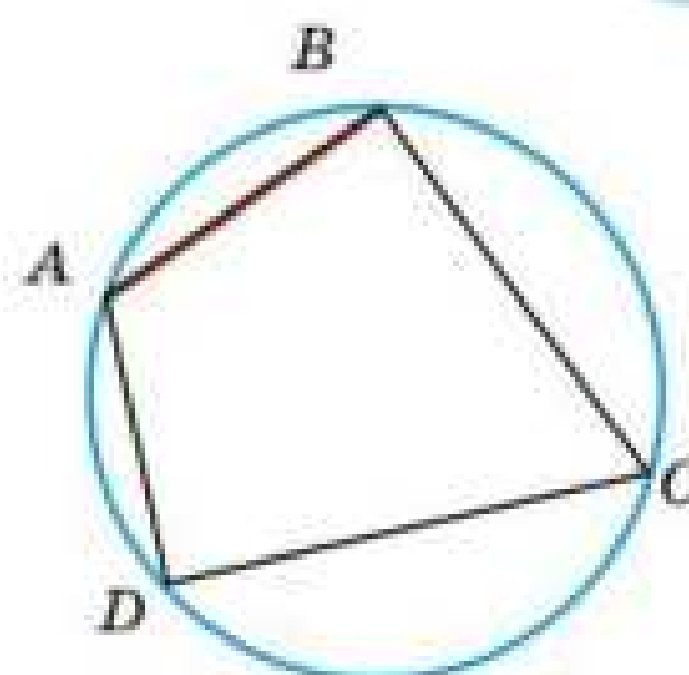
• Нехай у вписаному чотирикутнику $ABCD$
 $\angle A = 100^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ (мал. 7.5).

Тоді

$$\begin{aligned}\angle C &= 180^\circ - \angle A = 80^\circ, \\ \angle D &= 180^\circ - \angle B = 90^\circ.\end{aligned}$$

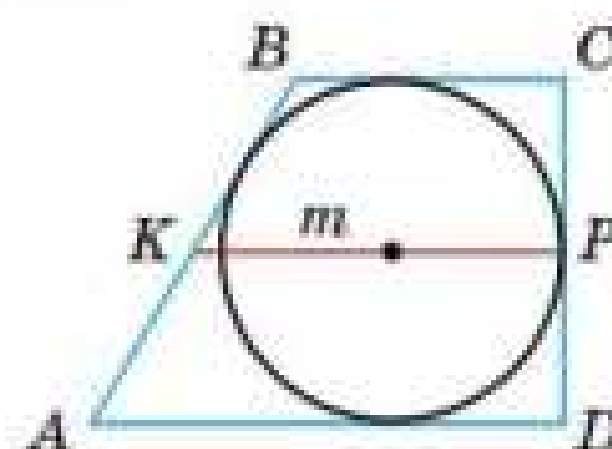
2. Середня лінія трапеції, описаної навколо кола, дорівнює m . Знайди периметр трапеції.

• Сума основ трапеції вдвічі більша від її середньої лінії, тому дорівнює $2m$. В опи-



Мал. 7.5

саному чотирикутнику сума двох протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін (мал. 7.6). Тому сума бічних сторін трапеції також дорівнює $2m$. А периметр трапеції дорівнює $4m$.



Мал. 7.6

ВИКОНАЄМО УСНО

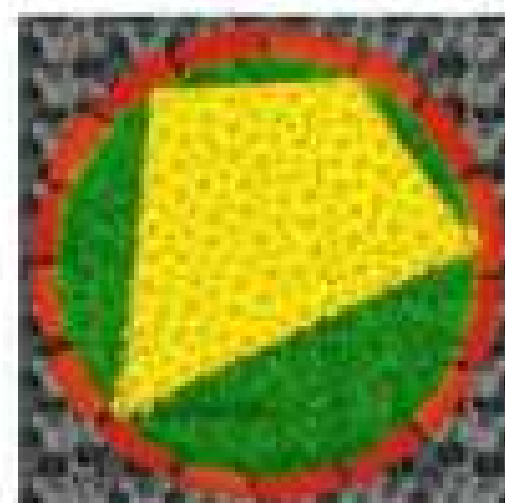


- 383.** Сформулюй іншими словами: «чотирикутник вписано в коло», «коло вписано в чотирикутник».
- 384.** Чи правильно, що кожний описаний чотирикутник опуклий? Чи правильне обернене твердження?
- 385.** Наведіть приклад чотирикутника, який є:
а) водночас вписаним і описаним;
б) вписаним, але не є описаним;
в) описаним, але не є вписаним.
- 386.** Три послідовні кути вписаного чотирикутника дорівнюють 70° , 100° і 110° . Знайди міру четвертого кута.
А 70° Б 80° В 90° Г 100°
- 387.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 12 см. Знайди бічну сторону трапеції, якщо в неї можна вписати коло.
А 20 см Б 10 см В 5 см Г 40 см
- 388.** Знайди сторону квадрата, описаного навколо кола радіуса 3 см.
А 3 см Б 6 см В 1,5 см Г 9 см
- 389.** Знайди діагональ квадрата, вписаного в коло радіуса r .
- 390.** Доведи, що навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.
- 391.** Чи правильно, що коло, описане навколо чотирикутника $ABCD$, є також описаним навколо трикутника ABC ?
- 392.** Чи правильно, що коло, вписане в чотирикутник $ABCD$, є також вписаним у трикутник ABC ?
- 393.** Проаналізуй частину коду в Python. Які значення мають стояти в двох останніх рядках, щоб утворився квадрат, у який вписане коло?

```
turtle.forward(100)
turtle.left(90)
turtle.forward(100)
turtle.left(90)
turtle.forward(100)
turtle.left(90)
turtle.forward(100)
turtle.left(90)
turtle.forward( )
turtle.circle( )
```

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А



Мал. 7.7

394. Два послідовні кути вписаного чотирикутника дорівнюють 67° і 112° . Знайди два інші його кути.

395. Гра. Кожен з двох перших учнів/кожна з двох перших учениць називає міру двох послідовних кутів вписаного чотирикутника. Два наступні гравці/дві гравчині мають назвати міри двох інших кутів.

396. Два послідовні кути чотирикутної клумби на мал. 7.7 дорівнюють 80° і 120° . Знайди два інші її кути.

397. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого, взяті послідовно, пропорційні числам: а) 2, 5, 7 і 4; б) 3, 4, 7 і 5?

398. Чи можна описати коло навколо прямокутної трапеції? Чому?

399. Доведи, що вписана в коло трапеція рівнобічна.

400. Три послідовні сторони описаного чотирикутника дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см. Знайди четверту сторону.

401. The three consecutive sides of the quadrilateral are 7 in, 10 in and 15 in. Find the fourth side.

402. Три послідовні сторони описаного чотирикутника пропорційні числам 3, 4 і 6. Знайди їх, якщо довжина четвертої сторони дорівнює 20 см.

403. Три послідовні сторони описаного чотирикутника пропорційні числам 3, 6 і 7, а його периметр 40 м. Знайди довжину четвертої сторони.

404. **ЗНО** Чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола. $AB = 12$ см, $BC = 8$ см, $CD = 18$ см. Знайди довжину сторони AD .

405. Доведи, що точка перетину діагоналей квадрата є центром кола, вписаного у квадрат.

406. В Українських Карпатах, у Стрийському районі Львівської області, можна відвідати середньовічну наскельну фортецю-град і митницю XII–XVI століть Тустань (мал. 7.8, 7.9). До наших днів збереглися лише скелі, але знахідки свідчать, що потрапити у фортецю



Мал. 7.8



Мал. 7.9

можна було через міст, що опускався і підіймався за допомогою механізму, зображеного на мал. 7.9. Спробуйте пояснити, як працював механізм. Доведіть, що точка перетину діагоналей квадрата буде центром кола, описаного навколо квадрата (мал. 7.10).



Мал. 7.10

407. Доведи, що центр кола, описаного навколо прямокутника, знаходиться в точці перетину його діагоналей.

408. Менша сторона прямокутника дорівнює 5 см і утворює з діагоналлю кут 60° . Знайди радіус описаного кола.

409. Коваль має створити елемент кованих воріт (мал. 7.11). Менша сторона прямокутника дорівнює 12 дм, а кут між його діагоналями дорівнює 60° . Який радіус буде мати коло, описане навколо прямокутника?



Мал. 7.11

410. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Доведи, що центр кола, описаного навколо трапеції, лежить на середині більшої сторони.

411. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони, що дорівнює 6 см. Знайди радіус кола, описаного навколо трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60° .

412. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони, що дорівнює 11 см. Знайди радіус кола, описаного навколо трапеції, якщо її тупий кут дорівнює 120° .

413. Кути трапеції пропорційні числам 1 і 2, а діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайди радіус описаного кола, якщо бічна сторона трапеції дорівнює 12 см.

414. Знайди периметр квадрата, описаного навколо кола радіуса 6 дм.

415. Периметр квадрата дорівнює 20 см. Знайди радіус кола, вписаного у квадрат.

416. Доведи, що радіус кола, вписаного в ромб, дорівнює половині висоти ромба.

417. Сторона ромба дорівнює 6 см, а гострий кут 30° . Знайди радіус кола, вписаного в ромб.

418. Периметр трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 8 м. Знайди її середню лінію.

419. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 3 см, а гострий кут 45° . Знайди радіус вписаного кола.

420. Знайди радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, якщо її бічна сторона дорівнює 18 см, а кути пропорційні числам 1 і 5.
421. Знайди периметр прямокутної трапеції, описаної навколо кола радіуса 5 см, якщо один із її кутів 30° .
422. Радіус кола, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює 7 см, а тупий кут 150° . Знайди середню лінію трапеції.
423. Коло, вписане у прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки 4 см і 9 см, а радіус вписаного кола дорівнює 6 см. Установіть відповідність між елементами трапеції, заданими умовами (1–3), та їх числовим значенням (А–Д).

1 більша бічна сторона
2 менша бічна сторона
3 середня лінія трапеції

А 6 см
Б 12 см
В 13 см
Г 12,5 см
Д 25 см



Мал. 7.12

424. Основи дерев'яної рівнобічної трапеції пропорційні числам 2 і 7, а бічна сторона дорівнює 18 дм (мал. 7.12). Знайди основи цієї трапеції, якщо в неї можна вписати коло.
425. У трапецію, середня лінія якої дорівнює 20 см, вписано коло. Знайди периметр трапеції.
426. У трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вписано коло із центром O . Доведи, що $\angle AOB = 90^\circ$.
427. Чи можна вписати коло в паралелограм, відмінний від ромба?
428. Чи можна описати коло навколо паралелограма, відмінного від прямокутника? Чому?
429. **ЗНО** Які з наведених тверджень є правильними?
I. У будь-який трикутник можна вписати коло.
II. У будь-який прямокутник можна вписати коло.
III. У будь-який ромб можна вписати коло.

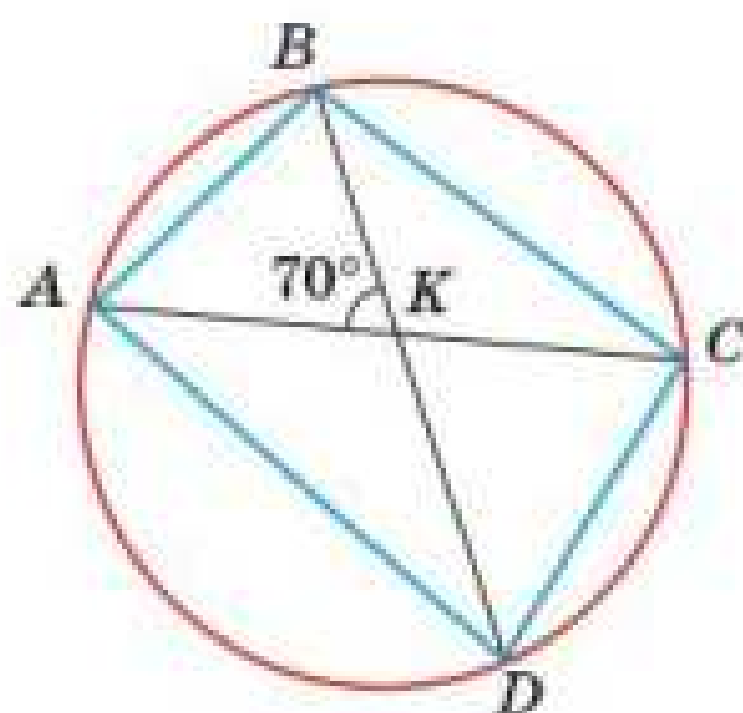
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

430. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки, один з яких на 2 см більший за інші. Знайди сторони трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 20 см.
431. Коло, вписане у прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки 9 см і 16 см. Знайди радіус вписаного кола, якщо периметр трапеції дорівнює 98 см.



432. Знайди кути чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle ACB = 42^\circ$, $\angle DAC = 68^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ$.
433. Знайди кути чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, якщо $\angle BDC = 48^\circ$, $\angle CAD = 40^\circ$, $\angle BCA = 38^\circ$.
434. У чотирикутнику $ABCD$, вписаному в коло, діагональ BD перпендикулярна до діагоналі AC і ділить її навпіл. Знайди кути чотирикутника, якщо $\angle B = 68^\circ$.
435. З точки M , яка належить внутрішній області кута P , проведено перпендикуляри MA і MB до сторін кута. Знайди $\angle APM$, якщо $\angle ABM = 23^\circ$.
436. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AH і BK , які перетинаються в точці M . Доведи, що $\angle MKN = \angle MCH$.
437. Якщо вписане в чотирикутник $ABCD$ коло дотикається до його сторін AB і CD в точках K і P , то $\angle AKP = \angle KPD$. Доведи.
438. Діагоналі чотирикутника ділять його кути навпіл. Доведи, що в такий чотирикутник можна вписати коло.
439. У ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 60° вписано коло. Знайди відрізки, на які точка дотику ділить сторону ромба.
440. У ромб, тупий кут якого дорівнює 120° , вписано коло. У якому відношенні точка дотику ділить сторону ромба?
441. У ромб, один із кутів якого на 46° більший за інший, вписано коло. Знайди кутові міри дуг, на які коло ділиться точками дотику.
442. У квадрат, периметр якого дорівнює 24 см, вписано коло. До кола проведено дотичну, яка перетинає дві сторони квадрата. Знайди периметр утвореного трикутника.
443. Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, перетинаються в точці K , $\angle AKB = 70^\circ$ (мал. 7.13). Знайди кутові міри дуг BC і AD , якщо одна з них на 60° більша за другу.
444. Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, перетинаються в точці K , $\angle AKB = 70^\circ$ (мал. 7.13). Знайди кутові міри дуг BC і AD , якщо одна з них у 4 рази менша від другої.
445. У рівнобічній трапеції кут при основі дорівнює 50° , а кут між діагоналями, який спирається на бічну сторону, дорівнює 30° . Де лежить центр описаного кола: усередині трапеції чи поза нею?
446. У рівнобічній трапеції з кутом 100° діагональ є бісектрисою гострого кута. Доведи, що центр описаного кола лежить усередині трапеції.

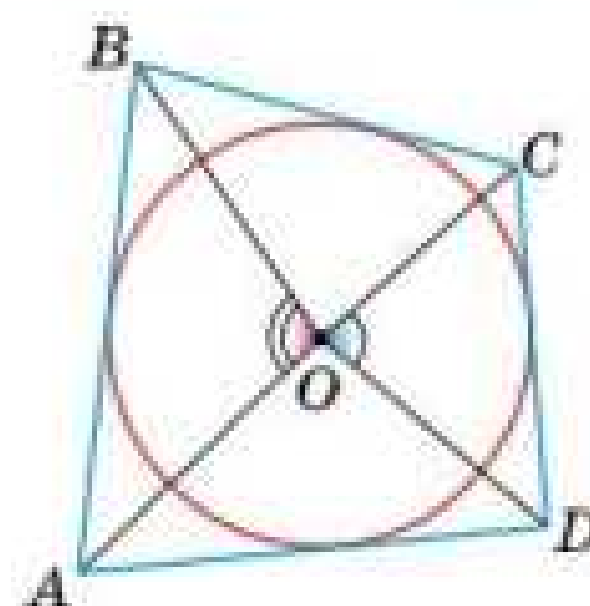


Мал. 7.13

447. Доведи, що коли три кути описаного чотирикутника рівні, то він — дельтоїд.

448. Дослідіть, яким є:

- а) вписаний чотирикутник, три кути якого рівні;
- б) вписаний чотирикутник, три сторони якого рівні;
- в) описаний чотирикутник, три сторони якого рівні.



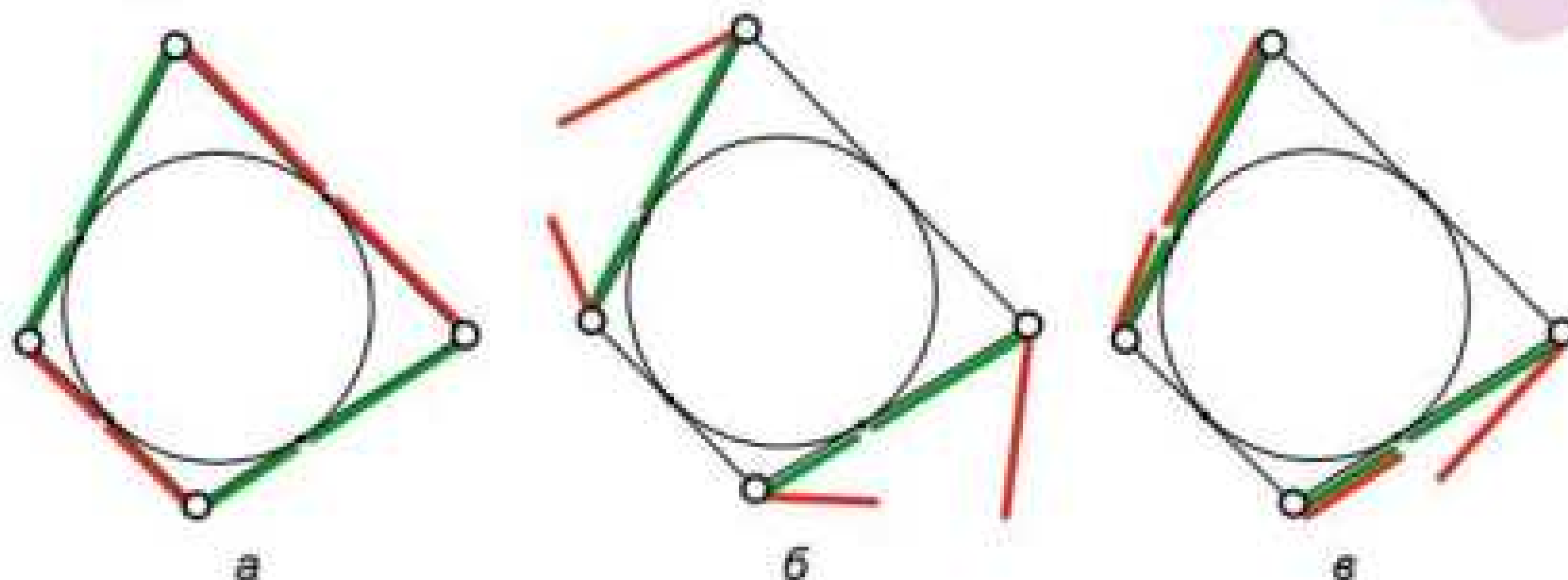
Мал. 7.14

449. Доведи, що периметр трапеції, описаної навколо кола радіуса r , більший за $8r$.

450. Сума двох кутів, під якими із центра кола, вписаного в чотирикутник, видно дві його протилежні сторони, дорівнює 180° . Доведи (мал. 7.14).

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

451. Із цупкого різнокольорового паперу виготов модель, за допомогою якої можна показати правильність теореми 16. Скористайся малюнком 7.15.



Мал. 7.15

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

452. Точки A і B ділять коло на частини, одна з яких на 80° більша за другу. Знайди міри вписаних кутів, які спираються на хорду AB .

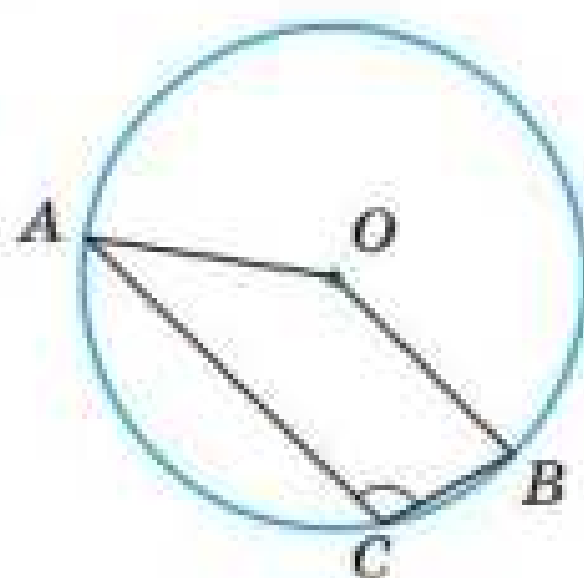
453. Точки M , N , P ділять коло на частини, пропорційні числам 2, 5 і 11. Знайди кути $\triangle MNP$.

454. Кут між хордою AB і дотичною, проведеною через точку A , дорівнює 72° . Знайди кутові міри дуг, на які хорда AB розбиває коло.

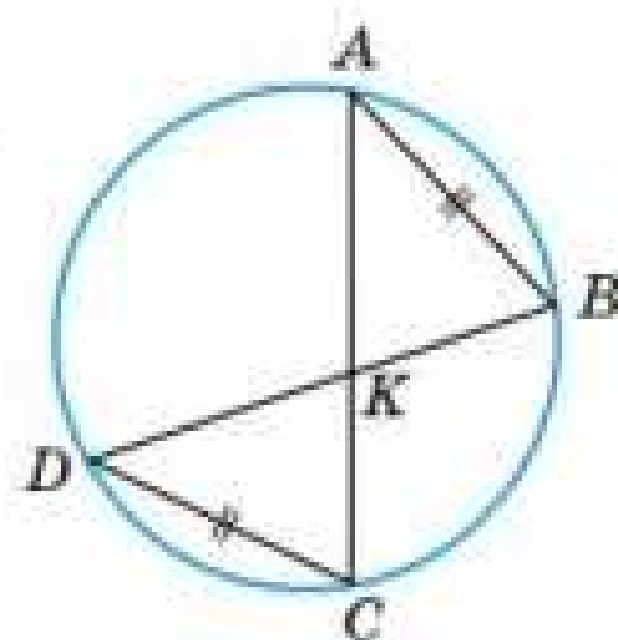
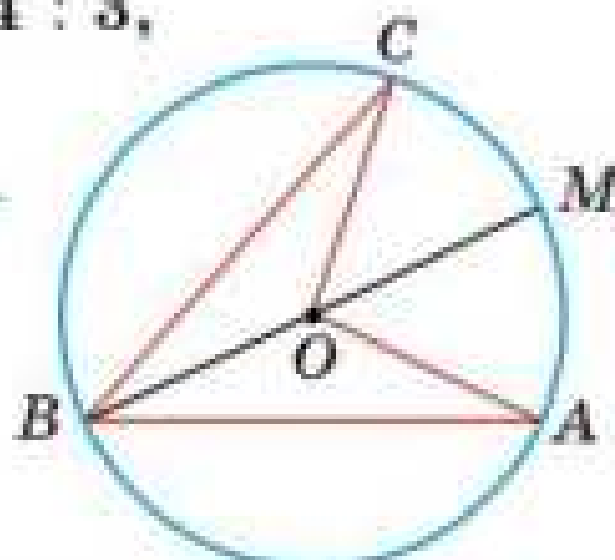
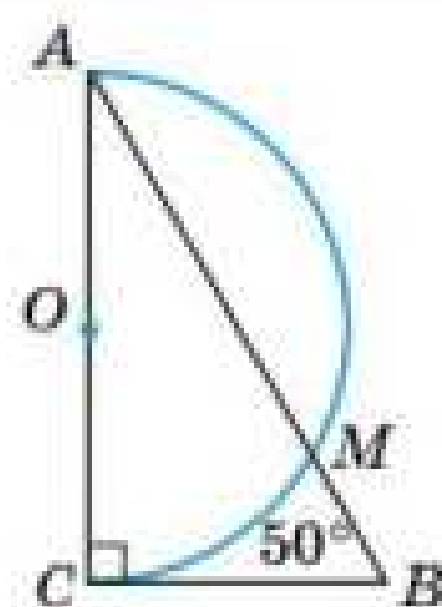
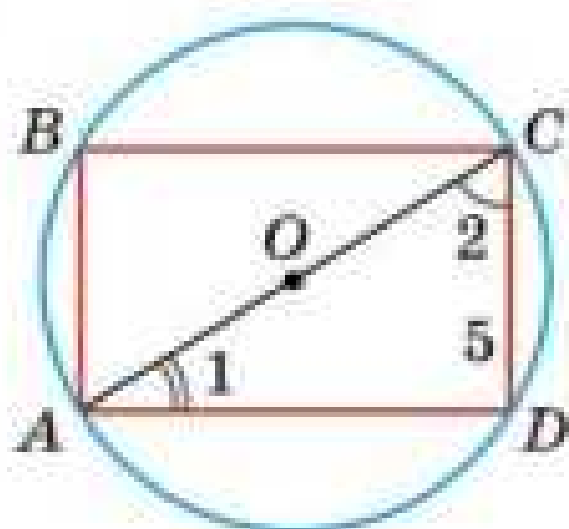
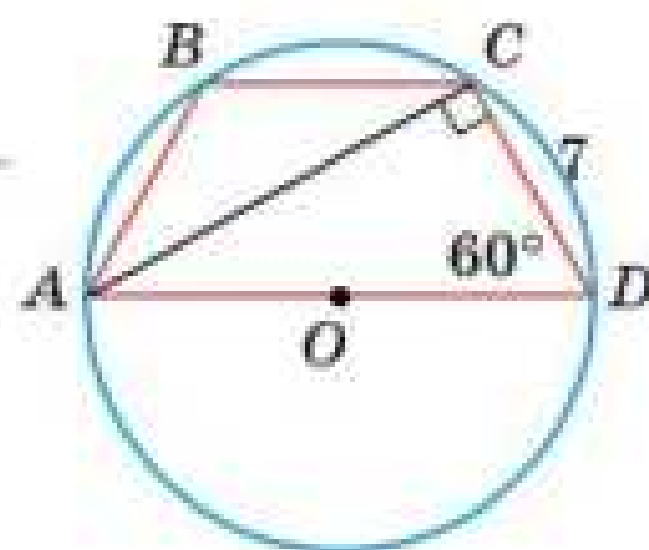
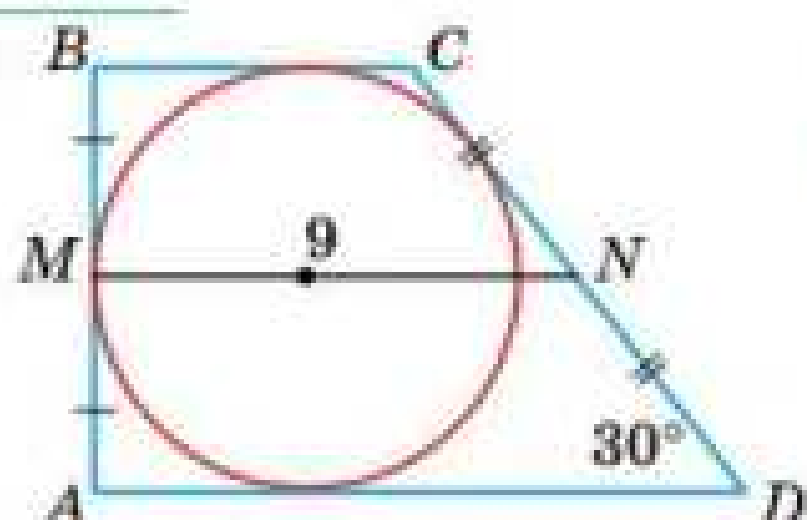
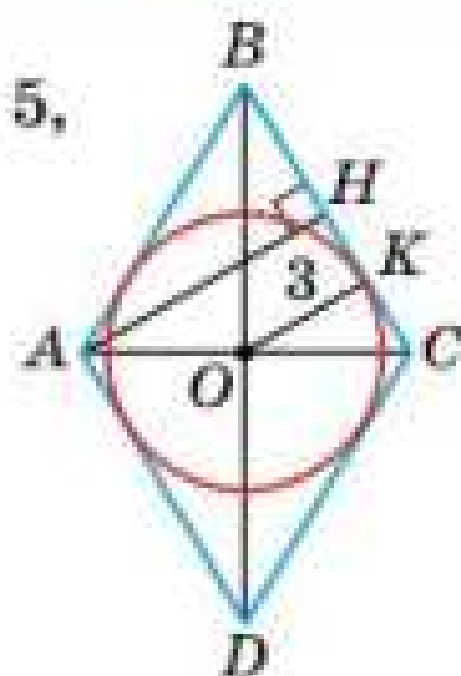


ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

1 $\angle AOB = 130^\circ$. $\angle ACB$ 

Б

 $AB = CD$.Довести:
 $BK = KC$.2 $\widehat{AM} : \widehat{MC} = 4 : 3$,
 $\angle ABC = 70^\circ$. $\angle A, \angle C$  $\angle B = 50^\circ$. $\widehat{AM}, \widehat{MC}$ 3 $ABCD$ — прямокутник.
 $\angle 2 - \angle 1 = 30^\circ$,
 $CD = 5$. R  $ABCD$ — трапеція.
 $CD = 7$,
 $\angle D = 60^\circ$. R 4 $ABCD$ — трапеція.
 $MN = 9$, $\angle D = 30^\circ$. AB, CD  $ABCD$ — ромб.
 $\angle ABC : \angle BCD = 1 : 5$,
 $r = 3$. AB 

САМОСТІЙНА РОБОТА

ВАРІАНТ 1

1. Два послідовні кути вписаного чотирикутника дорівнюють 70° і 80° . Знайди два інші його кути.
2. Точки P і K ділять коло на дві частини, одна з яких у 4 рази менша від другої. Знайди міри вписаних кутів, які спираються на хорду PK .
3. Знайди периметр рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло, якщо її основи дорівнюють 5 см і 17 см.
4. Знайди градусні міри дуг, на які ділять коло вершини рівнобедреного трикутника, вписаного у це коло, якщо кут при вершині дорівнює 40° .

ВАРІАНТ 2

1. Два послідовні кути вписаного чотирикутника дорівнюють 40° і 115° . Знайди два інші його кути.
2. Точки E і F ділять коло на дві частини, одна з яких на 100° менша від другої. Знайди міри вписаних кутів, які спираються на хорду EF .
3. Знайди периметр рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло, якщо бічна сторона дорівнює 15 см.
4. Знайди градусні міри дуг, на які ділять коло вершини рівнобедреного трикутника, вписаного у це коло, якщо кут при основі дорівнює 65° .

ВАРІАНТ 3

1. Два послідовні кути вписаного чотирикутника дорівнюють 72° і 100° . Знайди два інші його кути.
2. Точки A і B ділять коло на дві частини, одна з яких у 5 разів більша за другу. Знайди міри вписаних кутів, які спираються на хорду AB .
3. Знайди периметр рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло, якщо її основи дорівнюють 6 см і 13 см.
4. Знайди градусні міри дуг, на які ділять коло вершини рівнобедреного трикутника, вписаного у це коло, якщо кут при вершині дорівнює 100° .

ВАРІАНТ 4

1. Два послідовні кути вписаного чотирикутника дорівнюють 112° і 80° . Знайди два інші його кути.
2. Точки M і N ділять коло на дві частини, одна з яких на 80° більша за другу. Знайди міри вписаних кутів, які спираються на хорду MN .
3. Знайди периметр рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло, якщо бічна сторона дорівнює 12 см.
4. Знайди градусні міри дуг, на які ділять коло вершини рівнобедреного трикутника, вписаного у це коло, якщо кут при основі дорівнює 50° .

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

- | | | | |
|-----------|---|---|--|
| 1 | Знайди периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см. | A 15 см
B 30 см | B 7,5 см
Г 7 см |
| 2 | Радіус кола, вписаного у квадрат зі стороною 4 см, дорівнює... | A 2 см
B 4 см | B 8 см
Г 6 см |
| 3 | Основи трапеції дорівнюють 4 см і 10 см. Знайди середню лінію трапеції. | A 14 см
B 6 см | B 3 см
Г 7 см |
| 4 | Центральний кут дорівнює 36° . Чому дорівнює відповідний вписаний кут? | A 18°
B 36° | B 72°
Г 12° |
| 5 | Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 7 см. Знайди довжину середньої лінії. | A 7 см
B 14 см | B 3,5 см
Г 21 см |
| 6 | Знайди радіус кола, описаного навколо прямокутника, менша сторона якого дорівнює 4 см, а кут між діагоналями 60° . | A 8 см
B 2 см | B 4 см
Г 6 см |
| 7 | Радіус кола, вписаного в трапецію, дорівнює r . Знайди відстань між прямими, яким належать основи трапеції. | A $\frac{r}{2}$
B r
B $2r$
Г не можна встановити | |
| 8 | Периметр рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 20 см. Знайди бічну сторону трапеції. | A 10 см
B 2,5 см | B 5 см
Г 7,5 см |
| 9 | Радіус кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$, дорівнює 5 см. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$? | A 10 см
B 2,5 см | B 5 см
Г 7,5 см |
| 10 | Діагональ трапеції, вписаної в коло, перпендикулярна до бічної сторони. Де лежить центр кола? | A усередині трапеції
B на середині більшої основи
B поза трапецією
Г не можна встановити | |

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Середня лінія рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см, а бічна сторона 10 см. Знайди периметр трикутника.
А 20 см **Б** 27 см **В** 34 см **Г** 38 см
2. $\triangle ABC$ вписаний у коло із центром O . Знайди $\angle AOC$, якщо $\angle A = 40^\circ$, а $\angle B$ удвічі більший.
А 80° **Б** 160° **В** 40° **Г** 120°
3. Менша сторона прямокутника дорівнює 8 см і утворює з діагоналлю кут 60° . Знайди радіус кола, описаного навколо прямокутника.
А 4 см **Б** 8 см **В** 16 см **Г** 24 см
4. У $\triangle ABC$ $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$. На стороні AC цього трикутника як на діаметрі побудовано півколо, яке перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Установи відповідність між дугами (1–3) та їх градусними мірами (А–Д).

1 $\widehat{AM}$	А 20°
2 $\widehat{MN}$	Б 40°
3 $\widehat{NC}$	В 60°
	Г 80°
	Д 100°

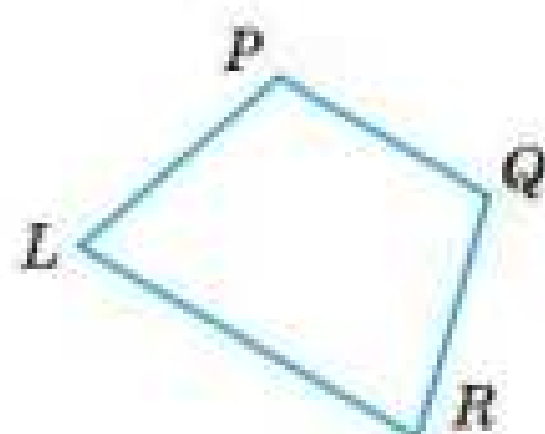
5. Діагональ трапеції ділить середню лінію завдовжки 15 см на два відрізки, один з яких на 8 см менший від другого. Знайди основи трапеції.
6. Радіус кола, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює 5 см, а бічна сторона 20 см. Знайди периметр трапеції та її кути.
7. Периметр трикутника, утворений середніми лініями $\triangle ABC$, дорівнює 15 см. Знайди сторони $\triangle ABC$, якщо одна з них на 2 см менша від другої й удвічі менша від третьої.
8. Знайди периметр рівнобічної трапеції, основи якої пропорційні числам 2 і 5, тупий кут дорівнює 120° , а бічні сторони — 6 см.

Додаткове завдання

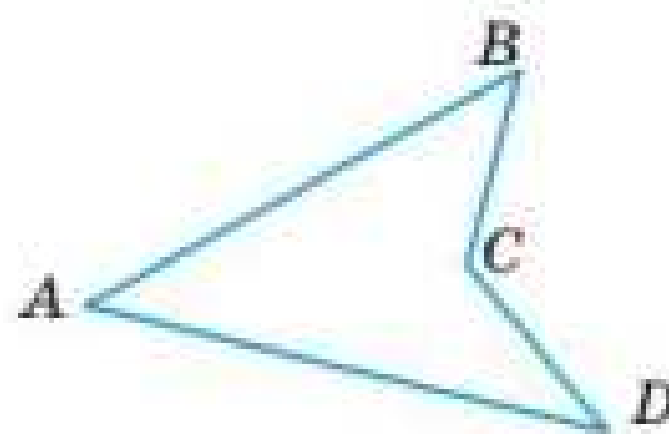
9. Кути трапеції пропорційні числам 1 і 2, а діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайди периметр трапеції, якщо радіус описаного кола дорівнює 8 см.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 1

Чотирикутник — проста замкнена ламана із чотирьох ланок. Або об'єднання такої ламаної з обмеженою нею внутрішньою частиною площини. Чотирикутники бувають опуклі й не опуклі.



Опуклий чотирикутник



Неопуклий чотирикутник

Основні елементи чотирикутника — *вершини, сторони, кути, діагоналі*.

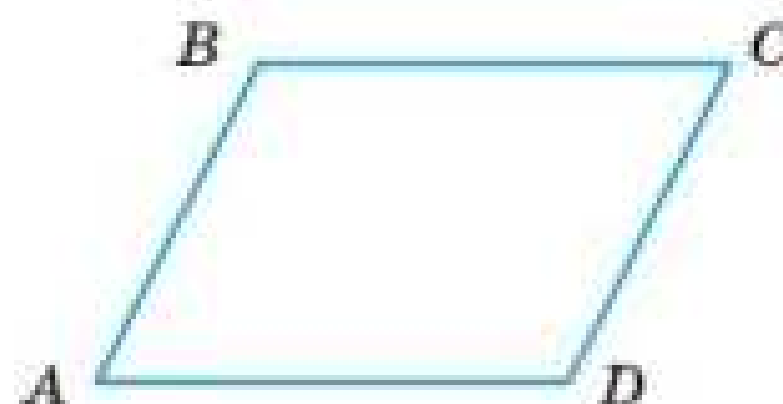
Сума всіх кутів кожного чотирикутника дорівнює 360° . Кожна сторона чотирикутника менша від суми трьох інших сторін.

Чотирикутник, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні, називають *паралелограмом*.

Ознаки паралелограма.

Чотирикутник є паралелограмом, якщо:

- 1) кожна його сторона дорівнює протилежній стороні;
- 2) дві його сторони паралельні й рівні;
- 3) його діагоналі точкою перетину діляться навпіл.



Властивості паралелограма.

У паралелограмі:

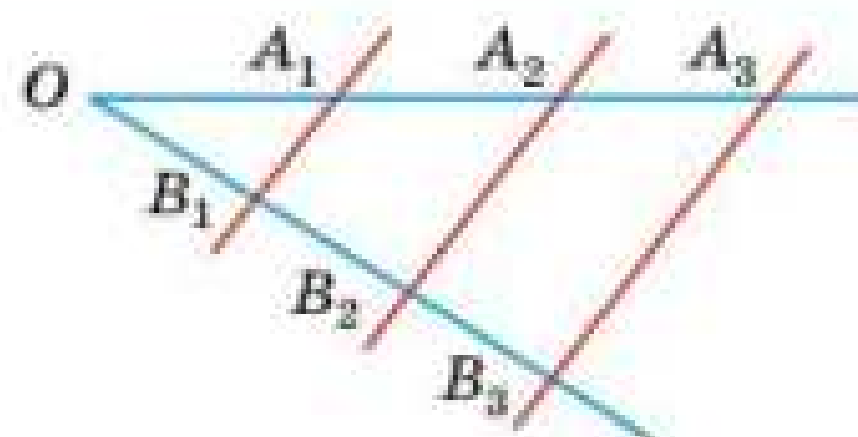
- 1) діагональ ділить його на два рівні трикутники;
- 2) протилежні сторони рівні;
- 3) протилежні кути рівні;
- 4) сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180° ;
- 5) діагоналі, перетинаючись, діляться навпіл.

Окремі види паралелограмів

Прямокутники	Ромби	Квадрати

Діагоналі прямокутника рівні, діагоналі ромба перпендикулярні і ділять кути ромба навпіл, діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні і ділять кути навпіл.

Користуючись властивостями паралелограма, можна довести теорему Фалеса. Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній із них рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій стороні кута.



Чотирикутник, тільки дві сторони якого паралельні, — *трапеція*. Паралельні сторони трапеції — її основи, дві інші — бічні сторони. Окремі види трапецій — рівнобічні і прямокутні трапеції. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції, — її *середня лінія*. Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їх півсумі.

Відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника, називають його *середньою лінією*. Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює її половині.

Середня лінія трапеції	Середня лінія трикутника
$MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \frac{BC + AD}{2}$	$MN \parallel AC, MN = \frac{AC}{2}$

Кут із вершиною в центрі кола називають *центральною кутом*. Центральний кут вимірюється дугою, яка йому відповідає. Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називають *вписаним*.

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку спирається. Вписані кути, що спираються на діаметр, — прямі. Вписані кути, що спираються на одну і ту саму дугу, — рівні.

Чотирикутник називається *вписаним* у коло, якщо всі його вершини лежать на колі.

Чотирикутник вписаний в коло тоді й тільки тоді, коли сума двох його протилежних кутів дорівнює 180° .

Чотирикутник називається *описаним* навколо кола, якщо кожна його сторона дотикається до кола.

Опуклий чотирикутник описаний навколо кола тоді й тільки тоді, коли сума двох його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших сторін.

РОЗДІЛ 2

Подібність трикутників



Подібність геометричних фігур — одне з найважливіших відношень. Коли зображають слона, будинок, континент чи й усю Землю на невеликому аркуші паперу, користуються властивостями подібності. Кожна модель чимось подібна до оригіналу. Геометрія ж здебільшого займається дослідженням геометричних моделей.

§ 8 Пропорційні відрізки
Proportional Segments

§ 9 Подібність фігур
Figures Similarity

§ 10 Ознаки подібності трикутників
Triangles Similarity Signs

§ 11 Застосування подібності
трикутників
Triangles Similarity Application

§ 12 Подібність прямокутних
трикутників
Rectangular Triangles Similarity

Для чого вивчати подібність фігур?

У повсякденному житті нам часто доводиться мати справу з предметами однакової форми, але різних розмірів. На площині це картина та її репродукція, плани однієї квартири різних розмірів.



У просторі подібними є копії архітектурних споруд, картини тощо.

Подібність — це настільки важлива властивість фігур, що люди створили спеціальні засоби, за допомогою яких створюють подібні фігури: фотоапарати, телескопи, мікроскопи, проєктори, комп'ютери тощо.



Сучасним розділом математики є фрактальна геометрія, предметом вивчення якої є фрактали — складні за своєю внутрішньою структурою фігури, у тій чи іншій мірі подібні самі собі.

А де ще застосовується подібність фігур? Наведи свої приклади.

Цей розділ важливий також тому, що на його основі будується майже вся геометрія, яку ти далі вивчатимеш: за допомогою подібності трикутників доводиться теорема Піфагора, а на її основі — інші теореми геометрії.

§8 ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- proportional segments — пропорційні відрізки
- ratio of segments lengths — відношення довжин відрізків

У геометрії та інших прикладних науках часто доводиться визначати відношення відрізків. Нагадаємо, що відношенням двох відрізків називають відношення їх довжин, виражених у тих самих одиницях довжини. Наприклад, якщо маємо відрізки $a = 2$ см і $b = 5$ см, то їх відношення $a : b = 2 : 5$.

Якщо K , P , T — середини сторін $\triangle ABC$ (мал. 8.1), то

$$AK : AB = 1 : 2, AT : AC = 1 : 2, KT : BC = 1 : 2.$$

Отже, $AK : AB = AT : AC = KT : BC$.

З кожних двох таких відношень можна скласти пропорцію, тому в такому випадку кажуть, що відрізки AK , AT , KT пропорційні відрізкам AB , AC і BC . У розглядуваному випадку кожне з відношень дорівнює 0,5, тому попереднє твердження можна уточнити: відрізки AK , AT , KT пропорційні відрізкам AB , AC і BC з коефіцієнтом пропорційності $k = 0,5$.

Пропорційними можуть бути дві, три чи більше пар відрізків. Відрізки x , y , ..., z називають пропорційними відрізкам a , b , ..., c , якщо

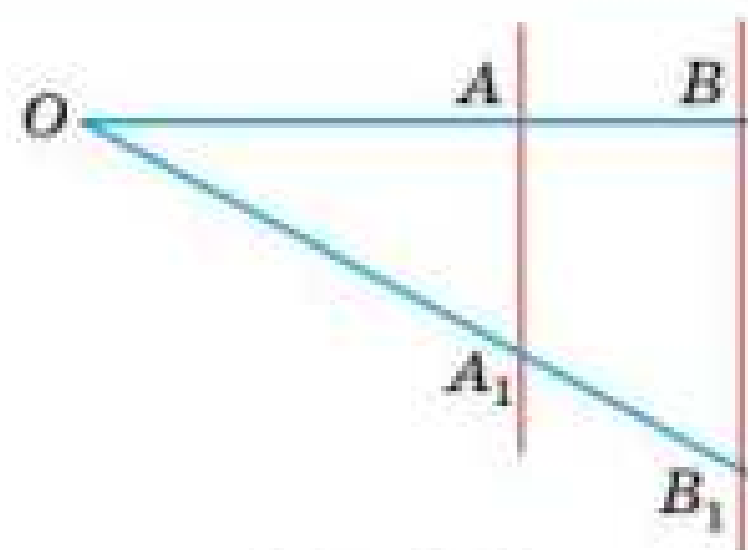
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \dots = \frac{z}{c}.$$

Для дослідження властивостей пропорційних відрізків важливу роль відіграє така узагальнена теорема Фалеса.

Теорема 18. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки.

Нехай паралельні прямі AA_1 і BB_1 перетинають сторони кута O , як показано на малюнку 8.2. Тоді відрізки OA , OB , AB пропорційні відрізкам OA_1 , OB_1 , A_1B_1 . Тобто

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$



Мал. 8.2

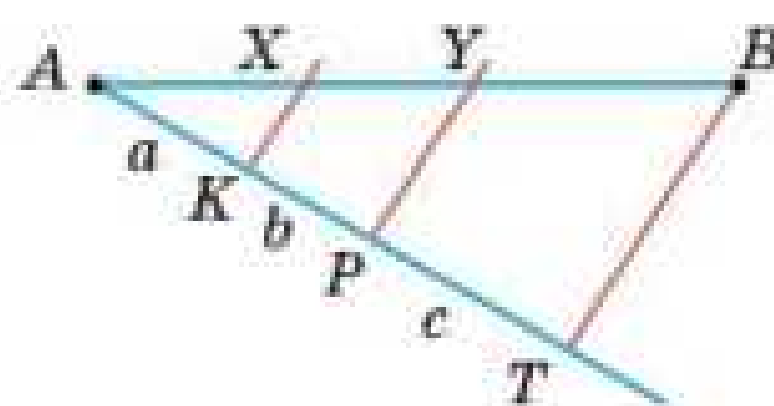
Отже, існує таке число k , що $OA = kOA_1$, $OB = kOB_1$, $AB = kA_1B_1$.

Узагальнена теорема Фалеса показує, як можна довільний відрізок поділити на частини, пропорційні даним відрізкам (або числам — довжинам певних відрізків).

Наприклад, поділимо даний відрізок на частини, пропорційні довжинам a , b і c .

Нехай дано відрізок AB (мал. 8.3). Проведемо довільний промінь AT і відкладемо на ньому відрізки $AK = a$, $KP = b$, $PT = c$. Прямі, що проходять через точки K і P паралельно TB , ділять відрізок AB точками X і Y у потрібному відношенні:

$$AX : a = XY : b = YB : c.$$



Мал. 8.3

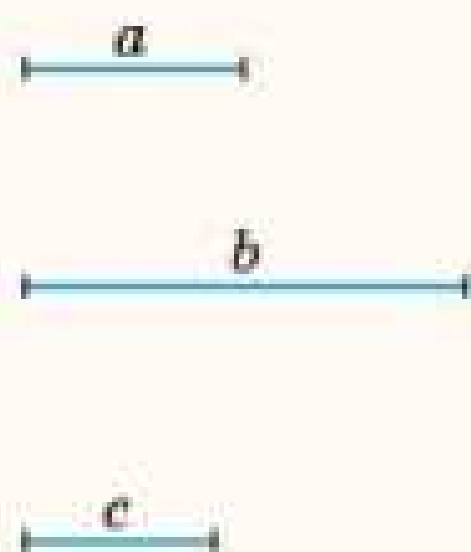
Якщо треба поділити даний відрізок AB на частини, пропорційні, наприклад, числам 3, 2 і 4, відкладають на промені AT відрізки $AK = 3n$, $KP = 2n$, $PT = 4n$, де n — якийсь невеликий відрізок, і виконують побудову, як показано вище.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

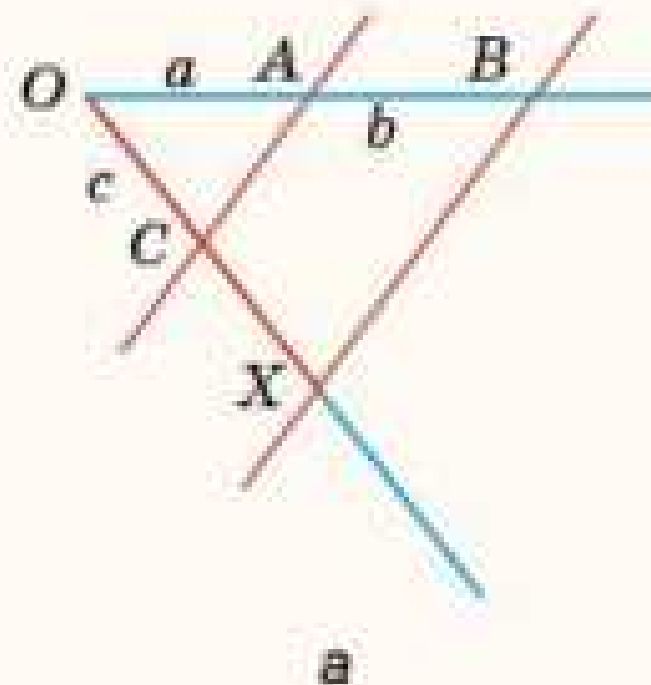
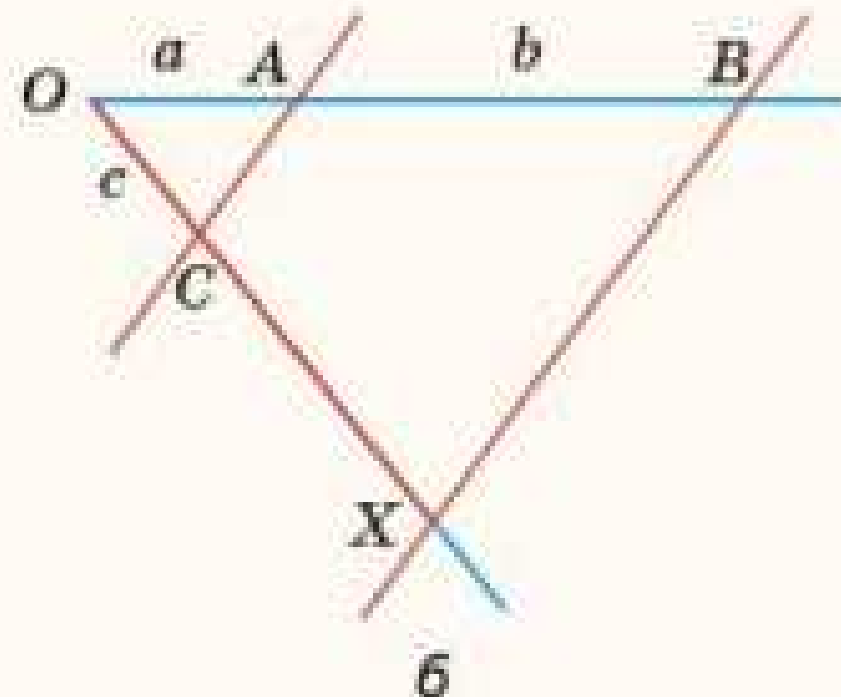
Якщо відрізки a , b , c , x такі, що $a : b = c : x$, то x називають четвертим пропорційним трьох даних відрізків a , b і c . Побудувати четвертий пропорційний трьох даних відрізків можна так. На одній стороні довільного нерозгорнутого кута O слід відкласти $OA = a$, $OB = b$, а на другій стороні — $OC = c$. Далі треба провести пряму AC і паралельну їй пряму BX . Відрізок OX — четвертий пропорційний трьох даних відрізків. Бо $OA : OB = OC : OX$ (мал. 8.4, а).



Дано:



Побудова



Мал. 8.4

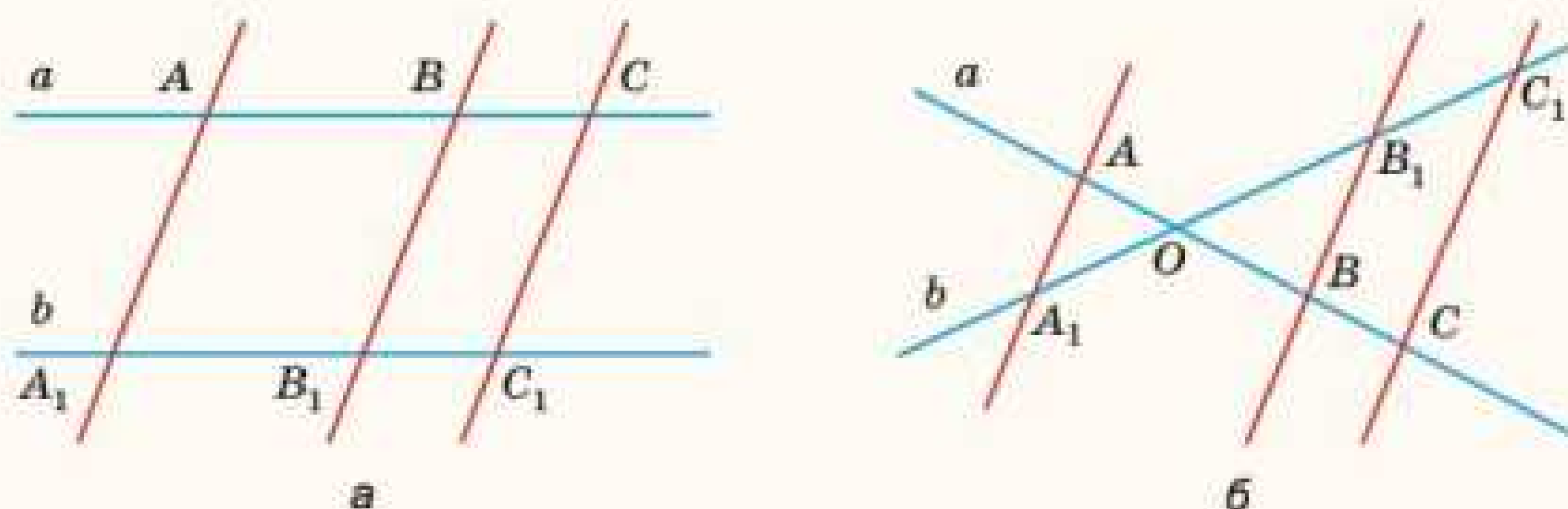
Зауваження. Побудову можна виконати й так, як зображено на малюнку 8.4, б.

Теорему 18 можна узагальнити на випадок довільних прямих однієї площини, а не тільки сторін кута.





Паралельні прямі, які перетинають прямі a і b , відтинають від них пропорційні відрізки. Така теорема правильна також і у випадках, коли прямі a і b паралельні (мал. 8.5, а) або перетинаються в точці, що лежить між даними паралельними прямими (мал. 8.5, б). Пропонуємо ці випадки розглянути самостійно.



Мал. 8.5

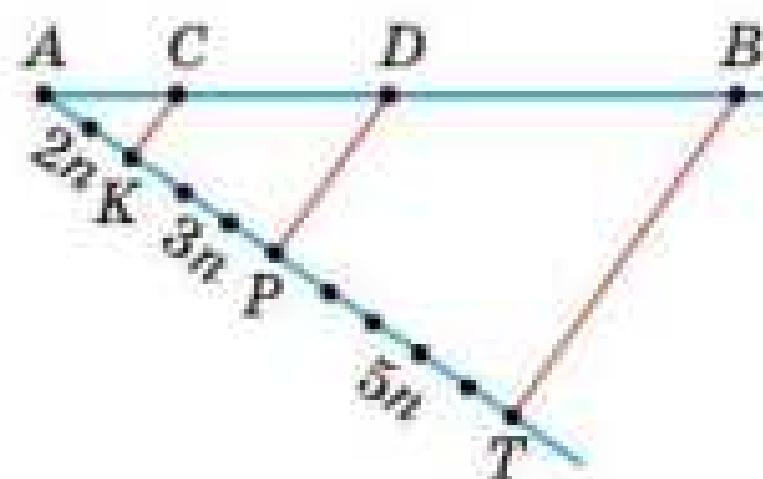
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що розуміють під відношенням двох відрізків?
2. Сформулюй узагальнену теорему Фалеса.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Поділи даний відрізок на три частини, пропорційні числам 2, 3 і 5.

- З кінця даного відрізка AB під довільним кутом до нього проведемо промінь AT і відкладемо на ньому послідовно 2, 3 і 5 довільних, але рівних відрізків (мал. 8.6). Отримаємо відрізки AK , KP і PT , пропорційні даним числам 2, 3 і 5. Проведемо пряму TB і паралельні їй прямі через точки K і P . Ці прямі перетнуть даний відрізок AB у таких точках C і D , що відрізки AC , CD і DB будуть ті, які треба було визначити. Адже, згідно з узагальненою теоремою Фалеса, відрізки AC , CD і DB пропорційні відрізкам AK , KP і PT , які пропорційні числам 2, 3 і 5.



Мал. 8.6

2. Знайди відношення сторони ромба до його півпериметра.
 - Нехай довжина сторони ромба дорівнює c . Тоді його периметр — $4c$, а півпериметр — $2c$.
 $c : 2c = 1 : 2 = 0,5$.



3. Відрізок AB точками K і P поділено на 3 частини пропорційно числам 2, 3 і 6 (мал. 8.7). Знайди відношення $AK : KB$ і $AP : AK$.



Мал. 8.7

- Якщо відрізки пропорційні числам 2, 3 і 6, то існує таке число x , що $AK = 2x$, $KP = 3x$, $PB = 6x$. Тоді $KB = 3x + 6x = 9x$ і $AK : KB = 2x : 9x = 2 : 9$. Аналогічно $AP = 2x + 3x = 5x$. Тоді $AP : AK = 5x : 2x = 5 : 2$.

ВИКОНАЄМО УСНО

455. Чому дорівнює відношення висот 2 дідухів (мал. 8.8)?

456. Які відрізки називають пропорційними відрізкам a , b і c ?

457. Поділи відрізок завдовжки 20 см на частини, пропорційні числам 1, 2 і 2.

458. Стрічку завдовжки 10 дм розрізали на дві частини, одна з яких дорівнює 2 дм. У якому відношенні розрізали стрічку?

А 1 : 5 Б 1 : 4 В 1 : 10 Г 1 : 6

459. Більша частина мотузки, поділеної вузлом у відношенні 2 : 3, дорівнює 9 м. Яка довжина всієї мотузки?

А 5 м Б 6 м В 22,5 м Г 15 м

460. Спершу Олег йшов пішки по Олександрівському шосе від вул. Олени Теліги до вул. Пляжева, де сів в авто. Автомобіль зробив одну зупинку на перетині з вулицею Канежська і привіз Олега у Фан-Клуб (мал. 8.9). Знайди відстань, яку подолав Олег, якщо пішки він пройшов 100 м.



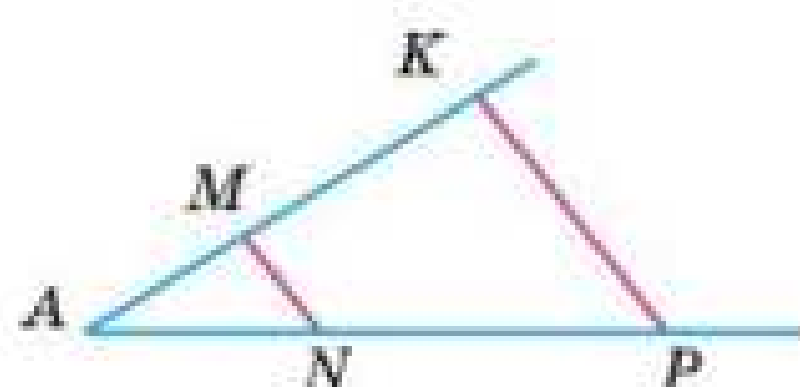
Мал. 8.8



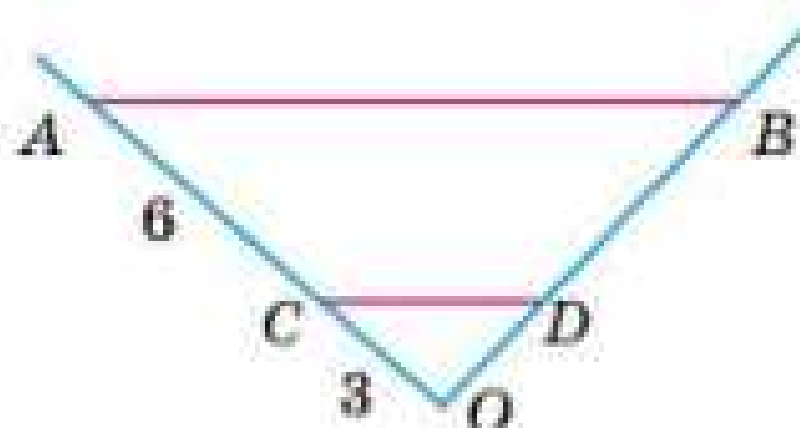
Мал. 8.9

461. Використовуючи мал. 8.10 ($MN \parallel PK$), назви пропущені члени пропорції:

а) $\frac{AM}{AN} = \frac{\quad}{\quad}$; б) $\frac{AM}{MK} = \frac{\quad}{\quad}$; в) $\frac{AM}{AK} = \frac{\quad}{\quad}$; г) $\frac{AN}{\quad} = \frac{\quad}{AK}$.



Мал. 8.10



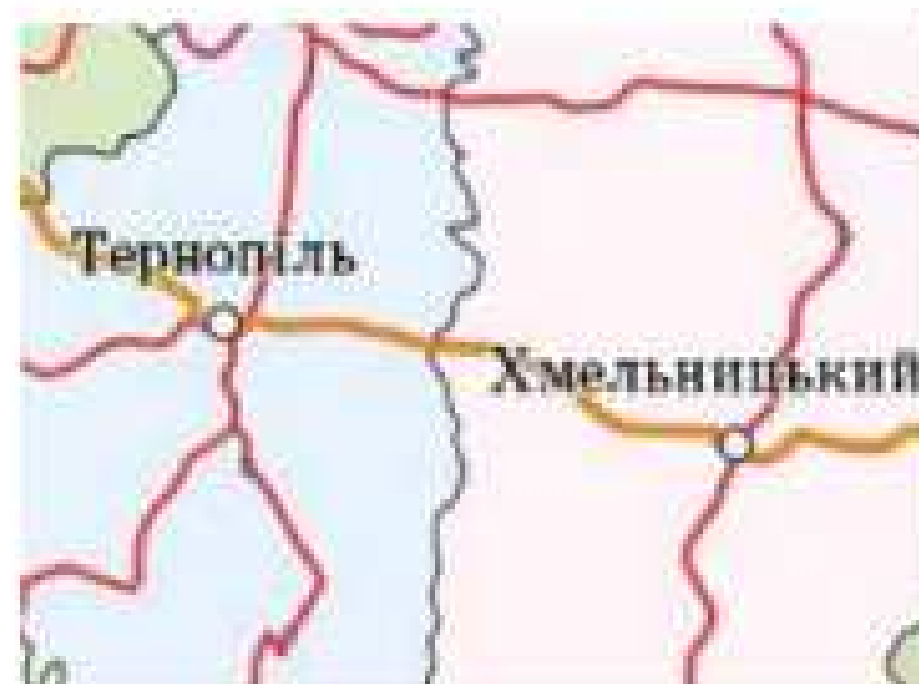
Мал. 8.11

- 462.** На мал. 8.11 $AB \parallel CD$. Знайди:
 а) BD , якщо $OD = 2$ см;
 б) OD , якщо $BD = 8$ см.
- 463.** Знайди відношення сторони:
 а) рівностороннього трикутника до його периметра;
 б) сторони квадрата до його півпериметра.

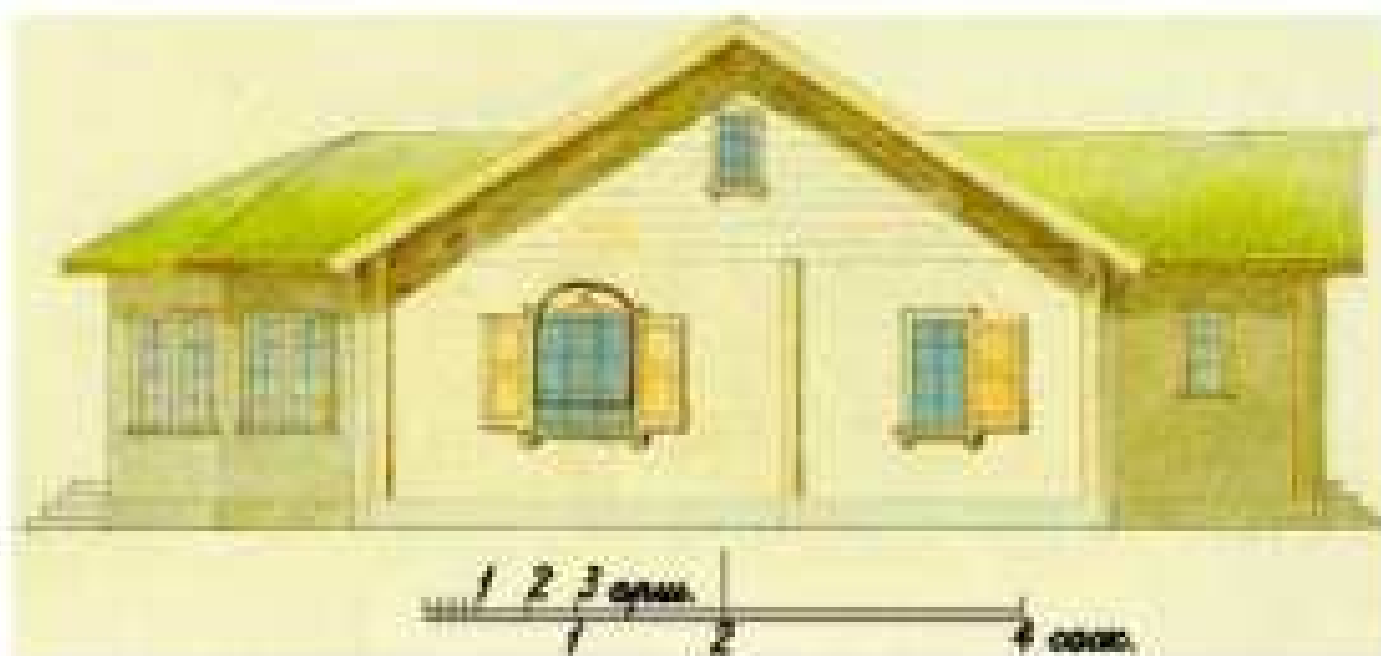
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

- 464.** Накресли довільний відрізок і поділи його у відношенні 1 : 3.
- 465.** Накресли довільний відрізок і поділи його у відношенні 2 : 5.
- 466.** Точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = 7 : 2$. Знайди відношення $AM : AB$ і $MB : AB$.
- 467.** Гра. Один з учнів / одна з учениць задає довжину відрізка AB . Другий / друга задає відношення, у якому його ділить точка C . Третій / третя знаходить відношення довжин AC до AB , а четвертий / четверта — відношення довжин CB до AB .
- 468.** Відрізок AB точками C і D поділений пропорційно числам 2, 3 і 5. Знайди відношення відрізків: а) $AC : DB$; б) $CD : AD$; в) $AC : AB$; г) $DB : AD$.
- 469.** Точка K ділить відрізок AB у відношенні $m : n$. Знайди відношення $AK : AB$ і $KB : AB$.
- 470.** Виміряй відстань між двома пунктами на карті (мал. 8.12). Яка справжня відстань між цими пунктами (по прямій), якщо масштаб карти 1 : 3 500 000?
- 471.** На мал. 8.13 (с. 87) подано боковий фасад проекту хати, який зробив Тарас Шевченко аквареллю в 1860 р. Знайди довжину самої хати, використовуючи поданий лінійний масштаб. Запиши довжину хати в метрах.



Мал. 8.12

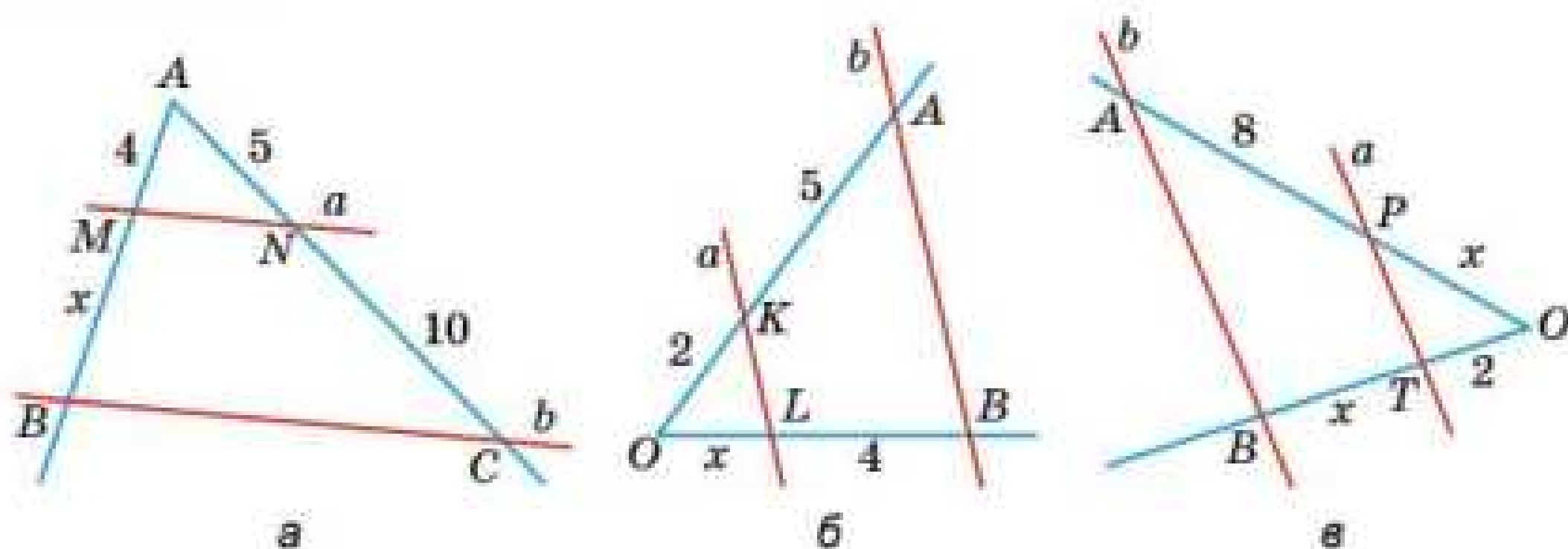


Мал. 8.13



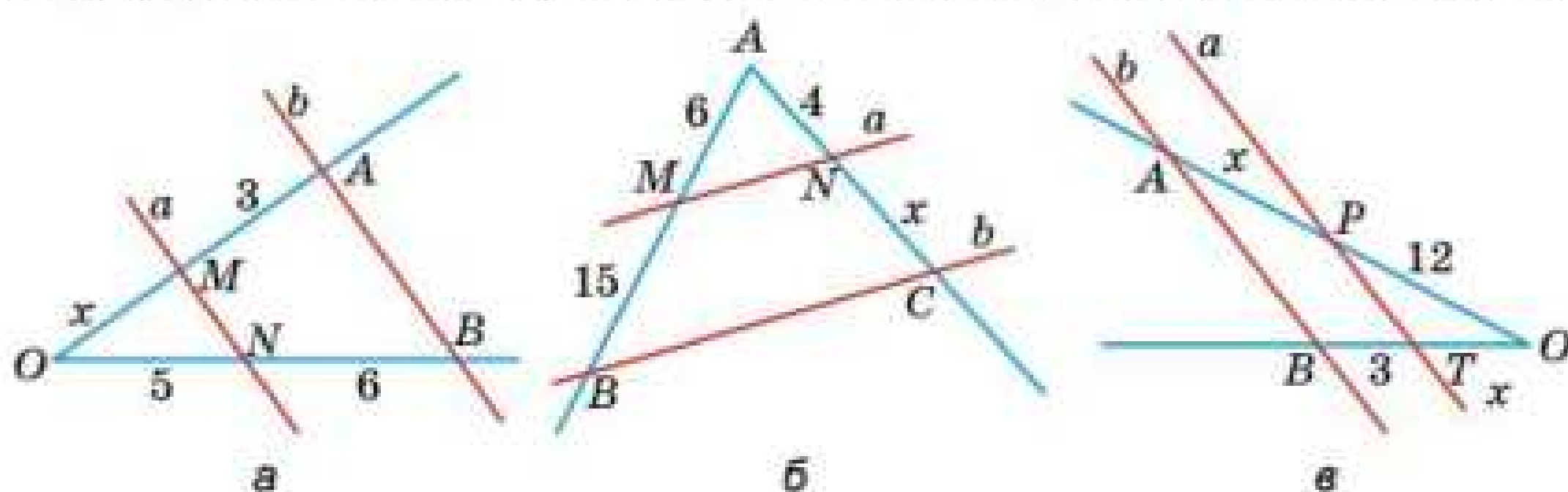
Мал. 8.14

472. Один із кутів прямокутного трикутника (мал. 8.14) дорівнює 60° . Знайди відношення його меншого катета до гіпотенузи.
473. Знайди відношення катетів прямокутного рівнобедреного трикутника.
474. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до бічної сторони як $2 : 3$. Як відноситься його основа до периметра? Як відноситься бічна сторона до периметра?
475. Користуючись малюнком 8.15, де $a \parallel b$, знайдіть невідомі елементи x .



Мал. 8.15

476. Користуючись малюнком 8.16, де $a \parallel b$, знайди невідомі елементи x .



Мал. 8.16

477. На сторонах AB і AC трикутника ABC взято точки M і N так, що $MN \parallel BC$ і $AM : MB = 2 : 3$. Знайди:
- а) AN , якщо $NC = 9$ см;
 б) NC , якщо $AC = 15$.

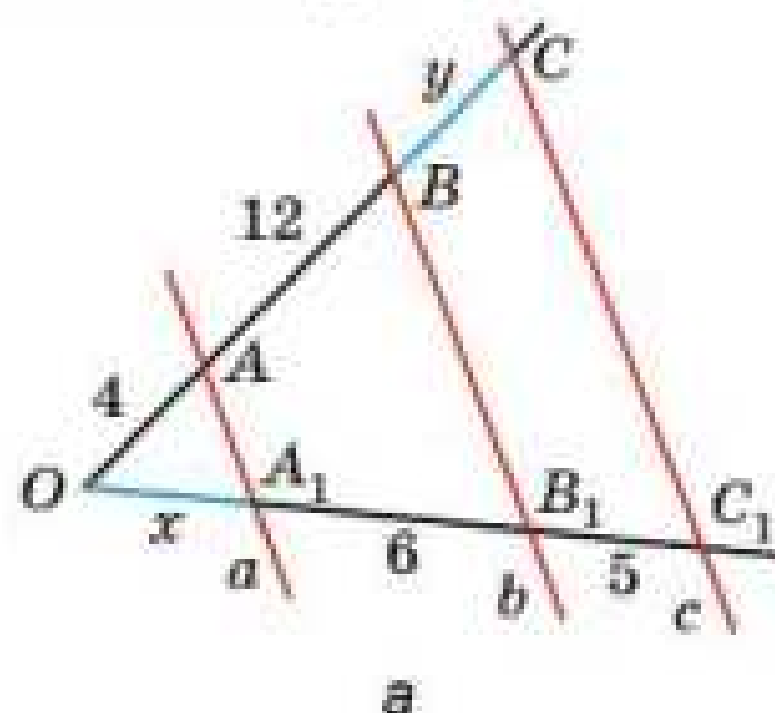
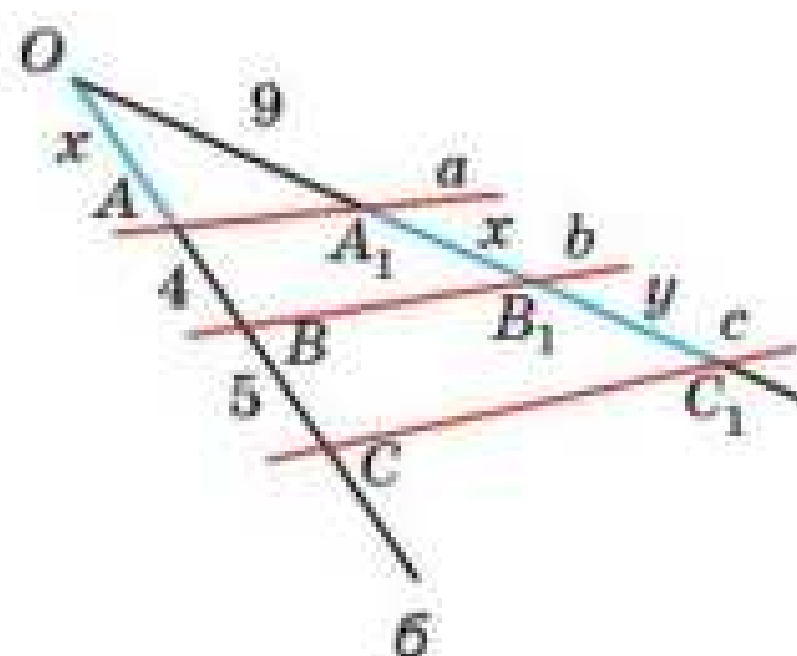
478. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки K і P так, що $KP \parallel AC$ і $AK : KB = 3 : 5$. Знайди: а) PC , якщо $BP = 12$ см; б) BP , якщо $BC = 24$ см.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

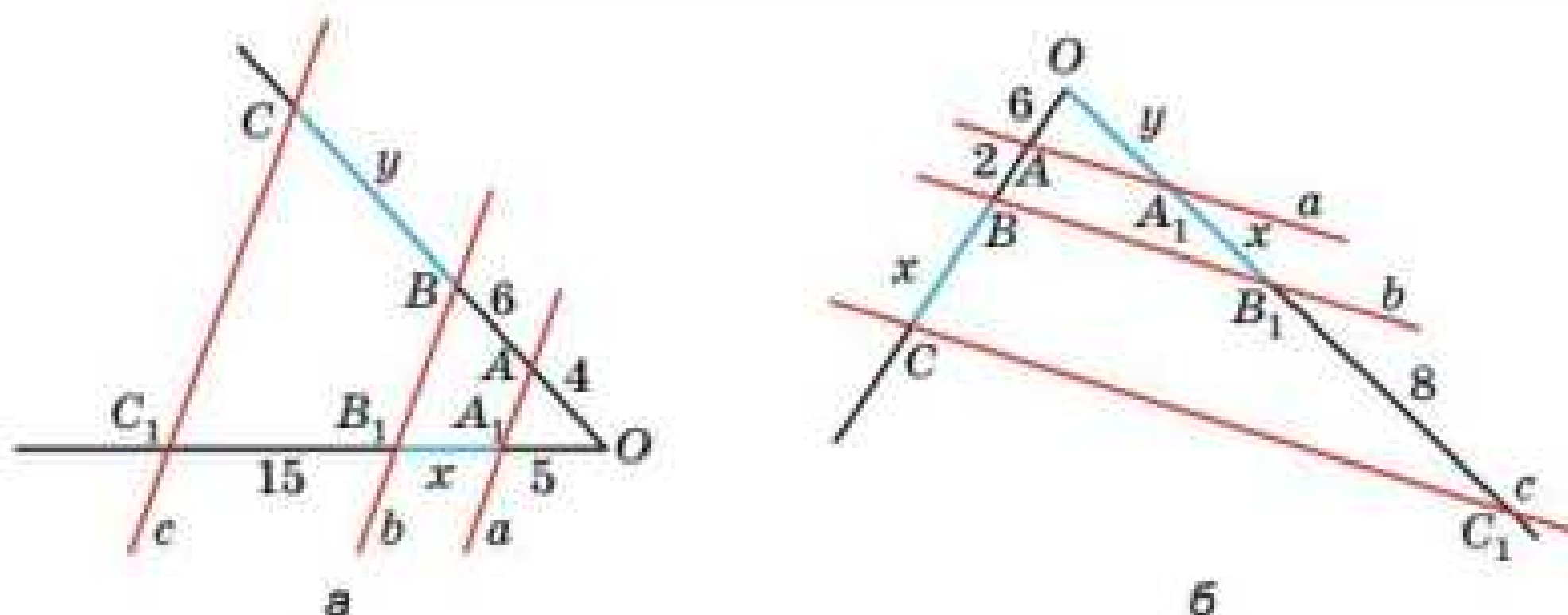


479. На скільки треба подовжити відрізок KL завдовжки 32 см, щоб отримати відрізок KM , який задовольняє пропорцію $KM : KL = 9 : 4$?
480. На відрізку AB завдовжки 6 см дано точку C . Відстань від цієї точки до A дорівнює 3,6 см. На продовженні відрізка AB за точку B взято таку точку D , що $AD : DB = AC : BC$. Знайди відношення $AB : BD$ і $AD : AB$.
481. Відрізок завдовжки 7 дюймів поділили на частини, пропорційні числам 2, 3, 4 і 5. Знайдіть довжини (у сантиметрах) найбільшої і найменшої частин (вважати, що 1 дюйм = 2,54 см).
482. Відрізок a вдвічі довший за c . Поділи відрізок завдовжки 9 м на частини, пропорційні відрізкам a і c .
483. Відрізок завдовжки a поділено на частини, пропорційні числам 5, 1 і 4. Знайди довжини утворених частин.
484. A segment of length a is divided into parts in the ratio $m : n$. Find the lengths of the resulting parts.
485. Чи пропорційні відрізки a, b, c, d , якщо:
а) два перші відносяться як 2 : 3, а два другі — як 3 : 4;
б) $a : b = 2,4 : 5,6$; $c : d = 9,1 : 21,7$?
486. Користуючись малюнком 8.17, де $a \parallel b \parallel c$, знайди невідомі елементи x та y .



Мал. 8.17

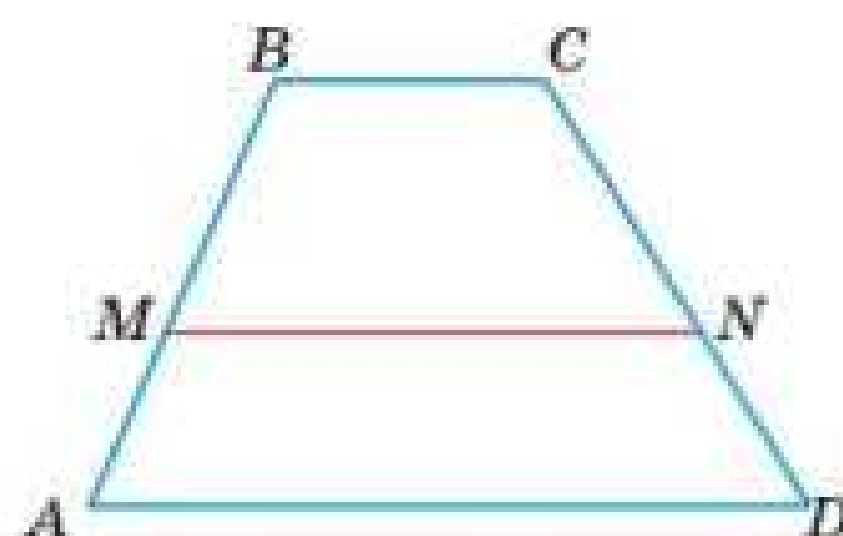
487. Користуючись малюнком 8.18, де $a \parallel b \parallel c$, знайди невідомі елементи x та y .



Мал. 8.18

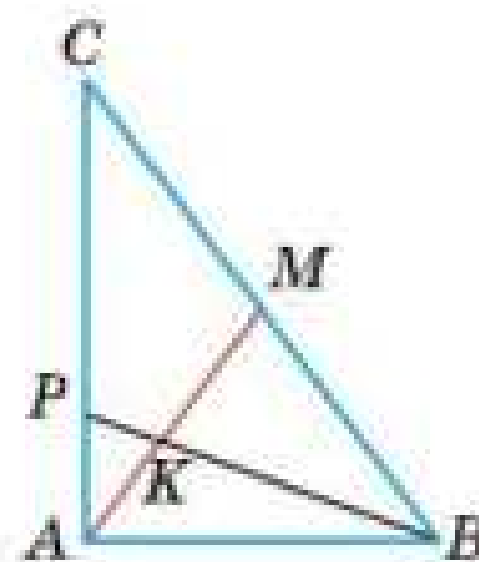
488. У трапеції $ABCD$ (мал. 8.19) $AB = 10$ см, $MN \parallel AD$, $AM : MB = 2 : 3$. Установіть відповідність між відрізками, заданими умовами (1–3), та їх довжинами (А–Д).

1 MB	А 4 см
2 CN , якщо $ND = 6$ см	Б 6 см
3 CD , якщо $CN = 9$ см	В 9 см
	Г 15 см
	Д 30 см



Мал. 8.19

489. AM — медіана $\triangle ABC$ (мал. 8.20). $AK : KM = 2 : 3$. Знайди відношення $AP : PC$ і $AP : AC$.
490. Точка M ділить сторону AB $\triangle ABC$ у відношенні $AM : MB = 3 : 2$, а точка N ділить сторону BC $\triangle ABC$ у відношенні $BN : NC = 5 : 4$. Відрізки AN і CM перетинаються в точці O . Знайди відношення $AO : ON$ і $CO : OM$.
491. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а бічні сторони 5 см і 8 см. На скільки треба продовжити бічні сторони, щоб вони перетнулися?
492. На стороні AB трикутника ABC позначено точку K таку, що $AK = 10$ см, $KB = 5$ см. Знайди відношення відстаней від точок K і B до прямої AC .



Мал. 8.20

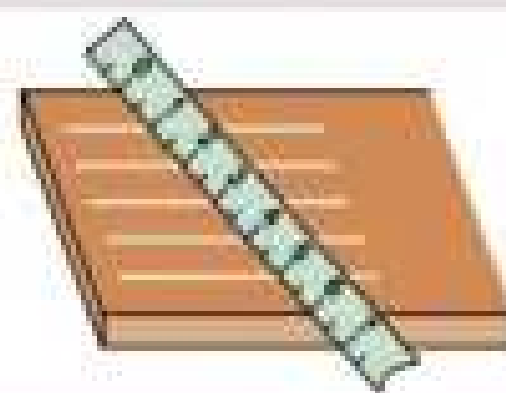
Побудуй відрізок, четвертий пропорційний відрізкам a , b і c , та знайди його довжину (493, 494), якщо:

493. а) $a = 4$ см; $b = 2$ см; $c = 3$ см; б) $a = 4,8$ см; $b = 4$ см; $c = 2,1$ см;
494. а) $a = 4$ см; $b = 10$ см; $c = 6$ см; б) $a = 1,5$ см; $b = 4,5$ см; $c = 2$ см.

495. Накресли кут O , градусна міра якого 60° . З його вершини як із центра проведи дуги радіусів $r = 2$ см і $2r$. Познач буквами точки перетину сторін кута цими дугами і послідовно сполучи їх відрізками. Який чотирикутник утворився? Знайди його кути, сторони і периметр.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

496. Запиши значення для n , де $5 < n < 15$.
Поділи дошку або аркуш картону на n рівних частин.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

497. Радіус OB кола із центром O ділить вписаний кут ABC на два кути так, що один із них на 15° більший за другий. Знайди ці кути, якщо $\widehat{AC} = 110^\circ$.
498. Чи можна описати коло навколо ромба, відмінного від квадрата? Чому?
499. Знайди кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 5 і 8.



§9 ПОДІБНІСТЬ ФІГУР

КЛЮЧОВІ СЛОВА

similar figures — подібні фігури

Зменшена модель автомобіля схожа на справжній автомобіль, хоча менша за розмірами (мал. 9.1). Але їх розміри — відповідно пропорційні.



Мал. 9.1



Мал. 9.2

Якщо, наприклад, довжина моделі літака в 100 разів менша від довжини справжнього літака, то і довжина крила моделі повинна бути в 100 разів меншою від довжини крила справжнього літака тощо (мал. 9.2).

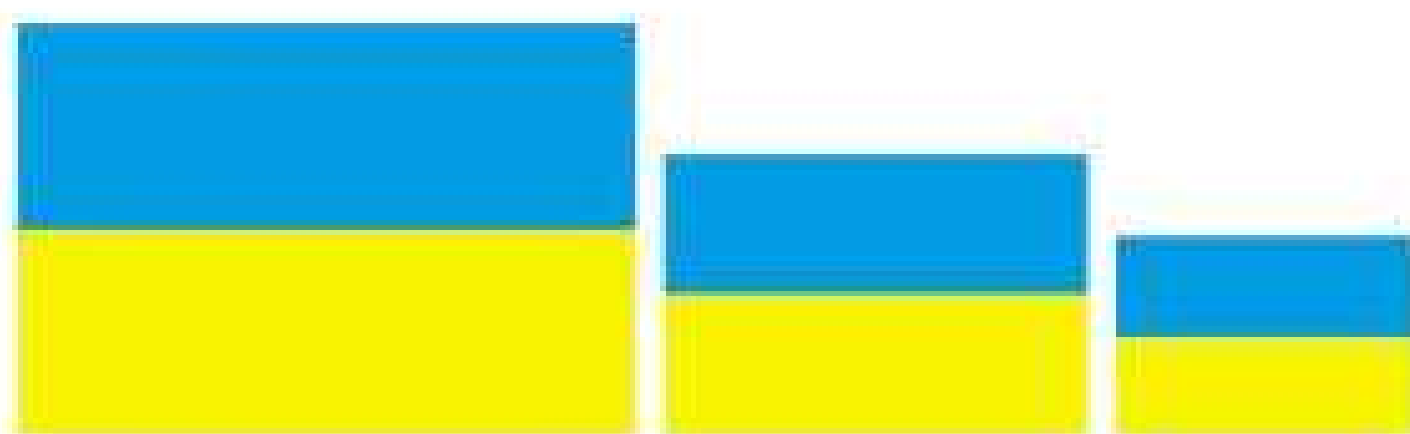
Якщо дві фігури подібні, то всі їх відповідні розміри пропорційні.

Фігури схожих форм називають **подібними фігурами**. Кожне коло подібне іншому колу, кожний півкруг подібний іншому півкругу, кожний квадрат подібний іншому квадрату, кожний рівносторонній трикутник подібний іншому рівносторонньому трикутнику. Надруковані однаковим шрифтом літери

A, A, A, A, A, a, a, a

як геометричні фігури подібні одна одній. Проте жодна з них не подібна фігурі *a*, що позначає цю саму літеру.

Розглянемо ще один приклад. Державний прапор України може зображуватись за допомогою різних розмірів (мал. 9.3), проте співвідношення ширини прапора до його довжини завжди має бути сталим, а саме $2 : 3$ (мал. 9.4). Усі зображення прапора подібні до оригіналу, а отже — і між собою.



Мал. 9.3



Мал. 9.4

У геометрії подібність фігур використовується часто, тому існує і загальноприйнятий знак подібності $\sim$. Щоб виразити, що трикутник ABC подібний трикутнику KPT , пишуть $\triangle ABC \sim \triangle KPT$.

Два трикутники називають **подібними**, якщо їх відповідні кути рівні, а сторони пропорційні.

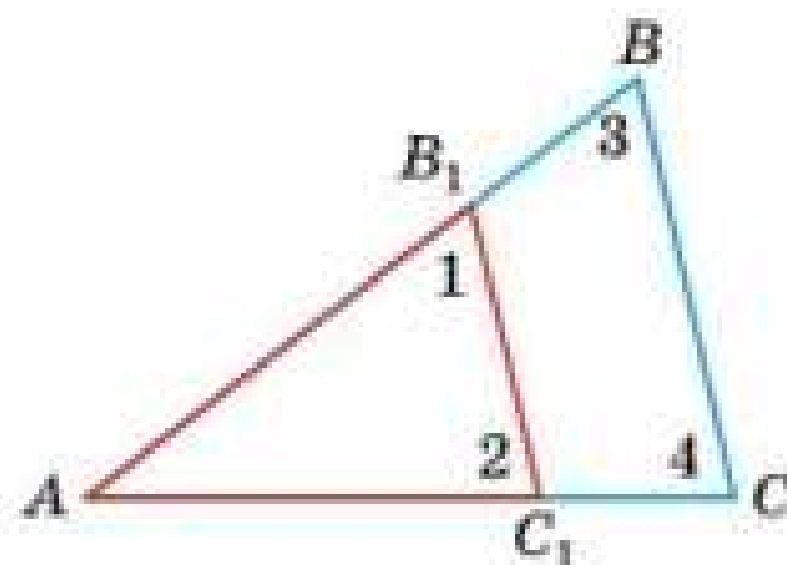
Якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то правильні такі рівності:

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1$.

Наступна теорема наводить простий і дуже важливий приклад утворення подібних трикутників.

Теорема 19. Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник, а пряма B_1C_1 , яка перетинає його, паралельна стороні BC (мал. 9.5). Доведемо, що $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$.

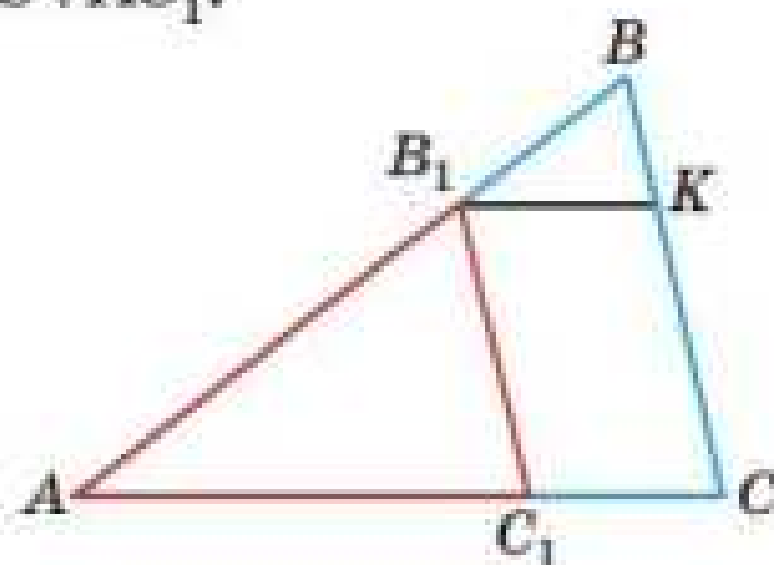


Мал. 9.5

Кут A у цих трикутників спільний, $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$, як відповідні кути при паралельних прямих BC і B_1C_1 . Отже, відповідні кути цих трикутників рівні. Залишається довести, що їх сторони пропорційні. За узагальненою теоремою Фалеса $AB : AB_1 = AC : AC_1$.

Проведемо відрізок B_1K , паралельний AC (мал. 9.6). Оскільки KCC_1B_1 — паралелограм, то $B_1C_1 = KC$. А за узагальненою теоремою Фалеса $BC : KC = BA : B_1A$. З двох останніх пропорцій випливає рівність трьох відношень: $AB : AB_1 = AC : AC_1 = BC : B_1C_1$.

Отже, відповідні кути трикутників ABC і AB_1C_1 рівні, а сторони пропорційні, тому ці трикутники подібні.



Мал. 9.6

На доведену теорему далі посилатимемося часто, тому називатимемо її *основною теоремою про подібність трикутників*.

Якщо трикутники ABC і AB_1C_1 подібні з коефіцієнтом подібності k , то $AB : AB_1 = AC : AC_1 = BC : B_1C_1 = k$, де k — деяке додатне число. Це число називають коефіцієнтом подібності. У цьому випадку всі лінійні розміри трикутника ABC у k разів більші (якщо $k > 1$) за відповідні розміри трикутника AB_1C_1 . У подібних трикутниках не тільки сторони, а й їхні відповідні медіани (m і m_1), бісектриси (l і l_1), висоти (h і h_1), периметри (P і P_1), радіуси (r і r_1) вписаних чи описаних кіл пропорційні з тим самим коефіцієнтом. Якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то:

$$\begin{aligned} AB &= kA_1B_1, AC = kA_1C_1, BC = kB_1C_1, \\ P &= kP_1, h = kh_1, m = km_1, r = kr_1, l = kl_1. \end{aligned}$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Подібність геометричних фігур — це відношення (як і відношення рівності, паралельності тощо). Воно має такі властивості:

Якщо $F \sim F_1$, то і $F_1 \sim F$.

Якщо $F \sim F_1$ і $F_1 \sim F_2$,

то $F \sim F_2$ (мал. 9.7).

Докладніше про подібні фігури ти дізнаєшся у старших класах, а тут обмежимося розгляданням подібних трикутників. Зобразимо діаграмою співвідношення між поняттями «рівні трикутники» і «подібні трикутники».

Якщо два трикутники рівні, то і їх відповідні кути рівні, а сторони одного пропорційні відповідним сторонам другого, бо кожне з відношень дорівнює 1. Отже, два рівні трикутники є водночас і подібними трикутниками. Проте не завжди подібні трикутники дорівнюють один одному (мал. 9.8).



Мал. 9.7



Мал. 9.8

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які фігури називають подібними? Наведи приклади подібних фігур.
2. Які два трикутники називають подібними?
3. Трикутники ABC і KPT рівні. Чи подібні вони?
4. Трикутники ABC і KPT подібні. Чи рівні вони?
5. Сформулюй основну теорему про подібність трикутників.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Доведи, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

• Нехай трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні з коефіцієнтом подібності k . Тоді
 $AB = kA_1B_1$, $BC = kB_1C_1$, $CA = kC_1A_1$.

Відношення периметрів даних трикутників:

$$\begin{aligned} P_{ABC} : P_{A_1B_1C_1} &= (AB + BC + CA) : (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) = \\ &= (kA_1B_1 + kB_1C_1 + kC_1A_1) : (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) = \\ &= k(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) : (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) = k. \end{aligned}$$

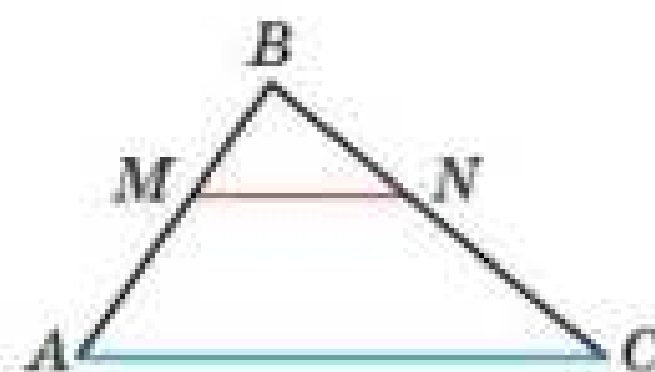
Отже, $P_{ABC} : P_{A_1B_1C_1} = k$.

2. Точка M ділить сторону AB $\triangle ABC$ у відношенні $AM : BM = 3 : 2$ (мал. 9.9). Знайди MN , якщо $AC = 15$ см, $MN \parallel AC$, $N \in BC$.

• $\triangle MBN \sim \triangle ABC$ за основною теоремою про подібні трикутники. Якщо трикутники подібні, то їх сторони пропорційні, тобто

$$\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{AC}, \quad \frac{2}{5} = \frac{MN}{15}, \quad \text{тоді } 5MN = 30, \quad \text{звідки } MN = 6.$$

Відповідь. $MN = 6$ см.



Мал. 9.9

ВИКОНАЄМО УСНО

- 500.** Вулиця KP — є середньою лінією трикутника ABC , що утворюється вулицями AB , BC та AC (мал. 9.10).

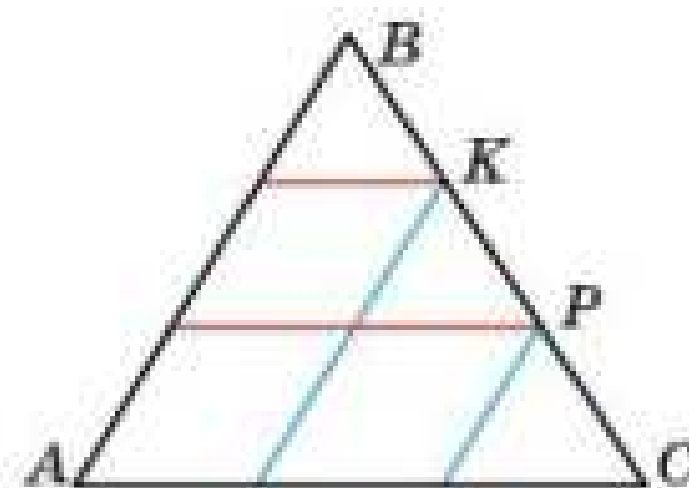
- а) Чи подібні трикутники ABC і KBP ?
- б) Чи пропорційні відрізки BP і BC відрізкам KP і AC ? А відрізки BP і PC відрізкам KP і AC ?
- в) Знайди відношення $KB : AB$, $BP : PC$, $KP : AC$.
- г) У скільки разів $P_{\triangle ABC}$ більший за $P_{\triangle KBP}$?



Мал. 9.10



501. Через точки K і P на стороні BC трикутника ABC проведено прямі, паралельні AB і AC (мал. 9.11). Скільки пар подібних трикутників утворилося?



Мал. 9.11

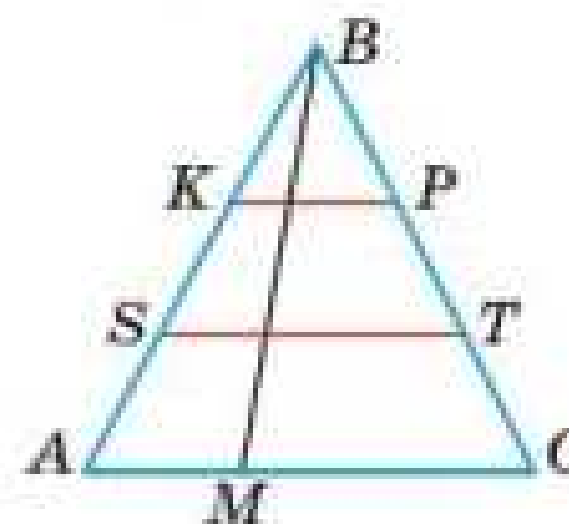
502. У трикутнику проведено всі його середні лінії. Скільки утворилося трикутників, подібних даному трикутнику?

503. Чи подібні два трикутники, якщо сторони одного дорівнюють 2 м, 3 м і 4 м, а другого — 3 м, 4 м і 5 м?

504. Чи можуть бути подібними прямокутний і тупокутний трикутники?

505. Чи правильно, що трикутник, подібний рівнобедреному трикутнику, рівнобедрений?

506. Скільки пар подібних трикутників зображено на малюнку 9.12?



Мал. 9.12

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

507. Намалюй фігури, що утворяться після виконання частини коду в Scratch. Чи є подібними ці фігури?

508. На малюнку 9.13 $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

- Укажи пари подібних трикутників;
- напиши пропорції, що починаються з відношення:

$$OA : OB, \quad OA : AB, \\ AB : A_1B_1, \quad A_2B_2 : OB_2.$$

509. Промені OA , OB і OC перетинають паралельні прямі AB і A_1B_1 (мал. 9.14). При цьому $OA : OA_1 = 2 : 3$.

- Укажи пари подібних трикутників.
- Знайди відношення

$$OB : OB_1, \quad OC : OC_1, \quad AB : A_1B_1, \\ OA : AA_1, \quad AC : A_1C_1.$$

- Склади кілька пропорцій, які починаються з відношення:

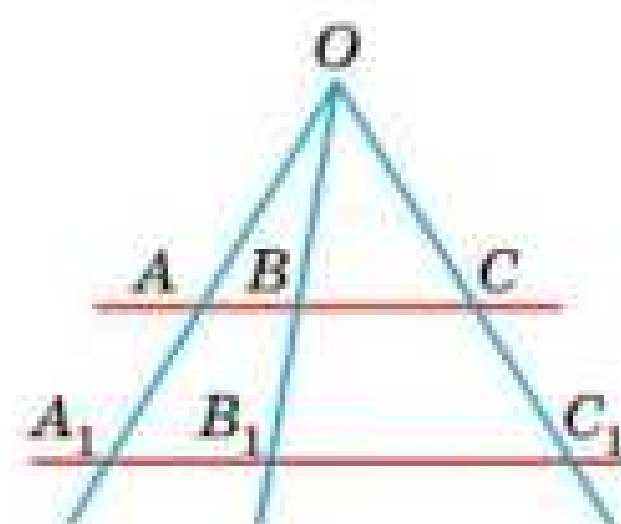
$$\frac{OA}{OA_1}; \quad \frac{OB}{OB_1}; \quad \frac{AC}{A_1C_1}.$$

- Чи правильні пропорції:

$$OA : AA_1 = OB : BB_1, \\ AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1, \\ OA : OB = OB : OC, \\ AB : A_1B_1 = OB : OB_1?$$

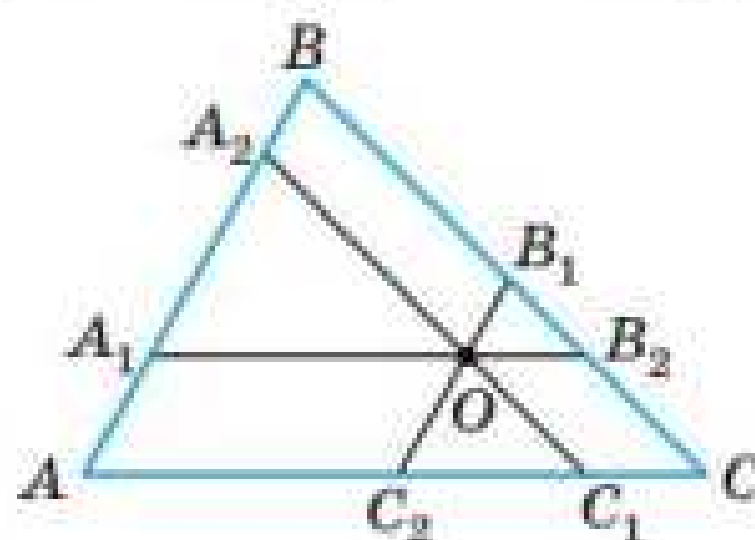


Мал. 9.13



Мал. 9.14

510. Гра. Через довільну точку O , що лежить усередині $\triangle ABC$, проведено прямі, паралельні його сторонам (мал. 9.15). Скільки при цьому утворилося трикутників? Чи подібні будь-які два з них? Один з учнів / одна з учениць визначає два трикутники, другий / друга має записати одну пропорцію, а третій / третя — ще одну.



Мал. 9.15

511. У трикутнику ABC через точку K сторони AC проведено пряму, паралельну стороні BC , до перетину зі стороною AB у точці L . Знайди:

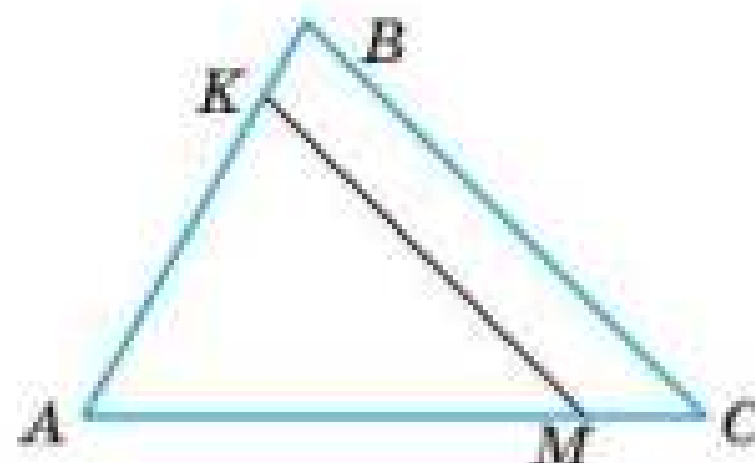
- відрізок BC , якщо $KL = 15$ см і $AL : AB = 3 : 5$;
- відрізок KL , якщо $BC = 27$ см і $AK : KC = 4 : 5$;
- периметр $\triangle AKL$, якщо $AB = 30$ см, $BC = 36$ см, $AC = 42$ см, $LK = 12$ см.

512. In triangle ABC , a line parallel to side BC is drawn through point P of side AB to intersect with side AC at point K . Find:

- the segment AB , if $KP = 9$ ft and $KP : CB = 3 : 4$;
- the perimeter $\triangle KPA$, if $AB = 18$ ft, $BC = 15$ ft, $AC = 22$ ft, $KP = 6$ ft.

513. **ЗНО** На сторонах AB та AC трикутника ABC задано точки K і M відповідно, $KM \parallel BC$ (мал. 9.16). Визнач довжину відрізка KM , якщо $AK = 6$ см, $KB = 2$ см, $BC = 10$ см.

514. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки M і K такі, що $MK \parallel AC$. Знайди відношення $AB : MB$, $MK : AC$ і $BK : KC$, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 21 см, а периметр трикутника MBK дорівнює 7 см.

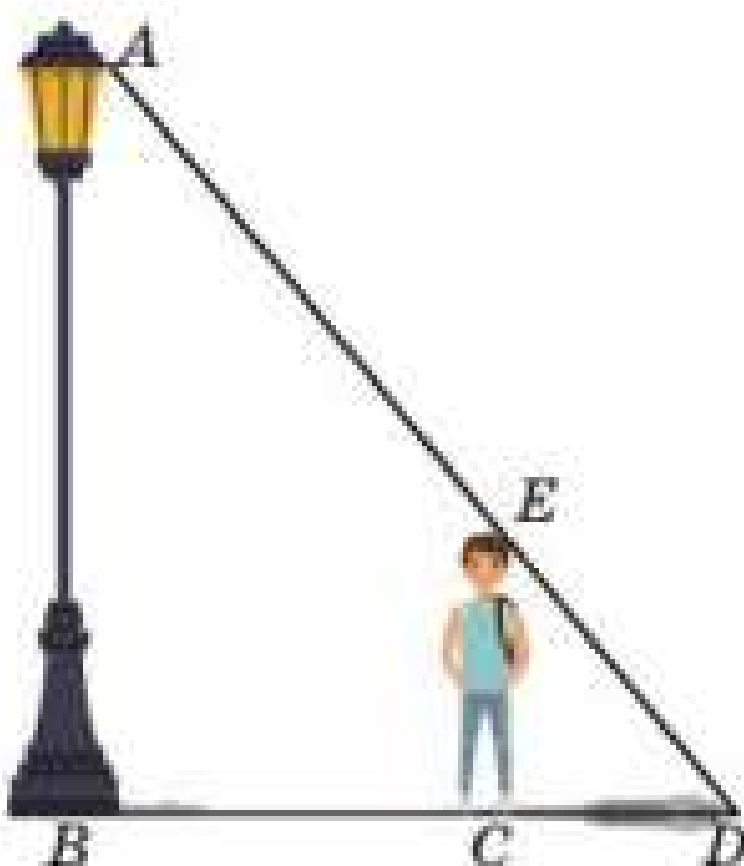


Мал. 9.16

515. Довжина тіні хлопчика відноситься до відстані від хлопчика до ліхтаря як 3 до 5. Знайди відношення периметрів утворених трикутників ABD та ECD на мал. 9.17.

516. **ЗНО** У трикутнику ABC : $AB = 31$ см, $BC = 15$ см, $AC = 26$ см. Пряма a , паралельна стороні AB , перетинає сторони BC і AC у точках M і N відповідно. Обчисли периметр трикутника MNC , якщо $MC = 5$ см.

517. З точки D гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC опущено перпендикуляр DE на катет BC . Доведи, що $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.



Мал. 9.17

518. Зобрази прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Паралельно гіпотенузі проведи пряму так, щоб периметр утвореного трикутника був у 2 рази менший. Чому дорівнюють катети цього трикутника?

519. На мал. 9.18 подано зображення двох картин української художниці Катерини Білокур. Картина «Квіти» (1959) має розміри 23×34 см, а картина «Соняшники» (1950) — 27×38 см. Установіть коефіцієнт подібності оригіналів картин і зображень в підручнику.



Мал. 9.18

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

520. Основи AD і BC рівнобічної трапеції дорівнюють 30 см і 20 см. Прямі AB і CD перетинаються в такій точці P , що $PB = 10$ см. Знайдіть довжини бічних сторін трапеції.

521. У трапеції $ABCD$ бічна сторона $AB = 12$ см, а більша основа $AD = 25$ см. Прямі AB і CD перетинаються в такій точці O , що $AO = 30$ см. Знайди довжину меншої основи трапеції.

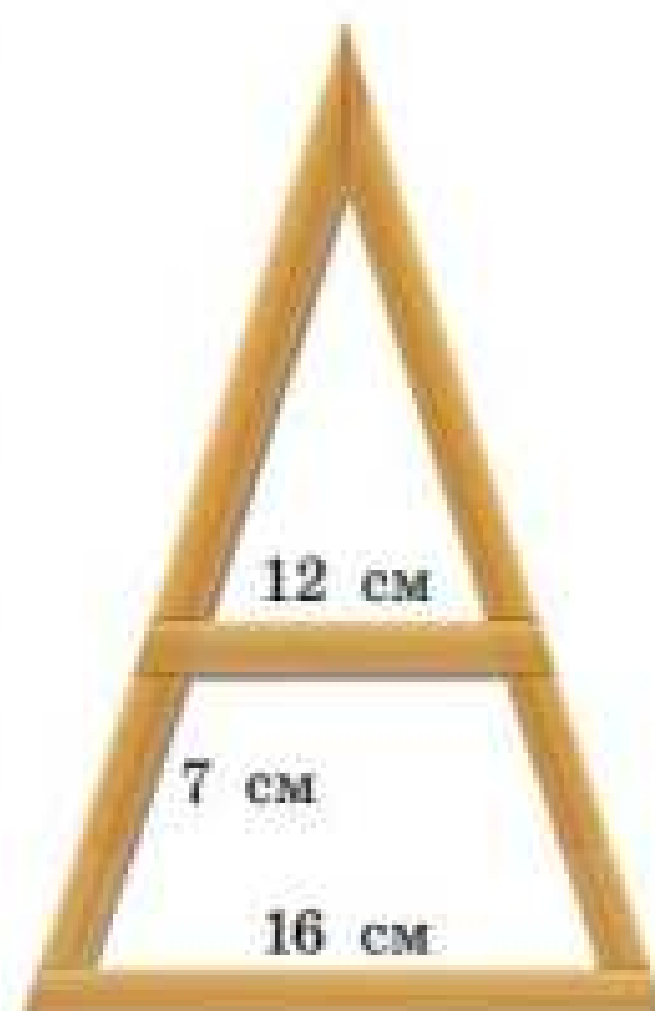
522. Іринка зробила власноруч дерев'яну рамку для фото родини у формі рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 16 см і 12 см, а бічна сторона — 7 см. Потім вона вирішила, що хоче доклеїти ще планки, щоб утворився трикутник і рамку було легко повісити (мал. 9.19). На скільки треба подовжити бічні сторони?

523. Основи трапеції дорівнюють 48 см і 72 см, а бічні сторони — 24 см і 22 см. На скільки треба подовжити кожен з бічних сторін, щоб вони перетнулися?

524. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки M і N відповідно так, що $MN \parallel AC$, $AM = BN$, $MB = 4$ см, $NC = 9$ см, $MN = 7$ см. Знайди AC і BN .

525. K і P — такі точки на сторонах AB і BC $\triangle ABC$, що $KP \parallel AC$ і $BK : BA = 1 : 3$. Чи подібні трикутники ABC і KBP ? Чому? Знайди:

- відношення $KB : AK$, $BP : PC$, $KP : AC$;
- периметри трикутників ABC і KBP , якщо $AK = KP = PB = 8$ см.

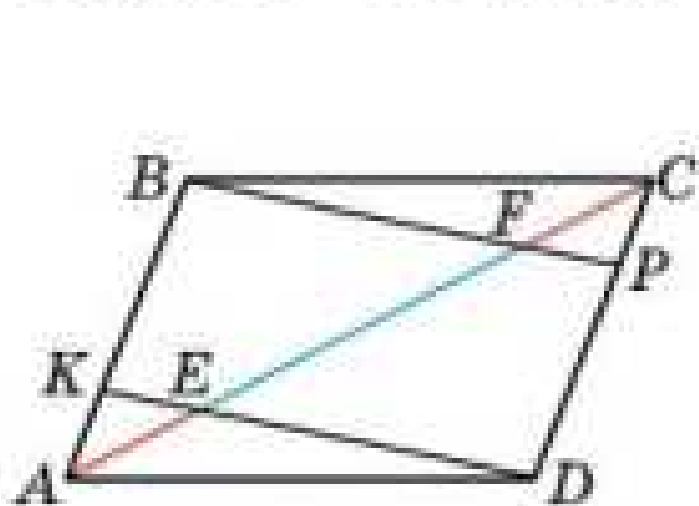


Мал. 9.19

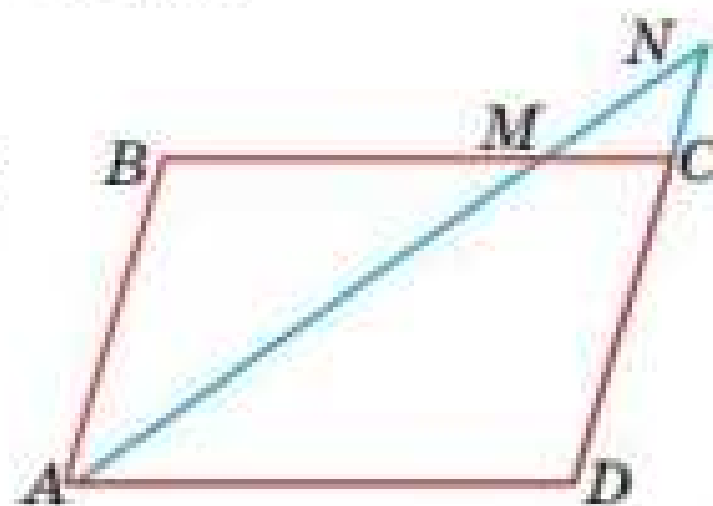
526. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ взято точки K і P такі, що $AK = CP = 0,25 AB$. Як відносяться відрізки, на які діагональ AC паралелограма ділиться прямими KD і BP (мал. 9.20)? Знайди відношення $KE : BF$.

527. Через точку M , узятую на стороні BC паралелограма $ABCD$, проведено пряму AM (мал. 9.21), яка перетинає пряму CD у точці N , $AM : MN = 5 : 2$. Знайди периметри $\triangle AND$ і $\triangle MNC$, якщо їх різниця дорівнює 16 см.

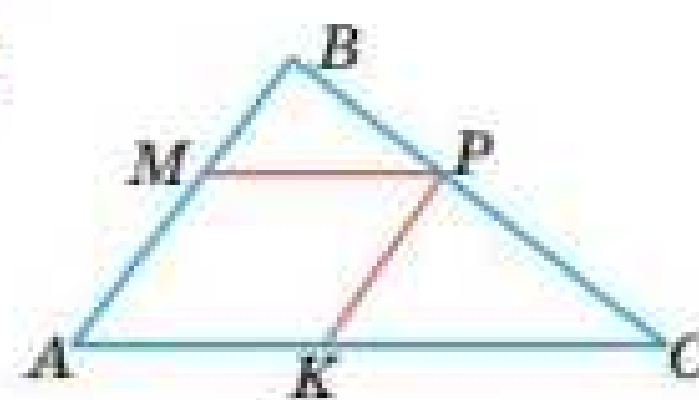
528. У $\triangle ABC$ (мал. 9.22) вписано ромб $AMPK$. Знайди сторону ромба, якщо $AB = 12$ см, $AC = 18$ см.



Мал. 9.20



Мал. 9.21

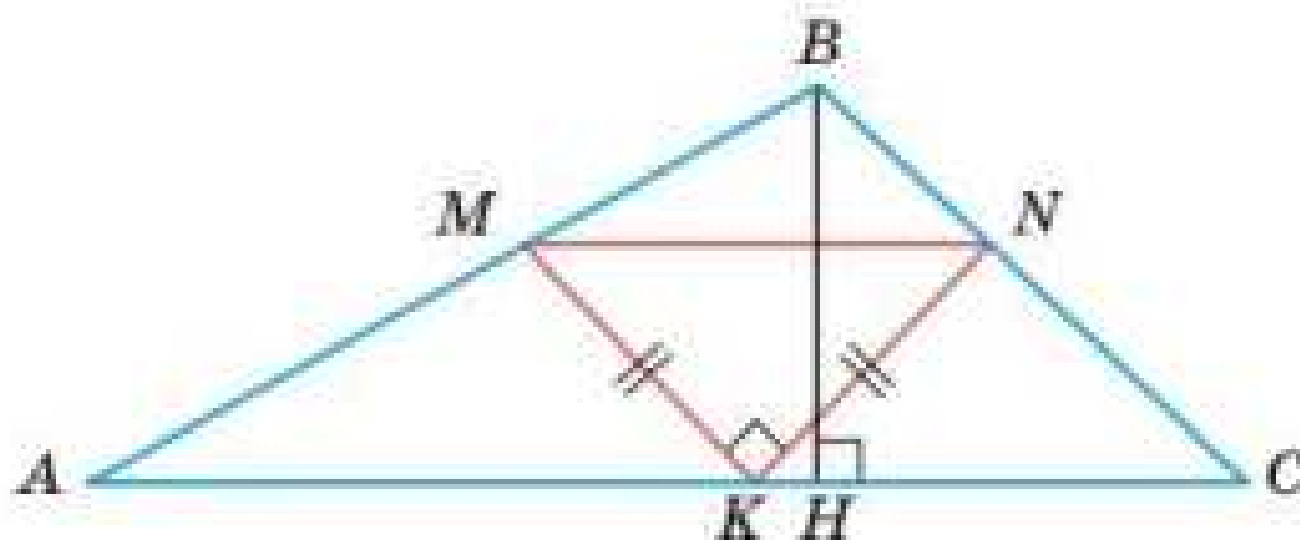


Мал. 9.22

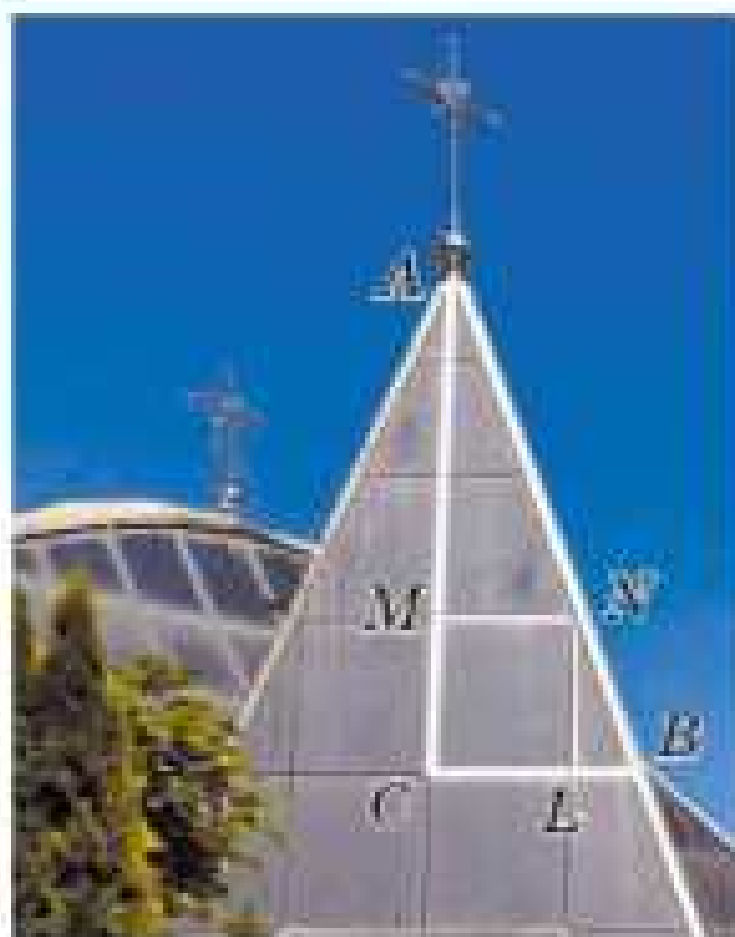
529. Знайди довжину сторони квадратної плитки, якщо $\triangle ABC$ — прямокутний, $AC = 30$ м, $BC = 2$ м (мал. 9.23).

530. У $\triangle ABC$ вписано прямокутний рівнобедрений $\triangle MKN$ так, що гіпотенуза $MN \parallel AC$, а $K \in AC$ (мал. 9.24). Знайди MN , якщо $AC = 30$ см, а висота $BH = 10$ см.

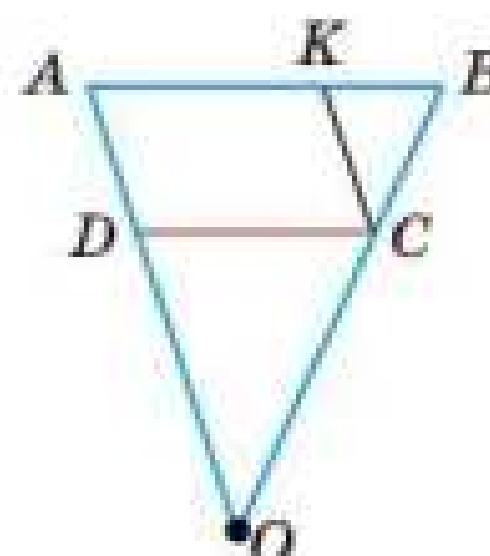
531. На малюнку 9.25 $AB \parallel DC$ і $KC \parallel AD$. Доведи, що $\triangle KCB \sim \triangle DOC$.



Мал. 9.24



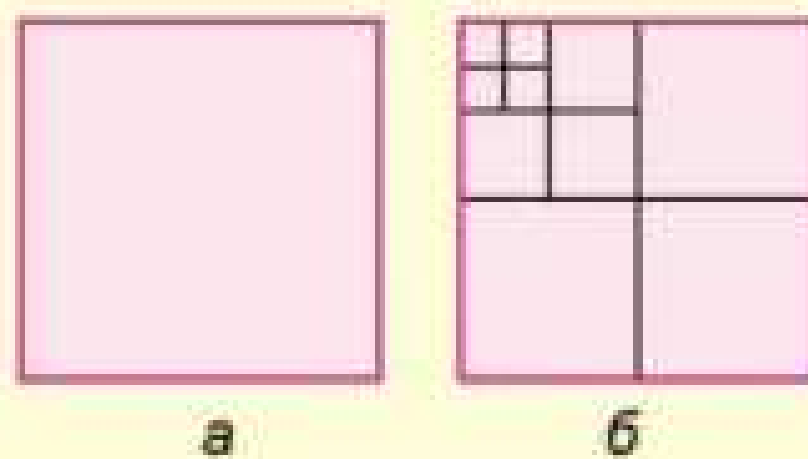
Мал. 9.23



Мал. 9.25

532. На кожній стороні ромба лежить по одній вершині квадрата, сторони якого паралельні діагоналям ромба. Знайди сторону квадрата, якщо діагоналі ромба дорівнюють 8 см і 12 см.

- 533.** На малюнку 9.26, *а* зображено квадрат. Поділимо його на 4 рівних квадрати, а потім один з утворених квадратів ще раз поділимо на 4 менших квадрати. Повторимо такі самі дії, щоб вийшли квадрати, як на малюнку 9.26, *б*. Скільки квадратів зображено на малюнку 9.26, *б*? Чим вони відрізняються? Чи будуть подібними такі квадрати? У скільки разів периметр найбільшого квадрата більший за периметр найменшого квадрата?



Мал. 9.26

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

- 534.** Розглянь малюнок 9.27, на якому зображено послідовну побудову *трикутника (решітки) Серпінського*. Подумай і встанови алгоритм побудови такого трикутника. Спробуй самостійно намалювати такий трикутник з найбільшою кількістю «отворів». Скільки синіх трикутників утворюється на кожному етапі? Доведи, що всі сині трикутники подібні між собою.



Мал. 9.27

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 535.** У трапеції $ABCD$ $MN \parallel AD$, $M \in AB$, $N \in CD$. Знайди AM і BM , якщо $AB = 24$ см і $CN : ND = 5 : 7$.
- 536.** Точка M — основа перпендикуляра, опущеного з точки перетину діагоналей ромба $ABCD$ на сторону BC . Знайди відношення $BM : MC$, якщо $\angle B = 60^\circ$.
- 537.** Діагоналі паралелограма дорівнюють 10 см і 14 см. Знайди периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін паралелограма.



§ 10 ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

triangle similarity theorems — ознаки подібності трикутників

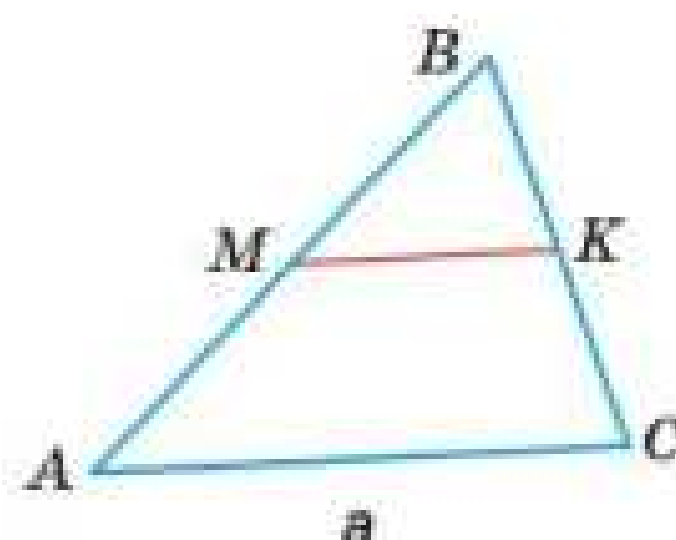
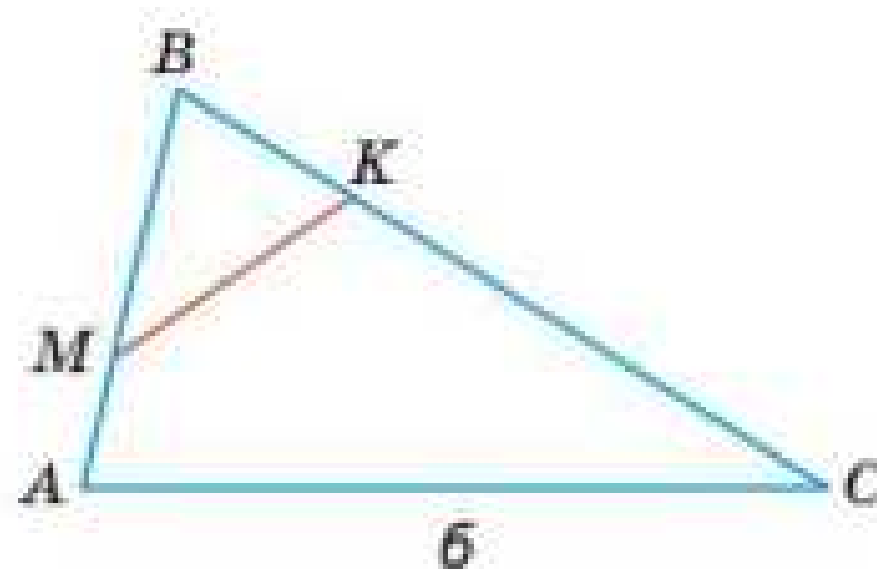
Ти вже знаєш, що трикутники подібні, якщо їх кути рівні, а сторони пропорційні. Чи завжди потрібно перевіряти виконання всіх цих умов для того, щоб довести подібність двох трикутників? Виявляється, що ні, не завжди.

Розглянемо трикутники ABC і MBK (мал. 10.1, а). Якщо $MK \parallel AC$, то за основною теоремою про подібність трикутників $\triangle ABC \sim \triangle MBK$.

А якщо MK не паралельна AC ? Чи можуть у цьому випадку бути подібними трикутники ABC і MBK (мал. 10.1, б)?

Щоб відповісти на це та багато інших запитань щодо подібності трикутників, використовують ознаки подібності трикутників.

Ознаки подібності трикутників аналогічні ознакам рівності трикутників.

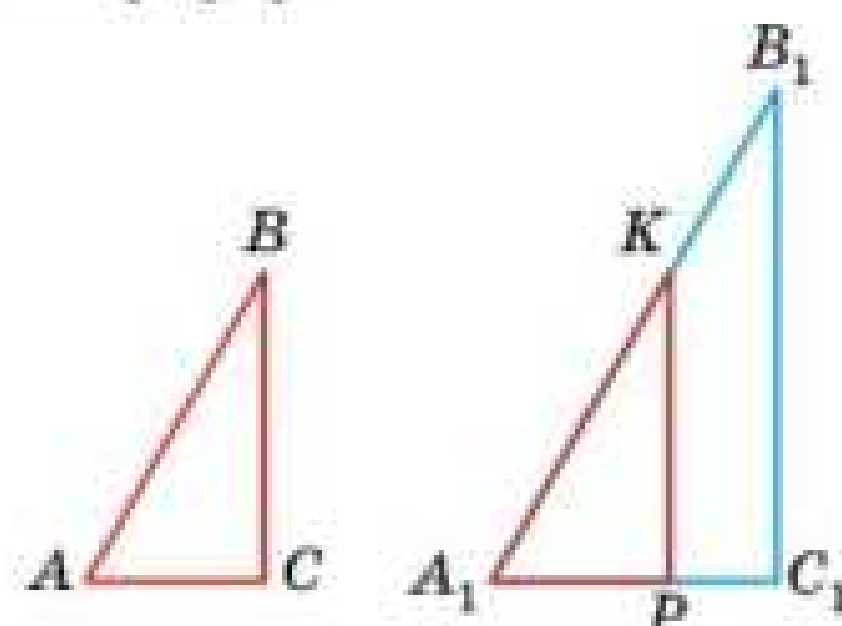


Мал. 10.1

Теорема 20. (перша ознака подібності трикутників). Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Доведення. Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$. Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

За такої умови розглядувані трикутники можуть бути рівними, а рівні трикутники — подібні. Якщо дані трикутники нерівні і, наприклад, другий більший за перший, то на стороні A_1B_1 відкладемо відрізок A_1K , що дорівнює AB (мал. 10.2). Провівши відрізок KP , паралельний B_1C_1 , утворимо трикутник A_1KP , що дорівнює $\triangle ABC$. Адже $A_1K = AB$, $\angle A_1 = \angle A$, $\angle A_1KP = \angle B_1 = \angle B$.

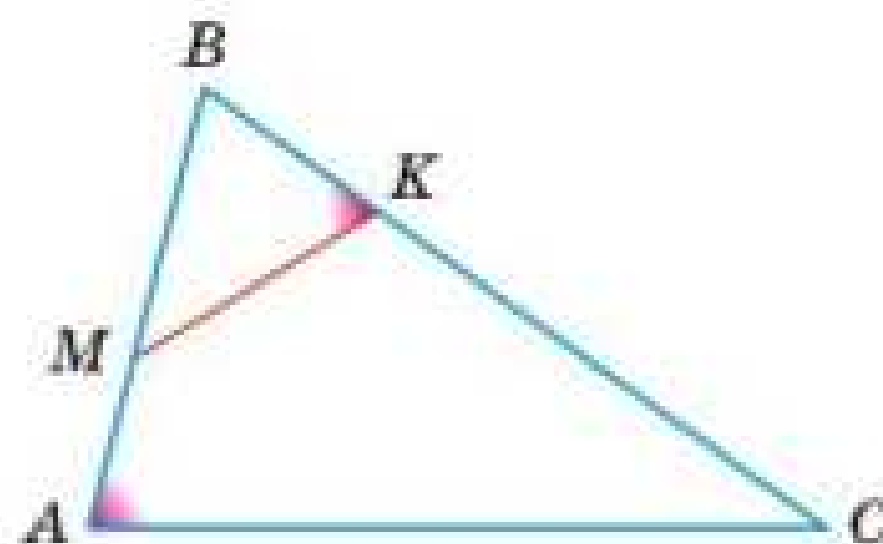


Мал. 10.2

За теоремою про подібні трикутники $\triangle A_1B_1C_1$ подібний $\triangle A_1KP$, а він дорівнює $\triangle ABC$. Отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Розглянемо трикутники, зображені на малюнку 10.3. Кут B у них спільний. Якщо, наприклад, $\angle BAC = \angle MKB$, то $\triangle ABC$ подібний $\triangle KBM$ за першою ознакою.

Можна довести ще дві ознаки подібності трикутників.



Мал. 10.3

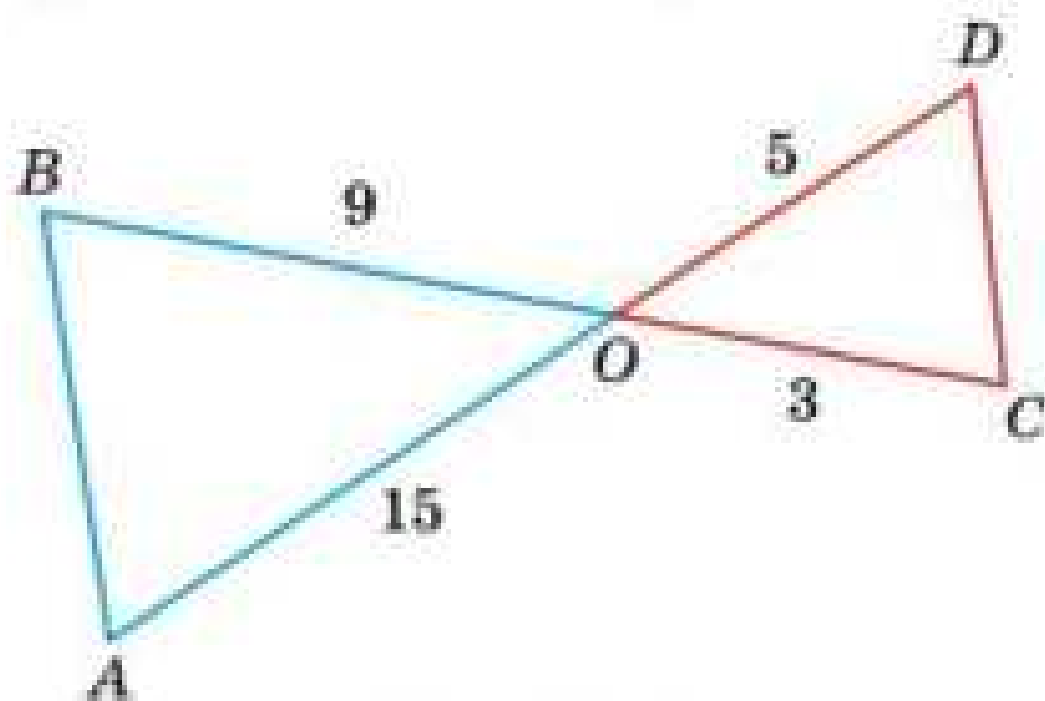
Теорема 21. (друга ознака подібності трикутників). Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Теорема 22. (третья ознака подібності трикутників). Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то такі трикутники подібні.

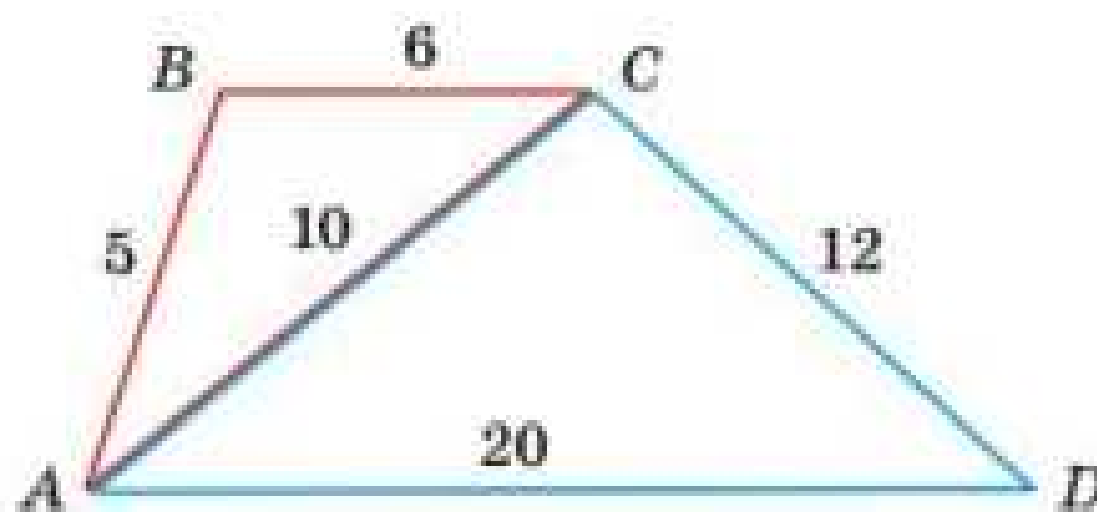
Чи будуть подібними трикутники, зображені на малюнку 10.4?

Розглянемо $\triangle AOB$ і $\triangle DOC$. $\angle AOB = \angle COD$ як вертикальні. $AO : OD = 15 : 5 = 3 : 1$, $BO : OC = 9 : 3 = 3 : 1$, тому $AO : OD = BO : OC$. Отже, $\triangle AOB$ і $\triangle DOC$ подібні за другою ознакою.

Розглянемо ще один приклад. Чи подібні трикутники ABC і ACD , зображені на малюнку 10.5?



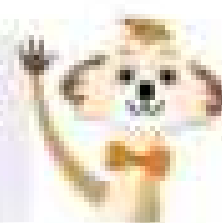
Мал. 10.4



Мал. 10.5

Оскільки $AB : AC = BC : CD = AC : AD = 1 : 2$, то сторони трикутників пропорційні. Отже, $\triangle ABC$ і $\triangle ACD$ подібні за третьою ознакою.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Подібність трикутників. Урок 4).



ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

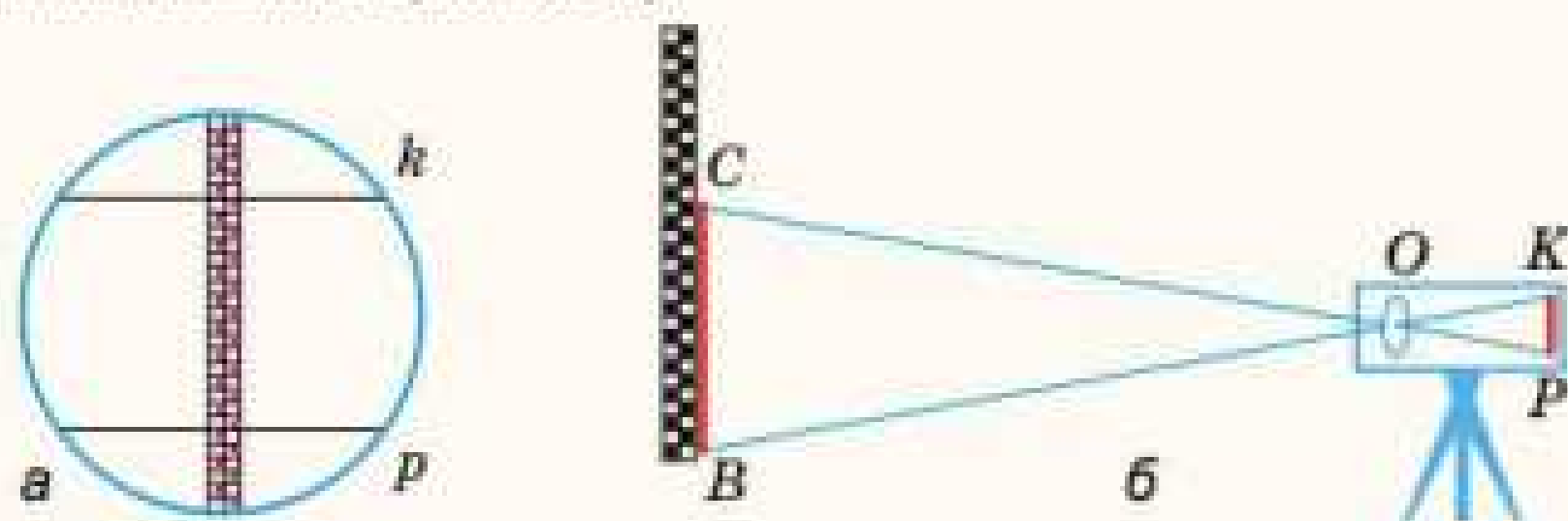


Мал. 10.6

Властивості подібних трикутників використовуються в багатьох геодезичних приладах, зокрема в далекомірах. Коли створюють план, прокладають дорогу, будують греблю, завод чи будь-яку іншу велику споруду, доводиться робити чимало вимірювань відстаней. Тепер це найчастіше роблять, користуючись далекомірами.

Уяви, що геодезист має визначити відстань між пунктами A , в якому він перебуває, і B , у якому помічник тримає вертикальну рейку, поділену на дециметри і сантиметри (мал. 10.6). В об'єктиві зорової труби, у яку дивиться геодезист, є дві горизонтальні тонкі лінії k і p (мал. 10.7, а). Якщо між ними вміщається, наприклад, 97 см рейки, яку тримає його помічник, це означає, що шукана відстань між ними дорівнює 97 м. Бо трикутники OBC і OKP , схематично зображені на малюнку 10.7, б, подібні, й коефіцієнт подібності підібрано так, щоб кількість сантиметрів геодезичної рейки, що вміщуються в об'єктиві між лініями k і p , дорівнювала кількості метрів у відстані AB . При цьому додається певна стала у кілька сантиметрів.

Завдяки сучасним далекомірам можна визначати подібні відстані з точністю до сантиметра. Вимірювання таких відстаней безпосередньо мірною стрічкою чи рулеткою дає більшу похибку.



Мал. 10.7

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які трикутники називають подібними?
2. Сформулюй ознаки подібності трикутників.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — два квадрати (мал. 10.8). K і K_1 — середини їх сторін BC і B_1C_1 . Чи подібні трикутники ABK і $A_1B_1K_1$? А трикутники AKD і $A_1K_1D_1$?

• Кути B і B_1 трикутників ABK і $A_1B_1K_1$ рівні, бо прямі.

$$BK : BA = 1 : 2 \text{ і } B_1K_1 : B_1A_1 = 1 : 2.$$

Тому за другою ознакою подібності $\triangle ABK \sim \triangle A_1B_1K_1$.

З доведеного випливає, що

$$AK : A_1K_1 = AB : A_1B_1. \text{ А оскільки}$$

$$AK = KD, A_1K_1 = K_1D_1, AB = AD$$

і $A_1B_1 = A_1D_1$, то

$$AK : A_1K_1 = AD : A_1D_1 = KD : K_1D_1.$$

За третьою ознакою подібності трикутників $\triangle AKD \sim \triangle A_1K_1D_1$.

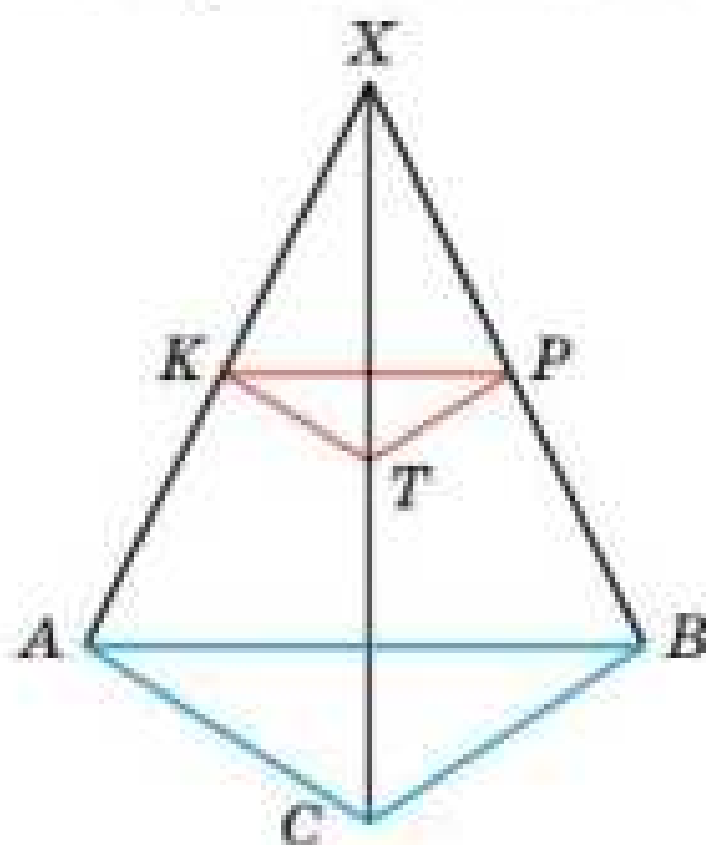
2. Нехай ABC — довільний трикутник, X — довільна точка, а K , P , T — середини відрізків XA , XB , XC (мал. 10.9). Доведи, що $\triangle KPT \sim \triangle ABC$.

• Відрізки KP , PT , TK — середні лінії трикутників XAB , XBC , XCA . Тому

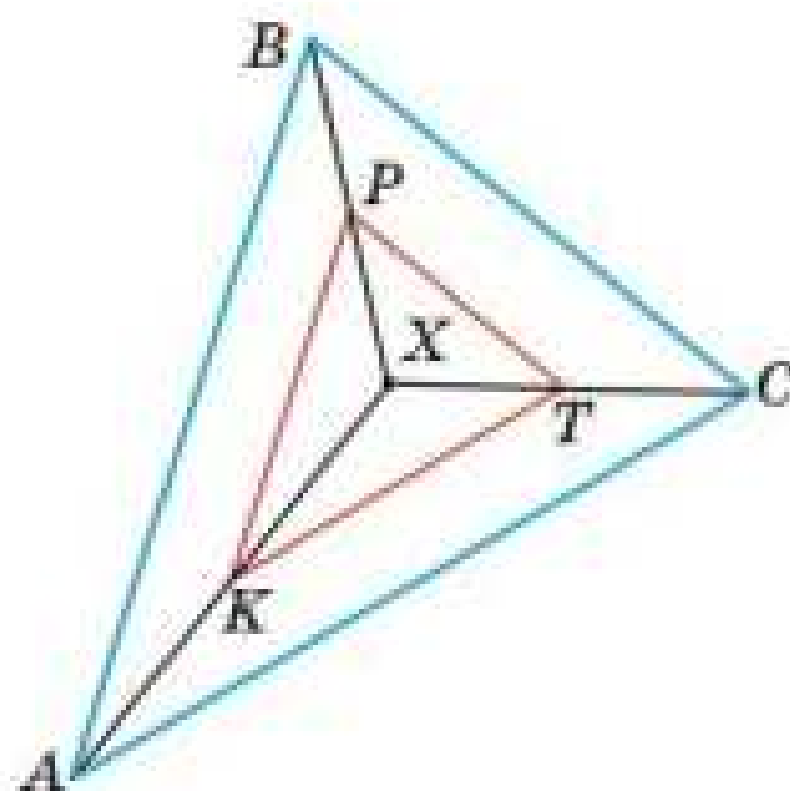
$$KP : AB = PT : BC = TK : AC = 1 : 2.$$

Сторони $\triangle ABC$ пропорційні сторонам $\triangle KPT$, тому ці трикутники подібні (за третьою ознакою).

На малюнку 10.9 точка X лежить поза межами трикутника ABC .



Мал. 10.9



Мал. 10.10

Проте вона може бути і всередині трикутника (мал. 10.10), і на його стороні чи будь-де, навіть поза площиною ABC .



ВИКОНАЄМО УСНО



538. Чи будь-які два рівносторонні трикутники подібні? Чому?

539. Доведи, що два будь-які прямокутні рівнобедрені трикутники подібні.

540. K, P, M — середини сторін $\triangle ABC$. Чи подібні трикутники PMK і ABC ? Чому?

541. Довжини сторін одного трикутника дорівнюють a, b, c , а другого — $3a, 3b$ і $3c$. Чи подібні ці трикутники?

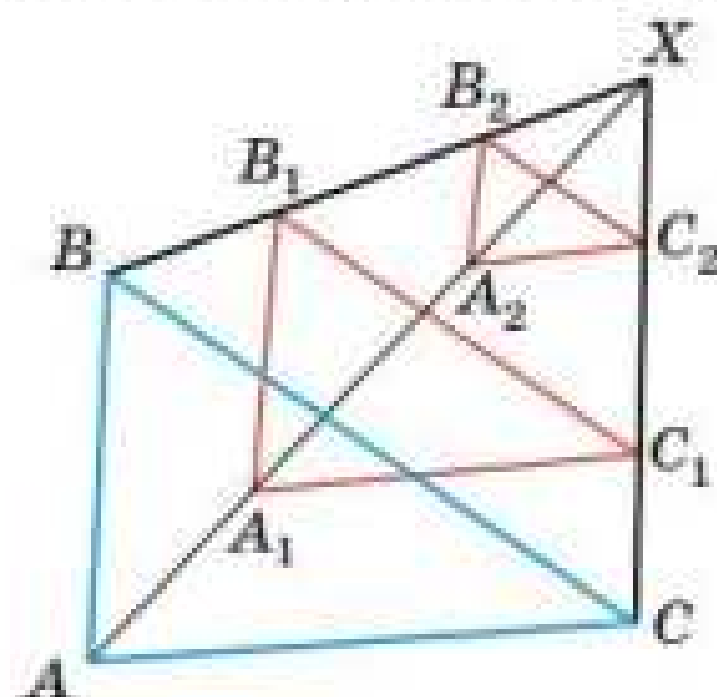
542. Чи подібні трикутники на Заставці для дипломатичних документів УНР, автором якої є Василь Кричевський (мал. 10.11)?



Мал. 10.11

543. Чи подібні два прямокутні трикутники, якщо один із них має кут 30° , а другий — 60° ?

544. ABC — довільний трикутник, а X — довільна точка (мал. 10.12). A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2 ділять відрізки XA, XB, XC на 3 рівні частини. Доведи, що кожний із трикутників $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ подібний $\triangle ABC$.



Мал. 10.12

545. Чи може пряма, не паралельна жодній стороні трикутника, відтинати від нього трикутник, подібний даному?

546. Чи подібні два трикутники, якщо їхні сторони мають довжини:

- а) 3 см, 4 см, 6 см і 9 дм, 14 дм, 18 дм;
- б) 2 см, 4 см, 3 см і 10 м, 15 м, 20 м?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А



547. Чи подібні трикутники ABC і KPT , якщо $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle P = 60^\circ$, $\angle T = 70^\circ$?

548. Чи подібні трикутники ABC і MKE , якщо $\angle A = 42^\circ$, $\angle C = 28^\circ$, $\angle K = 110^\circ$, $\angle E = 28^\circ$?

549. Чи подібні прямокутні трикутники, в одного з яких є гострий кут 42° , а в другого — гострий кут 48° ?

550. У двох рівнобедрених трикутників кути при вершині мають по 52° . Чи подібні ці трикутники?

551. Кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює 50° . Кут при вершині другого рівнобедреного трикутника дорівнює 80° . Чи подібні ці трикутники?

552. Гра. Один з учнів / одна з учениць задає міру кута при основі рівнобедреного трикутника, а другий / друга — кут при вершині другого рівнобедреного трикутника. Третій / третя має сказати, чи подібні ці трикутники.

553. Доведіть, що два рівнобедрені трикутники подібні, якщо кут при основі одного з них дорівнює куту при основі другого трикутника. А якщо рівні їхні кути при вершинах?

554. Чи подібні трикутники, утворені паралельними прямими на орнаменті Василя Кричевського (мал. 10.13)? Знайдіть BR , якщо:

а) $AC : RK = 3$, $BA = 5,4$;

б) $RK = 0,45$ см, $DL = 0,9$ см, $DB = 3,6$ см;

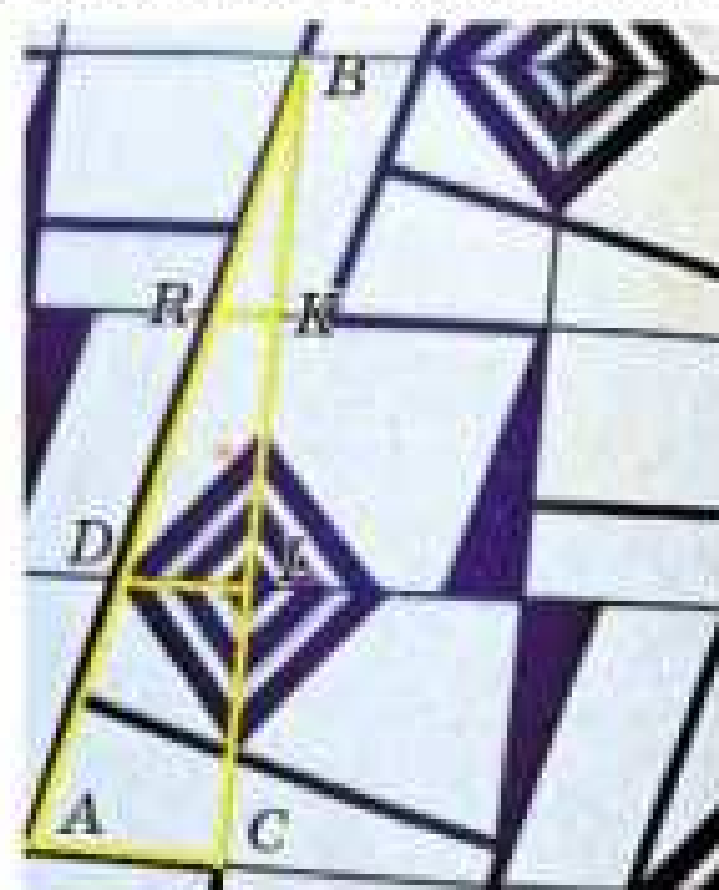
в) $RK : DL = 1 : 2$, $DR = 1,8$.

Чи подібні трикутники, суцільно зафарбовані чорним? Знайдіть на малюнку ще пари подібних трикутників. Дізнайтеся більше про орнаменти Василя Кричевського.

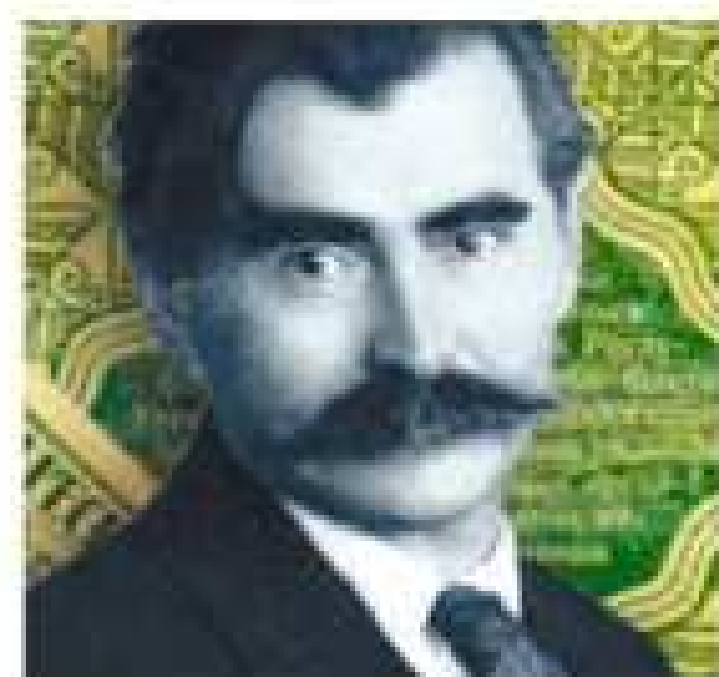
555. Дано трикутники ABC і KPT такі, що $\angle A = \angle K$, $\angle C = \angle T$, $AB = 8$ см, $AC = 12$ см, $PT = 15$ см, $KT = 18$ см. Знайди невідомі сторони трикутників.

556. Дано трикутники ABC і MKP такі, що $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle P$, $AB = 18$ см, $BC = 12$ см, $MK = 15$ см, $MP = 20$ см. Знайди невідомі сторони трикутників.

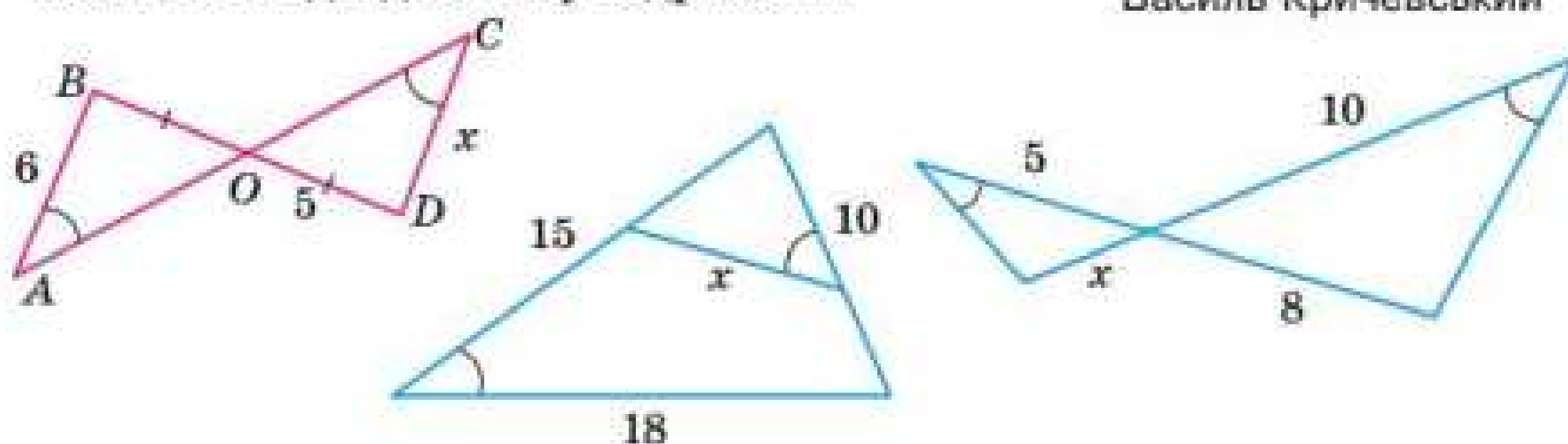
557. Використовуючи мал. 10.14, вкажи пари подібних трикутників, доведи їх подібність і знайди довжину відрізка x .



Мал. 10.13



Василь Кричевський



Мал. 10.14

558. Сторони одного трикутника дорівнюють 7 м, 9 м і 11 м. Знайди сторони трикутника, подібного даному, якщо його найменша сторона дорівнює 28 м.

559. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона — 18 см. Визнач периметр подібного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 6 см.

560. Сторони трикутника пропорційні числам 3, 5 і 6. Визнач сторони подібного йому трикутника, у якого:

- а) найменша сторона дорівнює 18 см;
- б) різниця найбільшої і найменшої сторін дорівнює 27 см;
- в) периметр дорівнює 28 см.

561. Сторони трикутника пропорційні числам 2, 4 і 7. Визнач сторони подібного йому трикутника, у якого:

- а) найбільша сторона дорівнює 21 см;
- б) сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 18 см;
- в) периметр дорівнює 39 см.

562. Усередині даного трикутника міститься другий трикутник, сторони якого паралельні сторонам даного. Чи подібні ці трикутники?

563. Дано $ABCD$ — паралелограм (мал. 10.15).

Доведи, що:

- а) $\triangle ABE \sim \triangle DFE$; б) $\triangle BCF \sim \triangle EAB$.

564. Дано $ABCD$ — паралелограм (мал. 10.16).

Доведи, що:

- а) $\triangle KBF \sim \triangle LAF$; б) $\triangle KBF \sim \triangle LDM$;
- в) $\triangle AFL \sim \triangle CMK$.

565. Користуючись малюнком 10.17, доведи, що $AB \parallel CD$.

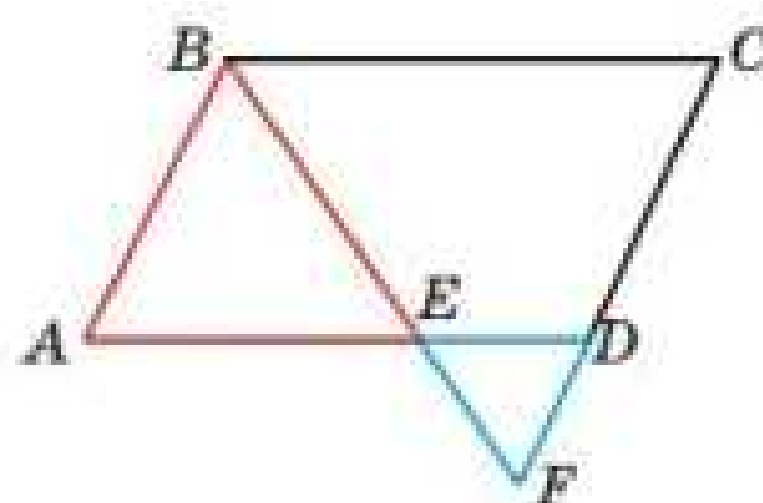
566. Дано трикутник ABC зі сторонами $AB = 40$ см, $BC = 24$ см і $AC = 56$ см. На AB відкладено відрізок $AD = 15$ см і проведено пряму $DE \parallel AC$. Визнач сторони $\triangle DBE$.

567. У $\triangle ABC$ $AB = 15$ см, $BC = 9$ см, $AC = 12$ см. З точки M сторони AB проведено прямі MN і MK ($N \in BC$, $K \in AC$), паралельні AC і BC . Знайди MN , MK , AK , якщо $AM = 5$ см.

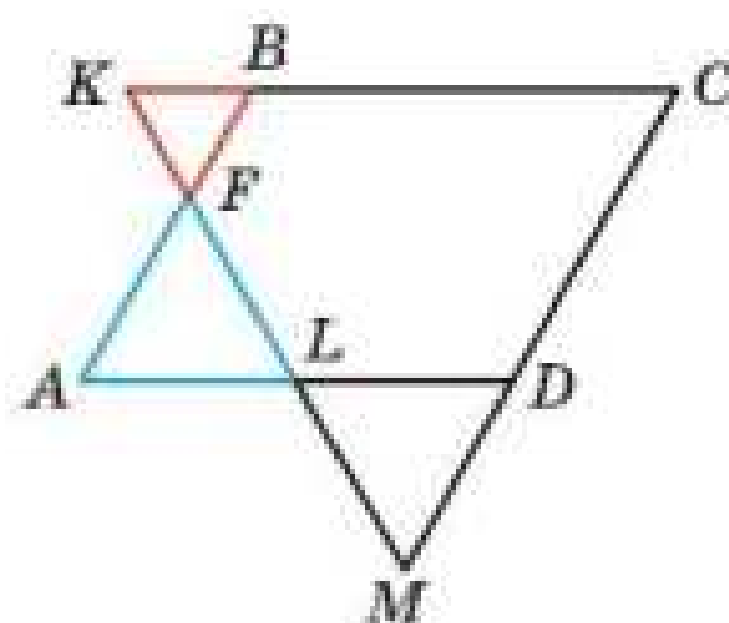
568. O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), у якої $AD = 15$ см, $BC = 12$ см, $AC = 18$ см. Знайди AO і OC .

569. O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$), у якої $AD = 24$ см, $BC = 9$ см, $BO = 6$ см. Знайди довжину діагоналі BD .

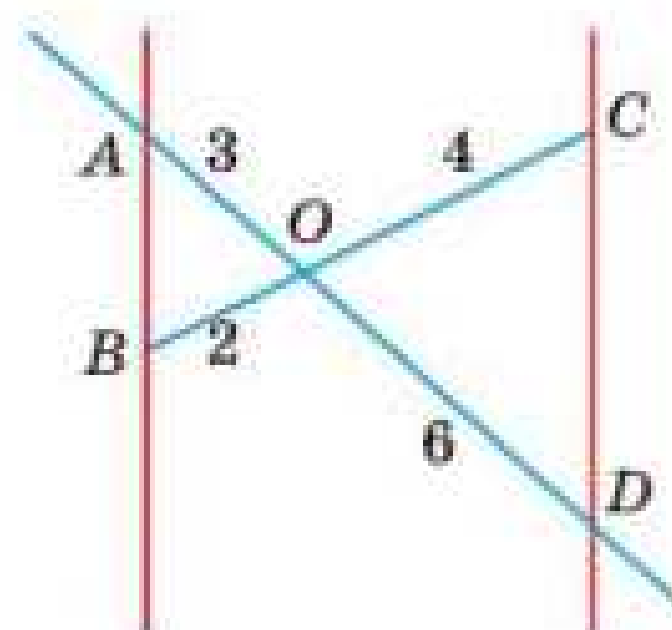
570. O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$, $OB = 14$ см, $OD = 18$ см, $AC = 24$ см. Знайди довжини відрізків OA і OC .



Мал. 10.15



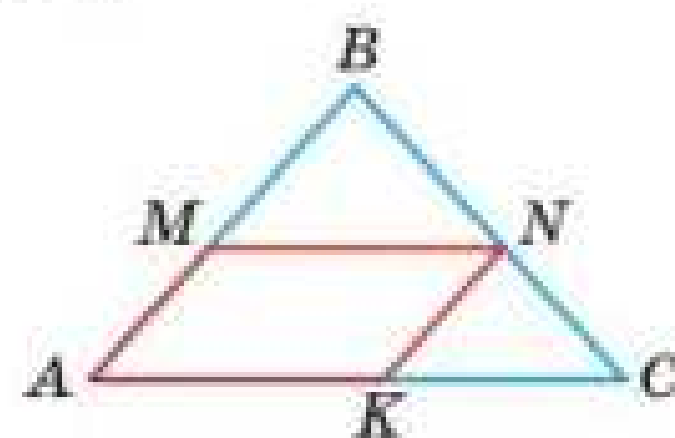
Мал. 10.16



Мал. 10.17

571. На скільки треба продовжити бічну сторону трапеції завдовжки 12 см, щоб вона перетнула продовження другої бічної сторони, якщо основи трапеції пропорційні числам 5 і 9?

572. У трикутник вписано паралелограм, кут якого збігається з кутом трикутника (мал. 10.18). Сторони трикутника, що утворюють цей кут, дорівнюють 6 см і 9 см, а відповідні паралельні їм сторони паралелограма пропорційні числам 2 і 3. Знайди сторони паралелограма.



Мал. 10.18

573. У трикутник вписано паралелограм, кут якого збігається з кутом трикутника. Сторони трикутника, що утворюють цей кут, дорівнюють 6 см і 15 см, а різниця відповідних паралельних їм сторін паралелограма дорівнює 8 см. Знайди сторони паралелограма.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

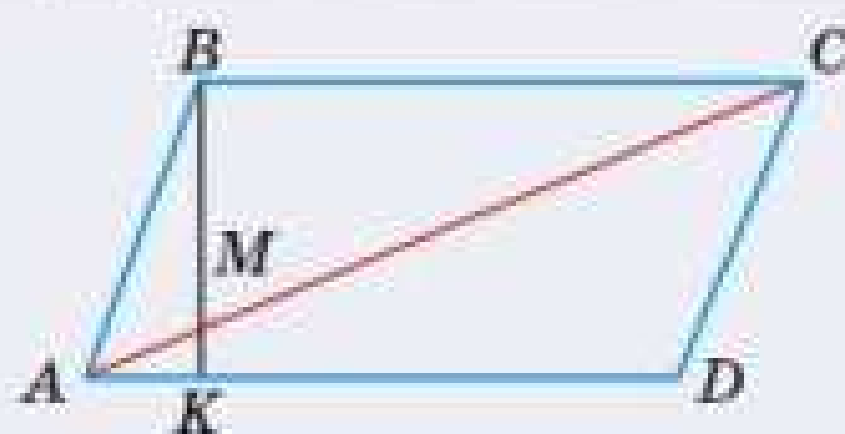
574. На сторонах AC і AB $\triangle ABC$ позначено точки K і P такі, що $\angle AKP = \angle B$. Доведи, що $\triangle AKP \sim \triangle ABC$.

575. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ позначено точки M і K такі, що $\angle MKB = \angle BAC$. Визнач подібні трикутники і доведи їх подібність.

576. У трапеції $ABCD$ $\angle ABC = \angle ACD$. Доведи, що $\triangle ABC \sim \triangle DCA$.

577. На стороні AD паралелограма $ABCD$ взято точку K так, що $AK : KD = 1 : 8$ (мал. 10.19). Знайди AC , якщо $AM = 2$ см.

578. On the AD side of the parallelogram $ABCD$, the point K is taken so that $AK : AD = 1 : 10$. Find BM and MK if $BK = 22$ in.



Мал. 10.19

579. **ЗНО** У паралелограмі $ABCD$ на стороні AD вибрано точку K . Діагональ AC і відрізок BK перетинаються в точці O . Визнач довжину сторони BC , якщо $AK = 12$ см, $OK = 2$ см, $OB = 3$ см.

580. У трикутнику ABC проведено відрізок DE так, що $DE \parallel AC$, $D \in AB$, $E \in BC$. Знайди DE , якщо:

а) $AB = c$, $AC = b$, $DB = m$;

б) $AC = b$, $AB = c$, $AD = n$.

581. Основи трапеції дорівнюють 16 см і 20 см, а діагоналі 12 см і 18 см. Знайди відрізки, на які діагоналі трапеції діляться в точці перетину.

582. У трапеції точка перетину діагоналей ділить одну з діагоналей на частини 12 см і 16 см, а частина другої діагоналі дорівнює 8 см.



Визнач другу діагональ і меншу основу, якщо більша основа дорівнює 20 см.

583. Основи трапеції дорівнюють a і b . У якому відношенні діляться діагоналі трапеції точкою їх перетину?

584. Знайди за малюнком 10.20 відстань AB , якщо $AC = 300$ м, $DC = 10$ м, $BC = 360$ м, $CF = 12$ м, $DF = 13$ м.

585. У $\triangle ABC$ $AC = 10$ см, $BC = 12$ см. На стороні BC взято точку M так, що $\angle AMC = \angle BAC$. Знайди MB і MC .

586. У $\triangle ABC$ $AB = 18$ см, $BC = 16$ см, $AC = 24$ см. На сторонах AB і BC взято точки M і N так, що $\angle MNB = \angle BAC$ і $BN : NC = 3 : 5$. Знайди MN .

587. У трапеції $ABCD$ $\angle ABC = \angle ACD$. Знайди довжину діагоналі AC , якщо основи BC і AD трапеції дорівнюють відповідно 9 см і 16 см.

588. Бічні сторони трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а більша основа — 27 см. Знайди довжину меншої основи, якщо діагональ ділить трапецію на два подібні трикутники.

589. **ЗНО** Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються в точці O . Знайди довжину основи BC трапеції, якщо $AD = 24$ см, $AO = 9$ см, $OC = 6$ см.

А	Б	В	Г	Д
6 см	9 см	12 см	16 см	18 см

590. Доведи, що в подібних трикутниках відповідні висоти (бісектриси, медіани) пропорційні відповідним сторонам.

591. Знайди відстані від точки перетину діагоналей до основ трапеції, які дорівнюють 8 см і 12 см, якщо висота трапеції дорівнює 15 см.

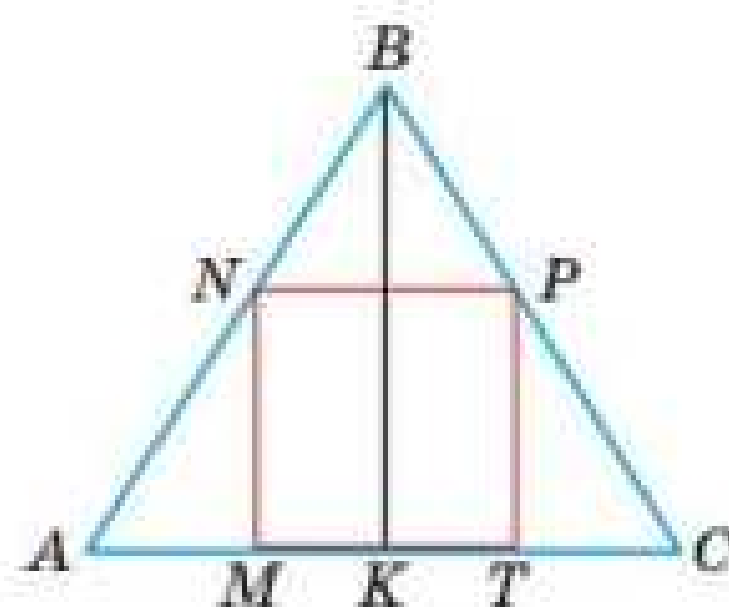
592. У рівнобедрений $\triangle ABC$ з основою $AC = 10$ см і висотою $BK = 6$ см вписано квадрат (мал. 10.21). Знайди периметр квадрата.

593. У $\triangle ABC$ зі стороною $AC = 27$ см і висотою $BK = 30$ см вписано прямокутник (мал. 10.22). Знайди сторони прямокутника, якщо вони пропорційні числам 5 і 9.

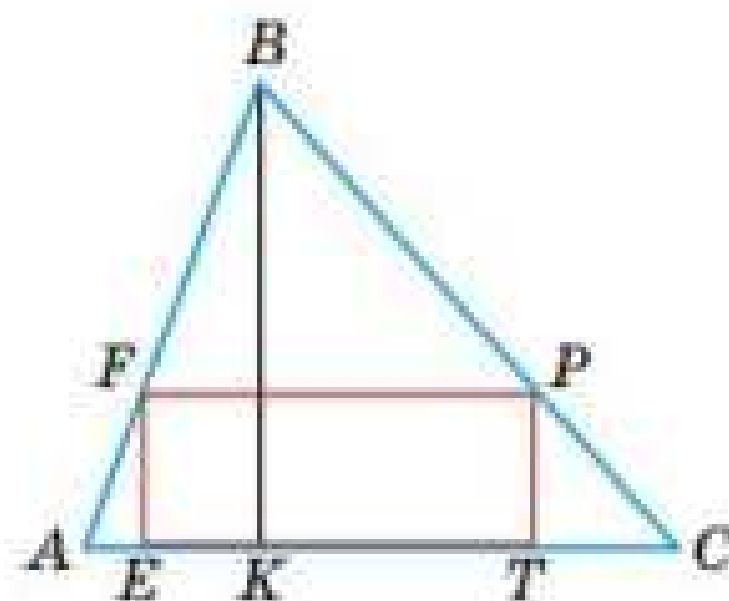
594. **ЗНО** Пряма, що проходить через точку перетину діагоналей трапеції, ділить одну з її основ у відношенні $m : n$. У якому відношенні вона ділить другу основу?



Мал. 10.20



Мал. 10.21



Мал. 10.22

- 595.** Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо бісектриса кута при основі відтинає від нього трикутник, подібний даному.

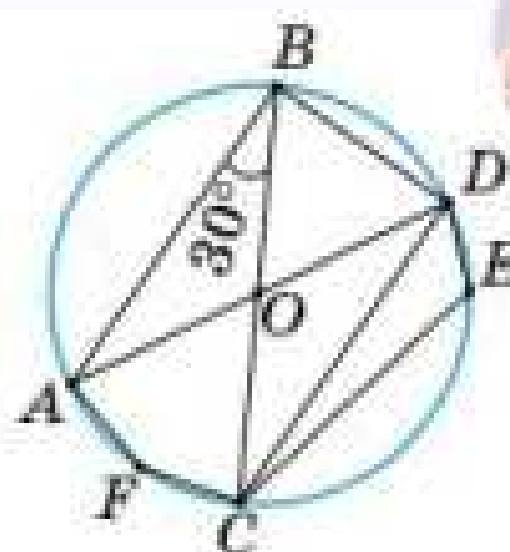
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

- 596.** Виріж із паперу два подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Розташуй їх на столі так, щоб прямі AA_1 , BB_1 , CC_1 перетиналися в одній точці. Скількома способами це можна зробити?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 597.** Чи подібні два квадрати, якщо їхні периметри різні? А два прямокутники?
- 598.** Радіус одного кола дорівнює 5 см, а діаметр другого 14 см. Чи подібні ці кола? Якщо так, то знайди коефіцієнт подібності.
- 599.** На малюнку 10.23 зображено коло із центром у точці O . Градусна міра кута ABC дорівнює 30° . Установи відповідність між кутами (1–4) і градусними мірами цих кутів (А–Д).



Мал. 10.23

1 $\angle AOC$	А 30°
2 $\angle ABD$	Б 150°
3 $\angle CED$	В 90°
4 $\angle AFC$	Г 60°
	Д 120°

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



Орнамент Василя Кричевського

§ 11 ЗАСТОСУВАННЯ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

applying triangle similarity — застосування подібності трикутників

Розглянемо, як на основі ознак подібності можна доводити важливі властивості бісектрис і медіан трикутника, хорд кола.

Теорема 23. Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник, а BL — його бісектриса (мал. 11.1). Покажемо, що $AL : LC = AB : BC$.

Проведемо пряму CK , паралельну BL , до перетину з прямою AB у деякій точці K . Зануємо кути, як на малюнку. Тоді $\angle 1 = \angle 3$, як відповідні кути при паралельних прямих BL і CK і січній AK , $\angle 2 = \angle 4$, як внутрішні різносторонні кути при тих самих паралельних прямих і січній BC . Оскільки $\angle 1 = \angle 2$, то і $\angle 3 = \angle 4$, тобто трикутник BKC — рівнобедрений, $BK = BC$.

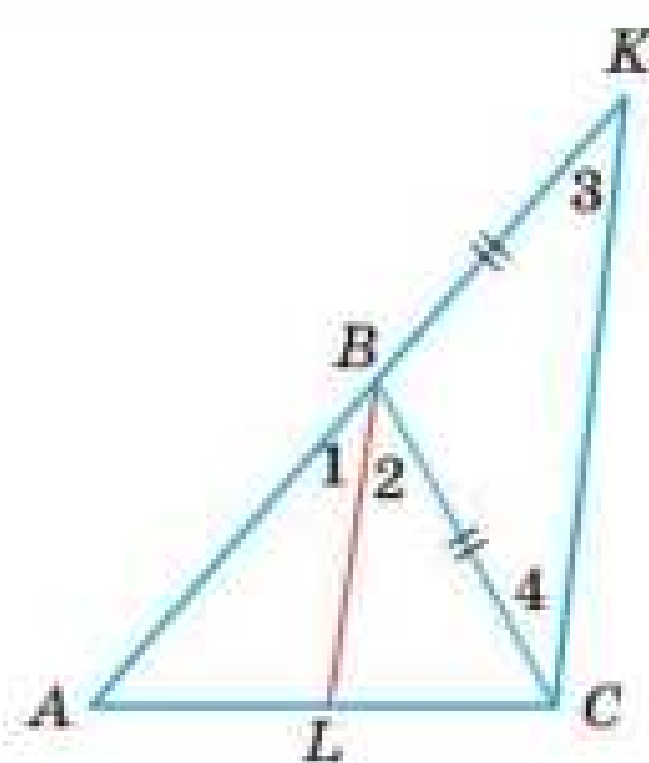
За узагальненою теоремою Фалеса

$AL : LC = AB : BK$. Замінивши в пропорції BK рівним йому відрізком BC , матимемо $AL : LC = AB : BC$.

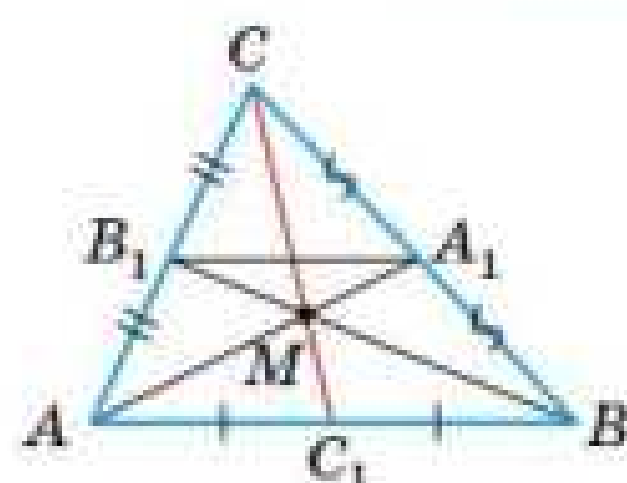
Теорема 24. Усі три медіани трикутника проходять через одну точку і діляться цією точкою у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини трикутника.

Доведення. Нехай медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M (мал. 11.2). A_1B_1 — середня лінія $\triangle ABC$, тому $A_1B_1 \parallel AB$ і $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$. $\triangle MAB \sim \triangle MA_1B_1$ за двома кутами, звідки $AM : MA_1 = BM : MB_1 = AB : A_1B_1 = 2 : 1$. Отже, медіани AA_1 і BB_1 точкою перетину діляться у відношенні $2 : 1$.

Медіани AA_1 і CC_1 точкою перетину також діляться у відношенні $2 : 1$. А точка, яка ділить медіану AA_1 у відношенні $2 : 1$, починаючи від вершини A , одна — точка M . Отже, і медіана CC_1 проходить через точку M і ділиться нею у відношенні $2 : 1$.



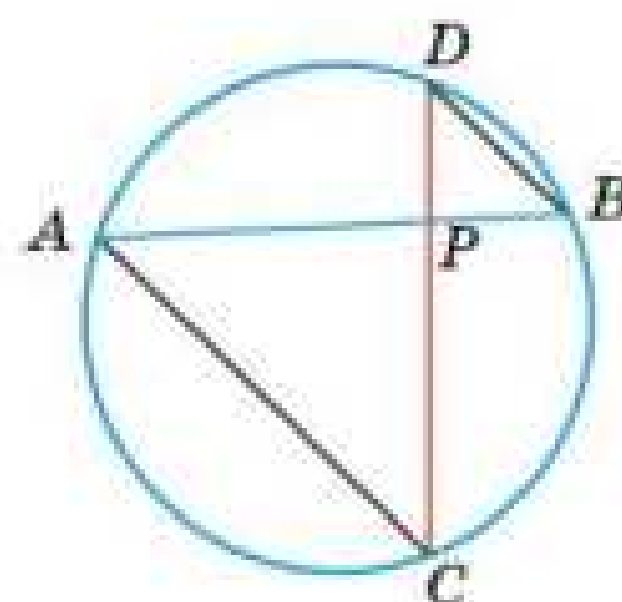
Мал. 11.1



Мал. 11.2

Теорема 25. Добутки відрізків хорд одного кола, що перетинаються, рівні.

Доведення. Нехай хорди AB і CD перетинаються в точці P (мал. 11.3). Проведемо відрізки AC і BD . За властивістю вписаних кутів $\angle A = \angle D$ і $\angle C = \angle B$, тому трикутники ACP і DBP подібні. Отже, $AP : DP = CP : BP$, звідки $AP \cdot BP = CP \cdot DP$. А це й треба було довести.

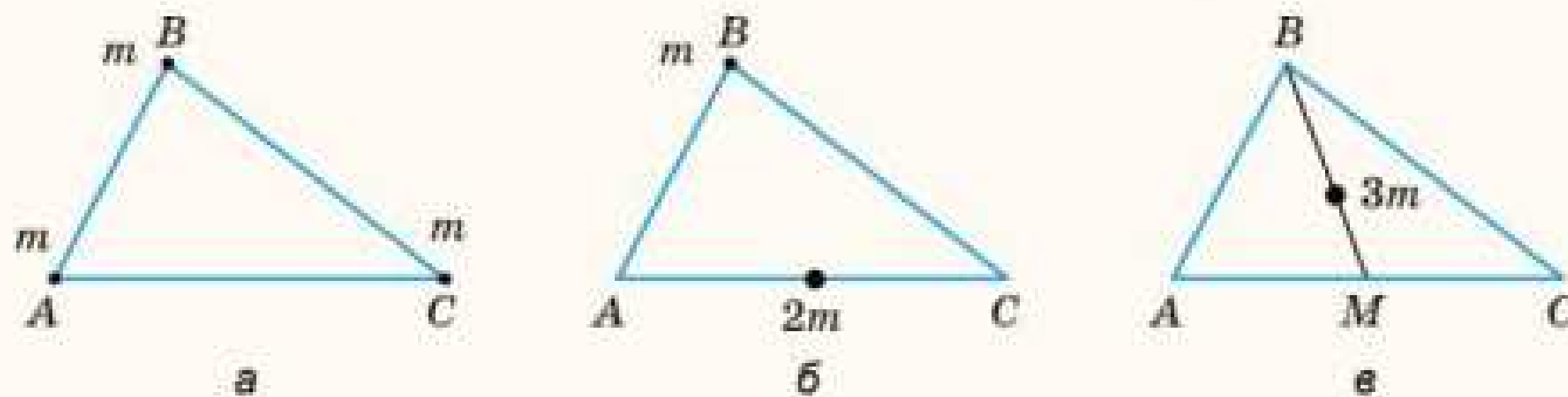


Мал. 11.3

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Точку перетину медіан трикутника називають *центроїдом* трикутника. Нерідко стверджують, що центроїд трикутника є його центром мас. Це твердження потребує уточнення. Ба-жано розрізняти три ситуації: 1) центр трьох рівних мас, зосереджених у вершинах трикутника; 2) центр мас трикутної пластинки (частини площини, обмеженої замкненою ламаною із трьох ланок); 3) центр мас трикутника як замкненої ламаної із трьох ланок.

У першому випадку (мал. 11.4, а, б, в) дві рівні маси, розташовані у вершинах A і C , можна замінити удвічі більшою масою, зосередженою на середині сторони AC . А маси m і $2m$, розміщені на кінцях медіани трикутника, можна замінити масою $3m$ у точці, яка ділить цю медіану у відношенні $2 : 1$, тобто в центроїді трикутника.



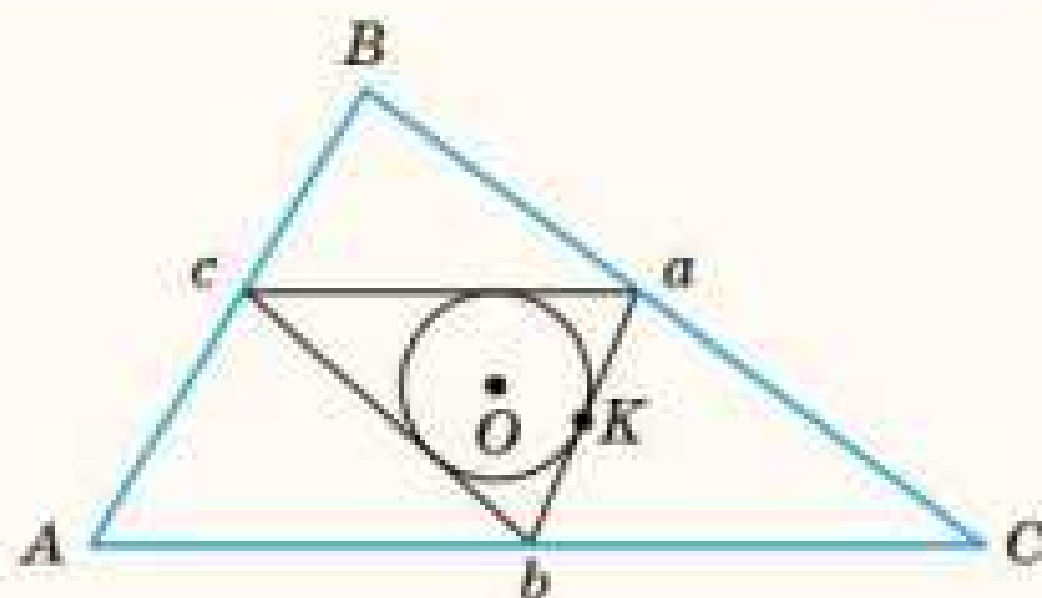
Мал. 11.4

Центр мас трикутної пластинки (другий випадок) також лежить у центроїді трикутника. Переконайся в цьому, розбивши уявно трикутник на тоненькі смужки паралельно сторонам трикутника. Центр мас кожної смужки буде розміщений в її середині, а всі разом — на відповідній медіані трикутника. Оскільки трикутник має один центр мас і він лежить на кожній із медіан трикутника, то це — центроїд трикутника.

У третьому випадку (каркасний трикутник) центр мас трикутника збігається з його центроїдом тільки тоді, коли цей трикутник рівносторонній. Розглянемо загальний випадок.



Якщо сторони трикутника дорівнюють a, b, c , то такими можна вважати і їхні маси, зосереджені на серединах сторін. Маси a і b можна замінити однією масою $a + b$, розміщеною на середній лінії трикутника у такій точці K , яка ділить середню лінію на частини, обернено пропорційні масам a і b , тобто в основі бісектриси $\triangle abc$, проведеної з вершини c . Використовуючи властивості бісектрис трикутника для інших кутів, покажи, що центр мас каркасного трикутника лежить у центрі кола, вписаного в його серединний трикутник (мал. 11.5).



Мал. 11.5

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй теорему про властивість бісектриси трикутника.
2. Сформулюй теорему про властивість медіан трикутника.
3. Сформулюй теорему про властивість хорд, що перетинаються.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Якщо з однієї точки P , що поза колом, провести до кола дотичну PM і січну, яка перетинає коло в точках A і B , то $PA \cdot PB = PM^2$. Доведи (мал. 11.6).

• Сполучивши точку M з A і B відрізками, одержимо трикутники PAM і PMB . Вони подібні, бо мають спільний кут P і $\angle B = \angle AMP$,

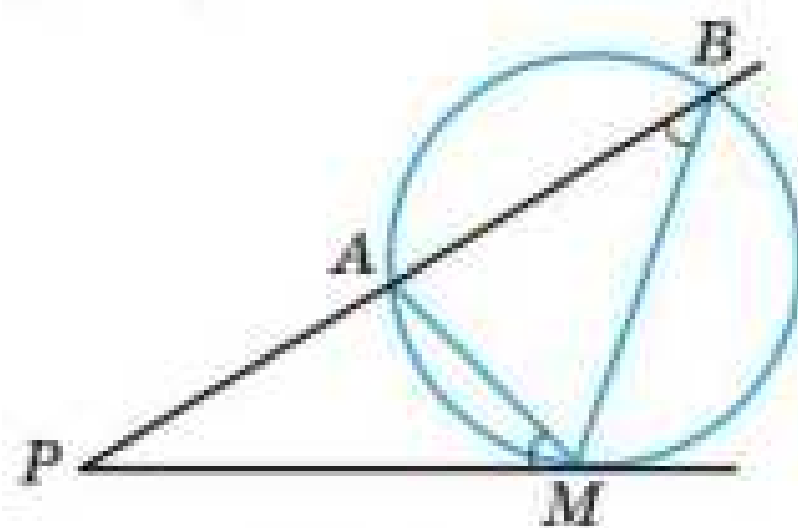
бо кожен з них дорівнює $\frac{1}{2} \widehat{AM}$.

Отже, $PA : PM = PM : PB$, звідки $PA \cdot PB = PM^2$.

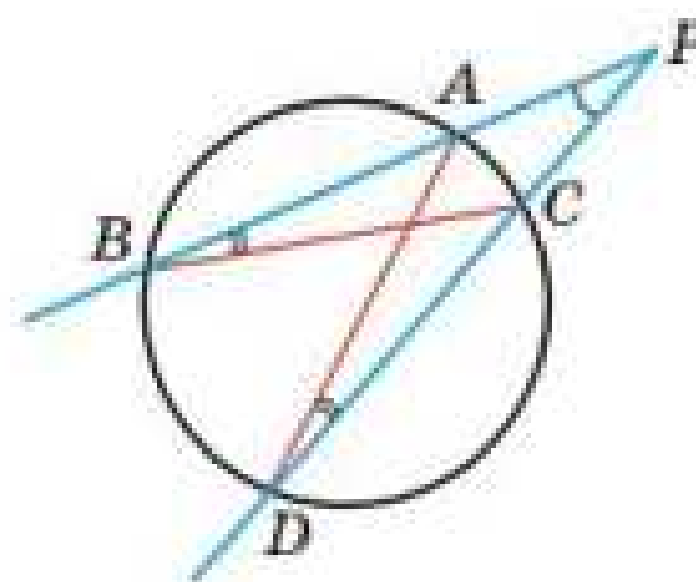
2. Якщо з точки P , що поза колом, провести до кола дві січні, які перетинають коло у точках A, B та C, D (мал. 11.7), то $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

• Трикутник PAD подібний трикутнику PCB , бо мають спільний кут P і $\angle B = \angle D$, як вписані, що спираються на одну дугу. Тоді $PA : PC = PD : PB$, звідки $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

3. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 12 см і 15 см. Знайди, на які відрізки бісектриса трикутника ділить його найбільшу сторону.



Мал. 11.6



Мал. 11.7

- Нехай $AL = x$, тоді $CL = 15 - x$ (мал. 11.8). За властивістю бісектриси кута трикутника:

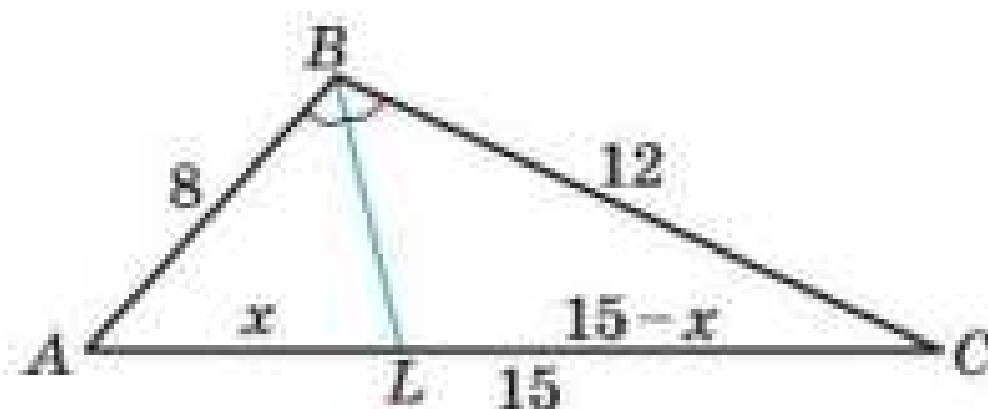
$$AL:CL=AB:BC, \text{ тобто } \frac{x}{15-x} = \frac{8}{12}$$

$$\text{або } \frac{x}{15-x} = \frac{2}{3}.$$

Звідси $3x = 2(15 - x)$.

Маємо: $3x = 30 - 2x$, $5x = 30$, $x = 6$.

Отже, $AL = 6$ см, $CL = 9$ см.

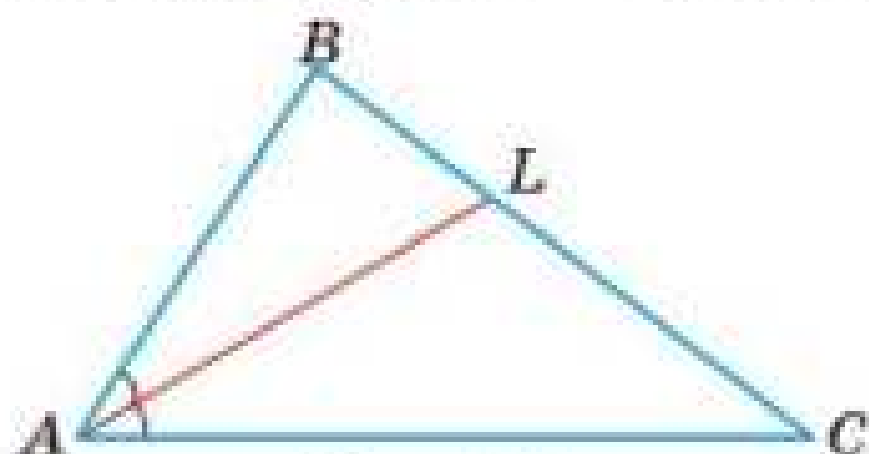


Мал. 11.8

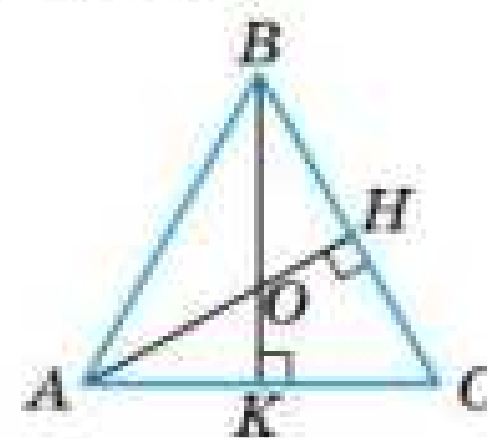
ВИКОНАЄМО УСНО

- 600.** AL — бісектриса $\triangle ABC$ і $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{5}$ (мал. 11.9). Знайди:

- а) відношення $BL:LC$; б) відношення $BL:BC$;
в) BL , якщо $CL = 15$ см; г) CL , якщо $BL = 12$ см.

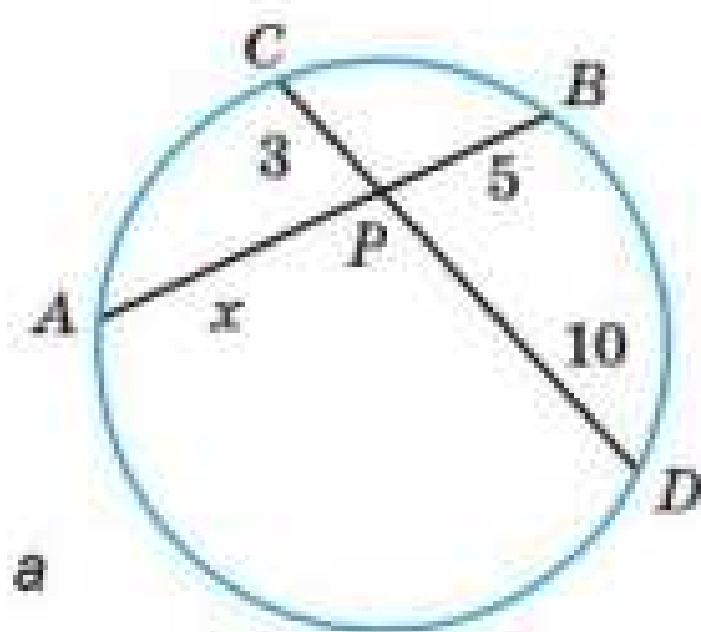


Мал. 11.9

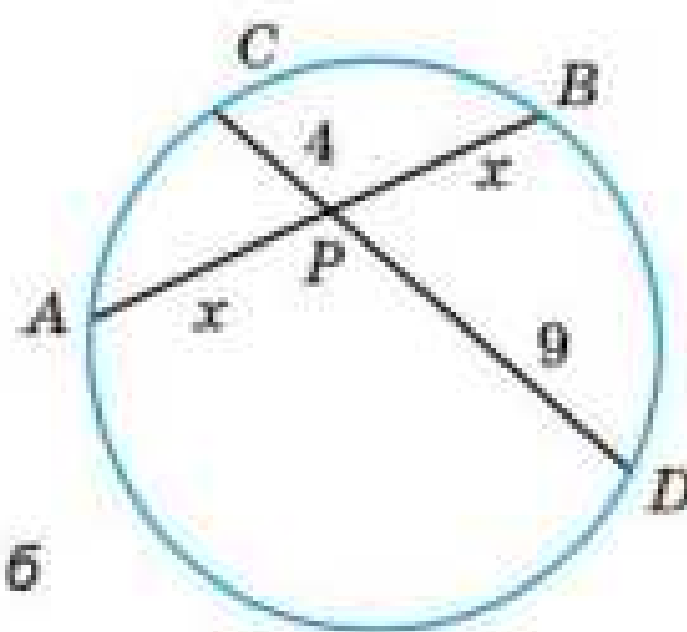


Мал. 11.10

- 601.** У якому відношенні діляться висоти рівностороннього трикутника точкою перетину (мал. 11.10)?
- 602.** Чи можуть бісектриси рівностороннього трикутника точкою перетину ділитися на частини 2 см і 8 см, 5 см і 10 см?
- 603.** Хорди AB і CD перетинаються в точці P (мал. 11.11, а, б). Знайди значення x .



а



б

Мал. 11.11

- 604.** Через точку перетину медіан трикутника проведено пряму, паралельну одній зі сторін. У якому відношенні ця пряма ділить інші сторони трикутника?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А



605. Порівняй відрізки, на які бісектриса BK $\triangle ABC$ ділить сторону AC , якщо $AB > BC$. Зроби малюнок до задачі.

А $AK < KC$

Б $AK > KC$

В $AK = KC$

Г не можна встановити

606. AK — бісектриса $\triangle ABC$. Знайди KC , якщо $AB = 16$ см, $AC = 20$ см, $BK = 8$ см.

607. AM — bisector of $\triangle ABC$. Find BM if $AB = 15$ in, $AC = 18$ in, $MC = 12$ in.

608. CP бісектриса $\triangle ABC$. Знайди невідомі сторони трикутника, якщо $AP = 12$ см, $BP = 10$ см і сторона AC на 3 см більша за сторону BC .

609. BE бісектриса $\triangle ABC$. Знайди периметр трикутника, якщо $AE = 12$ см, $CE = 20$ см і різниця сторін BC і AB дорівнює 10 см.

610. AL — бісектриса $\triangle ABC$ (мал. 11.12). Знайдіть:

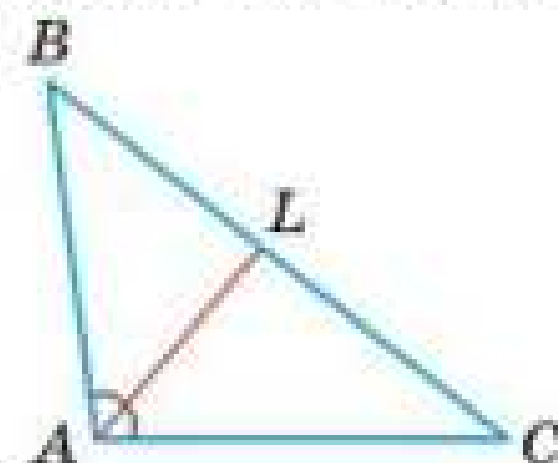


а) BL і LC , якщо $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см;

б) AC , якщо $AB = 16$ см і $BL : LC = 4 : 5$;

в) $P_{\triangle ABC}$, якщо $BL = 3$ см, $CL = 5$ см, $AC - AB = 4$ см;

г) BC , якщо $AB = 15$ см, $AC = 12$ см і BL на 2 см більша за CL .



Мал. 11.12

611. CK — бісектриса $\triangle ABC$. Знайди:

а) AK і KB , якщо $AC = 8$ см, $BC = 20$ см, $AB = 21$ см;

б) BC , якщо $AC = 27$ см і $AK : KB = 9 : 4$;

в) AB , якщо $BC = 28$ см, $AC = 20$ см і AK на 6 см менша від BK .

612. Чи є BK бісектрисою $\triangle ABC$, якщо $AB = 15$ см, $BC = 20$ см, $AK = 12$ см, $CK = 16$ см?

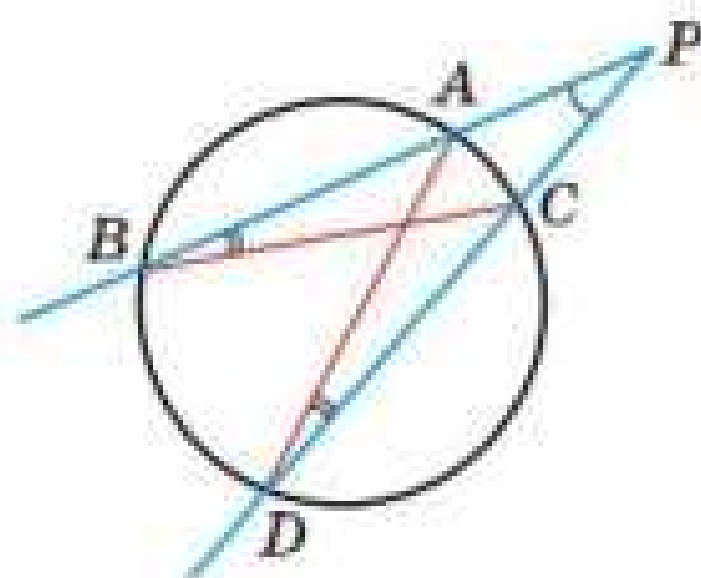
613. Бісектриса одного кута прямокутника $ABCD$ ділить діагональ на відрізки, пропорційні числам 5 і 9. Знайди сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 140 см. Склади план розв'язування задачі та розв'яжи її.

614. Бісектриса одного кута прямокутника $ABCD$ ділить діагональ на відрізки, пропорційні числам 3 і 8. Знайди периметр прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює 12 см. Склади план розв'язування задачі та розв'яжи її.

615. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 24 см, а бічна сторона 20 см. Знайди, у якому відношенні бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи. Знайди довжини цих відрізків, якщо висота дорівнює 16 см.

616. У рівнобедреному $\triangle ABC$ $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Знайди радіус вписаного кола, якщо висота BH дорівнює 8 см.

617. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи, у відношенні $5 : 12$, а бічна сторона дорівнює 36 см. Знайди периметр трикутника.
618. Висота рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. Знайди радіуси вписаного й описаного кіл.
619. Медіана AP трикутника ABC дорівнює 21 см. Знайди довжини відрізків AM і MP , де M — точка перетину медіан трикутника ABC .
620. Медіани трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. Знайди довжини частин, на які вони діляться точкою їх перетину.
621. Пряма, яка проходить через точку перетину медіан трикутника ABC , перетинає сторони AB і BC у точках K і P відповідно. Знайди KP , якщо $AC = 15$ см і $KP \parallel AC$.
622. Пряма, яка проходить через точку перетину медіан трикутника ABC , перетинає сторони AB і AC у точках M і E відповідно. Знайди BC , якщо $ME = 8$ см і $ME \parallel BC$.
623. У трикутнику зі сторонами 12 см, 15 см і 21 см через точку перетину медіан проведено пряму, паралельну одній зі сторін. Обчисли сторони утвореного трикутника.
624. Хорди AB і CD перетинаються в точці M . Знайди CM , якщо $AM = 8$ см, $BM = 3$ см, $DM = 6$ см.
625. Хорди AB і CD перетинаються в точці F так, що $FB - FC = 5$ см, $AF = 10$ см, $FD = 12$ см. Знайдіть довжини хорд.
626. Хорди AB і CD перетинаються в точці M , яка ділить хорду AB на відрізки, пропорційні числам 1 і 3 . Знайди їх довжини, якщо $CM = 9$ см, $DM = 12$ см.
627. Хорди MN і EF перетинаються в точці K , яка ділить хорду MN навпіл. Знайди MN , якщо $KE = 4$ см, $KF = 16$ см.
628. Із точки до кола проведено січну і дотичну. Визнач довжину січної, якщо дотична дорівнює 12 см, а зовнішня частина січної 8 см.
629. Із точки до кола проведено січну і дотичну. Знайди довжину дотичної, якщо внутрішня частина січної дорівнює 9 см, а зовнішня частина на 7 см більша.
630. Із точки до кола проведено січну і дотичну. Відношення внутрішньої і зовнішньої частин січної дорівнює $8 : 1$, а довжина дотичної 12 см. Знайди довжину січної.
631. Із точки P до кола проведено дві січні, які перетинають коло у точках A, B та C, D . Знайди PD і CD , якщо $PA = 4$ см, $PB = 10$ см, $PC = 5$ см (мал. 11.13).



Мал. 11.13

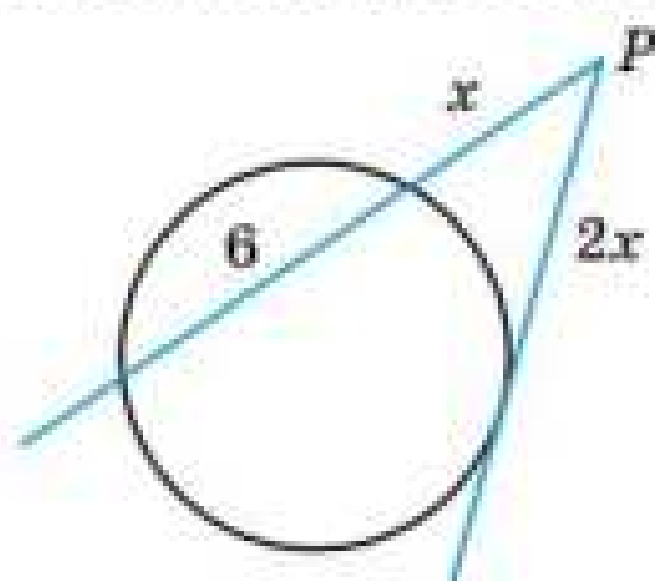
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

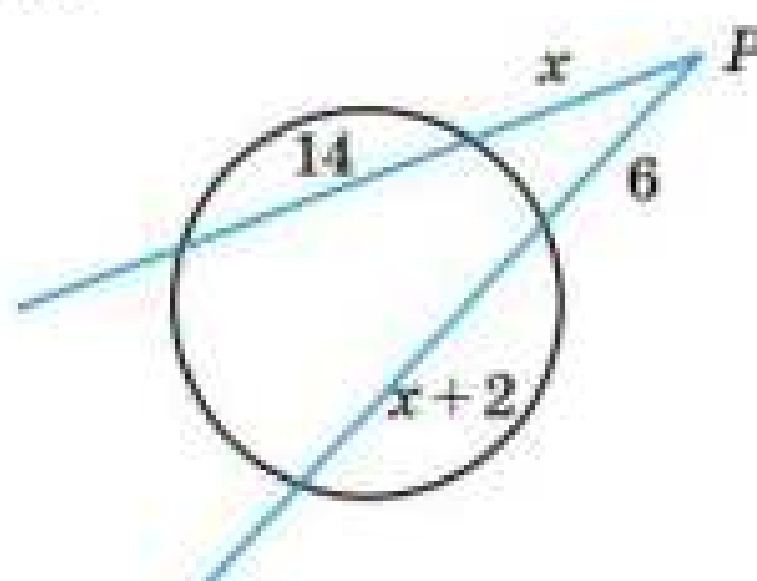


632. Бісектриси кутів B і C прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці K , $K \in AD$. Знайди, на які відрізки бісектриса кута B ділить діагональ AC , якщо $AC = 18$ см.
633. Користуючись умовою попередньої задачі, доведи, що бісектриси кутів B і D ділять діагональ AC на три рівні відрізки.
634. У прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$) вписано квадрат $CMNK$ так, що точки M і K лежать на катетах, а точка N — на гіпотенузі. Знайди AN і BN , якщо $AC = 21$ см, $BC = 28$ см, $AB = 35$ см.
635. У $\triangle ABC$ вписано ромб $AMNK$ так, що $\angle A$ в них спільний і $N \in BC$. Точка N ділить сторону BC на відрізки, різниця яких дорівнює 4 см. Знайди BC , якщо $AB = 10$ см, $AC = 15$ см.
636. *Відкрита задача.* У $\triangle ABC$ зі сторонами 10 см і 12 см вписано чотирикутник $AMNK$ так, що кут A у них спільний і $M \in AB$, $N \in BC$, $K \in AC$, $MN \parallel AC$, $NK \parallel AB$. Знайдіть периметр чотирикутника $MNPQ$, якщо він є ..., а про його сторони відомо таке: ...
637. У тупокутний трикутник ABC (кут B — тупий) вписано ромб $MBKP$ так, що кут B — спільний, а точка P ділить сторону AC на відрізки $AP = 10$ см і $PC = 16$ см. Установіть відповідність між сторонами трикутника (1–3) та їх довжинами (А–Д), якщо периметр трикутника дорівнює 65 см.
- | | |
|--------|---------|
| 1 AB | А 10 см |
| 2 BC | Б 15 см |
| 3 AC | В 16 см |
| | Г 24 см |
| | Д 26 см |
638. У трикутник зі сторонами 4 см, 16 см і 18 см вписано ромб, який має з трикутником спільний найбільший кут. Знайди відрізки, на які вершина ромба ділить найбільшу сторону.
639. E — середина дуги BC кола, описаного навколо $\triangle ABC$ зі сторонами $AB = 15$ см, $BC = 18$ см, $AC = 12$ см. Знайди відрізки, на які пряма AE ділить BC .
640. У трикутник зі сторонами 10 см, 14 см і 18 см вписано півколо, яке дотикається до двох сторін трикутника і центр якого лежить на більшій стороні. Знайди, на які частини центр кола ділить більшу сторону.
641. У рівнобедреному трикутнику, периметр якого 72 см, радіус вписаного кола становить $\frac{5}{18}$ висоти, проведеної до основи. Знайди сторони трикутника.
642. Через точку перетину медіан трикутника проведено пряму, паралельну одній зі сторін. Знайди довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника, якщо середня лінія трикутника, паралельна їй, дорівнює 4 см.

643. Знайди довжини медіан трикутника, якщо відстані від точки їх перетину до вершин трикутника дорівнюють 26 см, 14 см і 18 см.
644. Знайди довжини висот трикутника, якщо відстані від точки перетину медіан трикутника до його сторін дорівнюють 5 см, 7 см і 8 см.
645. Знайди довжини хорд AB і CD , які перетинаються в точці K так, що $AK = 18$ см, $CK = 20$ см, $KB + KD = 19$ см.
646. Точка P розташована всередині кола радіуса 11 см, віддалена від центра на 5 см і ділить хорду AB у відношенні 2 : 3. Знайди довжину хорди AB .
647. Знайди довжини відрізків, позначених на малюнку 11.14 буквою x .
648. За даними малюнка 11.15 знайди x .

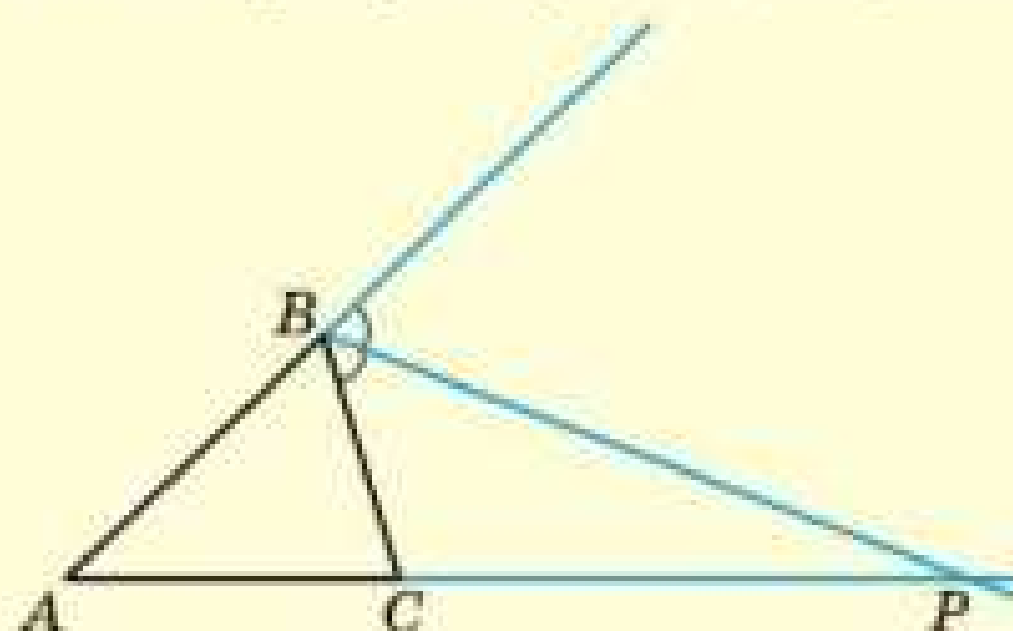


Мал. 11.14

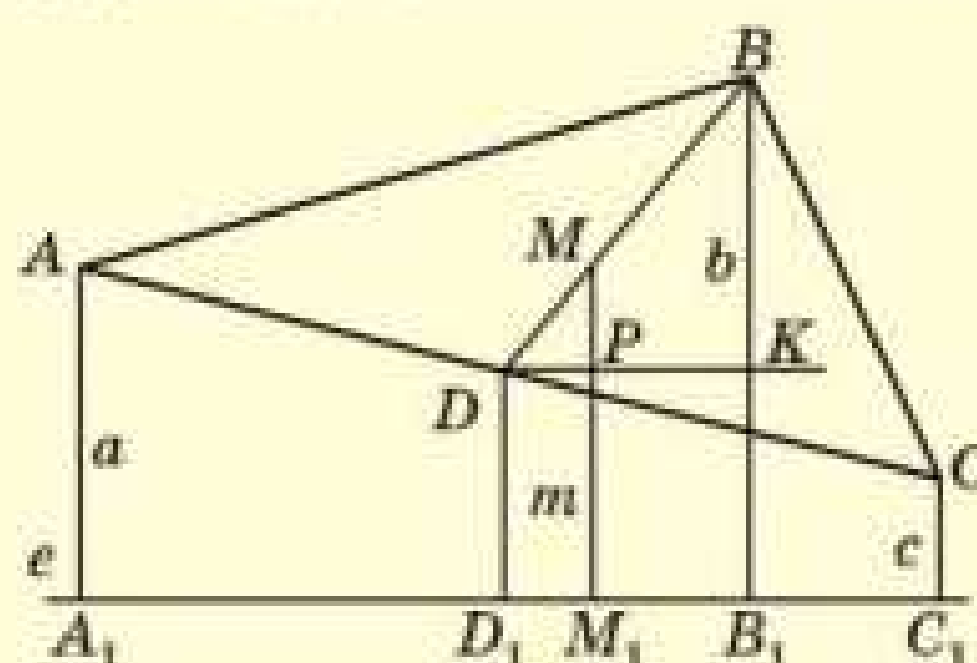


Мал. 11.15

649. Бісектриси кутів при основі рівнобедреного трикутника перетинають бічні сторони в точках P і K . Знайди PK , якщо довжина бічної сторони дорівнює m , а довжина основи n .
650. Бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC при вершині B перетинає пряму AC у точці P (мал. 11.16). Доведи, що $AP : AB = PC : BC$.



Мал. 11.16



Мал. 11.17

651. Відстань від центроїда трикутника до довільної прямої, яка не перетинає трикутник, дорівнює середньому арифметичному відстаней від усіх його вершин до цієї прямої. Доведи це, користуючись малюнком 11.17.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

- 652.** Виріж із цупкого паперу гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники. У кожному з них проведи медіани та познач їх точки перетину. Переконайся на практиці, що для кожного з цих трикутників точка перетину медіан буде центром мас (мал. 11.18).

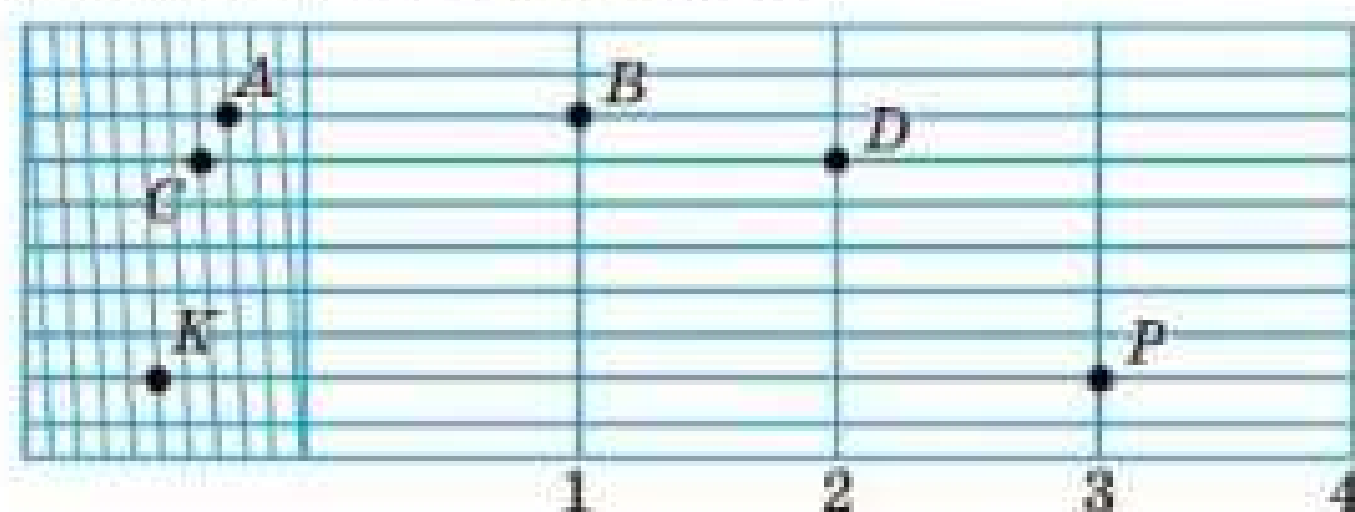


Мал. 11.18



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 653.** Кути $\triangle ABC$ пропорційні числам 3, 5 і 10. Один із кутів $\triangle MNK$ на 20° більший за другий і на 50° менший від третього. Чи подібні ці трикутники?
- 654.** Діагоналі трапеції точкою перетину діляться у відношенні 3 : 5. Як відносяться основи трапеції?
- 655.** На малюнку 11.19 зображено лінійку з поперечним масштабом, якою можна виміряти відстані з точністю до 0,1 мм. Знайди відстані AB , CD , KP . Відповідь поясни.



Мал. 11.19



ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



Макет будинку з дерева

§ 12 ПОДІБНІСТЬ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

right triangle similarity — подібність прямокутних трикутників

Один кут у кожному прямокутному трикутнику прямий, а всі прямі кути рівні. Тому з двох перших загальних ознак подібності трикутників випливають такі ознаки подібності прямокутних трикутників.

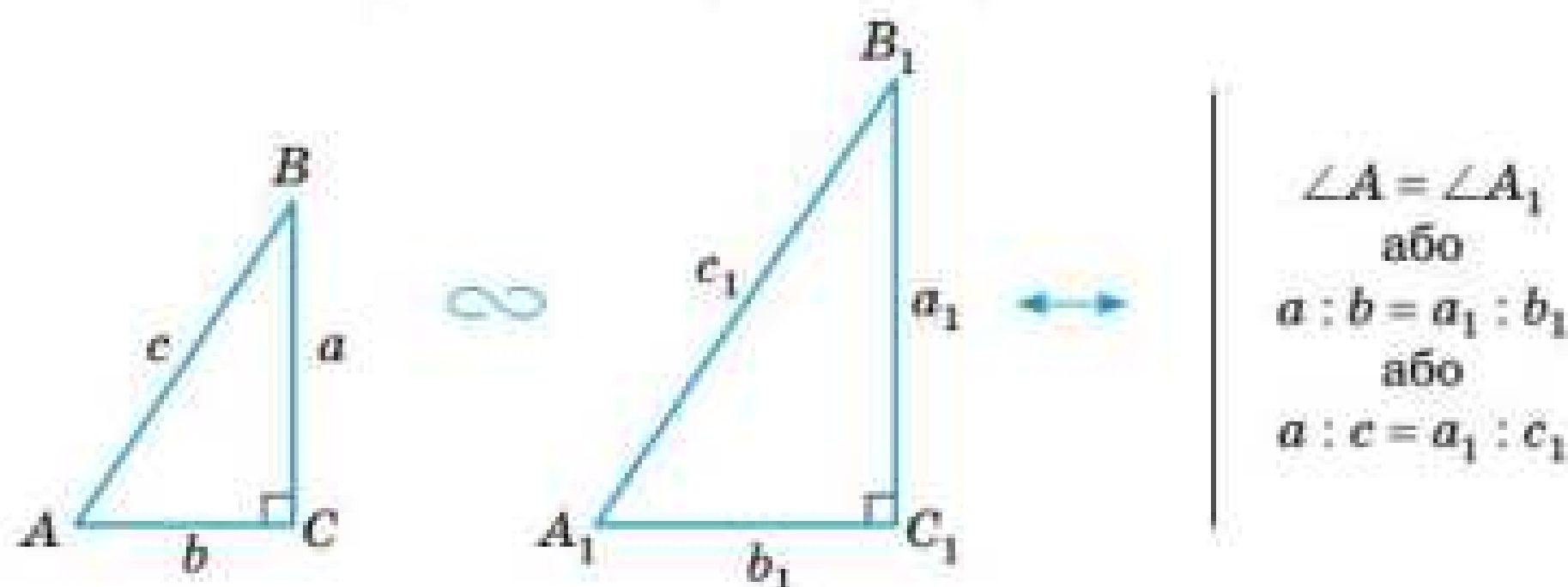
Два прямокутні трикутники подібні, якщо гострий кут одного дорівнює гострому куту другого трикутника.

Два прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного пропорційні катетам другого трикутника.

Правильна і така ознака.

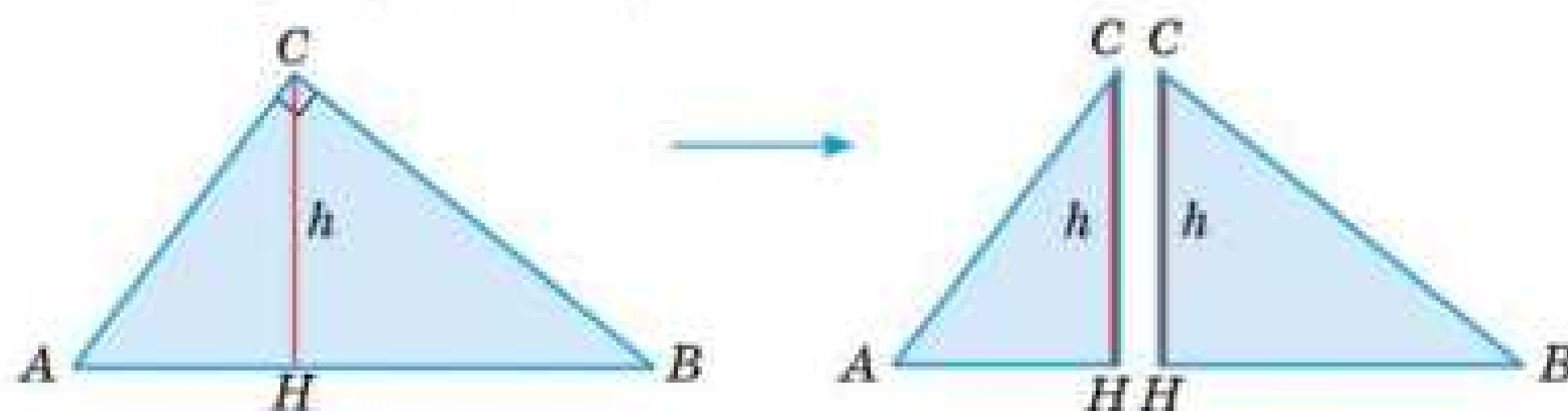
Два прямокутні трикутники подібні, якщо катет і гіпотенуза одного пропорційні катету і гіпотенузі другого трикутника.

Схематично три сформульовані ознаки подібності прямокутних трикутників можна зобразити так (мал. 12.1):



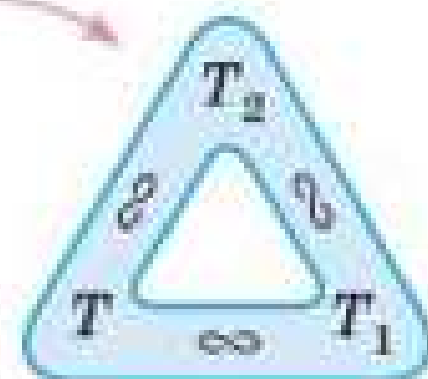
Мал. 12.1

Цікаву властивість має висота h прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи (мал. 12.2).



Мал. 12.2

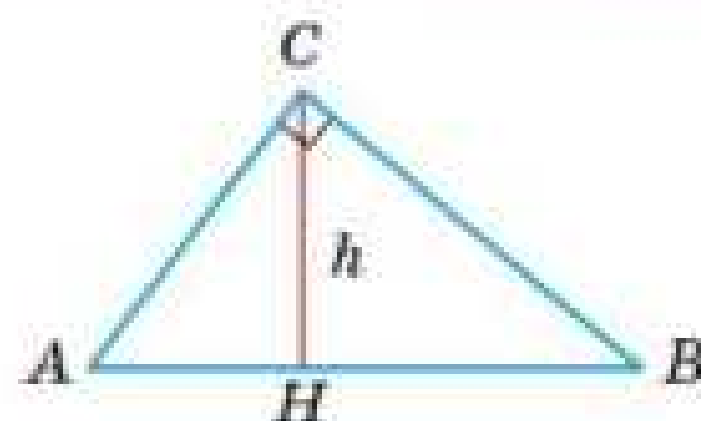
Вона розбиває даний трикутник на два менші прямокутні трикутники, подібні даному. Якщо кут C трикутника ABC прямий, а CH — висота, то кожний із трикутників ACH і CBH подібний $\triangle ABC$. Адже $\triangle ACH$ і $\triangle ABC$ мають спільний кут A , а трикутники CBH і ABC — спільний кут B . Кожний із цих прямокутних трикутників подібний кожному іншому з них. Позначивши їх літерами T , T_1 і T_2 , схематично це можна зобразити так:



Важливу роль у геометрії відіграють теореми про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику. Нагадаємо, що відрізок або число x називають середнім пропорційним відрізків або чисел a і b , якщо правильною є пропорція $a : x = x : b$ (або рівнозначні їй рівності $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$).

Теорема 26. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним відрізків, на які ця висота ділить гіпотенузу.

Доведення. Оскільки висота h розбиває прямокутний трикутник ABC на подібні йому трикутники ACH і CBH (мал. 12.3), то $АН : h = h : НВ$. А це означає, що відрізок h — середній пропорційний відрізків $АН$ і $НВ$. Отже, $h^2 = АН \cdot НВ$.



Мал. 12.3

Теорема 27. Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи і проєкції цього катета на гіпотенузу.

Наприклад, $AC^2 = AB \cdot AH$ (мал. 12.3).

Доведення. Оскільки $\triangle ACH \sim \triangle ABC$, то $АН : AC = AC : АВ$, звідки $AC^2 = АВ \cdot АН$.

Отже, якщо CH — висота прямокутного трикутника ABC , проведена до гіпотенузи (мал. 12.3), то мають місце формули:

$$CH^2 = АН \cdot ВН, \quad AC^2 = АВ \cdot АН, \quad BC^2 = АВ \cdot ВН.$$

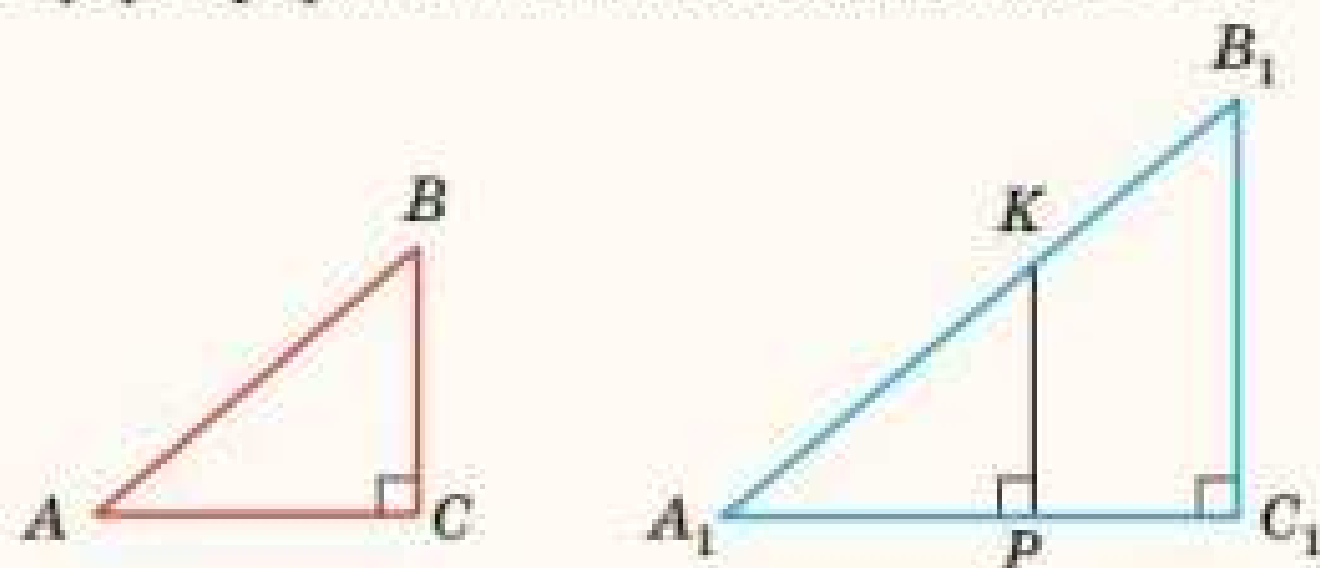
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Доведемо третю ознаку подібності прямокутних трикутників, сформульовану вище.

Теорема 28. Два прямокутні трикутники подібні, якщо катет і гіпотенуза одного пропорційні катету і гіпотенузі другого трикутника.



Доведення. Нехай прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ такі, у яких кути C і C_1 прямі, а $BC : AB = B_1C_1 : A_1B_1$ (мал. 12.4). Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



Мал. 12.4

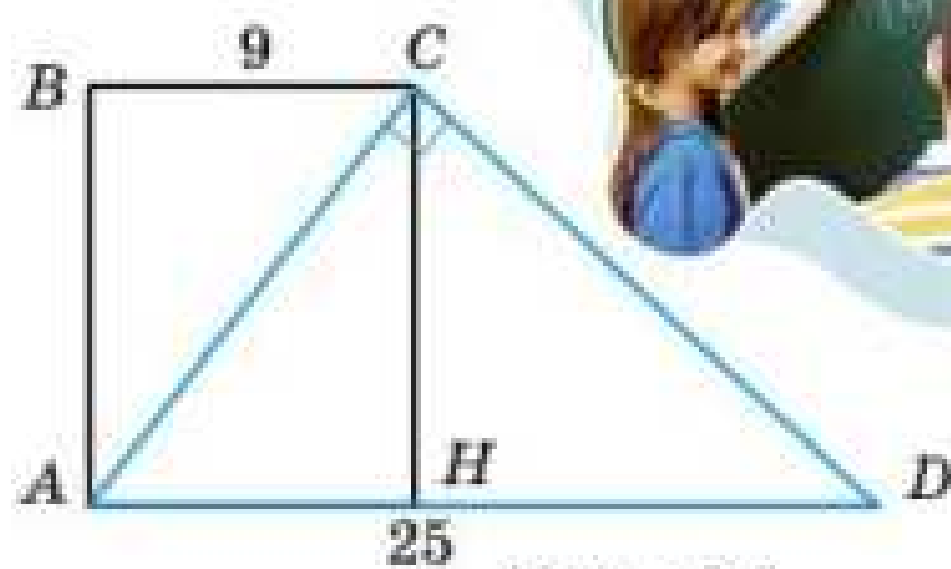
Якщо, наприклад, $A_1B_1 > AB$, то на стороні A_1B_1 відкладемо відрізок $A_1K = AB$ і з точки K опустимо перпендикуляр KP на пряму A_1C_1 . $KP \parallel B_1C_1$, тому згідно з основною теоремою про подібність трикутників $\triangle A_1KP \sim \triangle A_1B_1C_1$, тобто $KP : A_1K = B_1C_1 : A_1B_1$. Оскільки $A_1K = AB$, то $KP : AB = B_1C_1 : A_1B_1$. За умовою $BC : AB = B_1C_1 : A_1B_1$, тому $KP = BC$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1KP$ — за гіпотенузою і катетом. Крім того, $\triangle A_1KP \sim \triangle A_1B_1C_1$, тому $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй ознаки подібності прямокутних трикутників.
2. Яку властивість має висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута?
3. Що називають середнім пропорційним двох відрізків?

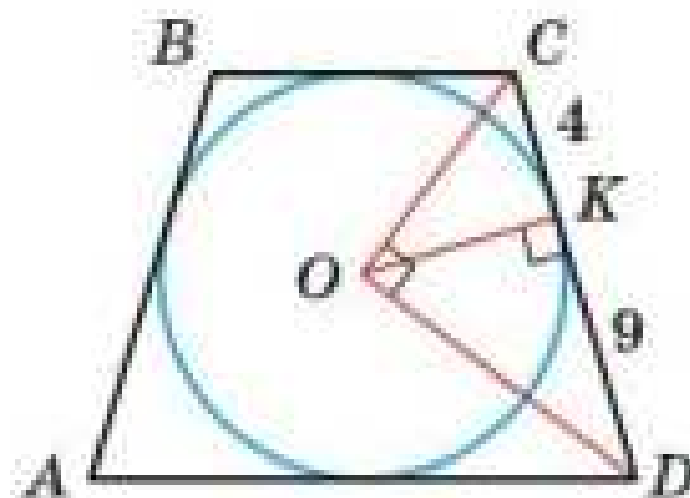
ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Знайди периметр прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 9 см і 25 см, а менша діагональ перпендикулярна до бічної сторони (мал. 12.5).
 • Проведемо висоту CH . Тоді $HD = 25 - 9 = 16$ (см). За теоремами про середні пропорційні відрізки $CD^2 = AD \cdot HD$ і $CH^2 = AH \cdot HD$. Тоді $CD^2 = 25 \cdot 16 = 400$, $CH^2 = 9 \cdot 16 = 144$. Звідси $CD = 20$ см, $CH = 12$ см. Оскільки $AB = CH = 12$ см, то $P = 12 + 9 + 20 + 25 = 66$ (см).



Мал. 12.5

2. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, точкою дотику ділить бічну сторону на відрізки 4 см і 9 см. Знайди радіус кола.



Мал. 12.6

- Якщо точка O — центр вписаного кола, то OC і OD — бісектриси кутів C і D (мал. 12.6). Оскільки $\angle C + \angle D = 180^\circ$, то $\angle OCD + \angle ODC = 90^\circ$, тоді $\angle COD = 90^\circ$. Радіус OK — висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута. Тоді $OK^2 = CK \cdot KD$, тобто $OK^2 = 4 \cdot 9 = 36$. Отже, $OK = 6$ см.

ВИКОНАЄМО УСНО

Вправи 656–662 виконай за малюнком 12.7.

656. Назви усі висоти прямокутного трикутника ABC . Яка з них найменша? Чому?

657. Назви проекцію катета AC на гіпотенузу AB , на пряму CH , на пряму BC .

658. Яка з рівностей хибна?

А $AC^2 = AB \cdot AN$ Б $CH = AN \cdot BN$

В $BC^2 = AB \cdot NB$ Г $CH^2 = AN \cdot BN$

659. Знайди CH , якщо $AN = 2$ см, $BN = 8$ см.

А 10 см Б 6 см В 16 см Г 4 см

660. Знайди AC , якщо $AN = 4$ см, $BN = 12$ см.

А $4\sqrt{3}$ см Б 8 см В 64 см Г $2\sqrt{5}$

661. Чи подібні трикутники ABC і CBH ? За якою ознакою?

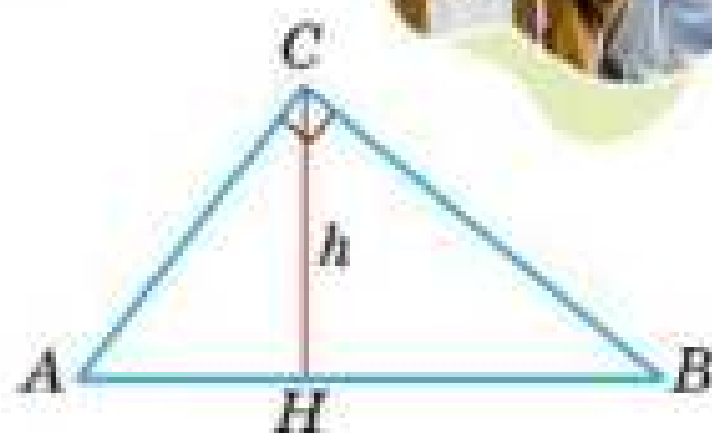
662. Чому подібні трикутники ACH і CBH ?

663. Чи те саме означають вислови:

«висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи»;

«висота прямокутного трикутника, проведена з вершини його прямого кута»;

«найменша висота прямокутного трикутника»?

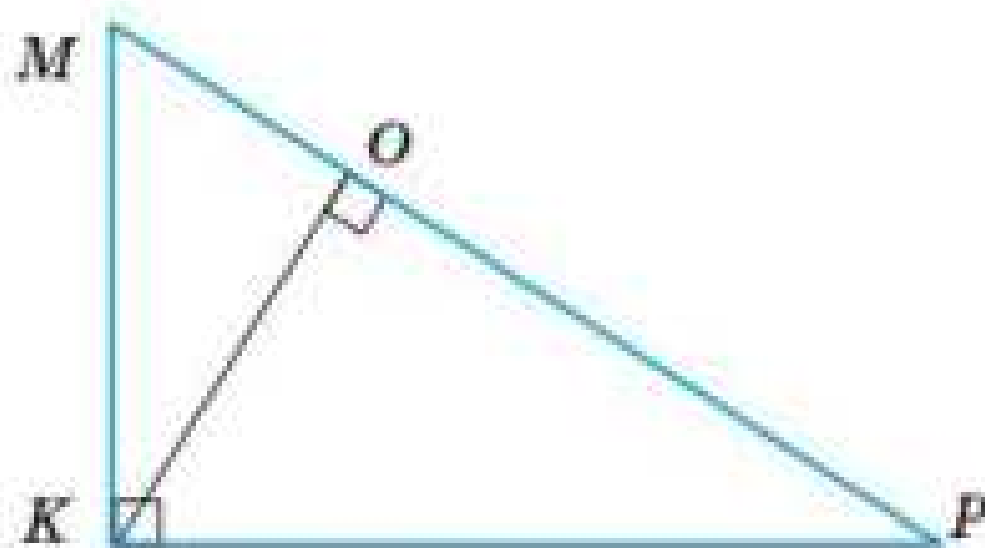


Мал. 12.7

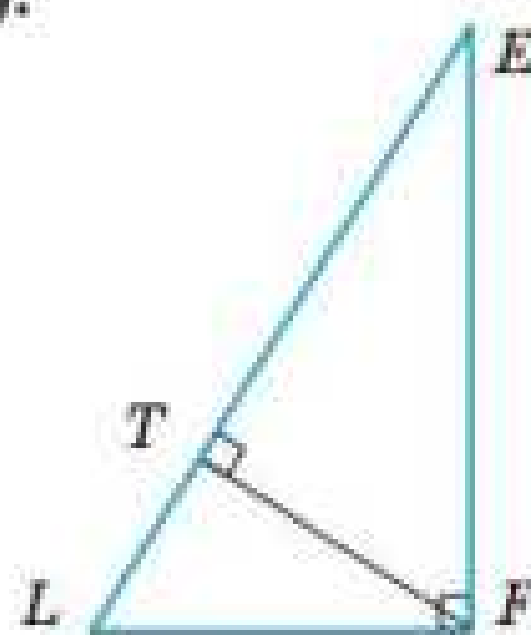
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

664. Запиши теореми про середні пропорційні відрізки для трикутника MPK (мал. 12.8).



Мал. 12.8



Мал. 12.9



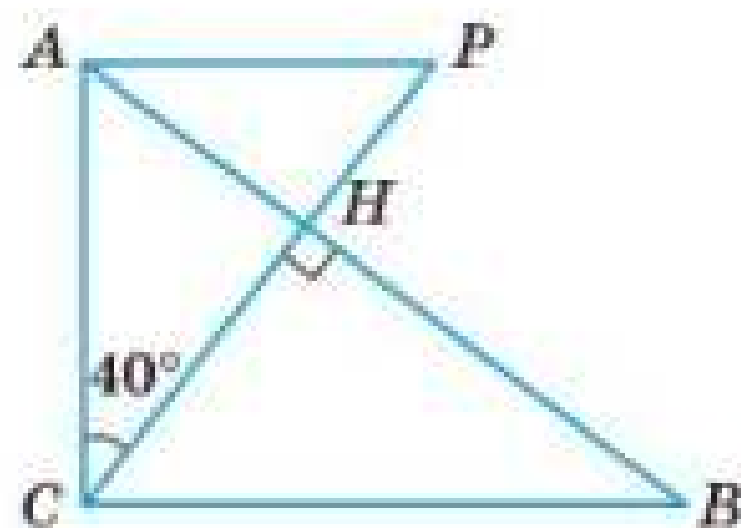
665. Запиши теореми про середні пропорційні відрізки для трикутника EFL (мал. 12.9).

666. Знаючи, що $AC \perp AP$, $AC \perp CB$, $\angle ACP = 40^\circ$ (мал. 12.10), знайди:

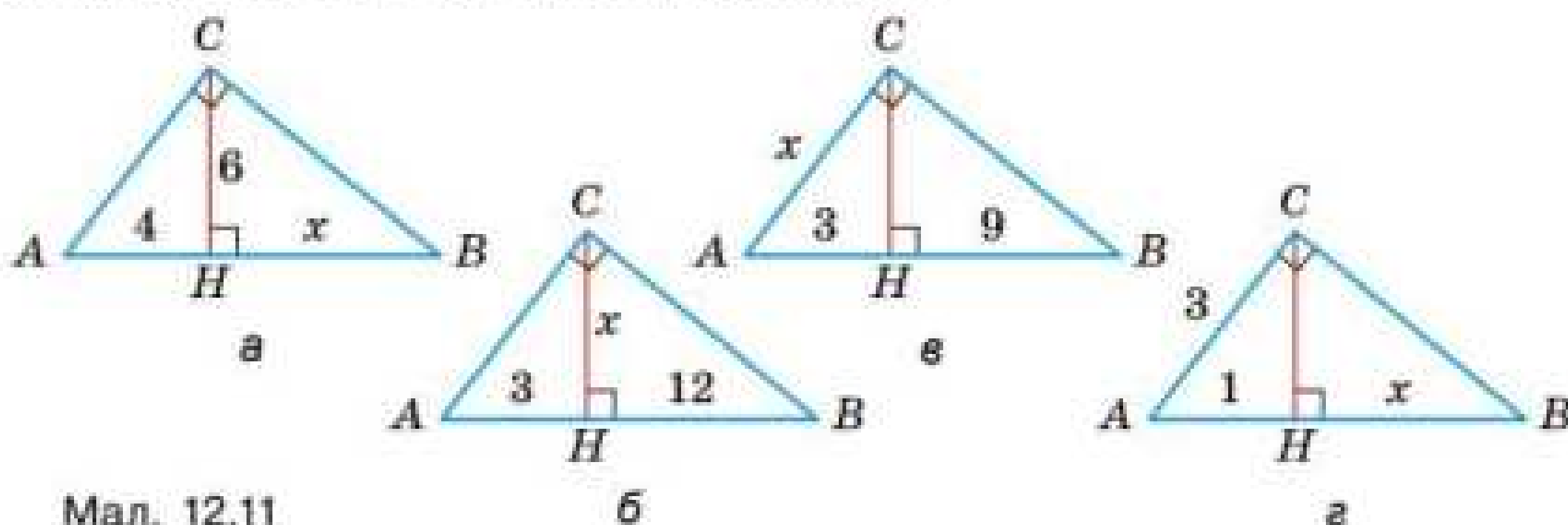
а) $\angle B$; б) $\angle P$; в) $\angle HAC - \angle HCB$.

667. Скільки різних трикутників зображено на малюнку 12.10? Чи всі ці трикутники подібні один одному? Чому?

668. Знайдіть довжини відрізків, позначених на малюнку 12.11 (a , b , c і d) буквою x .



Мал. 12.10



Мал. 12.11

669. Знайди висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки 2 см і 8 см.

670. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а його проекція на гіпотенузу 4 см. Знайди гіпотенузу.

671. Знайди катети прямокутного трикутника, якщо висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 2 см і 8 см.

672. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а один із гострих кутів — 60° . Знайди проєкції катетів на гіпотенузу.

673. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 30° , а проєкція меншого катета на гіпотенузу 5 см. Знайди проєкцію більшого катета на гіпотенузу і найменшу висоту трикутника.

674. Знайди довжину перпендикуляра, опущеного з вершини прямокутника на діагональ, якщо він ділить цю діагональ на відрізки завдовжки 4 см і 9 см.

675. Знайди проєкції сторін прямокутника на його діагональ завдовжки 18 см, яка зі стороною прямокутника утворює кут 30° .

676. Коло, вписане в ромб, точкою дотику ділить сторону на відрізки 2 см і 8 см. Знайди радіус кола.

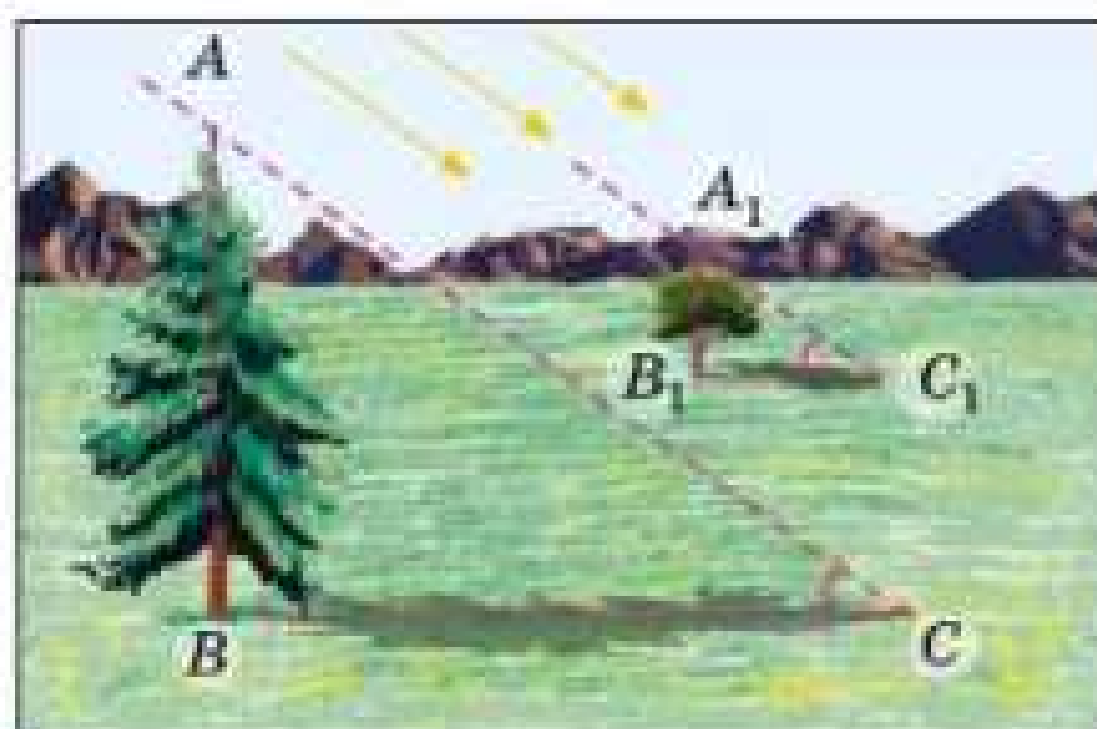
677. Радіус кола, вписаного в ромб, дорівнює 6 см. Знайди периметр ромба, якщо коло точкою дотику ділить сторону на відрізки, пропорційні числам 1 і 4.

678. Перпендикуляр, опущений з центра ромба на його сторону, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Знайди відстань між протилежними сторонами ромба.

679. Перпендикуляр, опущений з центра ромба на його сторону, дорівнює 24 см і ділить цю сторону на відрізки, пропорційні числам 9 і 16. Установи відповідність між відрізками, заданими умовами (1–3), та їх довжинами (А–Д).

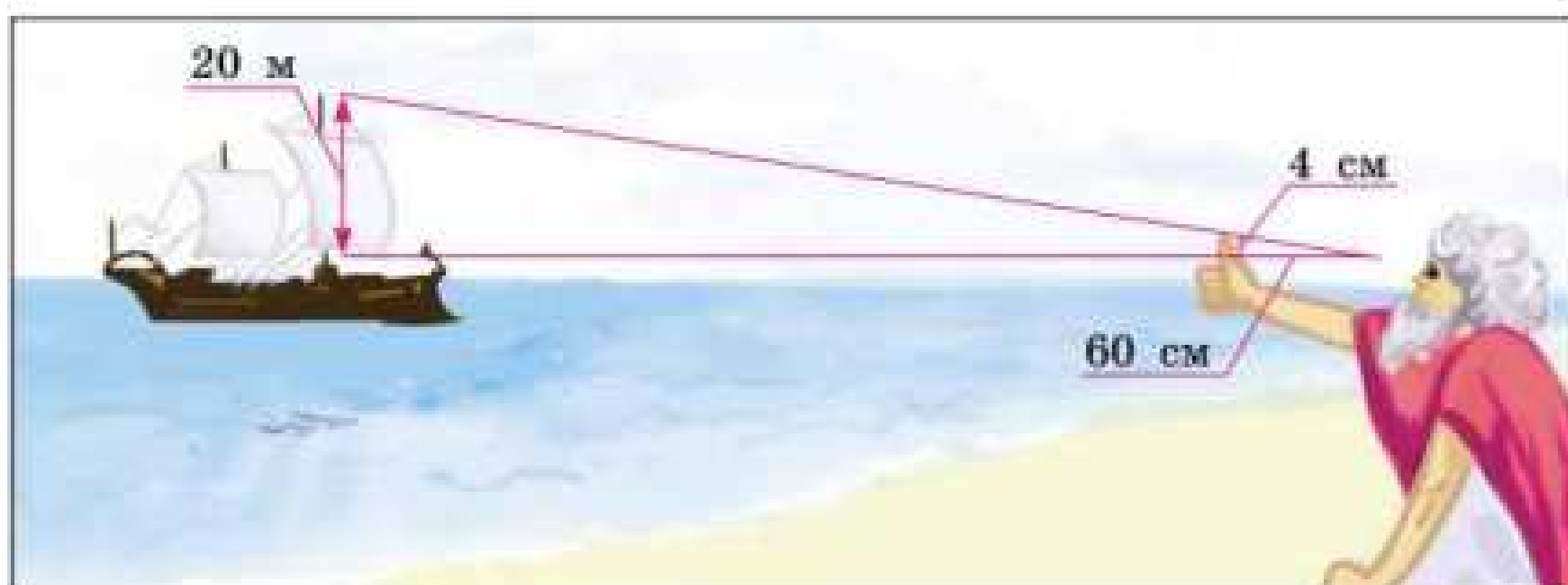
1 сторона ромба	А 30 см
2 менша діагональ ромба	Б 40 см
3 більша діагональ ромба	В 50 см
	Г 60 см
	Д 80 см

680. Довжина тіні від сосни 14 м, а від двометрового клена — 1 м. Знайди висоту сосни (мал. 12.12).



Мал. 12.12

681. *Задача Фалеса.* Визначте відстань від берега до корабля в морі, знаючи висоту щогли. Розв'язання легко зрозуміти, скориставшись малюнком 12.13.



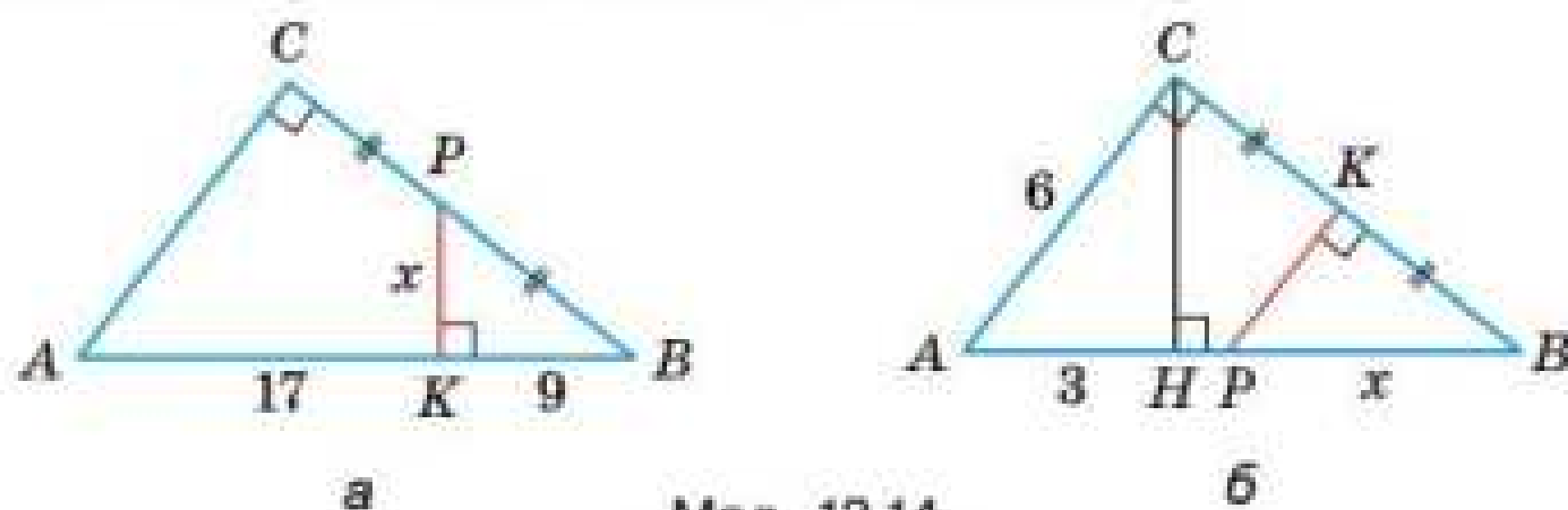
Мал. 12.13

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б



682. За даними елементами прямокутного трикутника знайди значення довжини x (мал. 12.14).



Мал. 12.14

683. Один із гострих кутів прямокутного трикутника на 18° більший за другий. Знайди відношення мір кутів, утворених найменшою висотою трикутника з його катетами.
684. Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки 3 см і 12 см. Знайди периметр трапеції.
685. A circle inscribed in an **equilateral trapezoid** divides the side into segments 7 cm and 28 cm by the point of contact. Find the **height** of the trapezoid.
686. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Знайди периметр трапеції, якщо основи трапеції дорівнюють 31 м і 49 м (мал. 12.15).
687. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Знайди периметр трапеції, якщо бічна сторона дорівнює 15 см, а радіус описаного кола 12,5 см.
688. Доведіть, що в кожному прямокутному трикутнику відношення квадратів катетів дорівнює відношенню їх проєкцій на гіпотенузу.
689. Катети прямокутного трикутника відносяться як 2 : 3, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 42 дм. Знайди проєкції катетів на гіпотенузу.
690. Гіпотенуза трикутника дорівнює 122 дм, а катети відносяться як 5 : 6. Знайди проєкції катетів на гіпотенузу.
691. Знайди довжину гіпотенузи, якщо катети відносяться як 2 : 3, а проєкція одного катета на гіпотенузу на 2 см більша за проєкцію другого.
692. Кут C $\triangle ABC$ прямий, проєкції гіпотенузи AB на прямі AC і BC дорівнюють 15 см і 20 см. Знайди проєкції катетів на гіпотенузу.



Мал. 12.15

693. Доведи, що в кожному прямокутному трикутнику добуток катетів дорівнює добутку його найменшої висоти і гіпотенузи.
694. Доведи, що діаметр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, є середнім пропорційним основ трапеції.
695. Відстань між протилежними сторонами ромба дорівнює a , а проєкція його меншої діагоналі на сторону — c . Обчисли сторони ромба, якщо $a = 18$ см, $c = 8$ см.
696. Доведи геометрично нерівність: якщо $a > 0$ і $b > 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

697. Виріж із картону прямокутний трикутник і визнач за його допомогою висоту обраного тобою об'єкта (мал. 12.16). Порівняй цей спосіб із тим, що запропонував Жюль Верн у романі «Таємничий острів» (мал. 12.17). У чому їх схожість, а в чому — відмінність?



Мал. 12.16



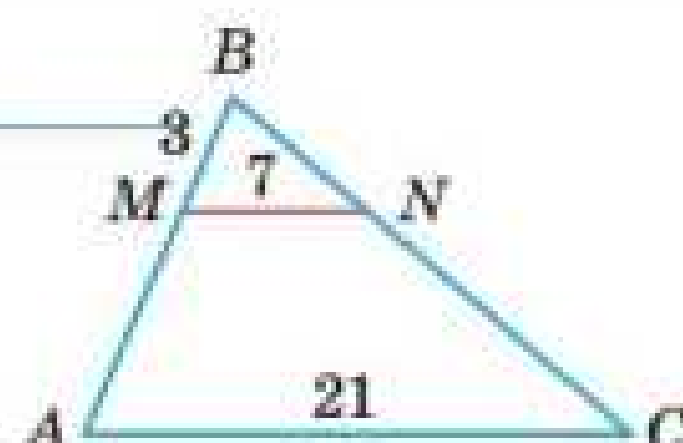
Мал. 12.17

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

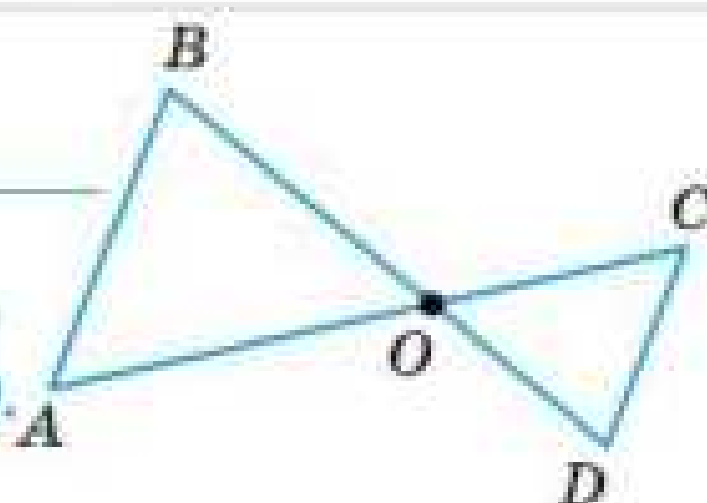
698. Знайди кути рівнобічної трапеції, якщо один із них на 30° більший за другий.
699. Знайди периметр ромба з кутом 30° , описаного навколо кола радіуса $r = 3$ см.
700. Знайди довжину хорди, перпендикулярної до діаметра кола, що ділить його на відрізки 2 дм і 8 дм.

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

1 $MN \parallel AC$. AM 2 $AB \parallel CD$.

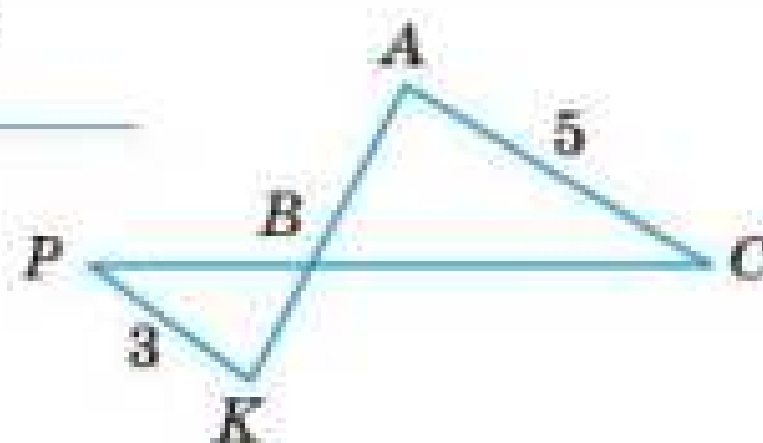
Довести:
 $OC \cdot OB =$
 $= OA \cdot OD$.



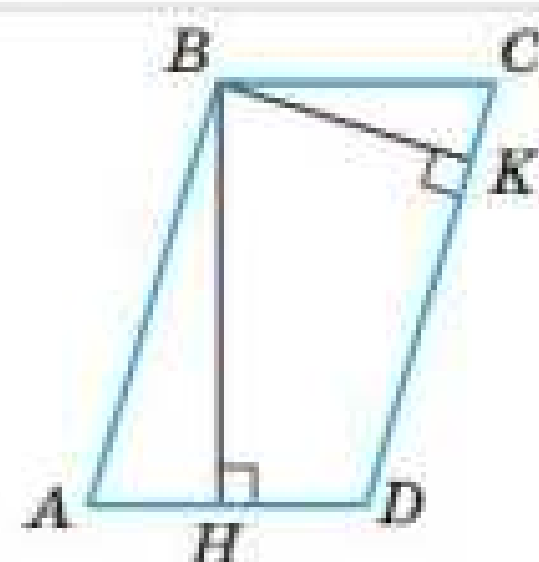
Б

 $KP \parallel AC$.

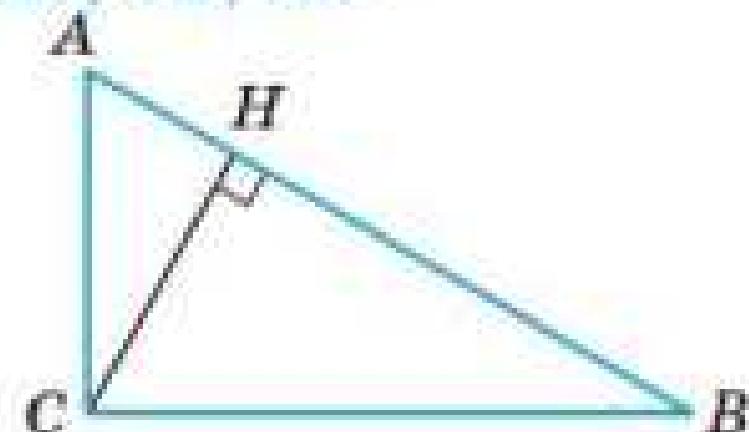
$PC : BC,$
 $PB : PC$



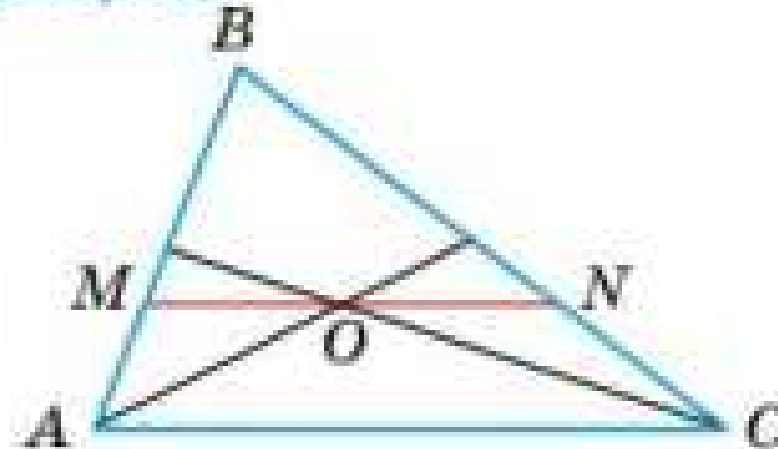
$\square ABCD,$
 $BK : BH = 1 : 2.$

 $AB : BC$ 

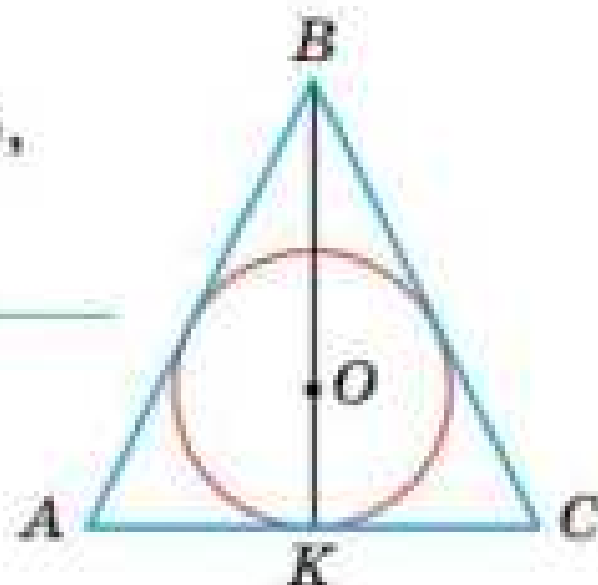
3 $AC \perp CB, CH \perp AB, AH = 1,$
 $HB = 4.$

 AC, CB, HC 

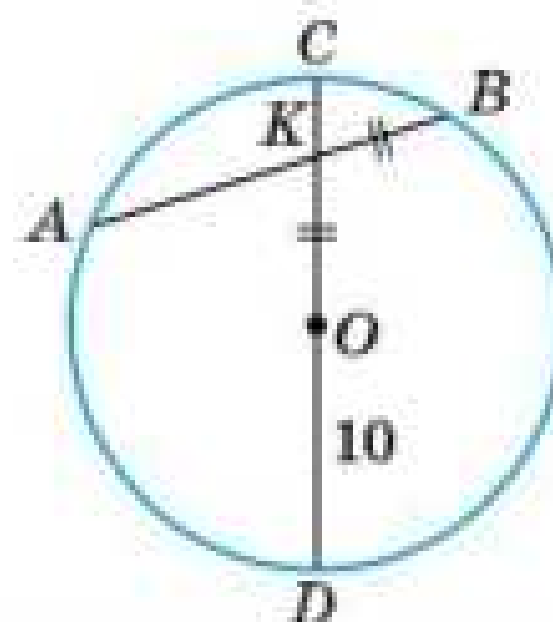
O — точка перетину медіан,
 $MN \parallel AC, BM = 5, MN = 7.$

 AB, AC 

4 $AB = BC,$
 $AB : AC = 8 : 6,$
 $BK = 22.$

 OK 

$AK : KB = 3 : 1,$
 $OD = 10,$
 $OK = KB.$

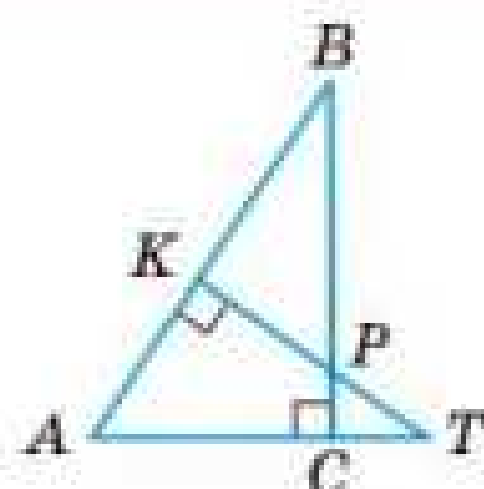
 CK, KD 

САМОСТІЙНА РОБОТА

Для виконання завдання 3 самостійної роботи скористайся малюнком 12.18.

ВАРІАНТ 1

1. На сторонах AB і AC $\triangle ABC$ взято точки M і N так, що $MN \parallel BC$. Знайди MN , якщо $AM = 6$ см, $BM = 4$ см, $BC = 15$ см.
2. Хорди AB і CD перетинаються в точці M так, що $AM = 8$ см, $BM = 12$ см, $CM = 6$ см. Знайди MD .
3. Укажи трикутник, подібний $\triangle ABC$, і доведи, що вони подібні.
4. У $\triangle ABC$ сторона AB на 15 см менша від BC . Знайди периметр трикутника, якщо бісектриса $\angle B$ ділить сторону AC на відрізки 4 см і 14 см.



Мал. 12.18

ВАРІАНТ 2

1. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки E і F так, що $EF \parallel AC$. Знайди AB , якщо $EF = 5$ см, $BE = 4$ см, $AC = 8$ см.
2. Хорди KM і DE перетинаються в точці B так, що $KB = 3$ см, $BM = 16$ см, $BE = 12$ см. Знайди BD .
3. Укажи трикутник, подібний $\triangle AKT$, і доведи, що вони подібні.
4. У $\triangle ABC$ $AB = 12$ см, $BC = 24$ см, $AC = 30$ см. Знайди відрізки, на які бісектриса $\angle B$ ділить сторону AC .

ВАРІАНТ 3

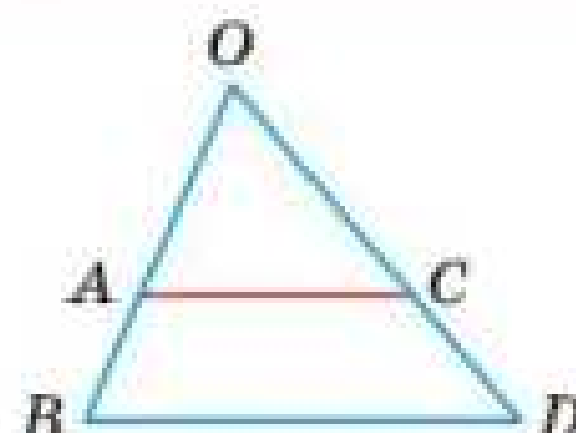
1. На сторонах AC і BC $\triangle ABC$ взято точки K і P так, що $PK \parallel AB$. Знайди AB , якщо $CK = 5$ см, $AK = 4$ см, $PK = 3$ см.
2. Хорди AB і KP перетинаються в точці C так, що $KC = 8$ см, $CP = 10$ см, $CB = 5$ см. Знайди AC .
3. Укажи трикутник, подібний $\triangle KBP$, і доведи, що вони подібні.
4. У $\triangle ABC$ сторона AC на 6 см більша за AB . Знайди периметр трикутника, якщо бісектриса $\angle A$ ділить сторону BC на відрізки 5 см і 10 см.

ВАРІАНТ 4

1. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки D і E так, що $DE \parallel AC$. Знайди BE , якщо $AD = 7$ см, $BD = 3$ см, $BC = 15$ см.
2. Хорди EF і CD перетинаються в точці L так, що $EL = 15$ см, $CL = 10$ см, $LD = 12$ см. Знайди LF .
3. Укажи трикутник, подібний $\triangle CPT$, і доведи, що вони подібні.
4. У $\triangle ABC$ $AB = 20$ см, $BC = 6$ см, $AC = 24$ см. Знайди відрізки, на які бісектриса $\angle C$ ділить сторону AB .

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Для виконання завдань 1–6 скористайся малюнком 12.19, де $AC \parallel BD$.



Мал. 12.19

- | | |
|--|---|
| <p>1 Знайди AO, якщо $OC : CD = 5 : 3$, $BO = 16$ см.</p> | <p>A 10 см B 12 см
 Б 6 см Г 5 см</p> |
| <p>2 Знайди відношення $AO : AB$, якщо $AC : BD = 3 : 5$.</p> | <p>A 3 : 2 B 3 : 5
 Б 2 : 3 Г 5 : 3</p> |
| <p>3 $OA : AB = 3 : 2$. Яке з тверджень хибне?</p> | <p>A $OC : CD = 3 : 2$
 Б $OA : OB = 3 : 5$
 В $AC : BD = 3 : 2$
 Г $OD : OC = 5 : 3$</p> |
| <p>4 $AO = 4$ см, $AB = 3$ см. Знайди периметр $\triangle OAC$, якщо $P_{\triangle BOD} = 21$ см.</p> | <p>A 12 см Б 36,75 см
 В 28 см Г 15,75 см</p> |
| <p>5 Знайди коефіцієнт подібності трикутників OBD і OAC, якщо $OA = 10$ см, $AB = 6$ см.</p> | <p>A $k = \frac{5}{3}$ В $k = \frac{8}{3}$
 Б $k = \frac{3}{5}$ Г $k = \frac{8}{5}$</p> |
| <p>6 $AC = 5$ см, $BD = 7$ см. Знайди CD, якщо $OD = 14$ см.</p> | <p>A 10 см В 4 см
 Б $8\frac{1}{6}$ см Г $5\frac{5}{6}$ см</p> |
| <p>7 Медіани AA_1 і BB_1 $\triangle ABC$ перетинаються в точці O. Знайди відношення $A_1O : A_1A$.</p> | <p>A 1 : 2 В 3 : 1
 Б 2 : 1 Г 1 : 3</p> |
| <p>8 Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 18 см і 20 см. У якому відношенні ділить сторону бісектриса, проведена з вершини найбільшого кута?</p> | <p>A 1 : 3 В 5 : 9
 Б 3 : 5 Г 1 : 2</p> |
| <p>9 AM — бісектриса $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$, $M \in BC$). Який знак слід поставити замість*: CM * MB?</p> | <p>A < В =
 Б > Г <</p> |
| <p>10 Проекції катетів на гіпотенузу в прямокутному трикутнику дорівнюють 2 см і 8 см. Знайди довжину висоти, проведеної з вершини прямого кута.</p> | <p>A 10 см В 4 см
 Б 16 см Г 5 см</p> |

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Знайди сторону AC , якщо $AB = 15$ см, $A_1B_1 = 30$ см, $A_1C_1 = 48$ см.

А 48 см Б 24 см В 60 см Г 96 см

2. Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см. Знайди найменшу сторону подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 75 см.

А 49 см Б 35 см В 21 см Г 15 см

3. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а бічні сторони 4 см. На скільки треба продовжити бічні сторони, щоб вони перетнулися?

А 24 см Б 2,4 см В 6 см Г 1,5 см

4. Хорди AB і CK кола перетинаються в точці E так, що $AE : BE = 2 : 3$, $CE = AE$ і $KE = 12$ см. Установи відповідність між відрізками, заданими умовами (1–3), та їх довжинами (А–Д).

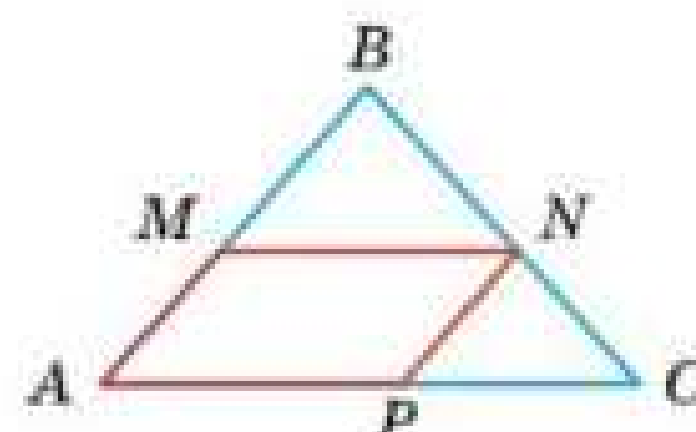
1 AE	А 4 см
2 BE	Б 8 см
3 CK	В 6 см
	Г 12 см
	Д 20 см

5. Через точку O перетину діагоналей трапеції $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає основи AD і BC у точках M і N відповідно. Доведи, що $\triangle AOM \sim \triangle CON$.

6. З вершини B прямокутника $ABCD$ опущено перпендикуляр BK на діагональ AC . Знайди AC , якщо $BK = 12$ см і $AK : KC = 4 : 9$.

7. З вершини тупого кута паралелограма на його сторони опущено перпендикуляри завдовжки 5 см і 8 см. Знайди сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 78 см.

8. У $\triangle ABC$ (мал. 12.19) зі сторонами $AB = 12$ см і $AC = 15$ см вписано паралелограм так, що один кут у них спільний. Знайди сторони паралелограма, якщо одна з них на 6 см більша за другу.



Мал. 12.19

Додаткове завдання

9. У трикутник вписано півколо, яке дотикається до двох сторін трикутника і центр якого ділить третю сторону на відрізки 7,5 см і 10,5 см. Знайди сторони трикутника, якщо його периметр 42 см.

Геометрія — це мистецтво добре вимірювати.

П. Раме

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 2

Відрізки називають пропорційними, якщо пропорційні їх довжини. Відрізки a і b пропорційні відрізкам x і y , якщо правильна пропорція $a : x = b : y$.

Узагальнена теорема Фалеса. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки.

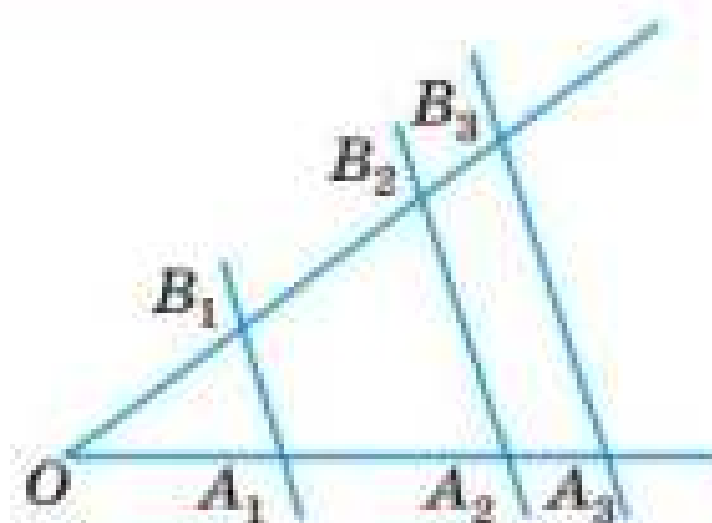
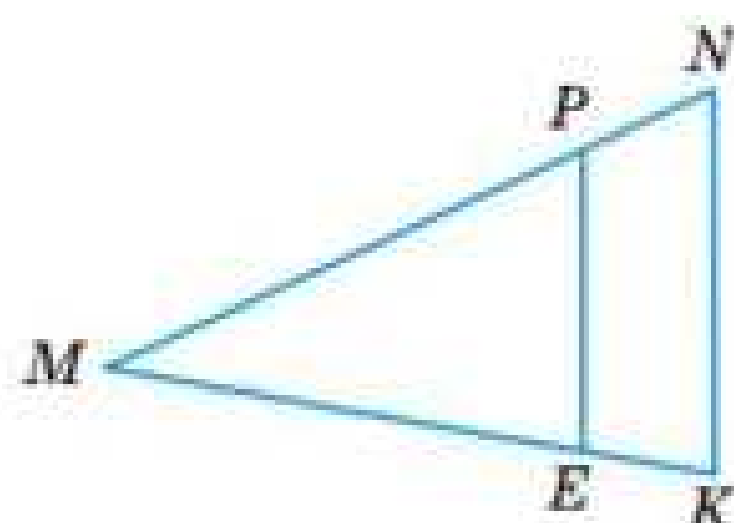
Якщо $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, то $\frac{B_1B_2}{B_2B_3} = \frac{A_1A_2}{A_2A_3}$.

Подібними називають фігури, що мають схожі форми. У подібних трикутників усі відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Основна теорема про подібність трикутників. Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

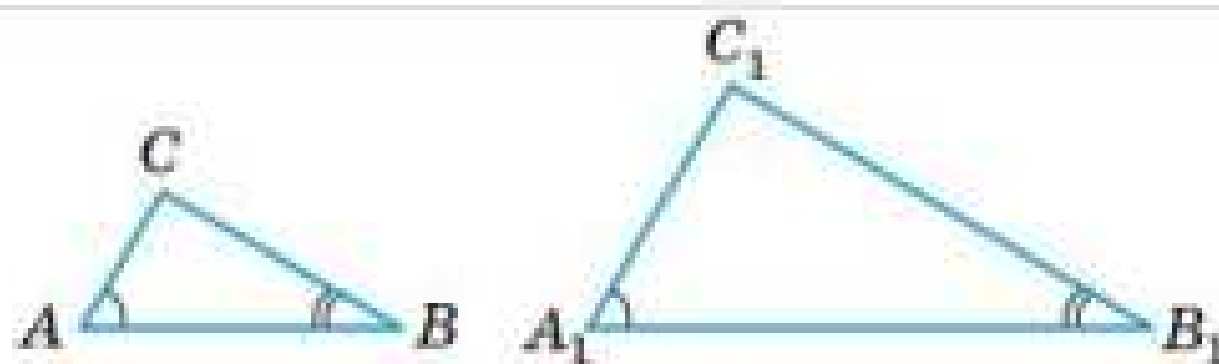
Ознаки подібності трикутників. Два трикутники подібні, якщо:

- 1) два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого;
- 2) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого, а кути між ними рівні;
- 3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого.



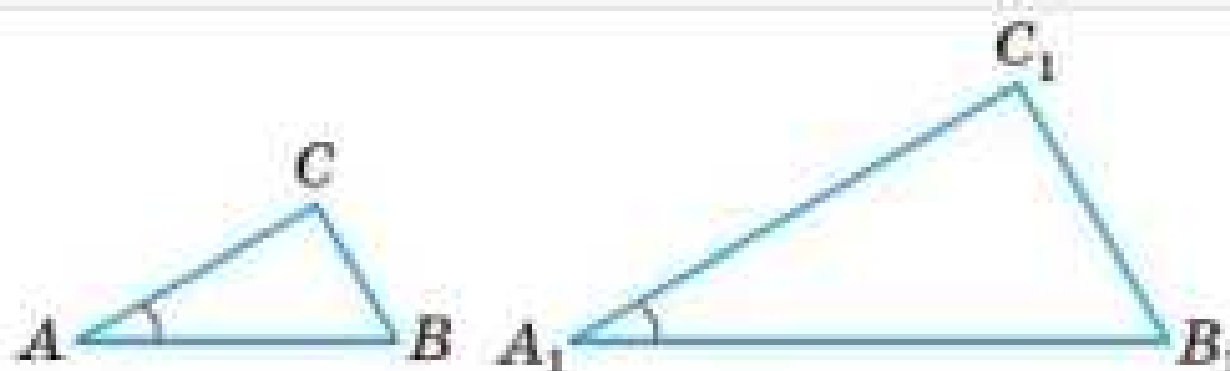
$$\triangle MPE \sim \triangle MNK$$

- 1 За двома кутами



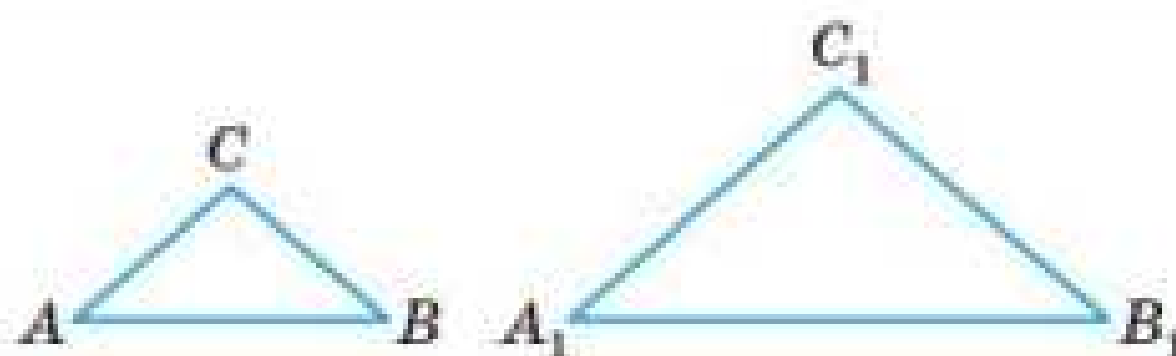
$$\begin{aligned} \angle A &= \angle A_1 \\ \angle B &= \angle B_1 \end{aligned}$$

- 2 За двома сторонами і кутом між ними



$$\begin{aligned} \frac{AB}{A_1B_1} &= \frac{AC}{A_1C_1} \\ \text{і } \angle A &= \angle A_1 \end{aligned}$$

- 3 За трьома сторонами

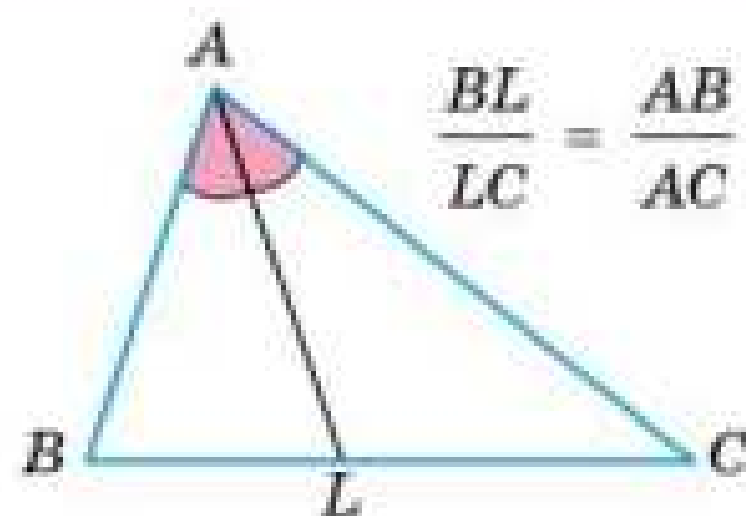
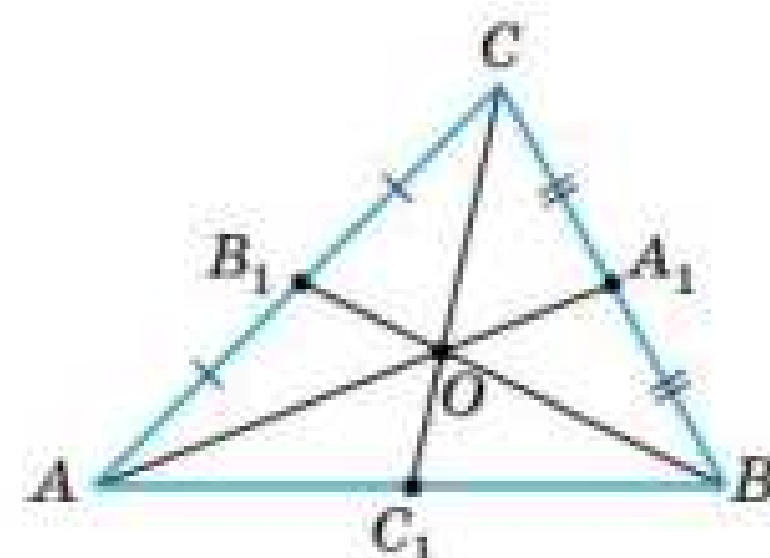


$$\begin{aligned} \frac{AB}{A_1B_1} &= \frac{BC}{B_1C_1} = \\ &= \frac{AC}{A_1C_1} \end{aligned}$$

З ознак подібності трикутників випливають такі теореми:

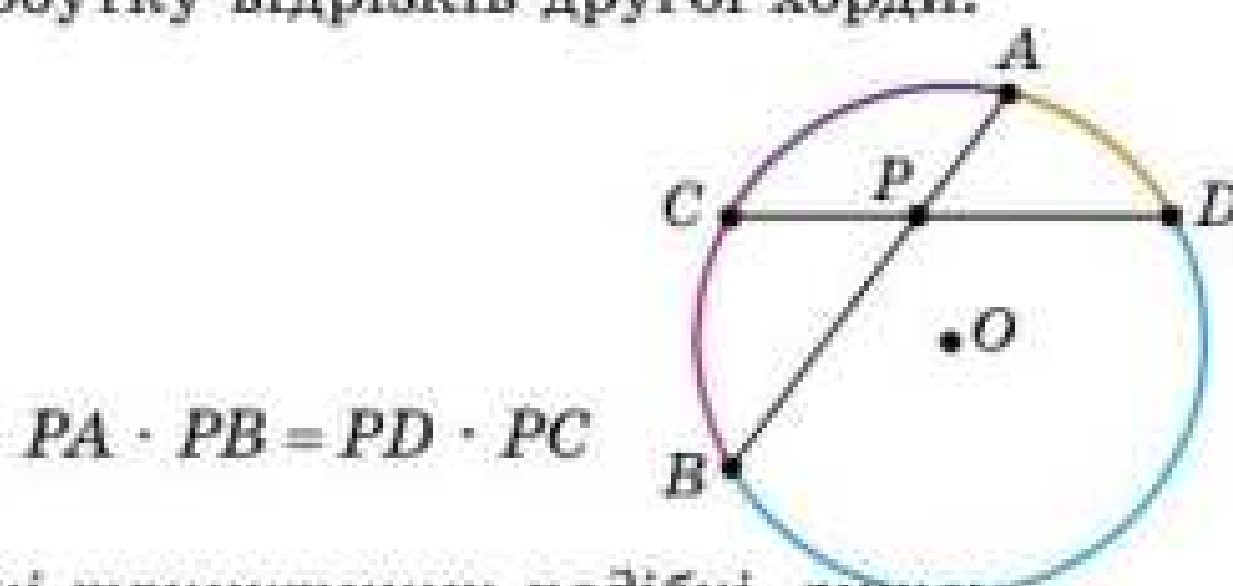
Бісектриса трикутника ділить його протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

Усі три медіани трикутника проходять через одну точку і діляться нею у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини трикутника.



$$AO : OA_1 = 2 : 1, BO : OB_1 = 2 : 1, \\ CO : OC_1 = 2 : 1$$

Якщо дві хорди кола перетинаються, то добуток відрізків однієї хорди дорівнює добутку відрізків другої хорди.



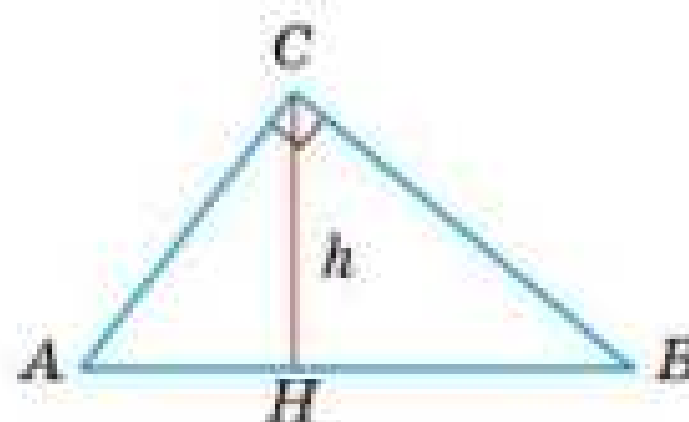
Два прямокутні трикутники подібні, якщо:

- 1) гострий кут одного трикутника дорівнює гострому куту другого трикутника; або
- 2) катети одного трикутника пропорційні катетам другого; або
- 3) катет і гіпотенуза одного трикутника пропорційні катету і гіпотенузі другого.

Відрізок x називають середнім пропорційним відрізків a і b , якщо правильною є пропорція $a : x = x : b$ (або рівнозначна їй рівність $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$).

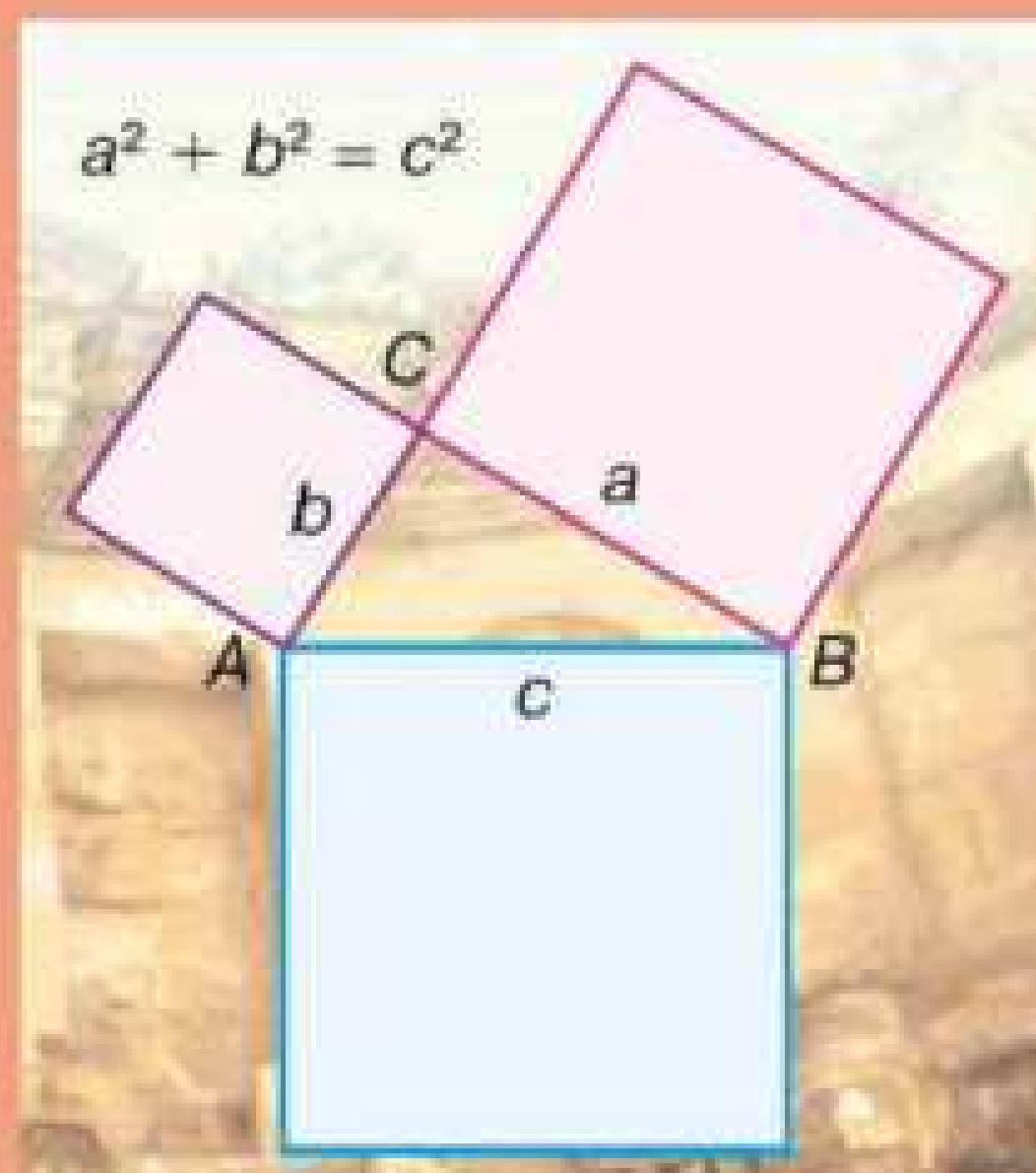
Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи і його проєкції на гіпотенузу. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним відрізків, на які висота ділить гіпотенузу.

$$AC^2 = AB \cdot AH, \\ BC^2 = AB \cdot BH, \\ CH^2 = AH \cdot BH.$$



РОЗДІЛ 3

Розв'язування прямокутних трикутників



Розв'язати трикутник — це означає за кількома відомими його елементами знайти всі інші його елементи. Ще понад два тисячоліття тому було створено окрему науку про розв'язування трикутників — тригонометрію.

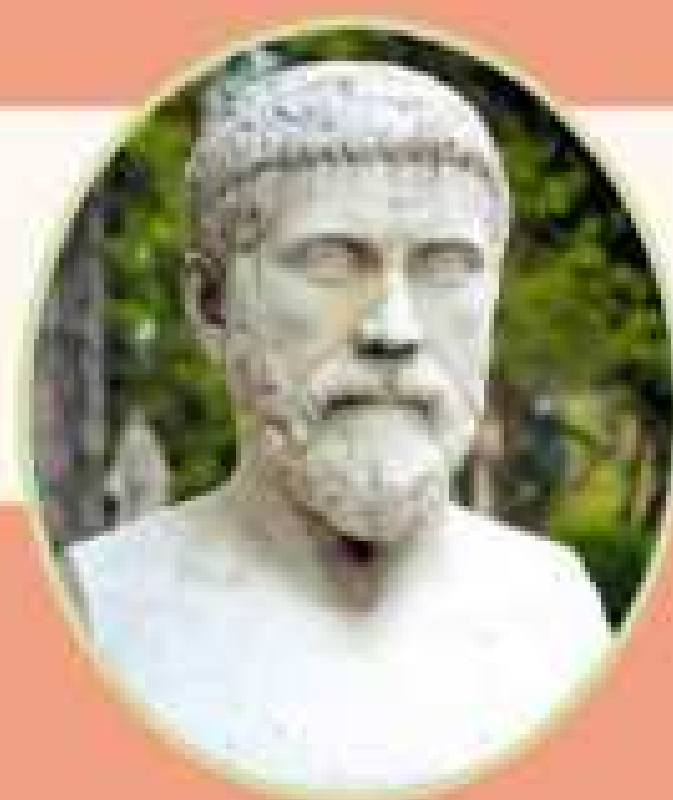
У цьому розділі ти ознайомишся з найпростішими відомостями цієї науки про розв'язування прямокутних трикутників.

§ 13 Теорема Піфагора
Pythagorean theorem

§ 14 Перпендикуляр і похила
Perpendicular and Slanting Line

§ 15 Синус, косинус і тангенс
гострого кута
прямокутного трикутника
Sine, cosine and tangent of an
acute angle of a right triangle

§ 16 Розв'язування прямокутних
трикутників
Solving right triangles



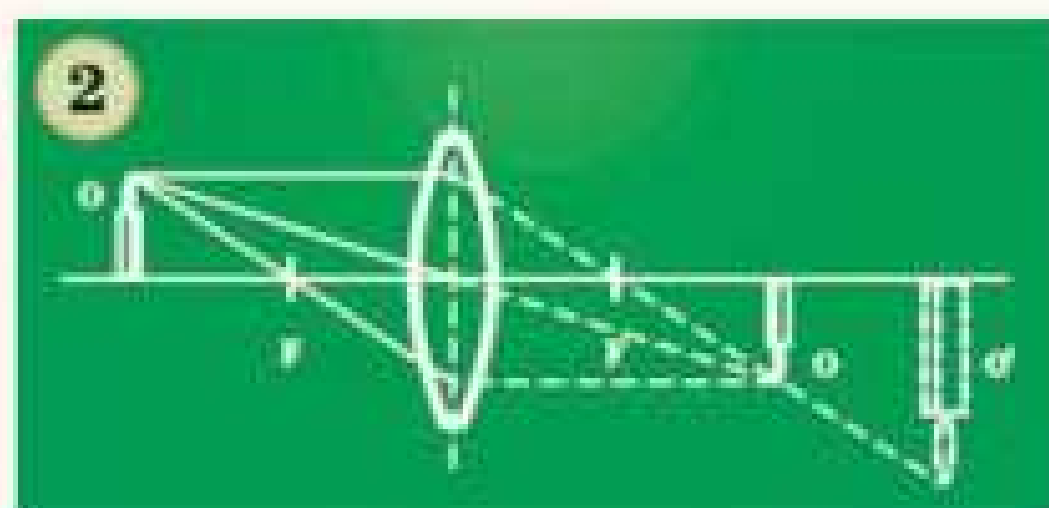
*До знань тягнись, юначе, до наук;
Хто розум має — не мозолить рук.
В людині розум більш за все ціним:
Вся сила і краса людини — в ній.*

ПІФАГОР САМОСЬКИЙ (пр. 580–500 до н. е.)
Давньогрецький математик, філософ і педагог.

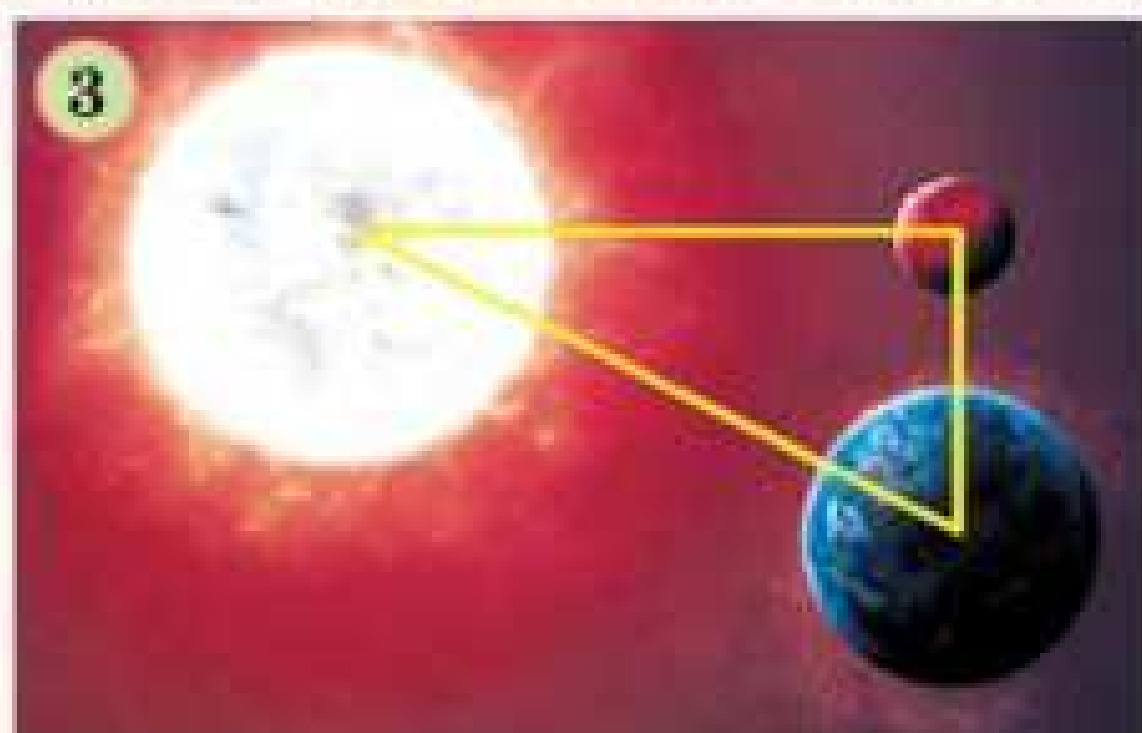
Для чого розв'язувати прямокутні трикутники?

Прямокутні трикутники часто використовують як моделі реальних ситуацій, що існують в навколишньому світі.

Розв'язування прямокутних трикутників використовують у фізиці, коли, наприклад, обчислюють сили,¹ досліджують заломлення променів,² визначають напрями руху тощо.



Розв'язування трикутників широко використовують в технічних науках, в астрономії³, в кристалографії, в математиці, в геодезії⁴.



Поміркуй, де ще використовують розв'язування прямокутних трикутників.

Із розділу ти дізнаєшся, як визначити невідомі кути чи сторони трикутників за кількома відомими їх елементами, як побудувати прямокутний трикутник і як встановити, чи має заданий трикутник прямий кут.

§ 13 ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

Теорема Піфагора — одна з найкращих теорем геометрії. Доводити її можна різними способами, найкраще — з використанням властивостей подібних трикутників.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- leg — катет
- hypotenuse — гіпотенуза
- The Pythagorean theorem — теорема Піфагора

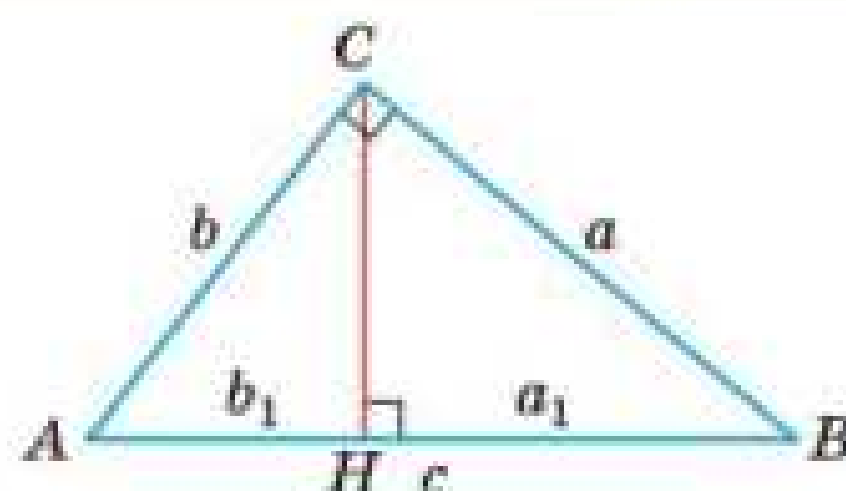
Теорема 29 (Піфагора). У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Доведення. Нехай ACB — довільний прямокутний трикутник, а CH — висота, проведена з вершини прямого кута C (мал. 13.1). Позначимо: $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AH = b_1$, $BH = a_1$.

Оскільки $\triangle AHC \sim \triangle ACB$, то $b_1 : b = b : c$, звідки $b^2 = cb_1$. Оскільки $\triangle BHC \sim \triangle ACB$, то $a_1 : a = a : c$, звідки $a^2 = ca_1$.

Отже, $a^2 + b^2 = ca_1 + cb_1 = c(a_1 + b_1) = c \cdot c = c^2$, тобто $c^2 = a^2 + b^2$.

Теорема Піфагора дає змогу за двома будь-якими сторонами прямокутного трикутника знайти третю. Наприклад, якщо катети трикутника дорівнюють 3 і 4, то його гіпотенуза $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Взагалі, якщо катети трикутника a і b , то його гіпотенуза $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Якщо дано гіпотенузу c і катет b , то другий катет $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Наприклад, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 52 см, а катет 48 см, то другий катет $\sqrt{52^2 - 48^2} = \sqrt{(52 - 48)(52 + 48)} = \sqrt{4 \cdot 100} = 20$ (см).

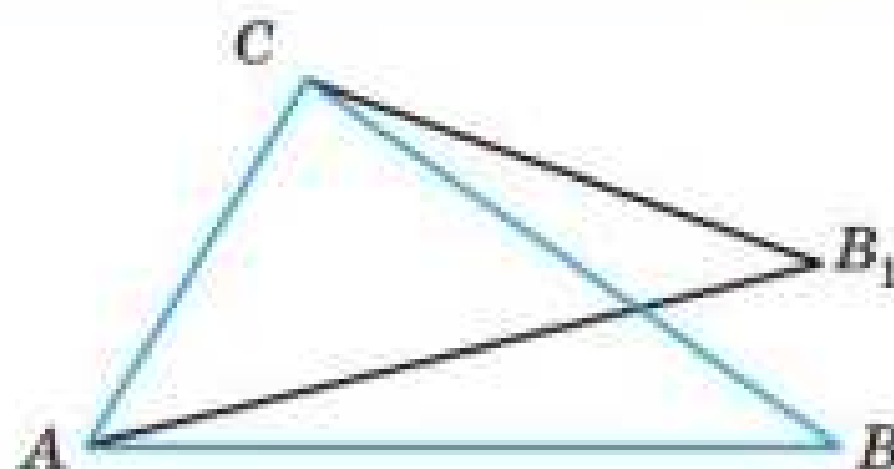


Мал. 13.1

Теорема 30 (обернена до теореми Піфагора). Якщо в трикутнику ABC $AB^2 = AC^2 + CB^2$, то кут C цього трикутника прямий.

Доведення.

Нехай у $\triangle ABC$ $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Припустимо, що кут C не прямий. Побудуємо ще $\triangle AB_1C$, у якого $\angle C = 90^\circ$ і $CB_1 = CB$ (мал. 13.2). Тоді $AB_1 = \sqrt{AC^2 + CB_1^2} = \sqrt{AC^2 + CB^2} = AB$.



Мал. 13.2

Трикутники ABC і AB_1C рівні за трьома сторонами. Отже, $\angle ACB = \angle ACB_1 = 90^\circ$.

За допомогою цієї теореми (оберненої до теореми Піфагора), знаючи сторони трикутника, можна встановити, чи має трикутник прямий кут.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Теорема Піфагора — одна з найважливіших і найвідоміших теорем евклідової геометрії. Відомо більше сотні її різних доведень. Найпростіше таке.

Нехай маємо довільний прямокутний трикутник із катетами a , b і гіпотенузою c . На кожній стороні квадрата зі стороною c побудуємо такий трикутник, як на малюнку 13.3. Утвориться квадрат зі стороною $a + b$. Визначимо його

площу двома способами: $S = (a + b)^2$ і $S = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + c^2$.

У результаті матимемо:

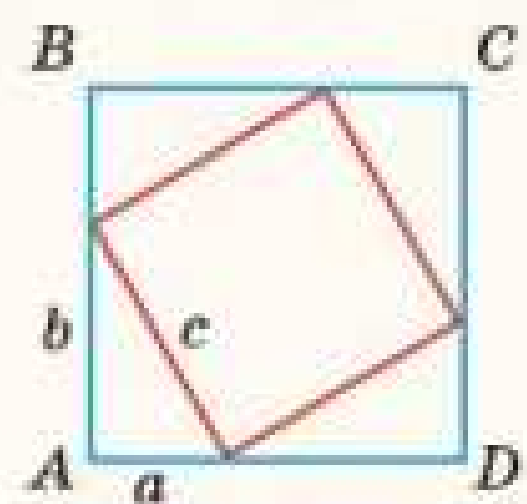
$$(a + b)^2 = 2ab + c^2, \quad a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2, \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Оскільки квадрати відрізків a , b , c дорівнюють площам квадратів з такими сторонами, то теорему Піфагора часто формулюють і так:

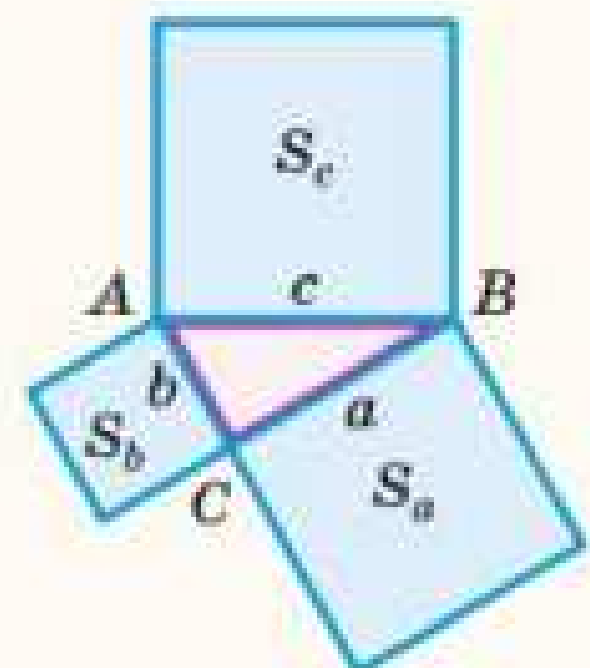
Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на його катетах: $S_a + S_b = S_c$ (мал. 13.4).

Такий малюнок учням здавався схожим на штани (мал. 13.5), то ж з давніх часів до нас дійшли примовки: «Піфагорові штанці файні є у три кінці».

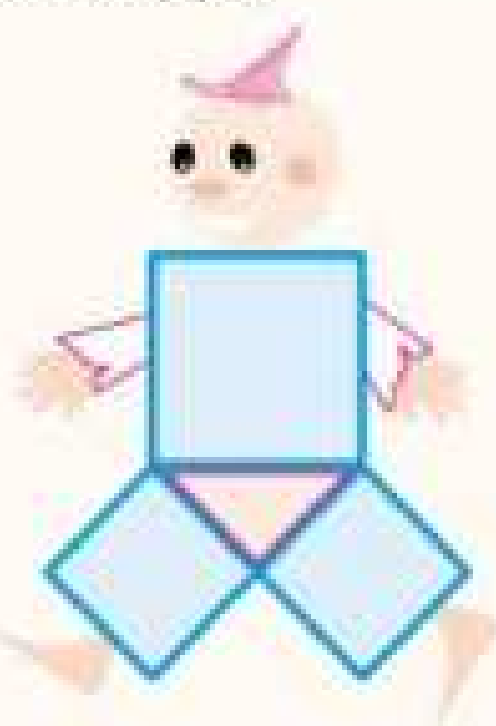
Інші вбачають у такій конфігурації не штани, а сорочку (мал. 13.6), тому примовляють: «Хто в сорочці Піфагора — піднось руки вгору».



Мал. 13.3



Мал. 13.4



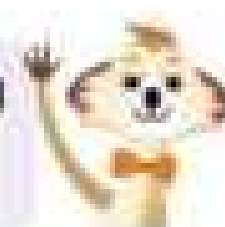
Мал. 13.5



Мал. 13.6

Теорема Піфагора правильна лише в евклідовій геометрії, в якій визнається правильною аксіома Евкліда.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Прямокутні трикутники. Урок 1).



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй і доведи теорему Піфагора.
2. Сформулюй теорему, обернену до теореми Піфагора.
3. Як знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомі його катети?
4. Як знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомі його гіпотенуза і другий катет?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Знайди периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а проведена до неї висота — 6 см.

- Оскільки даний $\triangle ABC$ рівнобедрений (мал. 13.7), то $АН = 0,5AC = 8$ см, $\angle AHB = 90^\circ$.

За теоремою Піфагора

$$AB^2 = AH^2 + HB^2, AB^2 = 64 + 36 = 100,$$

$$AB = 10 \text{ см.}$$

Шуканий периметр $P = 16 + 2 \cdot 10 = 36$ (см).

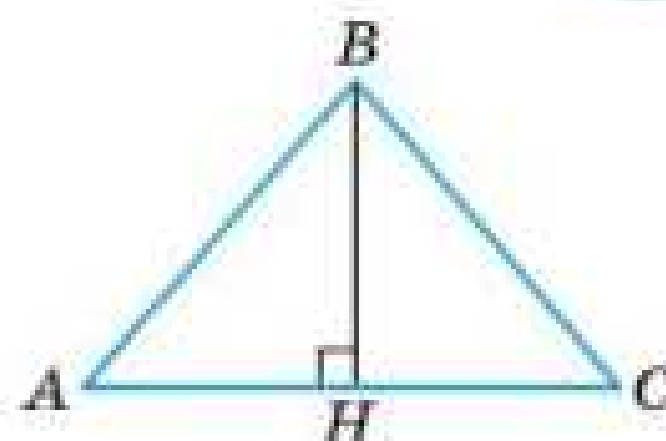
2. Знайди сторони прямокутника, вписаного в коло радіуса 50 см, якщо вони відносяться як 3 : 4 (мал. 13.8).

- Діагональ прямокутника, вписаного в коло, є діаметром цього кола. Отже, гіпотенуза AC прямокутного трикутника ABC дорівнює 100 см. Оскільки його катети пропорційні числам 3 і 4, то їхні довжини дорівнюють $3x$ і $4x$, де x — деяке число. За теоремою Піфагора $(3x)^2 + (4x)^2 = 100^2$, звідки

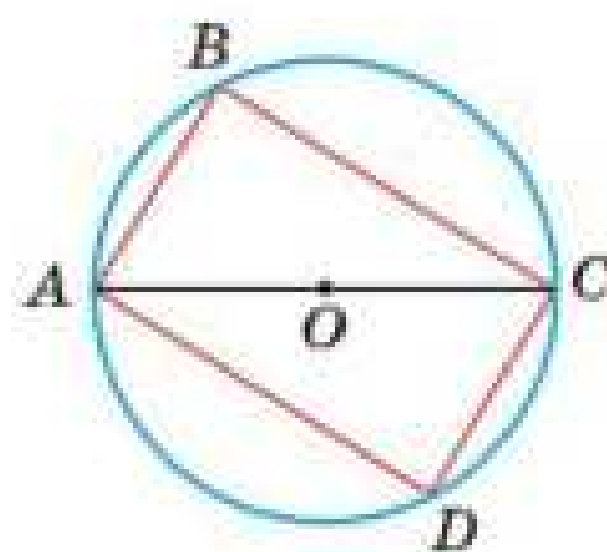
$$25x^2 = 10\,000, x^2 = 400, x = 20.$$

$$3x = 60, 4x = 80.$$

Отже, сторони прямокутника 60 см, 80 см, 60 см і 80 см.



Мал. 13.7



Мал. 13.8

ВИКОНАЄМО УСНО

701. Знайди гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:

а) 3 см і 4 см; б) 1 дм і 2 дм; в) c і c .

702. Знайди катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет дорівнюють:

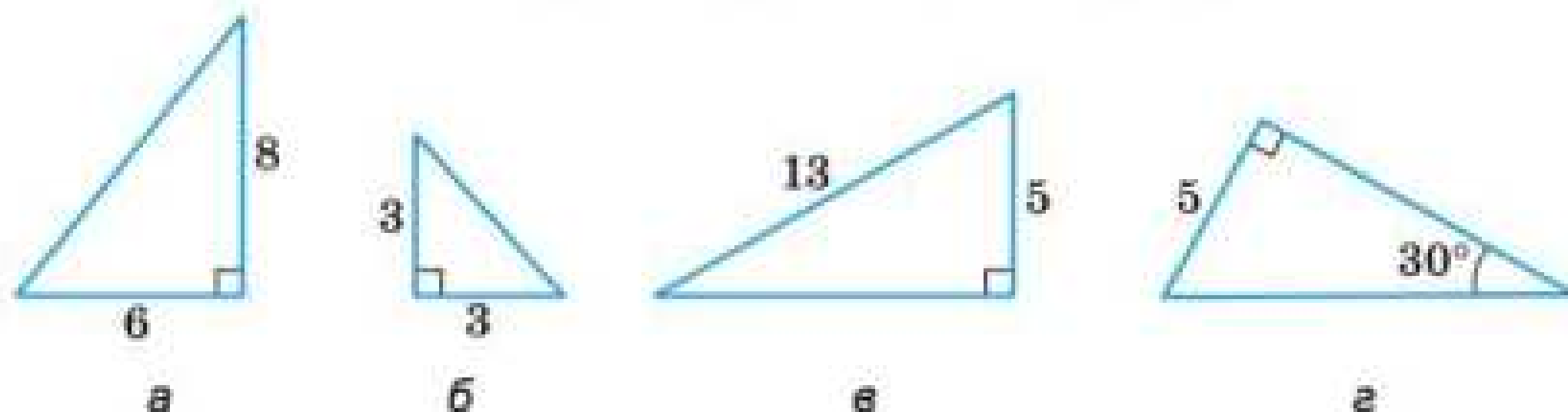
а) 5 см і 3 см; б) 10 дм і 1 дм; в) c і a .



703. Знайди невідомі сторони трикутника, використовуючи таблицю, якщо a і b — катети прямокутного трикутника, а c — його гіпотенуза.

a	1	2	3	1	3	0,5
b	2	3	4	5		
c	$\sqrt{5}$				$\sqrt{19}$	1

704. За малюнком 13.9 знайди невідомі сторони трикутників.



Мал. 13.9

705. Визначаючи вид трикутника зі сторонами 10 см, 24 см і 26 см, учень міркує: «Оскільки $10^2 + 24^2 = 676 = 26^2$, то за теоремою Піфагора цей трикутник прямокутний». Чи правильно міркує учень?

706. Сторони трикутника дорівнюють 6 м, 8 м і 10 м. Чи прямокутний цей трикутник?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

707. Знайди гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: а) 9 м і 12 м; б) 12 см і 16 см; в) $3a$ і $4a$.

708. Гра. Один із учнів / одна з учениць задає довжину одного катета, другий/друга — довжину другого, а третій/третя — знаходить довжину гіпотенузи.

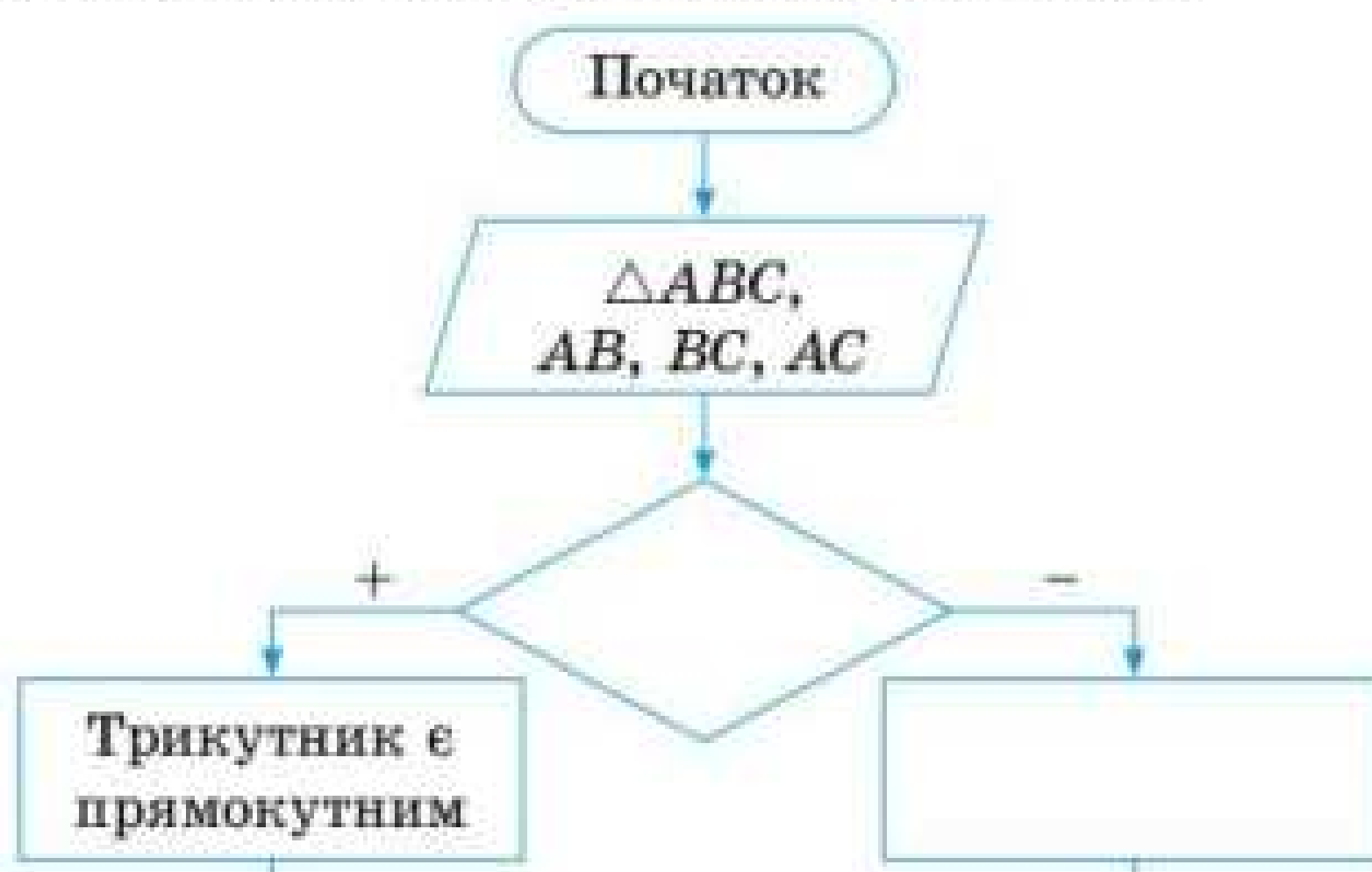
709. Знайди катет прямокутного трикутника, якщо інші його сторони дорівнюють: а) 5 м і 4 м; б) 13 см і 12 см; в) $17m$ і $15m$.

710. Заповни порожні клітинки таблиці, якщо a і b — катети прямокутного трикутника, а c — його гіпотенуза.

a	5	8	7	9	11	12	13
b	12			40			
c		17	25		61	37	85



711. Доповни блок-схему, яку почав будувати Максим.



712. Сторони прямокутника дорівнюють 32 см і 60 см. Знайди його діагональ.

713. Діагональ прямокутника дорівнює 26 см, а одна зі сторін — 10 см. Знайди другу сторону прямокутника.

714. Точка M лежить усередині прямого кута ABC на відстані 5 см і 12 см від його сторін. Знайди BM .

715. Діагоналі ромба 10 м і 24 м. Знайди його сторони.

716. Сторона ромба дорівнює 10 дм, а одна з діагоналей 12 дм. Знайди другу діагональ ромба (мал. 13.10).

717. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайди радіус описаного кола.

718. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 9 см, а радіус описаного кола 20,5 см. Знайди другий катет.

719. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, 5 см. Знайди периметр трикутника.

720. Знайди гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відстані від її середини до катетів дорівнюють 5 см і 12 см.

721. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайди медіани трикутника.

722. Знайди катети прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 5 м, а один із кутів 60° (мал. 13.11).



Мал. 13.10



Мал. 13.11

723. Знайди невідомі сторони прямокутного трикутника, якщо один із його катетів дорівнює 6 см, а протилежний кут 30° .

724. Знайди сторони прямокутника, якщо:

- а) одна зі сторін дорівнює 12 см, а діагональ 13 см;
- б) діагональ дорівнює 12 см і утворює зі стороною кут 30° ;
- в) діагональ дорівнює 10 см, а кут між діагоналями 60° ;
- г) одна зі сторін удвічі більша за другу, а діагональ дорівнює 5 см;
- г) одна зі сторін дорівнює 8 см, а друга на 4 см менша за діагональ.

725. Знайди сторони прямокутника, якщо:

- а) одна зі сторін дорівнює 5 см, а діагональ 13 см;
- б) діагональ дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 60° ;
- в) сторони пропорційні числам 5 і 12, а діагональ дорівнює 26 см;
- г) одна зі сторін дорівнює 15 см, а друга на 9 см менша за діагональ.

726. Знайди висоту рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює a .

727. Знайди діагональ квадрата, якщо його сторона дорівнює a .

728. Катет рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює a . Знайди його гіпотенузу.

729. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює c (мал. 13.12). Знайди його катети.

730. У рівнобедреному трикутнику знайдіть:



- а) висоту, проведену до основи, якщо бічна сторона і основа відповідно дорівнюють 26 см і 20 см;
- б) сторони, якщо бічна сторона відноситься до основи як 5 : 6, а висота, проведена до основи, дорівнює 12 см;
- в) бічну сторону, якщо основа дорівнює 6 см, а кут при основі 45° .



Мал. 13.12

731. У рівнобедреному трикутнику знайди:

- а) бічну сторону, якщо основа і висота, проведена до неї, дорівнюють відповідно 30 см і 20 см;
- б) периметр, якщо основа дорівнює 12 см, а бічна сторона на 2 см більша за висоту, проведену до основи;
- в) основу, якщо бічна сторона 12 см, а кут при вершині 120° .

732. **ЗНО** У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута D до сторони BC проведено перпендикуляр DK , $BK = 4$ см, $KC = 6$ см. Визнач довжину перпендикуляра DK .

733. Бічна сторона рівнобедреного трикутника на 8 см більша за висоту, проведену до основи. Знайди периметр трикутника, якщо основа дорівнює 24 см.

734. Катет прямокутного трикутника дорівнює 28 дм, а різниця двох інших сторін 8 дм. Знайди периметр трикутника.
735. У коло радіуса 34 см вписано прямокутник, відношення сторін якого $8 : 15$. Знайди периметр прямокутника.
736. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 11 см і 59 см, а бічна сторона 25 см. Знайди висоту трапеції.
737. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 17 см і 27 см, а висота 12 см. Знайди периметр трапеції.
738. У колі радіуса 17 см проведено хорду завдовжки 16 см. Знайди відстань від центра кола до хорди.
739. Хорда AB і перпендикулярний до неї радіус OC перетинаються в точці K . Знайди AB , якщо $OK = 9$ см, $KC = 32$ см.
740. **ЗНО** Довжина сторони ромба дорівнює 12 см. Визнач довжину більшої діагоналі цього ромба, якщо його тупий кут дорівнює 120° .

А $6\sqrt{3}$ см Б $8\sqrt{3}$ см В 12 см Г $12\sqrt{3}$ см Д 24 см

741. Діаметр колоди 12 см (мал. 13.13).



Чи можна з цієї колоди витесати квадратний брус із ребром:

- а) 10 см; б) 8 см?

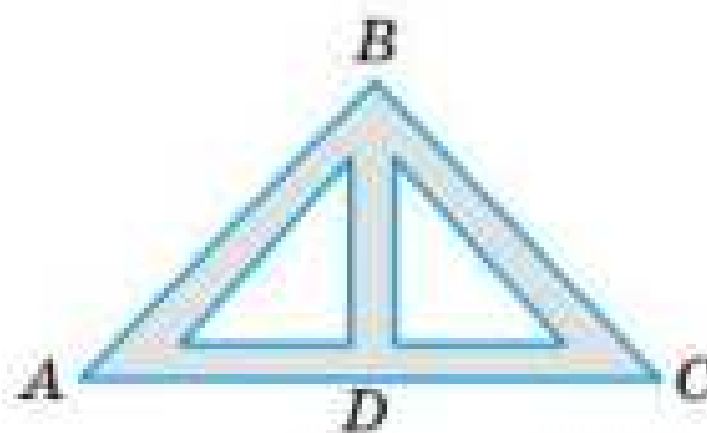


Мал. 13.13

742. Дерево надломилося на висоті 6 м, і його вершина впала на землю на відстані 8 м від стовбура (мал. 13.14). Якою була висота дерева?



Мал. 13.14



Мал. 13.15

743. Відстань між деревами заввишки 13 м і 27 м дорівнює 48 м. Знайди відстань між вершинами дерев.
744. Для транспортування матеріалів між двома фабричними будівлями споруджено похилий жолоб, кінці якого розміщено на висоті 8 м і 3 м. Відстань між будівлями — 10 м. Обчисли довжину жолоба. Відповідь округли до десятих.
745. Кровова ферма має крокви AB і BC по 10 м і прогін AC завдовжки 16 м. Визнач висоту ферми BD (мал. 13.15).

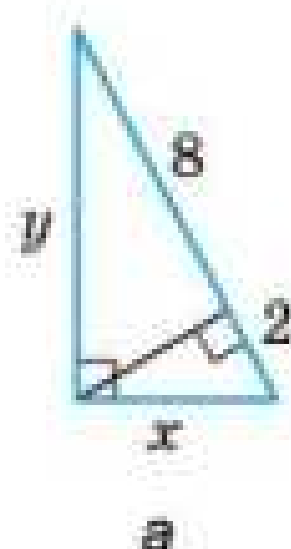
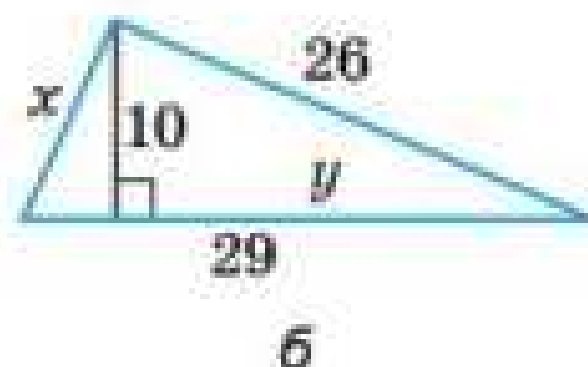
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

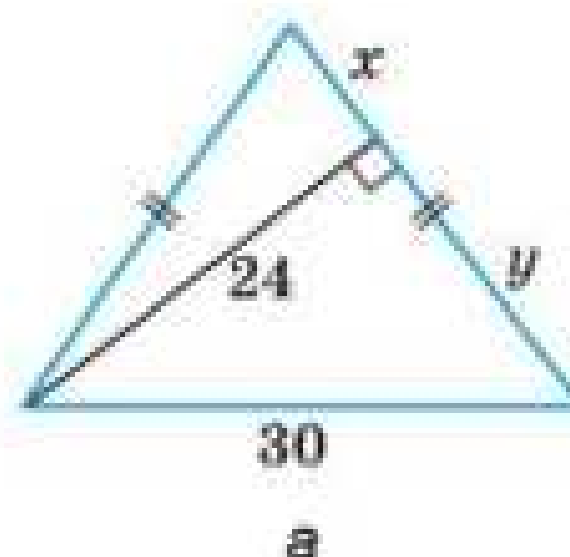


746. За малюнком 13.16 знайди невідомі елементи x і y .

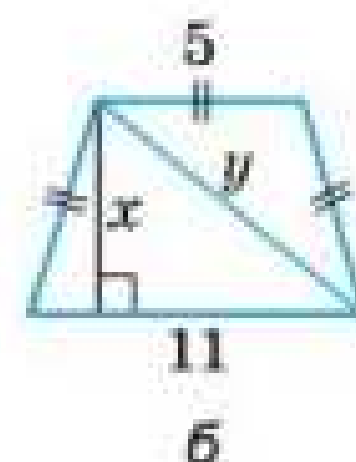
747. За малюнком 13.17 знайди невідомі елементи x і y .



Мал. 13.16



Мал. 13.17



748. Знайди периметр прямокутного трикутника, якщо бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 10 см і 26 см.

749. Знайди радіус кола, вписаного в трикутник зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см.

750. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайди висоту, проведену до гіпотенузи.

751. Знайди висоту BH $\triangle ABC$, якщо $AB = 13$, $AC = 14$, $BC = 15$.

752. *Відкрита задача.* Знайдіть периметр трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 12 см і 16 см і трикутник є...

753. На катеті BC прямокутного $\triangle ABC$ з гіпотенузою $AB = 50$ см взято точку M таку, що $AM = 41$ см і $CM : MB = 3 : 7$. Знайди катети трикутника.

754. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить гіпотенузу на відрізки 3 см і 10 см. Знайди сторони трикутника.

755. The point of contact of a circle inscribed in a right triangle divides one of the legs into segments 3 cm and 5 cm. Find the perimeter of the triangle.

756. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 22 см і 42 см, а бічна сторона 26 см. Знайди діагоналі трапеції.

757. Знайди діагоналі прямокутної трапеції з основами 3 см і 6 см та кутом 120° .

758. Доведи, що в прямокутній трапеції різниця квадратів діагоналей дорівнює різниці квадратів основ.

759. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює m , а більша бічна сторона і менша діагональ дорівнюють по n . Знайди більшу діагональ трапеції.

760. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайди довжину цієї діагоналі, якщо основи трапеції дорівнюють 10 см і 22 см.

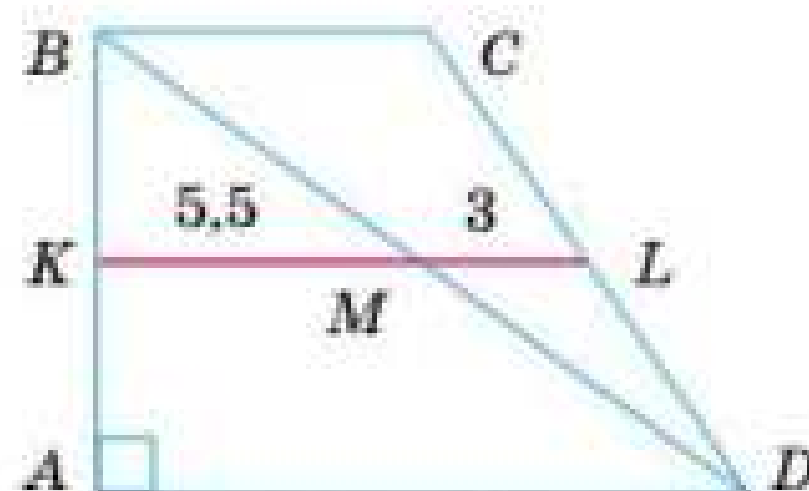
761. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її тупого кута. Знайди довжину цієї діагоналі, якщо основи трапеції дорівнюють 6 см і 26 см.

762. Знайди радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію з основами 4 см і 16 см.

763. Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює 3 см, а бічна сторона — 10 см. Знайди основи трапеції.

764. Знайди основи трапеції, вписаної в коло, якщо бічна сторона і діагональ відповідно дорівнюють 6 см і 8 см, а центр кола лежить на більшій стороні трапеції.

765. **ЗНО** У трапеції $ABCD$ $\angle A = 90^\circ$, $AB = 12$ см (мал. 13.18). Діагональ BD ділить середню лінію KL трапеції на відрізки KM і ML , причому $KM = 5,5$ см і $ML = 3$ см. Обчисли периметр трапеції $ABCD$.



Мал. 13.18

766. Радіуси двох концентричних кіл дорівнюють r і $2r$. Знайди довжину хорди більшого кола, яка дотикається до меншого кола.

767. У колі радіуса 15 см по одну сторону від центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 18 см і 24 см. Знайди відстань між хордами.

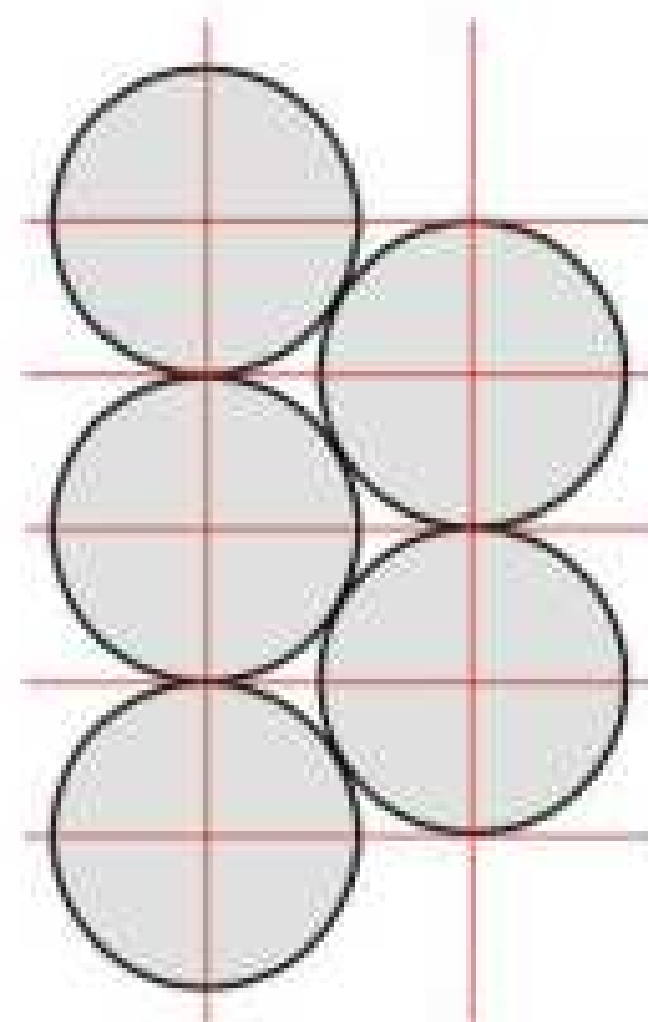
768. У колі радіуса 10 см по різні сторони від центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 12 см і 16 см. Знайди відстань між хордами.

769. З листа жерсті вирізали круги, дотичні один до одного (мал. 13.19). Знайди відстань між прямими, на яких розташовані центри кругів, якщо діаметр кожного круга дорівнює 28 см.

770. Відстань між центрами двох кіл, радіуси яких 10 см і 17 см, дорівнює 21 см. Знайди довжину спільної хорди.

771. Радіуси двох кіл, що перетинаються, дорівнюють 13 см і 15 см, а спільна хорда дорівнює 24 см. Знайди відстань між центрами кіл.

772. Кола радіусів 8 см і 18 см дотикаються зовні. Знайди довжину спільної зовнішньої дотичної.



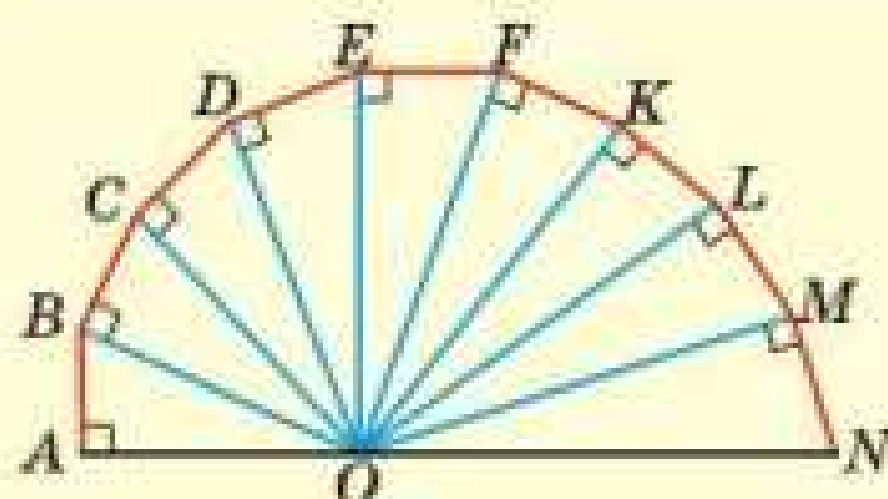
Мал. 13.19

773. Радіуси двох кіл дорівнюють 2 см і 8 см, а відстань між їхніми центрами 15 см. Знайдіть довжину спільної:
а) зовнішньої дотичної; б) внутрішньої дотичної.

774. У прямокутному трикутнику катет завдовжки 18 см лежить проти кута 15° . Знайди довжину другого катета.

775. Доведи, що квадрат найменшої медіани прямокутного трикутника менший від суми квадратів інших його медіан у 5 разів.

776. Дев'ять прямокутних трикутників розміщено, як показано на малюнку 13.20. Знайди відношення $OA : ON$, якщо всі ланки ламаної $ABCDEFKLMN$ — рівні відрізки і $OA = 2AB$.



Мал. 13.20

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

777. Підготуй презентацію чи запиши відео на одну з тем:

- 1) Піфагор Самоський і його теорема;
- 2) математичні здобутки в школі Піфагора.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

778. Знайди кути паралелограма, якщо один із них на 100° менший від суми трьох інших кутів.

779. Укажи вид трикутника, якщо його кути пропорційні числам: а) 2, 3 і 5; б) 5, 5 і 8; в) 1, 1 і 2.

780. Довжина тіні людини зростом 1,8 м дорівнює 2,5 м. Знайди висоту дерева, тінь від якого завдовжки 10 м.



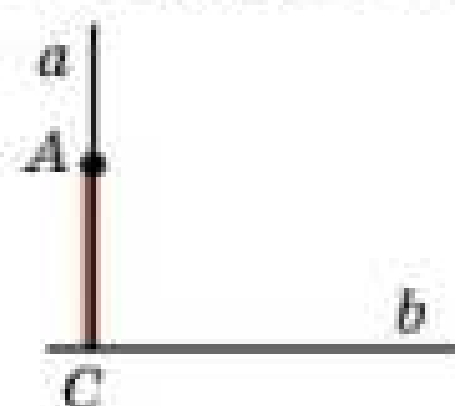
ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



§ 14 ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА

Як ти вже знаєш, дві прямі називають перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Якщо перпендикулярні прямі a і b перетинаються в точці C , а на прямій a взято довільну точку A , то відрізок AC називають перпендикуляром, опущеним з точки A на пряму b (мал. 14.1).

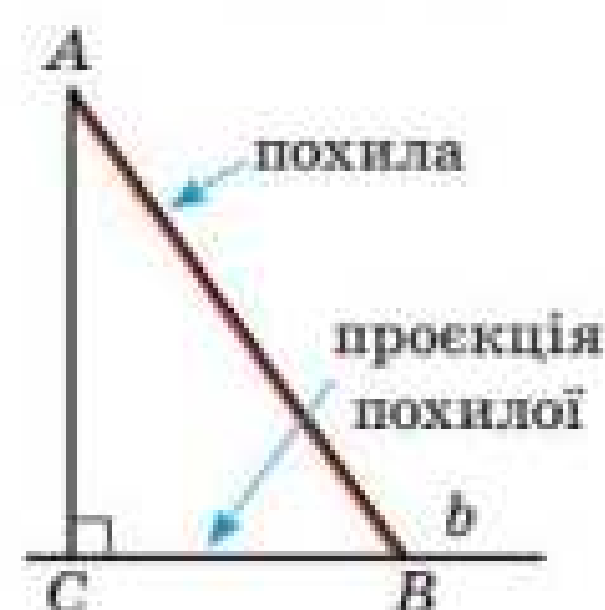
Нехай AC — перпендикуляр, опущений з A на пряму b , а B — будь-яка точка цієї прямої, відмінна від C . Відрізок AB називають похилою, проведеною з точки A до прямої b , точку B — основою похилої, а відрізок CB — проекцією похилої AB на пряму b (мал. 14.2).



Мал. 14.1

Якщо з однієї точки до якої-небудь прямої провести похилу AB і перпендикуляр AC , то вони разом з проекцією похилої утворять прямокутний трикутник ABC . У 7 класі було доведено, що в кожному прямокутному трикутнику гіпотенуза більша кожного з катетів, тому:

- кожна похила довша за перпендикуляр, проведений з тієї самої точки на ту саму пряму;
- проекція похилої коротша від самої похилої.



Мал. 14.2

Із ознак рівності прямокутних трикутників випливають такі твердження:

- якщо з однієї точки до тієї самої прямої проведено дві рівні похилі, то їхні проєкції рівні;
- якщо рівні проєкції похилих, проведених з однієї точки до тієї самої прямої, то і ці похилі рівні.

З теореми Піфагора випливають ще два твердження:

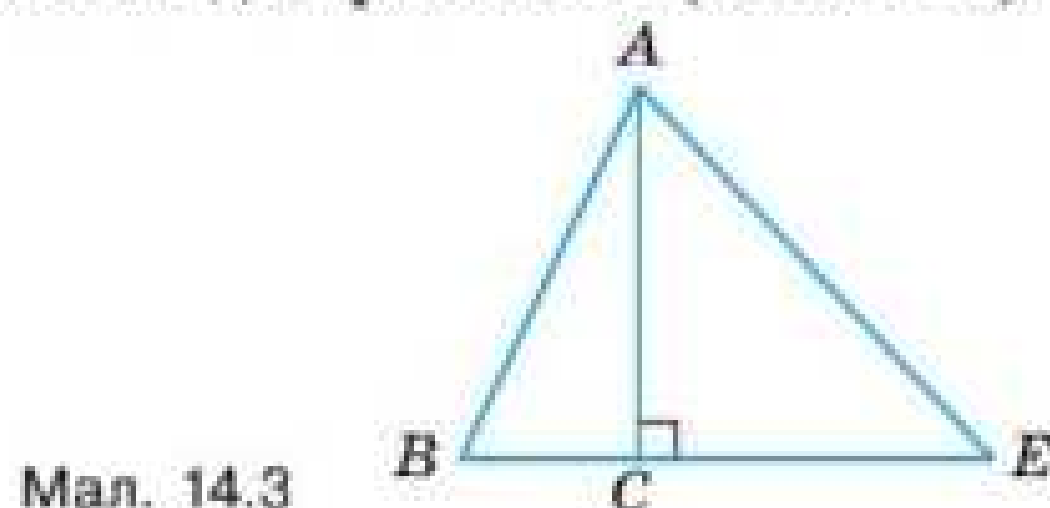
- якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі, то з них більша та, проєкція якої більша;
- якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі, то більша похила має більшу проєкцію.

Тому що за теоремою Піфагора $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Таким чином, при сталому значенні AC (одного катета), чим більше значення CB (другого катета), тим більше і значення AB (гіпотенузи), і навпаки.

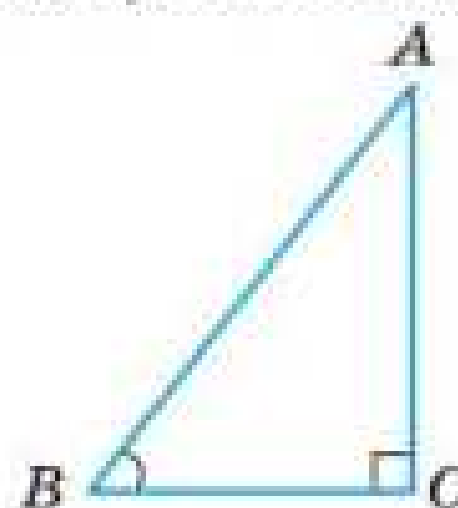
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- perpendicular — перпендикуляр
- oblique line — похила
- projection — проєкція

Приклад. Нехай AC — перпендикуляр, а AB і AE — похилі, проведені з точки A до прямої BE (мал. 14.3). Тоді якщо $AB < AE$, то і $BC < CE$.



Мал. 14.3



Мал. 14.4

Важливу роль відіграє *кут між похилою і її проекцією*. На малюнку 14.4 це кут B — кут між похилою AB і її проекцією BC . Він завжди більший за 0° і менший від 90° .

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Перпендикуляр і похила та їхні властивості використовують у будівництві, на транспорті, у побуті тощо (мал. 14.5).

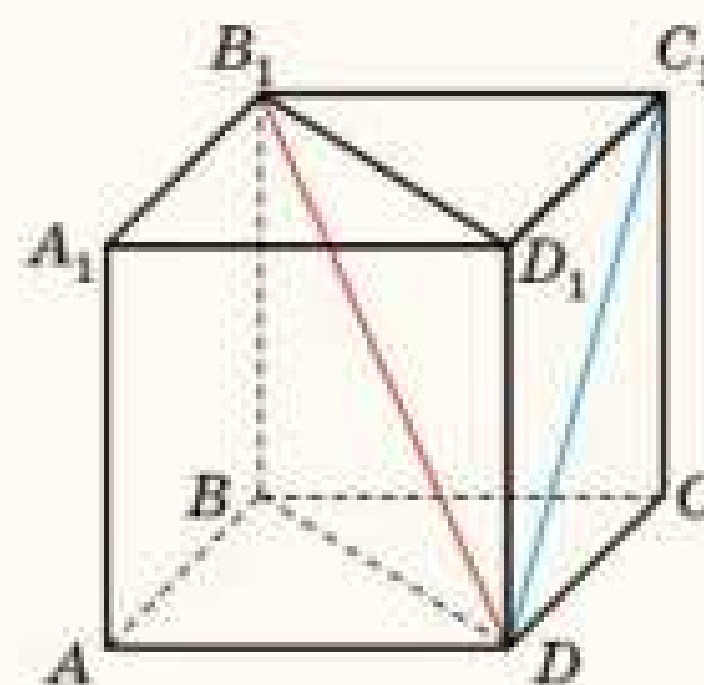


Мал. 14.5

Зверни увагу, що поняття «перпендикуляр», «похила», «проекція похилої» розглядають і в просторі. Розглянь куб, зображений на малюнку 14.6.

Кожна з його граней — квадрат. Тому $C_1C \perp CD$ і $C_1C \perp CB$. Кажуть, що C_1C — перпендикуляр до площини $ABCD$, C_1D — похила, а CD — проекція цієї похилої на площину $ABCD$.

Чотирикутник BB_1D_1D — прямокутник (чому?). У ньому B_1B — перпендикуляр до площини $ABCD$, B_1D — похила, а BD — проекція цієї похилої на площину $ABCD$. Подивись уважно на малюнок і назви інші перпендикуляри і похилі до площини $ABCD$. Спробуй навести приклад перпендикуляра, похилої та її проекції до площини BB_1C_1C .



Мал. 14.6

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які прямі називають перпендикулярними?
2. Що таке перпендикуляр? Похила?
3. Поясни, що таке проекція похилої.

4. Скільки різних похилих можна провести з даної точки до прямої? А скільки перпендикулярів?
5. Як залежить довжина похилої від її проекції?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Знайди довжину похилої, якщо довжина її проекції дорівнює 17 м, а кут між ними 60° .

- Якщо похила BA , її проекція BH і кут між ними $\angle ABH = 60^\circ$, то $\angle A = 30^\circ$ (мал. 14.7).

А катет BH , який лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи. Тому шукана довжина похилої $AB = 2 \cdot BH = 34$ м.



Мал. 14.7

2. Із точки A , що лежить на відстані 8 см від прямої a , до цієї прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 17 см і 10 см. Знайди відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?

- Відразу зауважимо, що задача має два розв'язки, залежно від того, як розміщені похилі відносно перпендикуляра OA (мал. 14.8, а, б).

З $\triangle AOB$ за теоремою Піфагора знайдемо OB :

$$OB^2 = AB^2 - AO^2,$$

$$OB^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225,$$

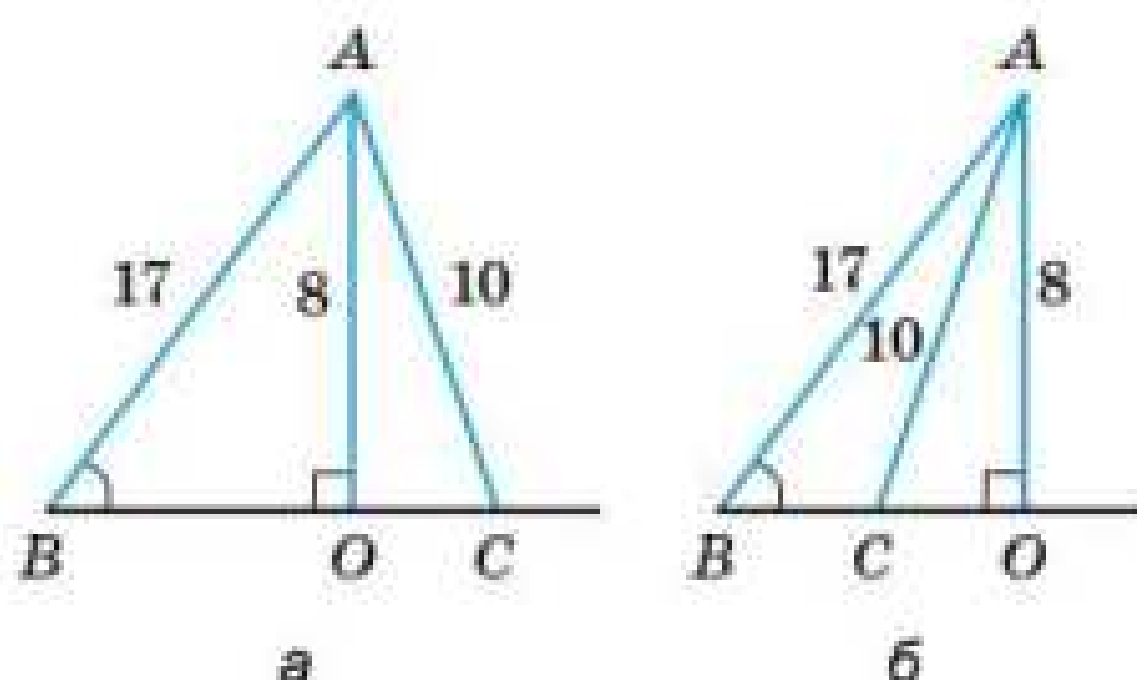
$$OB = 15 \text{ см.}$$

Аналогічно з $\triangle AOC$ знайдемо OC :

$$OC^2 = AC^2 - AO^2, \quad OC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36, \quad OC = 6 \text{ см.}$$

Тоді $BC = BO + OC = 21$ см (у випадку а)

і $BC = BO - CO = 9$ см (у випадку б).



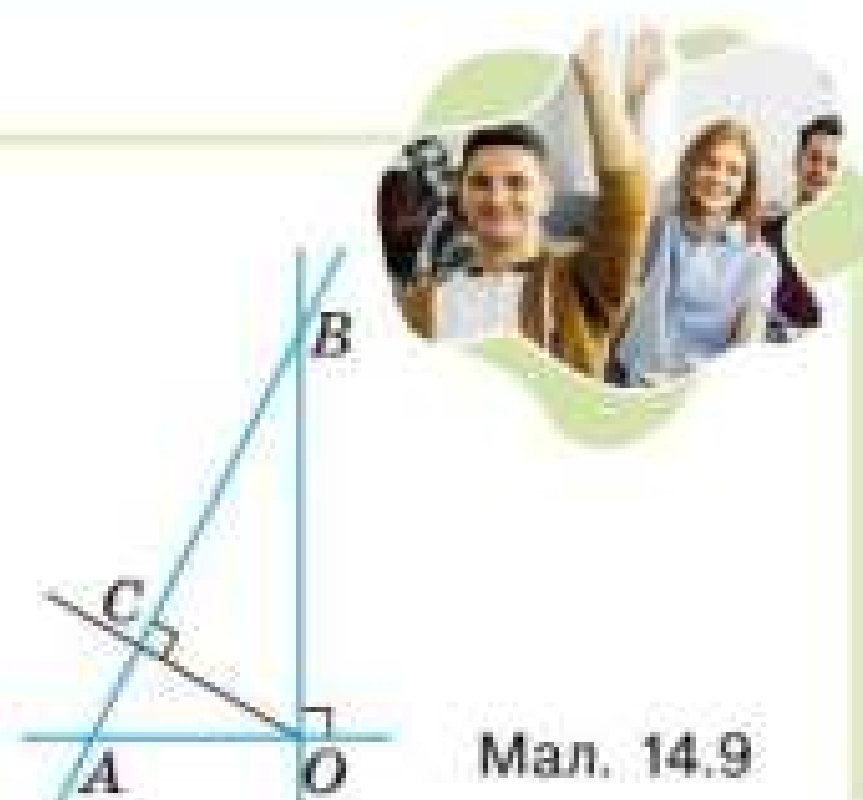
Мал. 14.8

ВИКОНАЄМО УСНО

781. Назви:

- а) перпендикуляри до прямих AO , BO , AB ;
- б) похилі до прямих AO , BO , AB , зображені на малюнку 14.9.

782. Скільки різних перпендикулярів можна провести через дану точку до даної прямої? А з даної точки до даної прямої?



Мал. 14.9

783. З точки A до прямої a проведено перпендикуляр AN і похилу AB завдовжки 30 см. Кут між ними 30° . Знайди довжину проєкції цієї похилої.

- А 30 см
- Б 60 см
- В 15 см
- Г 20 см

784. Проєкція похилої, проведеної з A на пряму a , дорівнює 4 м і утворює з похилою кут 45° (мал. 14.10). Знайди відстань від точки A до прямої a .

- А 4 м
- Б 8 м
- В 2 м
- Г $4\sqrt{2}$ м



Мал. 14.10

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

785. Гра. Один із гравців / одна із гравчинь креслить пряму, другий/друга ставить точку, що не належить цій прямій, а третій/третя — проводить з точки перпендикуляр до прямої. Потім учні/учениці міняються ролями.

786. Познач в зошиті точки A , B , C і накресли пряму a , як на малюнку 14.11. Проведи з названих точок перпендикуляри до a .



Мал. 14.11

787. З точки A до прямої a проведено перпендикуляр AO і похилу AB . Знайди AO , якщо довжина похилої та її проєкції дорівнюють відповідно 13 см і 5 см.

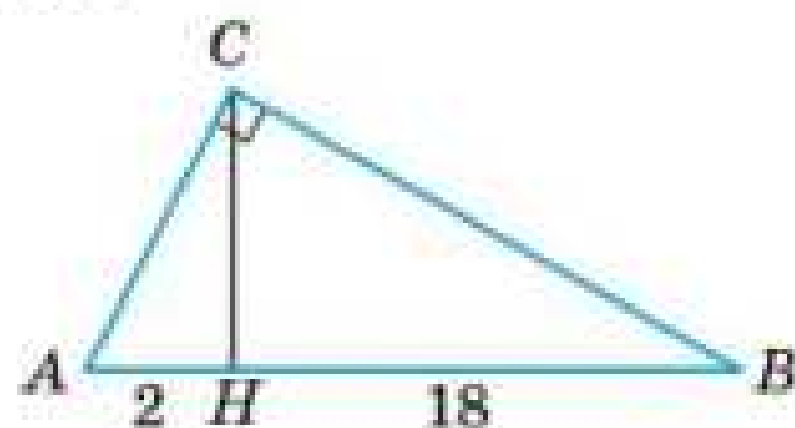
788. The perpendicular $MO = 8$ cm and the oblique line $MA = 10$ cm are drawn from point M to line a . Find the length of the projection of the oblique line.

789. З точки P до прямої p проведено перпендикуляр PK і похилу PM , кут між якими 45° . Знайди довжину похилої та її проєкції, якщо $PK = 7$ см.

790. З точки A , віддаленої від прямої a на 10 см, проведено похилу під кутом 30° до прямої a . Знайди довжину похилої та її проєкцію на пряму a .



791. M — внутрішня точка прямого кута ABC . Проекції відрізка MB на сторони кута дорівнюють 9 см і 12 см. Знайди відстань від точки M до вершини кута.
792. ABC — рівносторонній трикутник зі стороною 6 см. Побудуй проекцію сторони трикутника на пряму, на якій лежить інша його сторона. Знайди довжину цієї проекції.
793. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 10 см і 15 см. Знайди проекцію меншої сторони трикутника на пряму, якій належить його більша сторона.
794. Точка M кута ABC рівновіддалена від його сторін. Доведи, що проекції відрізка MB на сторони кута рівні.
795. Проекції катетів на гіпотенузу прямокутного трикутника дорівнюють 2 см і 18 см. Знайди усі три висоти трикутника (мал. 14.12). Склади план розв'язування задачі та розв'яжи її.
796. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. Знайди їх проекції на гіпотенузу.
797. Бічна сторона прямокутного рівнобедреного трикутника дорівнює a . Знайди її проекцію на гіпотенузу трикутника.
798. Знайди проекцію бічної сторони рівнобічної трапеції з основами 30 см і 60 см на її більшу основу.
799. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 5 см і 13 см. Знайди проекцію більшої бічної сторони на її більшу основу.
800. З точки M до прямої a проведено перпендикуляр $MH = 24$ см і похилі $MA = 25$ см і $MB = 30$ см. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?
801. З точки M до прямої a проведено перпендикуляр $MH = 10$ см і похилі MA і MB , які утворюють з прямою a кути 30° і 45° . Знайди відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?
802. З точки до прямої проведено перпендикуляр та дві похилі, одна з яких на 5 см довша за другу. Знайди довжину перпендикуляра, якщо довжини проекцій похилих на пряму дорівнюють 18 см і 7 см.
803. З точки до прямої проведено перпендикуляр та дві похилі, довжини яких 13 см і 15 см. Знайди довжину перпендикуляра, якщо довжини проекцій похилих на пряму відносяться як 5 : 9.



Мал. 14.12

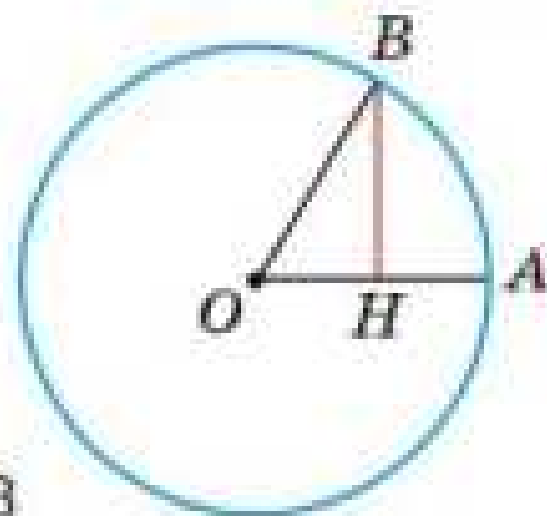
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

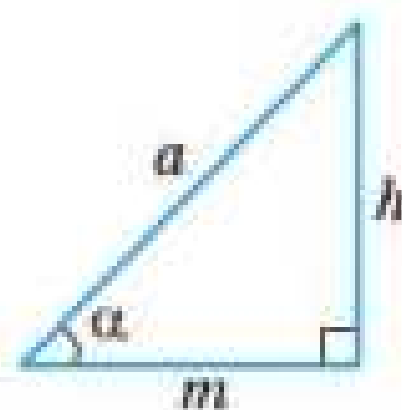
804. OA і OB — радіуси одного кола, $\angle AOB = 60^\circ$. Знайди відношення радіуса OA до його проекції на OB .



805. Знайди кут між радіусами кола, якщо проєкція одного з них на другий становить четверту частину діаметра (мал. 14.13).



Мал. 14.13



Мал. 14.14

806. Вкажіть значення величин у порожніх клітинках таблиці, якщо h , a і m — відповідно перпендикуляр, похила та її проєкція на деяку пряму, а α — кут між похилою та її проєкцією (мал. 14.14).

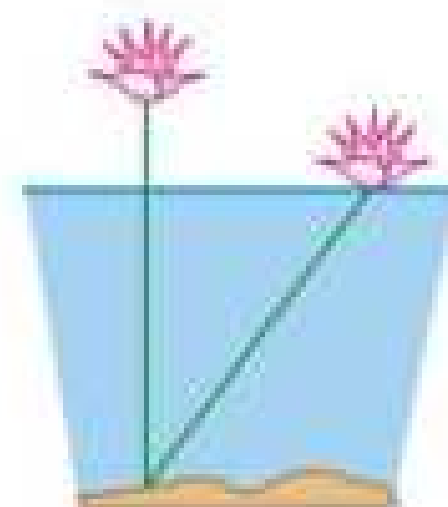
h	2			4		8
a	4	6	10			
m		3		4	7	
α			60°		45°	30°

807. Сторона AB рівностороннього трикутника ABC дорівнює a . Знайди її проєкцію на пряму, якій належить висота BH цього трикутника.

808. Сторони трикутника дорівнюють a , $2a$ і $2a$. Знайди проєкції на одну бічну сторону двох інших сторін трикутника.

809. Проєкція сторони прямокутника на його діагональ становить третину діагоналі. Як відносяться сторони прямокутника?

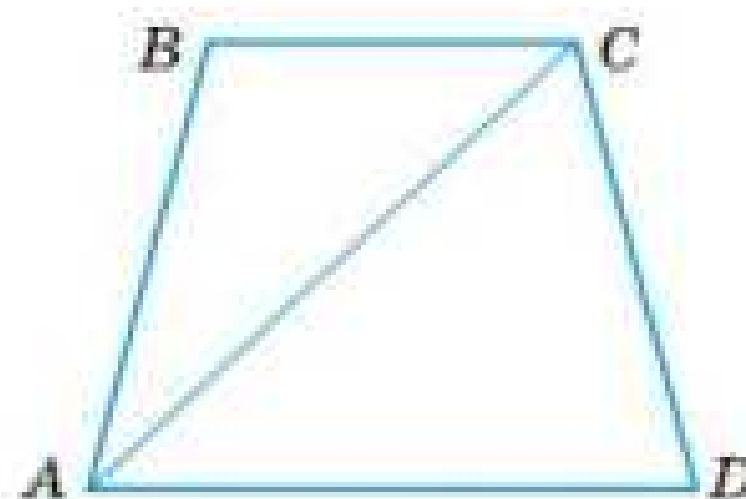
810. **Задача Бхаскари.** Квітка лотоса при вертикальному положенні стебла піднімалась над водою на $\frac{1}{2}$ фута. Вітер відхилив її на 2 фути від попереднього положення (по поверхні води). Після цього квітка лотоса опинилась на рівні води. Визнач глибину озера в цьому місці (мал. 14.15).



Мал. 14.15

811. **ЗНО** На малюнку 14.16 зображено рівнобедрену трапецію $ABCD$, у якій $AD = 8$ см, $BC = 4$ см, $AC = 10$ см. Установіть відповідність між проєкцією відрізка на пряму (1–4) та довжиною проєкції (А–Д).

1 проєкція відрізка BC на пряму AD	А 2 см
2 проєкція відрізка CD на пряму AD	Б 4 см
3 проєкція відрізка AC на пряму AD	В 4,8 см
4 проєкція відрізка AD на пряму AC	Г 5,6 см
	Д 6 см



Мал. 14.16

812. Точка K — середина сторони AB квадрата $ABCD$. Знайди проєкції відрізків KB , BC і CD на пряму KC , якщо $AB = 9$.
813. AN і NB — проєкції катетів трикутника ABC на гіпотенузу AB , AK і PB — їх проєкції на катети AC і BC . Знайди відношення $AK : PB$, якщо: а) $AC = b$, $BC = a$; б) $\angle B = 30^\circ$.
814. Перпендикуляр, опущений з вершини прямокутника на його діагональ, ділить її у відношенні $m : n$. Як відносяться сторони прямокутника?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

815. Лінійка переміщається так, що один її кінець лежить на одній стороні прямого кута, а другий — на другій стороні (мал. 14.17). Як при цьому переміщається середина лінійки? Як змінюються проєкції лінійки на сторони кута? З'ясуй це, переміщаючи лінійку в прямому куті стола.



Мал. 14.17

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

816. Знайди периметр прямокутника, якщо відстані від точки перетину діагоналей до сторін дорівнюють 3 см і 5 см.
817. У квадрат $ABCD$ вписано $\triangle AMD$, де M — середина сторони BC . Знайди периметр квадрата, якщо $AM = 4\sqrt{5}$ см.
818. Знайди периметр трикутника з попередньої задачі, якщо сторона квадрата дорівнює a .



ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



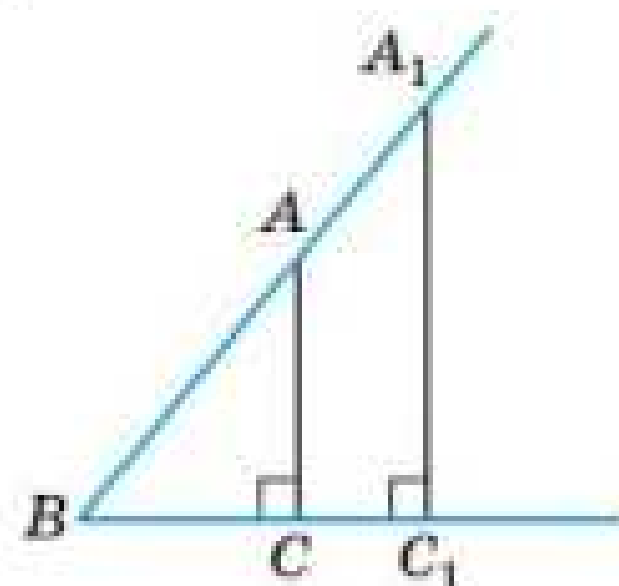
§ 15 СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС ГОСТРОГО КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

Якщо в прямокутному трикутнику кут дорівнює 30° , то, знаючи гіпотенузу c , неважко визначити катети: один із них дорівнює половині гіпотенузи, а другий легко знаходиться за теоремою Піфагора.

А як, знаючи гіпотенузу, знайти катети, якщо гострий кут прямокутного трикутника дорівнює, наприклад, 25° ? Для цього треба скористатися поняттям синуса чи косинуса цього кута.

Ти вже знаєш, що два прямокутні трикутники подібні, якщо гострий кут одного дорівнює гострому куту другого трикутника. Зокрема, яким би не був гострий кут B , відповідні сторони трикутників ABC і A_1BC_1 , зображених на малюнку 15.1, пропорційні:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B}, \quad \frac{BC}{AB} = \frac{BC_1}{BA_1}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{BC_1}.$$



Мал. 15.1

Отже, якщо два прямокутні трикутники мають рівні гострі кути, то відношення їх відповідних сторін залежить тільки від міри цих кутів і не залежить від довжин сторін. У математиці такі відношення відіграють важливу роль, і в усьому світі їх називають однаково: *синус, косинус, тангенс*.

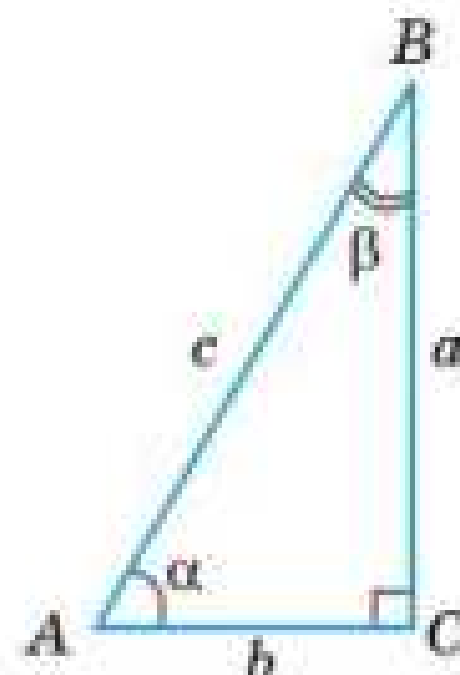
Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.

Синус, косинус, тангенс гострого кута α позначають відповідно так: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.

Розглянемо довільний прямокутний трикутник. Довімося позначати його прямий кут літерою C , гострі



Мал. 15.2

кути — літерами A, B , протилежні їм сторони — відповідними малими літерами c, a, b , а міри гострих кутів — грецькими літерами α (альфа) і β (бета) (мал. 15.2). Для трикутника з такими сторонами і кутами сформульовані вище означення можна записати у вигляді рівностей:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad (1)$$

Це — співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника.

Знаючи одну сторону прямокутного трикутника і його гострий кут, за допомогою цих формул можна визначити дві інші сторони трикутника.

З рівностей (1) катет прямокутного трикутника визначається так:

$$a = c \cdot \sin \alpha, \quad b = c \cdot \cos \alpha, \quad a = b \operatorname{tg} \alpha.$$

Отже, катет прямокутного трикутника дорівнює добутку:

- гіпотенузи на синус протилежного кута, або
- гіпотенузи на косинус прилеглого кута, або
- другого катета на тангенс протилежного кута.

З рівностей (1) гіпотенузу прямокутного трикутника можна знайти

так: $c = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad c = \frac{b}{\cos \alpha}.$

Отже, гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення:

- катета на синус протилежного кута або
- катета на косинус прилеглого кута.

Значення синуса, косинуса чи тангенса даного кута можна знаходити за допомогою таблиці (див. форзац 4) або використовуючи калькулятор.

Значення синуса, косинуса і тангенса кутів 30° , 45° і 60° бажано пам'ятати.

Знайдемо синус, косинус і тангенс кута 30° (мал. 15.3).

Якщо в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = a$, то $AB = 2a$ і за теоремою Піфагора

$$AC = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}. \text{ Тоді}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{BC}{AB}, \quad \sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{AB}, \quad \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{BC}{AC}; \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Знайдемо значення $\sin 45^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ$.



Мал. 15.3

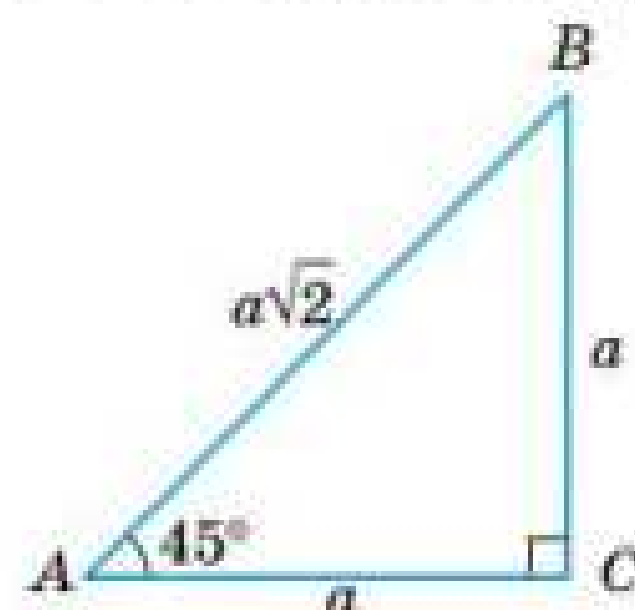
Побудуємо довільний $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$ (мал. 15.4). Якщо $AC = BC = a$, то за теоремою Піфагора

$$AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}. \text{ Тоді}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB}, \quad \sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB}, \quad \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$



Мал. 15.4

Подібним способом можна знайти значення синуса, косинуса і тангенса кута 60° . Результати зведемо в таблицю.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Досі йшлося про $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$, де α — гострий кут, тобто $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Однак багатьом фахівцям часто доводиться мати справу із тригонометричними функціями кутів, що мають 0° або 90° . Вважають, що $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{tg} 90^\circ$ не існує.

Зверни увагу і на таке. Тангенс гострого кута може бути довільним додатним числом, а синус і косинус не можуть перевищувати 1. Бо синус і косинус гострого кута — відношення катета до гіпотенузи, а катет завжди менший від гіпотенузи.

Задача. Як визначити висоту пам'ятника Тарасу Шевченку разом з постаментом, якщо з точки A , віддаленої від точки B на 30 м, його видно під кутом 18° (мал. 15.5)?



Мал. 15.5

Розв'язання. Якщо шукана висота пам'ятника разом з постаментом дорівнює h , то $\frac{h}{AB} = \operatorname{tg} A$. Якщо $AB = 30$ м, $\angle A = 18^\circ$, то $h = 30 \cdot \operatorname{tg} 18^\circ$.

За таблицею знаходимо: $\operatorname{tg} 18^\circ \approx 0,325$.

Отже, $h \approx 30 \cdot 0,325 \approx 10$ м.

Примітка. Пишуть $\operatorname{tg} A$, $\sin A$, $\cos A$, а не $\operatorname{tg} \angle A$.

Доведемо кілька тотожностей, які пов'язують $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$. Оскільки

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \text{то} \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Маємо тотожність

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (1)$$

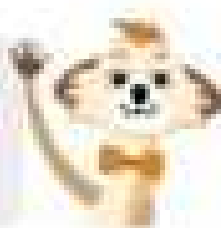
яка пов'язує всі три тригонометричні функції одного кута α .

Для кожного прямокутного трикутника з гіпотенузою c і катетами a і b $a^2 + b^2 = c^2$, або $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Оскільки $\frac{a}{c} = \sin \alpha$, $\frac{b}{c} = \cos \alpha$, то маємо тотожність

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (2)$$

Це — основна тригонометрична тотожність. Вона правильна для будь-якого кута α .

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Прямокутні трикутники. Урок 2).



ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Досі мова йшла про синус, косинус і тангенс лише гострого кута. У 9 класі ти ознайомишся із синусом, косинусом і тангенсом довільного кута — в межах від 0° до 180° . А ще — з котангенсом кута. Котангенс кута α — це число, обернене до тангенса кута α : $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Якщо для прямокутного трикутника $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$, то $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$.

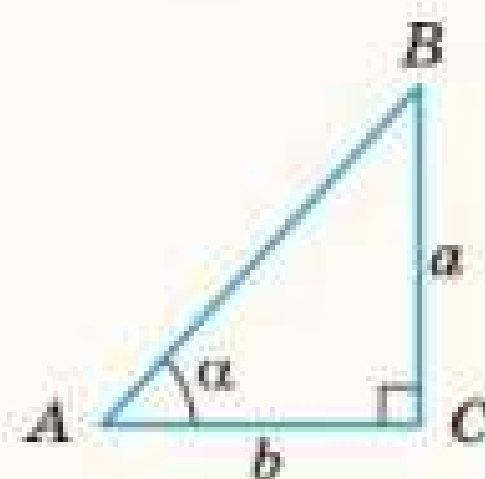
Слова косинус і котангенс починаються префіксами «ко» — скороченням латинського *complementi* — «доповнення». Вони означають відповідно: синус доповнення і тангенс доповнення.

У прямокутному трикутнику один із гострих кутів доповнює інший до 90° . Такі кути називають доповняльними.

Якщо α і β — доповняльні кути одного прямокутного трикутника, то:

$$\sin \alpha = \cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha); \quad \cos \alpha = \sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha);$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha); \quad \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$$



ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

- Що таке:
 - а) синус; б) косинус; в) тангенс гострого кута прямокутного трикутника?
- Чому дорівнює: а) синус кута 30° ; б) $\operatorname{tg} 45^\circ$?
- Чому дорівнює відношення катетів прямокутного трикутника?
- Як визначити катет прямокутного трикутника через його гіпотенузу і гострий кут?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- Користуючись малюнком 15.6, знайди синус, косинус і тангенс кута α .

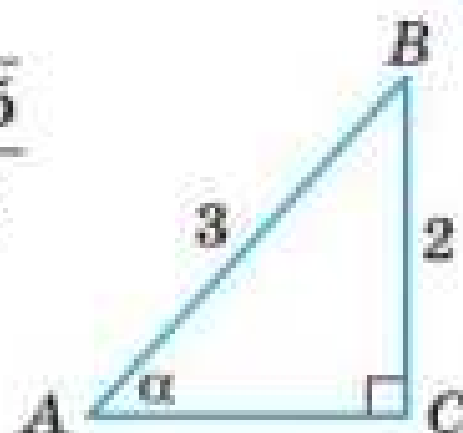
• За означенням $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$. Отже, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

За теоремою Піфагора знайдемо катет AC .

$$AC = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}. \text{ Тоді } \cos \alpha = \frac{AC}{AB}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{і } \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Мал. 15.6



- Синус гострого кута α прямокутного трикутника дорівнює $\frac{12}{13}$. Знайди $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$.

• *I спосіб.* Розглянемо $\triangle ABC$ (мал. 15.7), у якого $\angle C = 90^\circ$.

Оскільки $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$, то $\frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$. Тоді $BC = 12x$, $AB = 13x$.

Знайдемо катет AC .

За теоремою Піфагора: $AC = \sqrt{(13x)^2 - (12x)^2} = 5x$.

$$\text{За означенням: } \cos \alpha = \frac{AC}{AB}; \quad \cos \alpha = \frac{5x}{13x} = \frac{5}{13},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{12x}{5x} = 2\frac{2}{5}.$$



Мал. 15.7

• *II спосіб.* За основною тригонометричною тотожністю $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
Тоді $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, тобто $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

- Обчисли: а) $4 \cos 45^\circ \sin 90^\circ + 5 \cos 90^\circ$; б) $\operatorname{tg} 60^\circ \sin 30^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ$.

• а) $4 \cos 45^\circ \sin 90^\circ + 5 \cos 90^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 2\sqrt{2}$;

$$6) \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sin 30^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

4. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Знайди проведену з вершини висоту і бічну сторону трикутника, якщо кут при його вершині дорівнює α .

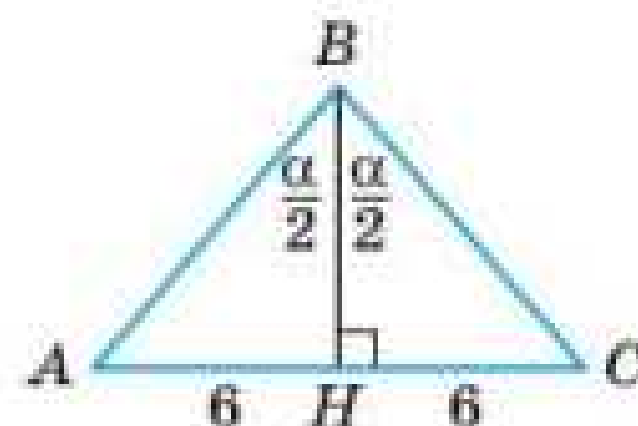
• Нехай у $\triangle ABC$ $AB = BC$. Опустимо з вершини B висоту BH (мал. 15.8).

Тоді $\angle BHA = 90^\circ$, $\angle HBA = \frac{\alpha}{2}$,
а $AH = HC = 6$ см.

Бічна сторона $\triangle ABC$ — це гіпотенуза $\triangle ABH$. Щоб знайти її, скористаємося формулою

$$AB = \frac{AH}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \text{ Отже, } AB = \frac{6}{\sin \frac{\alpha}{2}} \text{ см.}$$

Висота BH трикутника ABC — це катет трикутника ABH . Знайдемо його за формулою $BH = \frac{AH}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$. Отже, $BH = \frac{6}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ см.



Мал. 15.8

ВИКОНАЄМО УСНО

819. Знайди $\sin A$, $\sin B$, $\cos A$, $\cos B$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{tg} B$, якщо A і B — гострі кути египетського трикутника (мал. 15.9).

820. Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють 1 і 2. Знайди тангенс його найменшого кута.

А 0,5 Б 2 В $\sqrt{5}$ Г $\frac{1}{\sqrt{5}}$

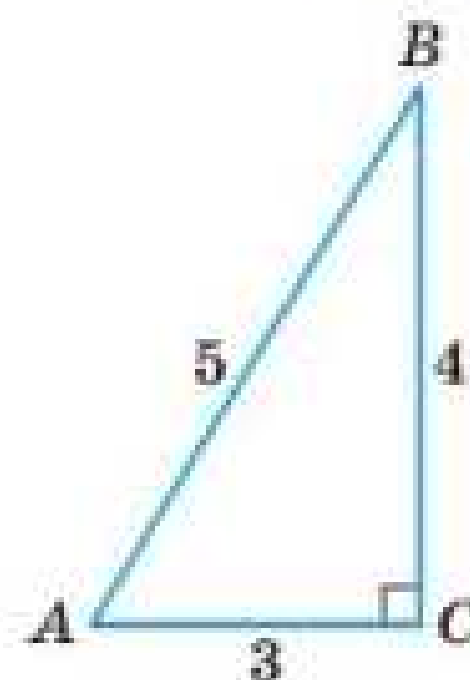
821. Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють 1 і 2. Знайди синус його найменшого кута.

А $\frac{1}{\sqrt{3}}$ Б $\frac{2}{\sqrt{5}}$ В $\frac{2}{\sqrt{3}}$ Г $\frac{1}{\sqrt{5}}$

822. Тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює 1. Знайди синус і косинус цього кута.

823. Чи існує кут α такий, що:

а) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; б) $\cos \alpha = \frac{4}{3}$; в) $\sin \alpha = \frac{21}{20}$; г) $\cos \alpha = \frac{20}{23}$?

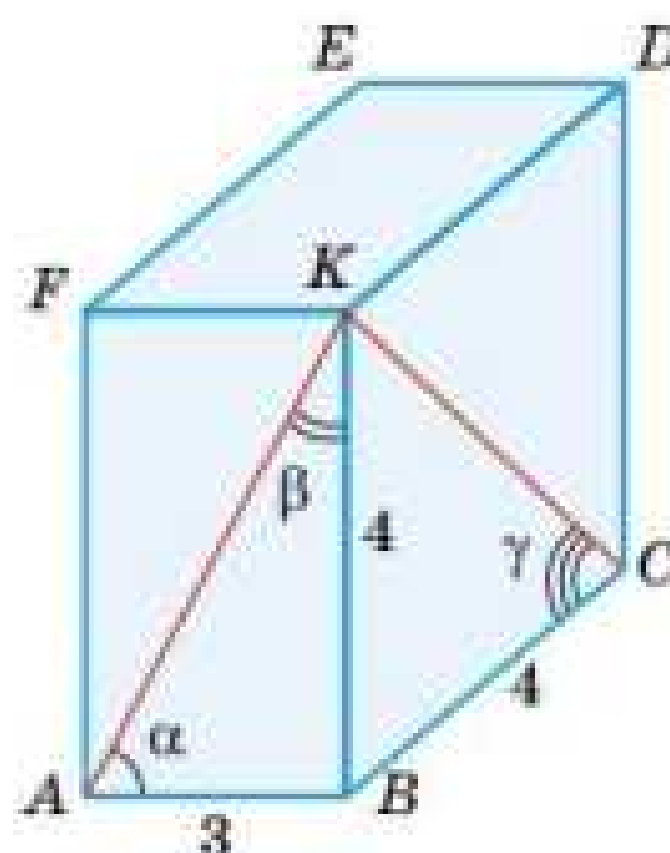


Мал. 15.9

824. Чи може тангенс гострого кута бути більшим за 1? А меншим від 1?

825. Чи завжди косинус одного гострого кута прямокутного трикутника дорівнює синусу другого гострого кута?

826. На малюнку 15.10 зображено прямокутний паралелепіпед, ребра якого $AB = 3$, $BK = BC = 4$. Знайди синус, косинус і тангенс кутів α , β , γ .



Мал. 15.10

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А



827. Трикутник зі сторонами 6 м, 8 м і 10 м — прямокутний. Знайди синуси, косинуси і тангенси його гострих кутів.

828. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнюють 24 см і 25 см. Знайди синус, косинус і тангенс меншого гострого кута трикутника.

829. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайди синус, косинус і тангенс більшого гострого кута трикутника.

830. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC , якщо:

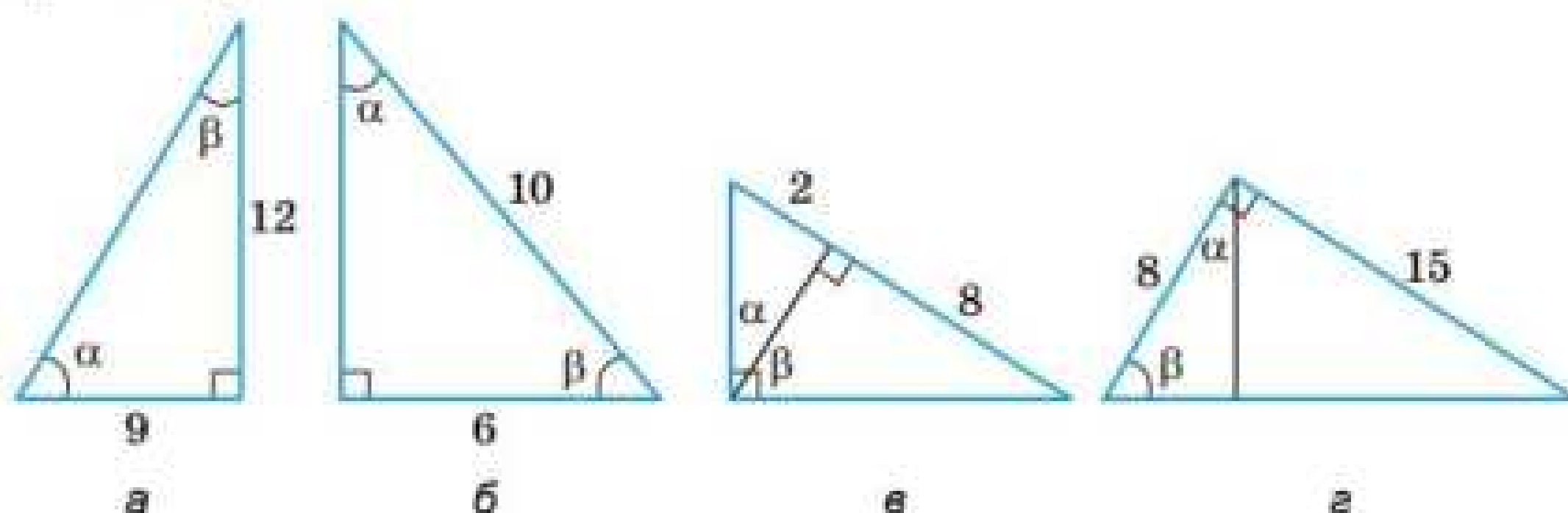
а) $AC = 40$ см, $BC = 9$ см; б) $AB = 1,7$ м, $BC = 0,8$ м;

в) $AB = \sqrt{3}$ м, $AC = 1$ м; г) $CA = CB = \sqrt{2}$ см.

831. Знайди синус, косинус і тангенс гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC , якщо:

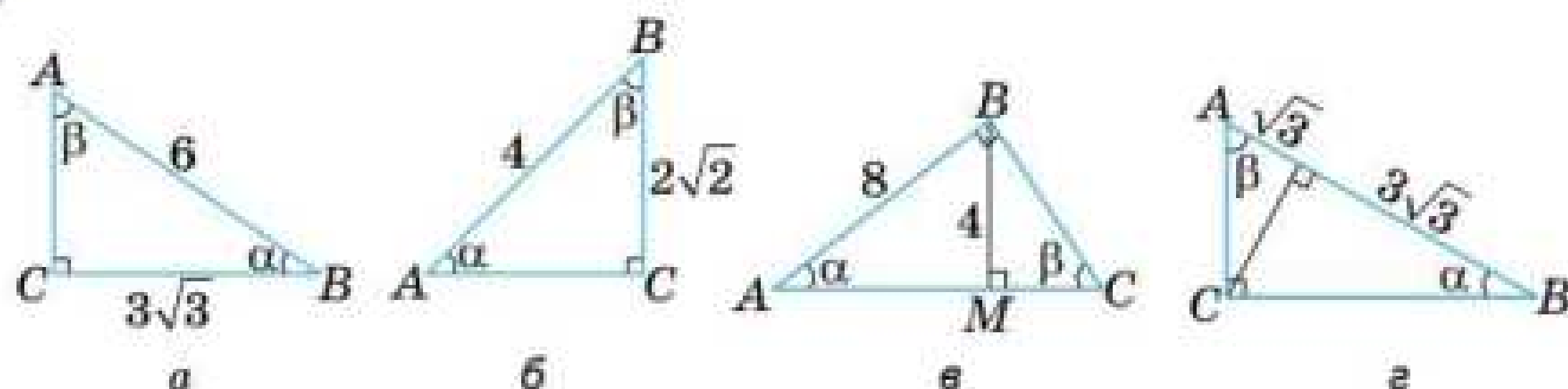
а) $AB = 25$, $BC = 7$; б) $AC = 2,1$, $BC = 7,2$.

832. Користуючись малюнком 15.11, знайди синус, косинус і тангенс кутів α і β .



Мал. 15.11

833. Знайди кути трикутників на малюнку 15.12.



Мал. 15.12

834. Дано $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$). Знайди:

а) $\sin A$, якщо $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\operatorname{tg} B$, якщо $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos A$, якщо $\sin B = \frac{1}{2}$; г) $\operatorname{tg} B$, якщо $\operatorname{tg} A = \sqrt{3}$.

835. Чи буде $\triangle ABC$ прямокутним, якщо:

а) $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} B = 1$;

в) $\operatorname{tg} A = \sqrt{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos B = \frac{1}{2}$?

Обчисли (836, 837).

836. а) $\cos 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$; б) $\operatorname{tg} 30^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ$;

в) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ - 1$; г) $\cos^2 30^\circ \sin 30^\circ - \operatorname{tg}^2 45^\circ$.

837. а) $\operatorname{tg} 45^\circ - 2\sin 30^\circ$; б) $\operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ - \cos 30^\circ$;

в) $2\cos 30^\circ \sin 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$; г) $\operatorname{tg}^2 60^\circ \cos 60^\circ - \sin^2 60^\circ$.

838. Сторони прямокутника дорівнюють 9 см і 12 см. Знайди синус, косинус і тангенс кута, який діагональ прямокутника утворює з більшою стороною.

839. У ромбі $ABCD$ діагоналі AC і BD дорівнюють відповідно 24 см і 10 см. Знайди синус, косинус і тангенс кута ABO , де O — точка перетину діагоналей.

840. Знайди кути прямокутного трикутника, якщо катет і гіпотенуза дорівнюють $3\sqrt{2}$ см і 6 см.

841. Знайди кути прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють $4\sqrt{3}$ см і 4 см.

842. Дано три точки: $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 1)$. Знайди синус, косинус і тангенс кута OBA .

843. Знайди синус, косинус і тангенс кута KAO , якщо $A(1; 0)$, $O(0; 0)$, $K(0; 2)$.

844. Користуючись таблицею значень тригонометричних функцій, знайди значення синуса, косинуса, тангенса для кожного з кутів:
а) 7° , 20° , 37° , 59° , 81° ; б) 43° , 84° , 12° , 52° .

845. Гра. Один із гравців / одна із гравчинь задає тригонометричну функцію, другий/друга — градусну міру гострого кута, а третій/третя має знайти значення, користуючись таблицею. Потім учні/учениці міняються ролями.

846. За допомогою таблиці значень тригонометричних функцій знайди:
а) $\sin 12^\circ$, $\sin 71^\circ$; б) $\cos 44^\circ$, $\cos 19^\circ$; в) $\operatorname{tg} 42^\circ$, $\operatorname{tg} 13^\circ$.

Користуючись калькулятором, знайди (847, 848):

847. $\sin 20^\circ$, $\sin 4,8^\circ$, $\sin 64,25^\circ$, $\cos 25^\circ$, $\cos 45,8^\circ$, $\operatorname{tg} 49^\circ$, $\operatorname{tg} 72^\circ$.

848. $\sin 37^\circ$, $\sin 68^\circ$, $\sin 55,25^\circ$, $\cos 17^\circ$, $\cos 68,5^\circ$, $\operatorname{tg} 87^\circ$, $\operatorname{tg} 18^\circ$.

Користуючись калькулятором, визнач міру кута x , якщо (849, 850):

849. а) $\sin x = 0,1392$; б) $\cos x = 0,5446$;

в) $\operatorname{tg} x = 0,7536$; г) $\operatorname{tg} x = 1,881$.

850. а) $\sin x = 0,2924$; б) $\cos x = 0,6896$;

в) $\operatorname{tg} x = 0,2642$; г) $\operatorname{tg} x = 6,314$.

851. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c , а один із кутів α . Знайди катети трикутника.

852. Катет прямокутного трикутника дорівнює m , а прилеглий кут α . Знайди другий катет і гіпотенузу трикутника.

853. Катет прямокутного трикутника дорівнює n , а протилежний кут α . Знайди гіпотенузу і другий катет трикутника.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

854. Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо основа і бічна сторона відповідно дорівнюють $6\sqrt{3}$ см і 6 см.

855. Менша висота паралелограма дорівнює 3 см, а менша сторона $2\sqrt{3}$. Знайди кути паралелограма. Склади план розв'язування задачі та розв'яжи її.

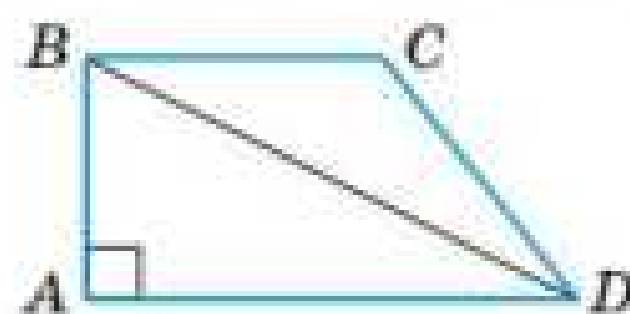
856. Знайди кути ромба, якщо висота ділить сторону на відрізки $\sqrt{2}$ і $2 - \sqrt{2}$, починаючи від вершини гострого кута.

857. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 3 см і 7 см, а бічна сторона $2\sqrt{2}$. Знайди кути трапеції.

858. Знайди кути прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 4 см і 6 см, а радіус вписаного кола $\sqrt{3}$.

859. **ЗНО** Діагональ BD прямокутної трапеції $ABCD$ є бісектрисою кута ADC й утворює з основою AD кут 30° (мал. 15.13). Визнач довжину середньої лінії трапеції $ABCD$ (у см), якщо $BD = 20\sqrt{3}$ см.

860. Синус одного з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $\frac{4}{5}$. Знайди косинус і тангенс цього кута.



Мал. 15.13



861. Косинус одного з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 0,6. Знайди синус і тангенс цього кута.
862. Тангенс одного з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 1,5. Знайди синус і косинус цього кута.

Дано прямокутний $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$). Знайди (863, 864):

863. а) BC , якщо $AB = 6$ см, $\sin A = 0,3$;



- б) AB , якщо $BC = 5$ см, $\cos B = \frac{2}{5}$.

864. а) AC , якщо $AB = 4$ см, $\sin B = 0,25$;

- б) BC , якщо $AC = 8$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$.

865. Тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює $\frac{4}{3}$, а протилежний катет — 8 см. Знайди гіпотенузу цього трикутника.

866. The sine of the acute angle of a right triangle is $\frac{3}{5}$, and the hypotenuse is 10 yd. Find the triangle's legs.

867. Відомо, що a, b — катети, c — гіпотенуза $\triangle ABC$, α, β — протилежні до них кути. Перенесіть таблицю в Excel, задайте формули для порожніх клітинок та обчисліть їх значення.



№	a	b	c	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \beta$	$\cos \beta$
1	2			0,5			
2		3					$\frac{\sqrt{3}}{2}$
3			5			0,2	

868. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з більшою стороною кут α . Знайди меншу сторону прямокутника.

869. З точки, що лежить на відстані h від прямої, проведено похилу, яка утворює з прямою кут α . Знайди довжину похилої.

870. Прямокутний трикутник із гострим кутом α вписано в коло радіуса r . Знайди катети трикутника.

871. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює a , а кут при основі α . Знайди основу трикутника.

872. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b , а гострий кут при основі α . Знайди бічну сторону і висоту трапеції.

873. BH і AP — висоти рівнобедреного трикутника ABC , $AB = BC = b$, а кут при вершині —

1 AC	А $b \sin \frac{\alpha}{2}$
2 BH	Б $b \cos \frac{\alpha}{2}$
3 AP	В $2b \sin \frac{\alpha}{2}$
	Г $b \sin \alpha$
	Д $2b \cos \frac{\alpha}{2}$

а. Установи відповідність між умовами (1–3) та виразами, які їм відповідають (А–Д).

874. У трикутнику ABC сторони $AB = 13$ см, $BC = 15$ см, $AC = 14$ см. Знайди синус, косинус і тангенс кутів A і C .

875. BH і AM — висоти рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). Знайди кути трикутника, якщо $BH = 6$ см, $AM = 6\sqrt{3}$ см.

876. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як $\sqrt{6} : 2$. Знайди кут між похилими, якщо проєкції похилих пропорційні числам $\sqrt{3}$ і 1 .

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

877. Накресли на міліметровому папері чверть кола радіуса 100 мм і поділи його транспортиром на 9 рівних частин. Користуючись цим малюнком, склади таблицю наближених значень синуса і косинуса для кутів 10° , 20° , 30° , ..., 80° .



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

878. Сума двох кутів рівнобічної трапеції дорівнює 80° . Знайди кути трапеції.

879. Знайди периметр ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 14 см і 48 см.

880. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, становить третю частину від суми інших кутів. Доведи, що прямі взаємно перпендикулярні.



ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



Прямокутні трикутники у спорудах

§ 16 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

solving right triangles — розв'язування прямокутних трикутників

Прямокутні трикутники в геометрії відіграють важливу роль. Кожний інший трикутник і навіть кожний багатокутник можна розбити на кілька прямокутних трикутників.

Що означає розв'язати трикутник? Це означає за кількома відомими елементами трикутника — сторонами чи кутами — знайти інші його елементи.

Задача. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10, а один із гострих кутів 30° . Знайди інші сторони і кути трикутника.

Розв'язання. Нехай у $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 10$ (мал. 16.1).

Тоді $\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $BC = AB : 2 = 5$.

За теоремою Піфагора $AC = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

Відповідь. $BC = 5$, $AC = 5\sqrt{3}$, $\angle B = 60^\circ$.

Цю задачу ми змогли розв'язати, бо в ній серед даних — кут 30° , тож можна скористатися властивістю катета, що лежить проти кута 30° .

А як розв'язати прямокутний трикутник із кутом, наприклад, 50° ?

Задача. Розв'яжи трикутник ABC , у якого $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 50^\circ$, $BC = 20$ (мал. 16.2).

Розв'язання. $\angle B = 90^\circ - \angle A = 40^\circ$.

$BC : AB = \sin A$,

$AB = BC : \sin A = 20 : \sin 50^\circ \approx 20 : 0,766 \approx 26,1$.

$AC : BC = \operatorname{tg} B$,

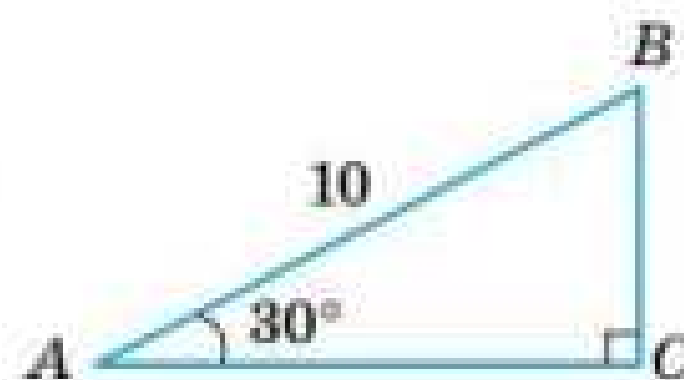
$AC = BC \cdot \operatorname{tg} B = 20 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \approx 20 \cdot 0,839 \approx 16,8$.

Відповідь. $\angle B = 40^\circ$, $AB \approx 26,1$, $AC \approx 16,8$.

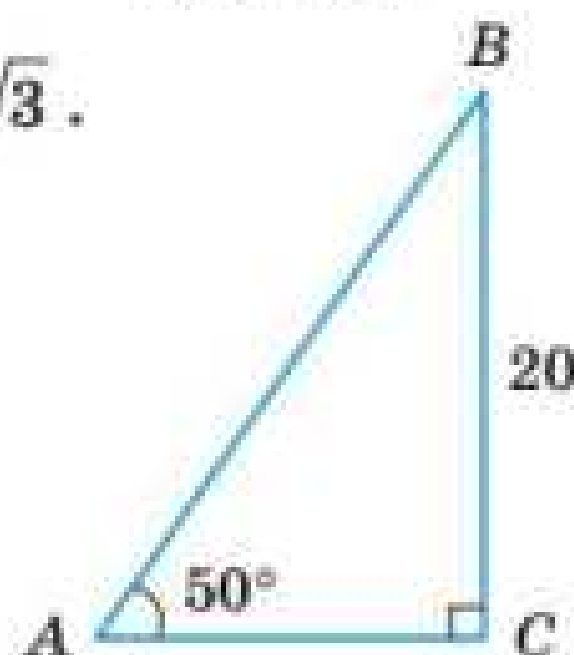
Знаючи співвідношення

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ (мал. 16.3) і теорему Піфагора,

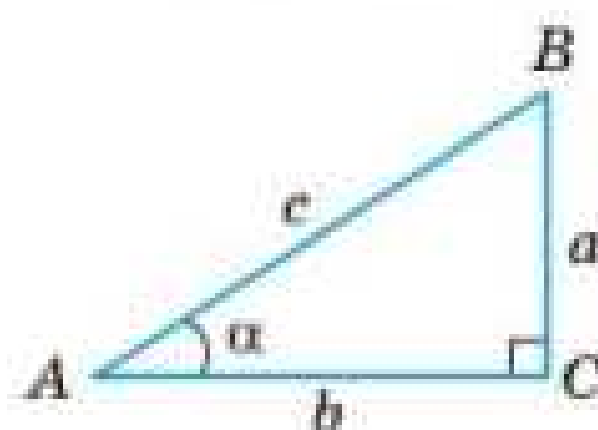
можна розв'язати будь-який прямокутний трикутник.



Мал. 16.1



Мал. 16.2



Мал. 16.3

Можливі такі випадки розв'язування прямокутних трикутників:

- 1) за гіпотенузою і гострим кутом;
- 2) за катетом і гострим кутом;
- 3) за гіпотенузою і катетом;
- 4) за катетами.

Розв'язання цих чотирьох видів задач за допомогою синуса і косинуса наведено в таблиці.

Вид задачі	Умова задачі	Розв'язання
1-й	Дано: $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$. Знайти: $\angle B$, AC , BC .	$\angle B = 90^\circ - \alpha$, $BC = c \cdot \sin \alpha$, $AC = c \cdot \cos \alpha$.
2-й	Дано: $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^\circ$, $BC = a$. Знайти: $\angle B$, AB , AC .	$\angle B = 90^\circ - \alpha$, $AB = \frac{a}{\sin \alpha}$, $AC = AB \cos \alpha$.
3-й	Дано: $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$, $BC = a$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, AC .	$\sin A = \frac{a}{c}$, $\angle B = 90^\circ - \angle A$, $AC = c \cdot \cos A$.
4-й	Дано: $\angle C = 90^\circ$, $AC = b$, $BC = a$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, AB .	$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin A = \frac{a}{AB}$, $\angle B = 90^\circ - \angle A$.

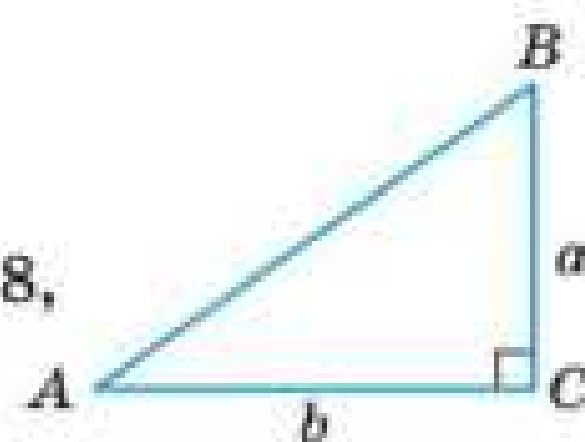
Використовуючи тангенс кута, розв'язування багатьох трикутників можна здійснювати раціональніше.

Задача. Розв'яжи прямокутний трикутник за його катетами $a = 3$ дм, $b = 5$ дм (мал. 16.4).

Розв'язання. $AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \approx 5,8$,
 $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0,6$.

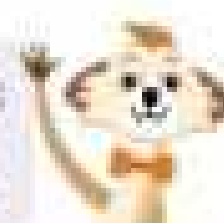
$\angle A \approx 31^\circ$, $\angle B \approx 90^\circ - 31^\circ \approx 59^\circ$.

Відповідь. $AB \approx 5,8$ дм, $\angle A \approx 31^\circ$, $\angle B \approx 59^\circ$.



Мал. 16.4

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал параграфа (Тема. Прямокутні трикутники. Урок 3).



ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Найчастіше розв'язувати прямокутні трикутники доводиться в стереометрії, коли вимагається знаходити значення одних елементів просторової геометричної фігури через інші її значення.



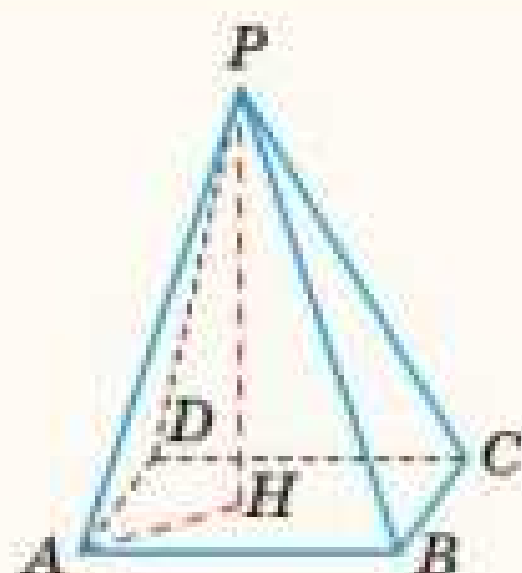
Задача. Бічне ребро AP піраміди з її висотою PH утворює кут 40° . Знайди висоту піраміди, якщо $AP = 20$ см (мал. 16.5).

Розв'язання. Сполучимо відрізком точки A і H . В утвореному трикутнику APH кут H — прямий, бо висота піраміди PH з кожною прямою, яка лежить у площині її основи, утворює прямі кути. Отже, задача звелась до визначення катета PH прямокутного трикутника APH за відомим прилеглим до нього кутом і гіпотенузою.

$$PH : AP = \cos 40^\circ, \text{ звідки}$$

$$PH = 20 \cdot \cos 40^\circ \approx 20 \cdot 0,766 \approx 15,32 \text{ (см)}.$$

Щоб розв'язувати подібні стереометричні задачі, треба вміти користуватися мовою стереометрії. Зокрема, треба розуміти, що таке перпендикуляр до площини, кут між прямою і площиною, кут між двома площинами, двогранний кут тощо. Спробуй на прикладі малюнка 16.5 пояснити, як слід розуміти ці терміни.



Мал. 16.5

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Поясни, що означає розв'язати трикутник.
2. Як знайти катети за гіпотенузою і гострим кутом?
3. Як знайти гіпотенузу за катетом і гострим кутом?
4. Як знайти гіпотенузу за катетами?
5. Як знайти кути за гіпотенузою і катетом?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Розв'яжи прямокутний трикутник за гіпотенузою $c = 627$ і гострим кутом $\alpha = 23,5^\circ$.

$$a = c \cdot \sin \alpha = 627 \cdot \sin 23,5^\circ \approx 250 \text{ (мал. 16.6)}.$$

$$b = c \cdot \cos \alpha = 627 \cdot \cos 23,5^\circ \approx 575;$$

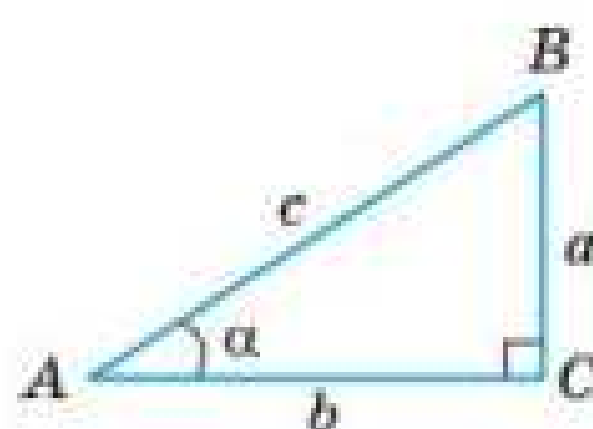
$$B = 90^\circ - 23,5^\circ = 66,5^\circ.$$

$$\text{Відповідь. } a \approx 250, b \approx 575, \angle B = 66,5^\circ.$$

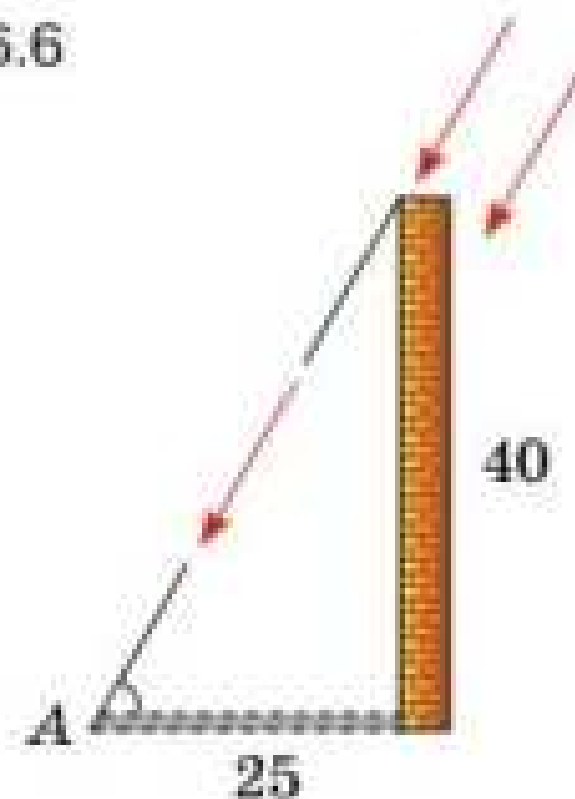
2. Заводський димар заввишки 40 м кидає тінь завдовжки 25 м. Знайди кутову висоту Сонця.

- Кутова висота Сонця — це міра кута A (мал. 16.7). За числовими даними задачі можемо знайти тангенс цього кута: $\operatorname{tg} A = 40 : 25 = 1,6$. У таблиці знаходимо, що гострий кут із таким тангенсом дорівнює приблизно 58° .

$$\text{Відповідь. } \approx 58^\circ.$$



Мал. 16.6

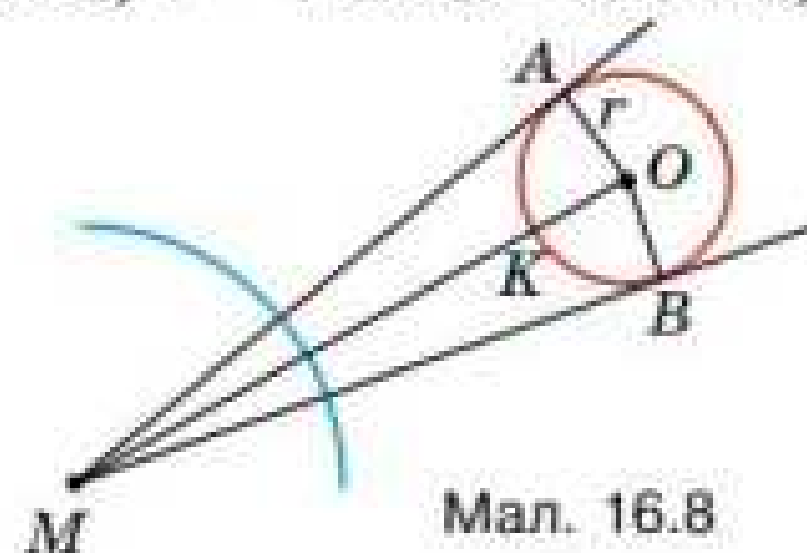


Мал. 16.7

3. Як знайти радіус r Місяця, якщо спостерігач, що перебуває на відстані m від найближчої точки Місяця, бачить його під кутом 2α ?

Нехай спостерігач стоїть у точці M і бачить Місяць під кутом $AMB = 2\alpha$ (мал. 16.8). Якщо центр Місяця — точка O , то шуканий радіус $r = OA$, а $\angle OAM = 90^\circ$, $\angle AMO = \alpha$, $MO = m + r$, $AO : MO = \sin \alpha$, $r : (r + m) = \sin \alpha$. Звідки $r = r \sin \alpha + m \sin \alpha$, $r - r \sin \alpha = m \sin \alpha$, $r(1 - \sin \alpha) = m \sin \alpha$. Тоді $r = \frac{m \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$.

Підставивши у цю формулу значення m і α , неважко обчислити радіус Місяця.



Мал. 16.8

4. Уміючи розв'язувати прямокутні трикутники, можна розв'язувати і довільні непрямокутні трикутники. Нехай, наприклад, треба розв'язати трикутник ABC , у якого $AC = 20$ см, $\angle A = 50^\circ$ і $\angle B = 36^\circ$ (мал. 16.9).

Третій його кут знайти неважко:
 $\angle C = 180^\circ - 50^\circ - 36^\circ = 94^\circ$.

Щоб знайти сторони AB і BC , проведемо висоту CH . Трикутники ACH і BCH прямокутні, тому:

$$AH = AC \cdot \cos 50^\circ = 20 \cdot 0,643 \approx 12,86;$$

$$CH = AC \cdot \sin 50^\circ = 20 \cdot 0,766 \approx 15,32;$$

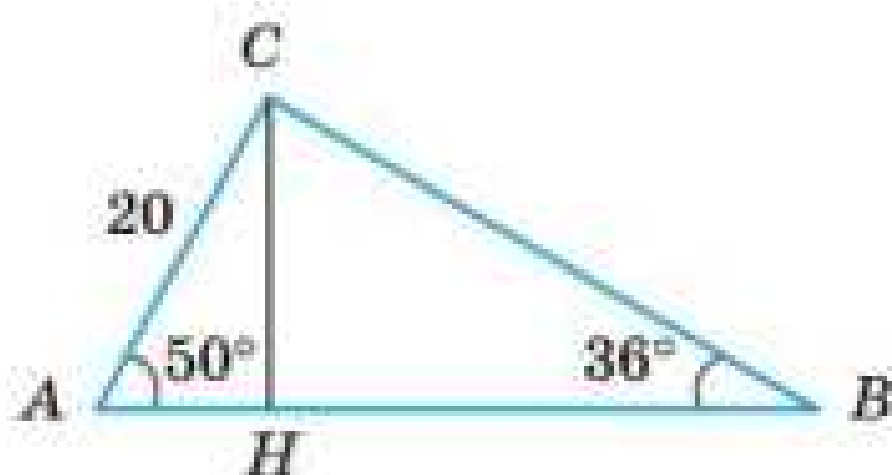
$$CB = CH : \sin 36^\circ = 15,32 : 0,588 \approx 26,05;$$

$$BH = CB \cdot \cos 36^\circ = 26,05 \cdot 0,809 \approx 21,07;$$

$$AB = AH + HB = 12,86 + 21,07 \approx 33,93.$$

Отже, $AB \approx 33,93$ см, $CB \approx 26,05$ см, $\angle C = 94^\circ$.

У старших класах ти ознайомишся з простішими способами розв'язування непрямокутних трикутників.



Мал. 16.9

ВИКОНАЄМО УСНО

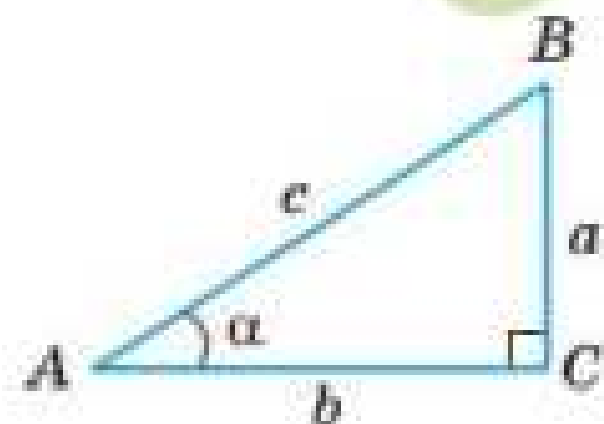
881. Розв'яжи прямокутний трикутник (мал. 16.10), у якому:

а) $c = 10$, $\alpha = 30^\circ$; б) $a = 5$, $\alpha = 45^\circ$; в) $a = b = 7$.

882. Використовуючи мал. 16.10, знайди BC , якщо $AB = 6$ см, $\cos B = 0,2$.

А 0,3 мм Б 30 см В 1,2 см Г 12 см

883. Знайди кути прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза дорівнює 5 см, а один із катетів 2,5 см.



Мал. 16.10

884. Які вирази мають бути в порожніх клітинках таблиці, що відповідає трикутнику на малюнку 16.10?

AB	AC	BC	$\angle A$	$\angle B$
c			α	
c				β
	b		α	
	b			β

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

Розв'яжи прямокутний трикутник за гіпотенузою c і гострим кутом α , якщо (885, 886):

885. а) $c = 9,85$, $\alpha = 65^\circ$; б) $c = 3,84$, $\alpha = 50^\circ$;

886. а) $c = 0,798$, $\alpha = 68,5^\circ$; б) $c = 28,6$, $\alpha = 37^\circ 12'$.

Розв'яжи прямокутний трикутник за катетом a і гострим кутом α або β , якщо (887, 888):

887. а) $a = 38$, $\alpha = 47^\circ$; б) $a = 6,87$, $\alpha = 4,5^\circ$;

888. а) $a = 0,274$, $\beta = 36^\circ$; б) $a = 0,895$, $\beta = 64,5^\circ$.

Розв'яжи прямокутний трикутник за гіпотенузою c і катетом a або b , якщо (889, 890):

889. а) $c = 113$, $a = 35$; б) $c = 130$, $a = 82$;

890. а) $c = 687$, $b = 528$; б) $c = 17,1$, $b = 8,28$.

891. Розв'яжи прямокутний трикутник за даними катетами a і b , якщо:

а) $a = 183$, $b = 156$; б) $a = 26,1$, $b = 38$.

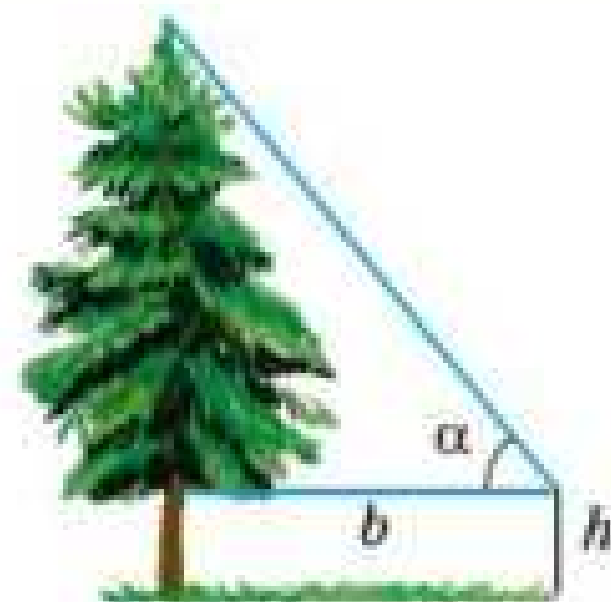
892. Solve a right triangle if you know the legs a and b :

а) $a = 1,08$, $b = 0,97$; б) $a = 12,1$, $b = 6,92$.

893. Знайди висоту дерева (мал. 16.11), якщо $b = 10$ м, $h = 2$ м, $\alpha = 70^\circ$.

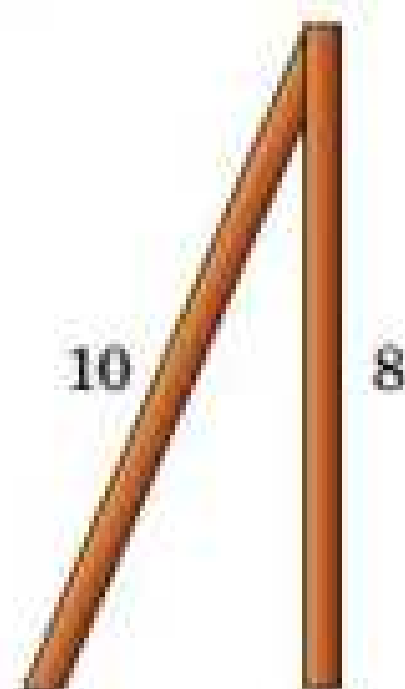
894. Для визначення висоти колони відміряли по прямій від основи колони 150 м. Вершину колони видно під кутом 20° . Висота кутоміра дорівнює 1,5 м. Знайди висоту колони.

895. Драбину довжиною 12 м приставлено до карниза стіни будинку під кутом 27° . Знайди висоту стіни до карниза.



Мал. 16.11

896. Дерево при кутовій висоті Сонця 37° відкидає тінь завдовжки 10,2 м. Знайди висоту дерева.
897.  Дерево заввишки 20 м, що росте на одному березі річки, з другого берега видно під кутом 15° . Знайдіть ширину річки. (Припускаємо, що основа дерева і око спостерігача — на одному рівні.)
898. Для завантаження силосної башти на висоті 4,5 м треба приладнати похилий жолоб із нахилом 12° до поверхні землі. Якої довжини слід взяти жолоб?
899. Ширина будинку 7 м, довжина крокви 4,5 м. Під яким кутом крокви нахилені до стелі?
900. До стовпа заввишки 8 м зробили похилу підпору завдовжки 10 м. Знайди кут між ними (мал. 16.12).
901. Переріз залізничного насипу має форму рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 8 м і 28 м. Бічні сторони нахилені до горизонту під кутом 31° . Знайди висоту насипу.
902.  Ширина полотна залізничного насипу дорівнює 30 м, а ширина підшви — 62 м. Знайдіть висоту насипу, якщо кут відкосу становить 32° .
903. Знайди основу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 87 см, а кут при основі 44° .
904. Гострий кут ромба дорівнює 54° . Його більша діагональ дорівнює 26 см. Знайди сторону ромба.
905. Діагональ прямокутника дорівнює 85 см і утворює зі стороною кут 65° . Знайди сторони прямокутника.
906. Сторони прямокутника дорівнюють 20 см і 17 см. Знайди його діагональ і кути, які вона утворює зі сторонами прямокутника.
907. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, бічна сторона 65 см. Знайди кути цього трикутника.
908. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17,5 см, кут при вершині дорівнює 43° . Знайди основу й кути при основі цього трикутника.



Мал. 16.12

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

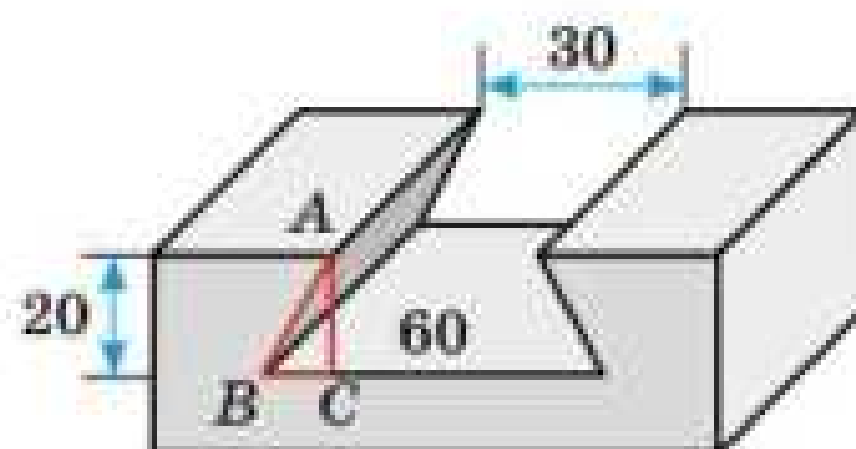
909. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до бічної сторони як 8 : 7. Знайди кути трикутника.
910. Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо його висота дорівнює основі.
911. Прогін двосхилого даху дорівнює 8,2 м, а висота даху 3,2 м. Знайди довжину схилу даху і кут між кроквами (мал. 16.13).



Мал. 16.13



912. У металевій деталі зроблено паз, поперечний розріз якого має форму рівнобічної трапеції (мал. 16.14). Обчисли кути нахилу бічних граней паза за зазначеними на малюнку розмірами (в міліметрах).



Мал. 16.14

913. Висота підйому дороги 0,4 м на кожні 3 м, взяті в горизонтальному напрямі. Знайди кут підйому дороги.

914. Підйом дороги характеризується числом $\frac{1}{15}$. Визнач кут підйому.

915. Дорожній знак «Крутий спуск» (мал. 16.15) попереджає водіїв про небезпеку і вказує, на скільки метрів у середньому піднімається дорога на кожні 100 метрів шляху. Знайди кут нахилу дороги, про яку попереджає знак.



Мал. 16.15

916. Знайди кути рівнобічної трапеції, якщо її бічна сторона і діагональ перпендикулярні одна до одної і дорівнюють відповідно 3 дм і 4 дм.

917. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють a і b ($b > a$), а гострий кут α . Визнач бічну сторону трапеції та її висоту.

918. Дві сторони трикутника дорівнюють 36 см і 87 см, а кут між ними — 58° . Визнач висоти трикутника, опущені на ці сторони.

919. Сторони паралелограма дорівнюють 14,8 см і 7,4 см, а його гострий кут дорівнює 62° . Визнач висоти паралелограма.

920. Визнач висоти рівнобедреного трикутника, у якого кут при вершині дорівнює 50° , а бічна сторона 8,4 дм.

921. Визнач висоти рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 8,6 дм, а кут при основі 37° .

922. Діагоналі ромба дорівнюють 56 мм і 84 мм. Визнач кути ромба та його сторону.

923. Сторона ромба дорівнює 8,5 дм, а гострий кут 88° . Визнач радіус кола, вписаного у цей ромб.

924. З точки M , яка лежить поза кругом, цей круг видно під кутом α . Визнач відстань від точки M до центра круга, якщо його діаметр дорівнює d .

925. Із зовнішньої точки до кола проведено дві дотичні. Довжина дотичної дорівнює 7,8 см, радіус кола 4 см. Визнач кут між дотичними.

926. Із точки M , що лежить на відстані a від центра кола, проведено дві дотичні MA і MB , кут між якими дорівнює α . Визнач довжини дотичних та радіус кола.

927. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 82 см, а один із гострих кутів 28° . Знайди гіпотенузу.

928. Знайди кути трикутника ABC та сторону BC , якщо його сторони AB , AC і висота AH дорівнюють відповідно 3 см, 5 см і 2 см.
929. Знайди кути трапеції, основи якої дорівнюють 20 см і 45 см, а бічні сторони 7 см і 24 см.
930. У колі з центром O і радіусом 12 см проведено хорду AB . Знайди довжину цієї хорди, якщо з дуги кола хорду видно під кутом:
а) 20° ; б) 130° .

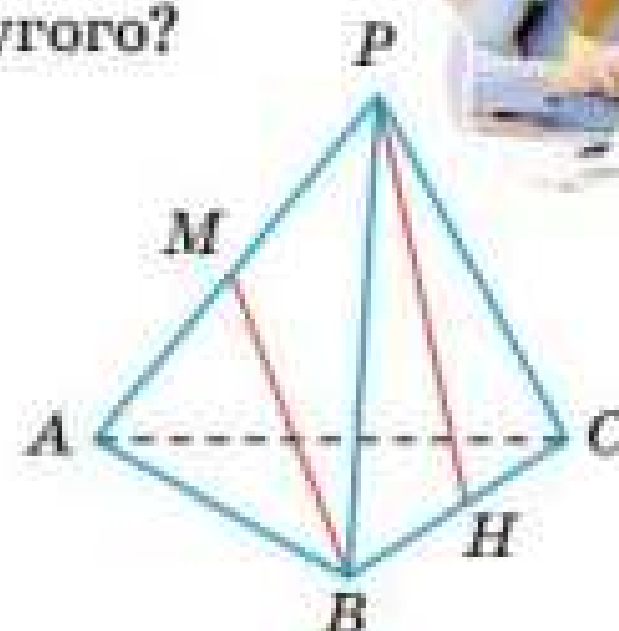
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

931. Підготуй короткі виступи на тему:
1. Тригонометрія як наука про розв'язування трикутників.
 2. Творці тригонометрії.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

932. Скільки сторін може мати багатокутник, утворений прикладанням одного трикутника до другого?
933. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см, а периметр 30 см^2 . Знайди катети.
934. У піраміді $PABC$ (мал. 16.16) кожне ребро — завдовжки 20 см, M і H — середини ребер AP і BC . Знайди:
а) кути PBC , BHP , BRH , PMB , MBP ;
б) відстані BH , AM , MP , RH , MB .
Чи паралельні прямі BM і RH ?



Мал. 16.16



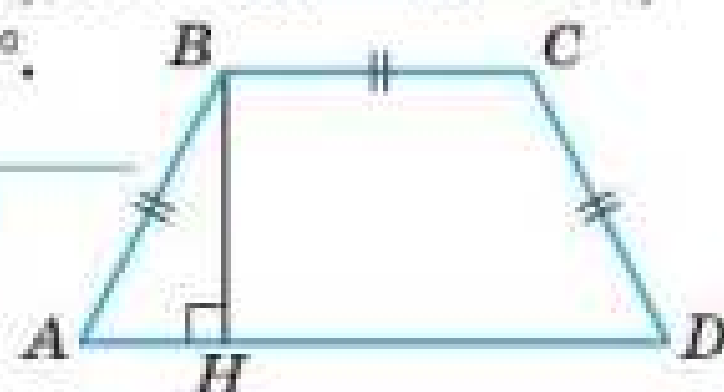
ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

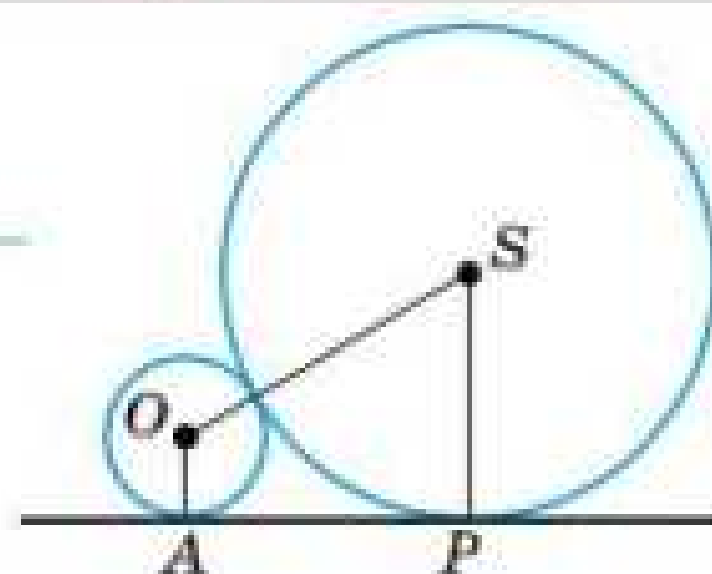
А

- 1 $BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = 10$,
 $\angle A = 60^\circ$.

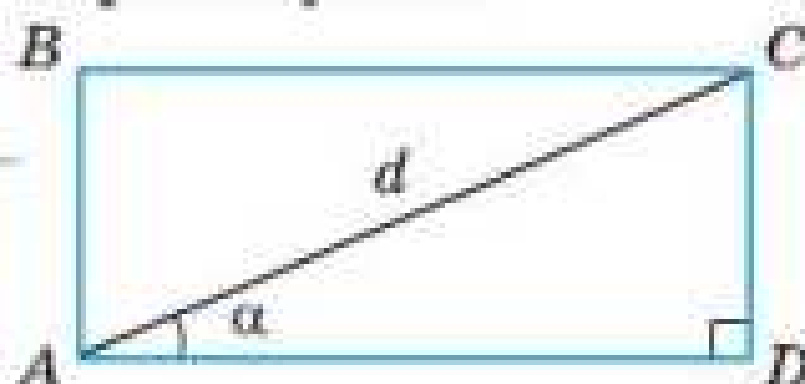
 $\overline{AD, BH}$ 

Б

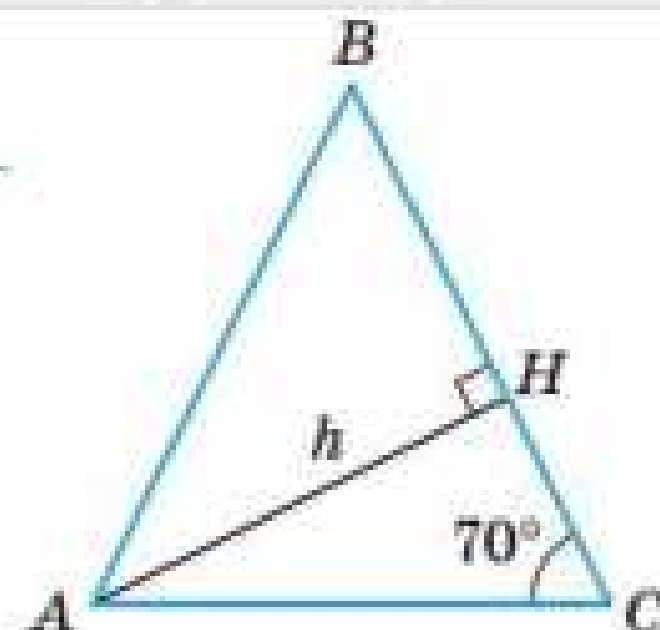
- $OA = 2$,
 $SP = 8$.

 $\overline{AP}$ 

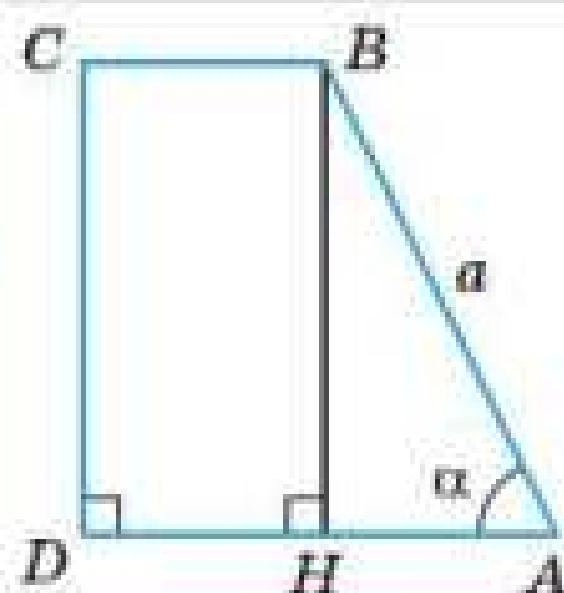
- 2 $ABCD$ — прямокутник
 d , α .

 $\overline{AB, BC}$ 

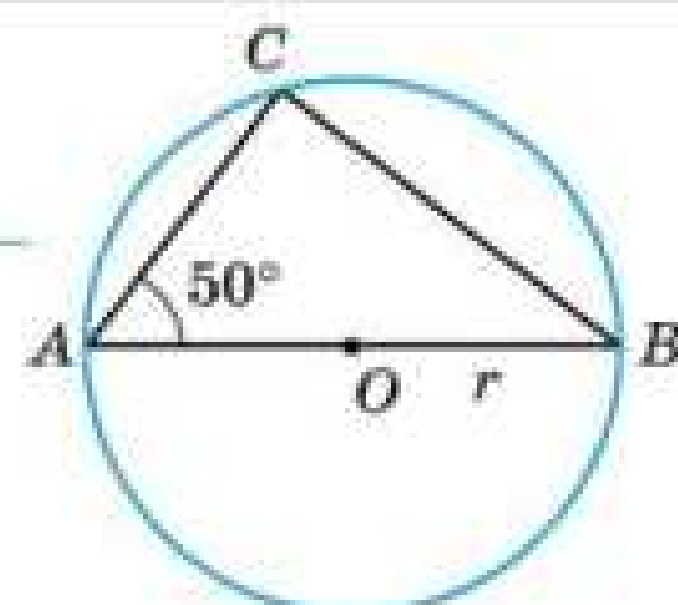
- $AB = BC$.

 $\overline{AB, AC}$ 

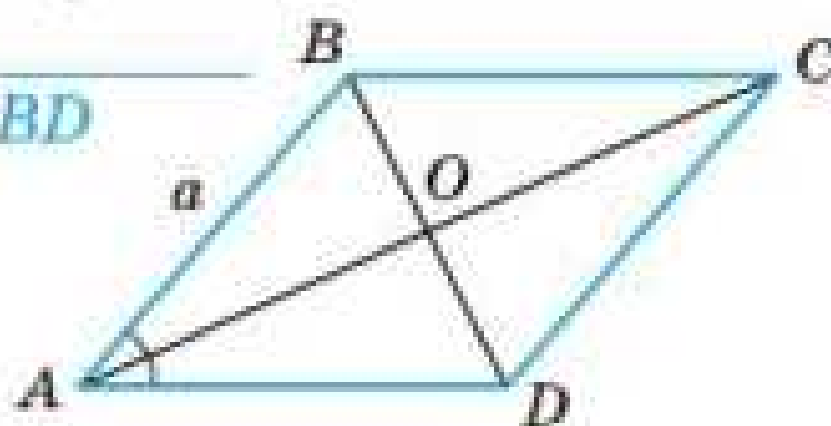
- 3 $BC \parallel AD$
 $AH = DH$.

 $\overline{CD, DA}$ 

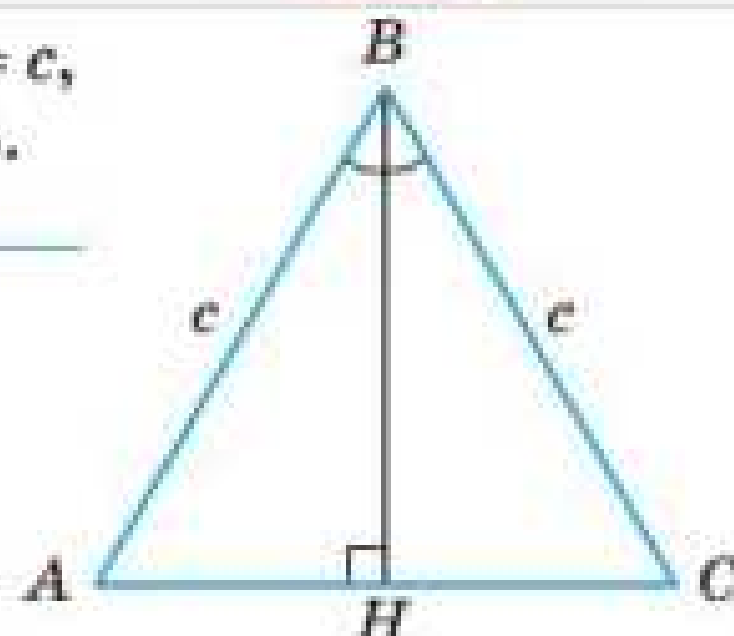
- $OB = r$,
 $\angle A = 50^\circ$.

 $\overline{AC, CB}$ 

- 4 $ABCD$ — ромб,
 $AB = a$, $\angle BAD = \alpha$.

 $\overline{AC, BD}$ 

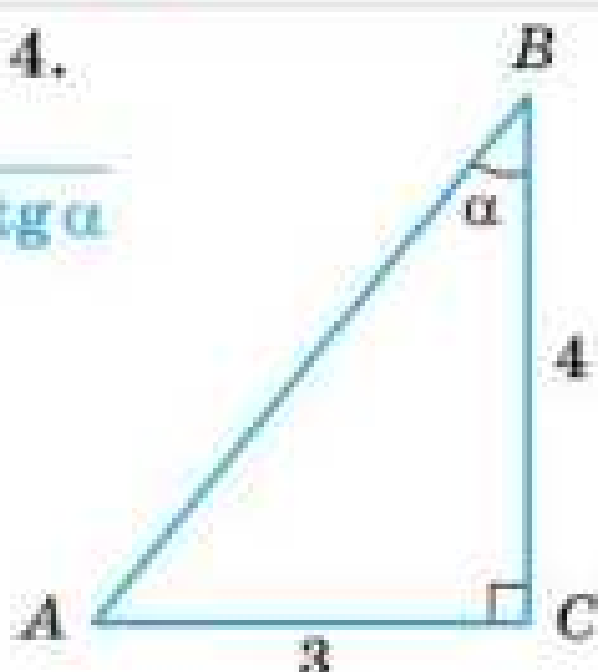
- $AB = BC = c$,
 $\angle ABC = \beta$.

 $\overline{AC, BH}$ 

А

5 $AC = 3, BC = 4.$

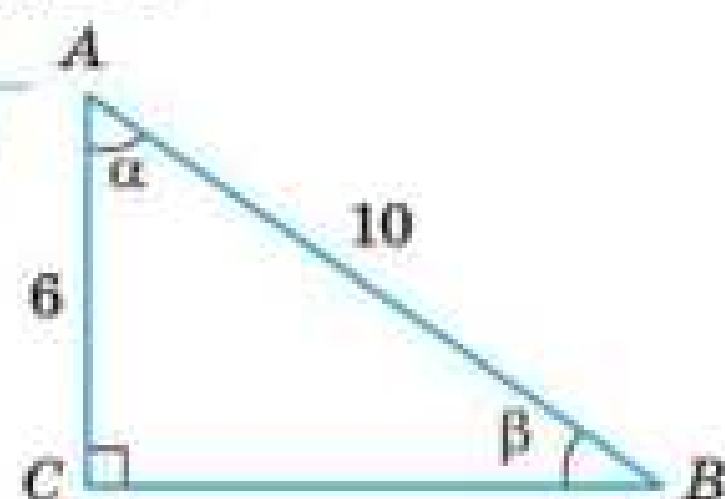
$\overline{\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha}$



Б

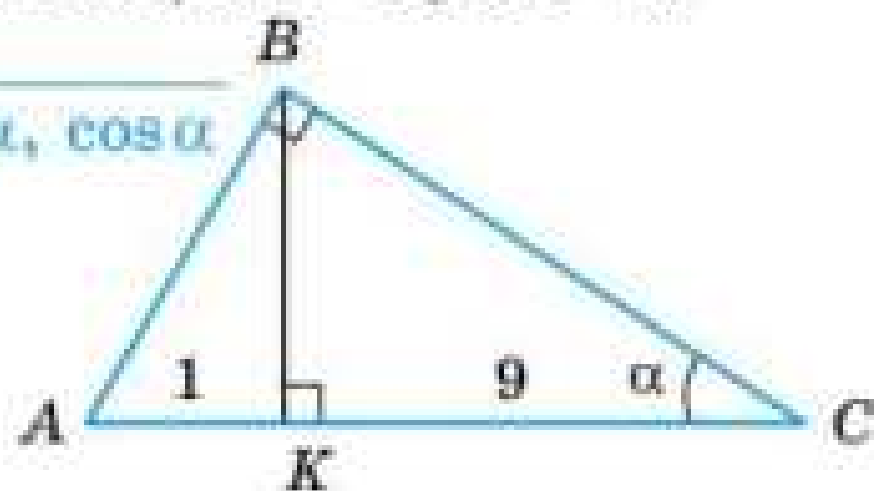
$AB = 10, AC = 6.$

$\overline{\operatorname{tg} \alpha, \cos \beta}$



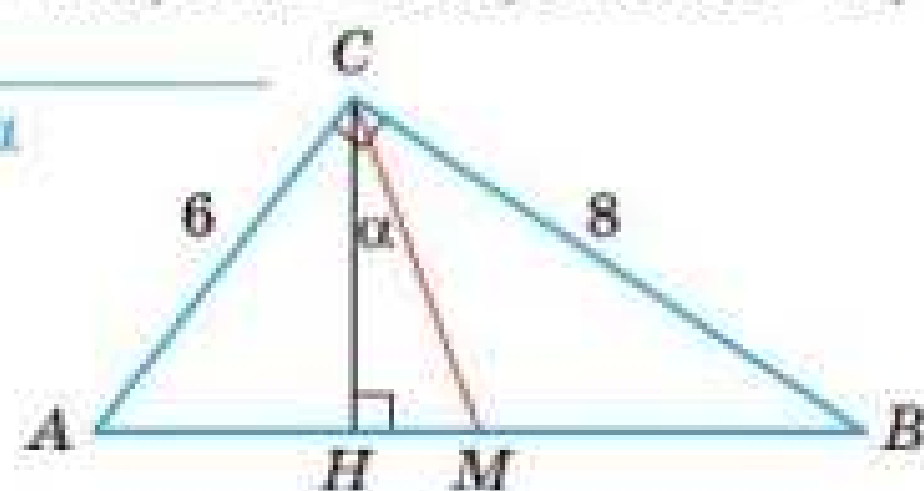
6 $BK \perp AC, AK = 1, KC = 9.$

$\overline{\sin \alpha, \cos \alpha}$



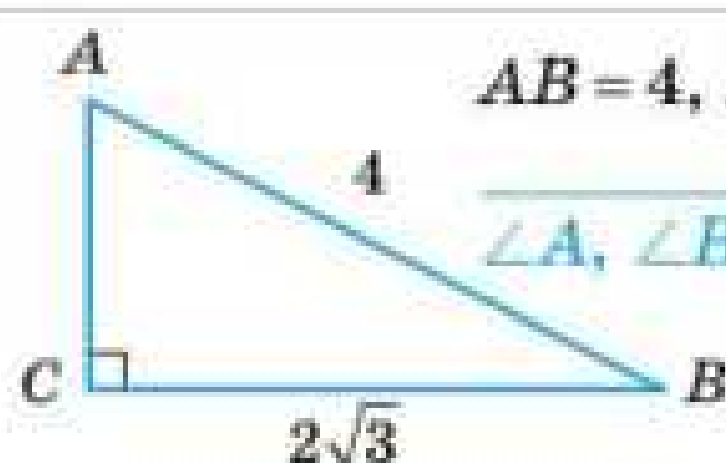
$\angle C = 90^\circ, AM = MB, \angle HCM = \alpha,$

$\overline{\sin \alpha}$



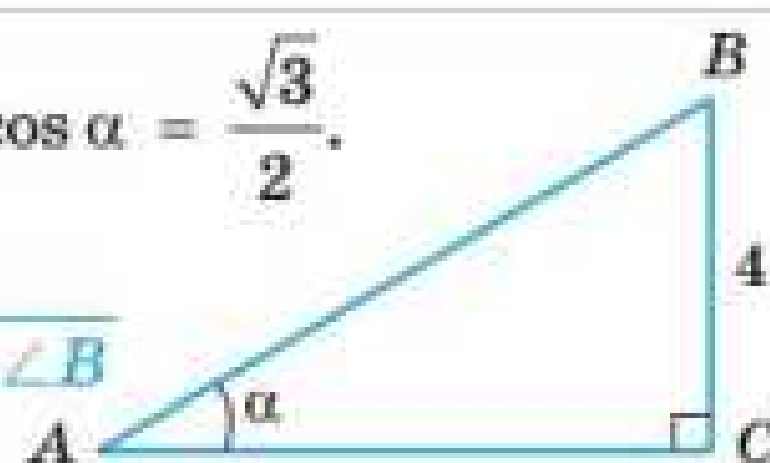
7 $AB = 4, BC = 2\sqrt{3}.$

$\overline{\angle A, \angle B, \angle C}$



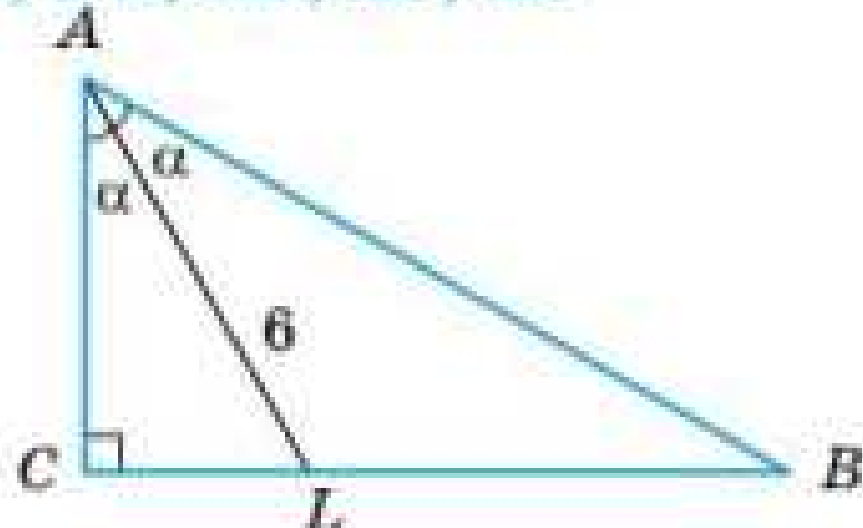
$BC = 4, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\overline{AB, AC, \angle B}$



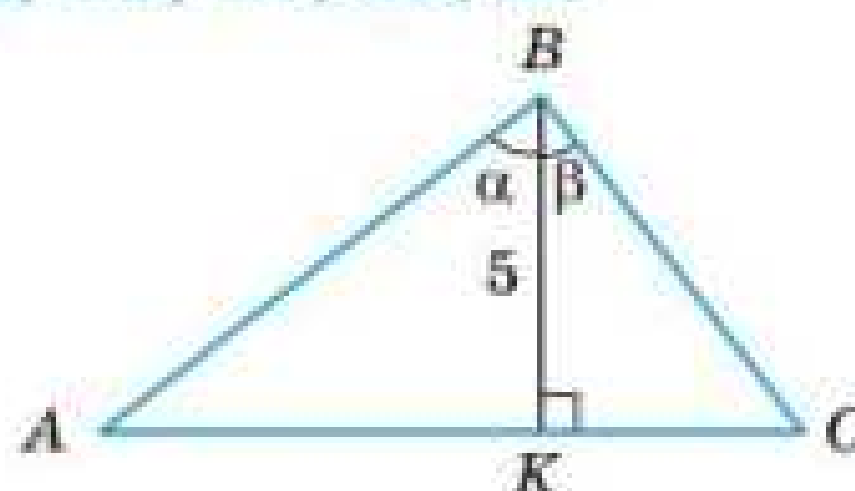
8 $AL = 6, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$\overline{\angle A, \angle B, AB, AC, BC}$



$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\overline{\angle A, \angle B, \angle C, AB, BC}$



САМОСТІЙНА РОБОТА

ВАРІАНТ 1

1. Знайди сторону ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 16 см і 12 см.
2. З точки A до прямої m проведено перпендикуляр $AM = 12$ см і похилу $AP = 13$ см. Знайди синус, косинус та тангенс кута APM .
3. Дано трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Знайди BC , якщо $AB = 7$ см і $\cos \angle B = 0,6$.
4. Менша сторона прямокутника дорівнює 6 см, а діагональ утворює з більшою стороною кут 40° . Знайди периметр прямокутника (з точністю до сотих).

ВАРІАНТ 2

1. Знайди висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 17 см, а бічна сторона 13 см.
2. З точки H до прямої a проведено перпендикуляр $HO = 6$ см і похилу $HA = 10$ см. Знайди синус, косинус та тангенс кута OHA .
3. Дано трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Знайди AC , якщо $AB = 15$ см і $\sin \angle B = 0,2$.
4. Висота ромба дорівнює 5 см, а гострий кут 70° . Знайди периметр ромба (з точністю до сотих).

ВАРІАНТ 3

1. Сторона ромба дорівнює 15 см, а діагональ 24 см. Знайди другу діагональ ромба.
2. З точки M до прямої a проведено перпендикуляр $MP = 8$ см і похилу $MK = 17$ см. Знайди синус, косинус та тангенс кута MKP .
3. Дано трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Знайди BC , якщо $AB = 3$ см і $\sin \angle A = 0,8$.
4. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а кут 50° . Знайди периметр трапеції (з точністю до сотих).

ВАРІАНТ 4

1. Знайди більшу бічну сторону прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 9 см і 14 см, а висота 12 см.
2. З точки O до прямої p проведено перпендикуляр $OK = 12$ см і похилу $OC = 15$ см. Знайди синус, косинус та тангенс кута KOC .
3. Дано трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Знайди AC , якщо $AB = 5$ см і $\cos \angle A = 0,7$.
4. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а кут при основі 40° . Знайди периметр трикутника (з точністю до сотих).

ТЕСТОВ: 3 АЗДАРИ 9

- | | | | |
|----|---|--|--|
| 1 | У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 10 см, а катет — 6 см. Знайди третю сторону трикутника. | А 6 см
Б 4 см | В 16 см
Г 8 см |
| 2 | Яке з тверджень завжди хибне? | А $\sin \alpha = 1$
Б $\operatorname{tg} \alpha = 3$ | В $\cos \alpha = 2$
Г $\sin \alpha = 0,5$ |
| 3 | Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на: | А синус прилеглого кута
Б косинус прилеглого кута
В тангенс протилежного кута
Г косинус протилежного кута | |
| 4 | У $\triangle ABC$ з прямим кутом C $\sin A = \frac{1}{2}$. Знайди $\angle B$. | А 30°
Б 60° | В 45°
Г 90° |
| 5 | Діагональ квадрата зі стороною a дорівнює: | А $a\sqrt{3}$
Б $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ | В $a\sqrt{2}$
Г $\frac{a}{\sqrt{2}}$ |
| 6 | Установи вид $\triangle ABC$, якщо $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. | А гострокутний
Б прямокутний
В тупокутний
Г рівнобедрений | |
| 7 | Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 4 см. Знайди синус більшого гострого кута. | А $\frac{3}{5}$
Б $\frac{4}{5}$ | В $\frac{3}{4}$
Г $\frac{5}{3}$ |
| 8 | У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$), $\operatorname{tg} A = 1$. Який знак слід поставити замість *: $AC * BC$? | А $>$
Б $<$
В $=$
Г не можна встановити | |
| 9 | У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$), $AB = a$, $\angle A = \alpha$. Знайди AC . | А $a \sin \alpha$
Б $a \cos \alpha$ | В $\frac{a}{\sin \alpha}$
Г $\frac{a}{\cos \alpha}$ |
| 10 | З точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, довжини яких дорівнюють відповідно 8 см і 17 см. Знайди довжину проєкції похилої. | А $\sqrt{353}$
Б 9 | В 5
Г 15 |

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. З точки A до прямої a проведено перпендикуляр $АН$ і похилі $AB = 17$ см, $AC = 12$ см. Який знак потрібно поставити замість $*$ у виразі $BH * CH$?
A $>$ **Б** $<$ **В** $=$ **Г** не можна встановити
2. Знайди периметр ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 16 см і 30 см.
A 17 см **Б** 34 см **В** 68 см **Г** 136 см
3. Знайди гіпотенузу MP прямокутного трикутника MPK , якщо $MK = 9$ см, $\cos \angle M = 0,6$.
A 5,4 см **Б** 15 см **В** 54 см **Г** 1,5 см
4. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 25 см, а синус одного з кутів 0,2. Установи відповідність між заданими умовами (1–3) та довжинами цих відрізків (А–Д).

1 менший катет трикутника дорівнює	A 5
2 більший катет трикутника дорівнює	Б $2\sqrt{6}$
3 висота, проведена до гіпотенузи дорівнює	В $6\sqrt{10}$
	Г $10\sqrt{6}$
	Д $30\sqrt{10}$

5. Знайди периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а бічна сторона на 4 см більша за висоту, проведену до основи.
6. Знайди кути і сторони прямокутного трикутника, якщо проєкції катетів на гіпотенузу дорівнюють 2 см і 6 см.
7. Вершину дерева, віддаленого від даного пункту на 16 м, видно під кутом 16° до горизонту, а вершину другого дерева, віддаленого від цього самого пункту на 24 м, видно під кутом 19° . Яке дерево вище і на скільки?
8. Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює α , а радіус вписаного кола r . Знайди периметр трапеції.

Додаткове завдання

9. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. На які відрізки ділить середню за довжиною сторону висота, проведена до неї?

Геометрія має два скарби: один із них — це теорема Піфагора, а другий — поділ відрізка в середньому і крайньому відношеннях.

Й. Кеплер

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 3

Теорема Піфагора. У кожному прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

Правильною є й обернена теорема. Якщо в трикутнику квадрат однієї сторони дорівнює сумі квадратів двох інших сторін, то найбільший кут трикутника прямий.

Якщо перпендикулярні прямі a і b перетинаються в точці C і на прямій a взято довільну точку A , а на прямій b — будь-яку точку B цієї прямої, відмінну від C , то:

- відрізок AC — перпендикуляр, опущений з точки A на пряму b ,
- відрізок AB — похила, проведена з точки A до прямої b ,
- точка B — основа похилої,
- відрізок CB — проекція похилої AB на пряму b .

Властивості похилої і проєкції

- кожна похила довша за перпендикуляр, проведений з тієї самої точки на ту саму пряму;
- проєкція похилої коротша від самої похилої.
- якщо з однієї точки до тієї самої прямої проведено дві рівні похилі, то їх проєкції рівні;
- якщо рівні проєкції похилих, проведених з однієї точки до тієї самої прямої, то і ці похилі рівні;
- якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі, то з них більша та, проєкція якої більша;
- якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі, то більша похила має більшу проєкцію.

Якщо $CK \perp AB$, то $CA > CK$ і $CA > AK$.

Якщо $CE = CB$, то $KE = KB$. Якщо $KE = KB$, то $CE = CB$.

Якщо $CA > CB$, то $AK > KB$. Якщо $AK > KB$, то $CA > CB$.

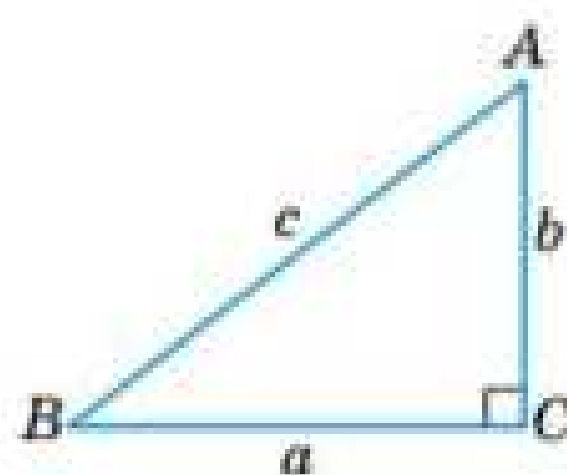
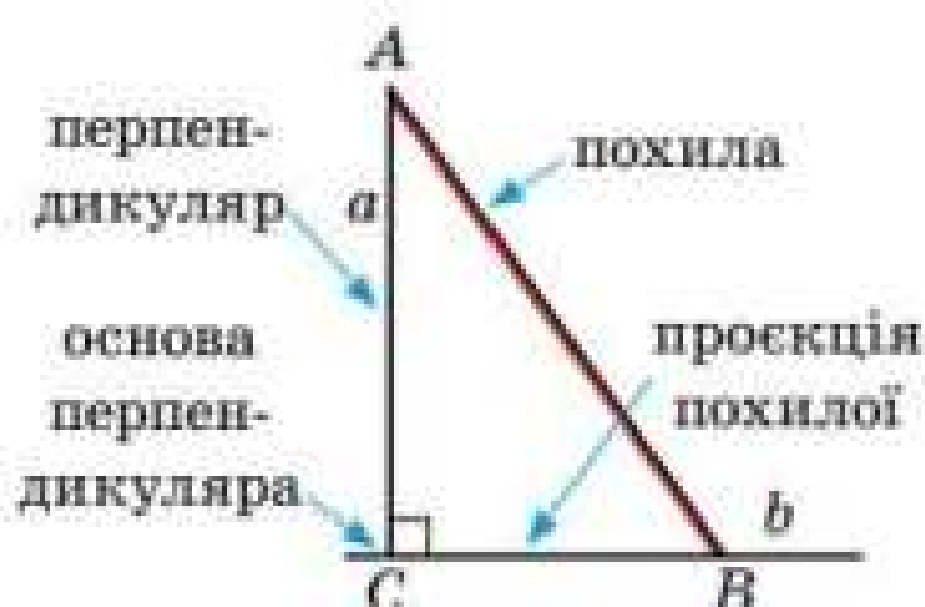
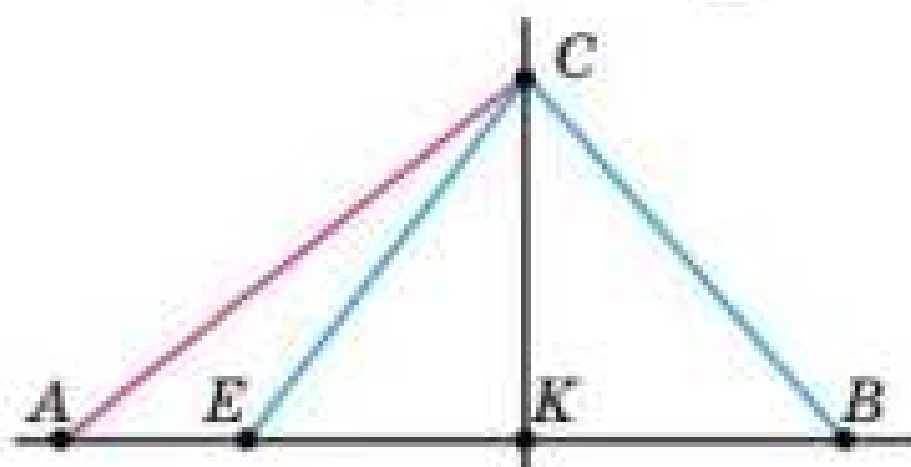
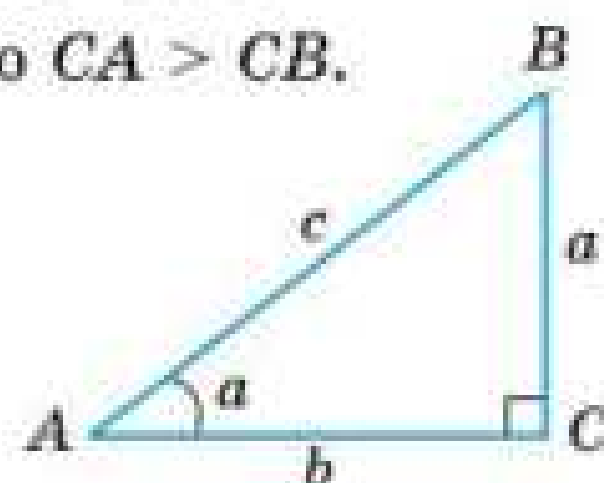
Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.

Синус, косинус, тангенс (і котангенс) певного кута разом називають тригонометричними функціями цього кута.

Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

Користуючись ними, можна за двома відомими елементами прямокутного трикутника визначити всі інші його елементи.

Властивості тригонометричних функцій

Синус і косинус гострого кута менші від 1, а тангенс може бути довільним додатним числом.

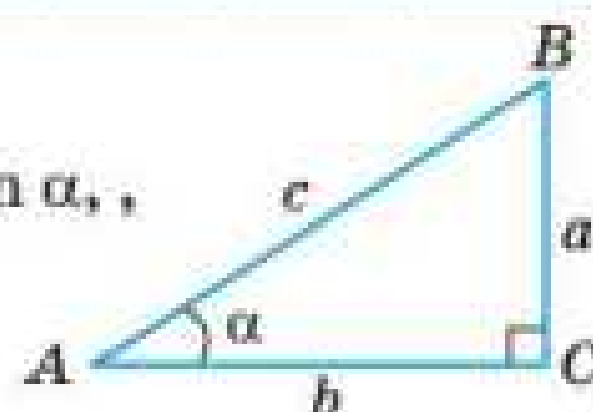
Значення синуса, косинуса і тангенса кутів 0° , 30° , 45° , 60° і 90° наведені у таблиці.

Для кожного гострого кута правильними є співвідношення:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, ,$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha. .$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—



Розв'язати прямокутний трикутник — це означає за двома відомими елементами трикутника (сторонами чи кутами) визначити всі інші його елементи. Як розв'язувати прямокутні трикутники за різних умов, схематично показано у таблиці.

Вид задачі	Умова задачі	Розв'язання
1-й	Дано: $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$. Знайти: $\angle B$, AC , BC .	$\angle B = 90^\circ - \alpha$, $BC = c \cdot \sin \alpha$, $AC = c \cdot \cos \alpha$.
2-й	Дано: $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^\circ$, $BC = a$. Знайти: $\angle B$, AB , AC .	$\angle B = 90^\circ - \alpha$, $AB = \frac{a}{\sin \alpha}$, $AC = AB \cos \alpha$.
3-й	Дано: $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$, $BC = a$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, AC .	$\sin A = \frac{a}{c}$, $\angle B = 90^\circ - \angle A$, $AC = c \cdot \cos A$.
4-й	Дано: $\angle C = 90^\circ$, $AC = b$, $BC = a$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, AB .	$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin A = \frac{a}{AB}$, $\angle B = 90^\circ - \angle A$.

РОЗДІЛ 4

Многокутники та їх площі



Многокутники, зокрема трикутники і чотирикутники, — найважливіші й найпоширеніші геометричні фігури.

Площа многокутника — геометричне, фізичне, географічне, загальнонаукове й навіть побутове поняття. Чим більша площа квартири, тим зручніше в ній жити, тим вона дорожча; чим більша площа поля, тим більший урожай з нього можна зібрати, тим більший податок за нього треба платити.

§ 17 Многокутники Polygons

§ 20 Площі паралелограма, ромба і трапеції Areas of a parallelogram, rhombus, and trapezoid

§ 18 Вписані й описані многокутники Inscribed and Tangent Polygons

§ 21 Площа трикутника Area of a triangle

§ 19 Площа многокутника Polygon Area

Для чого вивчати многокутники та їх площі?

Площа многокутників — це величина, необхідна для багатьох операцій. Наприклад, купівля, продаж, обмін, оформлення у власність земельної ділянки¹.

Податки нараховують відповідно до площі квартири чи дачі, площі фермерських полів² чи ставків³, площі торговельного майданчика на ринку тощо.

Від площі виконаної роботи залежить заробітна платня людей багатьох професій: паркетники/паркетниці, плиточники/плиточниці отримують гроші залежно від того, яку площу вони застелили⁴, малярі/малярки, штукатури/штукатурниці — від того, яку площу вони пофарбували чи підготували до фарбування.

Поміркуй, де ще використовують поняття площі?



Поняття площі розширює твої можливості для розв'язування задач. Знаючи площу фігури, можна знаходити її невідомі елементи: сторони, висоти, кути тощо. Іноді доцільно площу фігури визначити різними способами і, прирівнявши утворені вирази, знайти невідомий елемент. Такий метод розв'язування задач називають «методом площ».

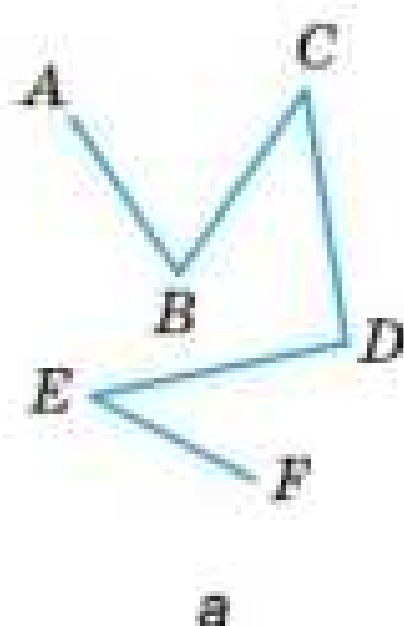
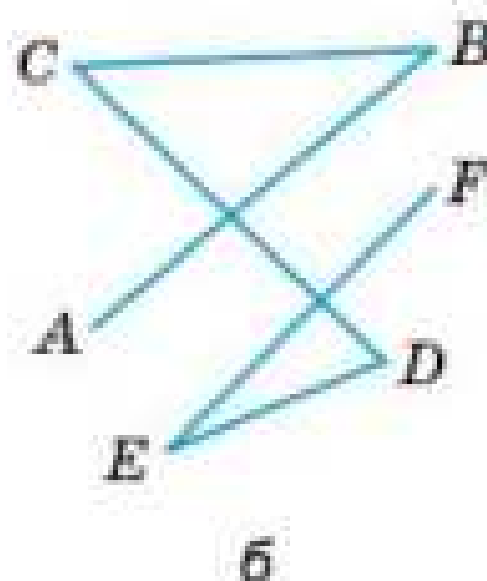
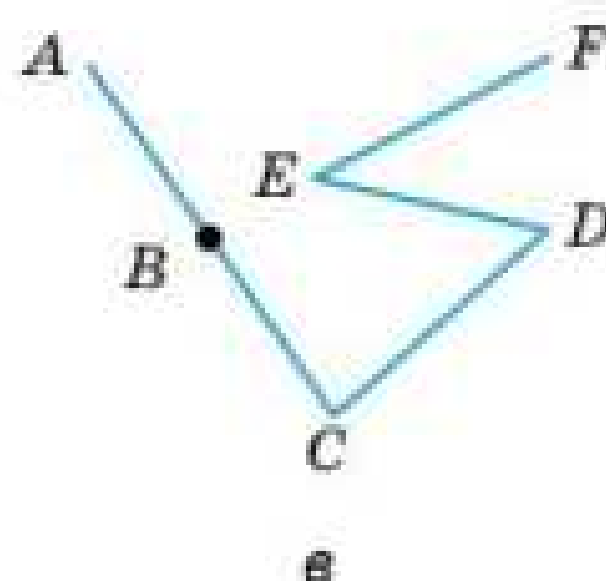
§17 МНОГОКУТНИКИ

Фігуру, що складається з відрізків AB , BC , CD , DE , EF , називають *ламаню* $ABCDEF$ (мал. 17.1).

Точки A , B , C , D , E , F — *вершини* цієї ламаної, A і F — *кінці*,

відрізки AB , BC , CD , DE , EF — її *ланки*. Розглядувана ламана має 5 ланок, але їх може бути будь-яка кількість (не менше двох).

Ламану називають *простою*, якщо вона не має самоперетинів і ніякі дві її сусідні ланки не лежать на одній прямій. На малюнку 17.1 зображено ламани: a — проста, b і v — непрості.



Мал. 17.1

Довжиною ламаної називають суму довжин усіх її ланок. Довжина ламаної не менша відстані між її кінцями. Наприклад, довжина ламаної $ABCDE$ не менша від AE (мал. 17.2). Справді, за нерівністю трикутника

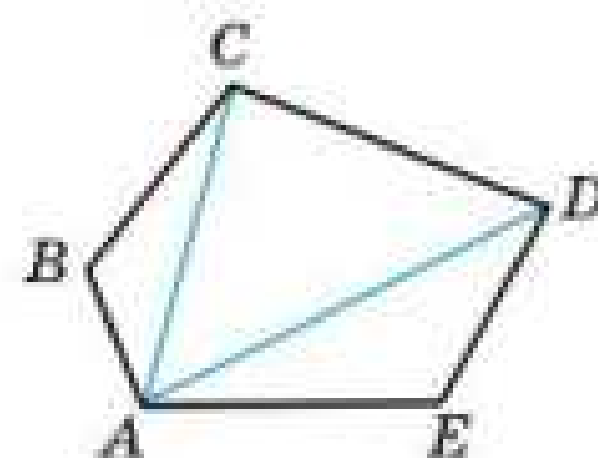
$AB + BC \geq AC$, $AC + CD \geq AD$, $AD + DE \geq AE$.
Додавши усі ці нерівності, маємо:
 $AB + BC + CD + DE \geq AE$.

Аналогічно можна довести розглядуване твердження для ламаної з довільним числом ланок. Знак рівності тут є тільки тоді, коли всі ланки ламаної лежать на одній прямій.

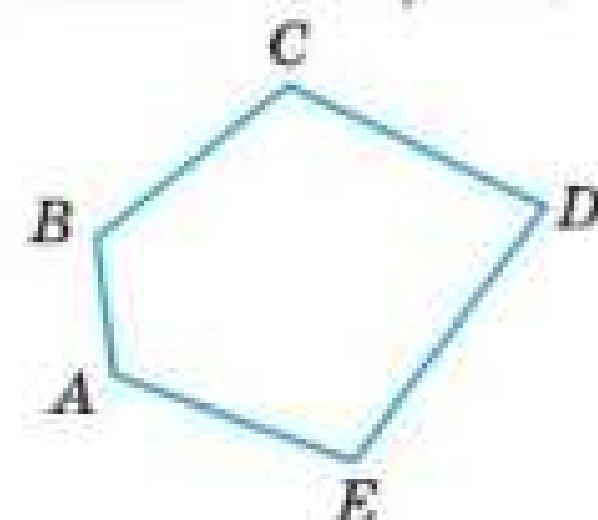
Довжина кожної простої ламаної більша відстані між її кінцями.

Ламана називається *замкненою*, якщо її кінці збігаються.

Просту замкнену ламану називають *многокутником* (мал. 17.3). Вершини і ланки ламаної, яка утворює многокутник, називають відповідно *вершинами* і *сторонами многокутника*. Найменше число сторін многокутника — три. Трикутник



Мал. 17.2



Мал. 17.3

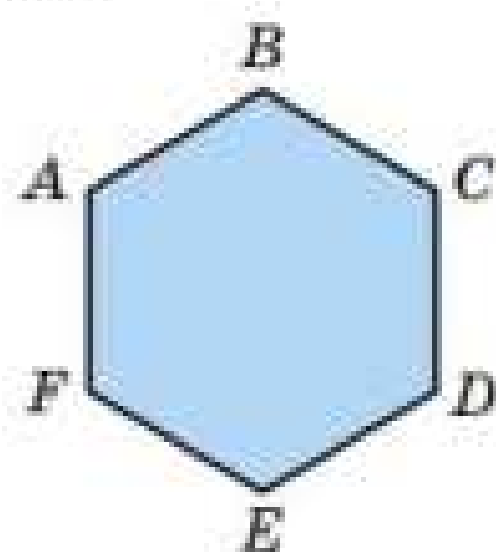
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- convex polygon — опуклий многокутник
- pentagon — п'ятикутник
- hexagon — шестикутник

і чотирикутник — окремі види многокутників. Многокутник з n вершинами називають n -кутником.

Дві вершини многокутника, які є кінцями однієї сторони, називають *сусідніми*; вершини многокутника, які не є кінцями однієї його сторони, — *несусідніми*. Відрізок, що сполучає дві несусідні вершини, — це *діагональ многокутника*. Трикутник не має діагоналей.

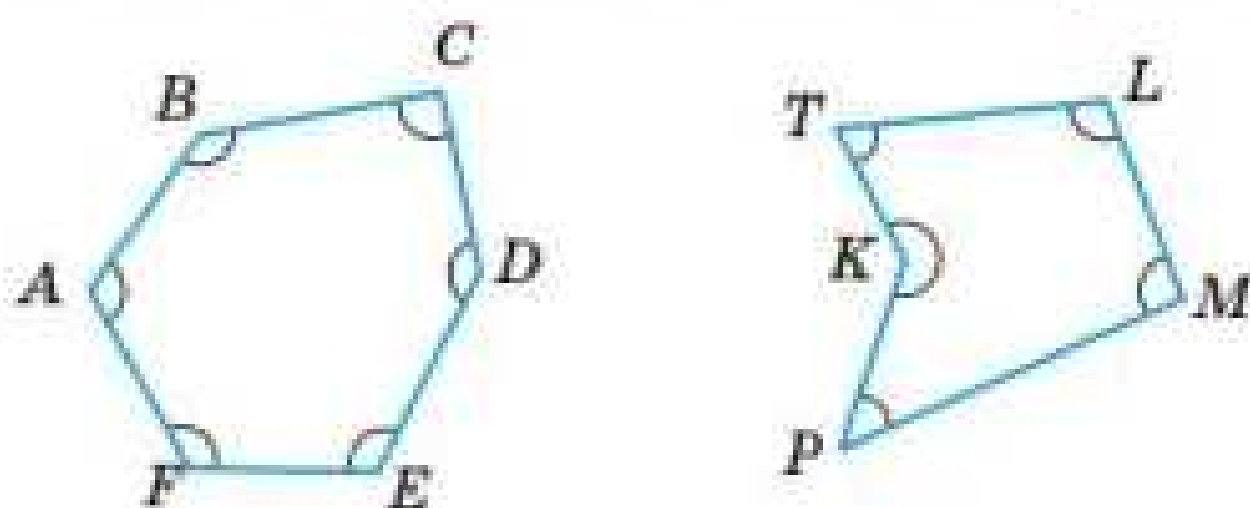
Многокутник розбиває площину на дві області — внутрішню і зовнішню. На малюнку 17.4 внутрішню область шестикутника зафарбовано. Просту замкнену ламану разом з її внутрішньою областю також називають многокутником.



Мал. 17.4

Зауваження. В геометрії нерідко одним словом називають різні поняття. Наприклад, радіусом кола називають і деякий відрізок, і довжину цього відрізка. Те саме можна сказати про сторону, висоту, кут трикутника, діагональ паралелограма тощо. Вживаючи такі слова, треба уточнювати, що вони означають.

Якщо всі кути многокутника менші від розгорнутого, його називають *опуклим многокутником*. На малюнку 17.5 зображено опуклий многокутник $ABCDEF$ і неопуклий $KTLM$. Їх кути позначено дугами.

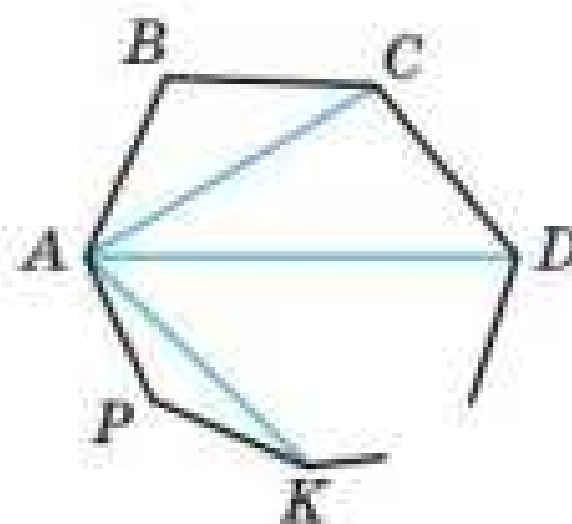


Мал. 17.5

Теорема 31. Сума кутів опуклого n -кутника дорівнює $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Доведення. Нехай $ABCD...KP$ — опуклий n -кутник (мал. 17.6). Діагоналі $AC, AD, \dots, AK$ розбивають його на $(n - 2)$ трикутників. Сума кутів кожного трикутника дорівнює 180° , а сума кутів n -кутника — сумі усіх кутів цих $(n - 2)$ трикутників, тобто $180^\circ(n - 2)$. Теорема 31 справджується і для багатьох неопуклих многокутників.

Периметр многокутника — сума довжин усіх його сторін. Кожна сторона многокутника менша від його півпериметра, бо вона менша від суми всіх інших його сторін.



Мал. 17.6

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Якщо многокутник опуклий, то при кожній його вершині можна побудувати два зовнішні кути.

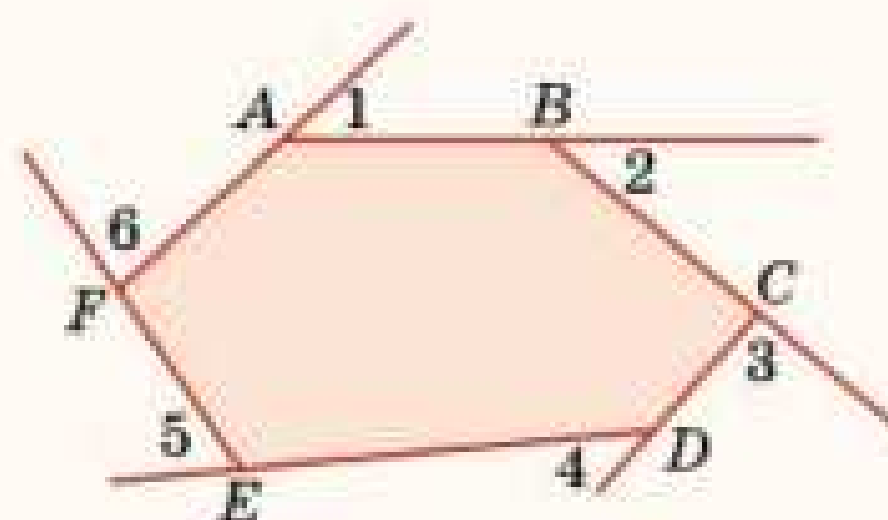


Теорема 32. Сума зовнішніх кутів, взятих по одному при кожній вершині довільного опуклого многокутника, дорівнює 360° .

Доведення. Кожний зовнішній кут опуклого многокутника в сумі із суміжним внутрішнім кутом многокутника дорівнює 180° . Якщо многокутник має n вершин, то сума n таких пар кутів дорівнює $n \cdot 180^\circ$. Сума всіх внутрішніх кутів дорівнює $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Тому сума зовнішніх кутів n -кутника дорівнює різниці

$$n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Доведену теорему ілюструє малюнок 17.7.



Мал. 17.7

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке многокутник?
2. Який многокутник називають опуклим?
3. Що таке периметр многокутника?
4. Сформулюй теорему про суму кутів опуклого многокутника.

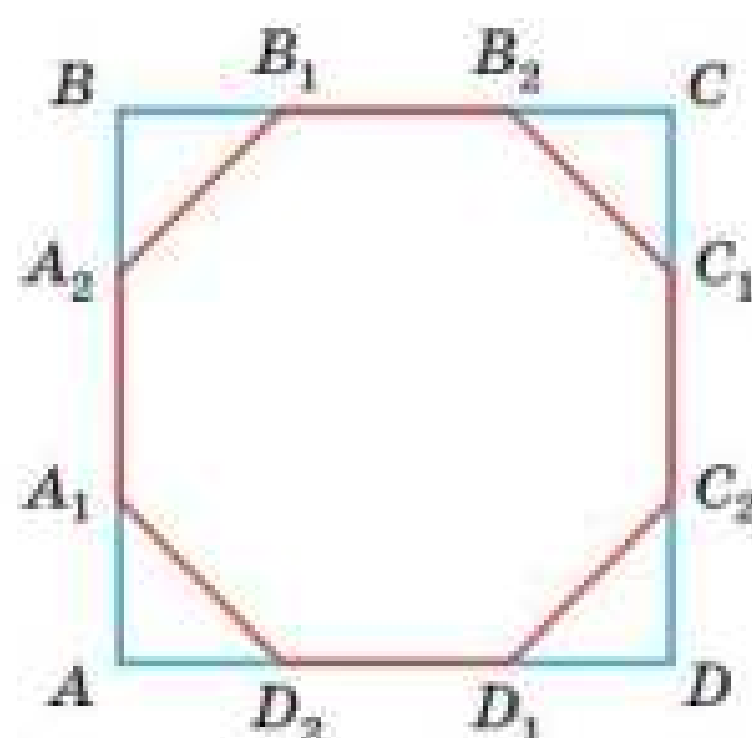
ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Скільки діагоналей має опуклий n -кутник?

• З кожної вершини опуклого n -кутника виходить $n - 3$ діагоналі, з усіх n вершин — $n(n - 3)$ діагоналі. При цьому кожену діагональ рахують двічі, бо вона має два кінці. Отже, кожний опуклий n -кутник має $\frac{n(n - 3)}{2}$ діагоналей.

2. Кожну сторону квадрата завдовжки 3а поділено на 3 рівні частини, і всі точки поділу послідовно сполучено відрізками (мал. 17.8). Знайди кути утвореного 8-кутника, його діагоналі й периметр.

• При вершинах даного квадрата — прямокутні рівнобедрені трикутники, гострі кути яких по 45° . Тому кожний кут утвореного 8-кутника дорівнює $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.



Мал. 17.8

$AA_1 = A_1A_2 = A_2B = a$, тоді за теоремою Піфагора

$$A_1D_2^2 = A_1A_2^2 + AD_2^2, A_1D_2^2 = a^2 + a^2 = 2a^2, A_1D_2 = a\sqrt{2}.$$

Тому периметр 8-кутника

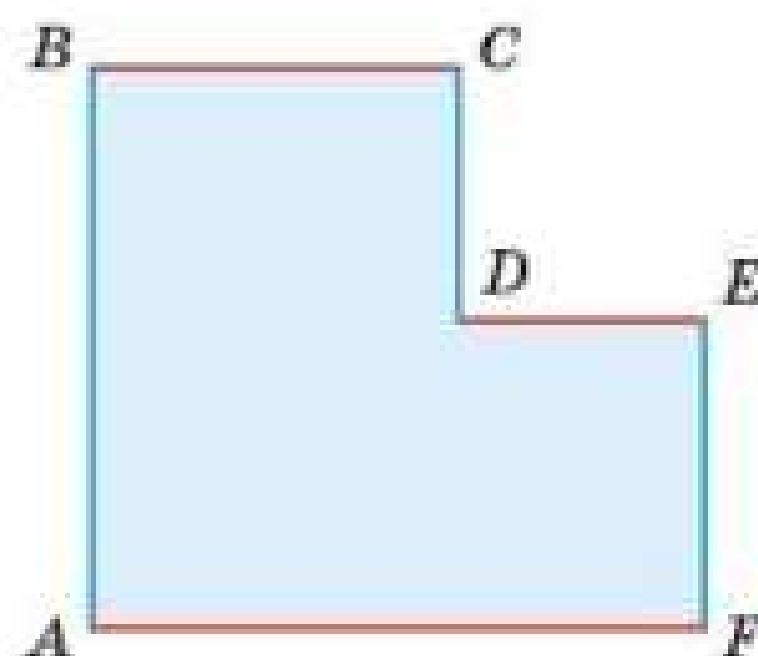
$P_8 = 4a + 4a\sqrt{2} = 4a(1 + \sqrt{2})$. Знайдемо діагоналі, проведені, наприклад, з вершини A_1 . Діагоналі A_1D_1 і A_1B_1 — гіпотенузи прямокутних трикутників з катетами a і $2a$. $A_1C_2 = 3a$, діагоналі A_1C_1 і A_1B_2 — гіпотенузи прямокутних трикутників з катетами a , $3a$ і $2a$, $2a$ відповідно. Тому:

$$A_1D_1 = A_1B_1 = a\sqrt{5}, A_1C_2 = 3a,$$

$$A_1C_1 = a\sqrt{10}, A_1B_2 = 2\sqrt{2}a.$$

3. Чи існує шестикутник, кожна сторона якого паралельна двом іншим його сторонам?

• Існує. Такий шестикутник можна отримати, відрізавши від будь-якого прямокутника менший прямокутник (мал. 17.9).



Мал. 17.9

ВИКОНАЄМО УСНО

935. Скільки ланок мають ламані, зображені на малюнку 17.1? Назви їх вершини і кінці.

936. Знайди довжину ламаної $ABCDE$, довжини ланок якої 3 м, 5 м, 8 м і 4 м. Чи може відстань між її кінцями дорівнювати 21 м?

937. Знайди суму кутів опуклого дванадцятикутника.

А 360° Б 1800° В 3240° Г 3600°

938. Скільки діагоналей має десятикутник?

А 10 Б 7 В 35 Г 70

939. Чи може число вершин опуклого многокутника не дорівнювати числу його сторін?

940. Чи перетинає ламана пряму, якщо кінці ламаної розміщені:
а) з різних боків від прямої; б) з одного боку від прямої?



ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

941. Накресли шестикутник $ABCDEF$. Назви усі його вершини, сторони, діагоналі. Скільки діагоналей має шестикутник?



942. а) Периметр якого з п'ятикутників, зображених на малюнку 17.10, більший?

б) Знайди периметри цих п'ятикутників, якщо $AB = KP = 4$ см.

943. Знайди сторони шестикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 2, 3, 4, 4, 6, а його периметр дорівнює 84 см.

944. Знайди сторону AB п'ятикутника $ABCDE$, якщо кожна наступна сторона на 3 см більша за попередню, а периметр п'ятикутника дорівнює 55 см.

945. Find the side AB of hexagon $ABCDEF$ if all other sides are 2 in larger than AB and the perimeter of the hexagon is 46 in.

946. Чи існує п'ятикутник, довжини сторін якого дорівнюють 1 м, 2 м, 3 м, 4 м і 12 м?

947.  Гра. Кожен/кожна з 4 учасників/учасниць по черзі задає довжину однієї з чотирьох сторін п'ятикутника, перший учасник / перша учасниця задає ще довжину п'ятої сторони, а другий учасник / друга учасниця має визначити, чи існує такий многокутник. Потім учасники/учасниці міняються ролями.

948. Чи існує п'ятикутник, сторони якого пропорційні числам 7, 13, 15, 45 і 19?

949.  На малюнку 17.11 зображено прямокутник $ABCD$ і рівносторонній трикутник ABK , периметри яких відповідно дорівнюють 20 см і 12 см. Знайди периметр п'ятикутника $AKBCD$.

А 23 см Б 24 см В 26 см Г 28 см Д 32 см

950. Скільки сторін має вікно у формі многокутника (мал. 17.12)? Знайди суму його кутів.

951. Знайдіть суму кутів опуклого:
а) десятикутника; б) шістнадцятикутника.

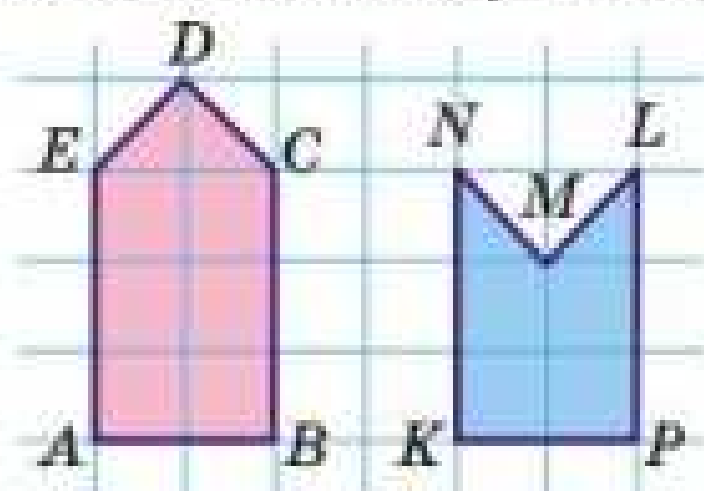
952. Знайди суму кутів опуклого:
а) п'ятикутника; б) шестикутника;
в) стокутника.

953. Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює: а) 1080° ; б) 2150° ; в) 2340° ? Якщо такий многокутник існує, то скільки він має сторін?

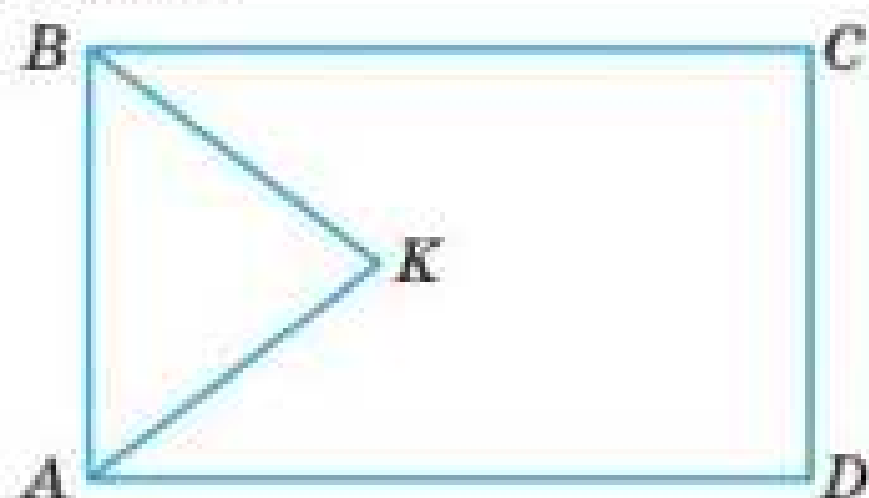
954. Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює:
а) 900° ; б) 2850° ; в) 9000° ?

955. Усі кути шестикутника рівні. Знайди міру одного з них.

956. Усі кути десятикутника рівні. Знайди міру одного з них.



Мал. 17.10



Мал. 17.11



Мал. 17.12

957. Чи існує опуклий многокутник, кожний кут якого дорівнює:
а) 115° ; б) 156° ?
958. Скільки сторін має многокутник, кожний кут якого дорівнює 135° ? А 140° ?
959. Чи існує многокутник, кожний зовнішній кут якого дорівнює 36° ?
960. Знайди кути п'ятикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 3, 5, 5. Склади план розв'язування задачі та розв'яжи її.
961. Знайди кути шестикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 5, 6, 7, 7, 8.
962. Скільки діагоналей має: а) восьмикутник; б) сімнадцятикутник?
963. Опуклий многокутник має 104 діагоналі. Скільки він має сторін?
964. Чи існує п'ятикутник з трьома прямими кутами? Із чотирма прямими кутами?
965. Чи може в квадраті з периметром P вміститися многокутник з периметром $2P$? Покажи на прикладі.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

966. Накресли неопуклий п'ятикутник, у якого тільки дві діагоналі лежать у внутрішній області. Знайди суму його кутів.
967. Вершини чотирикутника мають такі координати: $A(1; 2)$, $B(1; 3)$, $C(6; 3)$, $D(3; 0)$. Знайди периметр чотирикутника, міри його кутів і довжини діагоналей.
968. На кожній стороні квадрата завдовжки a зовні нього добудували рівносторонній трикутник так, що утворився неопуклий восьмикутник. Знайди його кути і довжини найдовших діагоналей.
969. У 2010 році випущено 6 марок, присвячених мінералам, властивим певним регіонам України: сингеніт (калушит) — Прикарпаття, родоніт — Карпати, лабрадор — Черкащина, агат і бурштин — Волинь, карпатит — Закарпаття. Розміри кожної марки $47 \times 47 \times 47$ мм. Разом ці марки утворюють шестикутник (мал. 17.13). Для цього шестикутника знайди: а) суму внутрішніх кутів; б) периметр; в) більшу діагональ; г) меншу діагональ; г) відстань між протилежними сторонами.
970. а) Доведи, що протилежні сторони опуклого шестикутника з рівними кутами паралельні.
б) Доведи, що опуклий семикутник з рівними кутами не має паралельних сторін.



Мал. 17.13

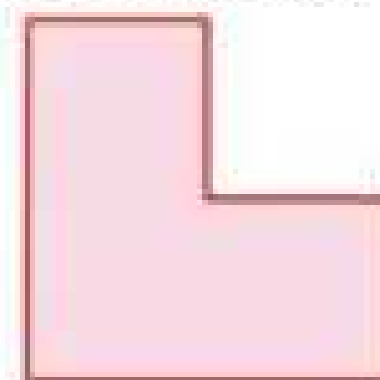
971. $ABCDEFGMN$ — опуклий восьмикутник з рівними кутами. Доведи, що: а) прямі AB і CD перпендикулярні; б) $DE \parallel AN$.

972. Шестикутник, усі кути якого рівні й кожна сторона дорівнює a , розрізано на три рівні п'ятикутники найменших периметрів. Знайди периметр і кути п'ятикутника.

973. Доведи на прикладі ламаної з шести ланок, що довжина простої ламаної більша за відстань між її кінцями.

974. Спробуй розрізати квадрат на два рівні п'ятикутники та на два рівні семикутники.

975. Як зображений на малюнку 17.14 шестикутник розрізати на 4 подібні йому шестикутники?



Мал. 17.14

976. Яке найменше число гострих кутів може мати опуклий многокутник? Чому?

977. Скільки вершин має опуклий многокутник, жоден із кутів якого не перевищує 120° ?

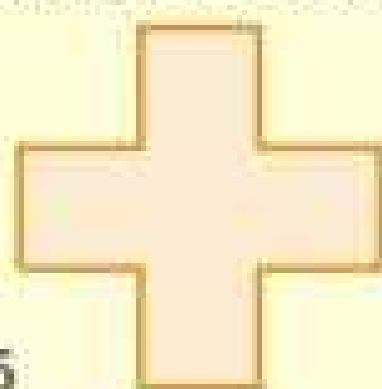
978. Чи існує опуклий п'ятикутник, найбільший кут якого дорівнює 107° ?

979. Доведи, що чотири гострі кути може мати тільки неопуклий многокутник.

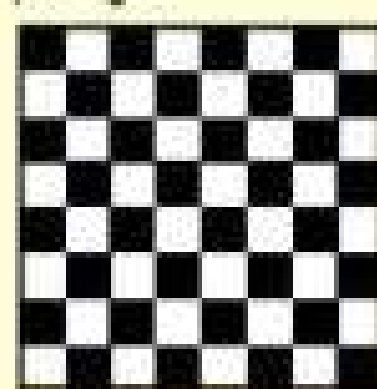
980. Доведи, що сума діагоналей опуклого п'ятикутника більша за його периметр.

981. Дельтоїд — це чотирикутник, діагоналі якого перпендикулярні і одна з них проходить через середину другої. Досліди властивості дельтоїда.

982. Уяви безліч паркетин у формі хреста, складеного з п'яти рівних квадратів, як зображено на малюнку 17.15. Чи можна такими паркетинами замостити всю площину?



Мал. 17.15



Мал. 17.16

983. На звичайній шаховій дошці (мал. 17.16) можна виділити 139 різних квадратів, що мають від 2×2 до 7×7 клітинок. Доведи це. Скільки серед них таких, які мають більше чорних клітинок?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

984. Виріж з паперу дві трапеції зі сторонами 4 см, 4 см, 4 см і 8 см. Які фігури можна утворити, прикладаючи трапеції рівними сторонами одна до одної? Накресли ці фігури в масштабі $1 : 2$, знайди їх периметри і міри кутів.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

985. Знайди кути паралелограма, якщо:
 а) два з них пропорційні числам 2 і 3;
 б) один із них на 20° більший за другий;
 в) один становить 80 % від другого.
986. Знайди периметр ромба, якщо він на 60 см більший за сторону ромба.
987. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона ділиться точкою дотику вписаного кола у відношенні 2 : 3 (починаючи від вершини). Знайди відношення бічної сторони до основи.

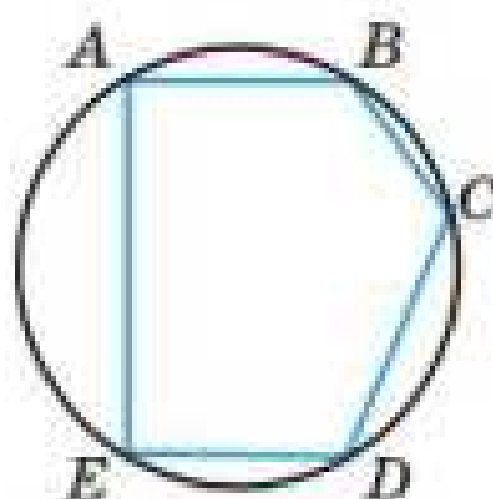


§ 18 ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ МНОГОКУТНИКИ

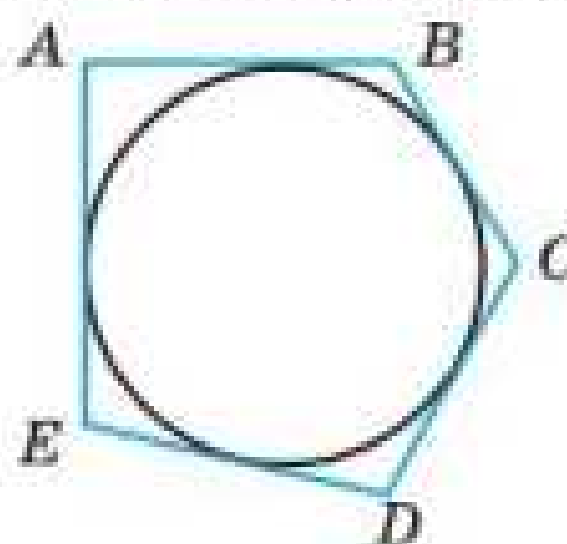
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- inscribed polygons — вписаний у коло многокутник
- circumscribed polygons — описаний навколо кола многокутник

Якщо всі вершини многокутника лежать на колі, його називають *вписаним у коло*, а коло — *описаним навколо многокутника* (мал. 18.1).



Мал. 18.1



Мал. 18.2

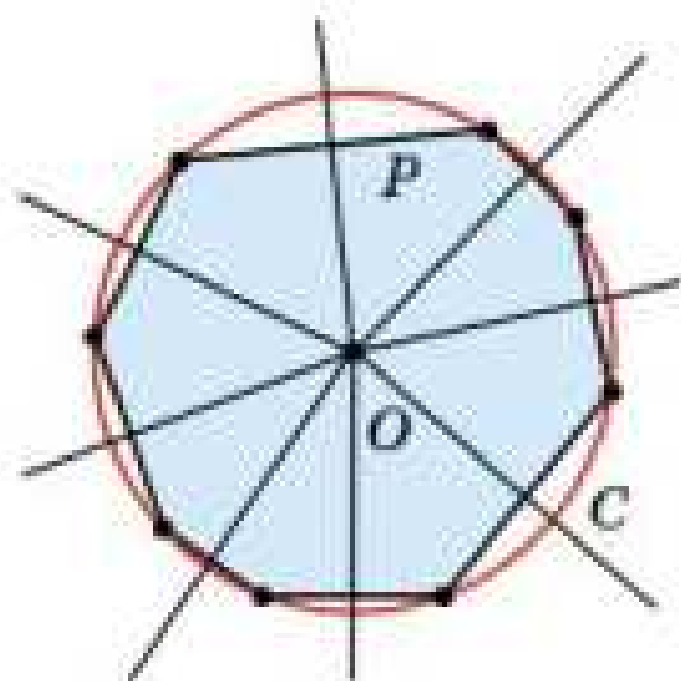
Якщо всі сторони многокутника дотикаються до кола, його називають *описаним навколо кола*, а коло — *вписаним у многокутник* (мал. 18.2).

Ти вже дещо знаєш про вписані в коло й описані навколо кола трикутники і чотирикутники. Знаєш, зокрема, що:

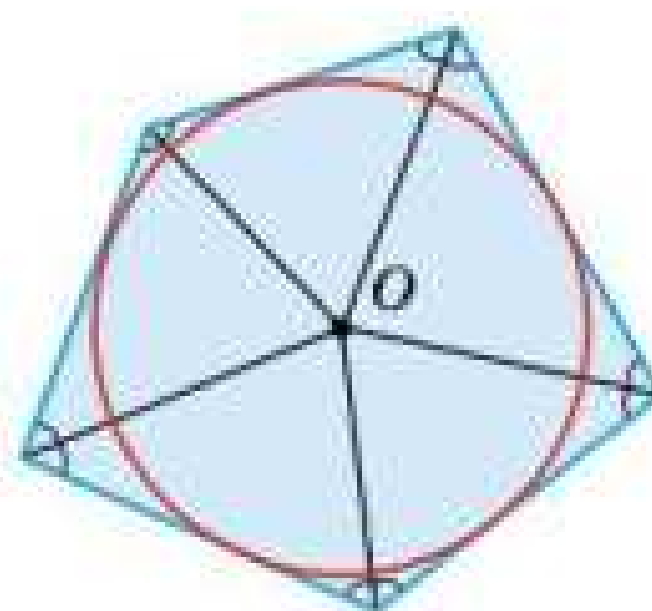
- навколо кожного трикутника можна описати коло і тільки одне;
- у будь-який трикутник можна вписати коло і тільки одне;
- коло можна вписати тільки в такий чотирикутник, сума двох протилежних сторін якого дорівнює сумі двох інших його сторін;
- коло можна описати тільки навколо такого чотирикутника, сума двох протилежних кутів якого дорівнює 180° .

Для довільних n -кутників такі загальні твердження сформулювати не можна. Можна тільки стверджувати, що кожний вписаний у коло багатокутник і кожний описаний навколо кола багатокутник — фігури опуклі.

Якщо багатокутник вписаний у коло, то центр цього кола рівновіддалений від усіх вершин багатокутника, тобто лежить у точці перетину серединних перпендикулярів, проведених до сторін багатокутника. Якщо серединні перпендикуляри, проведені до всіх сторін багатокутника, перетинаються в одній точці, то навколо такого багатокутника можна описати коло (мал. 18.3).



Мал. 18.3

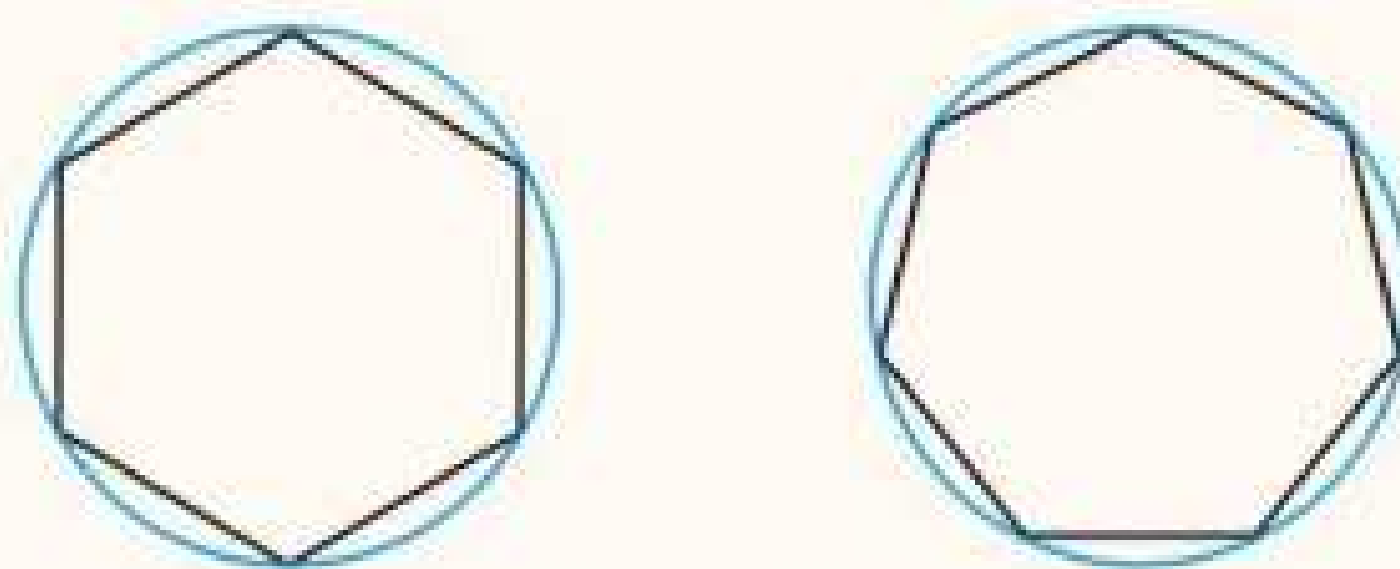


Мал. 18.4

Центр кола, вписаного в багатокутник, рівновіддалений від усіх його сторін, тобто лежить у точці перетину бісектрис кутів багатокутника. Якщо бісектриси всіх кутів багатокутника перетинаються в одній точці, то у такий багатокутник можна вписати коло (мал. 18.4).

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

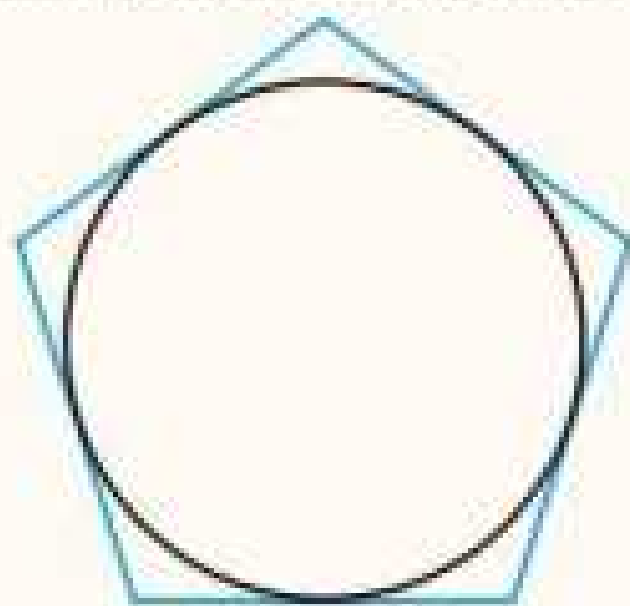
Якщо всі сторони опуклого багатокутника рівні і всі його кути рівні, то такий багатокутник називають *правильним*. Наприклад, рівносторонній трикутник і квадрат — багатокутники правильні. На малюнку 18.5 зображено правильні шестикутник і семикутник.



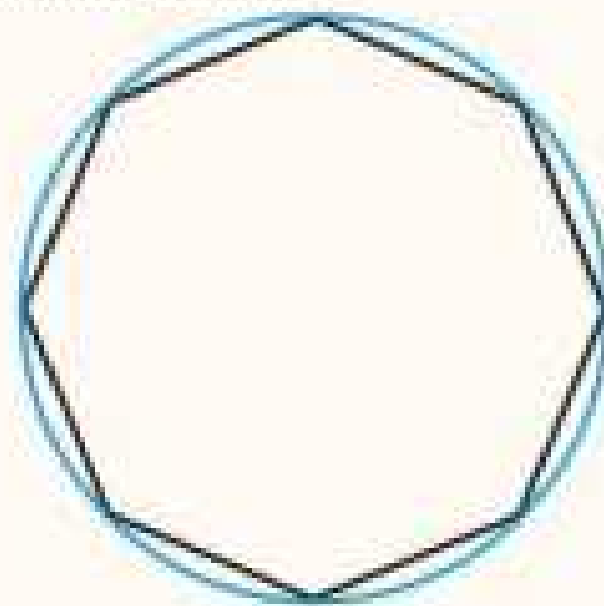
Мал. 18.5

Навколо кожного правильного багатокутника можна описати коло і тільки одне. У кожний правильний багатокутник можна вписати коло і тільки одне.

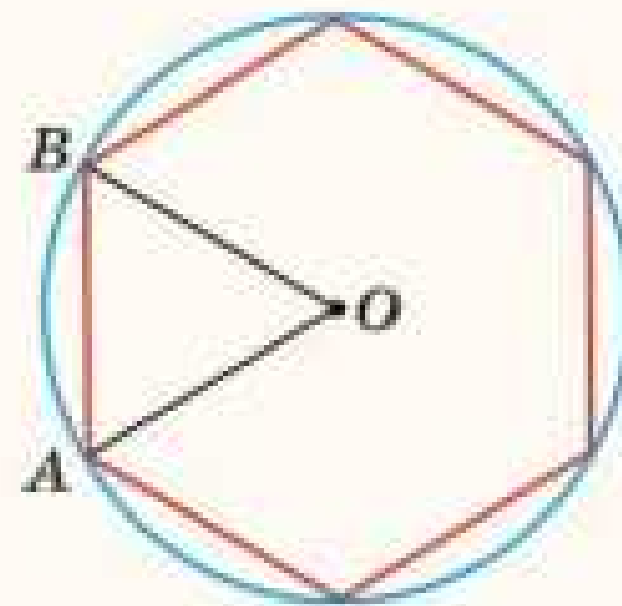
На малюнках 18.6 і 18.7 зображено кола: вписане в правильний п'ятикутник і описане навколо правильного восьмикутника.



Мал. 18.6



Мал. 18.7



Мал. 18.8

Доведемо, що сторона правильного шестикутника, вписаного в коло, дорівнює радіусу цього кола (мал. 18.8).

Оскільки всі сторони вписаного шестикутника рівні, то рівні й стягнуті ними дуги, і відповідні їм центральні кути. Сума всіх шести центральних кутів (при їх спільній вершині O) дорівнює 360° , тому кожен з них дорівнює $360^\circ : 6 = 60^\circ$.

$\triangle OAB$ рівнобедрений, бо $OA = OB$, як радіуси кола. Якщо ж кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 60° , то цей трикутник рівносторонній, $AB = OB$. А це й треба було довести.

Докладніше про правильні многокутники ти дізнаєшся в 9 класі.

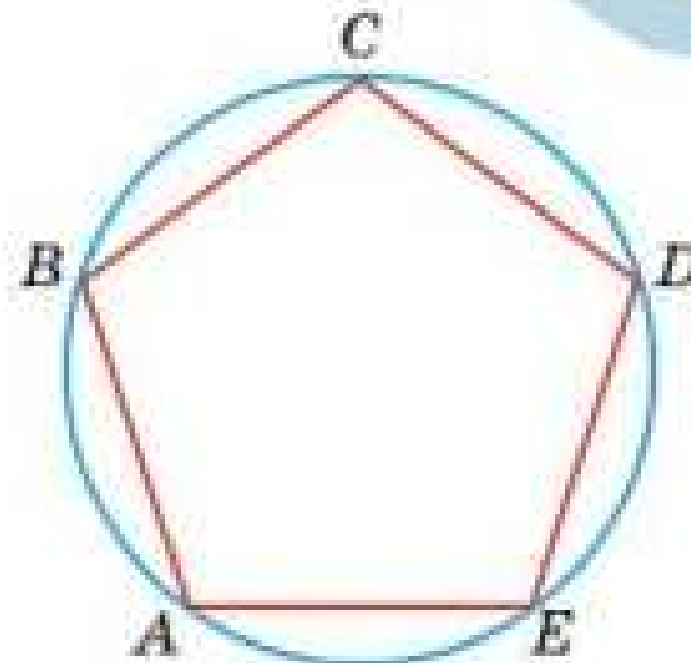
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який многокутник називають: а) вписаним у коло; б) описаним навколо кола?
2. Де лежить центр: а) вписаного; б) описаного навколо трикутника кола?
3. Навколо якого чотирикутника можна описати коло?
4. У який чотирикутник можна вписати коло?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. У коло вписано п'ятикутник, усі сторони якого рівні. Доведи, що всі його кути рівні (мал. 18.9).

- Якщо всі сторони вписаного в коло п'ятикутника $ABCDE$ рівні, то і стягнуті ними дуги кола рівні: кожна з них дорівнює п'ятій частині всього кола. Кут A вписаний і спирається на дугу $BCDE$, що дорівнює $\frac{3}{5}$ усього кола. На таку саму дугу спирається кожний інший кут даного п'ятикутника, тому всі вони рівні.



Мал. 18.9

2. Знайди радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC , якщо $AB = BC = 13$, $AC = 10$.

• За теоремою Піфагора $BH^2 = BC^2 - HC^2$,

$$BH^2 = 169 - 25 = 144, BH = 12.$$

Центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, лежить на висоті, проведеної до основи трикутника. Нехай це буде точка O (мал. 18.10). Опустимо перпендикуляр OK на хорду AB .

$$BK = KA, BK = 0,5AB = 6,5.$$

Прямокутні трикутники BKO і BHA подібні, бо мають спільний гострий кут.

Тому $OB : BK = AB : BH$, звідки

$$OB = \frac{AB \cdot BK}{BH} = \frac{13 \cdot 6,5}{12} = 7 \frac{1}{24}.$$

Отже, радіус кола дорівнює $7 \frac{1}{24}$.

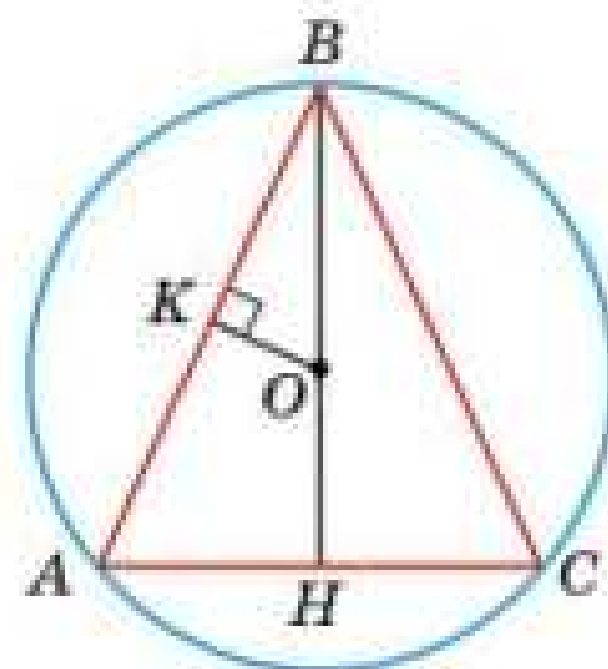
Можна було цю задачу розв'язати інакше.

Нехай $OB = OA = R$, тоді $OH = 12 - R$.

З трикутника OAH за теоремою Піфагора $AO^2 = OH^2 + AH^2$.

$$\text{Тоді } R^2 = (12 - R)^2 + 25, R^2 = 144 - 24R + R^2 + 25,$$

$$24R = 169, R = 7 \frac{1}{24}.$$



Мал. 18.10

ВИКОНАЄМО УСНО

988. Знайди радіус кола, вписаного у квадрат, якщо сторона квадрата дорівнює 17 см.

А 34 см Б 17 см В 8,5 см Г 9,5 см

989. У коло, діаметр якого дорівнює 30 дм, вписано квадрат. Знайди: а) діагональ квадрата; б) сторону квадрата.

990.  Що більше: периметр квадрата, довжина вписаного в нього кола чи довжина описаного кола?

991. Знайди відношення радіусів кіл, вписаного в рівносторонній трикутник і описаного навколо нього.



ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

992. Накресли коло і впиши у нього довільний п'ятикутник.



993. Гра. Один із учасників / одна із учасниць креслить коло, а другий/друга має описати навколо нього п'ятикутник. Потім учні/учениці міняються ролями.

994. Накресли коло і опиши навколо нього довільний шестикутник.

995. Трикутник ABC — рівнобедрений. Радіус OA описаного кола утворює з основою AC кут OAC , який дорівнює 24° . Визнач кут BAC .

996. Нехай O — центр кола, вписаного в $\triangle ABC$. Знайди кути цього трикутника, якщо $\angle OAB = 40^\circ$ і $\angle OBA = 30^\circ$.

997. Знайди кути $\triangle ABC$, якщо O — центр описаного кола і $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle BOC = 140^\circ$.

998. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 8 см, а один із кутів 120° . Знайди радіус описаного кола.

999. Навколо рівностороннього $\triangle ABC$ описано коло і середину K його дуги BC сполучено відрізками з B і C . Знайди кути чотирикутника $ABKC$.

1000. Знайдіть радіус кола:



- а) вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною a ;
- б) описаного навколо рівностороннього трикутника зі стороною a ;
- в) описаного навколо квадрата зі стороною a .

Розв'яжи задачі 1001–1003, користуючись малюнком 18.11.

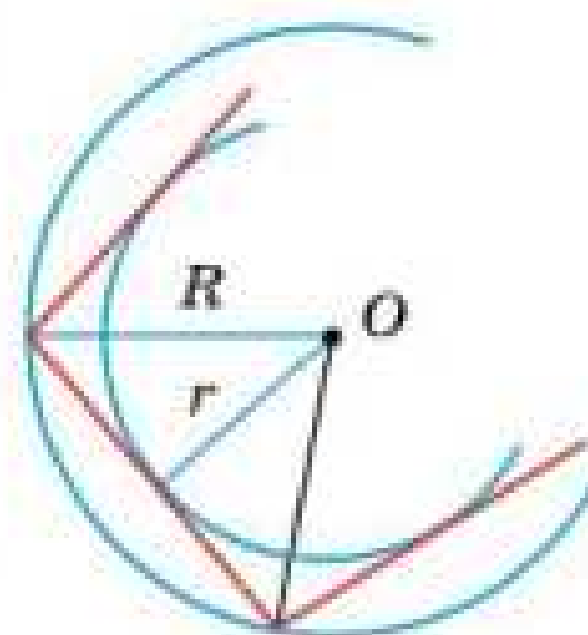
1001. Сторона правильного n -кутника дорівнює a , радіус описаного кола R . Знайди радіус вписаного кола.

1002. Сторона правильного n -кутника дорівнює a , радіус вписаного кола r . Знайди радіус описаного кола.

1003. Знайди довжину сторони правильного n -кутника, якщо радіус описаного кола R , радіус вписаного кола r .

1004. У рівнобічну трапецію з основами 8 см і 18 см вписано коло. Знайди його радіус.

1005. Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки 2 см і 8 см. Знайди сторони трапеції і радіус кола.



Мал. 18.11

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

1006. П'ятикутник $ABCDE$, усі сторони якого рівні, вписано в коло.



- 1) Доведіть, що всі його кути рівні.
- 2) Знайдіть міру одного з його кутів.



- 3) Знайдіть кут між діагоналями, що виходять з однієї вершини.
- 4) Знайдіть кут між двома діагоналями, які перетинаються у внутрішніх точках.
- 5) Доведіть, що в п'ятикутника, обмеженого всіма діагоналями п'ятикутника $ABCDE$, всі кути рівні.

1007. Знайди кути п'ятикутника $ABKCP$, вписаного в коло, якщо $AB = BC = CA$, а точки K і P — середини дуг BC і CA .

1008. В опуклий шестикутник з рівними сторонами і кутами вписано коло і точки дотику через одну послідовно сполучено відрізками. Доведи, що утворений трикутник — рівносторонній.

1009. Навколо рівностороннього $\triangle ABC$ зі стороною a описано коло і середини дуг AB , BC , AC послідовно сполучено з вершинами трикутника. Доведи, що сторони і кути утвореного шестикутника рівні, та знайди їх міри.

1010. Сторона рівностороннього трикутника, описаного навколо кола, дорівнює $c = 2\sqrt{3}$ см. Знайди сторону квадрата, вписаного в це коло.

1011. Сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 10 см, 10 см і 12 см. Знайдіть: а) радіус кола, вписаного в трикутник; б) радіус кола, описаного навколо трикутника.

1012. Знайди радіус кола, описаного навколо трапеції з основами 20 см і 4 см та висотою 12 см (мал. 18.12).

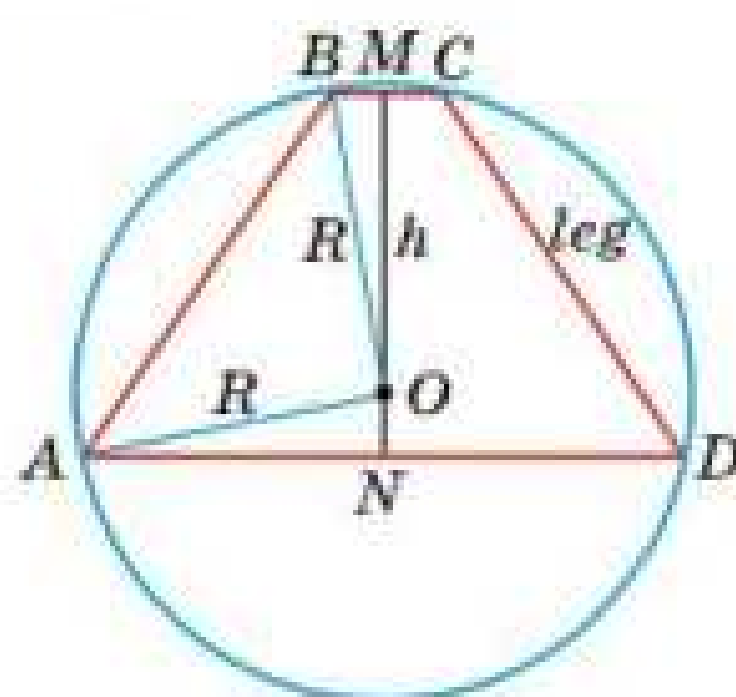
1013. Find the radius of the circle circumscribed around the trapezoid with bases 12 yd and 24 yd and legs $6\sqrt{10}$ yd.

1014. Знайди радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 24 см, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 8 см. Де лежить центр кола?

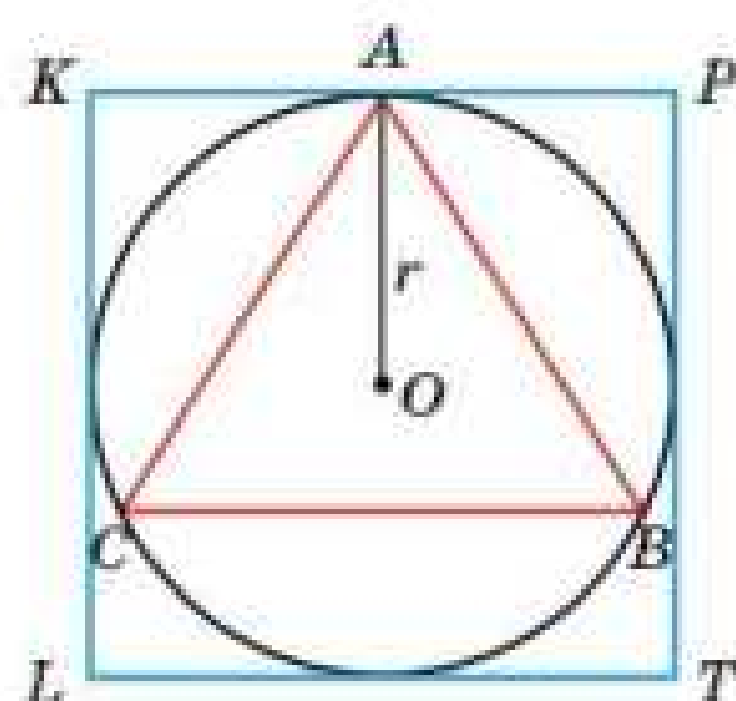
1015. Радіус вписаного у прямокутний трикутник кола позначено через r , а половину периметра трикутника — через p . Визнач гіпотенузу.

1016. В опуклий шестикутник, усі сторони якого дорівнюють a і кути рівні, вписано коло, а в це коло вписано квадрат. Знайди довжину сторони квадрата.

1017. У квадрат вписано коло, а в коло вписано рівносторонній трикутник. Знайди відношення сторін трикутника і квадрата (мал. 18.13).



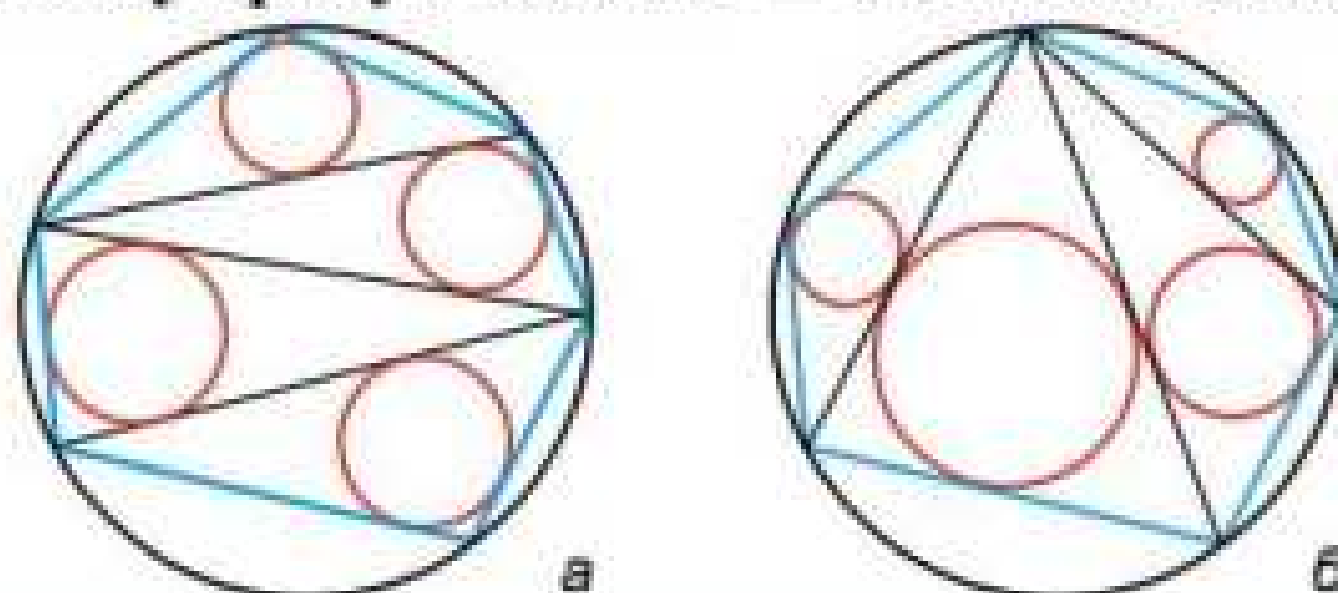
Мал. 18.12



Мал. 18.13

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

- 1018.** Знайди суму діаметрів кіл, вписаних у трикутники (мал. 18.14, а), і суму діаметрів кіл, вписаних у трикутники (мал. 18.14, б). Порівняйте ці суми.
Чи справджується для цих вписаних многокутників Японська теорема: незалежно від того, як розбито на трикутники вписаний в коло многокутник, сума радіусів вписаних у трикутники кіл — величина стала?



Мал. 18.14

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 1019.** Чи подібні два рівнобедрені трикутники, один із яких має кут 100° , а другий — 40° ?
- 1020.** Дві прямі перетинаються в точці O , їх перетинають дві паралельні прямі, розташовані по різні боки від точки O . Доведи, що утворені при цьому два трикутники подібні один одному.
- 1021.** Накресли п'ятикутник, який однією прямою можна розрізати на три трикутники.

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС

Многокутники в конструкції
Ейфелевої вежі

§ 19 ПЛОЩА МНОГОКУТНИКА

Тут і далі многокутник розглядатимемо разом з його внутрішньою областю. Кожному многокутнику можна поставити у відповідність значення його площі (мал. 19.1).

Площа многокутника — це величина, що має такі властивості:

- 1) площа кожного многокутника виражається додатним числом;
- 2) рівні многокутники мають рівні площі;
- 3) площа многокутника, складеного з кількох частин, дорівнює сумі площ усіх цих частин;
- 4) за одиницю площі приймається площа одиничного квадрата.

Одиничний квадрат — це квадрат, сторона якого дорівнює одиниці довжини.

Квадрати із сторонами 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км мають відповідно площі: 1 мм^2 , 1 см^2 , 1 дм^2 , 1 м^2 , 1 км^2 . При цьому:

$$1 \text{ м}^2 = 100 \text{ дм}^2 = 10\,000 \text{ см}^2 = 1\,000\,000 \text{ мм}^2,$$

$$1 \text{ км}^2 = 1\,000\,000 \text{ м}^2, \quad 1 \text{ га} = 100 \text{ ар} = 10\,000 \text{ м}^2.$$

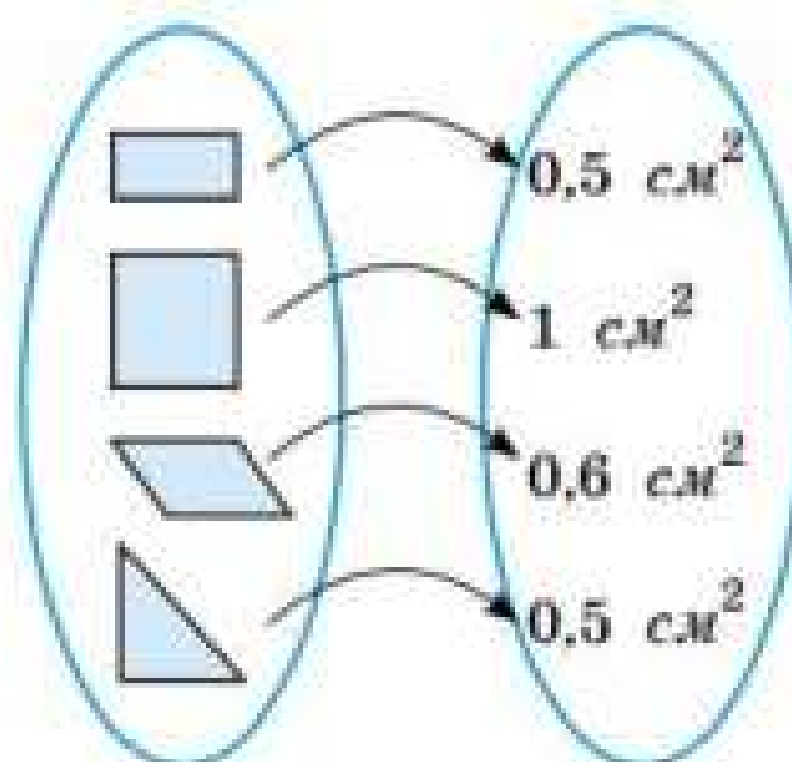
У теорії часто приймають довжину деякого (одиничного) відрізка за одиницю довжини, а площу одиничного квадрата — за одиницю площі. У таких випадках найменувань не пишуть.

Дві фігури з рівними площами називають **рівновеликими**. Дві рівні фігури завжди рівновеликі, але не кожні рівновеликі фігури рівні. Наприклад, квадрат зі стороною 4 см і прямокутник зі сторонами 2 см і 8 см рівновеликі, але не рівні.

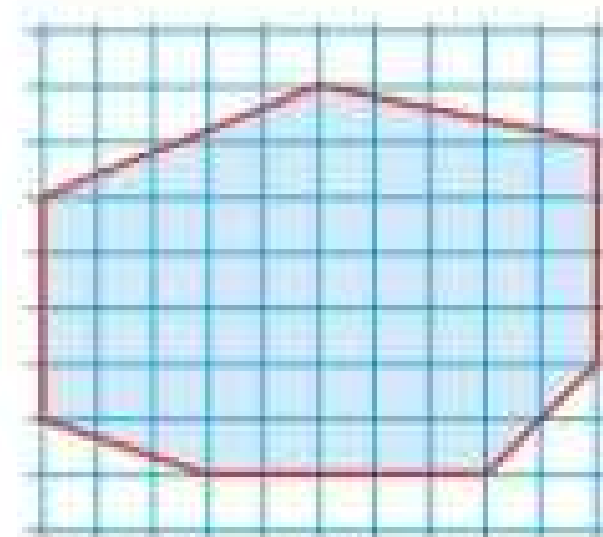
Наближені значення площ многокутників, як і інших плоских фігур, можна визначати за допомогою *палетки*. Так називають прозору плівку з квадратною сіткою. Наклавши палетку на многокутник, безпосереднім підрахунком одиничних квадратів і їх частин визначають наближене значення площі даного многокутника (мал. 19.2). Проте площі паралелограмів, трикутників і трапецій зручніше визначати за формулами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

area of a polygon —
площа многокутника

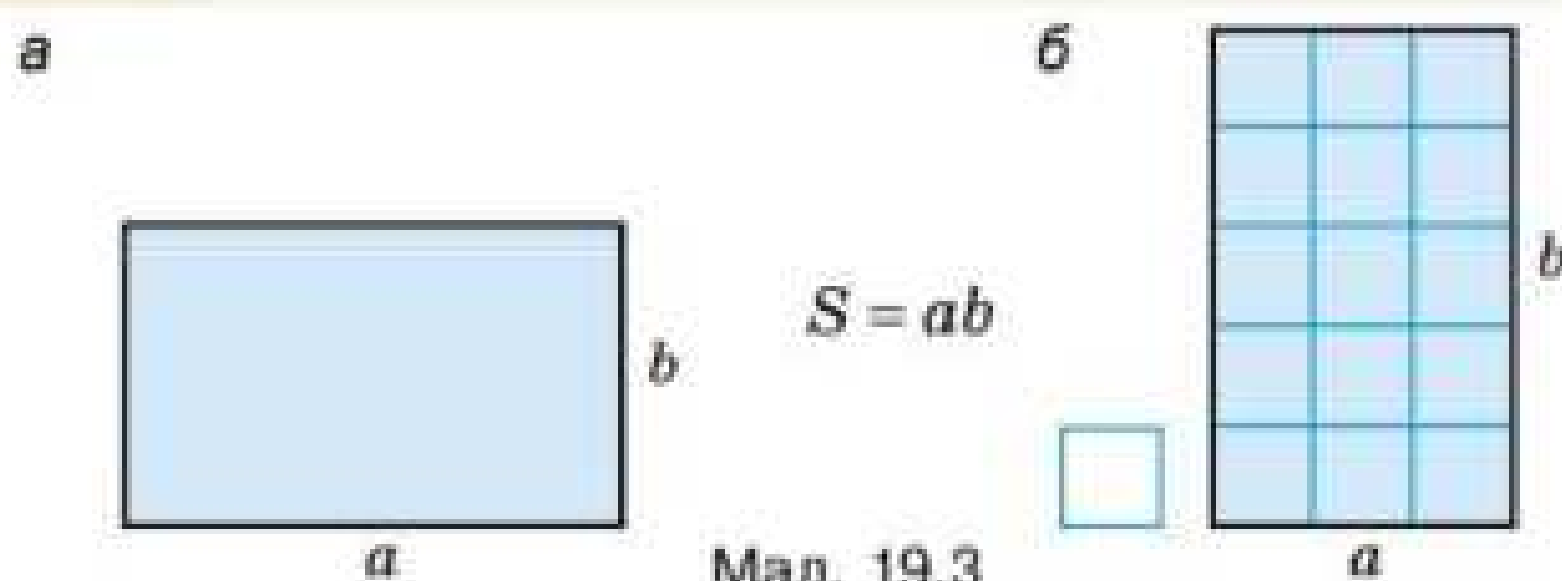


Мал. 19.1



Мал. 19.2

Теорема 33. Площа прямокутника зі сторонами a і b дорівнює ab (мал. 19.3, а).



Мал. 19.3

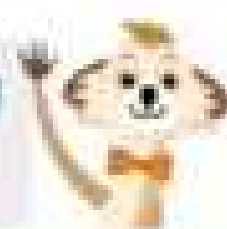
Доведення. Якщо a і b — натуральні числа, то даний прямокутник можна розбити на b смуг, кожна з яких містить a одиничних квадратів (мал. 19.3, б). Весь прямокутник вміщає ab одиничних квадратів. Отже, його площа $S = ab$. Доведення теореми для інших випадків надто громіздке.

Наслідок. Якщо сторона квадрата дорівнює a , то його площа $S = a^2$ (мал. 19.4).



Мал. 19.4

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал (Тема. Площі чотирикутників. Урок 1).



ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Вимірювати площі в квадратних метрах, квадратних дециметрах, арах, гектарах та інших мірах метричної системи люди почали порівняно недавно.

У Київській Русі певних мір площі не існувало. Тому селяни платили податки не від площі оброблюваного ґрунту, а «від сохи», «від рала», «від диму», «від обжі». Обжа — це площа, яку міг зорати селянин одним конем за один день. З XV ст. ввели точнішу одиницю площі — десятину. Це — площа квадрата, сторона якого дорівнює десятій частині версти (десятина $\approx 1,09$ га).

У XVIII ст. українці довжини вимірювали у вершках, аршинах, сажнях, а площі визначали відповідно — у квадратних вершках, квадратних аршинах, квадратних сажнях. Співвідношення між ними важко було запам'ятати:

1 кв. аршин = 256 кв. вершків = 784 кв. дюйми.

В англійських країнах і тепер площі визначають у неметричних мірах; невеликі — у квадратних дюймах, квадратних футах, а площі земельних ділянок — в акрах тощо.



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке площа многокутника?
2. Що таке палетка?
3. Поясни, як визначають площу фігури за допомогою палетки.
4. За якою формулою знаходять площу прямокутника?
5. За якою формулою знаходять площу квадрата?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Знаючи, що 1 дюйм дорівнює 2,5 см, знайди, скільки квадратних дюймів становить 1 дм².

• 1 дм = 4 дюйми, тому 1 дм² = 16 кв. дюймів.

2. Кожну сторону квадрата $ABCD$ поділено на три рівні частини і деякі точки поділу сполучено, як на малюнку 19.5. Знайди відношення $S_{ABCD} : S_{MNPК}$.

• $MNPК$ — прямокутник (доведи це самостійно). Нехай $AB = 3a$, тоді $AM = AK = 2a$, $BM = BN = a$.

За теоремою Піфагора,

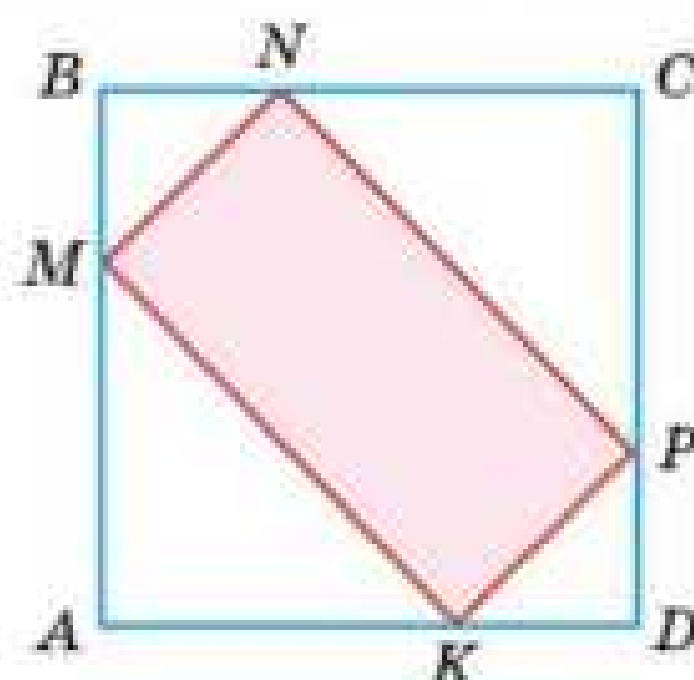
$$MK = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2} \cdot a$$

$$\text{і } MN = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Тоді } S_{MNPК} = a\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot a = 4a^2,$$

$$\text{а } S_{ABCD} = 9a^2.$$

$$\text{Отже, } S_{ABCD} : S_{MNPК} = 9 : 4.$$



Мал. 19.5

ВИКОНАЄМО УСНО

1022. Знайди площу квадрата, сторона якого дорівнює: 2 см; 3 дм; 10 м; 0,5 км; 100 км.

1023. Знайди сторону квадрата, площа якого дорівнює: 9 см²; 1 дм²; 4 мм²; 400 м²; 0,16 км².

1024. Які числа мають стояти в порожніх клітинках таблиці, де a , b — сторони прямокутника, S — його площа?

a , см	5	0,2	3	0,5	
b , см	4	2			1,2
S , см ²			12	2	6

1025. Як зміниться площа квадрата, якщо кожна його сторону збільшити у 3 рази?

А не зміниться

Б збільшиться у 3 рази

В збільшиться у 6 разів

Г збільшиться у 9 разів

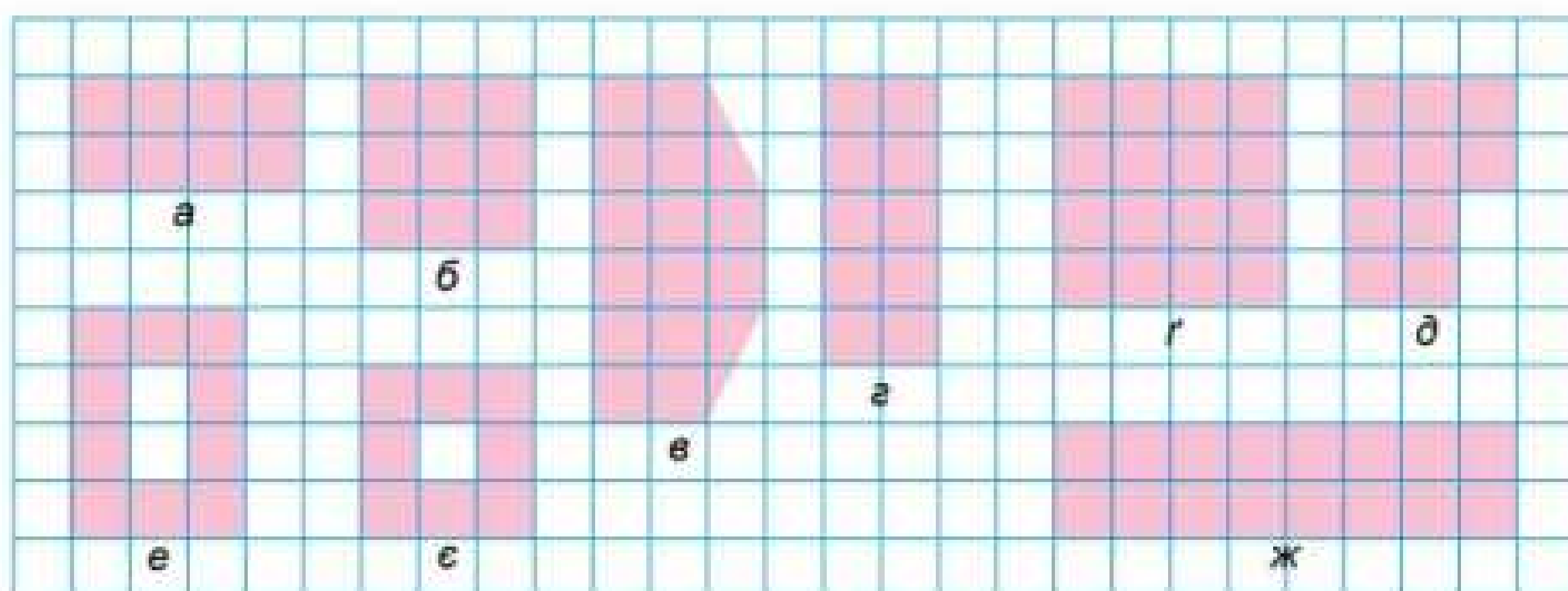
1026. У скільки разів треба зменшити сторони квадрата, щоб його площа зменшилася у 25 разів?

А у 2 рази Б у 5 разів В у 10 разів Г у 25 разів

1027. Два прямокутники мають однакові площі. Чи рівні в них сторони?



1028. Знайди площі зображених фігур (мал. 19.6). Чи є серед них рівновеликі? (Площа 1 клітинки — 1 кв. од.)



Мал. 19.6

1029. Сторони двох квадратів відносяться як 2 : 5. Як відносяться їх площі?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

1030. Гра. Один із учнів / одна з учениць задає довжину сторони квадрата, а другий / друга знаходить його площу. Потім учні / учениці міняються ролями.

1031. Знайди площу квадрата, якщо його сторона дорівнює:

- а) 1,1 см; б) $\frac{3}{4}$ дм; в) $8\sqrt{2}$ м.

1032. Обчисли сторону квадрата, якщо його площа дорівнює:

- а) 36 см^2 ; б) $2,25 \text{ дм}^2$; в) 12 м^2 ; г) Q .

1033. Площа квадрата дорівнює 124 см^2 . Вирази площу цього квадрата: а) у квадратних міліметрах; б) у квадратних дециметрах; в) у квадратних метрах.

1034. Сторони двох квадратів дорівнюють відповідно 15 м і 17 м. Знайди сторону квадрата, площа якого дорівнює різниці площ даних квадратів.

1035. Знайди сторону квадрата, що має таку саму площу, як і прямокутник зі сторонами 7 см і 28 см.

1036. Дано прямокутник зі сторонами 3 м і 4 м. Знайди площу квадрата, сторона якого дорівнює діагоналі цього прямокутника.





- 1037.** Одещина — це значний пласт історичного, культурного, економічного і духовного життя України; сонячний край степів, теплого моря, виноградників та смачних фруктів. У 2014 році випущено поштовий блок «Краса і велич України», присвячений Одеській області (мал. 19.7). Цей блок складається з 4 різних марок. Розміри блоку — 128×100 мм, а марок — $52,2 \times 24,36$ мм; $40,02 \times 29,58$ мм; $57,42 \times 45,24$ мм. Знайди площу кожної марки. Дізнайся, що зображено на цих марках.



Мал. 19.7

- 1038.** За даними попередньої задачі встанови, що більше: загальна площа чотирьох марок чи площа блоку, вільна від марок?

- 1039.** Сторони прямокутника дорівнюють 2 м і 8 м, а одна зі сторін іншого прямокутника 5 м. Чому дорівнює друга його сторона, якщо площі цих прямокутників рівні?

- 1040.** У коло радіуса 5 м вписано прямокутник зі стороною 6 м. Знайди площу прямокутника.

- 1041.** **ЗНО** Менша сторона прямокутника дорівнює 4 см, а кут між його діагоналями — 60° . Визнач площу (у см^2) прямокутника.

А $8\sqrt{3}$ Б 16 В $16\sqrt{3}$ Г 32 Д $32\sqrt{3}$

- 1042.** Відстані від взятої всередині прямокутника точки до протилежних його сторін дорівнюють 2 см і 6 см. Периметр прямокутника 24 см. Знайди його площу.

- 1043.** Знайди довжини сторін однієї з граней світильника (мал. 19.8), якщо вони відносяться як 2 : 3, а площа прямокутника дорівнює 54 см^2 .

- 1044.** Знайди сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 30 м, а площа 56 м^2 .

- 1045.** Знайди площу прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 25 см, а одна зі сторін на сантиметр коротша.

- 1046.** Обчисли площу прямокутника, сторони якого пропорційні числам 4 і 3, а радіус описаного кола дорівнює 25 см.



Мал. 19.8

1047. Відстань від точки перетину діагоналей прямокутника до однієї зі сторін на 3 см більша за відстань до другої. Знайди площу прямокутника, якщо його периметр 52 см.

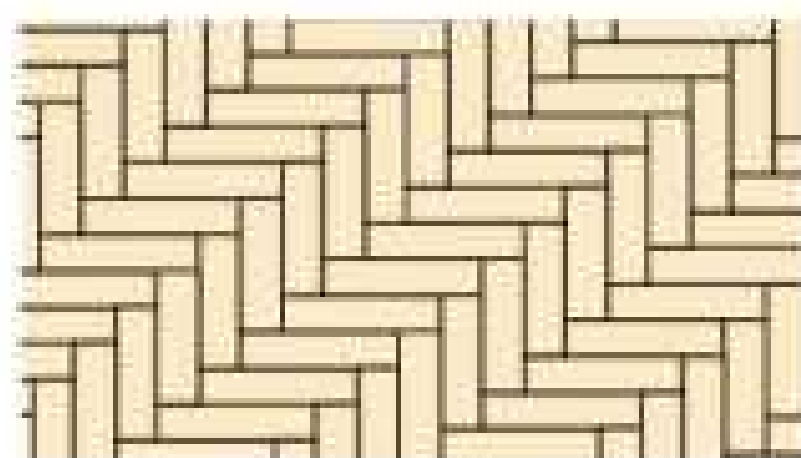
1048. На чотири рушники майстриня витратила $2,45 \text{ м}^2$ полотна. Скільки метрів мережива вона використала для їх оздоблення, як на мал. 19.9, якщо довжина рушника у 5 разів більша за ширину?



Мал. 19.9

1049. Дві ділянки землі огорожено парканами однакової довжини. Перша ділянка має форму прямокутника зі сторонами 220 м і 160 м, а друга має форму квадрата. Площа якої ділянки більша й на скільки?

1050. Підлогу кімнати, яка має форму прямокутника зі сторонами 5,7 м і 6 м, треба покрити паркетом прямокутної форми. Довжина кожної плитки паркету дорівнює 30 см, а ширина — 5 см. Скільки таких плиток потрібно для покриття всієї підлоги у спосіб, зображений на малюнку 19.10?

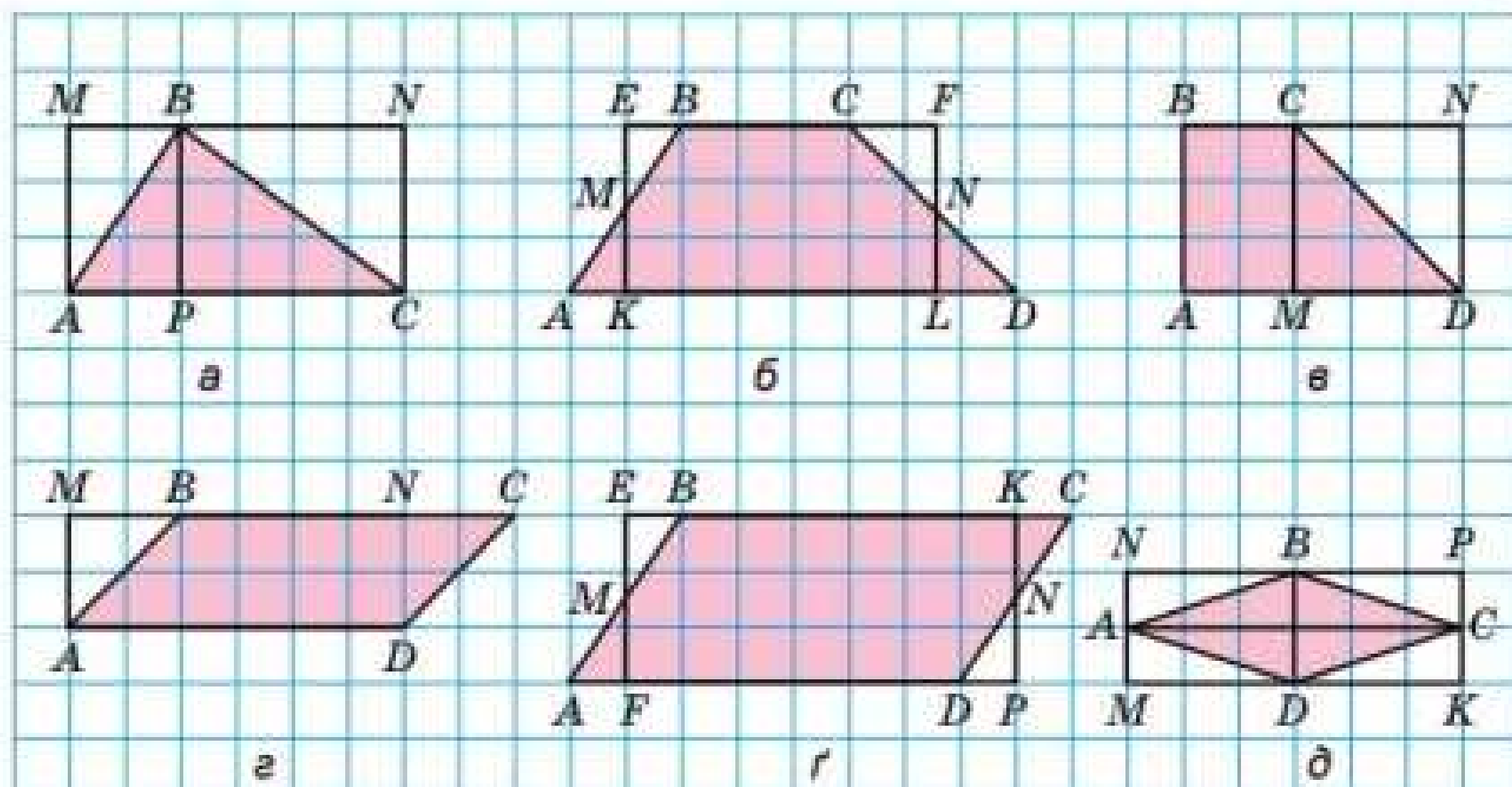


Мал. 19.10

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

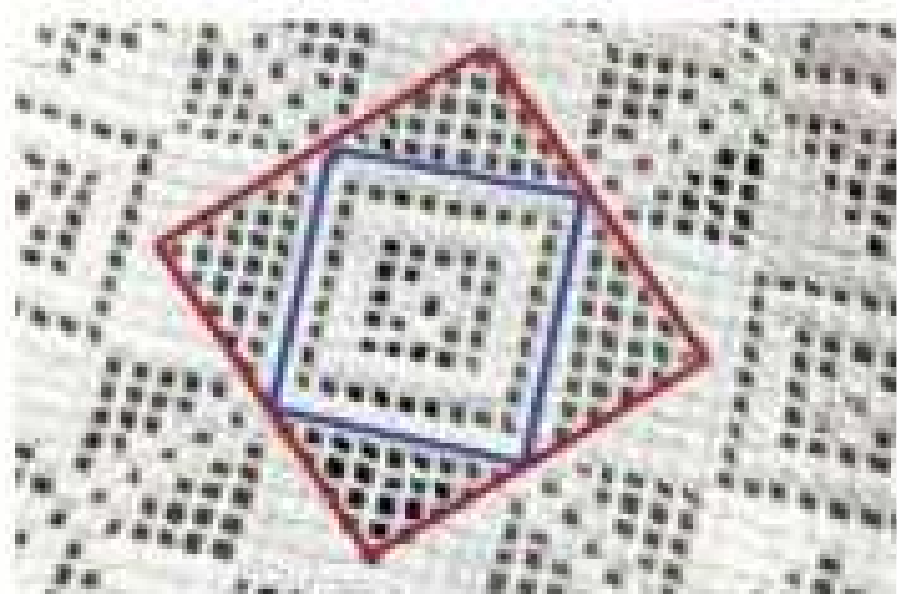
1051. Використовуючи властивості площ, знайдіть площі зафарбованих фігур (мал. 19.11). (Прийміть сторону клітинки за одиницю довжини.)



Мал. 19.11

1052. Знайди відношення площ квадратів, один із яких вписаний у коло, а другий описаний навколо того самого кола.

1053. Середини сторін одного квадрата є вершинами другого (мал. 19.12). Як відносяться площі цих квадратів?



Мал. 19.12



Мал. 19.13

1054. Кожну квадратну секцію прозорого паркану (мал. 19.13) хочуть перекрити відповідною квадратною дерев'яною дошкою. Користуючись малюнком, знайди площу кожної квадратної дошки.

1055. Знайди площу квадрата, якщо його діагональ a .

1056. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ ділить сторону BC навпіл. Знайди площу прямокутника, якщо $AB = 8$ см.

1057. The bisector of angle A of rectangle $ABCD$ divides the side BC into segments $BM = 2$ cm and $MC = 6$ cm. Find the area of the rectangle.

1058. Знайди площу прямокутника $ABCD$, якщо перпендикуляр, опущений з вершини B на діагональ AC , ділить її на відрізки 2 см і 8 см.

1059. Знайди площу прямокутника $ABCD$, якщо перпендикуляр, опущений з вершини B на діагональ AC , дорівнює 6 см і утворює зі стороною BC кут 60° .

1060. Радіуси двох концентричних кіл дорівнюють r і $2r$. Знайдіть площу вписаного в більше коло прямокутника, дві сторони якого дотикаються до меншого кола.

1061. Діагоналі ромба дорівнюють a і c . Знайди площу чотирикутника, вершини якого — середини сторін ромба.

1062. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, середня лінія дорівнює m . Знайди площу чотирикутника, вершинами якого є середини сторін трапеції.

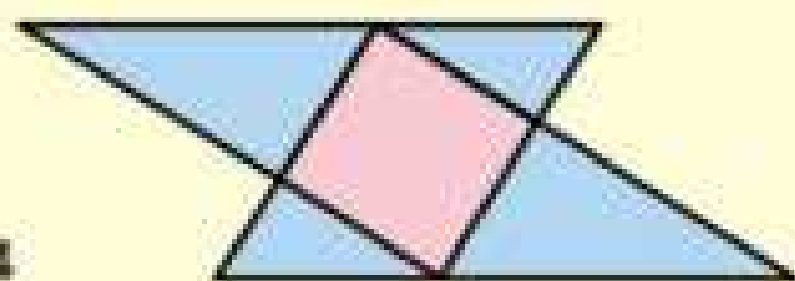
1063. Як зміниться площа прямокутника, якщо:

- одну пару протилежних сторін збільшити в два рази;
- кожну сторону збільшити в два рази;
- одну пару протилежних сторін збільшити у два рази, а другу зменшити в два рази?

1064. Діагональ одного квадрата у два рази більша за діагональ другого квадрата. У скільки разів площа першого квадрата більша за площу другого?

1065. Площа квадрата, побудованого на діагоналі прямокутника, удвічі більша за площу цього прямокутника. Доведи, що сторони прямокутника рівні.

1066. Прямокутний трикутник з катетами a і b наклали на рівний йому трикутник так, що їх спільною частиною виявився найбільший квадрат. Знайди площу цього квадрата (мал. 19.14).



Мал. 19.14



Мал. 19.15

1067. Перемалюй в зошит фігуру (мал. 19.15) і проведи пряму так, щоб розбити її на дві частини рівних площ.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

1068. Визнач, скільки рулонів шпалер потрібно придбати, щоб обклеїти ними твою кімнату. Довжина рулону 10 м, ширина: а) 0,5 м; б) 1 м.

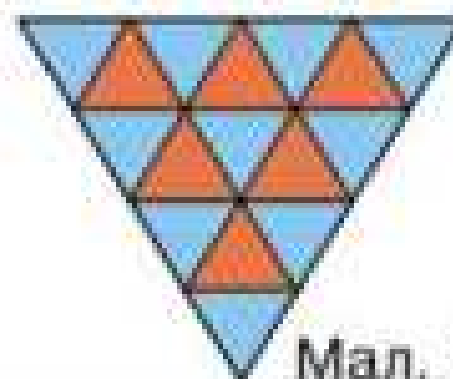


ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1069. Знайди периметр трикутника, середні лінії якого дорівнюють 7 м, 8 м і 9 м.

1070. Знайди кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 6, 7, 9 і 8. Чи можна такий чотирикутник вписати в коло?

1071. Скільки трикутників зображено на малюнку 19.16? Скільки серед них таких, що містять синіх трикутників удвічі більше, ніж червоних?



Мал. 19.16

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



Палац Шенборнів біля міста Мукачево



§ 20 ПЛОЩІ ПАРАЛЕЛОГРАМА, РОМБА І ТРАПЕЦІЇ

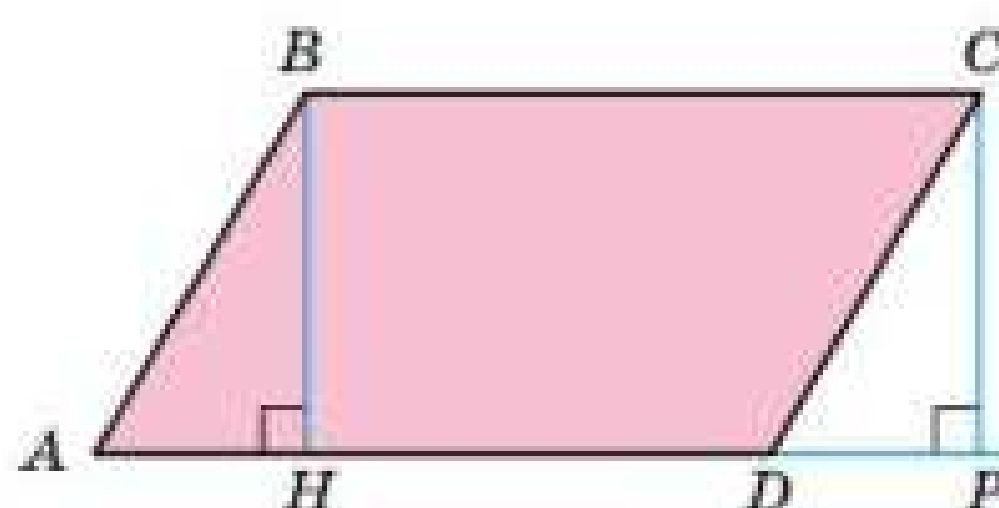
КЛЮЧОВІ СЛОВА

- area of a parallelogram — площа паралелограма
- area of a rhombus — площа ромба
- area of a trapezoid — площа трапеції

1. Площа паралелограма

Домовимось одну зі сторін паралелограма (і її довжину) називати основою, а відстань від основи до прямої, якій належить протилежна сторона, — висотою паралелограма. Наприклад, якщо AD — основа паралелограма $ABCD$, то довжина перпендикуляра BH — його висота (мал. 20.1).

Теорема 34. Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.



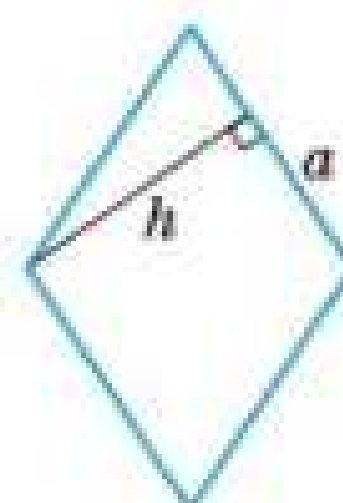
Мал. 20.1

Доведення. Нехай $ABCD$ — довільний паралелограм зі стороною $AD = a$ і висотою $BH = h$. Доведемо, що його площа $S = ah$ (див. мал. 20.1).

Якщо BH і CP — перпендикуляри до прямої AD , то трикутники ABH і DCP рівні (за катетом і гіпотенузою). Отже, якщо від площі трапеції $ABCP$ відняти площу трикутника DCP чи від площі трапеції $ABCP$ відняти площу $\triangle ABH$, результати будуть однакові. Перша різниця дорівнює площі S даного паралелограма, друга — площі прямокутника $HBCP$. Отже, площа даного паралелограма дорівнює площі прямокутника $HBCP$, а площа прямокутника $HBCP$ — добутку ah . Тому $S = ah$.

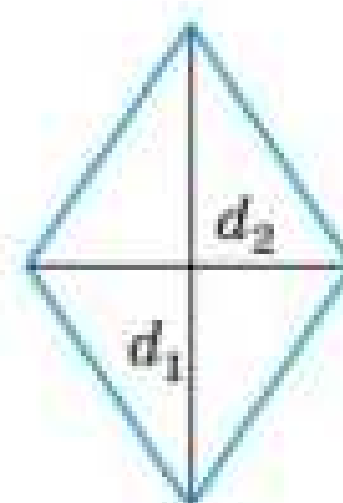
Оскільки ромб — це також паралелограм, то і площа ромба дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони (мал. 20.2).

Також у рубриці «Для допитливих» доведено, що площа ромба дорівнює півдобутку діагоналей (мал. 20.3).



$$S = ah$$

Мал. 20.2



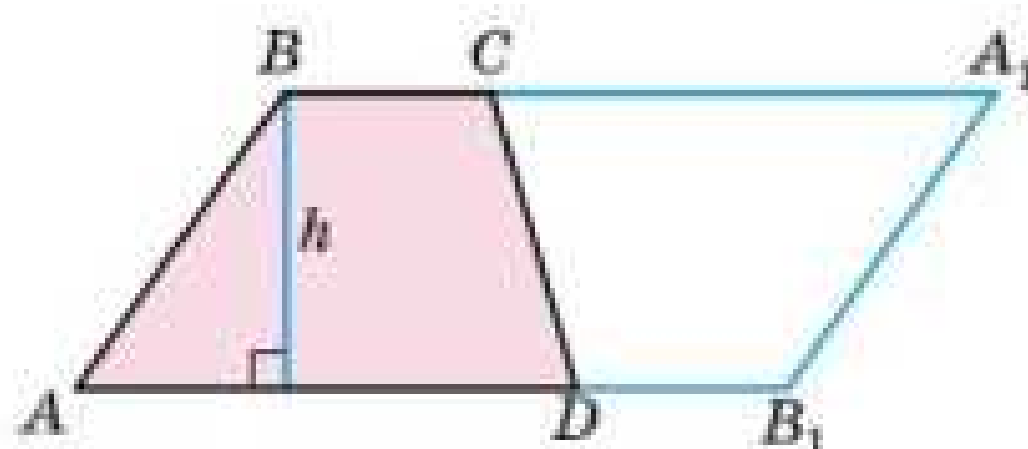
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

Мал. 20.3

2. Площа трапеції

Теорема 35. Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.

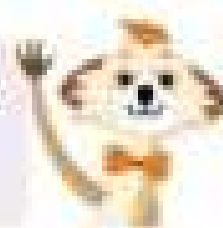
Доведення. Нехай $ABCD$ — довільна трапеція з основами $AD = a$, $BC = b$ (мал. 20.4). І нехай h — висота цієї трапеції. Добудуємо трапецію A_1B_1DC , рівну даній (у якій $CA_1 = AD$ і $DB_1 = BC$). Чотирикутник ABA_1B_1 — паралелограм, бо $A_1B = AB_1$ і $A_1B \parallel AB_1$. Сторона цього паралелограма $AB_1 = a + b$, а висота h , тому його площа дорівнює $(a + b)h$. Площа трапеції $ABCD$ становить половину площі паралелограма ABA_1B_1 . Тому її площа $S = \frac{1}{2}(a + b)h$.



Мал. 20.4

Наслідок. Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал (Тема. Площі чотирикутників. Урок 2).



ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Теорема 36. Площа опуклого чотирикутника з перпендикулярними діагоналями дорівнює півдобутку діагоналей.

Доведення. Нехай дано опуклий чотирикутник $ABCD$, діагоналі якого AC і BD перпендикулярні (мал. 20.5). Провівши через кожну вершину пряму, паралельну протилежній діагоналі чотирикутника, можна навколо даного чотирикутника описати прямокутник, сторони якого дорівнюють діагоналям даного чотирикутника.

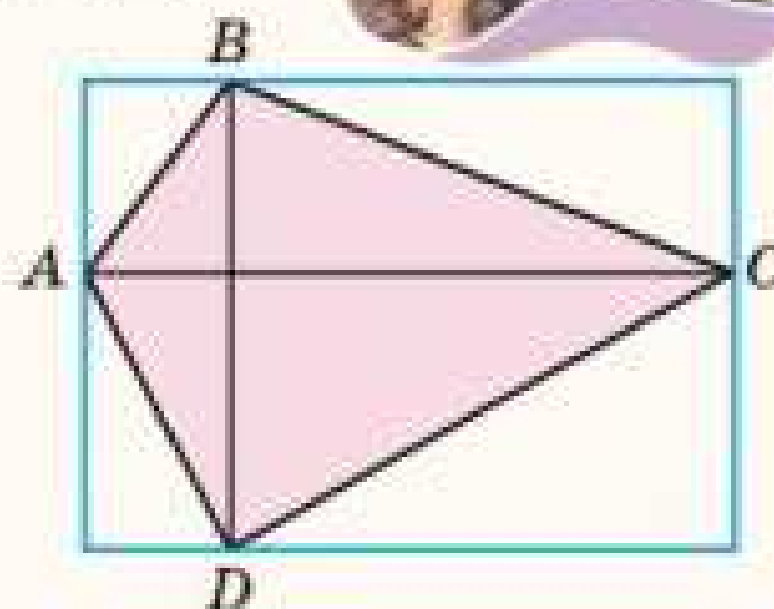
При цьому прямокутник містить удвічі більше прямокутних трикутників, на які чотирикутник $ABCD$ розбивається діагоналями. Отже, площа даного чотирикутника удвічі менша за площу описаного прямокутника. Оскільки площа описаного прямокутника дорівнює добутку діагоналей AC і BD , то площа чотирикутника $ABCD$ дорівнює півдобутку його діагоналей.

Наслідки.

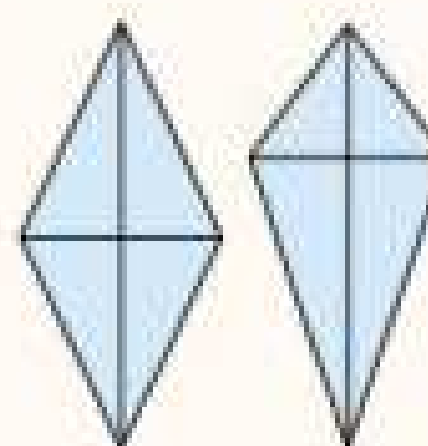
Площа ромба дорівнює півдобутку діагоналей.

Площа квадрата дорівнює півдобутку діагоналей.

Площа дельтоїда дорівнює півдобутку діагоналей (мал. 20.6).



Мал. 20.5



Мал. 20.6

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй теорему про площу: а) паралелограма; б) трапеції.
2. За якими формулами знаходять площу ромба?
3. За якою формулою знаходять площу трапеції, якщо відомі її середня лінія і висота?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Вершини A , D , A_1 і D_1 паралелограмів $ABCD$ і A_1BCD_1 лежать на одній прямій. Доведи, що площі цих паралелограмів рівні (мал. 20.7).

• Площі даних паралелограмів $S = AD \cdot h$ і $S_1 = A_1D_1 \cdot h$. Їх висоти рівні й основи рівні, бо $AD = BC = A_1D_1$. Тому $S = S_1$.

2. Знайди площу паралелограма, якщо його діагональ завдовжки 5 см утворює зі сторонами кути 45° і 90° (мал. 20.8).

• Нехай $BD = 5$ см — діагональ паралелограма $ABCD$, $\angle ABD = 45^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ$ (за умовою). Тоді $\angle BAD = 45^\circ$, трикутник ABD — рівнобедрений, а тому $AD = BD = 5$ см.

У паралелограмі $ABCD$ BD — висота, AD — основа. Отже,

$$S_{ABCD} = BD \cdot AD = 5 \cdot 5 = 25 \text{ (см}^2\text{)}.$$

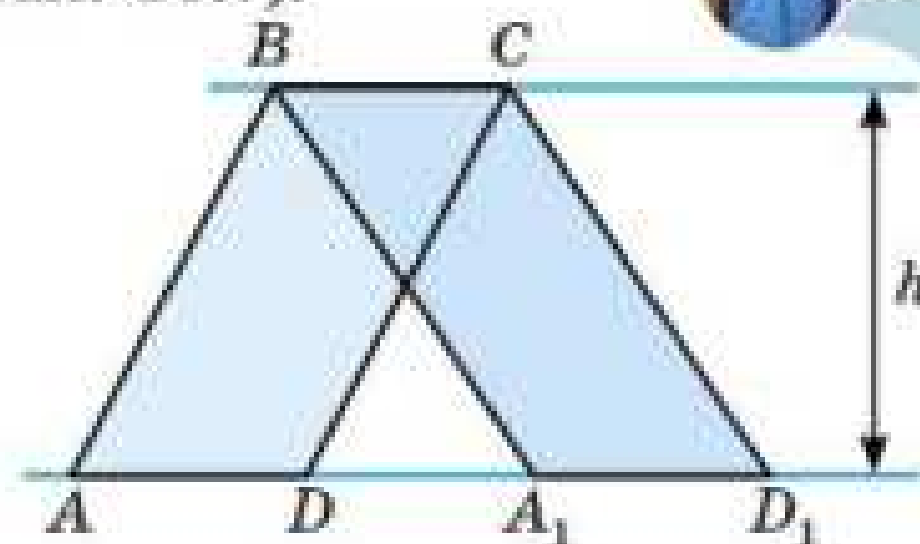
3. У рівнобічній трапеції $ABCD$ висота BP ділить більшу основу на відрізки 5 см і 16 см. Знайди площу трапеції, якщо $BP = 12$ см (мал. 20.9).

• Проведемо $CH \perp AD$, тоді: $AP = HD$ (як катети рівних трикутників ABP і DCH); $PH = BC$ (як протилежні сторони прямокутника $PBCH$). Отже,

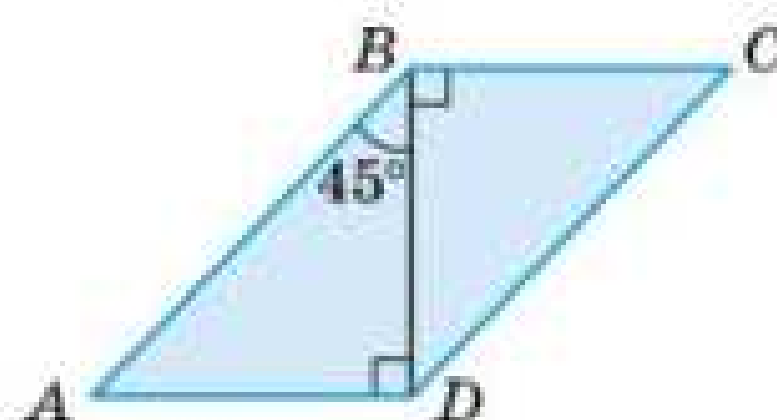
$$BC = 16 - 5 = 11 \text{ см, а } AD = 16 + 5 = 21 \text{ см.}$$

Тоді:

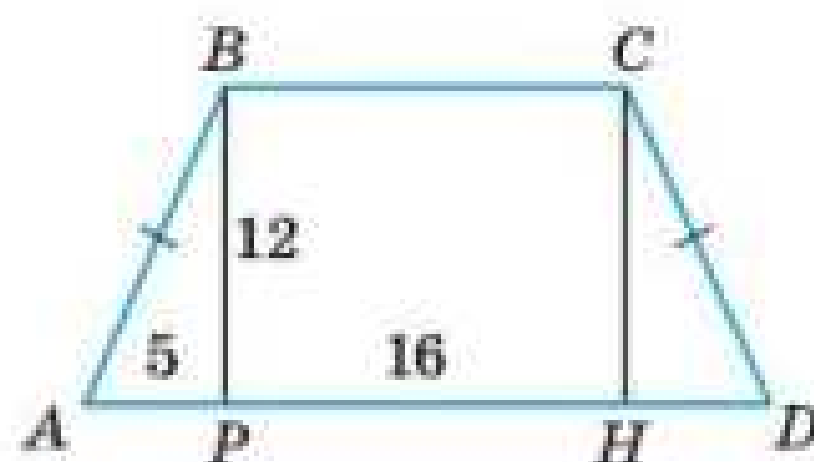
$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BP, S_{ABCD} = \frac{11 + 21}{2} \cdot 12 = 16 \cdot 12 = 192 \text{ (см}^2\text{)}.$$



Мал. 20.7



Мал. 20.8



Мал. 20.9

ВИКОНАЄМО УСНО



1072. Знайди площу паралелограма, основа якого дорівнює 5 см, а висота 6 см.

А 11 см Б 22 см В 30 см^2 Г 15 см^2

1073. Площа паралелограма 20 см^2 , висота 5 см. Знайди його основу.

А 15 см Б 4 см В 5 см Г 100 см

1074. Чи існує паралелограм, сторони якого дорівнюють 9 і 7, а висоти 7 і 8?

1075. Які числа мають стояти в порожніх клітинках таблиці, де a і b — основи трапеції, h , S — відповідно її висота і площа.

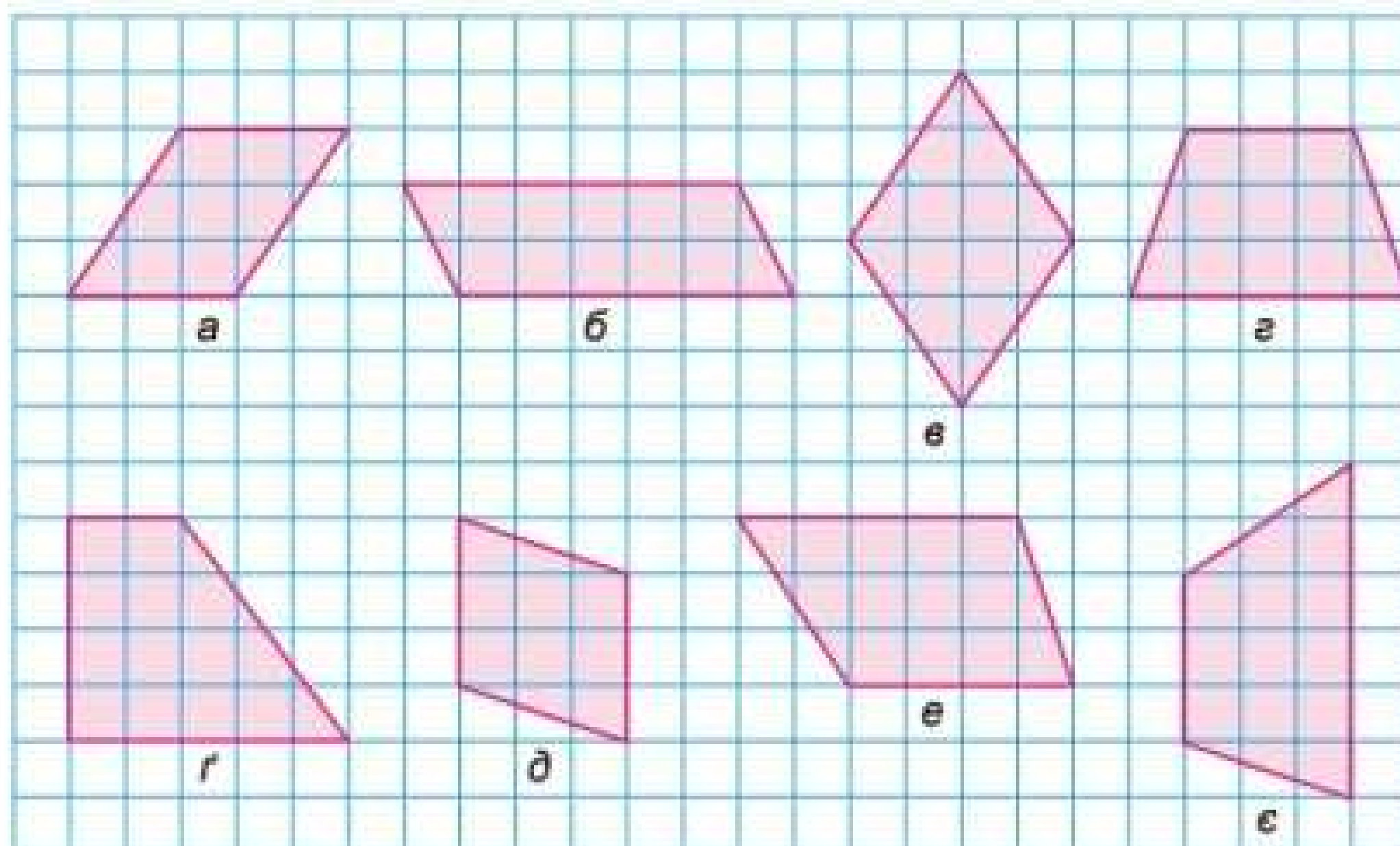
a	1	2	1		2
b	3	3	4	7	
h	2	4		2	3
S			5	10	12

1076. Знайди площу ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 8 см і 9 см.

А 17 см^2 Б $8,5 \text{ см}^2$ В 72 см^2 Г 36 см^2

1077. Знайди площу чотирикутника, діагоналі якого перпендикулярні і мають довжини 12 см і 15 см.

1078. Знайди площі зображених фігур (мал. 20.10). Чи є серед них рівновеликі? (Прийми сторону клітинки за одиничний відрізок.)



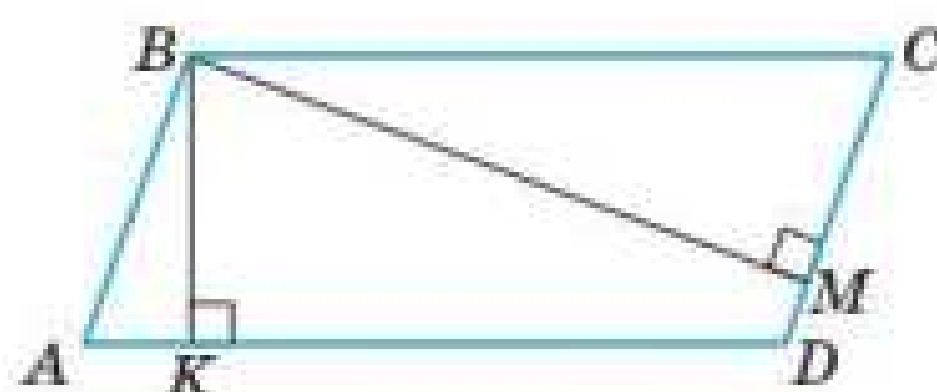
Мал. 20.10

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А



1079. Сторона паралелограма дорівнює 12 см, а висота, яка до неї проведена, — 8 см. Знайди площу паралелограма.
1080.  Гра. Один із учасників / одна із учасниць задає довжину сторони паралелограма, другий/друга — висоту, проведenu до цієї сторони, а третій/третя знаходить площу цього паралелограма. Потім учні/учениці міняються ролями.
1081. Площа паралелограма дорівнює 36 см^2 , а одна зі сторін 9 см. Знайди висоту, проведenu до цієї сторони.
1082. Площа паралелограма дорівнює 24 см^2 , а одна з висот — 4 см. Знайди сторону паралелограма, до якої проведено цю висоту.
1083. Знайди сторони паралелограма, якщо його площа 72 см^2 , а висоти дорівнюють 6 см і 9 см.
1084. Висоти паралелограма 3 м і 4 м, а більша сторона 6 м. Знайди другу сторону паралелограма.
1085. Суміжні сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 14 см, його гострий кут дорівнює 30° . Знайди площу паралелограма.
1086. Сторони паралелограма дорівнюють 4 см і 5 см, а кут між ними 120° . Знайди його площу.
1087. Гострий кут паралелограма дорівнює 30° , а висоти, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 2 см і 3 см. Обчисли площу паралелограма.
1088. Знайди площу паралелограма, якщо його діагональ дорівнює 14 см і перпендикулярна до сторони, довжина якої 25 см.
1089. Сторони паралелограма дорівнюють 17 м і 15 м. Одна з діагоналей перпендикулярна до меншої сторони. Яка площа цього паралелограма?
1090. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки $BL = 12 \text{ см}$ і $LC = 20 \text{ см}$. Знайди площу паралелограма, якщо $\angle A = 30^\circ$.
1091. The bisector of angle B of parallelogram $ABCD$ divides the side AD into segments $AM = 18 \text{ ft}$ and $MD = 6 \text{ ft}$. Find the area of the parallelogram, if $\angle B = 150^\circ$.
1092. **ЗНО** У паралелограмі $ABCD$ з вершини тупого кута B проведено висоти BK та BM (мал. 20.11). $BK = 16 \text{ см}$, $AK = 12 \text{ см}$, $BM = 24 \text{ см}$.
1. Визнач довжину сторони AB (у см).
2. Обчисли площу (у см^2) паралелограма $ABCD$.



Мал. 20.11

1093. Дано шарнірний паралелограм зі сторонами 4 дм і 5 дм (мал. 20.12). У яких межах може змінюватися площа паралелограма?

1094. Знайди площу ромба, якщо його сторона дорівнює 9 см, а висота — 5 см.

1095. Знайди площу ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 10 см і 15 см.

1096. Знайди площу ромба, якщо його висота 10 см, а гострий кут 30° .

1097. Випуклий геометричний узор на дверях хочуть перекрасити (мал. 20.13). Яка площа узору з двох ромбів, якщо сторона ромба дорівнює 6 дм, а один із кутів ромба дорівнює 150° ?

1098. Знайди площу ромба за його стороною a і кутом 30° .

1099. Знайди площу ромба за його висотою 20 см і кутом 45° .

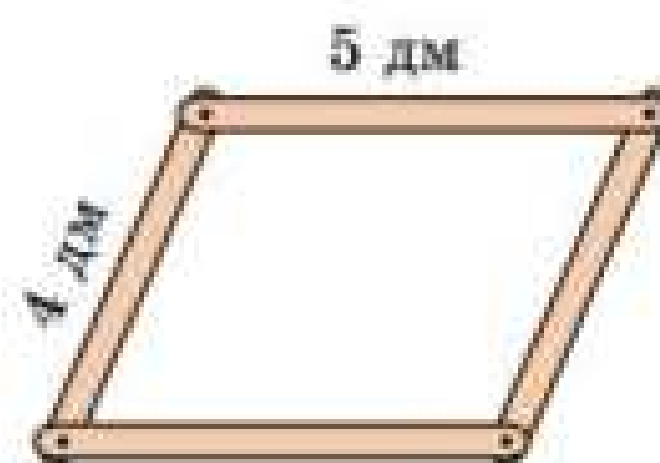
1100. Знайди площу ромба $ABCD$, якщо його висота $BH = 45$ см, а H — середина сторони AD .

1101. Основа перпендикуляра, проведеного з вершини тупого кута ромба, ділить сторону на відрізки 9 см і 6 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайди площу ромба.

1102. Знайди площу ромба, якщо його сторона дорівнює 13 см, а одна з діагоналей — 10 см.

1103. Площа ромба дорівнює 240 см^2 , а одна з діагоналей 16 см. Знайди другу діагональ ромба та його периметр.

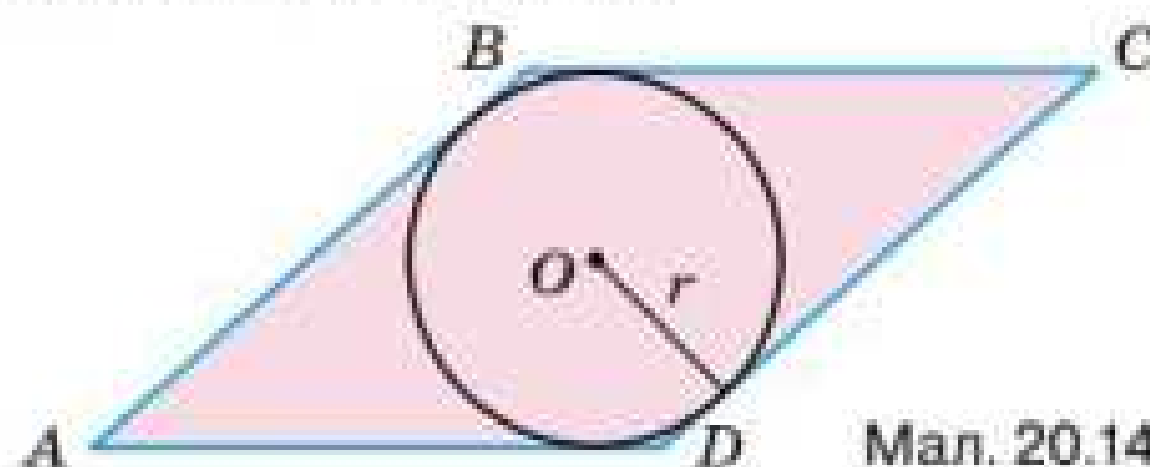
1104. Сторона ромба дорівнює 37,5 см, а радіус вписаного кола 12,2 см. Знайди площу ромба (мал. 20.14).



Мал. 20.12



Мал. 20.13



Мал. 20.14

1105. Ромб із периметром 48 см і кутом 30° рівновеликий квадрату. Знайди діагональ цього квадрата.

1106. Основи трапеції дорівнюють 15 см і 19 см, а висота 12 см. Знайди її площу.

1107. Середня лінія трапеції дорівнює 23 дм, а площа $0,23 \text{ м}^2$. Знайди висоту трапеції.

1108. У трапеції $ABCD$ основа BC дорівнює 6 см, а бічна сторона $AB = 5$ см. Висота BK ділить основу AD на відрізки $AK = 3$ см і $KD = 7$ см. Знайди площу трапеції.

- 1109.** Протягом 1910–1916 рр. за проектами Опанаса Сластіона збудували близько сотні земських (початкових) шкіл у стилі національного модерну. Школи Сластіона мали шестикутні вікна, а також цегляний орнамент, який нагадував традиційну українську вишивку.

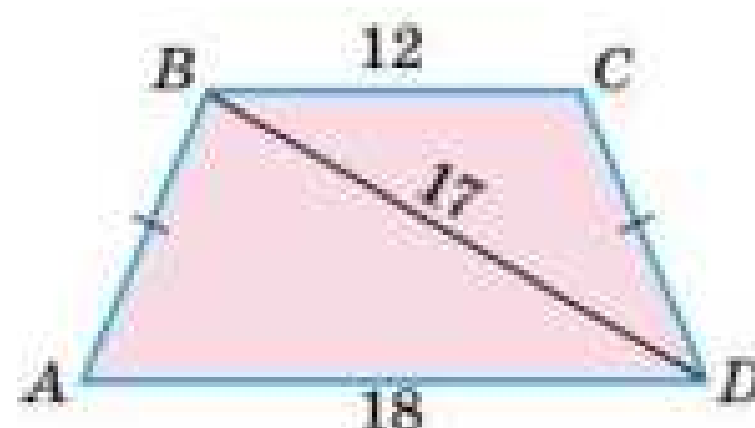


Мал. 20.15

Знайди площу такого одного вікна, як на малюнку 20.15, якщо основи рівнобічної трапеції вгорі вікна дорівнюють 5 дм і 11 дм, її периметр становить 28 дм, а менша сторона одного з шести прямокутників — 5 дм.

- 1110.** Тупий кут рівнобічної трапеції дорівнює 135° , а висота, проведена з вершини цього кута, ділить більшу основу на відрізки 1,4 см і 3,4 см. Обчисли площу трапеції.

- 1111.** Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а діагональ 17 см. Знайди площу трапеції (мал. 20.16).



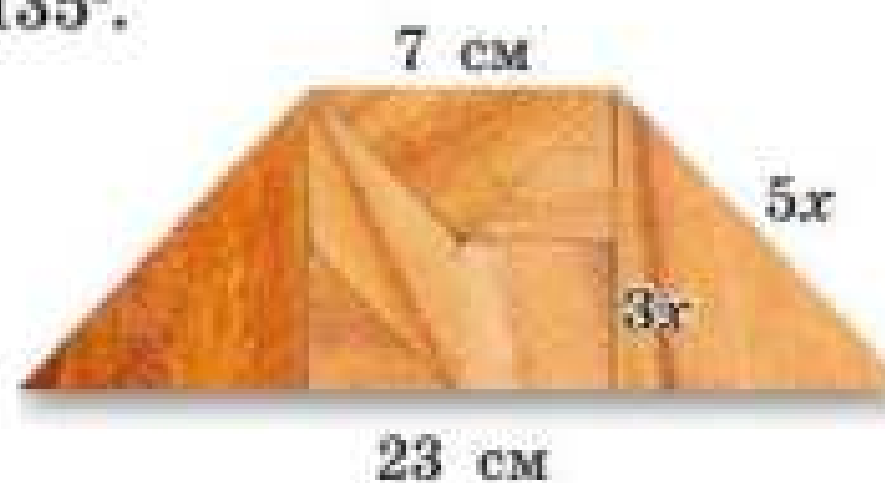
Мал. 20.16

- 1112.** Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 70 см, а радіус вписаного кола 25 см. Знайди площу трапеції.

- 1113.** Обчисліть площу рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює бічній стороні і має 2 см, а кут при більшій основі становить:
а) 60° ; б) 30° ; в) 45° .

- 1114.** Обчисли площу прямокутної трапеції, у якої дві менші сторони дорівнюють по 6 см, а більший кут 135° .

- 1115.** Головоломка має форму трапеції і складається з декількох фігур (мал. 20.17). Бічна сторона і висота рівнобічної трапеції пропорційні числам 5 і 3. Знайди площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 7 см і 23 см.



Мал. 20.17

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б



1116. Діагональ паралелограма дорівнює його стороні. Обчисли площу паралелограма, якщо більша його сторона дорівнює 16 см, а один із його кутів — 45° .
1117. Відстань між більшими сторонами паралелограма дорівнює 18 см, а його площа 450 см^2 . Знайди відстань між меншими сторонами, якщо різниця сторін дорівнює 5 см.
1118. Висоти паралелограма дорівнюють 5 см і 4 см, а периметр дорівнює 36 см. Обчисли площу паралелограма.
1119. Висоти паралелограма дорівнюють 6 см і 7 см, а різниця двох його сторін дорівнює 2 см. Обчисли площу паралелограма.
1120. Знайди периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює 24 см^2 , а точка перетину діагоналей віддалена від сторін на 2 см і 3 см.
1121.  Менша сторона паралелограма дорівнює 13 см. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей до більшої сторони, ділить її на відрізки, які дорівнюють 17 см і 12 см. Знайдіть площу паралелограма. Складіть план розв'язування задачі та розв'яжіть її.
1122. Сторона паралелограма дорівнює 8 м, а діагональ завдовжки 14 м утворює з нею кут 30° . Обчисли площу паралелограма.
1123. Сторона паралелограма дорівнює 12 см, а діагональ завдовжки $8\sqrt{2}$ см утворює з нею кут 45° . Обчисли площу паралелограма.
1124. Поділи паралелограм на чотири рівновеликі частини прямими, які проходять через одну з його вершин.
1125. Знайди сторону ромба, якщо його площа дорівнює 392 см^2 , а один із кутів 30° .
1126. Знайди сторону ромба, якщо його площа дорівнює $81\sqrt{2} \text{ см}^2$, а один із кутів 45° .
1127. Знайди периметр ромба, якщо його площа дорівнює 600 см^2 , а діагоналі відносяться як 3 : 4. Склади план розв'язування задачі та розв'яжи її.
1128. Знайди периметр ромба, якщо його площа дорівнює 120 см^2 , а одна з діагоналей на 14 см більша за другу.
1129. Знайди площу ромба, якщо точка дотику вписаного в ромб кола ділить сторону на відрізки 3 см і 12 см.
1130. Точка дотику кола, вписаного в ромб, ділить сторону на відрізки, пропорційні числам 4 і 9. Знайди площу ромба, якщо радіус кола 12 см.
1131. Висота ромба дорівнює 5 см. Знайди площу ромба, якщо кут між висотами, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 45° .

1132. Знайди площу ромба, якщо його периметр 48 см, а кут між висотами, проведеними з вершини гострого кута, дорівнює 150° .

1133. Знайди площу ромба, якщо його висота 12 см, а більша діагональ 20 см.

1134. Знайди площу ромба, якщо його висота 24 см, а менша діагональ 26 см.

1135. **ЗНО** У ромбі $ABCD$ з вершини тупого кута D до сторони BC проведено перпендикуляр DK . $BK = 4$ см, $KC = 6$ см.

1. Визнач довжину перпендикуляра DK (у см).

2. Обчисли площу ромба $ABCD$.

1136. Знайди площу трапеції, зображеної на малюнку 20.18, якщо розміри марки $46,82 \times 46,82 \times 69,60$ мм. Скористайся калькулятором, а відповідь округли до десятих.



Мал. 20.18

1137. Двома прямими, не паралельними основами трапеції, поділи дану трапецію на три рівновеликі трапеції.

1138. У рівнобічну трапецію вписано коло радіуса 3 см. Знайди сторони трапеції, якщо її площа дорівнює 60 см^2 .

1139. Знайди площу рівнобічної трапеції, якщо вписане в неї коло точкою дотику ділить її бічну сторону на відрізки 4 см і 9 см.

1140. **Відкрита задача.** Знайдіть площу рівнобічної трапеції, у якої основи дорівнюють 12 см і 20 см, а діагоналі...

1141. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута. Знайди площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 10 см і 22 см.

1142. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою тупого кута. Знайди площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см, а периметр 84 см.

1143. **ЗНО** Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки довжиною 13 см і 23 см. Обчисли площу трапеції.

1144. Площа трапеції 72 см^2 , а її основи і висота пропорційні числам 1, 2 і 3. Знайди середню лінію трапеції.

1145. Знайди площу рівнобічної трапеції, якщо її діагоналі перпендикулярні і середня лінія дорівнює a .

1146. Знайди площу рівнобічної трапеції, якщо її більша основа дорівнює 22 см, бічна сторона 8,5 см і діагональ 19,5 см.

1147. Знайди площу трапеції, основи якої 20 дм і 60 дм, а бічні сторони 13 дм і 37 дм.

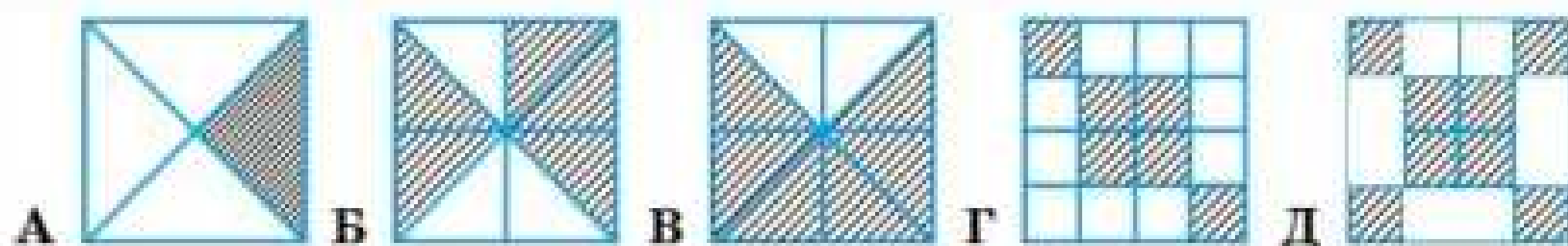
1148. Знайди площу трапеції, основи якої 24 см і 72 см, а кути при більшій основі 30° і 60° .

1149.



Установіть пари рівновеликих фігур, одна з яких чотирикутник (1–4), а друга — заштрихована частина квадрата зі стороною 4 см (А–Д).

- 1 прямокутник, у якого діагональ дорівнює 5 см, а одна зі сторін дорівнює 3 см
- 2 рівнобедрена трапеція з кутом 135° і основами 5 см і 3 см
- 3 паралелограм, висоти якого дорівнюють 1 см і 3 см, а гострий кут 30°
- 4 ромб, діагоналі якого дорівнюють 2 см і 8 см



1150.

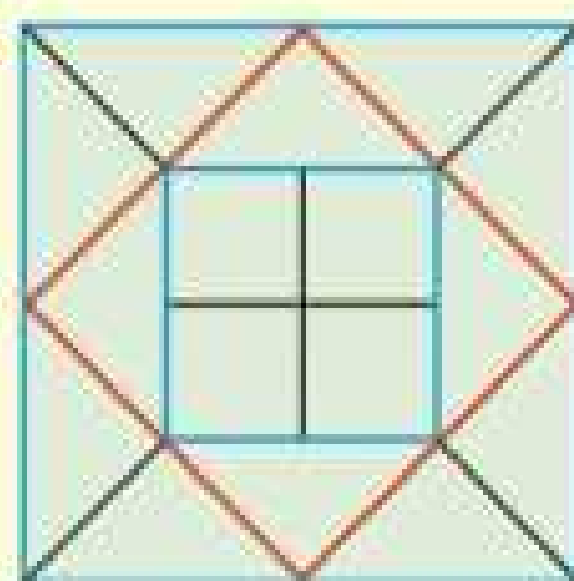


Діагональ ромба ділиться його висотою, проведеною з вершини тупого кута, у відношенні 1 : 2. Знайди площу ромба, якщо його сторона дорівнює 26 см.

1151.



На малюнку 20.19 зображено квадрат, сторона якого дорівнює 4 см. Його поділили на 12 рівних трикутників і 4 рівні квадрати. Знайди площі утворених квадратів, трикутників і трапецій.



Мал. 20.19

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

1152.

Виріж із цупкого паперу довільну трапецію і розріж її на 3 частини так, щоб із них можна було скласти прямокутник і показати, що площа трапеції дорівнює добутку середньої лінії на висоту.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1153.

Доведи, що відповідні медіани (бісектриси, висоти) рівних трикутників рівні.

1154.

У коло радіуса 10 см вписано прямокутник, одна сторона якого дорівнює 12 см. Знайди периметр і площу прямокутника.

1155.

Куб об'ємом 1000 см^3 розрізали на 64 рівні кубики. Знайди довжину ребра і площу поверхні кубика.



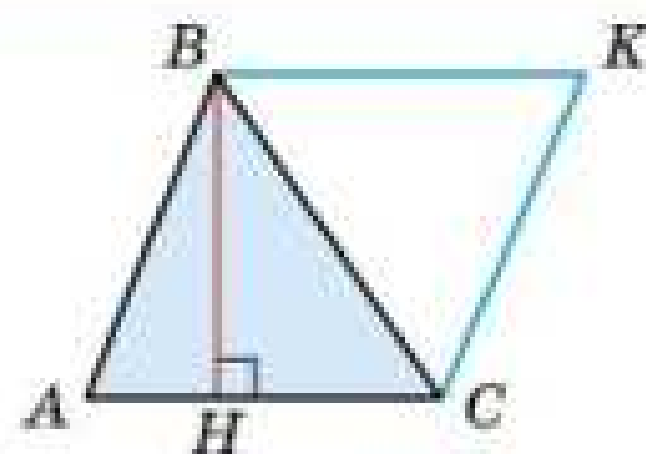
§ 21 ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Теорема 37. Площа трикутника дорівнює півдобутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

area of a triangle — площа трикутника
area of a rhombus — площа ромба

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник з основою $AC = a$ і висотою $BH = h$ (мал. 21.1). Побудуємо паралелограм $ABKC$. У нього $BK = AC$ і $CK = AB$, тому $\triangle ABC = \triangle KCB$. Площа S даного $\triangle ABC$ становить половину площі паралелограма. Оскільки площа паралелограма дорівнює ah , то площа даного трикутника вдвічі менша: $S = \frac{1}{2}ah$.

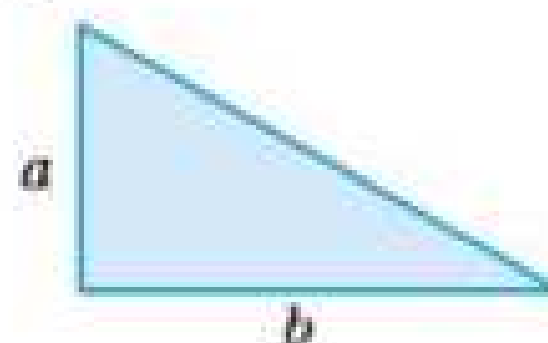


Мал. 21.1

Отже, площу трикутника можна обчислювати за формулою $S = \frac{1}{2}ah$.

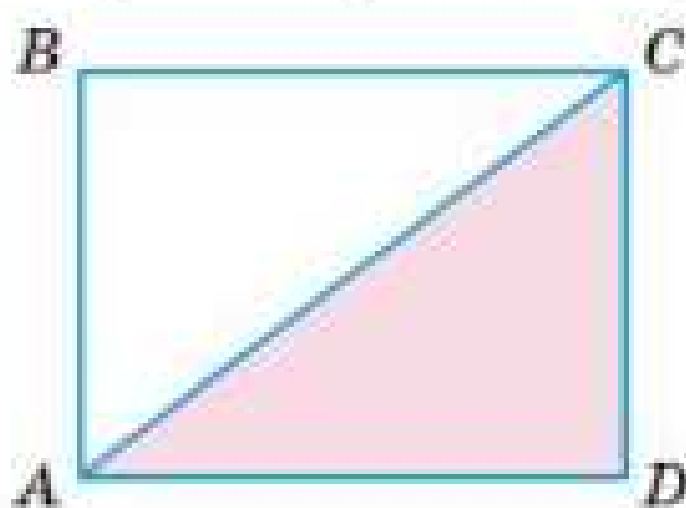
Якщо за основу прямокутного трикутника прийняти один із його катетів, то другий катет буде висотою трикутника. Тому площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів.

Якщо катети трикутника дорівнюють a і b (мал. 21.2), то $S = \frac{1}{2}ab$.

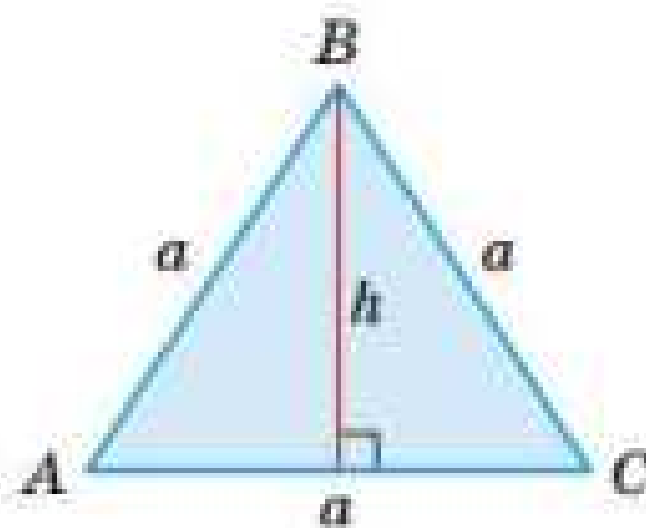


Мал. 21.2

Це твердження випливає також із того, що з двох рівних прямокутних трикутників завжди можна скласти прямокутник (мал. 21.3).



Мал. 21.3



Мал. 21.4

Якщо кожна сторона трикутника дорівнює a (мал. 21.4), то за теоремою Піфагора його висота

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = a \frac{\sqrt{3}}{2},$$

а площа рівностороннього трикутника

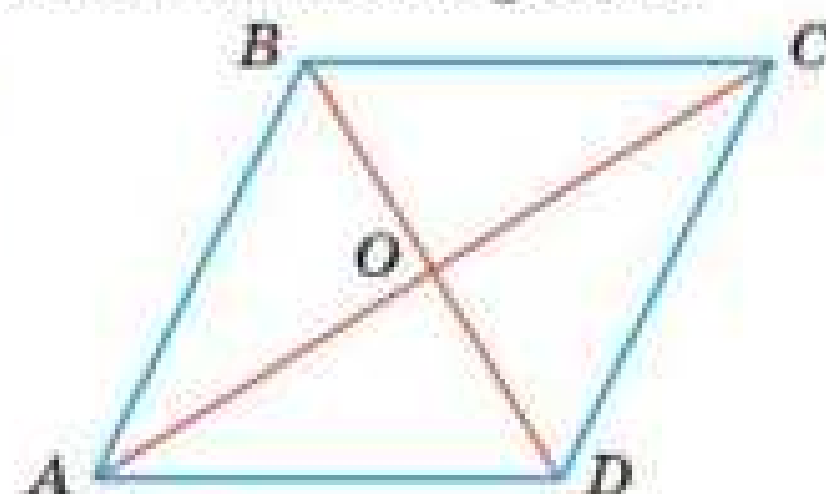
$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Доведи, що в кожному трикутнику зі сторонами a, b, c і відповідними висотами h_a, h_b, h_c завжди $ah_a = bh_b = ch_c$.

Вміючи знаходити площі трикутників, можна обчислити і площу будь-якого многокутника, бо кожний многокутник можна розбити на скінченне число трикутників. Для прикладу наведемо ще одне доведення відомої вже для тебе формули для обчислення площі ромба.

Теорема 38. Площа ромба дорівнює добутку його діагоналей.

Доведення. Нехай $ABCD$ — довільний ромб, діагоналі якого перетинаються в точці O (мал. 21.5). Діагональ AC ділить його на два рівні трикутники: ABC і ADC .



Мал. 21.5

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BO = AC \cdot \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Якщо діагоналі ромба дорівнюють d_1 і d_2 , то $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Перейди на платформу GIOS та закріпи матеріал (Тема. Площі чотирикутників. Урок 3).



ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

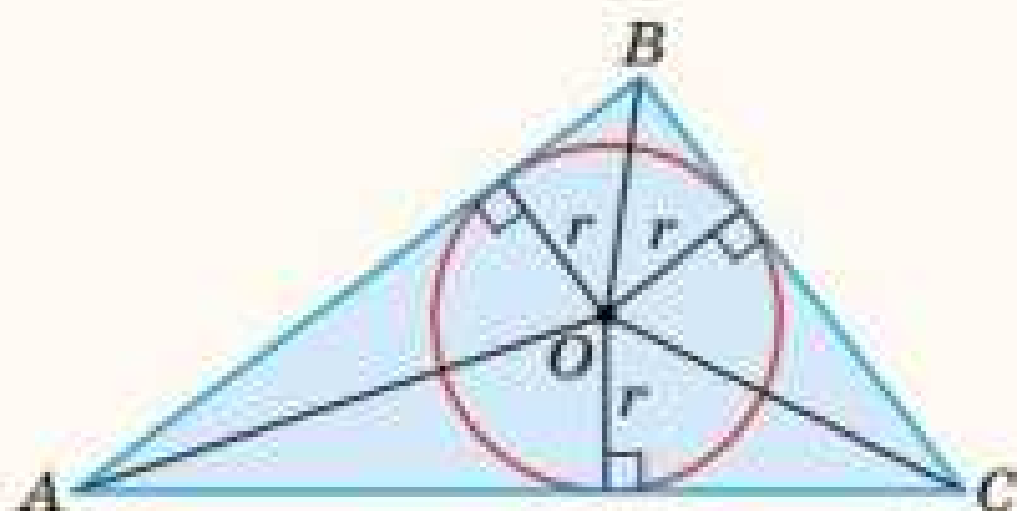
Виведемо ще одну формулу для обчислення площі трикутника.

Нехай точка O — центр кола, вписаного в $\triangle ABC$ (мал. 21.6). Площа S цього трикутника дорівнює сумі площ трикутників OAB , OBC і OCA :

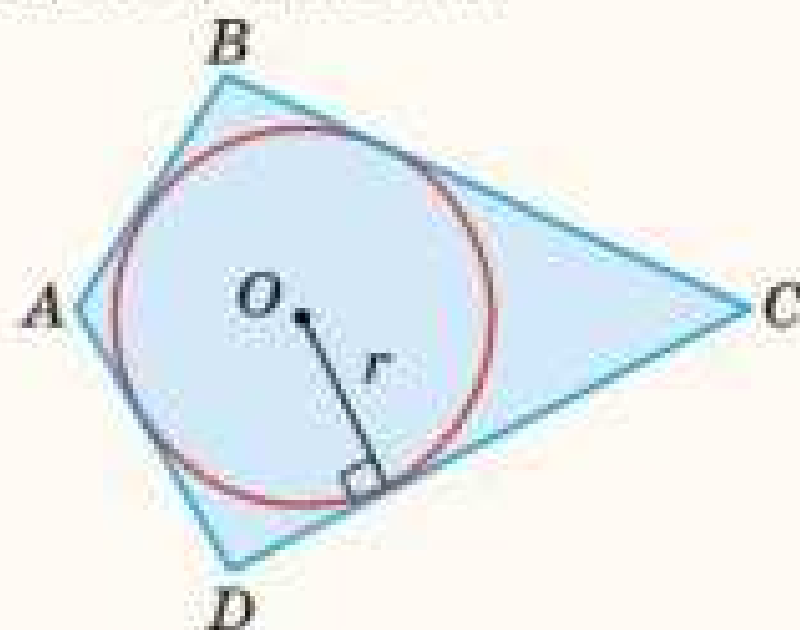
$$S = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} CA \cdot r = \frac{1}{2} (AB + BC + CA) \cdot r = pr.$$

Отже, площа кожного трикутника дорівнює добутку його півпериметра і радіуса вписаного кола: $S = pr$.

Покажи, що за формулою $S = pr$ можна обчислювати площу кожного многокутника периметра $2p$, описаного навколо кола радіуса r (мал. 21.7).



Мал. 21.6



Мал. 21.7



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй і доведи теорему про площу трикутника.
2. Як знайти площу: а) прямокутного; б) рівностороннього трикутника?
3. Як знайти площу ромба, якщо відомі його діагоналі?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза, h — висота, проведена до гіпотенузи (мал. 21.8). Доведи, що $h = \frac{ab}{c}$.

- Площу прямокутного трикутника можна знайти за формулою $S = \frac{1}{2}ch$ і за формулою

$$S = \frac{1}{2}ab. \text{ Тоді } \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ab, \text{ звідси } ch = ab,$$

$$h = \frac{ab}{c}.$$

Метод розв'язування геометричних задач, коли площу фігури знаходять двома різними способами, що потім дає змогу визначити невідомі елементи, називають **методом площ**.

2. Знайди площу трикутника, сторони якого дорівнюють a , a і b . Чому дорівнює його висота, проведена до бічної сторони?

- Нехай $AB = BC = a$, $AC = b$ (мал. 21.9, а). Дві сторони трикутника рівні, отже, він рівнобедрений. Його висота BH ділить основу AC навпіл. З прямокутного трикутника ABH за теоремою Піфагора, знаходимо:

$$BH^2 = a^2 - \frac{b^2}{4}, \quad BH = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}.$$

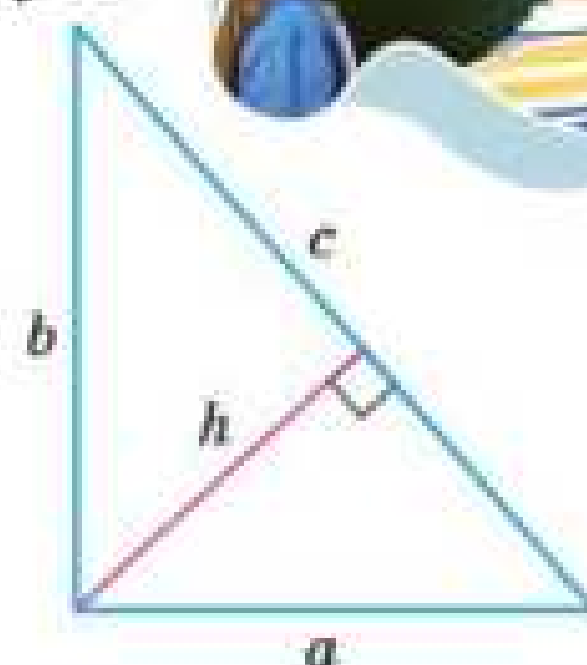
Шукана площа трикутника:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{1}{4}b\sqrt{4a^2 - b^2}.$$

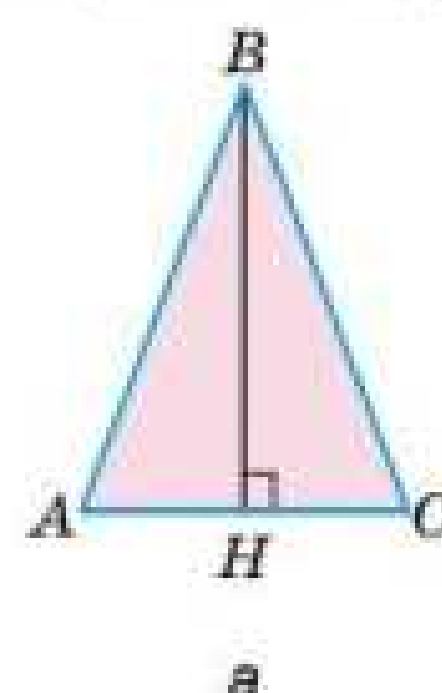
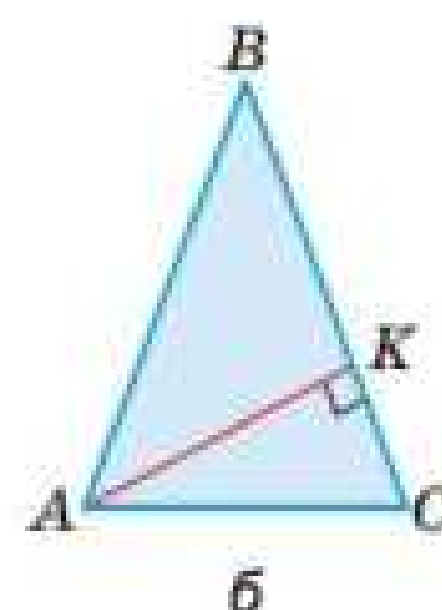
Тут a і b — довільні додатні числа, але такі, що $2a > b$.

Щоб знайти висоту трикутника, скористаємося методом площ. Для цього знайдемо площу трикутника іншим способом (мал. 21.9, б):

$$S = \frac{1}{2}AK \cdot BC.$$



Мал. 21.8



Мал. 21.9

$$\text{Звідси висота } AK = \frac{2S}{BC} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}.$$

3. Доведи, що відношення площ двох подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

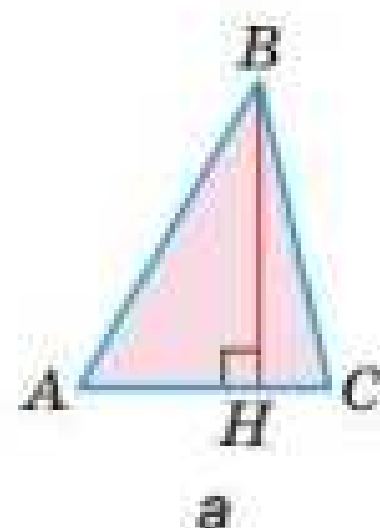
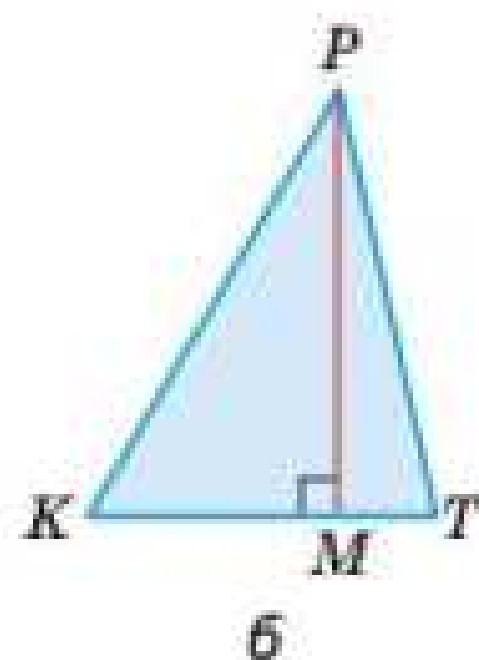
• Нехай трикутники ABC і KPT подібні з коефіцієнтом подібності k (мал. 21.10). Тобто $KP = kAB$ і $KT = kAC$. Так само відносяться і їх висоти: $PM = kBN$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BN, \quad S_{KPT} = \frac{1}{2} KT \cdot PM =$$

$$= \frac{1}{2} k \cdot AC \cdot k \cdot BN = k^2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BN = k^2 \cdot S_{ABC}$$

Отже, $S_{KPT} : S_{ABC} = k^2$.

Доведене твердження можна сформулювати і так. Якщо відповідні сторони подібних трикутників відносяться як $m : n$, то їх площі відносяться як $m^2 : n^2$.



Мал. 21.10

ВИКОНАЄМО УСНО

1156. Знайди площу трикутника, якщо його сторона і висота, проведена до цієї сторони, дорівнюють відповідно 10 см і 7 см.

А 70 см² Б 17 см² В 35 см² Г 8,5 см²

1157. Знайди площу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють 12 см і 4 см.

1158. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 16 см, а його площа — 80 см². Знайди висоту, проведenu до гіпотенузи.

А 5 см Б 32 см В 48 см Г 10 см

1159. Як зміниться площа трикутника, якщо:

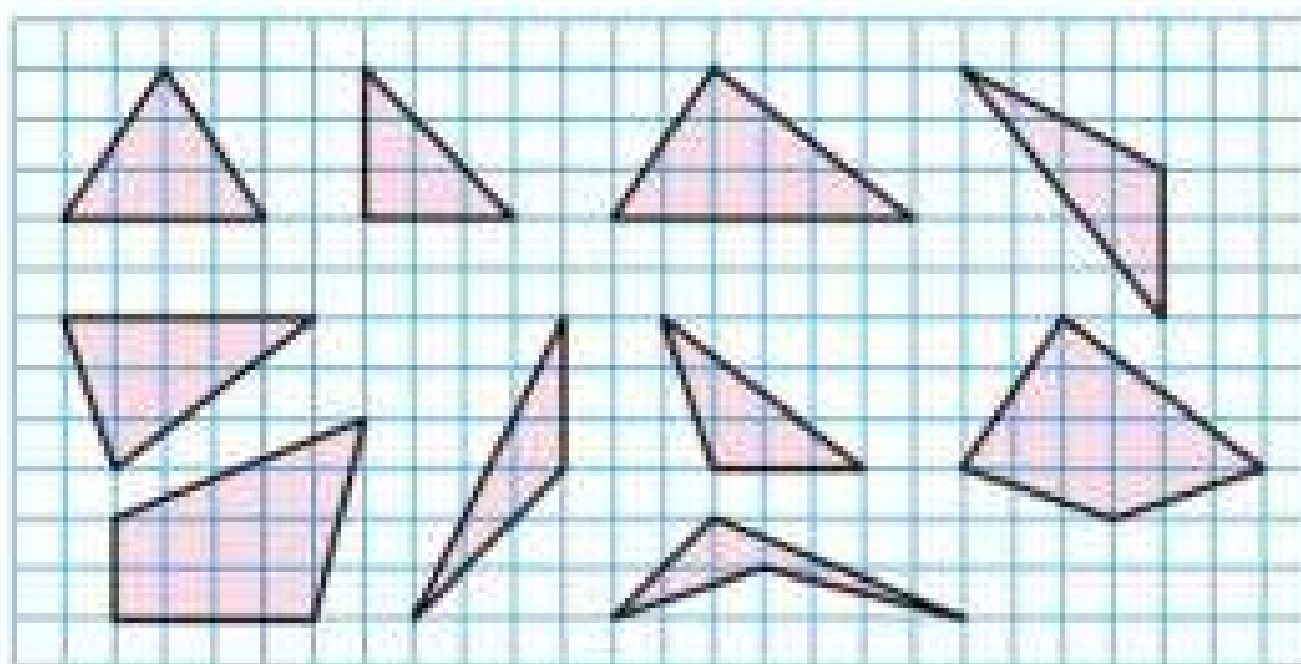
- його висоту збільшити втричі, а основу не змінювати;
- основу зменшити вдвічі, а висоту не змінювати;
- основу збільшити вдвічі, а висоту зменшити вдвічі;
- основу збільшити вдвічі, а висоту збільшити в 5 разів?

1160. У наведеній таблиці a , h і S — основа, висота і площа трикутника, виражені у відповідних одиницях. Які числа мають бути в порожніх клітинках?

a	3	6	4	7		
h	4	5			0,5	3
S			10	70	1	3

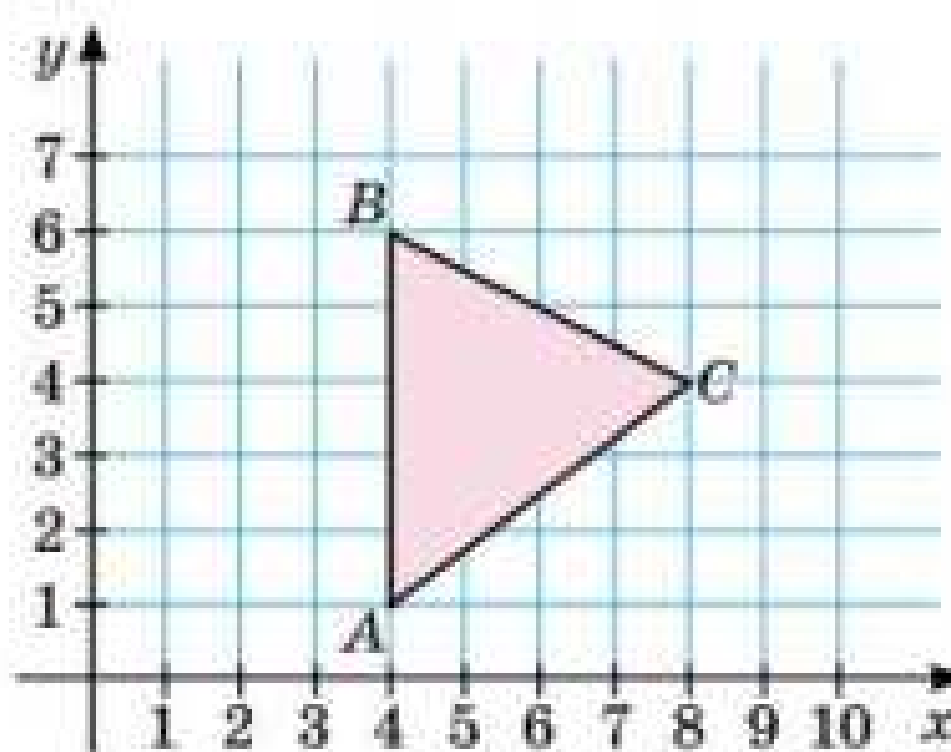


- 1161.** Знайди площі зображених фігур (мал. 21.11). Чи є серед них рівновеликі? (Прийми сторону клітинки за одиничний відрізок.)



Мал. 21.11

- 1162.** Знайди площу трикутника за координатами його вершин: (4; 1), (4; 6), (8; 4) (мал. 21.12).



Мал. 21.12

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

- 1163.**  **Гра.** Один із гравців / одна із гравчинь задає висоту трикутника, другий/друга — сторону, до якої її проведено, а третій/третя знаходить площу цього трикутника. Потім учні/учениці міняються ролями.

- 1164.** Знайди площу трикутника, основа якого дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї, — 8 см.

- 1165.** Знайди висоту трикутника, проведenu до сторони довжиною 35 см, якщо його площа — 175 см^2 .

- 1166.** Висота трикутника, проведена до основи, дорівнює 2 м, а проєкції бічних сторін на основу дорівнюють 3 м і 10 м. Знайди площу трикутника.

- 1167.**  Обчисліть площу прямокутного трикутника, якщо катети дорівнюють: а) 4 см і 11 см; б) 1,2 дм і 3 дм.

- 1168.** Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 2 м, а його площа 10 м^2 . Знайди другий катет цього трикутника.



1169. Знайди площу рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою: а) 8 см; б) 1,4 дм; в) c м.

1170. Find the area of the right triangle whose hypotenuse and the leg are 10 in and 8 in.

1171. Знайди площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 2 см і 8 см.

1172. Заповни порожні клітинки таблиці, у якій a і b — довжини катетів (у см), а S — площа трикутника (у см^2).

a	2	32	5,8	14,4	0,2	$2n$	n
b	5	45			0,24	$3m$	
S			29	36			Q

1173. Площа прямокутного трикутника дорівнює 175 см^2 . Обчисли катети, якщо відношення їх довжин дорівнює $7 : 2$.

1174. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 30 см і 40 см. Знайди площу трикутника.

1175. Знайди площу рівнобедреного трикутника, якщо бічна сторона і основа пропорційні числам 5 і 8, а висота, проведена до основи, дорівнює 18 см.

1176. Доведи, що медіана трикутника розбиває його на два трикутники, площі яких рівні.

1177. Діагоналі паралелограма ділять його на чотири трикутники. Знайди відношення площі кожного з них до площі паралелограма.

1178. Дано $\triangle ABC$ і пряму AM , паралельну BC . Доведи, що коли $K \in AM$, то трикутники ABC і KBC мають рівні площі.

1179. $ABCD$ — рівнобічна трапеція (мал. 21.13). Доведіть, що:



а) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DCB}$; б) $S_{\triangle BAD} = S_{\triangle DCA}$;

в) $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle DOC}$.

1180. Поділи даний трикутник на три рівновеликі частини прямими, що проходять через одну вершину.



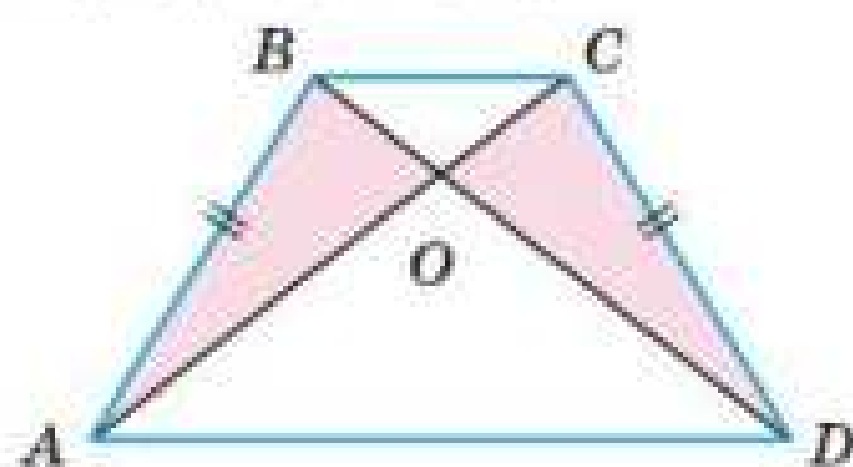
1181. За даними катетами a та b прямокутного трикутника знайди висоту, проведenu до гіпотенузи:

а) $a = 5$, $b = 12$; б) $a = 12$, $b = 16$.

1182. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнюють відповідно 24 см і 26 см. Знайди висоту, проведenu до гіпотенузи.

1183. Обчисли висоти трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см.

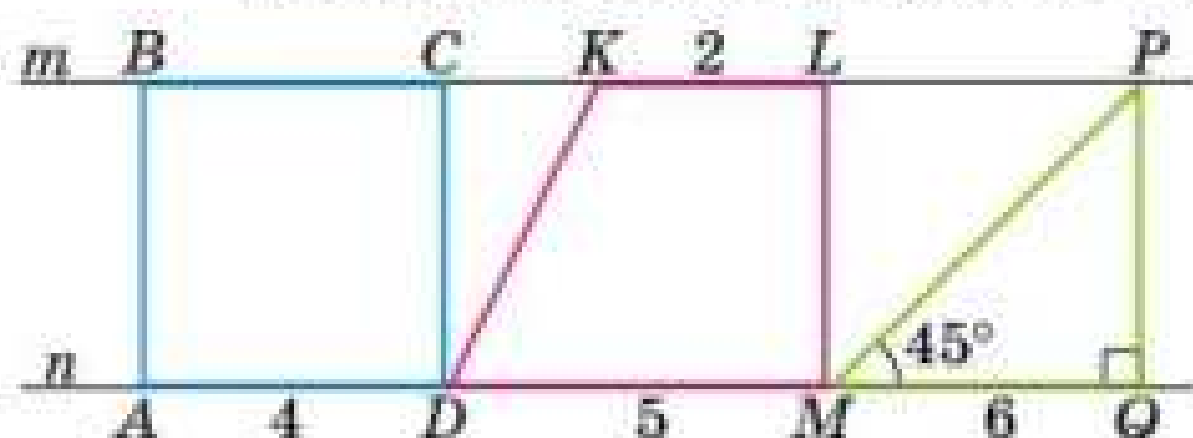
1184. Сторони AB і BC трикутника ABC дорівнюють відповідно 16 см і 22 см, а висота, проведена до сторони AB , дорівнює 11 см. Обчисли висоту, проведenu до сторони BC .



Мал. 21.13

1185. Дві сторони трикутника дорівнюють 7,5 см і 3,2 см. Висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 2,4 см. Обчисли висоту, проведену до меншої сторони.

1186. **ЗНО** На паралельних прямих m та n побудовано прямокутник $ABCD$, прямокутну трапецію $DKLM$ і прямокутний трикутник MPQ (мал. 21.14). Користуючись даними малюнка, установи відповідність між фігурою (1–3) та її площею (А–Д).



Мал. 21.14

1 прямокутник $ABCD$	А 12
2 трапеція $DKLM$	Б 18
3 трикутник MPQ	В 21
	Г 24
	Д 36

1187. Обчисли площу правильного трикутника зі стороною 10 см.

1188. Площа правильного трикутника дорівнює $100\sqrt{3}$ м². Знайди сторону цього трикутника.

1189. Висота рівностороннього трикутника $\sqrt{3}$ м. Яка площа цього трикутника?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

1190. Висота трикутника, проведена до основи, дорівнює 4 м, а кути при його основі дорівнюють 30° і 45° . Знайди площу трикутника.

1191. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 3\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45^\circ$. Знайди його площу.

1192. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 4 м і 6 м. Знайдіть площі трикутників, на які бісектриса прямого кута ділить даний трикутник.

1193. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 12 см. Знайди площі трикутників, на які бісектриса прямого кута ділить даний трикутник.

1194. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайди площі трикутників, на які бісектриса більшого гострого кута ділить даний трикутник.

1195. **ЗНО** Гіпотенуза AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC дорівнює 3,6 м. У цей трикутник вписано квадрат $MNKP$, дві вершини якого знаходяться на гіпотенузі, а дві інші — на катетах.

а) Визнач площу трикутника ABC (у м²).

б) Обчисли площу квадрата $MNKP$ (у м²).



1196. Висота CH прямокутного трикутника ABC ділить гіпотенузу на відрізки 1 дм і 9 дм. Обчисли площу чотирикутника $ACBK$, де K — середина CH .

1197. Сторони трикутника ABC дорівнюють 13 см, 13 см і 10 см. Обчисли площу чотирикутника $ABCM$, де M — середина висоти BH , проведеної до основи трикутника.

1198. Знайди площу трикутника, вершини якого:
 $A(-2; 3)$, $B(4; 7)$, $C(1; 1)$.

1199. Знайди площу трикутника, вершини якого: $C(1; 3)$, $P(7; 5)$, $T(3; 1)$.

1200. Обчисли площу марки (мал. 21.15), якщо її розміри $46,82 \times 46,82 \times 69,60$ мм. Скористайся калькулятором, а відповідь округли до десятих.

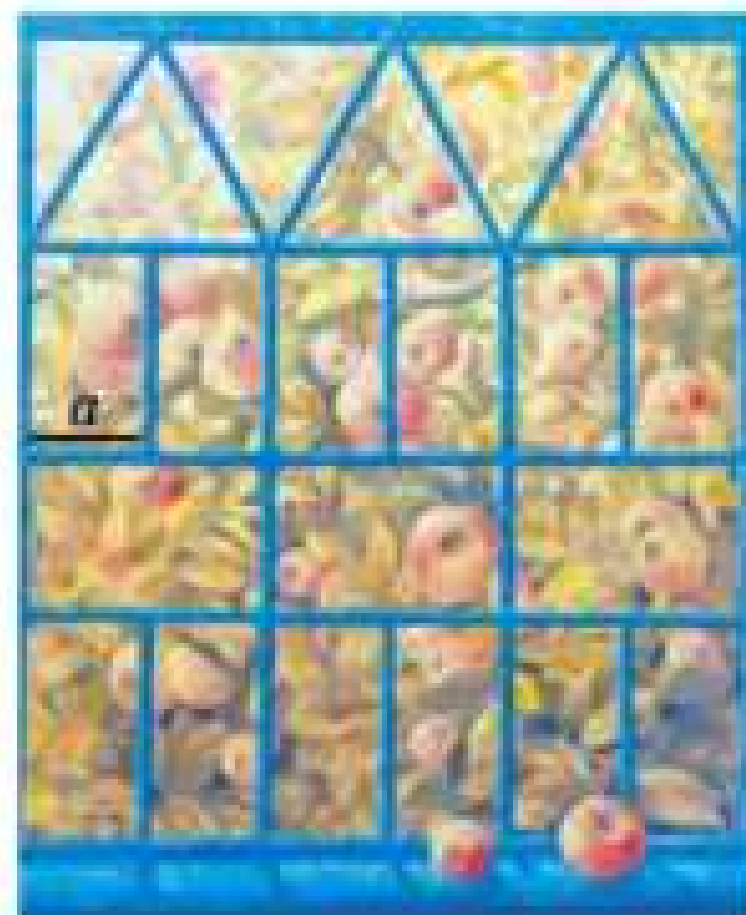


Мал. 21.15

1201. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 30° . Знайди периметр трикутника, якщо його площа дорівнює $16\sqrt{3} \text{ см}^2$.

1202. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 10 см, а до бічної сторони 12 см. Знайди сторони трикутника та його площу.

1203. Знайди площу частини скла у формі рівностороннього трикутника на картині Ольги Кваші «Вікно веранди» (мал. 21.16).



Мал. 21.16

1204. Знайди площу трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см.

1205. Знайди площу трикутника, сторони якого дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см.

1206. Площа трикутника дорівнює 20 см^2 . Знайди площу трикутника, який середня лінія відтинає від даного трикутника.

1207. Як відносяться площі двох трикутників, якщо вершини одного з них є серединами сторін другого?

1208. Точку перетину медіан трикутника (центр мас) сполучили з його вершинами. Порівняй площу кожного з трьох утворених трикутників з площею даного трикутника.

1209. Усередині паралелограма $ABCD$ довільно позначено точку M . Знайди відношення суми площ трикутників AMD і BMC до площі паралелограма для будь-якого положення точки M .

1210. Знайди радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см.

1211. Знайди радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник зі сторонами 17 см, 17 см і 16 см.

1212. Знайди радіус кола, вписаного в трикутник зі сторонами 13 см, 20 см і 21 см.

1213. Через точку перетину медіан $\triangle ABC$ паралельно AC проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках M і N . Знайди площу $\triangle ABC$, якщо площа $\triangle MBN$ дорівнює S .

1214. *Відкрита задача.* Знайди площу трикутника, у якого дві сторони дорівнюють 10 см і 12 см, а трикутник є...

1215. Доведи, що сторони трикутника обернено пропорційні до його висот, тобто

$$a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}; \quad a : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_c}; \quad b : c = \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

1216. Як провести дві прямі через вершину квадрата, щоб розбити його на три фігури, площі яких рівні?

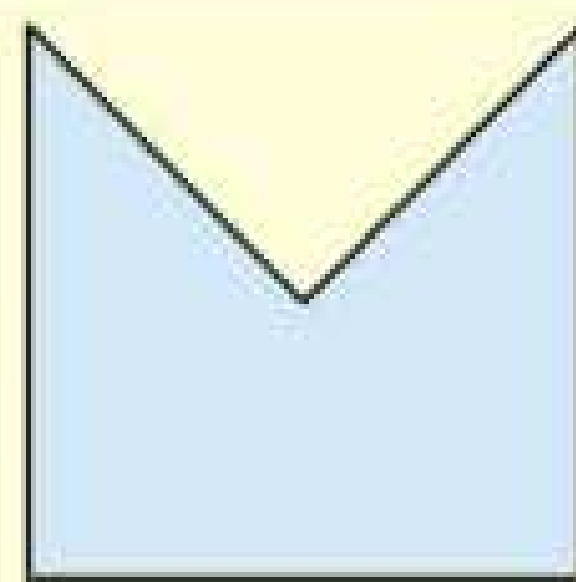
1217. Кожна сторона одного трикутника більша за будь-яку сторону другого трикутника. Чи впливає з цього, що площа першого трикутника більша за площу другого трикутника?

1218. Доведи, що сума відстаней від точки на основі рівнобедреного гострокутного трикутника до бічних сторін не залежить від положення цієї точки.

1219. Доведи, що сума відстаней від точки, яка лежить всередині рівностороннього трикутника, до його сторін не залежить від положення цієї точки.

1220. Через точку D , що лежить на стороні BC трикутника ABC , проведено прямі, паралельні двом іншим сторонам, які перетинають сторони AB і AC в точках E і F відповідно. Доведи, що трикутники CDE і BDF мають рівні площі.

1221. 2 мами і 2 доньки хочуть поділити ділянку землі, план якої зображено на малюнку 21.17, так, щоб усі ділянки мали рівні площі й однакові форми. Як це зробити?



Мал. 21.17

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

1222. Накресли чотирикутник, відмінний від паралелограма, розбий його на два трикутники, виміряй необхідні елементи й обчисли площу чотирикутника. Якою може бути похибка? Від чого вона залежить?

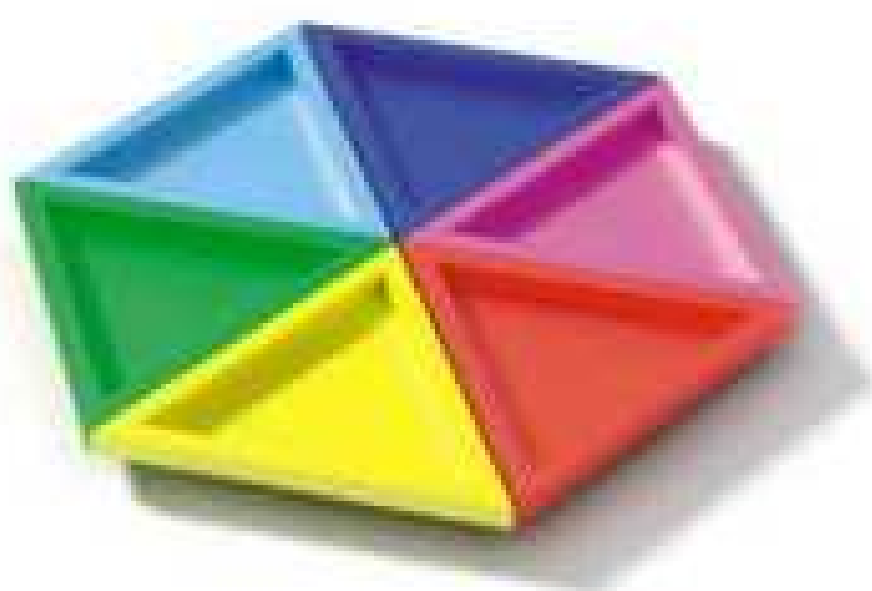


ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1223. Чи існує трикутник зі сторонами a , $2a$ і $4a$?
А з кутами 50° , 60° і 80° ?
1224. Один кут трикутника збільшили на 10° , другий зменшили на 15° . Як зміниться від цього третій кут трикутника?
1225. Вершини чотирикутника ділять описане коло на дуги, три з яких мають 100° , 110° і 120° . Знайди градусну міру четвертої дуги кола.



ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



Многокутники у побуті



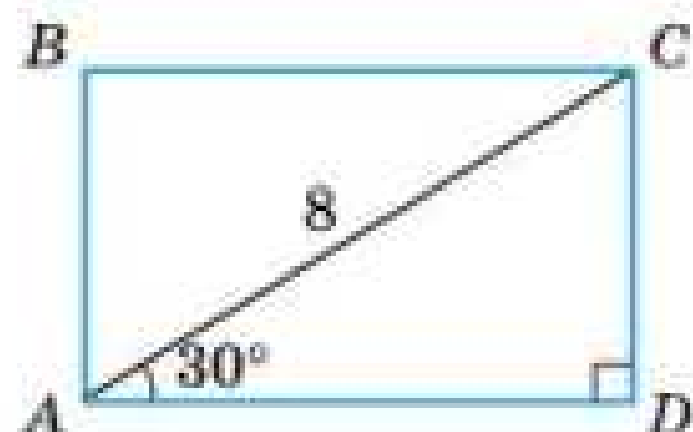
Вітражі в архітектурних спорудах

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

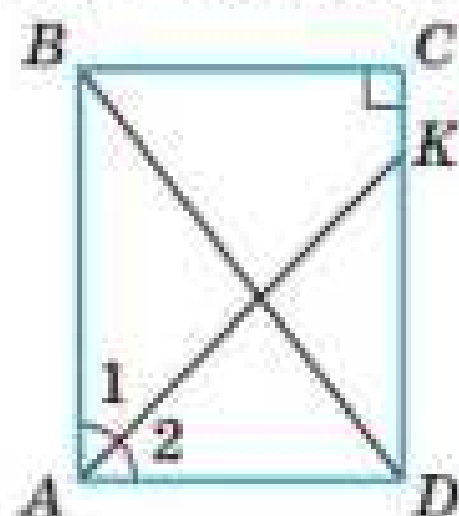
Знайди площі чотирикутників $ABCD$ за готовими малюнками.

А

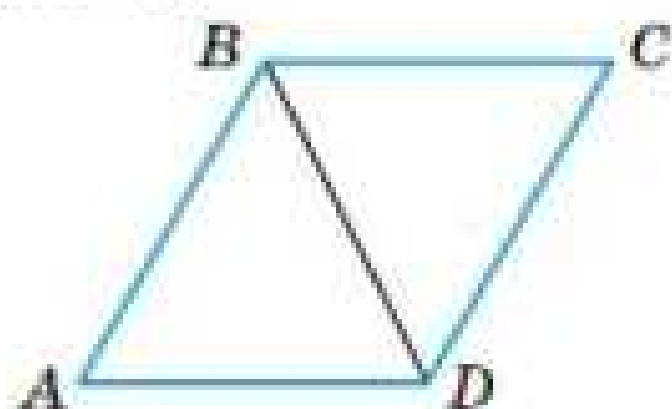
- 1 $ABCD$ — прямокутник,
 $AC = 8$, $\angle CAD = 30^\circ$.



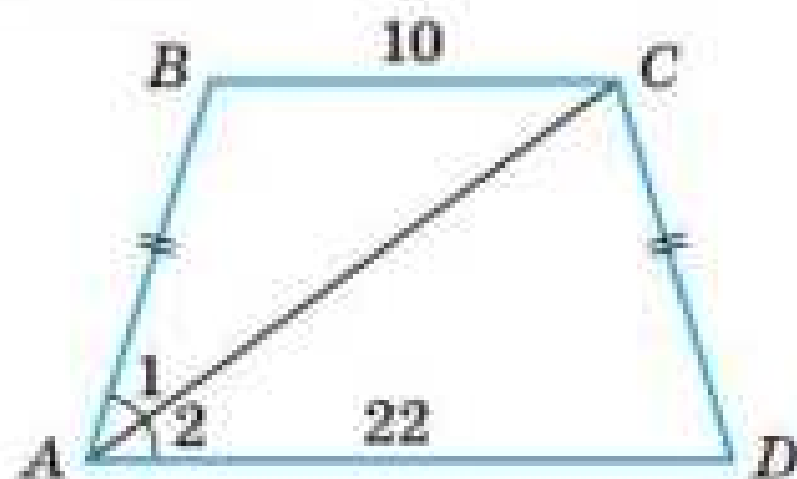
- 2 $ABCD$ — прямокутник,
 $\angle 1 = \angle 2$, $KD = 3CK$, $BD = 15$.



- 3 $ABCD$ — ромб,
 $AB = BD = 6$.

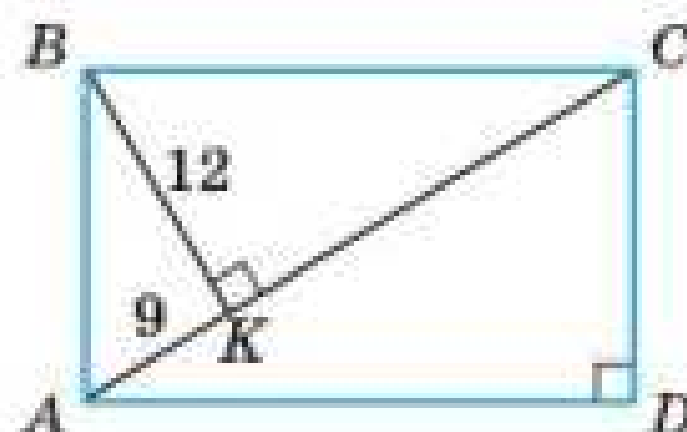


- 4 $BC \parallel AD$, $\angle 1 = \angle 2$

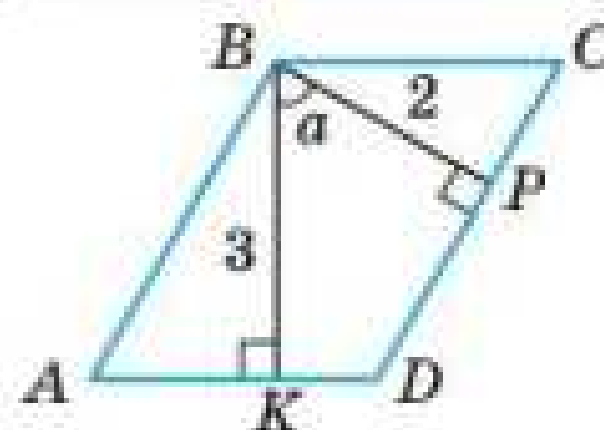


Б

- $ABCD$ — прямокутник,
 $AK = 9$, $BK = 12$.



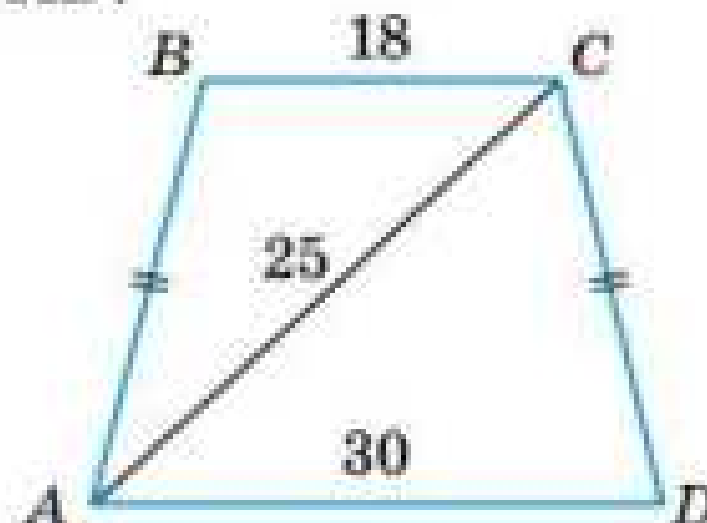
- $\square ABCD$,
 $BP = 2$, $BK = 3$, $\alpha = 60^\circ$.



- $BC \parallel AD$, $\angle A = 45^\circ$, $AD = 8$, $BC = 3$.

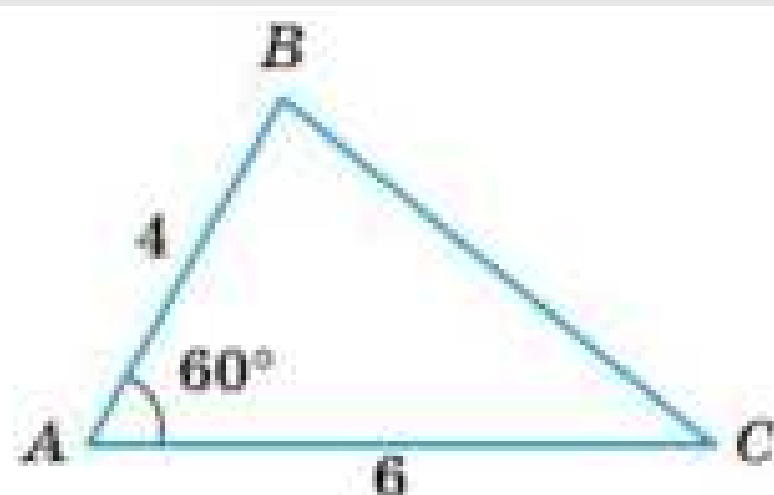


- $BC \parallel AD$.

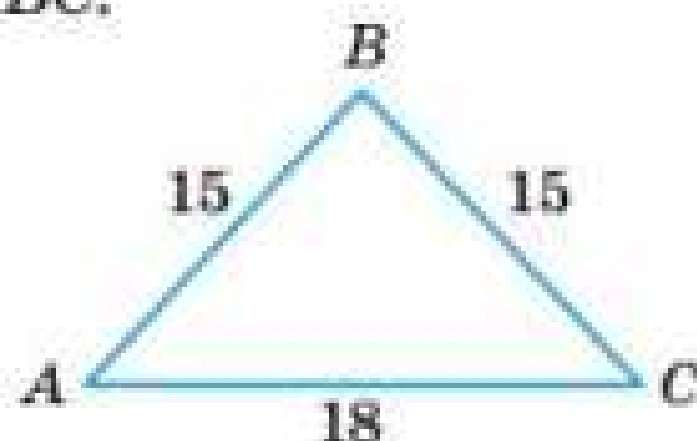


Знайди площі трикутників ABC за готовими малюнками.

5

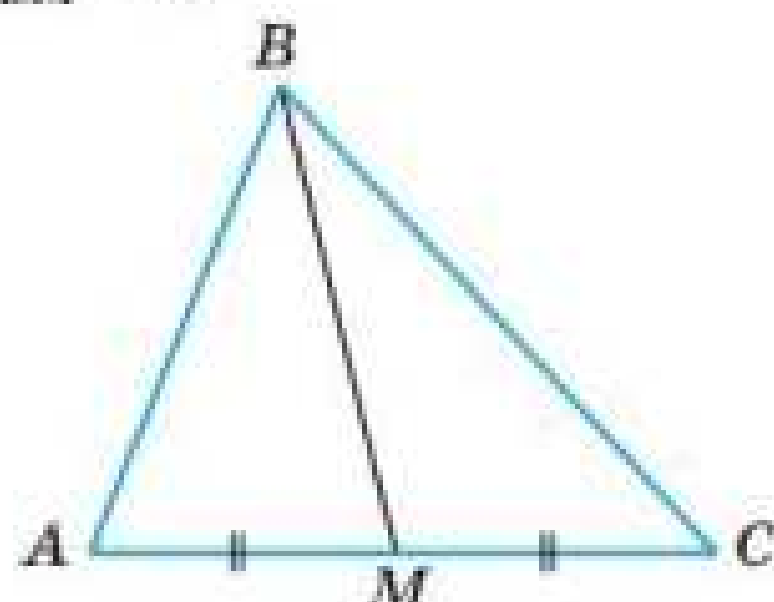


$$AB = BC.$$

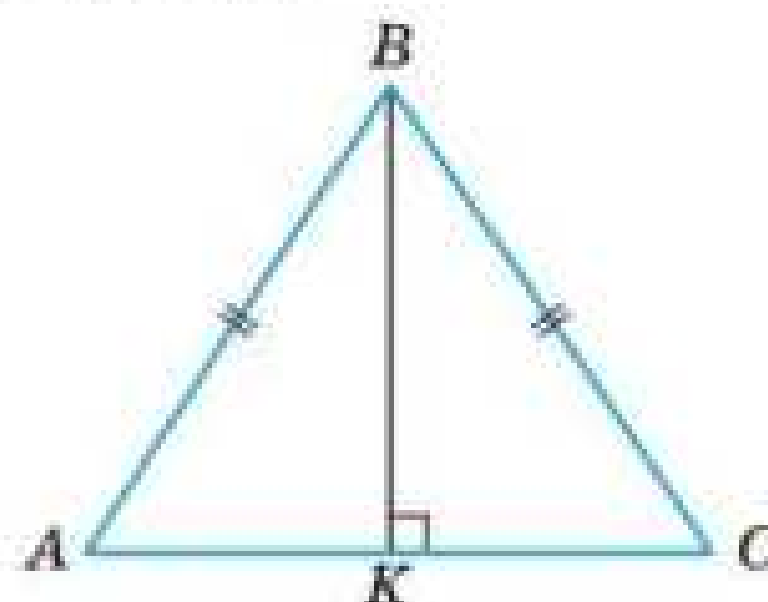


6

$$AM = MC, \\ S_{\triangle ABM} = Q.$$

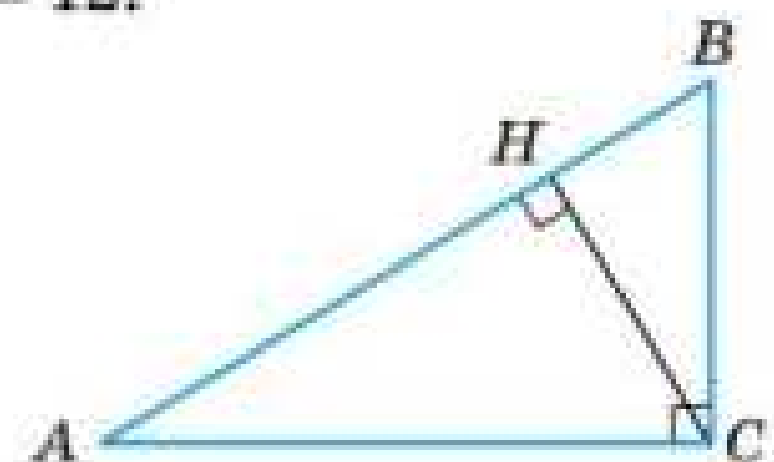


$$AC = 16, \\ AB - BK = 2.$$

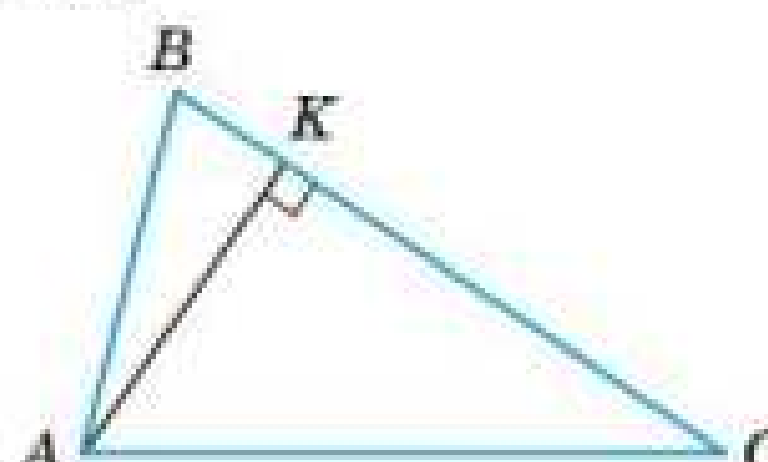


7

$$AC \perp BC, \\ AH - HB = 7, \\ HC = 12.$$

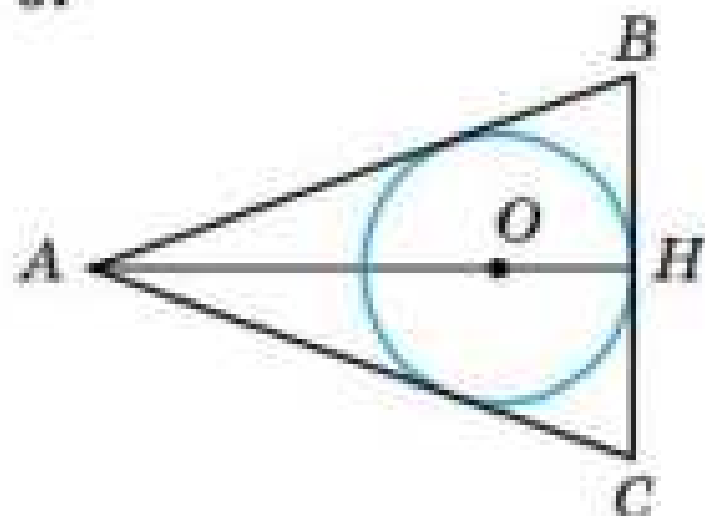


$$AB : AC = 5 : 8, \\ BK = 7, \\ KC = 32.$$

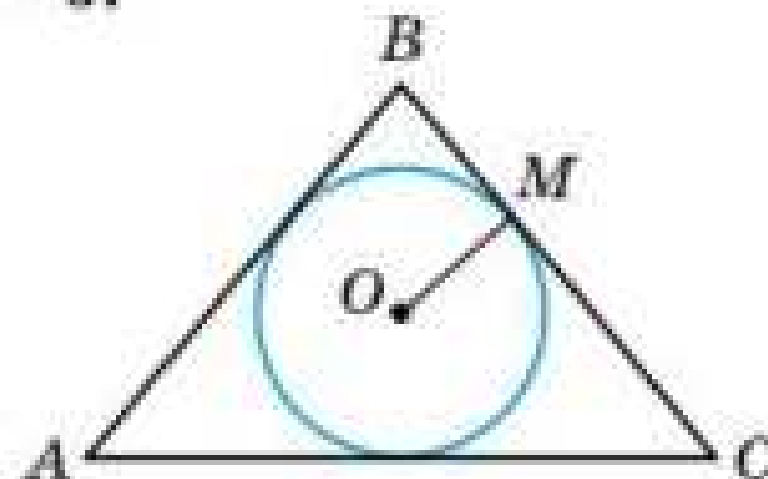


8

$$AB = AC, \\ AO = 18, \\ OH = 6.$$



$$BM : MC = 2 : 3, \\ AB = BC, \\ OM = 6.$$



САМОСТІЙНА РОБОТА

ВАРІАНТ 1

1. Знайди периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 20 см^2 , а одна зі сторін 5 см .
2. Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 6 см , а менша сторона 9 см . Знайди більшу сторону паралелограма.
3. Знайди площу рівнобічної трапеції, якщо її основи дорівнюють 15 см і 33 см , а діагональ є бісектрисою гострого кута.
4. Знайди площу ромба $ABCD$, якщо висота AK ділить сторону BC на відрізки $BK = 8 \text{ см}$, $KC = 2 \text{ см}$.

ВАРІАНТ 2

1. Знайди периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 36 см^2 , а одна зі сторін 9 см .
2. Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см , а менша з висот 5 см . Знайди більшу висоту паралелограма.
3. Знайди площу рівнобічної трапеції, якщо її основи дорівнюють 3 см і 13 см , а діагональ є бісектрисою тупого кута.
4. Знайди площу ромба $ABCD$, якщо висота BH ділить сторону AD на відрізки $AH = 8 \text{ см}$, $HD = 9 \text{ см}$.

ВАРІАНТ 3

1. Знайди периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 42 см^2 , а одна зі сторін 7 см .
2. Висоти паралелограма дорівнюють 5 см і 6 см , а більша сторона 12 см . Знайди меншу сторону паралелограма.
3. Знайди площу рівнобічної трапеції, якщо її більша основа і бічна сторона дорівнюють відповідно 47 см і 17 см , а діагональ є бісектрисою гострого кута.
4. Знайди площу ромба $ABCD$, якщо висота AP ділить сторону CD на відрізки $CP = 1 \text{ см}$, $PD = 12 \text{ см}$.

ВАРІАНТ 4

1. Знайди периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 56 см^2 , а одна зі сторін 8 см .
2. Сторони паралелограма дорівнюють 14 см і 16 см , а більша з висот 8 см . Знайди меншу висоту паралелограма.
3. Знайди площу рівнобічної трапеції, якщо її менша основа і бічна сторона дорівнюють відповідно 11 см і 25 см , а діагональ є бісектрисою тупого кута.
4. Знайди площу ромба $ABCD$, якщо висота DM ділить сторону AB на відрізки $AM = 9 \text{ см}$, $BM = 6 \text{ см}$.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Знайди площу прямокутника, діагональ якого дорівнює 10 см, а одна зі сторін 8 см.
А 48 см^2 **Б** 44 см^2 **В** 60 см^2 **Г** 80 см^2
2. Знайди площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 10 см і 6 см.
А 8 см^2 **Б** 32 см^2 **В** 60 см^2 **Г** 30 см^2
3. Середня лінія трапеції дорівнює 15 см, а висота 6 см. Знайди площу трапеції.
А 21 см^2 **Б** 90 см^2 **В** 180 см^2 **Г** 45 см^2
4. Установи відповідність між фігурами, заданими умовами (1–3), та їх площами (А–Д).

1 квадрат, діагональ якого дорівнює 10 см	А 24 см^2
2 ромб, периметр якого 40 см, а одна з діагоналей 12 см	Б 50 см^2
	В 96 см^2
3 рівнобічна трапеція з основами 10 см і 22 см та діагоналлю 20 см	Г 100 см^2
	Д 192 см^2

5. Знайди периметр паралелограма, якщо його площа 120 см^2 , а висоти дорівнюють 5 см і 6 см.
6. Знайди площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона і основа якого пропорційні числам 17 і 16, а висота, проведена до основи, дорівнює 30 см.
7. Менша основа і бічна сторона рівнобічної трапеції відповідно дорівнюють 8 см і 12 см. Знайди площу трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60° .
8. Точка дотику кола, вписаного у рівнобічну трапецію, ділить бічну сторону на відрізки 3 см і 12 см. Знайди площу трапеції.

Додаткове завдання

9. Доведи, що площа рівнобічної трапеції дорівнює подвоєному добутку бічної сторони і радіуса вписаного в трапецію кола.

Математика здає свої фортеці лише сильним і сміливим...

А. Г. Конфорович

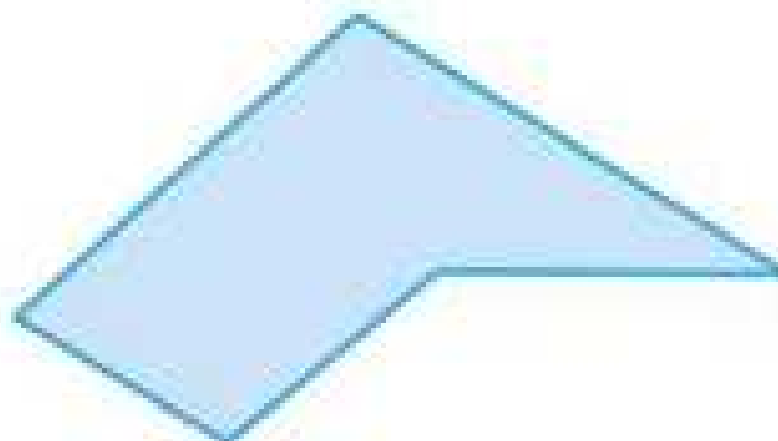
ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 4

Многокутник — проста замкнена ламана. Частину площини, обмежену простою замкненою ламаною, також називають многокутником. Кожний n -кутник має n сторін, n вершин і n кутів.

Якщо кожний кут многокутника менший від розгорнутого, його називають *опуклим*, якщо хоч один кут многокутника більший від розгорнутого, його називають *неопуклим* многокутником.



Опуклий многокутник



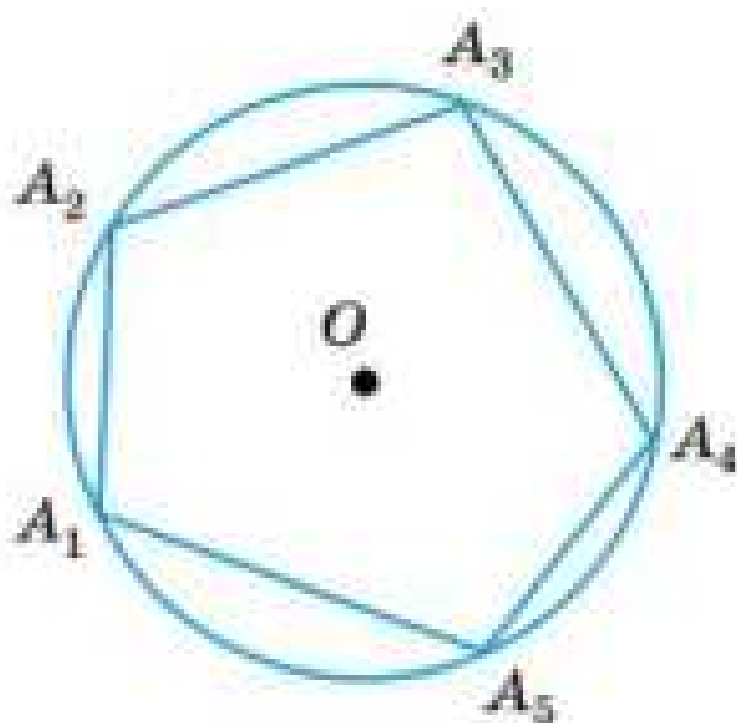
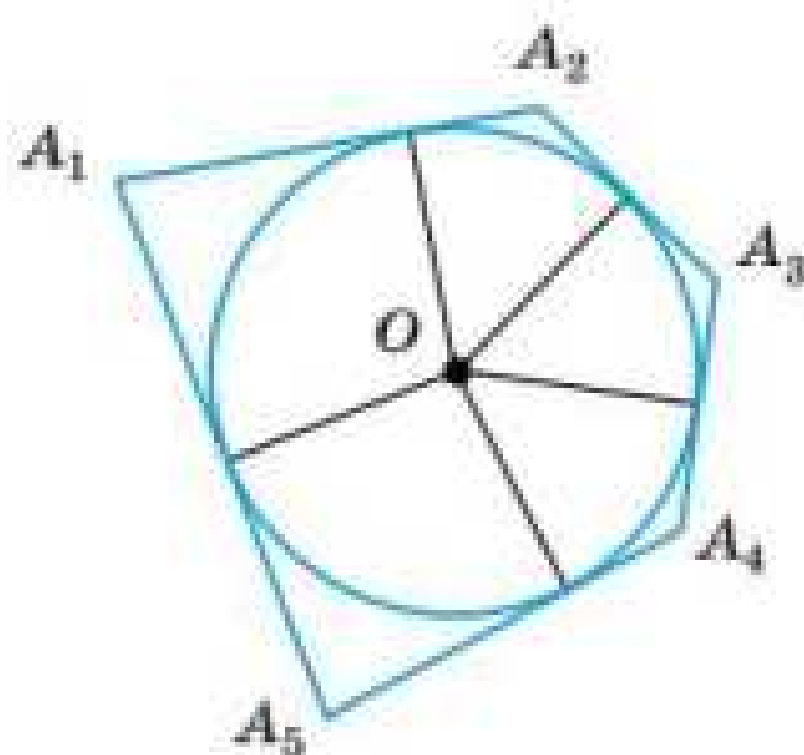
Неопуклий многокутник

Кожна сторона многокутника менша від суми усіх інших його сторін. Суму довжин усіх сторін многокутника називають його периметром.

Сума усіх кутів опуклого n -кутника дорівнює $180^\circ \cdot (n - 2)$. Сума зовнішніх кутів опуклого многокутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° .

Якщо всі вершини многокутника лежать на колі, такий многокутник називають *вписаним у коло*, а коло — *описаним навколо многокутника*.

Якщо всі сторони многокутника дотикаються до кола, такий многокутник називають *описаним навколо кола*, а коло — *вписаним у многокутник*.



У кожний трикутник можна вписати коло і навколо кожного трикутника можна описати коло.

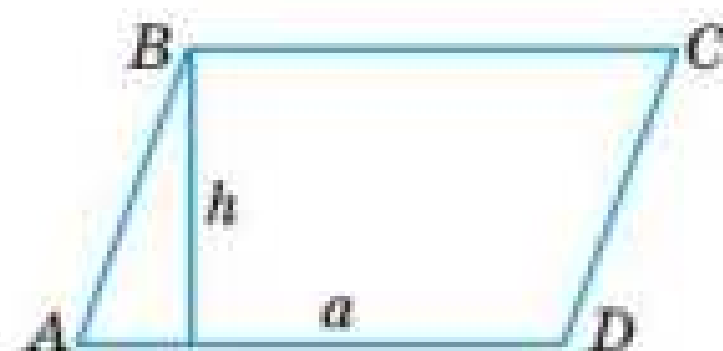
Коло можна вписати тільки в такий чотирикутник, сума двох протилежних сторін якого дорівнює сумі двох інших його сторін.

Коло можна описати тільки навколо такого чотирикутника, сума двох протилежних кутів якого дорівнює 180° .

Площа прямокутника дорівнює добутку двох його сусідніх сторін:



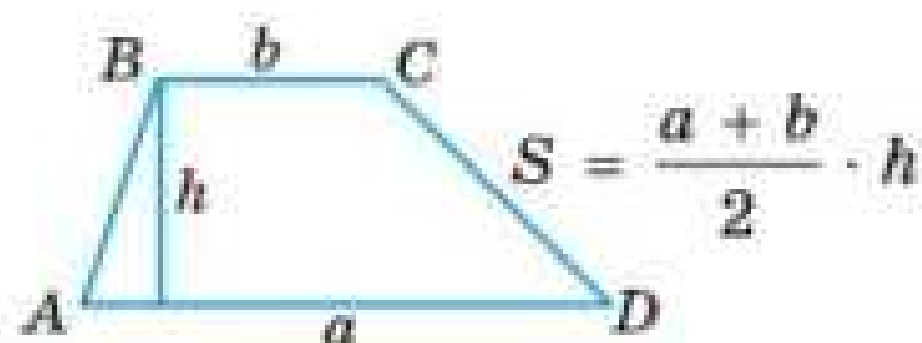
$$S = ab$$



$$S = ah$$

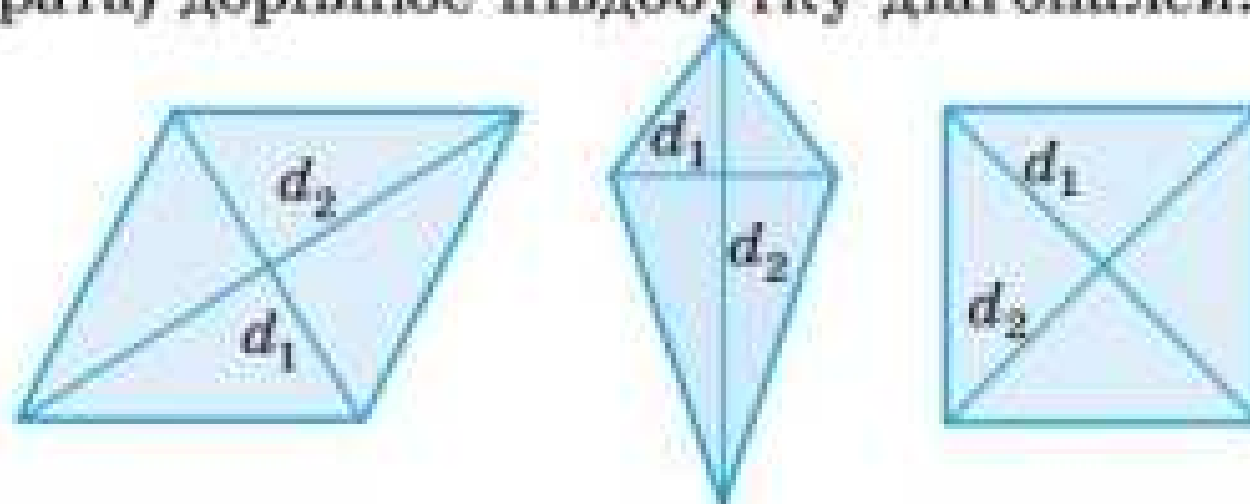
Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони:

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту, тобто добутку середньої лінії і висоти :

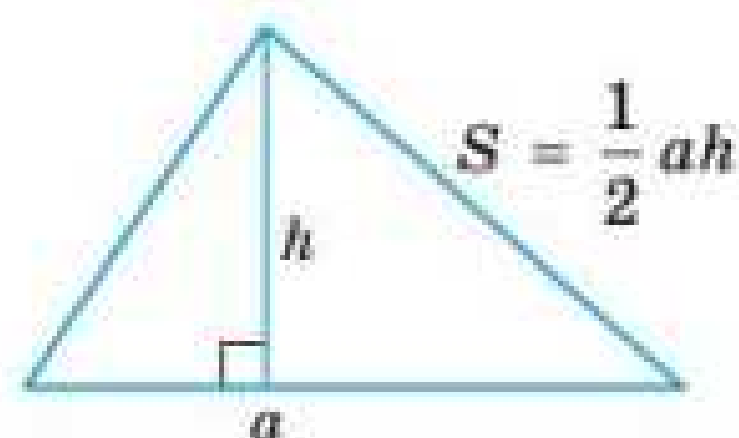
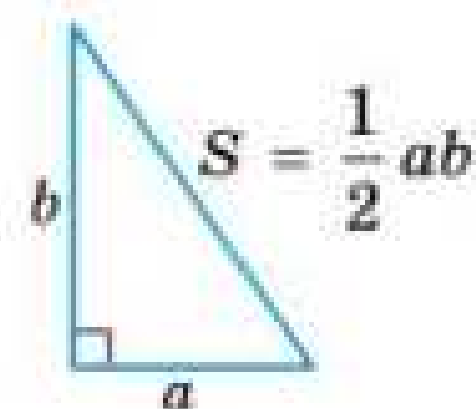


Площа чотирикутника з перпендикулярними діагоналями (зокрема ромба, дельтоїда і квадрата) дорівнює півдобутку діагоналей:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$



Площа трикутника дорівнює півдобутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони:



Площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів:

Площа рівностороннього трикутника зі стороною a дорівнює:



Площа многокутника, описаного навколо кола, дорівнює добутку півпериметра многокутника на радіус кола: $S = pr$.

Навчальні проекти

Навчальний проект 1. РОЗРІЗАННЯ І СКЛАДАННЯ ЧОТИРИКУТНИКІВ

*Предмет математики настільки серйозний,
що корисно не втрачати можливостей,
робити його якомога цікавішим*

Блез Паскаль

Клас поділяється на три групи: «історики», «математики», «практики». Кожен учень / кожна учениця може взяти участь у роботі однієї або двох проектних груп.

1. Історики/історикині вивчають виникнення та використання різних способів розрізання і складання чотирикутників (танграм, стомахіон, витинанки, оригамі тощо). На захист готують коротке повідомлення і презентацію з конкретними прикладами. Наприклад:

Витинанки — це сюжетні та орнаментальні прикраси житла, витяті ножицями або вирізані ножом з білого й кольорового паперу, який складали вдвоє, вчетверо, увосьмеро...

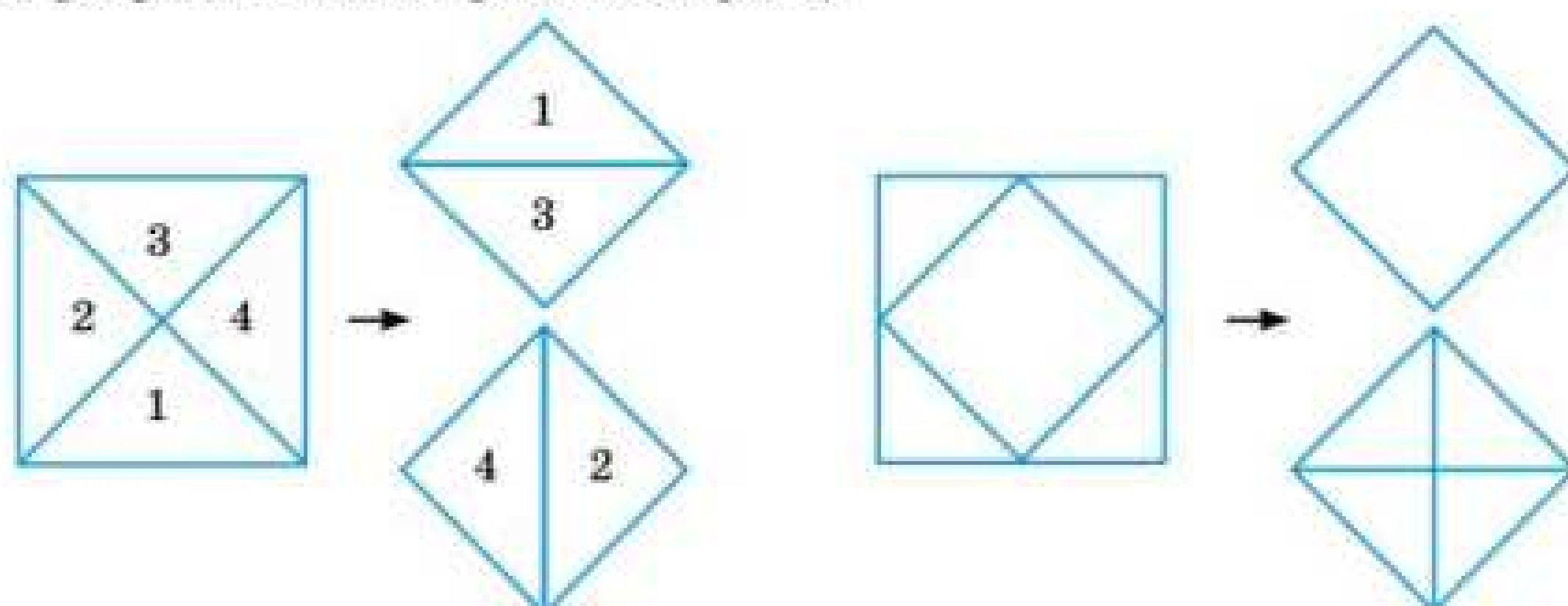
Витинанки у вигляді орнаментальних смуг утворюють з довгої смужки паперу, яку складають «гармошкою» два, чотири, вісім і більше разів. На лініях згину утворюються симетричні повторення зображень.

Витинанки у вигляді ажурних, сітчастих орнаментів вирізають з паперу, що має форму прямокутника, квадрата, правильного трикутника або шестикутника. Аркуш паперу прямокутної форми складають багато разів навпіл по лініях, паралельних сторонам прямокутника. Аркуш паперу у формі квадрата перегинають навпіл і за діагоналями.

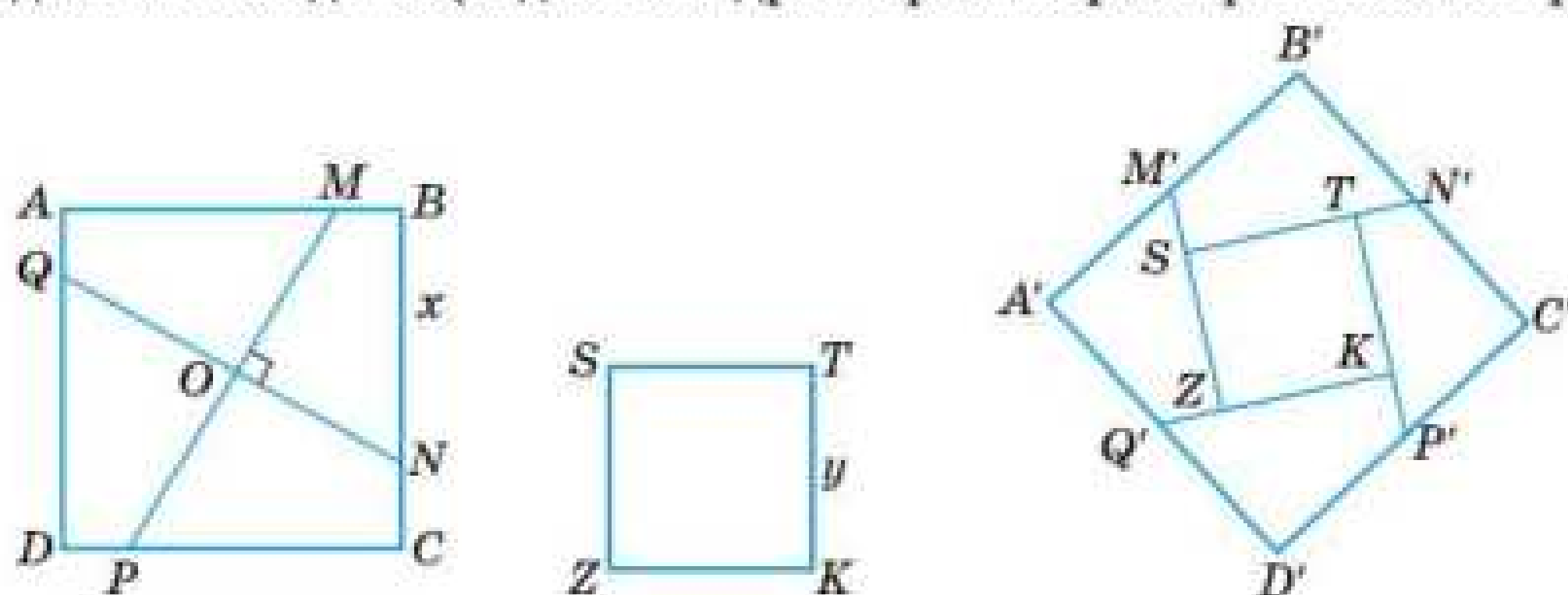


2. Математики добирають і розв'язують геометричні задачі, які стосуються розрізання і складання чотирикутників. Досліджують наявність різних способів виконання завдання. На захист готують портфоліо з умовами задач, способами їх розв'язання та реальними моделями.

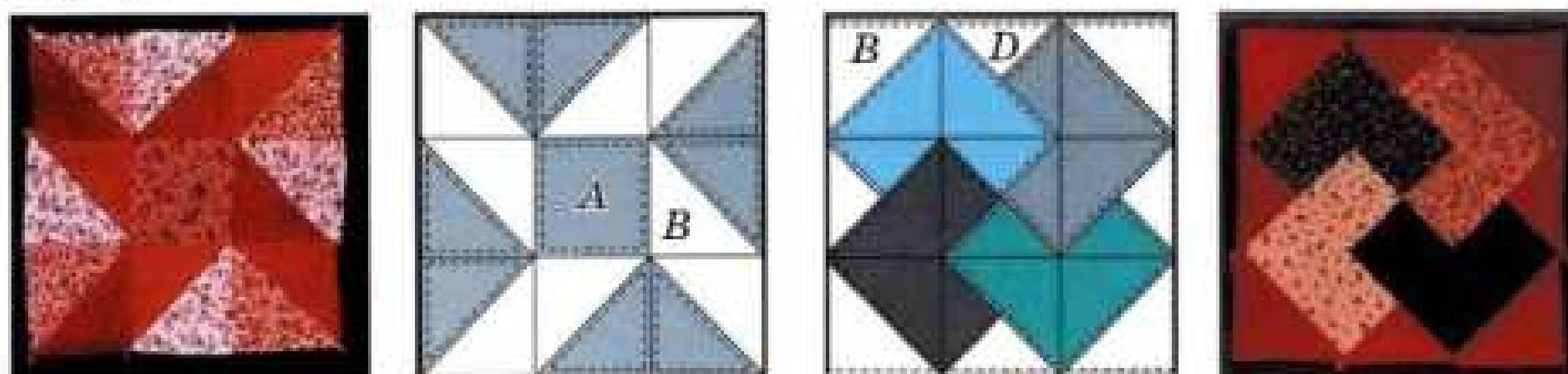
Це можуть бути задачі різної складності — від найпростіших (квадрат розрізати на два рівні квадрати)



до досить складних (із двох квадратів різних розмірів скласти третій).



3. Практики вивчають різні предмети побуту, що утворюються розрізанням і/чи складанням чотирикутників (пошиття серветок із клаптиків тканини чи в'язаних квадратів, створення модульного оригамі, складання паркетів, виготовлення прикраси з аплікації тощо). Обирають один із предметів і виготовляють своїми руками. На захист готують виставку виробів. Подають схему та особливості виготовлення виробу.



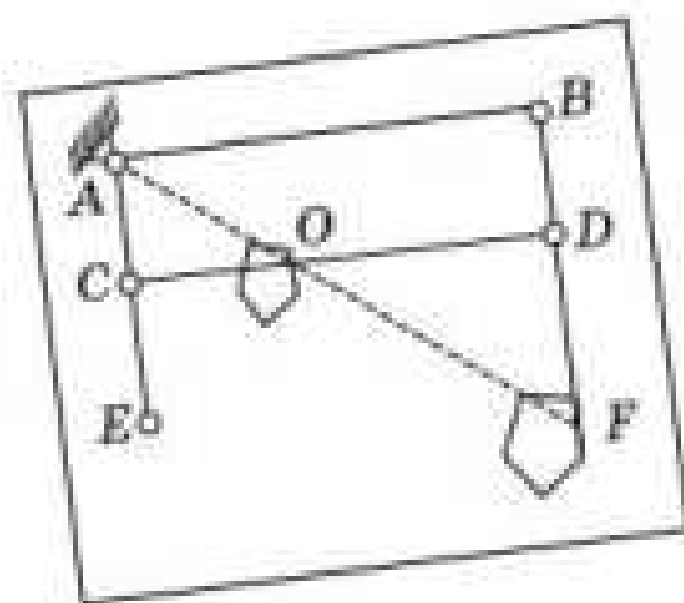
Навчальний проект 2. ПОДІБНІСТЬ І САМОПОДІБНІСТЬ

Учні/учениці формуються у групи, і кожна група працює над однією із запропонованих нижче тем:

1. Подібність трикутників у роботах математиків різних часів. Наприклад.

- Вчення про подібність фігур створювалося у Стародавній Греції в V–IV ст. до н. е. в працях Гіппократа Хіоського, Архіта Тарентського, Евдокса Кнідського. Евклід подає твердження про подібність фігур у шостій книзі «Основ».
- Китайський математик Лю Хуей (200–280 рр.) написав твір «Математичний трактат про морський острів». У ньому на конкретних прикладах за допомогою методу подібних трикутників розкрив прийоми визначення відстані до недоступних об'єктів і їх розмірів: висота острова, сосни, вежі, ширина гір, стіни, річки, глибина ущелини, ями.

2. Пантограф — прилад для збільшення чи зменшення зображень. Поясніть принцип дії. Цей прилад свого часу активно використовувався у маркшейдерських роботах (освоєння родовища корисних копалин), геодезії та інших видах діяльності. З розвитком комп'ютерної техніки та машинної графіки роль пантографа суттєво зменшилась.



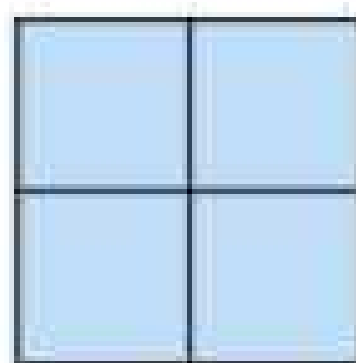
3. Використання подібності у:

- різних галузях знань (фізика — зображення в лінзах, біологія — багатократне збільшення складових крові тощо);
- архітектурі та будівництві (плани квартир, будинків тощо);
- виробництві (моделювання одягу і взуття, пакувальної продукції);
- мистецтві (схеми для вишивки хрестиком).

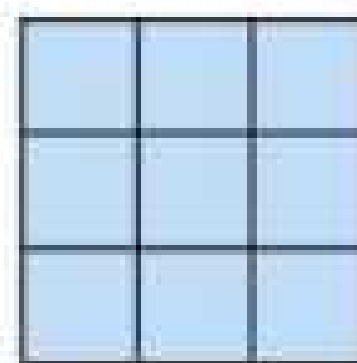
4. Простіші самоподібні фігури та їх створення.

Самоподібною геометричною фігурою називають фігуру, яку можна розбити на скінченну кількість її частин (що не мають спільних внутрішніх точок), кожна з яких подібна до всієї фігури з певним коефіцієнтом подібності.

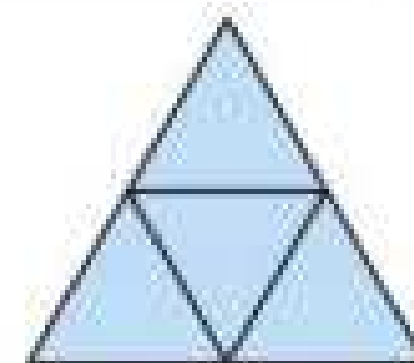




$$k = \frac{1}{2}$$



$$k = \frac{1}{3}$$



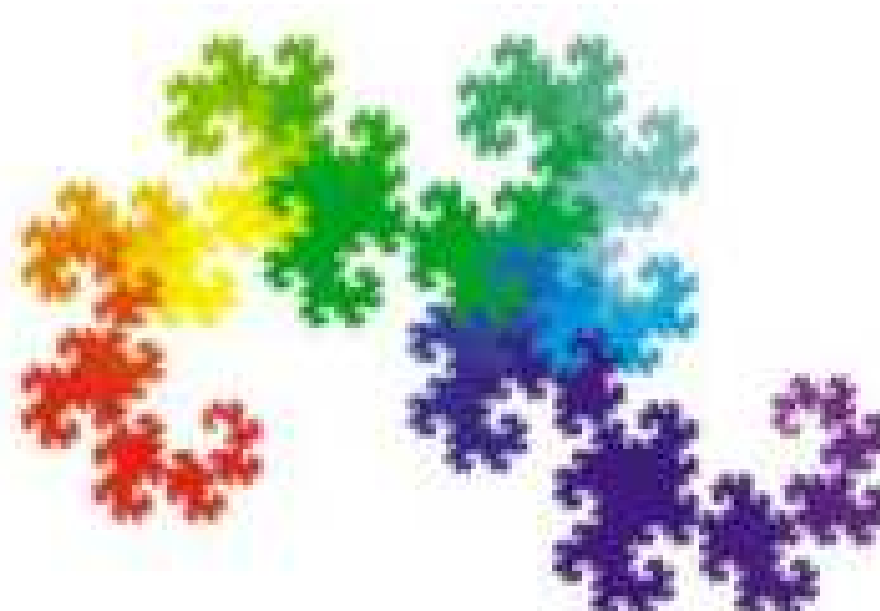
$$k = \frac{1}{2}$$

5. Фрактали як приклад самоподібних фігур. Розглянемо листок папороті. Кожен менший його листок, розміщений на стеблі, повторює будову великого листка. А кожен з листочків, розміщених на цих менших листках, подібний і до великого листка, і до меншого, на якому він розміщений.

Яскравим прикладом фрактала і самоподібної фігури є дракон Хартера.

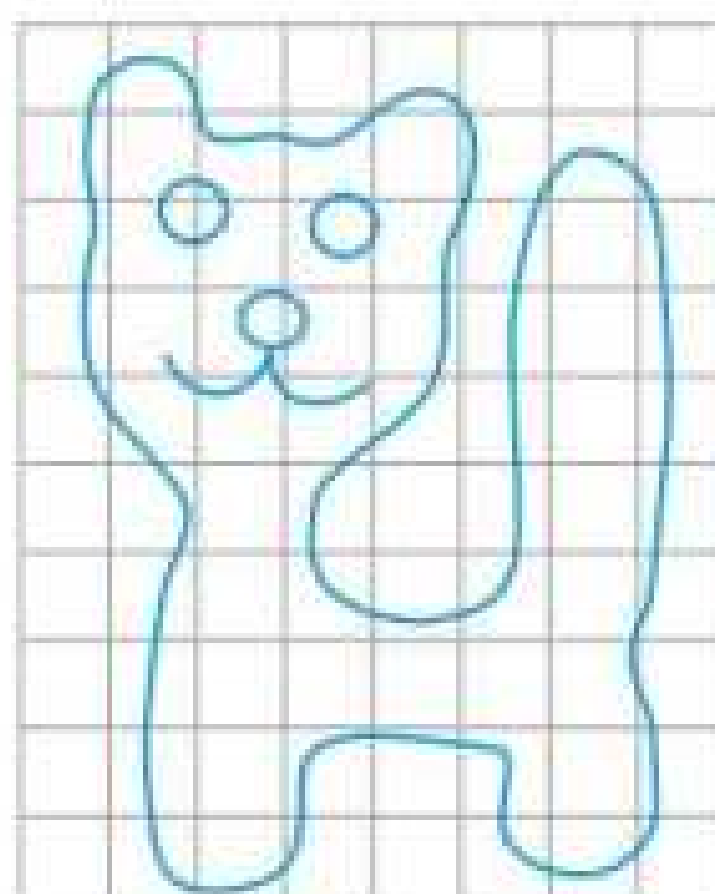


Листок папороті



Дракон Хартера

6. Використання подібності у побуті. Наприклад, ти хочеш зробити своїми руками подарунок татові. Це може бути м'яка іграшка «Киця». Викрійка розрахована на маленьку іграшку, а ти хочеш зробити більшу. Які твої дії? Як збільшити викрійку за допомогою клітинок?



Подібними є прихватки для посуду: маленькі — для дочки і сина, великі — для мами і тата.

Результати роботи над проектом кожна група оформлює у вигляді групового портфоліо з комп'ютерною презентацією.

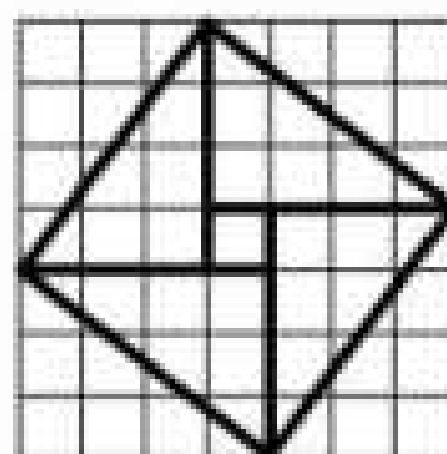
Навчальний проект 3. ПРЯМОКУТНІ ТРИКУТНИКИ В ІСТОРИЧНИХ ЗАДАЧАХ

Цей проект доцільно виконувати індивідуально за таким планом.

1. Що таке історичні задачі.
2. Визначні математичні задачі.
3. Приклади трьох історичних задач різних народів і різних часів, що стосуються прямокутного трикутника.
4. Розв'язування обраних задач.
5. Відомості про автора задачі (якщо такий є) або коротка характеристика епохи, в яку були створені задачі.

Задачі, збережені історією, що передаються від покоління до покоління, називають історичними задачами. Це задачі з давніх історичних пам'яток, задачі, створені відомими математиками або іншими історичними постатями, задачі з давніх підручників і трактатів, журналів та інших друкованих джерел, а також з математичних фольклорів різних народів.

Багато задач, які дійшли до нас з сивої давнини, цікаві не стільки в математичному, скільки в історичному розумінні: вони дають можливість сучасникам оцінити рівень розвитку математики в різні часи. Такі задачі були поставлені потребами практики і розв'язувались ще 2000 років до нашої ери, про що свідчать тексти єгипетських папірусів, вавилонських глиняних дощечок (визначення діагоналі квадрата, або гіпотенузи прямокутного трикутника), китайських рукописів (4 прямокутні трикутники зі сторонами 3, 4, і 5 і квадрат зі стороною 1 утворюють квадрат зі стороною 5).

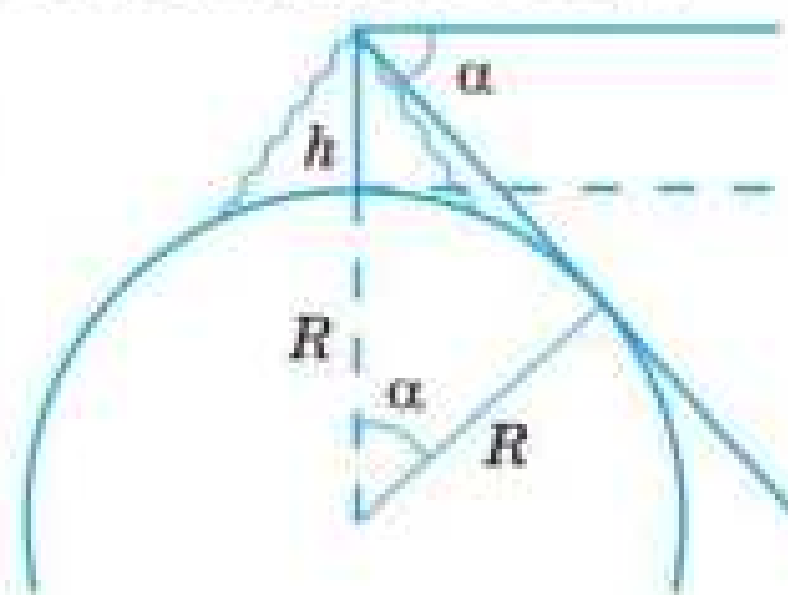


До визначних математичних задач належать задачі про квадратуру круга, подвоєння куба, трисекцію кута. Загально відомими є задачі про серпики Гіппократа, кенігсберзькі мости, чотири фарби тощо.

Розглянемо кілька історичних задач.

1. Задача Ал-Біруні. Знаючи висоту гори, яка знаходиться на відкритій місцевості, визначити радіус Землі.

Розв'язання. Нехай висота гори h , а радіус Землі R . Вимірявши α (кут нахилу горизонту з вершини гори), дістанемо $R = (R + h) \cos \alpha$. Можемо знайти R :



$$R = R \cos \alpha + h \cos \alpha \text{ або } R(1 - \cos \alpha) = h \cos \alpha. \text{ Звідси } R = \frac{h \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Абу-Рейхан аль-Біруні (973–1048) — хорезмський вчений-енциклопедист. Зробив значний внесок у математику, астрономію, фізику, мінералогію, історію та етнографію. Мав суттєві здобутки в арифметиці, алгебрі, геометрії та тригонометрії.



У III книжці «Канон Масуда» Біруні виклав свої міркування з тригонометрії: дав означення основних шести тригонометричних функцій, розглянув їх властивості, вивів деякі тригонометричні формули, склав таблиці залежності тригонометричних величин. Розвивав і широко застосовував тригонометрію як математичну основу практичної астрономії. Розробив новий метод визначення радіусу Землі шляхом спостереження положення горизонту з вершини гори.

2. Задача Г. Шрейбера. За даними гіпотенузою і сумою катетів знайти катети.

Розв'язання. Якщо c — гіпотенуза, а $a + b = s$ — сума катетів, то:

$c^2 = a^2 + b^2$ — теорема Піфагора;

$s^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, звідси $s^2 - c^2 = 2ab$.

Маємо систему рівнянь
$$\begin{cases} a + b = s, \\ a \cdot b = 0,5(s^2 - c^2). \end{cases}$$

Знаючи суму і добуток двох чисел, можемо знайти a і b .

Г. Шрейбер (≈ 1492 –1525) — німецький математик і теоретик музики, викладач математики віденського університету. Запропонована задача міститься у його трактаті «Вчення про цілі числа і дроби».

3. Задача Вієта. Якщо a і b — катети прямокутного трикутника, то $\sqrt{a^2 + b^2}$ — гіпотенуза, а якщо a — катет, а c — гіпотенуза прямокутного трикутника, то $\sqrt{c^2 - b^2}$ — інший катет. Користуючись цим, побудуй: 1) $a\sqrt{5}$; 2) $a\sqrt{11}$.

Розв'язання. Перетворимо кожен із виразів

$$1) a\sqrt{5} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2};$$

$$2) a\sqrt{11} = \sqrt{11a^2} = \sqrt{36a^2 - 25a^2} = \sqrt{(6a)^2 - (5a)^2}.$$

Маємо:

1) $a\sqrt{5}$ — гіпотенуза прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють a і $2a$.

2) $a\sqrt{11}$ — катет прямокутного трикутника зі сторонами $6a$ (гіпотенуза) і $5a$ (катет).

Франсуа Вієт (1540–1601) — видатний французький математик. За освітою юрист. Був адвокатом і радником французьких королів. Математикою займався на дозвіллі. Створив алгебраїчну символіку, що сприяло розвитку алгебри як науки. Застосував геометрію і тригонометрію до розв'язування рівнянь і у такий спосіб вивів багато співвідношень між тригонометричними функціями кутів.



Навчальний проєкт 4. СКЛАДАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ ПРО ПЛОЩІ ФІГУР

Пропонуємо два варіанти для організації проєкту.

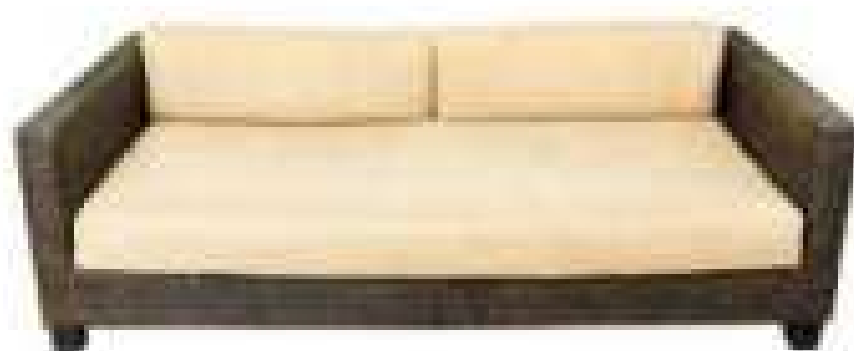
I. Прикладні задачі виникають у побуті, на виробництві, у промисловості, у сільському господарстві тощо. Тобто вони тісно пов'язані з життєдіяльністю людини. Цей навчальний проєкт може бути виконаний учнями та ученицями у тісній співпраці з родиною. Тоді можна зосередитися на таких питаннях:

1. Цікаве про площі фігур.
2. Задачі про визначення площ фігур у професійній діяльності моїх батьків.
3. Задачі про визначення площ фігур у побуті моєї родини.
4. Як я використовую набуті знання про площі фігур на практиці.

Цікаві відомості про площі фігур можуть стосуватися різних одиниць вимірювання: комп'ютерні таблиці конвертації одиниць площі, доведення формул для обчислення площ за допомогою оригамі тощо. Наприклад, старі слов'янські одиниці площ із сучасними співвідносяться так:

- 1 квадратна (кв.) верста = 250 000 кв. сажнів = 1,1381 км²;
- 1 десятина = 2 400 кв. сажнів = 1,0925 гектара = 10 925 м²;
- 1 копна = 0,1 десятини = 1 092,5 м²;
- 1 кв. сажень = 9 кв. аршинів = 4,5522 м²;
- 1 кв. аршин = 256 кв. вершків = 0,5058 м²;
- 1 кв. вершок = 19,758 см²;
- 1 кв. фут = 9,29 кв. дюйма = 0,0929 м²;
- 1 кв. дюйм = 6,452 см².

Останні два завдання можуть стосуватися, наприклад, визначення площі тканини, необхідної для перетяжки м'яких меблів чи розмірів плівки для оновлення каркасних меблів тощо.



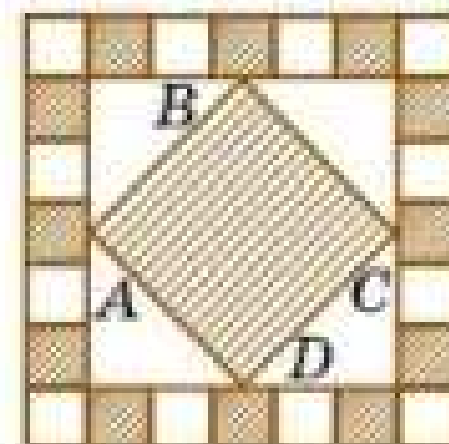
II. Навчально-пізнавальну діяльність під час роботи над проєктом можна організувати і за таким планом:

1. Задачі, що стосуються обчислення площ у давнину.
2. Цікаві правила вимірювання площ в народній математиці.

3. Давні та сучасні одиниці вимірювання площ у народів світу.
 4. Задачі про вимірювання площ у сільському господарстві.
 5. Вимірювання площ в легкій промисловості.
 6. Задачі економічного змісту, пов'язані з вимірюванням площ.
 7. Вимірювання площ у побуті.
 8. Задачі, що стосуються визначення площ на будівництві.
 9. Задачі, що стосуються визначення площ на транспорті.
- Розглянемо кілька прикладів.

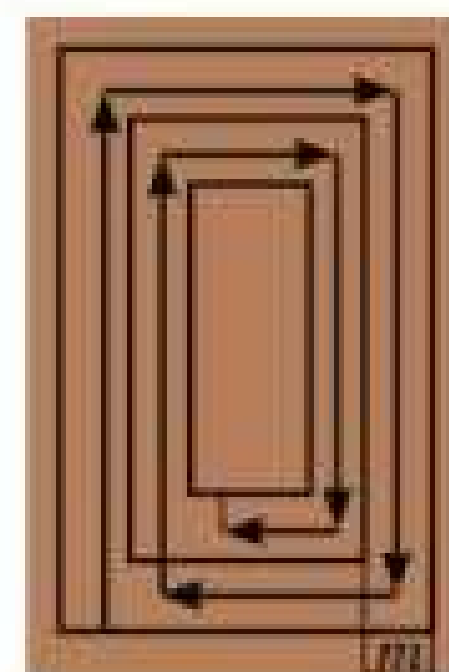
Задачі, що стосуються обчислення площ у давнину.

Задача Маймоніда (1138–1204). На ділянці площею 64 кв. долоні (8×8) зорано 13 грядок (на малюнку заштриховані): по 3 грядки площею 1 кв. долоня в кожній зовнішній смугі, а 13 — у вигляді квадрата, утвореного сполученням середин квадратів $ABCD$. Визначити, яку частину ділянки зорано.



Задачі про вимірювання площ у сільському господарстві.

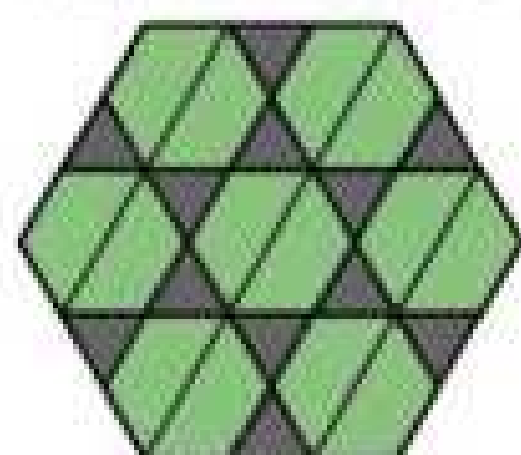
Задача А. Конфоровича. Комбайн з шириною захвату m збирає врожай з прямокутного поля площею S , ширина якого кратна подвоєній ширині захвату ($2mp$, де p — натуральне число). Яку відстань пройде комбайн, зібравши врожай на всьому полі?



Андрій Григорович Конфорович (1961–1997) — український вчений, фахівець історії математики та методики навчання математики, популяризатор математичних знань. У його доробку понад 200 друкованих праць, присвячених математичній підготовці учнів, історії математики, математичним іграм і головоломкам, застосуванням математики тощо.

Вимірювання площ у побуті.

Тротуарна плитка має розміри 200×100 мм. Скільки червоної та сірої плитки знадобиться для заощення доріжки, зображеної на малюнку, довжиною 10 м? Розрахуй кількість кожного виду плитки, якщо доріжку заощуватимуть так, як показано на двох інших малюнках.



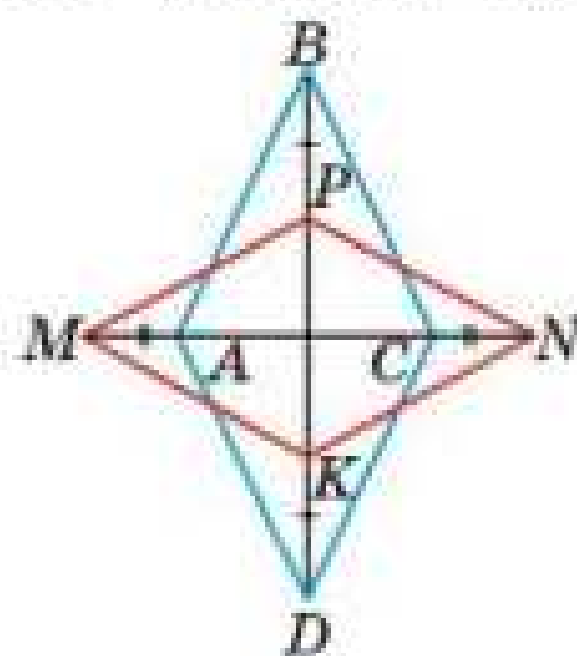
Клумба має форму шестигутника, кожна сторона якого дорівнює 15 м. Цю клумбу поділили на 14 рівних трапецій і 12 рівних трикутників. Обчисли площу клумби, засіяної травою (зелений колір). Яку частину клумби засіяно травою?



ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

До розділу 1

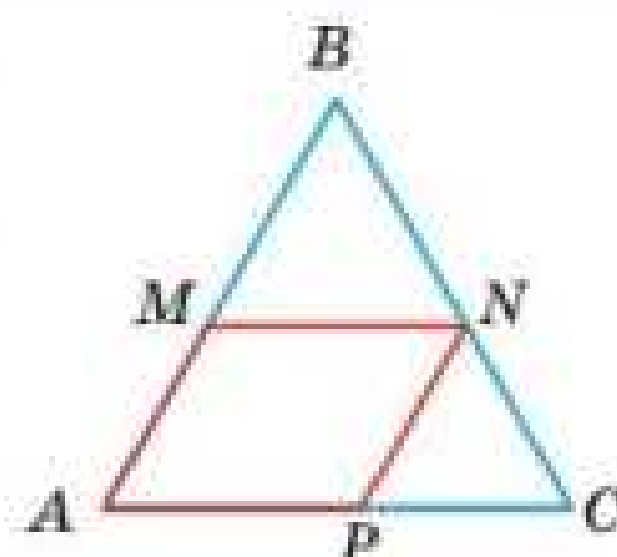
1226. Периметр паралелограма $MNPK$ дорівнює 48 см, а периметр трикутника MNP дорівнює 36 см. Знайди діагоналі паралелограма, якщо $MP : NK = 3 : 2$.
1227. Знайди периметр паралелограма $ABCD$, якщо $AB = a$ і бісектриса кута A перетинає сторону BC в її середині.
1228. Сторони прямокутника пропорційні числам 2 і 5, а точка перетину діагоналей віддалена від однієї зі сторін на 9 см менше, ніж від другої. Знайди периметр прямокутника.
1229. а) На діагоналі AC прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM і CN . Доведи, що $MBND$ — паралелограм.
б) Розв'яжи попередню задачу, якщо точки M і N лежать на продовженнях AC .
1230. На продовженнях діагоналей AC і BD прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM , BN , CP , DK . Доведи, що $MNPK$ — прямокутник.
1231. Знайди кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, один з яких на 20° більший за другий.
1232. Діагоналі ромба утворюють зі стороною кути, пропорційні числам 1 і 5. Знайди периметр ромба, якщо відстань між його паралельними сторонами дорівнює 8 см.
1233. Дано ромб $ABCD$ (мал. 22.3). $AM = CN$, $BP = DK$. Доведи, що $MPNK$ — ромб.
1234. На сторонах AB і CD квадрата $ABCD$ взято точки T і F так, що $AT = CF$. Доведи, що $TBFD$ — паралелограм.
1235. На продовженнях діагоналі AC квадрата $ABCD$ взято точки M і N так, що $AM = CN$. Доведи, що $MBND$ — ромб, і знайди його периметр, якщо $AC = 16$ см і $\angle ABM : \angle ABD = 1 : 3$.
1236. У рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 6 см вписано квадрат так, що прямий кут у них спільний. Знайди периметр квадрата.
1237. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на гіпотенузі, а дві — на катетах. Знайди довжину гіпотенузи, якщо периметр прямокутника 18 см, а одна зі сторін на 3 см більша за другу.



Мал. 22.3

1238. У рівносторонній $\triangle ABC$ вписано ромб $AMNP$ (мал. 22.4). Знайди периметр ромба, якщо периметр чотирикутника $AMNC$ дорівнює 60 см.

1239. Через вершину A $\triangle ABC$ проведено пряму AK ($K \in BC$), яка перетинає медіану BM у точці P . Доведи, що:
а) $BK : KC = 1 : 2$, якщо $BP = PM$;
б) $BK = KC$, якщо $BP : PM = 2 : 1$.



Мал. 22.4

1240. Сума двох кутів трапеції дорівнює 140° , а два інші кути пропорційні числам 4 і 7. Знайди кути трапеції.

1241. У рівнобічній трапеції з кутом 60° висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки 4 см і 10 см. Знайди периметр трапеції.

1242. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони і утворює з більшою основою, яка дорівнює 18 см, кут 45° . Знайди висоту трапеції.

1243. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута і перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 10 см. Знайди периметр трапеції, якщо її кути відносяться як 1 : 2.

1244. Знайди основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 8 см, а середня лінія 15 см.

1245. Середня лінія трапеції дорівнює 18 см і ділиться діагоналлю на відрізки, один з яких на 5 см більший за другий. Знайди основи трапеції.

1246. Основи трапеції пропорційні числам 2 і 5, а відрізок середньої лінії, який лежить між діагоналями, дорівнює 6 см. Знайди основи трапеції.

1247. Знайди основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює l і ділиться навпіл прямою, що проходить через вершину трапеції паралельно бічній стороні.

1248. Точки A і B лежать по один бік від прямої на відстані 7 см і 15 см від неї. Точки M , N , K ділять відрізок AB на 4 рівні частини. Знайди відстань від точок M , N , K до прямої.

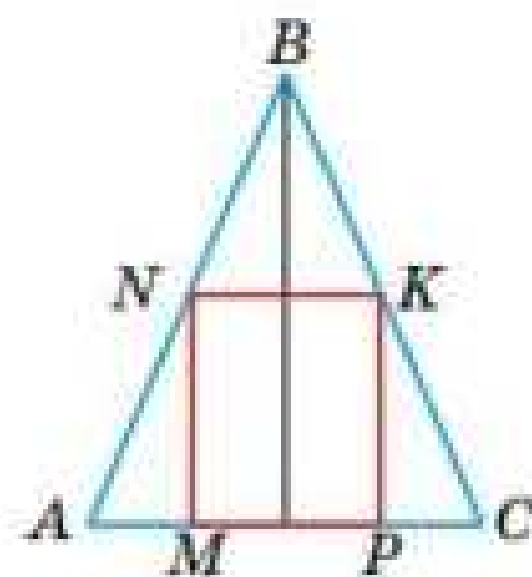
1249. Точки A і B лежать по один бік від прямої на відстані 2 см і 10 см від неї. Знайди відстань від точки M до прямої, якщо M лежить між A і B і $AM : MB = 1 : 3$.

1250. Бічні сторони трапеції лежать на перпендикулярних прямих. Доведи, що відрізок, який з'єднує середини основ трапеції, дорівнює їх піврізниці.

1251. Кутова міра дуги AB дорівнює 72° , а дуги AC — 39° . Знайди $\angle BOC$ і $\angle BAC$, де O — центр кола.

До розділу 2

1252. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а бічні сторони 6 см і 15 см. На скільки треба продовжити бічні сторони, щоб вони перетнулися?
1253. Сторони трикутника пропорційні числам 2, 7 і 8. Знайди сторони подібного трикутника, периметр якого 34 см.
1254. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 12 см і 15 см. Знайди периметр подібного трикутника, менша сторона якого 12 см.
1255. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 18 см. У якому відношенні діагоналі діляться точкою перетину?
1256. Вершина гострого кута A паралелограма $ABCD$ віддалена від прямих CB і CD на 4 см і 6 см відповідно. Знайди сторони паралелограма, якщо його периметр 80 см.
1257. Діагональ розбиває трапецію з основами 12 см і 27 см на два подібні трикутники. Знайди довжину цієї діагоналі.
1258. Точка M ділить сторону AD паралелограма $ABCD$ на відрізки $DM = 8$ см і $AM = 12$ см. K — точка перетину прямих BM і CD . Доведи: а) $\triangle ABM \sim \triangle DKM$; б) $\triangle ABM \sim \triangle CKB$; в) $\triangle MKD \sim \triangle BKC$. Знайди периметр $\triangle ABM$ і $\triangle BKC$, якщо периметр $\triangle MKD$ дорівнює p .
1259. Бісектриса $\angle A$ паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці F , а продовження сторони CD — в точці K . Знайди периметр трикутників ABF і FKC та чотирикутника $AFCD$, якщо $BF = 24$ см, $FC = 8$ см, $AK = 52$ см.
1260. Паралелограм, сторони якого пропорційні числам 2 і 3, вписано в $\triangle ABC$ так, що кут A у них спільний. Знайди периметр паралелограма, якщо $AB = 8$ см, $AC = 12$ см.
1261. У рівнобедрений трикутник з основою 10 см і висотою 12 см вписано прямокутник $MNKP$ (мал. 22.5). Знайди периметр прямокутника, якщо $KP - NK = 1$ см.
1262. У паралелограм вписано ромб так, що його сторони паралельні діагоналям паралелограма, які дорівнюють 12 см і 18 см. Знайди сторону ромба.
1263. Через точку O перетину діагоналей трапеції проведено пряму, паралельно основам трапеції. Знайди довжину відрізка цієї прямої, який лежить між бічними сторонами трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 12 см, а діагоналі точкою O діляться у відношенні 1 : 3.
1264. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки M і N так, що $MN \parallel AC$ і півколо, побудоване на MN , як на діаметрі, дотикається до AC . Знайди його радіус, якщо $AC = 30$ см, а висота $BH = 10$ см.



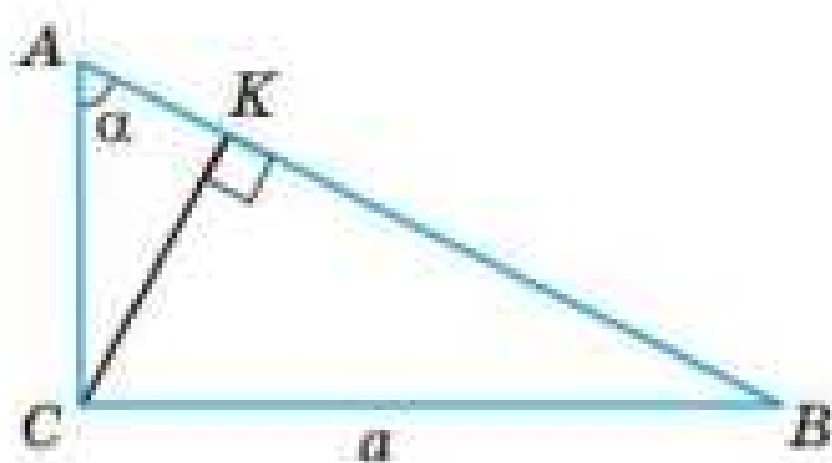
Мал. 22.5

1265. Кола радіусів 3 см і 9 см дотикаються одне до одного і до сторін кута. Знайди відстань від вершини кута до центра меншого з кіл.
1266. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 10 см і 12 см. Знайди відрізки, на які бісектриса ділить середню за довжиною сторону.
1267. Бісектриса, проведена з вершини прямокутника, ділить діагональ на відрізки, пропорційні числам 2 і 5. У якому відношенні ця бісектриса ділить сторону прямокутника?
1268. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 18 см, а бічна сторона відноситься до основи як 5 : 8. Знайди радіус вписаного кола.
1269. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, на відрізки, пропорційні числам 2 і 5. Знайди сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 56 см.
1270. Точка A лежить на відстані 4 см від центра кола і ділить хорду BC завдовжки 9 см на відрізки, різниця яких дорівнює 1 см. Знайди радіус кола.
1271. Продовження хорди AB і діаметра CD перетинаються в точці M . Знайди відстань від точки M до центра кола, якщо $MA = 9$ см, $MB = 4$ см, а радіус кола дорівнює 8 см.
1272. Периметр $\triangle ABC$ дорівнює 27 см. Знайди периметр $\triangle KBL$, де KL — пряма, що проходить через точку перетину медіан $\triangle ABC$ паралельно AC ($K \in AB$, $L \in BC$).
1273. Висота прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки m і n . Знайди катети трикутника.

До розділу 3

1274. Знайди висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 13 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.
1275. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині 120° , а основа 60 см. Знайди периметр трикутника.
1276. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 8 см і 18 см. Знайди радіус вписаного кола.
1277. Знайди діагоналі рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона 13 см.
1278. Знайди всі медіани прямокутного трикутника з катетами 8 см і 12 см.
1279. Знайди бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника з катетами 6 см і 8 см.
1280. Центр кола лежить на гіпотенузі прямокутного трикутника. Коло проходить через вершину більшого гострого кута і дотикається до більшого катета. Знайди радіус кола, якщо катети дорівнюють 12 см і 16 см.

1281. У трикутник вписано ромб з діагоналями 12 см і 16 см так, що один кут у них спільний, а протилежна вершина ділить сторону трикутника у відношенні 2 : 3. Знайди сторони трикутника, які містять сторони ромба.
1282. З точки A до прямої a проведено дві похилі, довжини яких $\sqrt{10}$ і $3\sqrt{10}$. Знайди відстань від A до прямої та проєкції похилих на пряму, якщо кут між похилими 90° .
1283. З точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі. Знайди довжину перпендикуляра, якщо довжини похилих 29 см і 41 см, а їх проєкції пропорційні числам 2 і 3.
1284. Знайди кути прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 2 см і $2\sqrt{3}$ см.
1285. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють $4\sqrt{2}$ см і 4 см. Знайди кути трикутника.
1286. Знайди кути рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 11 см, а бічна сторона $2\sqrt{3}$ см.
1287. Розв'яжи прямокутні трикутники, якщо:
а) $a = 12,3$ см, $\angle A = 71^\circ$;
б) $c = 24,3$ см, $b = 17,8$;
в) $a = 5,6$, $\angle B = 18^\circ$.
1288. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a , а кут при основі α . Знайди площу трикутника.
1289. Знайди діагоналі ромба, сторона якого дорівнює a , а гострий кут α .
1290. У рівнобічну трапецію з гострим кутом α вписано коло радіуса r . Знайди периметр і площу трапеції.
1291. Знайди радіус кола, вписаного в ромб, сторона якого дорівнює l , а гострий кут 2α .
1292. Знайди площу $\triangle ABC$, якщо висота $BH = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$.
1293. У прямокутному трикутнику ABC $\angle A = \alpha$, $CB = a$, $CK \perp AB$ (мал. 22.6). Установи відповідність між відрізками (1–4) та їх довжинами (А–Д).



Мал. 22.6

1 AK	А $a \sin \alpha$
2 AC	Б $\frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$
3 CK	В $a \cos \alpha$
4 BK	Г $\frac{a}{\cos \alpha}$
	Д $\frac{a}{\sin \alpha}$

До розділу 4

1294. Периметр квадрата дорівнює p . Чому дорівнює його площа?
1295. Знайди площу квадрата, якщо: а) радіус вписаного кола дорівнює r ; б) радіус описаного кола дорівнює R .
1296. Знайди площу прямокутника, якщо:
а) одна сторона більша за другу на 5 см, а периметр дорівнює 22 см;
б) сторони пропорційні числам 2 і 7, а їх різниця дорівнює 15 см;
в) одна сторона в 4 рази більша за другу, а периметр дорівнює 20 см;
г) одна зі сторін 8 см, а діагональ на 4 см більша за другу сторону.
1297. Знайди периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 126 см^2 і: а) сторони пропорційні числам 2 і 7; б) різниця сторін дорівнює 15 см.
1298. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 60° . Знайди його площу.
1299. Сторони прямокутника дорівнюють 4 см і 8 см. Знайди площу чотирикутника, вершини якого — точки перетину бісектрис кутів даного прямокутника.
1300. Знайди площу прямокутника, якщо перпендикуляр, опущений з вершини прямого кута на діагональ, ділить її на відрізки 9 см і 16 см.
1301. Знайди площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 70 см, а бісектриса, проведена з його вершини, ділить діагональ на відрізки, пропорційні числам 3 і 4.
1302. Знайди площу прямокутника, якщо бісектриса, проведена з його вершини, ділить діагональ на відрізки 15 см і 20 см.
1303. Основа і висота паралелограма відповідно дорівнюють 12 см і 3 см. Накресли рівновеликий йому: а) квадрат; б) прямокутник; в) ромб; г) трикутник.
1304. Сторони прямокутника і паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см. Знайди відношення їх площ, якщо гострий кут паралелограма дорівнює 30° .
1305. Висоти паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см. Знайди площу паралелограма, якщо один з його кутів 30° .
1306. Сторони паралелограма 10 см і 16 см. Знайди його площу, якщо кут між висотами 30° .
1307. Периметр ромба дорівнює 36 см. Знайди його площу, якщо один з кутів дорівнює 150° .
1308. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 24 см. Знайди периметр і площу ромба.
1309. Периметр ромба дорівнює 13,6 см, а одна з діагоналей 3,2 см. Знайди площу ромба.
1310. Різниця діагоналей ромба дорівнює 6 см. Знайди його площу, якщо сторона дорівнює 15 см.

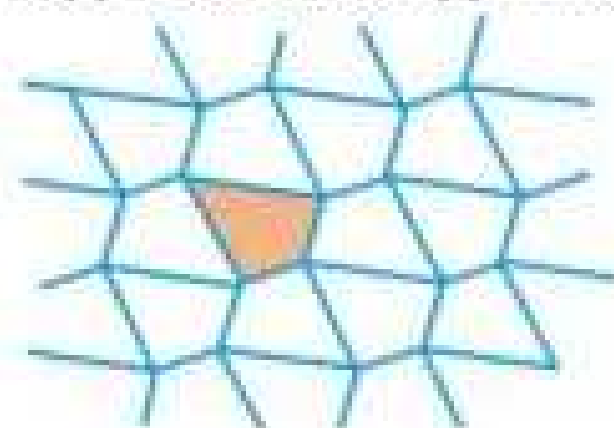
1311. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 25 см і 45 см, а бічна сторона 26 см. Знайди площу трапеції.
1312. У прямокутній трапеції основи дорівнюють 25 см і 32 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайди площу трапеції.
1313. У прямокутну трапецію вписано коло радіуса 4 см. Знайди площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см.
1314. У рівнобічну трапецію, площа якої дорівнює 28 см^2 , вписано коло радіуса 2 см. Знайди бічну сторону трапеції.
1315. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні. Знайди площу трапеції.
1316. Діагоналі рівнобічної трапеції точкою перетину діляться у відношенні 3 : 13, а більша основа дорівнює бічній стороні. Знайди площу трапеції, якщо її висота дорівнює 36 см.
1317. Площа рівнобічної трапеції дорівнює 12 см^2 , а висота 2 см. Знайди сторони трапеції, якщо прямі, що містять її бічні сторони, перетинаються під прямим кутом.
1318. Трапеція вписана в коло, центр якого лежить на більшій основі, а радіус дорівнює 6 см. Знайди площу трапеції, якщо менша основа дорівнює 4 см.
1319. Доведи, що пряма, яка проходить через середини основ трапеції, ділить її на дві рівновеликі частини.
1320. Середня лінія трапеції дорівнює 10 см і ділить площу трапеції на частини, пропорційні числам 3 і 5. Знайди основи трапеції.
1321. Основи трапеції дорівнюють 1 см і 7 см. Знайди довжину відрізка, який паралельний основам і ділить трапецію на рівновеликі частини.
1322. Знайди площу рівнобедреного трикутника, якщо основа і бічна сторона пропорційні числам 6 і 5, а висота, проведена до основи, дорівнює 16 см.
1323. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 15 см і 20 см. Знайди площу трикутника.
1324. Із середини сторони трикутника проведено прямі, паралельні двом іншим сторонам. Доведи, що площа утвореного чотирикутника дорівнює половині площі трикутника.
1325. Дві сторони трикутника дорівнюють 25 см і 40 см, а висота, проведена до третьої сторони, дорівнює 24 см. Знайди площу трикутника й інші висоти.

За QR-кодом ти знайдеш тренувальні тести й запитання для повторення за рік.



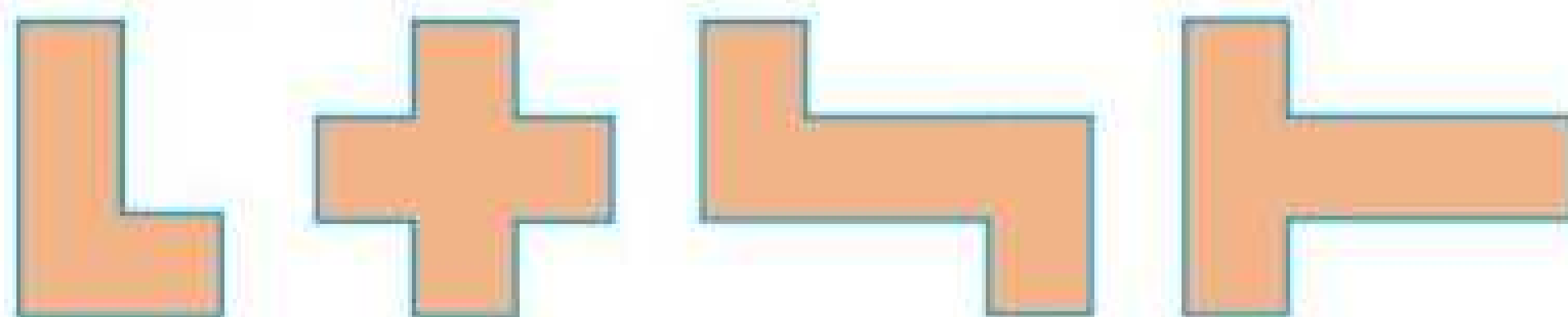
ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1325. Доведи, що будь-яку трикутну пластинку можна розрізати на три частини, які мають форму трапеції.
1327. Як розрізати квадратну пластинку на 8 частин, кожна з яких мала б форму непрямокутної трапеції?
1328. Точки K , L , E і F — середини сторін AB , BC , CD і DA чотирикутника. Доведи, що коли $AC \perp BD$, то $KE = FL$.
1329. Доведи, що сума діагоналей опуклого чотирикутника менша за його периметр, але більша за півпериметр.
1330. Знайди периметр чотирикутника, утвореного перетином бісектрис кутів прямокутника, сторони якого дорівнюють $2a$ і $3a$.
1331. На діагоналі AC ромба $ABCD$ взято довільну точку P . Доведи, що $AP \cdot PC = AB^2 - PB^2$.
1332. Рівносторонній трикутник ABK розміщений зовні квадрата $ABCD$. Знайди кут CKD . А якщо $ABCD$ — довільний ромб?
1333. $ABCD$ і ABK — квадрат і рівносторонній трикутник. Прямі KC і BD перетинаються в точці P . Доведи, що $KP = PD$. Розглянь два випадки.
1334. Знайди кут між діагоналями паралелограма $ABCD$, якщо бісектриси кутів BAC і BDC перетинаються під кутом 45° .
1335. Точки A і B лежать усередині даного кута. Побудуй паралелограм $ABCD$ з вершинами C і D на сторонах цього кута.
1336. Побудуй квадрат за сумою діагоналі і сторони.
1337. Побудуй квадрат за різницею діагоналі і сторони.
1338. Як за допомогою самого лише циркуля в прямокутний трикутник з катетами 3 і 4 вписати коло?
1339. Доведи, що відрізок, який сполучає будь-які точки основ трапеції, ділиться її середньою лінією на дві рівні частини.
1340. **Задача Регіомонтана.** Доведи, що висоти трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці.
1341. Вершини трикутника віддалені від прямої, яка не перетинає його, на 6 см, 7 см і 11 см. Як віддалена від цієї прямої точка перетину медіан трикутника?
1342. Дано пряму a і точки A і B по різні боки від неї. Знайди на a точку, рівновіддалену від A і B .
1343. Дано пряму a і точки A та B з одного боку від неї. Знайди на a таку точку M , щоб сума $AM + MB$ була найменшою.
1344. Доведи, що будь-якими рівними чотирикутниками, як паркетинами, можна покрити площину (мал. 23.1).



Мал. 23.1

1345. Фігуру F називають паркетною, якщо фігурами, рівними F , можна покрити площину. Доведи, що зображені на малюнку 23.2 фігури паркетні.



Мал. 23.2

1346. Якщо дві сторони п'ятикутника паралельні, то такий п'ятикутник — фігура паркетна. Доведи.
1347. $ABCD$ — паралелограм. Зовні нього побудовано квадрати $ABFE$ і $BCKM$. Доведи, що відрізки DK і ED рівні і перпендикулярні.
1348. На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ зовні нього побудовано рівносторонні трикутники BSK і CDP . Доведи, що $AK = AP = KP$.
1349. На сторонах трикутника ABC зовні нього побудовано квадрати $ABKP$ і $CBFE$. Доведи, що трикутники ABC і BFP рівновеликі.
1350. Побудуй рівнобедрений трикутник за основою і медіаною, проведеною до бічної сторони.
1351. Побудуй трикутник за двома сторонами і півсумою кутів при третій стороні.
1352. Побудуй чотирикутник за чотирма сторонами і кутом між двома послідовно даними сторонами.
1353. Доведи, що дві рівнобічні трапеції рівні, якщо чотири сторони однієї з них дорівнюють відповідним сторонам другої.
1354. Чи існує чотирикутник, кожна сторона якого перпендикулярна до протилежної сторони?
1355. Через центр квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведи, що відрізки цих прямих, які містяться всередині квадрата, рівні.
1356. Через точку перетину медіан рівностороннього трикутника проведено дві прямі, кут між якими 60° . Доведи, що відрізки цих прямих, які містяться всередині трикутника, рівні.
1357. Усередині квадрата зі стороною 6 дм позначено 50 точок. Доведи, що серед них є такі точки, відстань між якими менша за 1,5 дм.
1358. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle B = 100^\circ$, $\angle ABD = 50^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$. Знайди кут ACD .
1359. Знайди відношення катетів прямокутного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює $22,5^\circ$.
1360. Доведи, що сума катетів прямокутного трикутника менша від 1,5 гіпотенузи.
1361. Чи існує прямокутний трикутник, куб гіпотенузи якого дорівнює сумі кубів катетів?

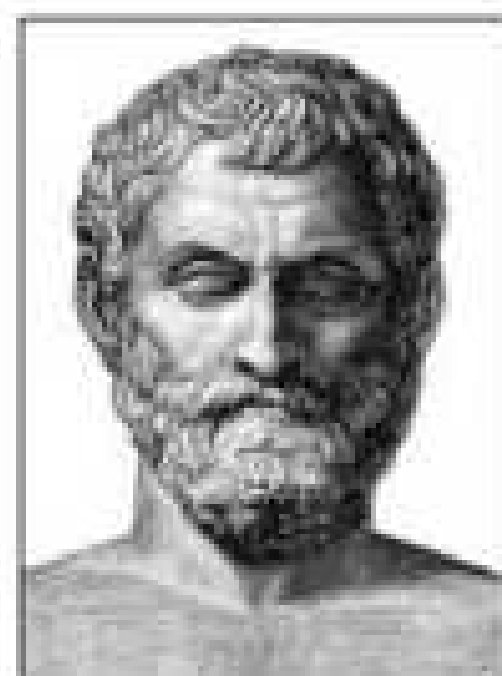
- 1362.** *Задача Діофанта.* Знайди сторони прямокутного трикутника, якщо вони дорівнюють x^3 , $x^3 - x$ і $x^3 + x$, де x — якесь число.
- 1363.** *Задача Архімеда.* Якщо хорди AB і CD кола перетинаються в точці P під прямим кутом, то сума квадратів відрізків AP , BP , CP , DP дорівнює квадрату діаметра кола. Доведи.
- 1364.** *Задача ал-Каші.* Спир стояв у воді вертикально і піднімався над водою на 3 лікті. Вітер відхилив його так, що вершина спіра зрівнялась з поверхнею води на відстані 5 ліктів від початкового положення спіра. Знайди довжину спіра.
- 1365.** *Задача Евкліда про золотий поділ.* Даний відрізок AB точкою P поділи так, щоб виконувалась умова $AP : PB = PB : AB$.
- 1366.** *Задача Евкліда.* В дане коло впиши трикутник, подібний даному трикутнику.
- 1367.** *Стародавня китайська задача.* Є горизонтальний катет у 5 бу і вертикальний катет у 12 бу. Знайди сторону квадрата, вписаного в цей трикутник.
- 1368.** *Задача ал-Хорезмі.* Знайди сторону квадрата, вписаного в рівнобедрений трикутник з бічною стороною 10 і основою 12.
- 1369.** Впиши у даний гострокутний трикутник інший трикутник так, щоб його сторони були перпендикулярні до сторін даного трикутника.
- 1370.** Впиши у дане коло трапецію з даними основами.
- 1371.** *Задача Ейлера.* Доведи, що в кожному чотирикутнику сума квадратів сторін дорівнює сумі квадратів його діагоналей і чотирьох квадратів відрізків, який сполучає середини діагоналей.
- 1372.** Знайди відстань від початку координат до прямої, рівняння якої $3x + 4y = 24$.
- 1373.** Висоти AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці H . Доведи, що $A_1H \cdot A_1A = BA_1 \cdot CA_1$ і $B_1H \cdot B_1B = CB_1 \cdot AB_1$.
- 1374.** На сторонах AB і CD квадрата $ABCD$ зовні нього побудовано квадрати $ABKP$ і $CDEF$. Доведи, що $\angle KEP + \angle KDP = \angle KAP$.
- 1375.** Основи трапеції дорівнюють 3 і 5, а бічні сторони 2 і $2\sqrt{2}$. Знайди кути трапеції.
- 1376.** На діаметрі AB кола, паралельного його хорді CD , взято довільну точку M . Доведи, що $MC^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2$.
- 1377.** Доведи, що в прямокутному трикутнику з гострим кутом 15° добуток катетів дорівнює квадрату половини гіпотенузи.
- 1378.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b . Знайди довжину бісектриси, проведеної до гіпотенузи.

З історії геометрії

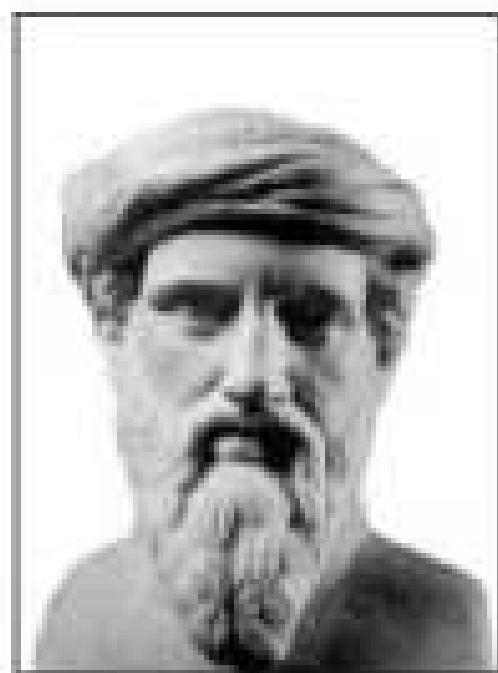
Геометрія — одна з найдавніших наук. Спочатку її пов'язували тільки з вимірюванням земельних ділянок. Згодом геометричні відомості почали застосовувати до вимірювання висот, глибин, різних відстаней. Перший знаний нами геометр Фалес Мілетський, один із семи найвідоміших античних мудреців, знав властивості рівних і навіть подібних трикутників.

Фалес (кінець VII — початок VI ст. до н. е.) — грецький астроном і математик. За свідченням грецького історика Плутарха, Фалес вимірював висоту єгипетської піраміди за довжиною її тіні: довжина тіні піраміди відноситься до довжини тіні вертикального стовпа, поставленого поруч з пірамідою, як невідома висота піраміди відноситься до довжини цього стовпа.

Теорему, яку тепер називають теоремою Фалеса, можливо, сам він і не знав. Жодне з його доведень до нас не дійшло.



Фалес



Піфагор

Піфагор Самоський (VI ст. до н. е.) знав багато властивостей геометричних фігур і натуральних чисел. Теорему про катети і гіпотенузу прямокутного трикутника, яку тепер називають його ім'ям, ще раніше знали єгипетські мудреці. Але Піфагор, здається, першим довів її як теорему. Він і його учні вперше показали, що сторона квадрата і його діагональ не мають спільної міри, тобто якщо довжина сторони квадрата дорівнює 1, то довжину його діагоналі не можна виразити раціональним числом. Це було дуже важливе відкриття. Оскільки античні математики не

ввели ірраціональних чисел, то вони більше оперували відрізками, ніж числами.

Герон Александрійський (I ст. до н. е.) — давньогрецький винахідник і геодезист, написав книгу «Діоптрика», яку можна вважати першою працею з геодезії. Пояснював, як можна виміряти площу поля, не виходячи за його межі, як знімати плани земельних ділянок. Сконструював прилад для вимірювання кутів у просторі, за принципом якого пізніше створювали теодоліти.

Про **чотирикутники**, зокрема про паралелограми, в «Основах» Евкліда відомостей є більше, ніж у нашому підручнику. Розглядалися тоді також прямокутники, ромби, квадрати, трапеції. Трактувалися ці поняття не так, як тепер. Трапеціями раніше називали всі чотирикутники, крім паралелограмів.

Теорему, яку ми тепер називаємо Піфагора, Евклід формулював так: «У прямокутному трикутнику квадрат побудований на стороні, протилежній прямому куту, дорівнює сумі квадратів, побудованих на катетах, які обмежують прямий кут». Евклід «квадрат» називав і його площу. Показав, що площі квадратів $ACEF$ і $CBMN$ дорівнюють відповідно площам прямокутників $ANLP$ і $BMNQ$. Спробуйте здійснити таке доведення самостійно.

І про подібність трикутників в «Елементах» Евкліда багато тверджень, хоча формулювання. Наприклад, доведено таку теорему: «Якщо в трикутнику проведено пряму, паралельну одній із його сторін, дві інші його сторони або їх продовження розділяються на частини, і навпаки».

Подібності фігур присвячено всю 6-ту книгу «Елементів». Площі многокутників. Правильного многокутника, трикутника і трапеції вчені Вавилонії знайшли формули для обчислення площі. Згодом було названо формулою Герона.

із Кенігсберга (або, як його ще прозвали, **Регіомонтан**), склали ще точніші таблиці для всіх тригонометричних функцій гострого кута.

Символічне позначення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ і строгу систему вивчення тригонометричних функцій розробив швейцарський академік **Леонард Ейлер**.

У Київській Могилянській академії **Феофан Прокопович** ознайомлював спудеїв (учнів, студентів) з вимірювальними роботами на місцевості. Починав він цей курс так: «Спеціальна геометрія, яку іноді називають практичною геометрією, а іноді геодезією, є однією з найшляхетніших, найкорисніших і найцікавіших галузей математики. Адже вона займається не лише вимірюванням землі, від чого колись і дістала свою назву, але вимірює все, що підлягає вимірюванню...».

З українських геометрів найбільш відомі: М. Остроградський, Г. Вороний, М. Ващенко-Захарченко, О. Смогоржевський.



М. В. Остроградський

Михайло Васильович Остроградський (1810–1862) народився в селі Пашенна на Полтавщині, навчався в Харківському університеті і в Парижі, був почесним академіком багатьох академій світу, зокрема Петербурзької, Паризької, Римської, Туринської. Товаришував з Тарасом Шевченком. Працював у багатьох галузях математики і механіки, а для шкіл написав «Підручник з елементарної геометрії», який виявився настільки цікавим і змістовним, що його ще раз передрукували у 2001 р. в Тернополі.

Георгій Феодосійович Вороний (1868–1908) народився у селі Журавка Чернігівської області. Навчався у Прилуцькій гімназії. Петербурзькому університеті. Був професором Варшавського університету, деканом механічного факультету Варшавського політехнічного інституту, працював у галузях геометрії і теорії чисел. Його вважають творцем геометричної теорії чисел. Тривалий час його праці мало привертати до себе увагу, а тепер до них звертаються дедалі більше фахівців усього світу. «Діаграмам Вороного» присвячувалися спеціальні великі міжнародні конференції (в тому числі веб-конференції) в США, Японії, Південній Кореї, Нідерландах, Канаді, Великобританії. У 2008 р. світ відзначив 100 років пам'яті великого математика, а його праці з геометрії з часом стають ще потрібнішими і цікавішими.



Г. Ф. Вороний

Така вона — геометрія. З роками не старіє, а стає дедалі необхіднішою.

Предметний

Аксіома Евкліда 135

Бісектриса трикутника 109

Вершина многокутника 179

— чотирикутника 6

Висота паралелограма 15

— прямокутного
трикутника 119

— трапеції 45

Відношення

— відрізків 82

— подібності фігур 92

Властивості

— квадрата 25

— паралелограма 14, 24

— подібності фігур 92

— ромба 24

— тригонометричних
функцій 176

Подібність

- прямокутних
трикутників 118
- трикутників 91
- фігур 90

Похила 144

Проекція похилої 144

Пропорційні відрізки 82

Прямокутник 24

Розв'язування трикутників 162

Ромб 24

Середнє пропорційне 119

Середня лінія

- трапеції 45
- трикутника 37

Синус кута 151

Смуга 16

Сторона

- многокутника 179
- чотирикутника 6

Відповіді

26. 8 см. 28. 60° , 120° , 60° , 120° . 31. 110° , 100° , 90° , 60° . 33. Б, В, А, Д.
34. 18 см. 64. 90° . 66. 45° ; 135° ; 45° ; 135° . 72. а) 8 см, 16 см, 8 см, 16 см.
76. 5 см і 7,5 см. 83. 40° . 84. 30 см. 85. 40 см. 86. 5 см і 12 см. 87. 26 см
або 22 см. 88. 8 см, 12 см.

100. В, Д, Б, Г. 103. $2(a + b)$, або $2(b + c)$, або $2(a + c)$. 122. 6 см.
124. 80° . 128. 44 см. 129. 8 см. 132. 66 см. 133. 8 см і 20 см. 134. 52 см.
140. 30° , 30° , 30° . 141. 24 см або 30 см. 147. 24 см. 161. 3 см і 9 см.
162. 1 : 3. 164. 9 см. 165. 28 см. 173. 7 см. 175. 24 см. 180. Г, Д, В, Б.

204. 16 см. 210. 28 см. 211. 4 см і 10 см. 212. 77 см. 213. 30 см.
214. $d + d_1$. 216. 4 см, 8 см, 7 см. 225. 32 см. 235. 1) $AC = BD$, 2) $AC \perp BD$.
236. $AC = BD$ і $AC \perp BD$. 240. 2 см. 260. а) 10 см і 15 см; б) 5 см і 20 см.
269. а) 50° , 130° , 50° , 130° ; б) 80° , 100° , 130° , 50° . 274. 120° , 40° . 374. 9 см
і 21 см. 275. 44 см. 276. 34 см. 277. 14 см. 278. 3 см. 286. б) 24 см і
48 см; в) 32 см і 40 см. 289. 3 см. 292. 33 см. 296. 10 см, 10 см, 10 см,
2 см. 297. 60° , 120° , 60° , 120° . 298. 102 м. 299. 10 см і 15 см.

301. 8 см, 4 см, 8 см, 12 см. 302. 7 см. 305. 4,5 см. 309. 75 см. 311. $\frac{4a}{3}$;
 $\frac{5a}{3}$. 312. CD . 347. $118^\circ 30'$ або $43^\circ 48'$. 348. 75° . 350. 20° . 354. 45° , $52,5^\circ$,
 $82,5^\circ$. 355. 30° і 150° . 358. Б, В, Д, Г. 365. 40° , 100° , 40° . 366. 20° , 80° ,
 80° . 367. 52° , 62° , 66° . 368. 5, 7 і 8. 371. 70° , 90° . 373. 90° , 40° . 375. $67,5^\circ$.
376. 70° . 382. 150° або 105° .

403. 8 м. 412. 11 см. 413. 12 см. 417. 1,5 см. 419. 1,5 см. 420. 4,5 см.
421. 60 см. 422. 21 см. 423. В, Б, Г. 431. 12 см. 432. 78° , 128° , 102° ,
 52° . 433. 88° , 94° , 86° , 92° . 435. 23° (спочатку доведи, що навколо чо-
тирикутника $PAMB$ можна описати коло). 439. 2 см і 6 см. 442. 6 см.

443. 80° і 140° . 445. Поза трапецією. 483. $0,5a$, $0,1a$, $0,4a$. 488. Б, В, Г.
489. $1:3$, $1:4$. 490. $27:8$, $4:3$. 491. 7,5 см, 12 см.

516. 24 см. 520. 5 см. 521. 15 см. 522. 21 см. 523. 44 см і 48 см.
524. 6 см, 17,5 см. 525. 6) 60 см і 20 см. 526. $1:3:1$, $1:4$. 527. 6,4 см,
23,4 см. 528. 7,2 см. 529. 12 м. 530. 12 см. 557. 6 см, 12 см, 4 см.
561. 6) 4 см, 8 см, 14 см, в) 6 см, 12 см, 21 см. 566. 25 см, 15 см, 35 см.
567. 8 см, 3 см, 4 см. 568. 10 см, 8 см. 569. 22 см. 570. 13,5 см, 10,5 см.
571. 15 см. 572. 3 см, 4,5 см. 573. 2 см і 10 см. 577. 20 см. 578. 20 см
і 2 см. 579. 18 см. 582. 15 см; 14 см або $18\frac{2}{3}$ см. 585. $3\frac{2}{3}$ м і $8\frac{1}{3}$ м.
586. 8 см. 587. 12 см. 588. 12 см. 591. 6 см і 9 см. 592. 15 см. 593. 10 см
і 18 см.

611. а) 6 см і 15 см; б) 12 см; в) 36 см. 614. 88 см. 615. $3:5$; 6 см і
10 см. 616. 3 см. 617. 102 см. 622. 12 см. 625. 40 см, 37 см. 627. 16 см.
630. 36 см. 632. 6 см, 12 см. 634. 15 см, 20 см. 635. 20 см. 637. Б, Г, Д.
640. 7,5 см, 10,5 см. 641. 26 см, 26 см, 20 см. 643. 39 см, 21 см, 27 см.
644. 15 см, 21 см, 24 см. 645. 28 см, 29 см. 646. $3:8$. 649. $mn:(m+n)$.
675. 4,5 см, 13,5 см. 677. 60 см. 679. Б, Г, Д. 684. 54 см. 685. 126 см.
686. 122 см. 687. 62 см. 689. 28 см, 63 см. 690. 50 см, 72 см. 691. 5,2 см.
692. 9 см, 16 см.

732. 8 см. 733. 50 см. 734. 126 см. 735. 184 см. 737. 70 см. 738. 15 см.
739. 80 см. 742. 16 м. 745. 6 м. 748. 90 см. 749. 3 см. 750. 4,8 см.
751. 12 см. 753. 30 см, 40 см. 754. 5 см, 12 см, 13 см. 756. 40 см.
757. 6 см, $3\sqrt{7}$ см. 760. $8\sqrt{5}$ см. 761. $8\sqrt{13}$ см. 762. 4 см. 763. 2 см,
18 см. 764. 2,8 см, 10 см. 765. 42 см. 766. $2r\sqrt{3}$. 767. 3 см. 768. 14 см.
769. $14\sqrt{3}$ см. 770. 16 см. 771. 14 см. 772. 24 см. 773. а) $3\sqrt{21}$ см;
б) $5\sqrt{5}$ см. 774. $18(2 + \sqrt{3})$ см. 776. $2 : \sqrt{13}$.

802. 24 см. 803. 12 см. 804. $2 : 1$. 805. 60° . 808. $0,25a$, $1,75a$. 809. $1 : \sqrt{2}$.
 810. 3,75 футів. 811. Б, А, Д, В. 834. а) 0,5. 835. а) Так; в) Ні. 851. $c \cdot \cos \alpha$,
 $c \cdot \sin \alpha$. 855. 60° , 120° . 856. 45° , 135° . 859. 25 см. 860. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$.
 863. а) 1,8 см; б) 12,5 см. 864. а) 1 см; б) 6 см. 865. 10 см. 866. 6 yd,
 8 yd. 868. $d \cdot \sin \alpha$. 870. $2r \cdot \sin \alpha$, $2r \cdot \cos \alpha$. 871. $2a \cdot \cos \alpha$. 873. Б, Б, Г.
 893. 29,47 м. 894. 56 м. 895. 10,7 м. 898. 21,6 м. 899. 39° .

901. 6 м. 903. 125,2 м. 908. 12,8 см. 910. $63,4^\circ$, $63,4^\circ$, $53,2^\circ$. 913. $7,6^\circ$.
 925. $54,2^\circ$. 927. 34,9 см. 929. $73,7^\circ$, $16,3^\circ$, $163,7^\circ$, $106,3^\circ$. 944. 5 см.
 950. 1080° . 953. б) Ні; в) 15 сторін. 954. б) Ні. 956. 144° . 963. 16. 968. 60° ,
 210° , $a(1 + \sqrt{3})$. 972. 90° , 90° , 120° , 120° , 120° , $a(2 + \sqrt{3})$. 978. Ні.
 995. 57° або 33° . 997. 70° , 50° , 60° . 998. 8 см. 999. 60° , 90° , 120° , 90° .

1000. а) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 1001. $\frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}$. 1002. $\frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2}$.
 1004. 6 см. 1006. 2) 108° ; 3) 36° ; 4) 72° . 1007. 90° , 90° , 120° , 120° , 120° .
 1010. $\sqrt{2}$ см. 1011. 3 см, 6,25 см. 1012. $2\sqrt{26}$ см. 1014. 13 см. 1015. $p - r$.
 1016. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. 1017. $\sqrt{3} : 2$. 1042. 32 см^2 . 1043. 6 см, 9 см. 1044. 7 см,
 8 см. 1047. 160 см^2 . 1048. 2,8 м. 1052. $1 : 2$. 1053. $1 : 2$. 1054. 18 дм^2 .
 1055. $0,5a^2$. 1056. 128 см^2 . 1057. 16 см^2 . 1058. 40 см^2 . 1059. $48\sqrt{3} \text{ см}^2$.
 1060. $4\sqrt{3}r^2$. 1061. $0,25ac$. 1062. $m^2 : 2$. 1066. $a^2b^2 : (a + b)^2$. 1086.
 $10\sqrt{3} \text{ см}^2$. 1087. 12 см^2 . 1089. 120 см^2 . 1090. 192 см^2 . 1091. 216 см^2 .
 1092. 1) 20 см; 2) 480 см^2 . 1096. 200 см^2 . 1098. $0,5a^2$. 1099. $400\sqrt{2} \text{ см}^2$.

1100. $1350\sqrt{3} \text{ см}^2$. 1101. 180 см^2 . 1105. 12 см. 1108. 32 см^2 .
 1111. 120 см^2 . 1112. 3500 см^2 . 1114. 54 см^2 . 1115. 90 см^2 . 1116. 128 см^2 .
 1117. 22,5 см. 1119. 84 см^2 . 1120. 20 см. 1121. 348 см^2 . 1123. 96 см^2 .
 1125. 28 см. 1126. $9\sqrt{2}$ см. 1127. 100 см. 1128. 52 см. 1129. 180 см^2 .
 1130. 624 см^2 . 1131. $25\sqrt{2} \text{ см}^2$. 1132. 72 см^2 . 1133. 150 см^2 . 1134. $811,2 \text{ см}^2$.

1139. 156 см^2 . 1141. 128 см^2 . 1142. 384 см^2 . 1143. 864 см^2 . 1144. 6 см.
 1145. a^2 . 1146. 135 см^2 . 1147. 480 см^2 . 1148. $576\sqrt{3} \text{ см}^2$. 1149. В, А, Г, Д.
 1150. $338\sqrt{3} \text{ см}^2$. 1171. 20 см^2 . 1174. 1176 см^2 . 1175. 432 см^2 . 1177. 1 : 4.
 1183. 8 см, 9,6 см, 9,6 см. 1184. 8 см. 1186. Г, В, Б. 1188. 20 м. 1191. 12 см^2 .
 1192. $4,8 \text{ см}^2$, $7,2 \text{ см}^2$. 1194. $8\frac{1}{3} \text{ см}^2$, $21\frac{2}{3} \text{ см}^2$. 1195. а) $3,24 \text{ м}^2$; б) $1,44 \text{ м}^2$.
 1196. $7,5 \text{ см}^2$. 1197. 30 см^2 . 1198. 12 кв. од. 1199. 8 кв.од.

1201. $8(2 + \sqrt{3}) \text{ см}$. 1202. 12,5 см, 12,5 см, 15 см, 75 см^2 .
 1203. $a^2\sqrt{3}$. 1204. 84 см^2 . 1205. 84 см^2 . 1206. 5 см^2 . 1207. 1 : 4. 1209. 1 : 2.
 1210. 2 см. 1211. 4,8 см. 1213. 2,25S. 1226. 12 см, 8 см. 1228. 84 см.
 1231. 70° і 110° . 1232. 64 см. 1235. 48 см. 1236. 12 см. 1237. 12 см.
 1238. 48 см. 1242. 9 см. 1243. 50 см. 1245. 13 см, 23 см. 1246. 8 см,
 20 см. 1247. 0,5l, 1,5l. 1249. 4 см. 1252. 12 см, 30 см. 1256. 16 см,
 24 см. 1257. 18 см. 1259. 87 см, 29 см, 103 см. 1260. 20 см або $18\frac{6}{13}$.
 1261. 22 см. 1262. 7,2 см. 1263. 9 см. 1264. 6 см. 1265. 6 см. 1267. 2 : 3.
 1268. 8 см. 1270. 6 см. 1271. 10 см. 1276. 6 см. 1277. 20 см. 1280. 7,5 см.
 1283. 13 см. 1288. $\frac{a^2}{4} \text{ tg } \alpha$. 1289. $2a \cos \frac{\alpha}{2}$, $2a \sin \frac{\alpha}{2}$. 1290. $\frac{8r}{\sin \alpha}$, $\frac{4r^2}{\sin \alpha}$.
 1291. $\frac{1}{2} l \sin 2\alpha$. 1292. $\frac{h^2(\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta)}{2 \text{ tg } \alpha \text{ tg } \beta}$. 1293. Д, Б, В, А. 1297. б) 54 см.
 1299. 8 см.

1300. 300 см^2 . 1304. 2 : 1. 1306. 80 см^2 . 1310. 216 см^2 . 1312. 684 см^2 .
 1313. 72 см^2 . 1314. 7 см. 1315. 225 см^2 . 1316. 864 см^2 . 1317. 4 см, 8 см,
 $2\sqrt{2} \text{ см}$. 1318. $32\sqrt{2} \text{ см}^2$. 1320. 5 см, 15 см. 1321. 5 см. 1323. 294 см^2 .

ЗМІСТ

Розділ 1. Чотирикутники

- § 1 Загальні властивості чотирикутників
- § 2 Паралелограми
- § 3 Прямокутник, ромб і квадрат
- § 4 Застосування властивостей чотирикутників
- § 5 Трапеція
- § 6 Центральні і вписані кути
- § 7 Вписані й описані чотирикутники

Розділ 2. Подібність трикутників

- § 8 Пропорційні відрізки
- § 9 Подібність фігур
- § 10 Ознаки подібності трикутників
- § 11 Застосування подібності трикутників
- § 12 Подібність прямокутних трикутників

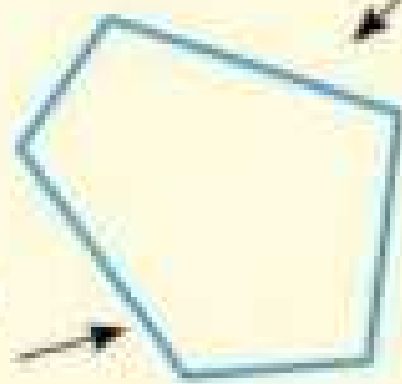
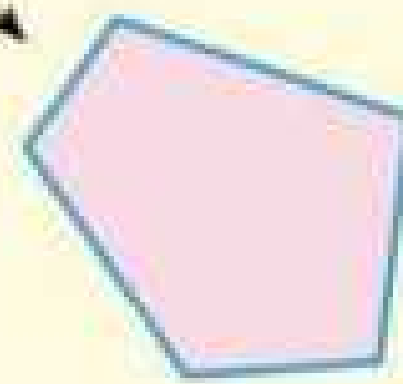
Розділ 3. Розв'язування прямокутних трикутників

- § 13 Теорема Піфагора
- § 14 Перпендикуляр і висота в прямокутному трикутнику

Многокутники

Многокутник

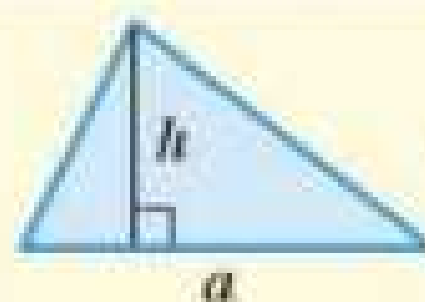
Проста
замкнена
ламана



Площі многокутників



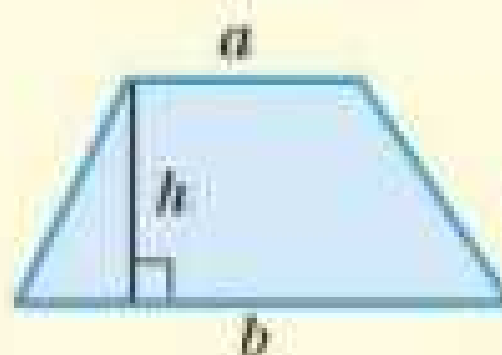
$$S = ab$$



$$S = \frac{1}{2}ah$$



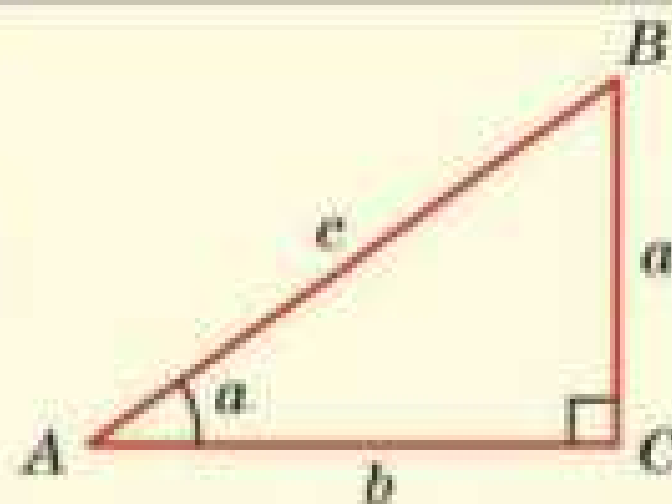
$$S = ah$$



$$S = \frac{a+b}{2}h$$

Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



Значення тригонометричних функцій деяких кутів

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Таблиця тригонометричних функцій

Градуси	Синуси	Тангенси	Котангенси	Косинуси	Градуси
0	0,000	0,000		1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,334	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,361	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
Градуси	cos	ctg	tg	sin	Градуси