ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Наталія ПРОКОПЕНКО
Юрій ЗАХАРІЙЧЕНКО
Наталія КІНАЩУК

НАВЧАННЯ
БЕЗ МЕЖ

АЛГЕБРА 8

НОВА
УКРАЇНСЬКА
ШКОЛА

Видавництво «Ранок»

Наталія Прокопенко, Юрій Захарійченко, Наталія Кінащук

«АЛГЕБРА»

Підручник для 8 класу

закладів загальної середньої освіти

Видавництво «Ранок»

2025

Видавництво «Ранок»

Підручник створено відповідно до модельної навчальної програми
«Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авт. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П.,
Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)

Видавництво «Ранок»

Наталія ПРОКОПЕНКО
Юрій ЗАХАРІЙЧЕНКО
Наталія КІНАЩУК

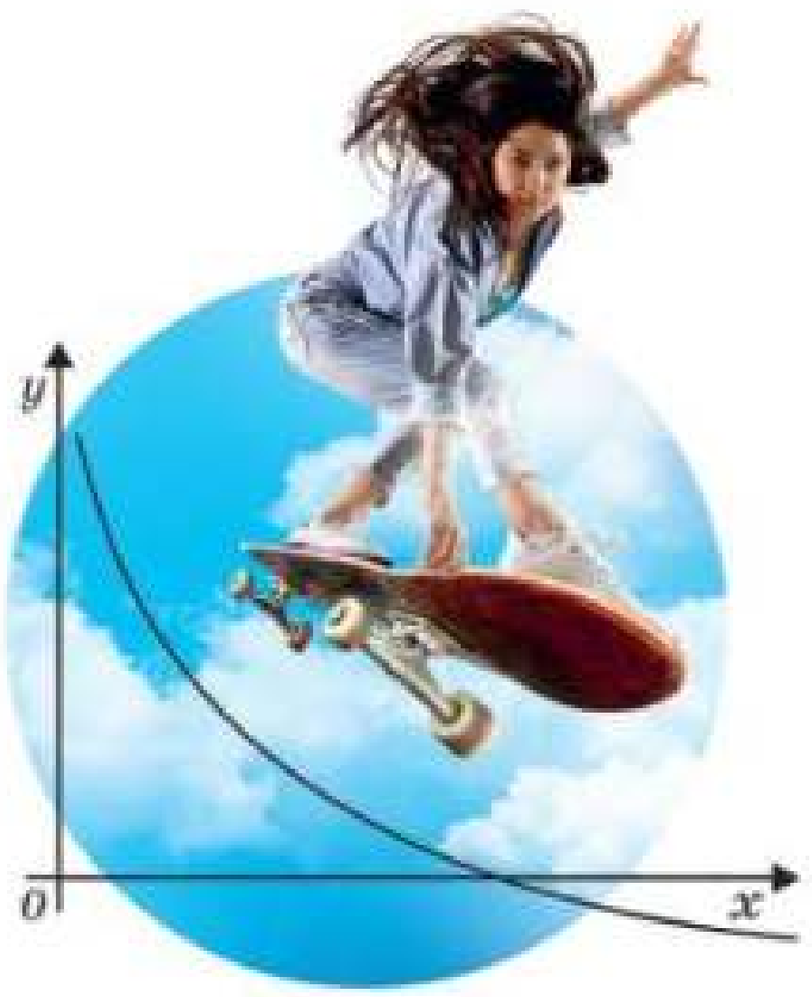
АЛГЕБРА 8

Підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

rnk.com.ua/107925
Інтерактивний електронний додаток до підручника

Київ • Харків
Видавництво «Ранок»



УДК 512:37.016(075.3)
П 80

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 21.02.2025 № 347)

Підручник створено відповідно до модельної навчальної програми «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)

Ілюстрації *Раїси Бедратої*

Прокопенко Н. С.
П 80 Алгебра: підруч. для 8 кл. закл. загал. серед. освіти / Н. С. Прокопенко, Ю. О. Захарійченко, Н. Л. Кінащук. — Х. : Вид-во «Ранок», 2025.

УДК 512:37.016(075.3)

Інтерактивний електронний додаток до підручника доступний за QR-кодом або посиланням **rnk.com.ua/107925**

© Прокопенко Н. С., Захарійченко Ю. О., Кінащук Н. Л., 2025
© Бедрата Р. Р., ілюстрації, 2025
© ТОВ Видавництво «Ранок», 2025

Видавництво «Ранок»

ЗМІСТ

Як працювати з підручником 6

ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ЩО ВИВЧАВСЯ В 7 КЛАСІ

Повторення матеріалу, що вивчався в 7 класі 7
Підсумкова робота № 1 (діагностична) 10

Розділ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

§ 1. Раціональні вирази. Раціональні дроби 12
Домашнє завдання 19
§ 2. Основна властивість дробу 21
Самостійна робота № 1 27
Домашнє завдання 28
§ 3. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками 30
Самостійна робота № 2 37
Домашнє завдання 38
§ 4. Додавання і віднімання дробів із різними знаменниками 40
Самостійна робота № 3 47
Домашнє завдання 48
§ 5. Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня 50
Самостійна робота № 4 57
Домашнє завдання 58
Підсумовуємо вивчене в §1–5 60
Підсумкова робота № 2 61
§ 6. Тотожні перетворення раціональних виразів 62
Самостійна робота № 5 69
Домашнє завдання 70
§ 7. Раціональні рівняння. Рівносильні рівняння 73
Самостійна робота № 6 82
Домашнє завдання 82
Підсумкова робота № 3 85

САМОКОНТРОЛЬ

Підсумкова робота № 1, с. 10
Підсумкова робота № 2, с. 61
Підсумкова робота № 3, с. 85
Підсумкова робота № 4, с. 119

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

с. 11

ЗАДАЧІ «MATH FOR LIFE»

с. 18, 27, 37, 47, 57, 68, 81, 95, 106, 116

ДОСЛІДЖУЄМО

с. 13, 22, 41, 52, 54, 62, 77, 87, 92, 103, 112

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

с. 16, 26, 35, 45, 56, 66, 80, 81, 93, 105, 115

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

с. 17, 18, 27, 35, 46, 53, 55, 67, 84, 96, 114

В ОДИН КЛІК

с. 94, 113, 114

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

с. 19, 29, 39, 46, 59, 71, 83, 96, 108, 109, 117

 # BE SMART

с. 20, 29, 39, 49, 58, 72, 84, 97, 109, 117

Видавництво «Ранок»

§ 8. Степінь із цілим показником. Стандартний вигляд числа 86
Домашнє завдання 95
§ 9. Властивості степеня із цілим показником 98
Самостійна робота № 7 107
Домашнє завдання 108
§ 10. Функція $y=\frac{k}{x}$, її графік і властивості 110
Домашнє завдання 116
Підсумовуємо вивчене в § 8–10 118
Підсумкова робота № 4 119

САМОКОНТРОЛЬ

Підсумкова робота № 5, с. 182

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

с. 121

ЗАДАЧІ «MATH FOR LIFE»

с. 128, 138, 148, 158, 170, 179

ДОСЛІДЖУЄМО

с. 125, 135, 145, 151, 162, 173

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

с. 125, 146, 156, 177

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

с. 124, 136, 147, 157, 158, 168, 177

В ОДИН КЛІК

с. 129, 176

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

с. 127, 139, 149, 159, 170, 180

 # BE SMART

с. 129, 140, 149, 160, 171

Розділ 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

§ 11. Функція $y=x^2$, її графік та властивості. Графічний спосіб розв'язування рівнянь 122
Домашнє завдання 129
§ 12. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь 130
Самостійна робота № 8 138
Домашнє завдання 139
§ 13. Множина. Підмножина. Числові множини. Раціональні числа. Ірраціональні числа. Дійсні числа 141
Домашнє завдання 148
§ 14. Властивості арифметичного квадратного кореня . . . 150
Самостійна робота № 9 158
Домашнє завдання 159
§ 15. Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені 161
Домашнє завдання 170
§ 16. Функція $y=\sqrt{x}$, її графік і властивості 172
Самостійна робота № 10 179
Домашнє завдання 180
Підсумовуємо вивчене в § 11–16 181
Підсумкова робота № 5 182

Видавництво «Ранок»

Розділ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

§ 17. Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь 184

Домашнє завдання 192

§ 18. Формула коренів квадратного рівняння 194

Самостійна робота № 11 201

Домашнє завдання 202

§ 19. Теорема Вієта 204

Самостійна робота № 12 214

Домашнє завдання 214

Підсумовуємо вивчене в § 17–19 216

Підсумкова робота № 6 217

§ 20. Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники 218

Домашнє завдання 225

§ 21. Розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних 227

Самостійна робота № 13 236

Домашнє завдання 237

§ 22. Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій 239

Домашнє завдання 247

Підсумовуємо вивчене в § 20–22 250

Підсумкова робота № 7 251

ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

Повторення і систематизація навчального матеріалу . . . 252

Підсумкова робота № 8 256

ВІДПОВІДІ 257

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК 271

САМОКОНТРОЛЬ

Підсумкова робота № 6, с. 217
Підсумкова робота № 7, с. 251
Підсумкова робота № 8, с. 256

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

с. 183

ЗАДАЧІ «MATH FOR LIFE»

с. 191, 201, 213, 225, 235

ДОСЛІДЖУЄМО

с. 187, 196, 205, 219, 231

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

с. 191, 200, 212, 223, 234, 246

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

с. 192, 199, 213, 224, 233, 246, 248

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

с. 189, 202, 215, 226, 237, 248, 249

BE SMART

с. 193, 203, 215, 225, 238, 249

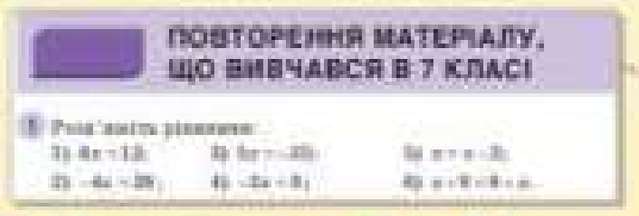
Видавництво «Ранок»

ЯК ПРАЦЮВАТИ З ПІДРУЧНИКОМ

Шановні восьмикласники й восьмикласниці!

Ви продовжуєте подорож захопливим світом алгебри. Вашим надійним помічником буде підручник, який ви тримаєте в руках. Зорієнтуватися в його змісті вам допоможуть різноманітні рубрики, з якими вас ознайомить невеличкий дороговказ.

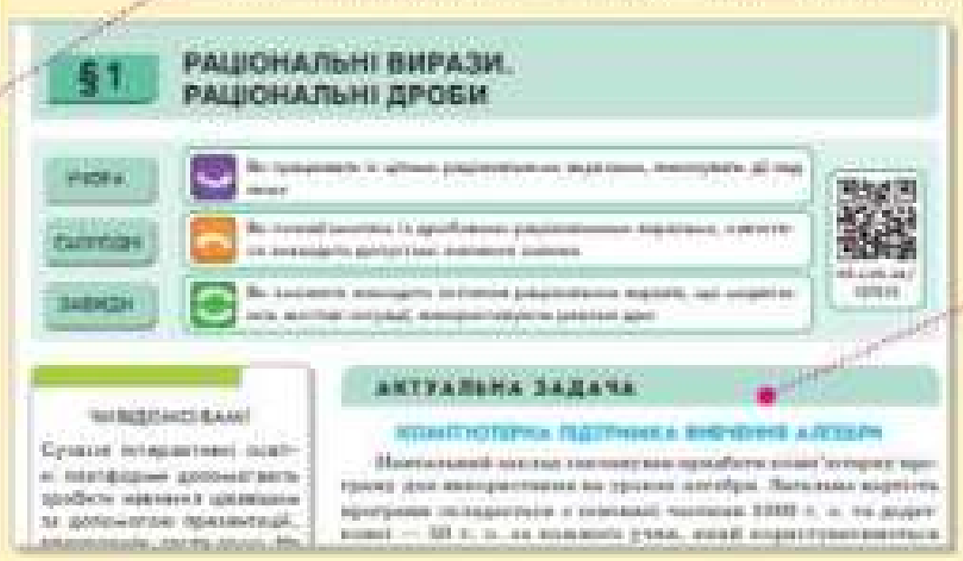
Цікавої вам подорожі!


ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ЩО ВИВЧАВСЯ В 7 КЛАСІ

Завдання для повторення за основними темами курсу алгебри 7 класу

1 Раціональні вирази

Короткий зміст розділу; відомості щодо практичного застосування знань, яких ви набудете, опанувавши цей розділ; теми навчальних проєктів і досліджень

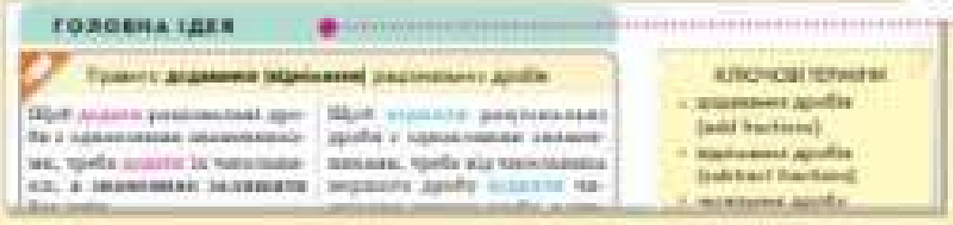

§ 1 РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

Що ви знаєте, чого навчитеся, як зможете застосувати.
Задачі практичного змісту (з повним або частковим розв'язанням).
Посилання на інтернет-підтримку

Основний теоретичний матеріал
Основні означення, правила, твердження, теореми
Ключові терміни параграфа з перекладом англійською

РОЗМИНКА

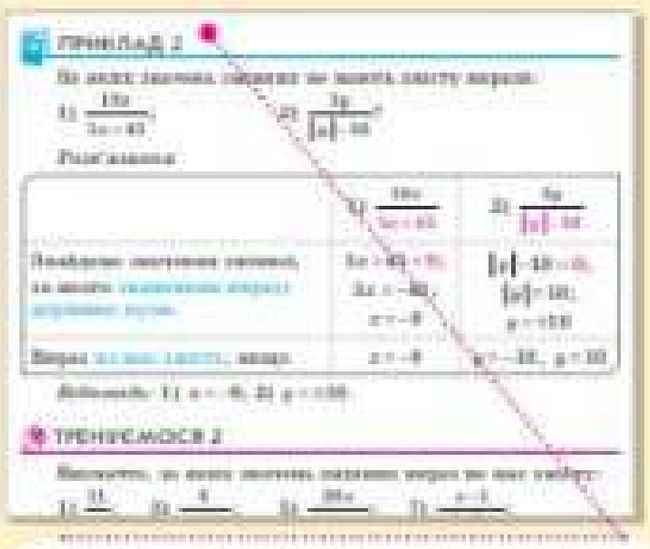
Різнорівневі вправи на закріплення навчального матеріалу

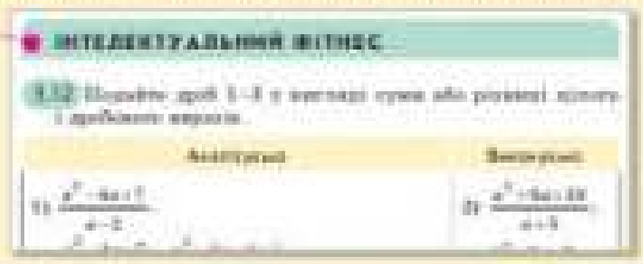

ГОЛОВНА ІДЕЯ

ПРАКТИКУМ

Усні вправи на первинне закріплення вивченого матеріалу

Завдання підвищеної складності з прикладами розв'язання


ПРИКЛАД 2


ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ЖИТНИЦЬ

Задачі на створення математичних моделей до ситуацій із реального життя

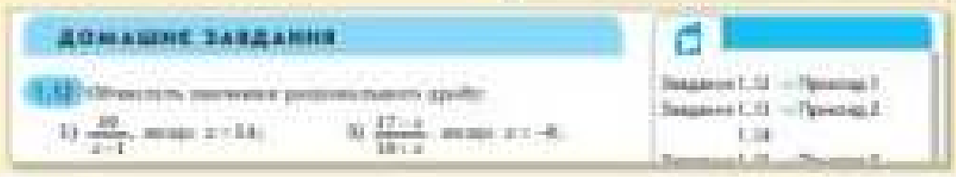
MATH FOR LIFE

Приклади з покроковим розв'язанням, докладним поясненням і записом розв'язання
Вправи, що містять завдання, диференційовані за рівнями навчальних досягнень

Узагальнюючий теоретичний матеріал

ЗНАЮ. УМІЮ. МОЖУ

Самостійні та контрольні роботи для самоконтролю


ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Інтерактивний електронний додаток

ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ — за посиланням mk.com.ua/110131

Видавництво «Ранок»

ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ЩО ВИВЧАВСЯ В 7 КЛАСІ

1 Розв'яжіть рівняння:

1) $6x=12$; 3) $5x=-35$; 5) $x=x-3$;

2) $-4x=28$; 4) $-2x=0$; 6) $x+8=8+x$.

2 Знайдіть значення виразу:

1) $4-x$, якщо $x=-5$;

2) $2a+8$, якщо $a=\frac{1}{2}$;

3) $\frac{m}{5}$, якщо $m=-15$;

4) $2b+6$, якщо $b=0$;

5) $1{,}2m-4$, якщо $m=-10$;

6) $28-0{,}4k$, якщо $k=5$.

3 Знайдіть значення виразу:

1) 4^2; 2) $(-6)^2$; 3) $(-1)^{17}$; 4) 15^0; 5) 19^1; 6) 0^3.

4 Подайте у вигляді степеня з основою a:

1) $a^4\cdot a^7$; 3) $\left(a^3\right)^7$; 5) $\left(a^3\right)^7:a$;

2) $a^{11}:a$; 4) $\left(\left(a^2\right)^3\right)^4$; 6) $\left(a^6\right)^6\cdot a$.

5 Обчисліть:

1) $\frac{5^4}{5^3}$; 2) $\frac{4^7}{4^8}$; 3) $\frac{2^6}{4^3}$; 4) $\frac{25^2}{5^6}$; 5) $\frac{(3\cdot7)^2}{7^2}$; 6) $\frac{9^5}{(2\cdot9)^5}$.

6 Спростіть вираз:

1) $m+6m$; 3) $14t-18t$; 5) $5a+b-a+3b$;

2) $5x-x$; 4) m^2-6m^2; 6) $9x-y-10x+y$.

7 Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $4(1-x)$; 3) $-4(y-2)$; 5) $-6\left(x^2-x+1\right)$;

2) $9(2a+3)$; 4) $-c(2+x)$; 6) $\frac{1}{2}\left(6x^2+8x-2\right)$.

8 Спростіть вираз та обчисліть його значення:

1) $2a+6$, якщо $a+3=9$;

2) $7a-21$, якщо $a-3=5$;

3) $8ab+3b$, якщо $8a+3=0$;

4) $10m-m^2$, якщо $10-m=0$;

5) $6t^3+6$, якщо $t^3+1=-4$;

6) $9y^3-18$, якщо $y^3-2=5$.

9 Користуючись формулами квадрата двочлена $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ і $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(4+y)^2$; 3) $(-6+a)^2$; 5) $(4x-c)^2$;

2) $(t-3)^2$; 4) $(-m+5)^2$; 6) $(b+2a)^2$.

Властивості степеня

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$
$$a^m:a^n=a^{m-n}$$
$$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$$
$$(ab)^n=a^nb^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

$$(-a+b)^2=(b-a)^2$$
$$(a-b)^2=(b-a)^2$$
$$(-a-b)^2=(a+b)^2$$

Видавництво «Ранок»

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

10 Подайте у вигляді многочлена:

1) $(c-y)(c+y)$; 3) $(2+c)(2-c)$; 5) $(4a+2b)(2b-4a)$;
2) $(a+m)(m-a)$; 4) $(4-3m)(4+3m)$; 6) $\left(3n-2a^2\right)\left(3n+2a^2\right)$.

11 Подайте у вигляді повного квадрата многочлен:

1) $c^2+10c+25$; 3) x^2+6x+9; 5) $16-8a+a^2$;
2) m^2-4m+4; 4) $y^2-8y+16$; 6) $36+12a+a^2$.

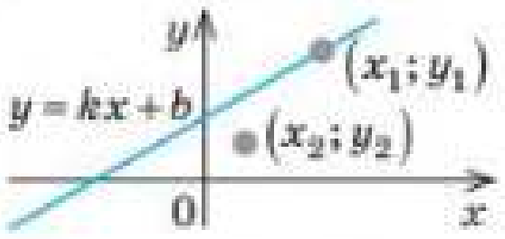
12 Обчисліть найбільш раціональним способом:

1) 5^2-4^2; 3) 8^2-4^2; 5) $(4+13)(13-4)+16$;
2) 13^2-12^2; 4) 20^2-16^2; 6) $(10-8)(10+8)+64$.

13 Функцію задано формулою $y=6x-8$. Заповніть таблицю.

y	0	2			-2	
x			0	4		-26

Щоб перевірити, чи належить точка графіку функції, її координати треба підставити у формулу, якою задана функція. Якщо в результаті отримаємо правильну рівність, то ця точка належить графіку.



$$y_1=kx_1+b$$
$$y_2\neq kx_2+b$$

14 Визначте, чи проходить графік функції $y=8-4x$ через точку:

1) $A(0;-4)$; 3) $O(0;0)$; 5) $M(0{,}5;-6)$;
2) $B(0;8)$; 4) $C(2;0)$; 6) $K(-0{,}5;10)$.

15 Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та парами чисел (А–Д), які є розв'язками цих рівнянь.

1	$2x+y=0$	А	$(-6;5)$
2	$6x-3y=-3$	Б	$(-1;-1)$
3	$5x=-6y$	В	$(6;5)$
		Г	$(1;-2)$
		Д	$(-1;1)$

16 Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x=4,\\y+x=10;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x=-3,\\y-x=7;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}3x+5=8,\\-y-x=5;\end{cases}$
2) $\begin{cases}y=2,\\x+y=0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}y=-8,\\y=2x;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}2y+6=0,\\x=-2y+1.\end{cases}$

$$2x-y=13$$
$$-y=-2x+13 \mid \cdot(-1)$$
$$y=2x-13$$

17 У рівнянні з двома змінними виразіть одну змінну через іншу найзручнішим способом.

1) $2x+y=5$; 3) $x+3y=7$; 5) $4x+y=-3$;
2) $6x-y=0$; 4) $5y-x=2$; 6) $5y-x=-11$.

18 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-23}{5}+x=1+\frac{9x-5}{10}$; 3) $\frac{5x^2+x+13}{5}-x^2-x=-2$;
2) $-5(-2x-1)=-8x-43$; 4) $x\left(x^2-9\right)(4x+26)=0$.

$$a\cdot b=0,$$
якщо $a=0$ або $b=0$

Видавництво «Ранок»

19 Розкладіть на множники вираз:

1) $25x^2-64a^4$; 3) $1-1\frac{9}{16}c^2$; 5) $4a^2-24a+36$;

2) $0{,}36y^2-\frac{1}{4}$; 4) $x^2-12xy+36y^2$; 6) $-3m^2+18m-27$.

20 Спростіть вираз:

1) $(x+7)^2-2(x-7)(1-x)$; 3) $(y-2)^2-(y+2)^2+8y$;

2) $(x+3)^2-4(x-3)(x+3)$; 4) $(-6-a)^2+(a+3)^2-15a-2a^2$.

21 Запишіть як одночлен стандартного вигляду вираз:

1) $\left(-2a^3x\right)^4$; 3) $\left(-1\frac{1}{3}x^2y\right)^2\cdot 9xy^5$;

2) $\left(-5y^2x^6\right)^3$; 4) $\left(-m^5y\right)^5\cdot\left(m^2y^3\right)^7$.

22 Розкладіть на множники многочлен:

1) a^3+8; 3) $64b^3+1$; 5) $8a^3-125$;

2) x^3-27; 4) $125y^3-8$; 6) $27b^3+8y^3$.

23 Розкладіть многочлен на множники найбільш раціональним способом:

1) y^3-25y; 3) $ab+3b-4a-12$;

2) $(2x+1)^2-(2x-4)^2$; 4) $x^2-6x+9-4y^2$.

24 Побудуйте графік функції:

1) $y=x+5$; 3) $y=6x+2$;

2) $y=4-x$; 4) $y=4-2x$.

25 Не виконуючи побудови, знайдіть точку перетину графіків функцій:

1) $y=x$ і $y=2x-4$; 3) $y=0{,}5x-1$ і $y=0{,}3x+9$;

2) $y=6x+5$ і $y=5x-2$; 4) $y=-x+0{,}2$ і $y=x-0{,}2$.

26 Розв'яжіть систему лінійних рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases}x-6y=0,\\2x+3y=15;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\frac{a}{2}-\frac{b}{3}=1,\\4(a-3)+5b=19;\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x+5y=3,\\3x-5y=42;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\frac{y-2x}{3}-\frac{x}{6}=2,\\\frac{x-3}{3}-\frac{14-y}{7}=2.\end{cases}$

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$,

$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$,

$(ab)^n=a^nb^n$,

$(-1)^n=1$,
якщо n — парне

$(-1)^n=-1$,
якщо n — непарне

$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$8d^3=(2d)^3$, $64m^3=(4m)^3$

Щоб знайти точку перетину графіків функцій, не виконуючи побудови, треба розв'язати систему відповідних рівнянь

Один зі способів розв'язування систем лінійних рівнянь із двома змінними — графічний спосіб. Для побудови графіків зручно використовувати графічні онлайн-калькулятори, зокрема онлайн-калькулятор Desmos. Зверніть увагу! Одержавши графічним способом розв'язки, обов'язково треба виконати перевірку.

Видавництво «Ранок»

ПІДСУМКОВА РОБОТА № 1
(діагностична)

Інший варіант роботи в електронному додатку

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Знайдіть значення виразу $x+9$, якщо $x=-7$.

А	Б	В	Г
-63	-16	16	2

2 Перетворіть у многочлен добуток $(3-a)(3+a)$.

А	Б	В	Г
$9-a^2$	$9+6a+a^2$	$9-6a+a^2$	$6-a^2$

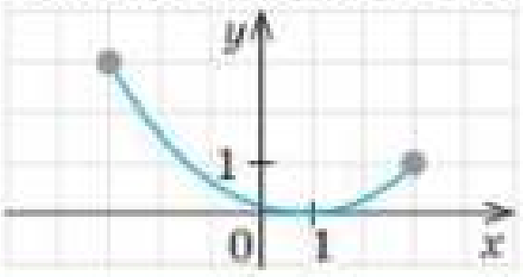
3 Спростіть вираз $\dfrac{(p^2)^6}{p^3}$.

А	Б	В	Г
p^{15}	p^4	p^9	p^5

4 Перетворіть у квадрат двочлена вираз $10^2-20u+u^2$.

А	Б	В	Г
$(10+u)^2$	$(10-u)^2$	$(5+u)^2$	$(5-u)^2$

5 Знайдіть область визначення функції, графік якої зображено на рисунку.



А	Б	В	Г
$-3\leqslant x\leqslant 1$	$1\leqslant x\leqslant 3$	$0\leqslant x\leqslant 3$	$-3\leqslant x\leqslant 3$

6 У змаганні ковалів взяли участь x майстрів та y майстринь. Кожен майстер представив 5 виробів, а кожна майстриня — 2. Усього було представлено 47 виробів. Укажіть рівняння, складене за цією умовою.

А	Б	В	Г
$5x+2y=47$	$2x+5y=47$	$7xy=47$	$7+x+y=47$

7 Розв'яжіть рівняння $x^2-x+5x-5=0$, розклавши його ліву частину на множники.

8 Побудуйте графік рівняння $y-2x=4$. Перевірте, чи належить точка $A(-3;-2)$ цьому графіку.

9 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x-3y=12, \\ 2x+3y=6. \end{cases}$

10 За оренду 3 скутерів і 3 шоломів за добу заплатили 72 г. о. Після того як оренда скутера подорожчала на 10 %, а оренда шолома подешевшала на 50 %, загальна вартість оренди 1 скутера й 1 шолома за добу склала 24 г. о. Визначте вартість оренди:

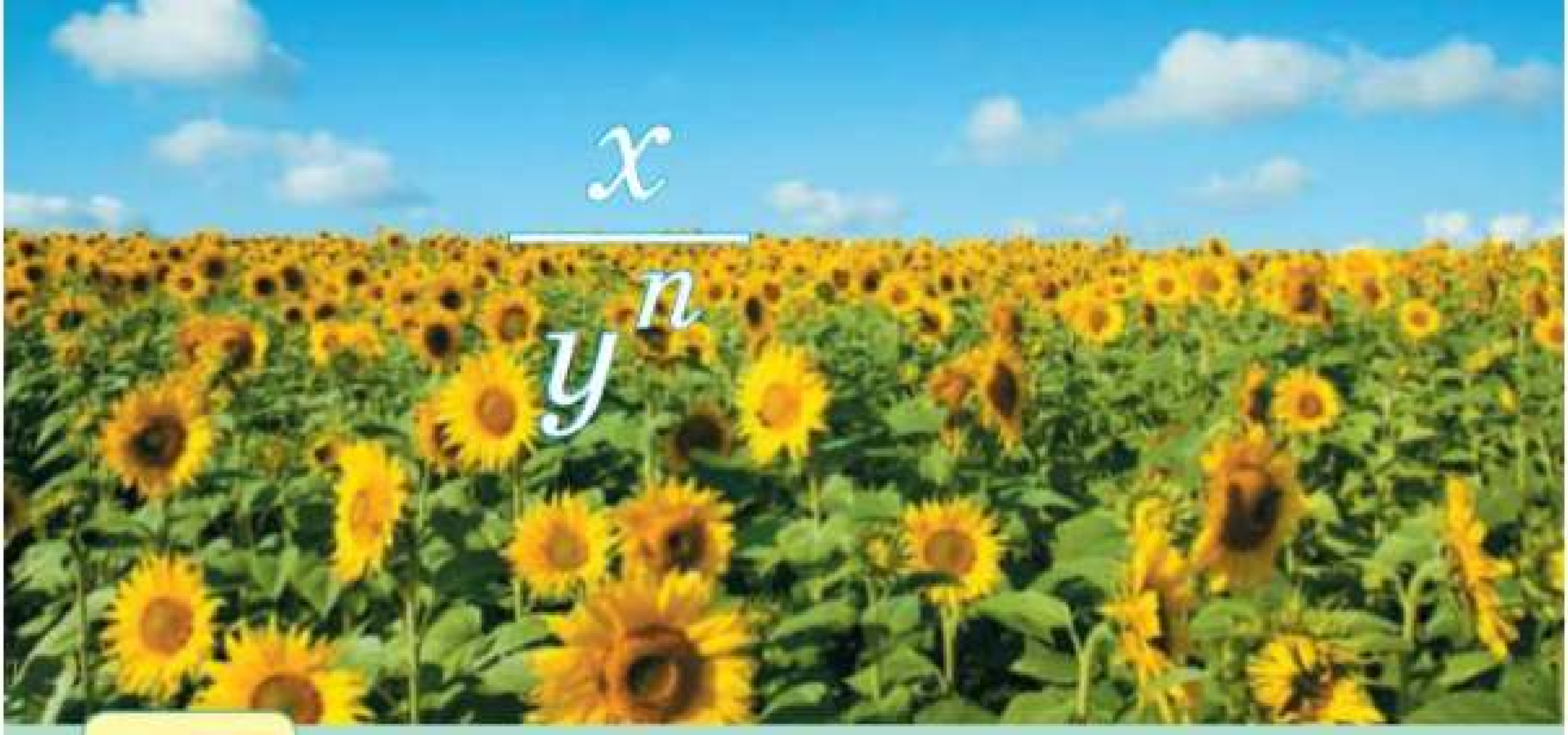
1) 1 скутера й 1 шолома за добу до зміни цін;

2) 1 скутера після зміни ціни.

Бонусне завдання

Визначте дві останні цифри значення числового виразу $479\,851^3-39\,751^3$.

> «Зроби крок, і дорога з'явиться сама собою.»
>
> Стів Джобс



1 Раціональні вирази
Rational expressions

ПРО ЩО ЦЕЙ РОЗДІЛ

- Раціональні дроби та дії над ними
- Тотожні перетворення раціональних виразів
- Раціональні рівняння. Рівносильні рівняння
- Степінь із цілим показником та його властивості
- Стандартний вигляд числа
- Функція $y=\frac{k}{x}$, її графік і властивості

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

Раціональні вирази та рівняння — корисний інструмент для відображення реальних життєвих ситуацій, який допоможе вам:

- розв'язувати задачі на уроках фізики, хімії, біології, інформатики
- грамотно планувати свої доходи і витрати, приймати обґрунтовані економічні рішення
- планувати подорожі, розраховувати оптимальний час і бюджет подорожі
- визначати витрати на виробництво, рейтинг продукції, прибуток від реалізації товарів; проводити маркетингові дослідження та аналізувати їх результати

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

- Ділення многочлена на многочлен. Теорема Безу
- Скорочене ділення за допомогою схеми Горнера
- Умовні тотожності. Похідні пропорції
- Степінь із цілим показником у хімії, фізиці, біології, інформатиці
- Аліквотні дроби
- Діофант Александрійський та діофантові рівняння
- Числа-велетні
- Функція оберненої пропорційності в економіці

> “Якщо ти збираєшся одного чудового дня створити щось велике, пам'ятай: один чудовий день — це сьогодні.”
>
> Стівен Спілберг

§1 РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

УЧОРА Ви працювали із цілими раціональними виразами, виконували дії над ними

СЬОГОДНІ Ви познайомитесь із дробовими раціональними виразами, навчитеся знаходити допустимі значення змінних

ЗАВЖДИ Ви зможете знаходити значення раціональних виразів, що моделюють життєві ситуації, використовуючи реальні дані

mk.com.ua/107818

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Сучасні інтерактивні освітні платформи допомагають зробити навчання цікавішим за допомогою презентацій, відеороликів, тестів тощо. На багатьох із них є можливість безкоштовно навчатися за допомогою і вебсайту, і застосунків для Android, iOS та Windows.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- цілий вираз (integers expression)
- дробовий вираз (fractional expression)
- раціональний вираз (rational expression)
- раціональний дріб (rational fraction)
- допустимі значення змінної (valid values of the variable)

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

КОМП'ЮТЕРНА ПІДТРИМКА ВИВЧЕННЯ АЛГЕБРИ

Навчальний заклад запланував придбати комп'ютерну програму для використання на уроках алгебри. Загальна вартість програми складається з основної частини 1000 г. о. та додаткової — 50 г. о. за кожного учня, який користуватиметься програмою. Нехай програмою будуть користуватися x учнів. Визначте:

1) загальну вартість програми;

2) вартість програми, яка припадатиме на кожного учня.

Розв'язання

1) Загальна вартість програми складається з двох частин:

$$\textit{основна} + \textit{додаткова} = 1000 + 50x \text{ (г. о.)}.$$

2) Вартість програми, яка припадатиме на кожного учня:

$$\frac{\textit{загальна вартість}}{\textit{кількість учнів}} = \frac{1000 + 50x}{x} \text{ (г. о.)}.$$

Відповідь: 1) $1000 + 50x$ г. о.; 2) $\dfrac{1000 + 50x}{x}$ г. о.

Вирази $1000 + 50x$ та x є цілими. Такі вирази знайомі вам з курсу 7 класу. Вираз $\dfrac{1000 + 50x}{x}$ відрізняється від них тим, що містить ділення на вираз зі змінною.

Пригадайте: цілі вирази складаються із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення на відмінне від нуля *число* та піднесення до степеня. Цього року ви познайомитеся з дробовими виразами.

Цілі та дробові вирази називають **раціональними виразами**.

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

ДОСЛІДЖУЄМО

Проаналізуйте інформацію стосовно раціональних виразів.
Знайдіть спільне й відмінне між цілими і дробовими виразами.

Цілі вирази	Дробові вирази
1. Цілі вирази не містять дію ділення на *вираз зі змінною.*	1. Дробові вирази містять дію ділення на *вираз зі змінною.*
Наприклад: -8; a^2-b^2; $\frac{x+c}{3}$; $\frac{a}{4}+x^4$.	*Наприклад:* $\frac{15}{y}$; $\frac{a+16}{c}$; $5x^2+\frac{1}{x}$; $2x:(x-1)$.

2. Для знаходження числового значення раціонального виразу необхідно:
1) підставити замість змінних відповідні числові значення;
2) виконати всі арифметичні дії, ураховуючи порядок виконання дій.

Див. Приклад 1

3. **Допустимими значеннями змінних**, що входять до раціонального виразу, називають усі значення змінних, за яких цей **вираз має зміст.**

Запис **«вираз має зміст»** означає, що можна виконати всі математичні дії, які містить цей раціональний вираз.

На 0 ділити не можна!

Допустимими значеннями змінних, що входять до *цілого* виразу, є всі числа.	Допустимими значеннями змінних, що входять до *дробового* виразу, є всі числа, за яких знаменник виразу відмінний від нуля.
Наприклад, вирази $\frac{3x}{7}$; a^3-b^4; $\frac{y+6}{10}$; $a^2:2$ мають зміст за будь-яких значень змінних.	*Наприклад*, вираз $\frac{2y}{y-9}$ має зміст за всіх значень змінної y, крім $y=9$.

Див. Приклади 2, 3

4. **Раціональним дробом** називається дріб, у якого чисельник і знаменник є многочленами.

Раціональний дріб може бути як цілим, так і дробовим виразом.

Наприклад: $\frac{1}{3}$; $\frac{6x}{7}$; $\frac{y-2x}{5}$; $b^4:9$.	*Наприклад:* $\frac{6}{a}$; $\frac{b}{b^2-3}$; $\frac{c-4}{c+4}$.

5. Раціональний дріб $\frac{M(x)}{N(x)}$ **дорівнює нулю**, якщо чисельник дробу дорівнює нулю $(M(x)=0)$, а знаменник не дорівнює нулю $(N(x)\neq 0)$:

$$\frac{M(x)}{N(x)}=0, \text{ якщо } \begin{cases} M(x)=0, \\ N(x)\neq 0. \end{cases}$$

Див. Приклад 4

Видавництво «Ранок»

ПОМІРКУЙТЕ

Який із виразів є зайвим?

1) $\frac{x}{3}$; 2) $\frac{1-x}{15}$; 3) $\frac{x-5}{x}$;

4) $4x+\frac{3x}{4}$; 5) $(2-x)^2:7$.

РОЗМИНКА 1

1 Серед наведених виразів назвіть:

а) цілі вирази; б) дробові вирази; в) раціональні дроби.

1) $11-y$; 3) $1+\frac{1}{3}x$; 5) $\frac{18-5b}{4}$; 7) $\frac{3a}{4}+\frac{3}{4a}$;

2) $3a+\frac{4}{a}$; 4) $\frac{7}{b^2-4}$; 6) $\frac{2}{3}+y^3$; 8) $\frac{5}{9}a+\frac{9}{5}b$.

2 Обчисліть значення раціонального дробу, якщо це можливо:

1) $\frac{a}{10}$, якщо $a=40$;

2) $\frac{30}{a}$, якщо $a=-15$;

3) $-\frac{b}{4}$, якщо $b=12$;

4) $-\frac{28}{b}$, якщо $b=-4$;

5) $\frac{c}{10}$, якщо $c=0$;

6) $-\frac{5}{c}$, якщо $c=0$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Якщо $x=-7$, $y=5$, то знаменник виразу не перетворюється на нуль:

$$y+x^2=5+(-7)^2=54\neq 0.$$

Отже, дріб має зміст.

Вираз x^2+a, де $a>0$, завжди набуває лише додатних значень.

ПРИКЛАД 1

Обчисліть значення раціонального дробу $\frac{9x}{y+x^2}$, якщо $x=-7$; $y=5$.

Розв'язання

$\frac{9x}{y+x^2}=\frac{9\cdot(-7)}{5+(-7)^2}$ ..... Підставляємо числові значення змінних: $x=-7$; $y=5$.

$\frac{9\cdot(-7)}{5+(-7)^2}=\frac{-63}{5+49}=-\frac{63}{54}=-\frac{7}{6}=-1\frac{1}{6}$ ..... Обчислюємо значення числового виразу.

Відповідь: $-1\frac{1}{6}$.

ПОМІРКУЙТЕ

Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г), якщо $b=2$.

1	$\frac{b}{5}$	А	3,5
2	$\frac{2}{b-1}$	Б	2,5
3	$\frac{2b+3}{4-b}$	В	2
		Г	0,4

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Обчисліть значення раціонального дробу:

1) $\frac{24}{x-2}$, якщо $x=6$;

2) $\frac{18}{x-3}$, якщо $x=5$;

3) $\frac{x}{x+11}$, якщо $x=9$;

4) $\frac{x}{3+x}$, якщо $x=7$;

5) $\frac{9-x}{12+x}$, якщо $x=-2$;

6) $\frac{3-x}{18+x}$, якщо $x=-3$;

7) $\frac{x^2}{x+2y}$, якщо $x=-3$, $y=9$;

8) $\frac{x^2}{x+5y}$, якщо $x=-5$, $y=6$.

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 2

За яких значень змінних не мають змісту вирази:

1) $\frac{10x}{5x+45}$; 2) $\frac{3y}{|y|-10}$?

Розв'язання

	1) $\frac{10x}{5x+45}$	2) $\frac{3y}{\lvert y\rvert-10}$
Знайдемо значення змінної, за якого знаменник виразу дорівнює нулю	$5x+45=0$; $5x=-45$; $x=-9$	$\lvert y\rvert-10=0$; $\lvert y\rvert=10$; $y=\pm10$
Вираз не має змісту, якщо	$x=-9$	$y=-10$, $y=10$

Відповідь: 1) $x=-9$; 2) $y=\pm10$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Якщо $|y|=10$, то $y=10$ або $y=-10$. Запис $y=\pm10$ дає можливість об'єднати ці значення.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Визначте, за яких значень змінних вираз не має змісту:

1) $\frac{11}{x}$; 3) $\frac{6}{x-12}$; 5) $\frac{30x}{3x+18}$; 7) $\frac{x-1}{2|x|-8}$;

2) $-\frac{9}{x}$; 4) $\frac{4}{x-16}$; 6) $\frac{40x}{4x+20}$; 8) $\frac{x+1}{4|x|-8}$.

СЛІД ЗНАТИ!

Дріб має зміст, коли його знаменник відмінний від нуля.

Областю допустимих значень змінної (скорочено — ОДЗ) виразу з однією змінною називають усі значення змінної, за яких цей вираз має зміст.

ПРИКЛАД 3

Знайдіть область допустимих значень змінної виразу $\frac{x}{2x+8}+\frac{3-x}{x^2-9}$.

Розв'язання

	$\frac{x}{2x+8}$	$\frac{3-x}{x^2-9}$
Прирівнюємо знаменники дробів до нуля	$2x+8=0$	$x^2-9=0$
Розв'язуємо рівняння	$2x=-8$; $x=-4$	$(x-3)(x+3)=0$; $x=-3$ або $x=3$
Записуємо ОДЗ	Змінна x може набувати будь-яких значень, крім $x=-4$, $x=-3$, $x=3$.	

Відповідь: x — будь-яке число, крім $x=-4$, $x=-3$, $x=3$, тобто $x\neq-4$, $x\neq\pm3$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Добуток дорівнює нулю, якщо один із множників дорівнює нулю:
$ab=0$, якщо $a=0$ або $b=0$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Запис «x — будь-яке число, крім $x=-4$, $x=-3$, $x=3$» означає те саме, що й запис «$x\neq-4$, $x\neq\pm3$».
У відповіді можна використовувати будь-який із зазначених записів.

Видавництво «Ранок»

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Установіть відповідність між виразом (1–3) та його ОДЗ (А–Г).

1	$\frac{x-5}{x+5}$	А	$x \neq 5$
2	$\frac{x^2-25}{x^2-25}$	Б	x — усі числа
3	$\frac{x^2-25}{x^2+25}$	В	$x \neq -5$, $x \neq 5$
		Г	$x \neq -5$

Обміняйтеся записами й перевірте результати одне одного.

Алгоритм знаходження ОДЗ виразу

1. Прирівняти до нуля знаменники дробів, що входять у вираз.
2. Знайти розв'язки отриманих рівнянь.
3. Записати ОДЗ, зазначивши, що отримані в п. 2 розв'язки до неї не входять.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

1) $\frac{7}{x}+\frac{3}{x-8}$; 2) $\frac{6}{x}+\frac{4}{x-7}$; 3) $\frac{19}{4x}-\frac{x}{11+x}$; 4) $\frac{14}{3x}-\frac{x}{12+x}$; 5) $\frac{14}{x+1}+\frac{2x}{6x-3}$; 6) $\frac{21}{x+2}+\frac{3x}{8x-2}$; 7) $\frac{26x}{x+13}-\frac{x-5}{x^2-25}$; 8) $\frac{30x}{x+15}-\frac{x+2}{x^2-4}$.

ПРИКЛАД 4

Визначте всі значення змінної, за яких дріб $\frac{x^2-49}{x+7}$ дорівнює нулю.

Розв'язання

$x+7 \neq 0$ — Знаходимо ОДЗ дробу $(N(x) \neq 0)$.

$x \neq -7$

$x^2-49=0$ — Прирівнюємо чисельник до нуля, розв'язуємо рівняння $M(x)=0$.

$(x+7)(x-7)=0$

$x=-7$ або $x=7$

$x=-7$ не входить до ОДЗ. — Вилучаємо корені рівняння, які не увійшли до ОДЗ.

Дріб дорівнює нулю, якщо $x=7$ — Записуємо відповідь.

Відповідь: $x=7$.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Знайдіть усі значення змінної, за яких вираз дорівнює нулю:

1) $\frac{8x}{x+8}$; 2) $\frac{9x}{x+9}$; 3) $\frac{x-7}{7+x}$; 4) $\frac{x-5}{5+x}$; 5) $\frac{x^2-9}{x-3}$; 6) $\frac{x^2-16}{x-4}$; 7) $\frac{81-x^2}{2x+18}$; 8) $\frac{64-x^2}{3x+24}$.

СЛІД ЗНАТИ!

Раціональний дріб $\frac{M(x)}{N(x)}$ дорівнює нулю, якщо:

- чисельник дробу дорівнює нулю $(M(x)=0)$,
- знаменник відмінний від нуля $(N(x) \neq 0)$.

$\frac{M(x)}{N(x)}=0$, якщо $\begin{cases} M(x)=0, \\ N(x) \neq 0. \end{cases}$

Наприклад:

$\frac{x^2-25}{x+5}=0$, якщо

$\begin{cases} x^2-25=0, \\ x+5 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x=-5 \text{ або } x=5, \\ x \neq -5; \end{cases}$

$x=5$.

Відповідь: $x=5$.

Видавництво «Ранок»

ПРАКТИКУМ

1.1 Знайдіть значення виразу, якщо: а) $x=0$; б) $x=2$.

1) $\frac{4}{x+2}$; 3) $\frac{2x-4}{x+8}$; 5) $\frac{3x}{x^2+8}$; 7) $\frac{x^2-4}{x+8}$;

2) $\frac{5}{x-1}$; 4) $\frac{6-3x}{x-6}$; 6) $\frac{5x}{x^3-18}$; 8) $\frac{8-x^3}{x-1}$.

1.2 Обчисліть значення виразу, якщо це можливо:

1) $\frac{x}{x-5}$, якщо $x=0$; $x=5$; 2) $\frac{4x-1}{x^2}$, якщо $x=0$; $x=\frac{1}{4}$.

1.3 Обчисліть значення раціонального дробу:

1) $\frac{|x|+y}{(x+y)^2}$, якщо $x=-4{,}8$; $y=3{,}8$;

2) $\frac{x+|y|}{(x-y)^2}$, якщо $x=-1{,}1$; $y=-2{,}1$;

3) $\frac{5|x|-y}{x^2+2{,}4x+1{,}2^2}$, якщо $x=-0{,}2$; $y=1{,}4$;

4) $\frac{10x+|y|}{x^2-2{,}6x+1{,}3^2}$, якщо $x=0{,}3$; $y=-15$.

1.4 Укажіть вирази, які мають зміст за всіх значень змінної x:

1) $\frac{4}{3x}$; 2) $\frac{4x}{3}$; 3) $\frac{3-x}{4}$; 4) $\frac{4}{3+x}$; 5) $\frac{3}{x^2-4}$; 6) $\frac{3}{x^2+4}$.

1.5 Знайдіть допустимі значення змінної виразу:

1) $\frac{x}{7x-21}+\frac{x+4}{x^2-16}$; 4) $\frac{x-6}{0{,}36-x^2}-\frac{x^2-4}{(x+1)^2}$;

2) $\frac{4x}{2x+10}+\frac{7+x}{49-x^2}$; 5) $\frac{x^2-1}{3x^2-27}-\frac{3x}{|x|+9}$;

3) $\frac{x+4}{0{,}64-x^2}+\frac{1-x^2}{(x-2)^2}$; 6) $\frac{2x^3}{x^2+4}+\frac{x^2-4}{4|x|-12}$.

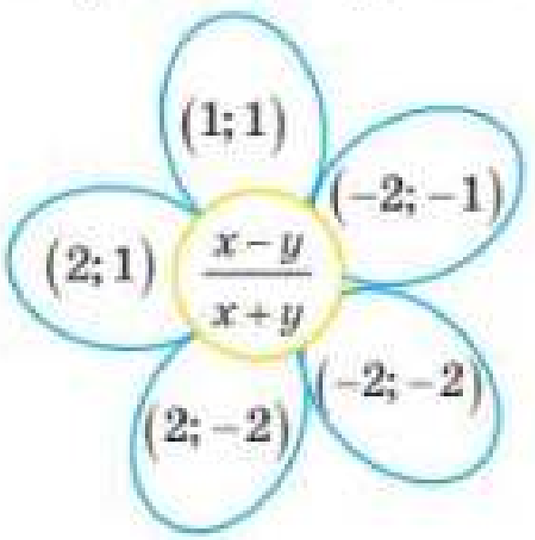
1.6 Знайдіть усі значення змінної, за яких вираз дорівнює нулю:

1) $\frac{x(x-2)}{2+x}$; 3) $\frac{(x+5)(x-1)}{x(x+5)}$; 5) $\frac{49-x^2}{(7+x)^2}$;

2) $\frac{3x(x+1)}{1-x}$; 4) $\frac{(x-2)(x+2)}{4x(x-2)}$; 6) $\frac{100-x^2}{(10-x)^2}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть зайву пару чисел.



ПРИГАДАЙТЕ!

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Вирази $|x|+a$ і x^2+a завжди більше нуля, якщо $a>0$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

Знайдіть усі значення змінної, за яких значення виразу $\frac{|x|-5}{x+5}$ дорівнює нулю.

Розв'язання

$|x|-5=0$;

$|x|=5$;

$x=\pm 5$.

Відповідь: $x=-5$, $x=5$.

Видавництво «Ранок»

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

ПЛАСТ — національна скаутська організація України. Значна увага в підготовці пластунів і пластунок приділяється не лише фізичній підготовці, а й математичній грамотності. З 12 років діти вчаться складати кошториси, організовувати певні заходи, визначати пріоритети і підраховувати загальну суму витрат, шукати спонсорів тощо.

MATH FOR LIFE

1.7 **Навчання.** За умовою задачі складіть вираз і обчисліть його значення, якщо задані значення змінних.

1) За t год загін пластунів* подолав відстань s км. Із якою швидкістю (у км/год) рухалися пластуни? $s=13$, $t=2$.

2) Автоматична лінія виготовляє m т шоколадної глазурі за n днів. Скільки тонн шоколадної глазурі виготовляє ця лінія за один день? $m=5{,}4$, $n=3$.

3) На страусовій фермі x страусів протягом 4 днів споживають y кг корму. Скільки кілограмів корму споживає один страус за один день? $x=7$, $y=98$.

1.8 **Тренування.** Фітнес-центр щодня відвідують a чоловіків і b жінок, причому кількість жінок більша за кількість чоловіків. Виберіть дріб, якому може дорівнювати значення виразу $\frac{a}{b}$.

А) $\frac{7}{9}$; Б) $\frac{45}{19}$; В) $\frac{100}{33}$; Г) $\frac{8}{3}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1.9 Запишіть дробовий вираз зі змінною x, допустимими значеннями якого є всі числа, крім:

1) 0; 2) 3; 3) -5; 4) 6 і -7; 5) -1; 0; 1; 6) -4; -2; 2; 4.

1.10 Складіть дріб, для якого умова рівності нулю записується так:

1) $\begin{cases} x=1, \\ x\neq 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=-2, \\ x\neq 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=-8,\ x=9, \\ x\neq -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=0,\ x=6, \\ x\neq -7,\ x\neq 7. \end{cases}$

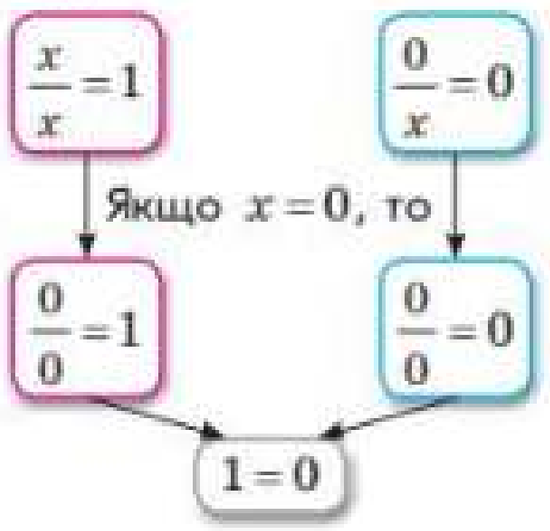
1.11 Знайдіть область допустимих значень змінної виразів 1–4.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $\frac{2x}{x^2-1}+\frac{4}{\lvert x\rvert-3}$. • $\frac{2x}{x^2-1} \to x^2-1=0$, якщо $x=\pm 1$; • $\frac{4}{\lvert x\rvert-3} \to \lvert x\rvert-3=0$, якщо $x=\pm 3$. Отже, ОДЗ: $x\neq\pm 1$, $x\neq\pm 3$. *Відповідь:* $x\neq\pm 1$, $x\neq\pm 3$.	2) $\frac{5}{\lvert x\rvert-2}+\frac{1}{x}$; 3) $\frac{4x-3}{\lvert x\rvert-9}-\frac{5x}{\lvert x\rvert+3}$; 4) $\frac{2x^3}{x^2+4}+\frac{x^2-4}{3\lvert x\rvert-15}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть помилку в доведенні.

Доведення



* Перелік джерел інформації для матеріалів рубрик «Чи відомо вам?», «#Be smart» та окремих задач розміщено в інтерактивному електронному додатку до підручника за посиланням rnk.com.ua/110131.

Видавництво «Ранок»

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1.12 Обчисліть значення раціонального дробу:

1) $\frac{39}{x-1}$, якщо $x=14$;

2) $\frac{x}{x+13}$, якщо $x=7$;

3) $\frac{17-x}{18+x}$, якщо $x=-8$;

4) $\frac{x^2}{x+4y}$, якщо $x=-4$, $y=3$.

1.13 За яких значень змінної не має змісту вираз:

1) $\frac{15}{x}$; 2) $\frac{7}{x-14}$; 3) $\frac{20x}{2x+18}$; 4) $\frac{x+3}{5|x|-5}$?

1.14 Визначте, за яких значень змінної не має змісту вираз:

1) $\frac{a-14}{a(3a+3{,}6)}$; 3) $\frac{a+13}{a(6a-4{,}8)}$; 5) $\frac{a^3-8}{(49-a^2)(a-2)}$;

2) $\frac{a-15}{a(4a+2{,}4)}$; 4) $\frac{a^3-27}{(36-a^2)(a+1)}$; 6) $\frac{a^3+27}{(25-a^2)(a-4)}$.

1.15 Яка область допустимих значень змінної виразу:

1) $\frac{8}{x}+\frac{1}{x-9}$;

2) $\frac{17}{6x}-\frac{5}{14+x}$;

3) $\frac{14}{x+3}+\frac{x}{5x-4}$;

4) $\frac{34x}{x+17}-\frac{x+4}{x^2-16}$?

1.16 Знайдіть усі значення змінної, за яких вираз дорівнює нулю:

1) $\frac{12x}{x+12}$; 2) $\frac{x-9}{9+x}$; 3) $\frac{x^2-25}{x-5}$; 4) $\frac{49-x^2}{2x+14}$.

1.17 Знайдіть значення виразу, якщо: а) $x=0$; б) $x=3$.

1) $\frac{15}{x+12}$; 3) $\frac{x-3}{10-x}$; 5) $\frac{3x}{x^2+9}$; 7) $\frac{x^2-9}{x+18}$;

2) $\frac{18}{x-2}$; 4) $\frac{3-x}{x+6}$; 6) $\frac{5x}{x^3-12}$; 8) $\frac{27-x^3}{x+9}$.

1.18 Обчисліть значення виразу, якщо це можливо:

1) $\frac{2x}{4+x}$, якщо $x=-4$; $x=0$; $x=6$;

2) $\frac{3x+1}{x^3}$, якщо $x=-1$; $x=0$; $x=-\frac{1}{3}$.

Завдання 1.12 → Приклад 1
Завдання 1.13
1.14 → Приклад 2
Завдання 1.15 → Приклад 3
Завдання 1.16 → Приклад 4
Завдання 1.17 → Практикум, 1.1
Завдання 1.18 → Практикум, 1.2
Завдання 1.19 → Практикум, 1.3
Завдання 1.20 → Практикум, 1.4
Завдання 1.21 → Практикум, 1.5
Завдання 1.22 → Практикум, 1.6
Завдання 1.23 → Math for life, 1.7
Завдання 1.24 → Math for life, 1.8

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

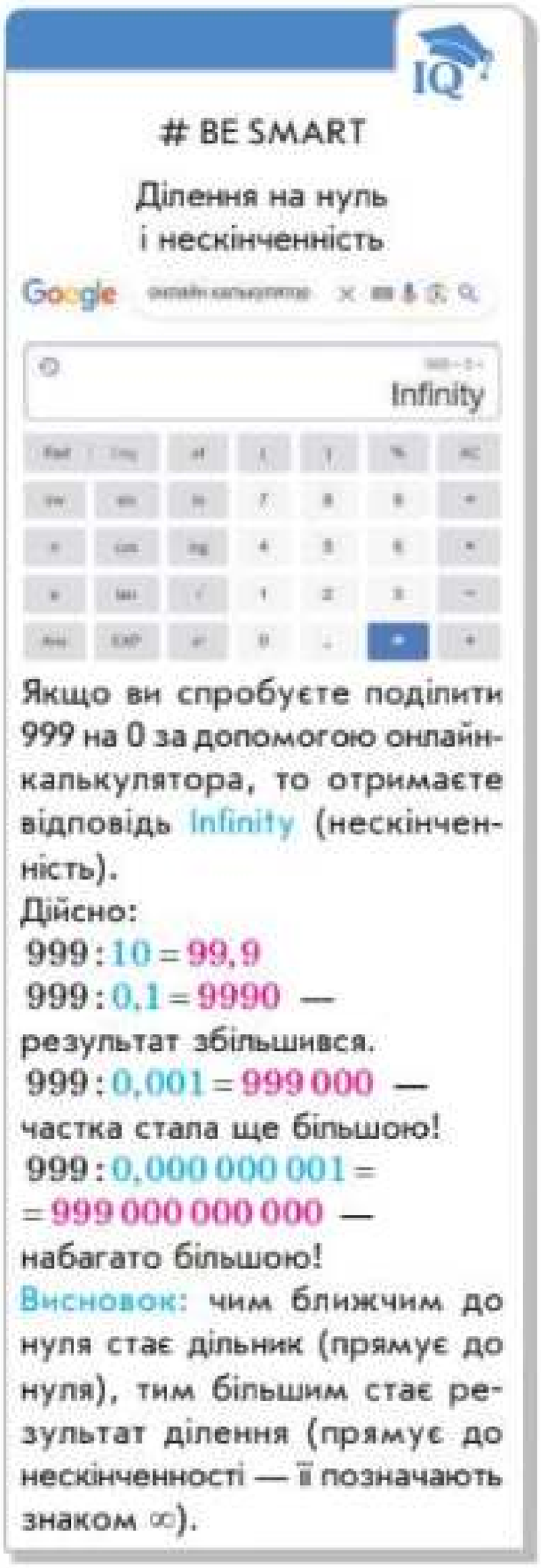
Індекс маси тіла (BMI — body mass index), який дозволяє оцінити відповідність між масою людини та її зростом, розраховують за формулою:

$I=\frac{m}{h^2}$, де m (кг) — маса людини, h (м) — її зріст.

Наприклад, значення цього індексу для людини масою 60 кг, зріст якої 170 см, дорівнює: $I=\frac{60}{1{,}7^2}=20{,}76$.

Визначте індекс маси тіла — ваш та ваших родичів або знайомих. Знайдіть в інтернеті таблиці значень індексу BMI та зробіть висновок, нормальною чи недостатньою є ваша маса.

Видавництво «Ранок»



Якщо ви спробуєте поділити 999 на 0 за допомогою онлайн-калькулятора, то отримаєте відповідь Infinity (нескінченність).

Дійсно:

$999 : 10 = 99{,}9$

$999 : 0{,}1 = 9990$ —

результат збільшився.

$999 : 0{,}001 = 999\,000$ —

частка стала ще більшою!

$999 : 0{,}000\,000\,001 =$

$= 999\,000\,000\,000$ —

набагато більшою!

Висновок: чим ближчим до нуля стає дільник (прямує до нуля), тим більшим стає результат ділення (прямує до нескінченності — її позначають знаком ∞).

1.19. Обчисліть значення раціонального дробу:

1) $\dfrac{|x|+y}{(x+y)^2}$, якщо $x=-9{,}7;\ y=8{,}7;$

2) $\dfrac{20x+|y|}{x^2-3{,}6x+1{,}8^2}$, якщо $x=0{,}8;\ y=-6.$

1.20 Укажіть вирази, які мають зміст за всіх значень змінної x:

1) $\dfrac{5}{9x}$; 3) $\dfrac{5}{x^2+9}$; 5) $\dfrac{9x}{5}$; 7) $9-\dfrac{5}{x^3}$;

2) $\dfrac{5}{x^2-9}$; 4) $\dfrac{5}{9+x}$; 6) $\dfrac{5-x}{9}$; 8) $5+\dfrac{x^2}{9}$.

1.21 Знайдіть допустимі значення змінної виразу:

1) $\dfrac{x}{2x-24}+\dfrac{x+10}{x^2-25}$; 4) $\dfrac{x-9}{0{,}09-x^2}-\dfrac{1-x^2}{(x-6)^2}$;

2) $\dfrac{5x}{3x+3}+\dfrac{1+x}{81-x^2}$; 5) $\dfrac{x^2-16}{2x^2-32}+\dfrac{5x}{|x|+7}$;

3) $\dfrac{x-7}{0{,}49-x^2}+\dfrac{3+x^2}{(x+8)^2}$; 6) $\dfrac{7x^3}{x^2+36}-\dfrac{x^2-9}{2|x|-6}$.

1.22 Знайдіть усі значення змінної, за яких вираз дорівнює нулю:

1) $\dfrac{5x(x+3)}{3-x}$; 2) $\dfrac{(x+6)(x-4)}{x(x+6)}$; 3) $\dfrac{36-x^2}{(6-x)^2}$.

1.23 За умовою задачі складіть вираз і обчисліть його значення, якщо задані значення змінних.

1) За t год група велосипедисток подолала відстань s км. Із якою швидкістю (у км/год) рухалися велосипедистки? $s=20,\ t=0{,}5.$

2) Автоматична лінія виготовляє x кг попкорну за y год. Скільки кілограмів попкорну виготовляє ця лінія за одну годину? $x=180,\ y=1{,}5.$

3) У дельфінарії 2 дельфіни за x днів з'їдають y кг риби. Скільки кілограмів риби з'їдає один дельфін за один день? $x=4,\ y=96.$

1.24 На виставці рушників представлені роботи a майстрів Тернопільщини та b майстрів Полтавщини, причому кількість тернопільських майстрів менша від кількості полтавських. Виберіть дріб, якому може дорівнювати значення виразу $\dfrac{b}{a}$.

А) $\dfrac{4}{5}$; Б) $\dfrac{29}{53}$; В) $\dfrac{9}{7}$; Г) $\dfrac{58}{61}$

Видавництво «Ранок»

§2 ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ДРОБУ

УЧОРА — Ви скорочували звичайні дроби, виконували дії зі степенями, розкладали многочлени на множники

СЬОГОДНІ — Ви познайомитесь із основною властивістю раціональних дробів

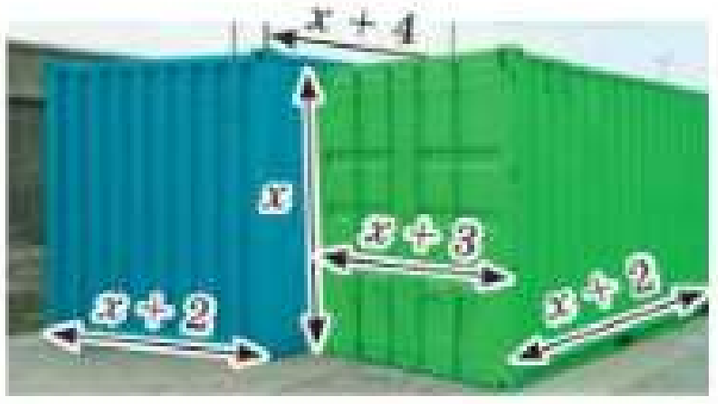
ЗАВЖДИ — Ви зможете спростити складні вирази та полегшити обчислення їх значень

mk.com.ua/107820

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ГУМАНІТАРНА ДОПОМОГА

Для перевезення гуманітарної допомоги замовили два контейнери. Висота, ширина і довжина першого контейнера дорівнюють: x м, $(x+2)$ м і $(x+4)$ м, другого — x м, $(x+3)$ м і $(x+2)$ м. Учням і ученицям 8 класу запропонували визначити, у скільки разів об'єм першого контейнера більший за об'єм другого, якщо висота обох контейнерів дорівнює 2 м.



Розв'язання

1. Об'єм першого контейнера: $V = x(x+2)(x+4)$ м^3.
2. Об'єм другого контейнера: $W = x(x+3)(x+2)$ м^3.
3. Об'єм першого контейнера більший за об'єм другого у $\dfrac{V}{W} = \dfrac{x(x+2)(x+4)}{x(x+3)(x+2)}$ разів.
4. Знаходимо значення одержаного виразу, якщо $x = 2$.

Дівчата і хлопці запропонували такі способи обчислення.

Хлопці

$$\frac{V}{W} = \frac{x(x+2)(x+4)}{x(x+3)(x+2)} = \frac{2(2+2)(2+4)}{2(2+3)(2+2)} = \frac{2\cdot4\cdot6}{2\cdot5\cdot4} = \frac{48}{40} = \frac{12}{10} = 1{,}2$$

Дівчата

$$\frac{V}{W} = \frac{\cancel{x}(x+2)(x+4)}{\cancel{x}(x+3)(x+2)} = \frac{x+4}{x+3} = \frac{2+4}{2+3} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Відповідь: у 1,2 раза.

- Який із запропонованих способів раціональніший?
- Якою властивістю скористалися дівчата для спрощення обчислення значення виразу?

Ви вже вмієте скорочувати звичайні дроби. Скорочення раціональних дробів виконується аналогічно. Скоротивши раціональний дріб, ми отримаємо дріб, який тотожно дорівнює заданому на області допустимих значень змінних.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- тотожність (identity)
- основна властивість дробу (the main property of a fraction)
- спільний множник (common factor)
- скорочення дробу (reduction of a fraction)

ПРИГАДАЙТЕ!

Тотожними або **тотожно рівними** називають такі вирази, відповідні значення яких є рівними за будь-яких допустимих значень змінних.

Вирази $\dfrac{x(x+2)(x+4)}{x(x+3)(x+2)}$ і $\dfrac{x+4}{x+3}$ є тотожно рівними за всіх значень x, крім $x=-3$; $x=-2$; $x=0$.

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Під час розв'язування задач та виконання розрахунків досить часто доводиться як скорочувати дроби, так і зводити їх до іншого знаменника шляхом множення на одне й те саме число. Цей спосіб базується на основній властивості дробу.

Основна властивість дробу

Звичайні дроби

Чисельник і знаменник дробу можна помножити або поділити на одне й те саме **число, відмінне від нуля**, у результаті значення дробу не зміниться:

Наприклад:

$$\frac{20}{45}=\frac{20\cdot 2}{45\cdot 2}=\frac{40}{90};\qquad \frac{20}{45}=\frac{4\cdot \cancel{5}}{9\cdot \cancel{5}}=\frac{4}{9};$$

$$\frac{40}{90}=\frac{20}{45}=\frac{4}{9}$$

Раціональні дроби

Чисельник і знаменник раціонального дробу можна помножити або поділити на один і той самий **множник, який тотожно не дорівнює нулю**, у результаті значення раціонального дробу не зміниться:

Наприклад:

$$\frac{M}{N}=\frac{M\cdot P}{N\cdot P};\qquad \frac{M\cdot \cancel{P}}{N\cdot \cancel{P}}=\frac{M}{N},$$

M, N, P — многочлени, $N\neq 0$, $P\neq 0$

ДОСЛІДЖУЄМО

Проаналізуйте приклади, наведені в таблиці.
Складіть алгоритм скорочення раціональних дробів.

Дріб	Розкладаємо на множники	Спільний множник	Скорочуємо	Записуємо ОДЗ дробу
$\frac{5ab^2}{20a^2b}$	$\frac{5abb}{5\cdot 4aab}$	$5ab$	$\frac{b}{4a}$	$a\neq 0,\ b\neq 0$
$\frac{4x^2-16x}{x^2-16}$	$\frac{4x\cdot(x-4)}{(x-4)\cdot(x+4)}$	$(x-4)$	$\frac{4x}{x+4}$	$x\neq -4,\ x\neq 4$

ПРИГАДАЙТЕ!

Для розкладання многочленів на множники застосовують:

- розкладання числа на прості множники;
- правило знаходження найбільшого спільного дільника (НСД);
- винесення спільного множника за дужки;
- спосіб групування;
- формули скороченого множення;
- властивості дій зі степенями.

Алгоритм скорочення раціонального дробу

1. Розкласти чисельник і знаменник дробу на множники.
2. Знайти область допустимих значень (ОДЗ) дробу.
3. Визначити спільний множник чисельника і знаменника дробу.
4. Скоротити дріб, поділивши чисельник і знаменник дробу на їхній спільний множник.
5. Записати відповідь з урахуванням ОДЗ змінних раціонального дробу.

РОЗМИНКА 1

1 Розкладіть на множники вираз:

1) $a+xa$; 2) $7b-49ab$; 3) c^2-81; 4) $m^2+4mn+4n^2$.

2 Знайдіть спільний множник виразу $24x$ і виразу:

1) $2x$; 2) $24x^2$; 3) 24; 4) $48x^3$; 5) $-24xy$.

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 1

Скоротіть дріб $\frac{8a^2b}{12abc^2}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Розв'язання

$\frac{8a^2b}{12abc^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b}{4 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot c^2}$ ..... Розкладаємо чисельник і знаменник на множники.

$\frac{4ab \cdot 2a}{4ab \cdot 3c^2} = \frac{\cancel{4ab} \cdot 2a}{\cancel{4ab} \cdot 3c^2} = \frac{2a}{3c^2}$ ..... Знаходимо спільний множник чисельника і знаменника.

Ділимо чисельник і знаменник на спільний множник.

Відповідь: $\frac{2a}{3c^2}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- Спільний числовий множник — це найбільший спільний дільник (НСД) коефіцієнтів усіх членів.
- Спільний буквений множник — це спільна змінна (або добуток змінних) з найменшим показником степеня.

Запис розв'язання:

$$\frac{8a^2b}{12abc^2} = \frac{4ab \cdot 2a}{4ab \cdot 3c^2} = \frac{2a}{3c^2}$$

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Скоротіть дріб:

1) $\frac{6a}{a}$; 2) $\frac{7b}{b}$; 3) $\frac{3b^2}{15b^2}$; 4) $\frac{6a^3}{12a^3}$; 5) $\frac{38ab^3}{19ab^2}$; 6) $\frac{36a^4b}{12a^2b}$; 7) $\frac{-18a^5bc^3}{27a^2c^3}$; 8) $\frac{28a^4c^5}{-12a^4bc^3}$.

ПРИКЛАД 2

Скоротіть дріб $\frac{21a-7ab}{7ab}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Розв'язання

$\frac{21a-7ab}{7ab} = \frac{7 \cdot a \cdot 3 - 7 \cdot a \cdot b}{7 \cdot a \cdot b}$ ..... Розкладаємо чисельник і знаменник на множники.

$\frac{7a \cdot (3-b)}{7a \cdot b} = \frac{3-b}{b}$ ..... Знаходимо спільний множник.

Ділимо чисельник і знаменник на спільний множник.

Відповідь: $\frac{3-b}{b}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$.

СЛІД ЗНАТИ!

Скорочення дробу — це ділення чисельника і знаменника на один і той самий множник, який тотожно не дорівнює нулю і відмінний від 1.

Запис розв'язання:

$$\frac{21a-7ab}{7ab} = \frac{7a \cdot (3-b)}{7a \cdot b} = \frac{3-b}{b}$$

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Скоротіть дріб:

1) $\frac{4(a-b)}{a-b}$; 2) $\frac{6(a+b)}{a+b}$; 3) $\frac{a(7+b)}{5(7+b)}$; 4) $\frac{b(a-6)}{8(a-6)}$; 5) $\frac{ab-a}{3ab}$; 6) $\frac{b+ab}{5ab}$; 7) $\frac{6ab}{3ab+9a}$; 8) $\frac{10ab}{15ab-5a}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$a \cdot b + a \cdot c = a(b+c)$,

$a \cdot b - a \cdot c = a(b-c)$

Видавництво «Ранок»

Запис розв'язання:

$$\frac{16a^2-8a+1}{16a^2-1}=\frac{(4a-1)^2}{(4a-1)(4a+1)}=$$
$$=\frac{(4a-1)(4a-1)}{(4a-1)(4a+1)}=\frac{4a-1}{4a+1},$$

якщо $a\neq\pm\frac{1}{4}$.

ПРИКЛАД 3

Скоротіть дріб $\frac{16a^2-8a+1}{16a^2-1}$.

Розв'язання

$\frac{16a^2-8a+1}{16a^2-1}=\frac{(4a-1)^2}{(4a-1)(4a+1)}$ ..... Розкладаємо чисельник і знаменник на множники.

$(4a-1)(4a+1)\neq 0;$ ..... Знаходимо область допустимих значень змінної виразу.

$4a-1\neq 0;\ 4a+1\neq 0$

$a\neq\pm\frac{1}{4}$

$\frac{(4a-1)(4a-1)}{(4a-1)(4a+1)}=\frac{4a-1}{4a+1}$ ..... Скорочуємо дріб.

$\frac{4a-1}{4a+1}$, якщо $a\neq\pm\frac{1}{4}$ ..... Записуємо відповідь з урахуванням ОДЗ.

Відповідь: $\frac{4a-1}{4a+1}$, якщо $a\neq\pm\frac{1}{4}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Скоротіть дріб:

1) $\frac{(x+9)^2}{(x-9)(x+9)}$; 4) $\frac{(x-3)(x+3)}{x^2+6x+9}$; 7) $\frac{100x^2-1}{100x^2-20x+1}$;

2) $\frac{(x-8)^2}{(x-8)(x+8)}$; 5) $\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}$; 8) $\frac{81x^2-1}{81x^2+18x+1}$.

3) $\frac{(x-2)(x+2)}{x^2-4x+4}$; 6) $\frac{x^2-12x+36}{x^2-36}$;

ПРИГАДАЙТЕ!

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$,

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$,

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

«Книга про індійський рахунок» великого перського вченого IX ст. Аль-Хорезмі була дуже відомою свого часу. Ім'я вченого переклали як «Ал-Горитмі». Згодом способи розв'язування задач стали називати алгоритмами.

Для зведення дробу до іншого знаменника також застосовують основну властивість дробу, а саме множення чисельника та знаменника на один і той самий доповняльний множник.

Алгоритм зведення дробу до нового знаменника

1. Розкласти новий знаменник на множники, якщо потрібно.
2. Знайти доповняльний множник як частку від ділення нового знаменника на знаменник початкового дробу.
3. Помножити чисельник і знаменник заданого дробу на знайдений доповняльний множник.
4. Виконати дії в чисельнику та знаменнику отриманого дробу.
5. Записати отриманий дріб (ураховуючи ОДЗ).

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 4

Зведіть дріб $\frac{2a}{3b}$ до знаменника $12ab^2$.

Розв'язання

$12ab^2 = 3b \cdot 4ab$ ..... Розкладаємо новий знаменник на множники так, щоб один із множників дорівнював $3b$.

$4ab$ — доповняльний множник

$\frac{2a}{3b} = \frac{2a \cdot 4ab}{3b \cdot 4ab} = \frac{8a^2b}{12ab^2}$ ..... Множимо чисельник і знаменник заданого дробу на отриманий доповняльний множник. Записуємо відповідь.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Зведіть дріб до нового знаменника:

1) $\frac{2}{m} = \frac{\square}{m^2}$; 3) $\frac{5m}{n} = \frac{\square}{n^3}$; 5) $\frac{4n}{m^2} = \frac{\square}{5m^6}$; 7) $\frac{3m}{2n^5} = \frac{\square}{8mn^8}$;

2) $\frac{3}{n} = \frac{\square}{n^2}$; 4) $\frac{4n}{m} = \frac{\square}{m^4}$; 6) $\frac{3m}{n^2} = \frac{\square}{2n^7}$; 8) $\frac{4n}{3m^4} = \frac{\square}{27nm^8}$.

ПРИКЛАД 5

Зведіть дріб $\frac{5}{a-b}$ до знаменника a^2-b^2, якщо $a \neq \pm b$.

Розв'язання

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ ..... Розкладаємо на множники новий знаменник.

$\frac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a+b$ ..... Визначаємо доповняльний множник.

$\frac{5}{a-b} = \frac{5 \cdot (a+b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{5(a+b)}{a^2-b^2}$ ..... Множимо чисельник і знаменник заданого дробу на доповняльний множник.

Відповідь: $\frac{5(a+b)}{a^2-b^2}$, якщо $a \neq \pm b$.

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Зведіть дріб до нового знаменника:

1) $\frac{1}{a+b} = \frac{\square}{(a+b)^2}$; 4) $\frac{7}{b+a} = \frac{\square}{b^2-a^2}$; 7) $\frac{a+2b}{a-2b} = \frac{\square}{a^2-4b^2}$;

2) $\frac{1}{a-b} = \frac{\square}{(a-b)^2}$; 5) $\frac{b}{4a+b} = \frac{\square}{16a^2-b^2}$; 8) $\frac{a-3b}{a+3b} = \frac{\square}{a^2-9b^2}$.

3) $\frac{6}{b-a} = \frac{\square}{b^2-a^2}$; 6) $\frac{a}{5a-b} = \frac{\square}{25a^2-b^2}$;

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Якщо треба звести дріб до нового знаменника, шукають доповняльний множник.

Щоб знайти доповняльний множник, можна **знаменник, до якого треба звести дріб,** розділити на знаменник початкового дробу.

Наприклад: $\frac{12ab^2}{3b} = 4ab$

СЛІД ЗНАТИ!

Усі перетворення раціонального дробу виконуються на ОДЗ. Будемо визначати ОДЗ змінних, що входять у вираз, й записувати її у відповідь тільки тоді, коли це вимагається в умові завдання

ПРИГАДАЙТЕ!

$\frac{M}{N} = \frac{M \cdot P}{N \cdot P} = \frac{MP}{NP}$,

M, N, P — многочлени, $N \neq 0$, $P \neq 0$

СЛІД ЗНАТИ!

доповняльний множник = $\frac{\text{новий знаменник}}{\text{знаменник початкового дробу}}$

Видавництво «Ранок»

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $\dfrac{16a^{12}b^{10}}{4a^3b^2c} =$

$= \dfrac{\cancel{4}\cdot 4\cdot \cancel{a^3}\cdot a^4\cdot \cancel{b^2}\cdot b^5}{\cancel{4}\cdot \cancel{a^3}\cdot \cancel{b^2}\cdot c} = \dfrac{4a^4b^5}{c};$

2) $\dfrac{5x^2}{5x^2-15} = \dfrac{\cancel{5}x^2}{\cancel{5}\left(x^2-3\right)} =$

$= \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}-3} = \dfrac{1}{-3}$

ПРИГАДАЙТЕ!

$a-b=-(b-a)$

$\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{a-b}{b-a} = -\dfrac{a-b}{a-b} = -1$

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Зведіть дріб $\dfrac{7}{c}$ до знаменника:

1) $2c$; 2) $-3c$; 3) c^3; 4) $4c^4$; 5) $5cd$; 6) $-6c^2d^2$.

Виграє той / та, хто правильно виконає завдання за коротший час.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Перш ніж скоротити дріб, його чисельник і знаменник необхідно розкласти на множники

ПРАКТИКУМ

2.1 Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{y(x+7)}{4(x+7)}$; 3) $\dfrac{12y(x-7)}{4y(x-7)}$; 5) $\dfrac{20xy(y+1)}{10y(2y+2)}$;

2) $\dfrac{6(x-2)}{y(x-2)}$; 4) $\dfrac{9x(6+y)}{18x(6+y)}$; 6) $\dfrac{4x(3y+6)}{12xy(y+2)}$.

2.2 Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу та скоротіть його:

1) $\dfrac{(a-8)(a+8)}{2a-16}$; 3) $\dfrac{4a+20}{a^2-25}$; 5) $\dfrac{a^2-4a+4}{a^3-2a^2}$;

2) $\dfrac{3a+27}{(a-9)(a+9)}$; 4) $\dfrac{a^2-36}{2a-12}$; 6) $\dfrac{a^3+3a^2}{a^2+6a+9}$.

2.3 Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x-14}{14-x}$; 3) $\dfrac{3y(x-8)}{y(8-x)}$; 5) $\dfrac{yx-6y}{6-x}$;

2) $\dfrac{11-y}{y-11}$; 4) $\dfrac{x(9-y)}{5x(y-9)}$; 6) $\dfrac{x-4}{4y-xy}$.

2.4 Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{(x-5)^2}{(5-x)^2}$; 3) $\dfrac{-x-7y}{(x+7y)^2}$; 5) $\dfrac{4x^2+4xy+y^2}{-6x-3y}$;

2) $\dfrac{(y-9)^3}{(9-y)^3}$; 4) $\dfrac{(8x+y)^2}{-8x-y}$; 6) $\dfrac{-2x-6y}{x^2+6xy+9y^2}$.

2.5 Зведіть дріб до нового знаменника:

1) $\dfrac{2}{2a-b} = \dfrac{\square}{b-2a}$; 3) $\dfrac{a}{a-4b} = \dfrac{\square}{8b-2a}$; 5) $\dfrac{4a}{a-b} = \dfrac{\square}{b^2-a^2}$;

2) $\dfrac{5}{a-3b} = \dfrac{\square}{3b-a}$; 4) $\dfrac{b}{5a-b} = \dfrac{\square}{3b-15a}$; 6) $\dfrac{6b}{3a-b} = \dfrac{\square}{b^2-9a^2}$.

2.6 Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{(2a+2b)^2}{(a+b)^2}$; 3) $\dfrac{t^2-9}{(3t-9)^2}$; 5) $\dfrac{25a^2-1}{(15a+3)^2}$;

2) $\dfrac{(m-n)^2}{(5m-5n)^2}$; 4) $\dfrac{(2t+8)^2}{16-t^2}$; 6) $\dfrac{(-3a-6)^2}{a^2+4a+4}$.

Видавництво «Ранок»

MATH FOR LIFE

2.7 **Робототехніка.** Протягом доби роботи A і B виконують n^{12} і n^{10} операцій відповідно. У скільки разів більше операцій виконує робот A, ніж робот B протягом доби?

2.8 **Кібернетика.** Обсяг пам'яті комп'ютера A дозволяє встановити на нього a^4b^9 програм. А на комп'ютер B з більшим обсягом пам'яті можна встановити a^4b^{12} програм. У скільки разів кількість програм, які можна встановити на комп'ютер B, більша за кількість програм, які можна встановити на комп'ютер A?

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Ц·І·К·А·В·И·Й

Д·Р·І·Б

У цьому ребусі кожна буква позначає одну цифру. Однакові букви позначають однакові цифри, різні букви — різні цифри. Чому дорівнюватиме цей дріб після всіх можливих скорочень?

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Серед наведених виразів укажіть цілий вираз.

А	Б	В	Г
$\frac{5}{a^2}$	$\frac{a}{a+5}$	$\frac{a+5}{a}$	$\frac{a^2}{5}$

2 За яких значень змінної x вираз $\frac{x+1}{x-4}$ не має змісту?

А	Б	В	Г
$x=-1$	$x=1$	$x=4$	$x=-4$

3 Скоротіть дріб $\frac{2b}{6b^3}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{4b^2}$	$\frac{1}{3b^2}$	$3b^2$	$4b^2$

4 Скоротіть дріб $\frac{c-2}{3c-6}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-3	3

5 Першого дня дрон зафіксував поблизу узбережжя a акул, а другого дня — $(a+9)$ акул. У скільки разів менше акул було зафіксовано першого дня, ніж другого?

А	Б	В	Г
у 9 разів	в $\frac{a}{a+9}$ разів	в $\frac{a+9}{a}$ разів	у $\frac{9}{a}$ разів

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г), якщо $b=5$.

1	$\frac{10}{b}$	А	1
2	$\frac{10}{b-3}$	Б	2
		В	5
3	$\frac{2b}{6-b}$	Г	10

7 Задано дріб $\frac{17}{2x-5}$.

1) Знайдіть область допустимих значень змінної x цього дробу.

2) Зведіть заданий дріб до знаменника $4x^2-25$.

8 Задано дріб $\frac{3x}{3xy-12x}$.

1) Скоротіть цей дріб.

2) Знайдіть його значення, якщо $y=4{,}02$.

Видавництво «Ранок»

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

2.9 Відомо, що $ab=15$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{45c}{abc}$; 2) $\frac{abc}{30c}$; 3) $\frac{a^9bc^7}{6a^8c^7}$; 4) $\frac{90a^7c^{12}}{a^8bc^{12}}$.

2.10 Відомо, що $a+3b=10$. Знайдіть значення виразів 1–6.

Аналізуємо

6) $\frac{5a-15b}{a^2-9b^2}$.

- Скорочуємо дріб: $\frac{5a-15b}{a^2-9b^2}=\frac{5(a-3b)}{(a-3b)(a+3b)}=\frac{5}{a+3b}$.
- Підставляємо значення $a+3b=10$: $\frac{5}{a+3b}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

Відповідь: 0,5.

Виконуємо

1) $\frac{-3b-a}{50}$; 4) $\frac{ab+3b^2}{2b}$;

2) $\frac{70}{-3b-a}$; 5) $\frac{a^2-9b^2}{4a-12b}$.

3) $\frac{3a}{a^2+3ab}$;

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

2.11 Скоротіть дріб:

1) $\frac{9a}{a}$; 2) $\frac{8b^3}{20b^3}$; 3) $\frac{62a^3b}{31ab}$; 4) $\frac{-35ab^3c^4}{30b^3c^3}$.

2.12 Скоротіть дріб:

1) $\frac{5(a-b)}{a-b}$; 2) $\frac{a(9+b)}{2(9+b)}$; 3) $\frac{ab-b}{7ab}$; 4) $\frac{12ab}{20ab+4a}$.

2.13 Скоротіть дріб:

1) $\frac{(x+7)^2}{(x-7)(x+7)}$; 3) $\frac{x^2-16x+64}{x^2-64}$;

2) $\frac{(x-4)(x+4)}{x^2+8x+16}$; 4) $\frac{25x^2-1}{25x^2+50x+1}$.

2.14 Зведіть дріб до нового знаменника:

1) $\frac{4}{n}=\frac{\square}{n^2}$; 2) $\frac{6n}{m}=\frac{\square}{m^3}$; 3) $\frac{5m}{n^3}=\frac{\square}{4n^6}$; 4) $\frac{7n}{4m^5}=\frac{\square}{8nm^{10}}$.

2.15 Зведіть дріб до нового знаменника:

1) $\frac{1}{b-a}=\frac{\square}{(b-a)^2}$; 3) $\frac{b}{7a+b}=\frac{\square}{49a^2-b^2}$;

2) $\frac{8}{b+a}=\frac{\square}{b^2-a^2}$; 4) $\frac{a+5b}{a-5b}=\frac{\square}{a^2-25b^2}$.

Завдання 2.11 → Приклад 1
Завдання 2.12 → Приклад 2
Завдання 2.13 → Приклад 3
Завдання 2.14 → Приклад 4
Завдання 2.15 → Приклад 5
Завдання 2.16 → Практикум, 2.2
Завдання 2.17 → Практикум, 2.3
Завдання 2.18 → Практикум, 2.5
Завдання 2.20 → Math for life, 2.7
Завдання 2.21 → Math for life, 2.8
Завдання 2.22 → Інтелектуальний фітнес, 2.9
Завдання 2.23 → Інтелектуальний фітнес, 2.10

Видавництво «Ранок»

2.16 Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу та скоротіть його.

1) $\frac{(a-9)(a+9)}{2a-18}$; 2) $\frac{3a+21}{a^2-49}$; 3) $\frac{a^2-2a+1}{a^3-a^2}$.

2.17 Скоротіть дріб:

1) $\frac{x-13}{13-x}$; 2) $\frac{x(6-y)}{4x(y-6)}$; 3) $\frac{yx-7x}{7-y}$.

2.18 Зведіть дріб до нового знаменника:

1) $\frac{12}{6a-b}=\frac{\square}{b-6a}$; 3) $\frac{7a}{a-2b}=\frac{\square}{4b^2-a^2}$;

2) $\frac{a}{a-3b}=\frac{\square}{15b-5a}$; 4) $\frac{8b}{9a-b}=\frac{\square}{b^2-81a^2}$.

2.19 Скоротіть дріб:

1) $\frac{b^5+b^2}{1+b^3}$; 3) $\frac{c-c^4}{1-c^3}$; 5) $\frac{b^6-b^2}{b^4-b^8}$;

2) $\frac{1+b^3}{b^8+b^3}$; 4) $\frac{1-c^6}{c-c^7}$; 6) $\frac{b^{13}-b^{21}}{b^{20}-b^{12}}$.

2.20 У зразку води, узятій із водойми A, виявили m^8 живих мікроорганізмів, а в такому самому зразку з водойми B — m^9. У скільки разів у водоймі A менше мікроорганізмів, ніж у водоймі B?

2.21 В університеті A можна вибрати a^7b^{10} різних варіантів розкладу занять, а в університеті B — a^8b^{10} варіантів. У скільки разів кількість варіантів розкладу в університеті A менша, ніж в університеті B?

Бонусні завдання

2.22 Відомо, що $2a+b=8$. Знайдіть значення виразу:

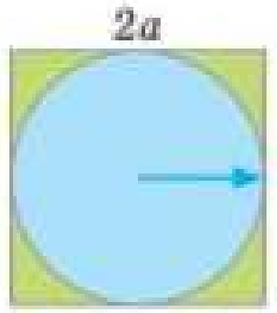
1) $\frac{-2a-b}{16}$; 2) $\frac{4a^2-b^2}{10a-5b}$.

2.23 Відомо, що $ab=18$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{36c}{abc}$; 2) $a^2c^2:\frac{4c^2}{b^2}$; 3) $\frac{a^7bc^9}{40a^6c^9}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Фермери використовують кругові зрошувальні системи. Квадратне поле, довжина сторони якого дорівнює $2a$ метрів, зрошується із центра. Радіус круга зрошення досягає a метрів.



Складіть вирази для визначення:
1) відношення частини площі поля, що зрошується, до площі всього поля;
2) відношення частини площі поля, що не зрошується, до площі всього поля.
Спростіть отримані вирази. Обчисліть відповідні значення.

BE SMART

1. Скоротіть дріб $\frac{(s\cdot t\cdot u\cdot d\cdot y)\cdot(s\cdot m\cdot a\cdot r\cdot t)}{(b\cdot u\cdot t)\cdot(n\cdot o\cdot t)\cdot(h\cdot a\cdot r\cdot d)}$ та знайдіть його значення, якщо $s=16$, $my=3$, $no=2$, $bh=128$.

2. Перекладіть українською мовою вислів: «Study smart but not hard»

Видавництво «Ранок»

§3 ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З ОДНАКОВИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

УЧОРА — ви вміли додавати і віднімати звичайні дроби

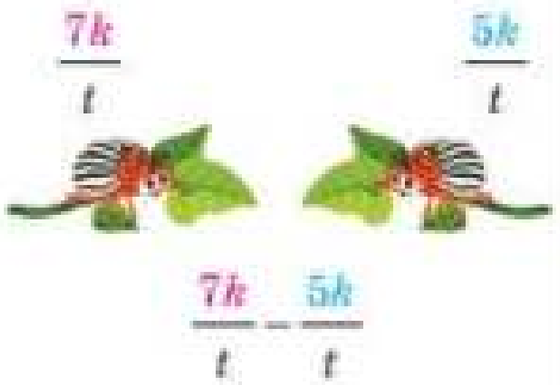
СЬОГОДНІ — ви навчитеся додавати і віднімати раціональні дроби з однаковими та протилежними знаменниками

ЗАВЖДИ — ви зможете знаходити різні величини, що виражаються за допомогою раціональних дробів

mk.com.ua/107851

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ДРОБИ НАВКОЛО НАС

$\text{Швидкість руху} = \frac{\text{відстань}}{\text{час}}$	Злата і Гліб вийшли назустріч одне одному. Швидкості їхнього руху (у км/год) $\frac{2s}{t}$ і $\frac{3s}{t}$ відповідно. Яка швидкість зближення друзів?	
$\text{Продуктивність} = \frac{\text{маса листя}}{\text{час}}$	Два колорадські жуки їдять бадилля картоплі. «Продуктивність» першого жука $\frac{7k}{t}$ г/хв, а другого — $\frac{5k}{t}$ г/хв. На скільки «продуктивність» першого жука більша, ніж другого?	
$\text{Ціна} = \frac{\text{вартість}}{\text{об'єм}}$	До підвищення цін водій сплачував за m^3 літрів бензину n г. о., а після підвищення цін став платити p г. о. На скільки збільшилася ціна бензину?	

ПРИГАДАЙТЕ!

$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$, якщо $c\neq 0$,

де a, b, c — деякі числа.

Щоб розв'язувати такі задачі, необхідно вміти додавати і віднімати раціональні дроби з **однаковими знаменниками.**

Раціональні дроби додають або віднімають за таким самим алгоритмом, що й звичайні дроби. Єдине, на що слід звернути увагу: усі дії виконують лише на області допустимих значень змінних, які входять у вираз.

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Правило додавання (віднімання) раціональних дробів

Щоб додати раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, **а знаменник залишити без змін.**

Щоб відняти раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника першого дробу відняти чисельник другого дробу, **а знаменник залишити без змін.**

Якщо A, B, C — многочлени, причому $C \neq 0$, то

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$$

Наприклад:

$$\frac{2x}{x-5}+\frac{3y}{x-5}=\frac{2x+3y}{x-5},$$

якщо $x \neq 5$

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

Наприклад:

$$\frac{3x}{y+2}-\frac{7y}{y+2}=\frac{3x-7y}{y+2},$$

якщо $y \neq -2$

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- додавання дробів (adding fractions)
- віднімання дробів (subtraction fractions)
- чисельник дробу (numerator of the fraction)
- знаменник дробу (denominator of the fraction)
- однакові знаменники (like denominators)

РОЗМИНКА 1

Виконайте дії:

1) $\frac{a}{4}+\frac{1}{4}$;
2) $\frac{b}{9}-\frac{c}{9}$;
3) $\frac{2}{x}+\frac{9}{x}$;
4) $\frac{7}{y}-\frac{5}{y}$;
5) $\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-1}$;
6) $\frac{4}{y+3}-\frac{9}{y+3}$;
7) $\frac{c}{c+2}+\frac{2}{c+2}$;
8) $\frac{7}{7-c}-\frac{c}{7-c}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Усі дії виконуються на області допустимих значень змінної виразу.

Алгоритм додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками

1. Записати в чисельнику суму (різницю) чисельників дробів, а знаменник залишити той самий.
2. Виконати в отриманому чисельнику відповідні дії додавання (віднімання).
3. Розкрити дужки та звести подібні доданки (якщо потрібно).
4. Скоротити отриманий дріб (якщо це можливо).

ПРИКЛАД 1

Виконайте дії: $\frac{a^2}{a-3}-\frac{9}{a-3}$, якщо $a \neq 3$.

Розв'язання

$\frac{a^2}{a-3}-\frac{9}{a-3}=\frac{a^2-9}{a-3}$ ..... Віднімаємо чисельники, знаменник залишаємо без змін.

$\frac{a^2-9}{a-3}=\frac{(a-3)(a+3)}{a-3}=a+3$ ..... Розкладаємо на множники чисельник. Скорочуємо дріб.

Відповідь: $a+3$, якщо $a \neq 3$.

Запис розв'язання:

$$\frac{a^2}{a-3}-\frac{9}{a-3}=\frac{a^2-9}{a-3}=\frac{(a-3)(a+3)}{a-3}=a+3$$

Видавництво «Ранок»

ПРИГАДАЙТЕ!

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},$$

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C},$$

де A, B, C — многочлени, причому $C\neq 0$

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Виконайте дії:

1) $\frac{14}{a}-\frac{10}{a}$;
2) $\frac{12}{a}-\frac{11}{a}$;
3) $\frac{a-5}{a+3}+\frac{8}{a+3}$;
4) $\frac{a-9}{a-2}+\frac{7}{a-2}$;
5) $\frac{a^2}{a-4}-\frac{16}{a-4}$;
6) $\frac{a^2}{a+5}-\frac{25}{a+5}$;
7) $\frac{9a^2}{3a+1}-\frac{1}{3a+1}$;
8) $\frac{4a^2}{2a-1}-\frac{1}{2a-1}$.

РОЗМИНКА 2

1 Знайдіть пари протилежних виразів серед наведених:

1) $5x$; 2) $y-3$; 3) $a-2b$; 4) $3-y$; 5) $-5x$; 6) $2b-a$.

2 Назвіть вирази, протилежні поданим:

1) $-7y$; 2) $2x-9$; 3) $3c-4b$; 4) $1+x$; 5) x^2; 6) a^3.

ПРИКЛАД 2

Подайте суму виразів у вигляді дробу: $\frac{4y^2}{2y-1}+\frac{4y-1}{1-2y}$, $y\neq\frac{1}{2}$.

Розв'язання

$\frac{4y-1}{1-2y}=\frac{4y-1}{-(2y-1)}=-\frac{4y-1}{2y-1}$ ..... Зводимо другий дріб до знаменника першого дробу.

$\frac{4y^2}{2y-1}-\frac{4y-1}{2y-1}=\frac{4y^2-4y+1}{2y-1}=\frac{(2y-1)^2}{2y-1}$ ..... Виконуємо віднімання. Застосовуємо формулу квадрата різниці.

$\frac{(2y-1)^2}{2y-1}=\frac{(2y-1)(2y-1)}{2y-1}=2y-1$ ..... Розкладаємо чисельник на множники. Скорочуємо дріб

Відповідь: $2y-1$, якщо $y\neq\frac{1}{2}$.

Запис розв'язання:

$$\frac{4y^2}{2y-1}+\frac{4y-1}{1-2y}=\frac{4y^2}{2y-1}-\frac{4y-1}{2y-1}=$$
$$=\frac{4y^2-4y+1}{2y-1}=\frac{(2y-1)^2}{2y-1}=2y-1$$

СЛІД ЗНАТИ!

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{-C}=\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{-C}=\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$$

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Подайте суму або різницю дробів у вигляді дробу:

1) $\frac{4}{x-9}+\frac{1}{9-x}$;
2) $\frac{6}{x-6}+\frac{2}{6-x}$;
3) $\frac{x}{x-11}+\frac{11}{11-x}$;
4) $\frac{x}{x-13}+\frac{13}{13-x}$;
5) $\frac{x^2}{x-2}-\frac{4-4x}{2-x}$;
6) $\frac{x^2}{x-1}-\frac{1-2x}{1-x}$;
7) $\frac{25x^2}{5x-1}+\frac{10x-1}{1-5x}$;
8) $\frac{16x^2}{4x-1}+\frac{8x-1}{1-4x}$.

Видавництво «Ранок»

Перетворення раціонального дробу на суму або різницю раціональних дробів із тим самим знаменником

ПРИКЛАД 3

Подайте вираз $\frac{8x^2+6x}{2x^2}$ у вигляді суми цілого числа та дробу.

Розв'язання

$\frac{8x^2+6x}{2x^2}=\frac{8x^2}{2x^2}+\frac{6x}{2x^2}$ ..... Застосовуємо правило додавання у зворотному напрямку: $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$.

$\frac{8x^2}{2x^2}+\frac{6x}{2x^2}=\frac{4\cdot 2x^2}{2x^2}+\frac{3\cdot 2x}{2x\cdot x}=4+\frac{3}{x}$ ..... Скорочуємо кожний дріб.

Відповідь: $4+\frac{3}{x}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Подайте вираз у вигляді суми або різниці цілого числа та дробу:

1) $\frac{x+4}{x}$; 3) $\frac{13x-1}{x}$; 5) $\frac{8x+20}{4x}$; 7) $\frac{6x^2-15x}{3x^2}$;

2) $\frac{x+9}{x}$; 4) $\frac{17x-1}{x}$; 6) $\frac{9x+30}{3x}$; 8) $\frac{10x^2-6x}{2x^2}$.

ПРИКЛАД 4

Побудуйте графік функції $y=\frac{x^2+3x}{x}$.

Розв'язання

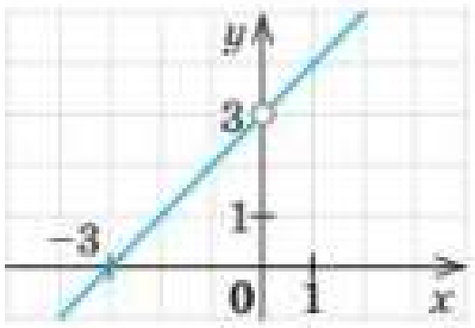
$\frac{x^2+3x}{x}$; ОДЗ: $x\neq 0$ ..... Знаходимо ОДЗ дробу, яким задано функцію.

1) $\frac{x^2+3x}{x}=\frac{x(x+3)}{x}=x+3$ ..... Спрощуємо вираз (одним зі способів).

2) $\frac{x^2+3x}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{3x}{x}=x+3$

$y=x+3$, $x\neq 0$ ..... Будуємо графік функції. Вилучаємо на графіку точку, абсциса якої дорівнює нулю, оскільки $x=0$ не входить в ОДЗ.

x	0	−3
y	3	0



ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Правила додавання і віднімання дробів можна застосовувати у зворотному напрямку:

$$\frac{A+B}{C}=\frac{A}{C}+\frac{B}{C},$$

$$\frac{A-B}{C}=\frac{A}{C}-\frac{B}{C},$$

де A, B, C — многочлени, причому $C\neq 0$.

Наприклад:

1) $\frac{x+2}{y}=\frac{x}{y}+\frac{2}{y}$;

2) $\frac{5x-3y}{2y}=\frac{5x}{2y}-\frac{3y}{2y}$

Перетворення раціонального дробу в суму або різницю раціональних дробів із тим самим знаменником називають почленним діленням чисельника дробу на його знаменник.

СЛІД ЗНАТИ!

Область визначення функції

Якщо функція задана за допомогою раціонального виразу, то область визначення функції — це область допустимих значень змінної виразу, тобто всі значення змінної, **за яких цей вираз має зміст.**

На нуль ділити не можна!

Видавництво «Ранок»

СЛІД ЗНАТИ!

- Графік функції $y=b$ проходить через точку з координатами $(0;b)$ паралельно осі Ox.
- Графік функції $y=kx$ проходить через початок координат $(0;0)$.
- Графік функції $y=kx+b$ проходить через точку з координатами $(0;b)$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $\dfrac{2x}{y}+\dfrac{5x}{y}=\dfrac{7x}{2y}$;

2) $\dfrac{8-a}{3b}-\dfrac{5+a}{3b}=$
$=\dfrac{8-a-5+a}{3b}=\dfrac{3}{3b}=\dfrac{1}{b}$;

3) $\dfrac{c^2+9}{c-3}+\dfrac{6c}{3-c}=$
$=\dfrac{c^2+9+6c}{c-3}=\dfrac{(c+3)^2}{c-3}$

ПРИГАДАЙТЕ!

Допустимими значеннями змінних, що входять до дробового виразу, є всі значення змінних, за яких знаменник виразу відмінний від нуля.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{5x}{x}$;

2) $y=\dfrac{6x}{x}$;

3) $y=\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{3}{x-3}$;

4) $y=\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{2}{x-2}$;

5) $y=\dfrac{2x^2}{x+1}+\dfrac{2x}{x+1}$;

6) $y=\dfrac{3x^2}{x+2}+\dfrac{6x}{x+2}$;

7) $y=\dfrac{2x^2-3x}{x}-\dfrac{3x^2-5x}{x}$;

8) $y=\dfrac{5x^2-2x}{x}-\dfrac{6x^2-3x}{x}$.

ПРАКТИКУМ

3.1 Виконайте додавання або віднімання дробів та скоротіть отриманий вираз:

1) $\dfrac{a^2}{2b}+\dfrac{3a^2}{2b}$; 2) $\dfrac{2c}{3ab}-\dfrac{11c}{3ab}$; 3) $\dfrac{5ab}{a^2b}-\dfrac{ab}{a^2b}$; 4) $\dfrac{4a^2b}{3a^2b^2}+\dfrac{8a^2b}{3a^2b^2}$.

3.2 Виконайте дії з дробами:

1) $\dfrac{3b-a}{8a}+\dfrac{b+a}{8a}$; 3) $\dfrac{7d-6c}{c^2}+\dfrac{2c-7d}{c^2}$; 5) $\dfrac{4a+7c}{10a}+\dfrac{4a-5c}{10a}$;

2) $\dfrac{a+2b}{12a}-\dfrac{a-2b}{12a}$; 4) $\dfrac{5c-4d}{d^3}-\dfrac{5c-3d}{d^3}$; 6) $\dfrac{9b-d}{15d}-\dfrac{4b-11d}{15d}$.

3.3 Виконайте додавання або віднімання дробів та скоротіть отриманий вираз:

1) $\dfrac{2x}{x+5}+\dfrac{15+x}{x+5}$; 3) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{8-3x}{x-2}$; 5) $\dfrac{4x+11}{2x+12}-\dfrac{x-7}{2x+12}$;

2) $\dfrac{y}{y-4}+\dfrac{y-8}{y-4}$; 4) $\dfrac{3y+8}{y+3}-\dfrac{2+y}{y+3}$; 6) $\dfrac{5y+12}{10-5y}-\dfrac{4+9y}{10-5y}$.

3.4 Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{3}{2a}-\dfrac{7}{2a}$; 3) $\dfrac{2a}{a+5}+\dfrac{7-a}{a+5}-\dfrac{a+6}{a+5}$;

2) $\dfrac{1}{3a}+\dfrac{2}{3a}-\dfrac{8}{3a}$; 4) $\dfrac{3a}{a-4}-\dfrac{4+a}{a-4}+\dfrac{5-2a}{a-4}$.

3.5 Укажіть область допустимих значень змінної виразу та спростіть вираз:

1) $\dfrac{x}{x+7}+\dfrac{7}{x+7}$; 3) $\dfrac{2x+5}{2x+9}+\dfrac{4}{2x+9}$; 5) $\dfrac{5-2x}{2x-7}+\dfrac{2}{2x-7}$;

2) $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{3}{x-3}$; 4) $\dfrac{4+x}{4-5x}-\dfrac{6x}{4-5x}$; 6) $\dfrac{7x}{9-4x}-\dfrac{3x+9}{9-4x}$.

Видавництво «Ранок»

3.6 Виконайте дії:

1) $\frac{8}{8-a}+\frac{a}{a-8}$;
2) $\frac{m}{9-m}+\frac{9}{m-9}$;
3) $\frac{3b}{b-2c}+\frac{6c}{2c-b}$;
4) $\frac{15y}{x-3y}+\frac{5x}{3y-x}$;
5) $\frac{10a}{a^2-9b^2}-\frac{30b}{9b^2-a^2}$;
6) $\frac{12k}{16k^2-c^2}-\frac{3c}{c^2-16k^2}$.

3.7 Знайдіть суму або різницю дробів:

1) $\frac{1}{(a-2)^2}+\frac{7}{(2-a)^2}$;
2) $\frac{4}{(4-x)^2}-\frac{x}{(x-4)^2}$;
3) $\frac{c^2}{(c-3)^2}-\frac{6c-9}{(3-c)^2}$;
4) $\frac{x^3-3x^2}{(1-x)^2}+\frac{3x-1}{(x-1)^2}$.

3.8 Подайте суму або різницю у вигляді дробу та скоротіть його:

1) $\frac{(a-b)^2}{4ab}-\frac{a^2+b^2}{4ab}$;
2) $\frac{(a+b)^2}{5ab}-\frac{a^2+b^2}{5ab}$;
3) $\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}+\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$;
4) $\frac{(a+b)^2}{ab}-\frac{(a-b)^2}{ab}$.

3.9 Виконайте дії, спростіть результат та обчисліть значення одержаного виразу:

1) $\frac{x}{(x-14)^2}-\frac{14}{(x-14)^2}$, якщо $x=14{,}2$;
2) $\frac{x}{(x-18)^2}-\frac{18}{(x-18)^2}$, якщо $x=18{,}1$;
3) $\frac{4x}{(2x+7)^2}+\frac{14}{(2x+7)^2}$, якщо $x=-3{,}6$;
4) $\frac{12x}{(3x+8)^2}+\frac{32}{(3x+8)^2}$, якщо $x=-3{,}2$.

3.10 Доведіть тотожність:

1) $\frac{x(x+9)}{x-8}-\frac{x^2+8x+8}{x-8}=1$, якщо $x\neq 8$;
2) $\frac{x(x+8)}{x+7}-\frac{x^2+9x+7}{x+7}=-1$, якщо $x\neq -7$;
3) $\frac{3x^2+x}{x^2+1}-\frac{x(2x+1)}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$;
4) $\frac{x^2+5x}{x^2+4}-\frac{x(x+3)}{x^2+4}=\frac{2x}{x^2+4}$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

1. Серед поданих дробів знайдіть тотожно рівні:
   1) $\frac{5}{3-y}$; 3) $\frac{-5}{y-3}$;
   2) $\frac{-5}{3-y}$; 4) $-\frac{5}{y-3}$.
2. Запишіть дроби, тотожно рівні поданим дробам:
   1) $\frac{x}{1-x}$; 2) $\frac{y}{y-2}$.

Обміняйтеся записами й перевірте результати одне одного.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть два дроби з однаковими знаменниками, для яких виконуються обидві рівності:

$$\frac{?}{x-5}+\frac{?}{x-5}=\frac{11}{x-5};$$

$$\frac{?}{x-5}-\frac{?}{x-5}=\frac{7}{x-5}$$

ПРИГАДАЙТЕ!

Способи доведення тотожностей:

$A = B$

Ліва частина тотожності — Права частина тотожності

$A \to B$ або $B \to A$

$A \to C \leftarrow B$

$A - B = 0$

Видавництво «Ранок»

3.11 Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого числа і дробу:

1) $\frac{24a+5}{4a}$; 3) $\frac{14(a-b)-9}{a-b}$; 5) $\frac{3a+3b+2}{a+b}$;

2) $\frac{21a-8}{3a}$; 4) $\frac{12(a-b)+1}{a-b}$; 6) $\frac{2a+2b-3}{a+b}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

3.12 Подайте дріб 1–3 у вигляді суми або різниці цілого і дробового виразів.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $\frac{a^2-4a+7}{a-2}$. $\frac{a^2-4a+7}{a-2}=\frac{a^2-4a+4+3}{a-2}=$ $=\frac{(a-2)^2+3}{a-2}=\frac{(a-2)^2}{a-2}+\frac{3}{a-2}=a-2+\frac{3}{a-2}$. *Відповідь:* $a-2+\frac{3}{a-2}$.	2) $\frac{a^2+6a+10}{a+3}$; 3) $\frac{b^2-2a-5}{a-1}$.

Стратегія доведення

1) Виконуємо дії з дробами.

2) Скорочуємо одержаний дріб, якщо можливо.

3) Робимо висновок:
- значення виразу буде цілим числом, якщо у відповіді отримали число або вираз, що є цілим числом за будь-яких допустимих значень змінної;
- значення виразу не залежить від значень змінних, що входять у вираз, якщо у відповіді отримали число.

3.13 Доведіть, що за будь-якого натурального значення n значення виразу є цілим числом:

1) $\frac{5n}{n+1}+\frac{n+6}{n+1}$; 3) $\frac{2n+1}{n}+\frac{n^2+5}{n}-\frac{6+n}{n}$;

2) $\frac{n+8}{n+2}+\frac{3n}{n+2}$; 4) $\frac{9+4n}{n}-\frac{n+7}{n}+\frac{n^2-2}{n}$.

3.14 Доведіть, що за будь-яких допустимих значень змінних значення виразу не залежить від значень змінних, що входять у нього:

1) $\frac{3x+2y}{10x-y}-\frac{3y-7x}{10x-y}$; 3) $\frac{20x-11y}{3x-2y}+\frac{y-5x}{3x-2y}$;

2) $\frac{6x+2y}{x-6y}-\frac{8y+5x}{x-6y}$; 4) $\frac{3x-13y}{2x-5y}+\frac{5x-7y}{2x-5y}$.

3.15 Відомо, що $\frac{a}{a+3}=2$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{5a+1}{a+3}-\frac{4a+1}{a+3}$; 3) $\frac{3a+5}{a+3}+\frac{a-5}{a+3}$;

2) $\frac{7a+2}{a+3}-\frac{6a+2}{a+3}$; 4) $\frac{a-9}{a+3}+\frac{5a+9}{a+3}$.

Видавництво «Ранок»

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Виконайте додавання дробів: $\frac{8}{m}+\frac{2}{m}$.

А	Б	В	Г
$\frac{10}{m}$	$\frac{10}{m^2}$	$\frac{10}{2m}$	$10m$

2 Виконайте віднімання дробів: $\frac{14}{3x}-\frac{2}{3x}$.

А	Б	В	Г
$\frac{16}{3x}$	4	12	$\frac{4}{x}$

3 Подайте дріб $\frac{5n+1}{n}$ у вигляді суми цілого числа і дробу.

А	Б	В	Г
$\frac{5}{n}+\frac{1}{n}$	$5+\frac{1}{n}$	6	5

4 Подайте у вигляді дробу: $\frac{5}{x-1}+\frac{1}{1-x}$.

А	Б	В	Г
$\frac{4}{1-x}$	$\frac{6}{1-x}$	$\frac{4}{x-1}$	$\frac{6}{x-1}$

5 Два автомобілі з дистанційним керуванням рухаються по прямій назустріч один одному зі швидкостями $\frac{3s}{t}$ км/год і $\frac{2s}{t}$ км/год. Із якою швидкістю (у км/год) ці автомобілі зближуються?

А	Б	В	Г
$\frac{5s}{2t}$	$\frac{s}{t}$	$\frac{6s}{t}$	$\frac{5s}{t}$

6 До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Г), якщо $b\neq 5$.

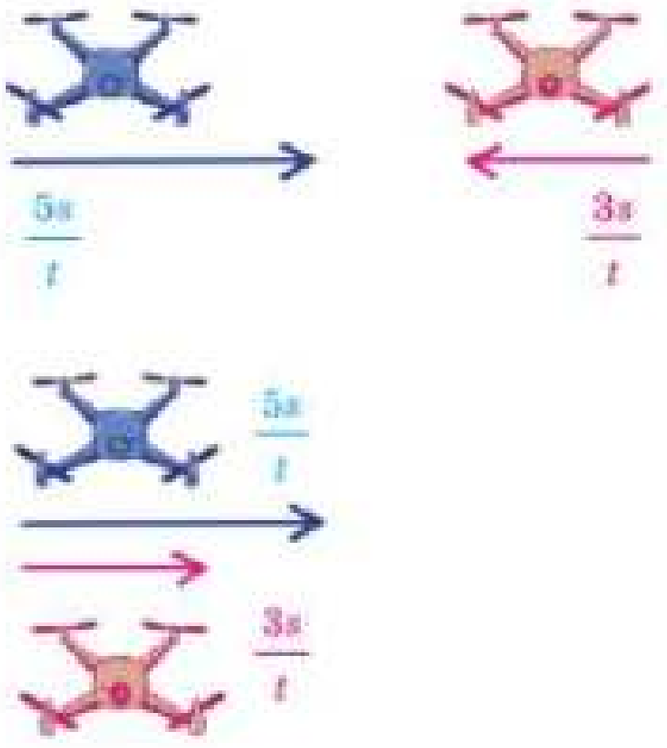
1	$\frac{b^2}{b-5}-\frac{25}{b-5}$	А	5
2	$\frac{b^2+25}{b-5}-\frac{10b}{b-5}$	Б	$b+5$
3	$\frac{b^2}{b-5}-\frac{5b}{b-5}$	В	$b-5$
		Г	b

7 Побудуйте графік функції $y=\frac{x}{x+2}+\frac{2}{x+2}$.

8 Доведіть тотожність $\frac{x(x+5)}{x+4}-\frac{x^2+6x+4}{x+4}=-1$, якщо $x\neq -4$.

MATH FOR LIFE

3.16 **Фізика.** Швидкості руху (у км/год) першого та другого дронів обчислюють за формулами $\frac{5s}{t}$ і $\frac{3s}{t}$ відповідно.



1) Який безпілотник рухається швидше?
2) Безпілотники вилетіли назустріч один одному. За якою формулою можна обчислити швидкість (у км/год), із якою вони зближуються?
3) Безпілотники вилетіли в одному напрямку. За якою формулою можна обчислити швидкість (у км/год), із якою змінюється відстань між ними?

Видавництво «Ранок»

3.17 **Автоматика.** Продуктивності роботи першого і другого 3D-принтерів, що друкують чохли для мобільних телефонів (кількість чохлів за годину), обчислюють за формулами $\frac{4a}{b+2}$ і $\frac{6a}{b+2}$ відповідно.

1) Який 3D-принтер друкує чохли повільніше?

2) За якою формулою можна обчислити продуктивність роботи (кількість чохлів за годину), із якою працюють ці два 3D-принтери разом?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Завдання 3.18 → Приклад 1
Завдання 3.19 → Приклад 2
Завдання 3.20 → Приклад 3
Завдання 3.21 → Приклад 4
Завдання 3.22 → Практикум, 3.1
Завдання 3.23 → Практикум, 3.4
Завдання 3.24 → Практикум, 3.7
Завдання 3.25 → Практикум, 3.9
Завдання 3.26 → Практикум, 3.10
Завдання 3.27 → Інтелектуальний фітнес, 3.13
Завдання 3.28 → Інтелектуальний фітнес, 3.14
Завдання 3.29 → Math for life, 3.16
Завдання 3.30 → Math for life, 3.17

3.18 Виконайте дії:

1) $\frac{15}{a}-\frac{12}{a}$; 2) $\frac{a-5}{a-3}+\frac{2}{a-3}$; 3) $\frac{a^2}{a+2}-\frac{4}{a+2}$; 4) $\frac{25a^2}{5a-1}-\frac{1}{5a-1}$.

3.19 Подайте суму або різницю дробів у вигляді дробу:

1) $\frac{7}{x-8}+\frac{3}{8-x}$;

2) $\frac{x}{x-12}+\frac{12}{12-x}$;

3) $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9-6x}{3-x}$;

4) $\frac{36x^2}{6x-1}+\frac{12x-1}{1-6x}$.

3.20 Подайте вираз у вигляді суми або різниці цілого числа та дробу:

1) $\frac{x+8}{x}$; 2) $\frac{19x-1}{x}$; 3) $\frac{4x+12}{2x}$; 4) $\frac{12x^2-28x}{4x^2}$.

3.21 Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{4x}{x}$;

2) $y=\frac{x}{x-5}-\frac{5}{x-5}$;

3) $y=\frac{4x^2}{x+1}+\frac{4x}{x+1}$;

4) $y=\frac{3x^2-2x}{x}-\frac{4x^2-5x}{x}$.

3.22 Виконайте додавання або віднімання дробів та скоротіть отриманий вираз:

1) $\frac{5b}{6c^3}+\frac{b}{6c^3}$;

2) $\frac{a^3}{4bc}-\frac{5a^3}{4bc}$;

3) $\frac{3ab}{ab^2}-\frac{ab}{ab^2}$;

4) $\frac{3ab^2}{2a^2b^2}+\frac{7ab^2}{2a^2b^2}$.

3.23 Виконайте дії з дробами:

1) $\frac{5}{4a}+\frac{1}{4a}-\frac{9}{4a}$;

2) $\frac{5a}{a-3}-\frac{7+a}{a-3}+\frac{8-4a}{a-3}$.

Видавництво «Ранок»

3.24 Знайдіть суму або різницю дробів:

1) $\frac{3}{(b-1)^2}+\frac{6}{(1-b)^2}$;
2) $\frac{y}{(y-5)^2}-\frac{5}{(5-y)^2}$;
3) $\frac{m^2}{(m-2)^2}-\frac{4m-4}{(2-m)^2}$;
4) $\frac{y^3-6y^2}{(y-2)^2}-\frac{8-12y}{(2-y)^2}$.

3.25 Виконайте дії, спростіть результат та обчисліть значення одержаного виразу:

1) $\frac{x}{(x-15)^2}-\frac{15}{(x-15)^2}$, якщо $x=15{,}4$;
2) $\frac{6x}{(2x+9)^2}+\frac{27}{(2x+9)^2}$, якщо $x=-4{,}6$.

3.26 Доведіть тотожність з урахуванням ОДЗ змінних:

1) $\frac{x(x+7)}{x-6}-\frac{x^2+6x+6}{x-6}=1$;
2) $\frac{4x^2+x}{x^2+2}-\frac{x(3x+1)}{x^2+2}-\frac{x^2}{x^2+2}=0$.

3.27 Доведіть, що за будь-якого натурального значення n значення виразу є цілим числом.

1) $\frac{n}{n+3}+\frac{n+6}{n+3}$;
2) $\frac{8+5n}{n}-\frac{n+2}{n}+\frac{n^2-6}{n}$.

3.28 Доведіть, що за будь-яких допустимих значень змінних значення виразу не залежить від значень змінних, що входять у нього:

1) $\frac{5x+3y}{7x-y}-\frac{4y-2x}{7x-y}$;
2) $\frac{8x-15y}{2x-9y}+\frac{2x-30y}{2x-9y}$.

3.29 Швидкості руху (у км/год) першого і другого морських дронів обчислюють за формулами $\frac{3s}{t}$ і $\frac{8s}{t}$ відповідно.

1) Який морський дрон рухається повільніше?
2) Морські дрони вийшли назустріч один одному. За якою формулою можна обчислити швидкість (у км/год), із якою вони зближуються?
3) Морські дрони вийшли в одному напрямку. За якою формулою можна обчислити швидкість (у км/год), із якою змінюється відстань між ними?

3.30 Продуктивності роботи першого і другого роботів-мийників вікон обчислюють за формулами $\frac{9a}{b+1}$ і $\frac{7a}{b+1}$ відповідно.

1) Який робот миє вікна швидше?
2) За якою формулою можна обчислити продуктивність, із якою працюють ці два роботи разом?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Засновники стартапу витратили $\frac{5}{n}$ частину виділених інвестором грошей на безпосереднє розроблення продукту; $\frac{2}{n}$ частину інвестованих коштів було направлено на вивчення ринку, $\frac{3}{n}$ — на розроблення реклами, а решту 40 000 грн — на розвиток бізнесу. Знайдіть n, якщо інвестор виділив 200 000 гривень.

BE SMART

Уперше термін «стартап» з'явився в США 1939 року. Тоді в долині Санта-Клара неподалік від Сан-Франциско (штат Каліфорнія, США) зосередилися майже всі підприємства та компанії, що спеціалізувалися на розробках у галузі високих технологій. У ті часи студенти Стенфордського університету Девід Паккард і Вільям Хьюлетт, створюючи свій проєкт, назвали цю справу стартапом (від англ. Start-up — стартувати, запускати). Із часом цей стартап переріс у таку величезну й успішну компанію, як Хьюлетт-Паккард.

Видавництво «Ранок»

§4 ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ ІЗ РІЗНИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

УЧОРА — ви навчилися зводити дроби до нового знаменника, додавати та віднімати раціональні дроби з однаковими знаменниками

СЬОГОДНІ — ви дізнаєтеся, як додавати і віднімати раціональні дроби з різними знаменниками

ЗАВЖДИ — ви зможете раціонально використовувати свій час — планувати подорожі, сумісну роботу, спортивні досягнення

mk.com.ua/107913

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

І ЗНОВ ДРОБИ

$\text{Ціна} = \dfrac{\text{вартість}}{\text{кількість}}$	За B баскетбольних м'ячів заплатили x грн, а за F футбольних м'ячів — y грн. На скільки дорожчим виявився футбольний м'яч?	$\dfrac{F}{y}$ > $\dfrac{B}{x}$ $\dfrac{F}{y}-\dfrac{B}{x}$
$\text{Продуктивність} = \dfrac{\text{обсяг роботи}}{\text{час}}$	Юля прибирає кімнату за t хв, а Олесь — на 10 хв швидше. З якою швидкістю (продуктивністю) вони зможуть прибрати кімнату разом?	$\dfrac{1}{t}$ $\dfrac{1}{t-10}$ $\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t-10}$
$\text{Час} = \dfrac{\text{відстань}}{\text{швидкість}}$	Туристи пропливли 3 км на байдарці проти течії річки зі швидкістю $(v-5)$ км/год і повернулися зі швидкістю $(v+5)$ км/год за течією. Скільки часу тривала подорож?	$\dfrac{3}{v+5}$ $\dfrac{3}{v-5}$ $\dfrac{3}{v-5}+\dfrac{3}{v+5}$

ПРИГАДАЙТЕ!

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{ad\pm bc}{cd},$$

де a, b, c, d — деякі числа, причому $c\neq 0$, $d\neq 0$.

Для розв'язування цих задач необхідно вміти додавати і віднімати раціональні дроби з **різними знаменниками.**

Раціональні дроби з різними знаменниками додають або віднімають за таким самим алгоритмом, що й звичайні дроби. При цьому слід обов'язково враховувати область допустимих значень змінних раціонального дробу.

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Щоб додати (відняти) раціональні дроби з різними знаменниками, необхідно звести їх **до спільного знаменника** та виконати дії за алгоритмом додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

Найважливішим під час додавання і віднімання дробів з різними знаменниками є знаходження спільного знаменника.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- різні знаменники (unlike denominators)
- найменший спільний знаменник (least common denominator)

ДОСЛІДЖУЄМО

Проаналізуйте інформацію, подану в таблиці. Дайте відповіді на запитання 1–3.

1. Як знайти спільний знаменник для дробів, знаменники яких не мають спільних множників?

2. Як знайти спільний знаменник для дробів, знаменники яких мають спільні множники?

3. Чи можна назвати спільний знаменник, знайдений для цих дробів, найменшим спільним знаменником?

	Знаменники не мають спільних множників		Знаменники мають спільні множники	
Дроби	$\frac{1}{5x}$ і $\frac{1}{3y}$	$\frac{1}{2(a-b)}$ і $\frac{1}{7(a+b)}$	$\frac{1}{12m^6n^4}$ і $\frac{1}{4m^8n^2}$	$\frac{1}{5(m+n)^2}$ і $\frac{1}{10(m-n)(m+n)}$
Спільний знаменник дробів	$15xy$	$14(a-b)(a+b)$	$12m^8n^4$	$10(m+n)^2(m-n)$
Висновок	Спільним знаменником є добуток знаменників заданих дробів		Спільним знаменником є добуток: 1) НСК числових коефіцієнтів; 2) усіх множників-виразів, що входять у розклад, із найбільшим показником степеня кожний.	

Алгоритм знаходження спільного знаменника дробів

1. Розкласти на множники кожний знаменник.
2. Знайти найменше спільне кратне числових коефіцієнтів, що містяться в отриманих розкладах.
3. Утворити добуток, що міститиме числовий коефіцієнт (НСК числових коефіцієнтів знаменників вихідних дробів) та всі множники-вирази, що входять у розклади. Множники, що повторюються, слід брати з найбільшим показником степеня.

ПРИГАДАЙТЕ!

Найменше спільне кратне (НСК) чисел — це найменше натуральне число, яке ділиться націло на кожне із заданих натуральних чисел.
Наприклад:

$$НСК(5;7)=35;$$
$$НСК(6;8)=24$$

РОЗМИНКА 1

Знайдіть найменший спільний знаменник дробів:

1) $\frac{1}{a}$ і $\frac{2}{b}$;

2) $\frac{3}{2a}$ і $\frac{4}{5b}$;

3) $\frac{3}{a}$ і $\frac{7}{a+b}$;

4) $\frac{8}{a^2}$ і $\frac{3}{b^2}$;

5) $\frac{6}{a-b}$ і $\frac{9}{a+1}$.

6) $\frac{1}{2(b+1)}+\frac{1}{3(b-1)}$.

Видавництво «Ранок»

СЛІД ЗНАТИ!

$$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{D}=\frac{AD\pm BC}{CD}$$

де A, B, C, D — деякі многочлени, причому $C\neq 0$, $D\neq 0$.

Якщо знаменники раціональних дробів не мають спільних множників, то додавати (віднімати) раціональні дроби можна за «правилом метелика»

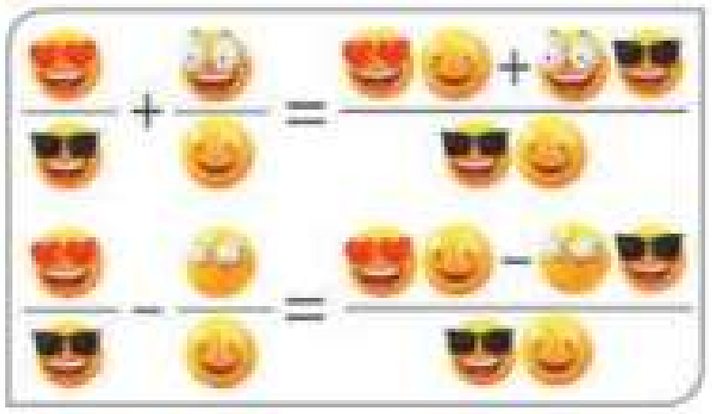
A, B, C, D — деякі многочлени, причому $C\neq 0$, $D\neq 0$

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{D}=\frac{A\cdot D}{C\cdot D}+\frac{B\cdot C}{D\cdot C}=\frac{AD+BC}{CD}$$

Наприклад: $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2y+3x}{xy}$

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{D}=\frac{A\cdot D}{C\cdot D}-\frac{B\cdot C}{D\cdot C}=\frac{AD-BC}{CD}$$

Наприклад: $\frac{1}{x}-\frac{7}{y}=\frac{y-7x}{xy}$



ПРИКЛАД 1

Виконайте дії:

1) $\frac{5y}{4x}-\frac{3}{7y}$, якщо $x\neq 0$, $y\neq 0$; 2) $\frac{4}{x-1}+\frac{1}{x+1}$, якщо $x\neq\pm 1$.

Розв'язання

	1) $\frac{5y}{4x}-\frac{3}{7y}$	2) $\frac{4}{x-1}+\frac{1}{x+1}$
Визначаємо **спільний знаменник** дробів	$4x\cdot 7y$	$(x-1)(x+1)$
Застосовуємо формули: $\frac{A}{C}\pm\frac{B}{D}=\frac{A\cdot D}{C\cdot D}\pm\frac{B\cdot C}{D\cdot C}=\frac{AD\pm BC}{CD}$	$\frac{5y}{4x}-\frac{3}{7y}=\frac{5y\cdot 7y}{4x\cdot 7y}-\frac{3\cdot 4x}{7y\cdot 4x}=\frac{5y\cdot 7y-3\cdot 4x}{4x\cdot 7y}=$	$\frac{4}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}+\frac{1\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{4\cdot(x+1)+1\cdot(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$
Спрощуємо вираз. Записуємо відповідь.	$=\frac{35y^2-12x}{4x\cdot 7y}=\frac{35y^2-12x}{28xy}$	$=\frac{4x+4+x-1}{(x-1)(x+1)}=\frac{5x+3}{(x-1)(x+1)}$

ТРЕНУЄМОСЯ 1

1 Виконайте дії:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$; 3) $\frac{4}{x}-\frac{1}{y}$; 4) $\frac{3}{y}-\frac{1}{x}$; 5) $\frac{1}{6x}+\frac{2}{y}$; 6) $\frac{3}{x}+\frac{1}{5y}$; 7) $\frac{7}{5x}-\frac{x}{2y}$; 8) $\frac{2}{3y}-\frac{y}{8x}$.

2 Виконайте дії та спростіть вираз:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}$; 2) $\frac{1}{3-x}+\frac{1}{x}$; 3) $\frac{1}{x}-\frac{6}{6x+1}$; 4) $\frac{1}{x}-\frac{5}{5x+1}$; 5) $\frac{7}{1-3x}+\frac{7}{1+3x}$; 6) $\frac{9}{1-2x}+\frac{9}{1+2x}$; 7) $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}$; 8) $\frac{x-5}{x+5}-\frac{x+5}{x-5}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

Видавництво «Ранок»

Алгоритм додавання (віднімання) дробів із різними знаменниками

1. Знайти **спільний знаменник** заданих дробів.
2. Знайти доповняльні множники для кожного дробу.
3. Помножити **чисельник і знаменник** кожного дробу на доповняльний множник.
4. Виконати дії за алгоритмом додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.
5. Спростити вираз, якщо це можливо.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Усі дії виконуються на області допустимих значень змінної кожного дробу.

ОДЗ зручно шукати після того, як знаменники розкладені на множники.

РОЗМИНКА 2

1 Розкладіть на множники вирази:

1) $3x+6$; 2) $xy-2y$; 3) $2x^3+8x^2$; 4) $9-y^2$; 5) $x^2+8x+16$.

2 Зведіть раціональні дроби до знаменника $3xy$:

1) $\frac{1}{x}=\frac{1\cdot 3y}{x\cdot 3y}=\frac{3y}{3xy}$; 2) $\frac{1}{y}$; 3) $\frac{2}{xy}$; 4) $\frac{x}{3y}$; 5) $\frac{y}{3x}$; 6) $\frac{x}{3}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Якщо треба звести дріб до нового знаменника, шукають доповняльний множник.

Щоб знайти доповняльний множник, можна знаменник, до якого треба звести дріб, розділити на знаменник початкового дробу.

ПРИКЛАД 2

Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\frac{3}{2x}+\frac{5}{3x^2}$; 2) $\frac{5}{y^2-25}-\frac{3}{2y-10}$.

Розв'язання

	1) $\frac{3}{2x}+\frac{5}{3x^2}$	2) $\frac{5}{y^2-25}-\frac{3}{2y-10}$
Розкладаємо знаменники дробів на множники	$2x=2\cdot x$ $3x^2=3\cdot x\cdot x$	$y^2-25=(y-5)(y+5)$ $2y-10=2(y-5)$
Знаходимо **найменший спільний знаменник**	$6x^2$	$2(y-5)(y+5)$
Знаходимо **доповняльні множники** для кожного дробу	$\frac{6x^2}{2x}=3x$; $\frac{6x^2}{3x^2}=2$	$\frac{2(y-5)(y+5)}{(y-5)(y+5)}=2$; $\frac{2(y-5)(y+5)}{2(y-5)}=(y+5)$
Множимо чисельник і знаменник кожного дробу **на доповняльні множники**	$\frac{3\cdot 3x}{2x\cdot 3x}+\frac{5\cdot 2}{3x^2\cdot 2}$	$\frac{5\cdot 2}{2\cdot(y-5)(y+5)}-\frac{3\cdot(y+5)}{2(y-5)\cdot(y+5)}$
Виконуємо дії. **Спрощуємо** вираз	$\frac{9x+10}{6x^2}$	$\frac{10-3y-15}{2(y-5)(y+5)}=\frac{-5-3y}{2(y-5)(y+5)}$

Відповідь: 1) $\frac{9x+10}{6x^2}$; 2) $\frac{-5-3y}{2(y-5)(y+5)}$.

Видавництво «Ранок»

СЛІД ЗНАТИ!

Спільним знаменником є добуток:
1) НСК числових коефіцієнтів;
2) усіх множників-виразів, що входять у розклад, із найбільшим показником степеня кожний.

ПРИГАДАЙТЕ!

доповняльний множник = $\frac{\text{новий знаменник}}{\text{знаменник початкового дробу}}$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Відповідь можна записати ще двома способами:

$$\frac{36-3b}{9-b}=\frac{3b-36}{b-9};$$

$$\frac{36-3b}{9-b}=\frac{3(12-b)}{9-b}$$

ТРЕНУЄМОСЯ 2

1 Виконайте дії:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}$; 2) $\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}$; 3) $\frac{1}{4x}-\frac{1}{8x}$; 4) $\frac{1}{5x}-\frac{1}{10x}$; 5) $\frac{5}{2x}+\frac{1}{6x^2}$; 6) $\frac{1}{12x^2}+\frac{7}{4x}$; 7) $\frac{2}{15x^3}-\frac{3}{10x^2}$; 8) $\frac{3}{14x^2}-\frac{5}{21x^3}$.

2 Виконайте дії:

1) $\frac{1}{y-5}-\frac{1}{y(y-5)}$; 2) $\frac{1}{y-4}-\frac{1}{y(y-4)}$; 3) $\frac{3}{(y+1)(y-3)}+\frac{1}{y+1}$; 4) $\frac{1}{y+2}+\frac{6}{(y+2)(y-6)}$; 5) $\frac{7}{y-2}-\frac{14}{y^2-4}$; 6) $\frac{8}{y-3}-\frac{24}{y^2-9}$; 7) $\frac{3}{y^2-36}+\frac{2}{5y+30}$; 8) $\frac{2}{y^2-16}+\frac{5}{3y+12}$.

ПРИКЛАД 3

Подайте у вигляді дробу вираз $2+\frac{18-b}{9-b}$, якщо $b\neq 9$.

Розв'язання

$\frac{2}{1}+\frac{18-b}{9-b}$ ..... Подаємо число 2 у вигляді дробу.

$\frac{2\cdot(9-b)}{1\cdot(9-b)}+\frac{18-b}{9-b}$ ..... Зводимо перший дріб до спільного знаменника $9-b$.

$\frac{2\cdot(9-b)+18-b}{9-b}$ ..... Виконуємо додавання.

$\frac{18-2b+18-b}{9-b}=\frac{36-3b}{9-b}$ .... Спрощуємо вираз.

Відповідь: $\frac{36-3b}{b-9}$, якщо $b\neq 9$.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $1+\frac{3}{a-3}$; 2) $\frac{2}{a-2}+1$; 3) $4-\frac{20}{a+5}$; 4) $2-\frac{12}{a+6}$; 5) $3+\frac{22-3a}{a-7}$; 6) $5+\frac{21-5a}{a-4}$; 7) $\frac{3a^2-a}{3a-2}-a$; 8) $\frac{5a^2-2a}{5a-3}-a$.

Видавництво «Ранок»

ПРАКТИКУМ

4.1 Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{3}{x+y}+\frac{3}{x-y}$;
2) $\frac{5}{y-4}-\frac{5}{y+4}$;
3) $\frac{2x}{1+6x}+\frac{2x}{6x-1}$;
4) $\frac{3y}{2y-1}-\frac{3y}{2y+1}$.

4.2 Виконайте дії з урахуванням ОДЗ дробів:

1) $\frac{5a}{2}+\frac{a}{4}$;
2) $\frac{x}{3}-\frac{x}{6}$;
3) $\frac{3}{b}-\frac{1}{2b}$;
4) $\frac{2}{y}+\frac{6}{5y}$;
5) $\frac{3}{x}+\frac{y}{x^2}$;
6) $\frac{4}{a^3}-\frac{m}{a}$;
7) $\frac{a}{3x^4}-\frac{b}{6x^2}$;
8) $\frac{3x}{10a^2}+\frac{y}{5a^6}$.

4.3 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{3}{m^3}+\frac{1}{m^2}$;
2) $\frac{1}{m^3}+\frac{4}{m^4}$;
3) $\frac{3m+6}{m^5}-\frac{3}{m^4}$;
4) $\frac{5m+7}{m^4}-\frac{5}{m^3}$;
5) $\frac{m^2+4}{4m^2}+\frac{m^2-7}{7m^2}$;
6) $\frac{m^3-3}{3m^3}+\frac{m^3+8}{8m^3}$.

4.4 Укажіть область допустимих значень виразу; спростіть вираз:

1) $\frac{3}{x}+\frac{3}{x(x-1)}$;
2) $\frac{2}{x}-\frac{4}{x(x+2)}$;
3) $\frac{3}{(a+4)(a-3)}+\frac{1}{a+4}$;
4) $\frac{1}{a+6}-\frac{a}{(a-1)(a+6)}$;
5) $\frac{y+5}{y-5}-\frac{20y}{(y-5)(y+5)}$;
6) $\frac{y-6}{y+6}+\frac{24y}{(y-6)(y+6)}$.

4.5 Виконайте дії з раціональними дробами:

1) $\frac{6a}{(a-6)(a+6)}-\frac{6}{a+6}$;
2) $\frac{7}{a-7}-\frac{7a}{(a-7)(a+7)}$;
3) $\frac{3}{2a+5}+\frac{6a}{25-4a^2}$;
4) $\frac{15a}{16-9a^2}+\frac{5}{3a+4}$.

4.6 Виконайте дії з раціональними дробами:

1) $\frac{a}{(a-9)^2}-\frac{1}{a-9}$;
2) $\frac{1}{a+8}-\frac{a}{(a+8)^2}$;
3) $\frac{3}{5-a}+\frac{3a}{25-10a+a^2}$;
4) $\frac{5a}{16-8a+a^2}+\frac{5}{4-a}$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

- Запишіть по три пари дробів, знаменники яких мають спільні множники, та по три пари дробів, знаменники яких не мають спільних множників.
- Обміняйтеся записами.
- Запишіть спільні знаменники відповідних пар дробів.
- Перевірте результати одне одного.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}=\frac{3}{a^3};$$

$$\frac{2}{3x^6}+\frac{3}{2x^4}=\frac{4x^4+9x^6}{6x^{10}};$$

$$\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2b-1}=\frac{b-1+b+1}{2(b+1)(b-1)}=$$
$$=\frac{2b}{2(b+1)(b-1)}=\frac{b}{(b+1)(b-1)}$$

ПРИГАДАЙТЕ!

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Видавництво «Ранок»

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Сучасне правило віднімання дробів застосовували ще в X ст. Однак у Європі воно набуло поширення лише в XVI–XVII ст.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Знайдіть невідомі слова:

$$\frac{\text{и}\cdot\text{д}\cdot\text{о}}{\text{р}\cdot\text{а}\cdot\text{г}}+\frac{\text{к}\cdot\text{і}\cdot\text{ф}}{\text{н}\cdot\text{и}\cdot\text{ц}\cdot\text{я}}=\frac{?+?}{?}$$

Спробуйте скласти схожий ребус, застосувавши вміння додавати дроби з різними знаменниками.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Чи знаєте ви, як знайти суму дробів

$$\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}$$

без зведення їх до спільного знаменника?

Існує один секрет:

$\frac{1}{9\cdot10}=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$. Перевірте!

Відстежте розв'язання й закінчіть обчислення:

$$\frac{1}{9\cdot10}+\frac{1}{10\cdot11}+\frac{1}{11\cdot12}=$$

$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}=?$$

Розв'яжіть самостійно:

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}.$$

Спробуйте скласти схоже завдання.

4.7 Укажіть допустимі значення змінних виразу і спростіть вираз:

1) $\frac{m+3}{m-3}-\frac{m-3}{m+3}-\frac{36}{m^2-9}$; 2) $\frac{2}{5x-y}+\frac{4y}{(5x-y)(5x+y)}+\frac{2}{5x+y}$.

4.8 Спростіть вираз, ураховуючи, що $a-b=-(b-a)$:

1) $\frac{19x}{4x-y}+\frac{12x}{y-4x}$;

2) $\frac{23y}{x-9y}+\frac{18y}{9y-x}$;

3) $\frac{12}{y(x-y)}+\frac{12}{x(y-x)}$;

4) $\frac{15}{x(y-x)}+\frac{15}{y(x-y)}$;

5) $\frac{x-4}{xy-x^2}-\frac{4-y}{xy-y^2}$;

6) $\frac{x-1}{xy-x^2}-\frac{1-y}{xy-y^2}$.

4.9 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a+\frac{a^2}{6-a}$; 2) $a+\frac{a^2}{4-a}$; 3) $\frac{8ab+9a^2}{a+b}-8a$; 4) $\frac{5ab+6b^2}{a+b}-5b$; 5) $\frac{4a^2b-15b^2}{a^2-5b}-3b$; 6) $\frac{5a^3-24ab}{a^2-6b}-4a$.

4.10 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $x-2+\frac{4x}{x-2}$; 2) $\frac{6x}{x-3}+x-3$; 3) $\frac{25x^2+y^2}{5x+y}+5x-y$; 4) $x-4y+\frac{x^2+16y^2}{x+4y}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

4.11 Доведіть, що за всіх допустимих значень змінної значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $\frac{2b^2-10b}{b^2-10b+25}-\frac{b+5}{b-5}$; 2) $\frac{3b+2}{b^2-1}-\frac{3}{b+1}+\frac{2+3b^2}{1-b^2}$.

4.12 Відомо, що $\frac{a+b}{ab}=18$. Знайдіть значення виразів 1–4.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}$. $\frac{1^{\backslash b}}{3a}+\frac{1^{\backslash a}}{3b}=\frac{b+a}{3ab}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{3}\cdot18=6$ *Відповідь:* 6.	2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$; 4) $\frac{5-a}{a}+\frac{5+b}{b}$. 3) $\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$;

Видавництво «Ранок»

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Знайдіть суму дробів: $\frac{1}{m}+\frac{1}{3m}$.

А	Б	В	Г
$\frac{4}{3m}$	$\frac{1}{4m}$	$\frac{2}{4m}$	$\frac{2}{3m}$

2 Знайдіть різницю дробів: $\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}$.

А	Б	В	Г
$\frac{2-y}{y^2}$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{2y-1}{y^2}$	$\frac{1}{y}$

3 Виконайте додавання: $\frac{4}{a-b}+\frac{4}{b-a}$.

А	Б	В	Г
$\frac{8}{a-b}$	0	1	$\frac{8}{b-a}$

4 Виконайте віднімання: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

А	Б	В	Г
$-\frac{1}{n(n+1)}$	-1	1	$\frac{1}{n(n+1)}$

5 Через перший пропускний пункт проїжджають m вантажівок кожні x год, а через другий — n вантажівок кожні y год. Скільки вантажівок перетинають кордон через ці два пункти щогодини? Складіть вираз.

А	Б	В	Г
$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}$	$\frac{m}{x}+\frac{n}{y}$	$\frac{m+n}{x+y}$	$\frac{x+y}{m+n}$

6 До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Г), якщо $a\neq 0$, $a\neq\pm 3$.

1	$\frac{1}{a}+\frac{3}{a(a-3)}$	А	$\frac{1}{a(a^2-9)}$
2	$\frac{1}{a-3}-\frac{6}{a^2-9}$	Б	$\frac{1}{a^2-9}$
		В	$\frac{1}{a-3}$
3	$\frac{a+3}{12a(a-3)}-\frac{a-3}{12a(a+3)}$	Г	$\frac{1}{a+3}$

7 Подайте у вигляді дробу вираз $8+\frac{50-8b}{b-6}$.

8 Задано вираз $\frac{x-4}{xy-x^2}-\frac{4-y}{xy-y^2}$.

1) Спростіть цей вираз.

2) Знайдіть значення виразу, якщо $x=0{,}02$, $y=5$.

MATH FOR LIFE

4.13 **Тріатлон.** У таблиці наведено відстані s, які один із тріатлоністів подолав на кожному етапі, та середні швидкості v його руху на відповідних етапах. Визначте:

1) загальний час t, витрачений на подолання всіх етапів — на плавання, на велоперегони й на крос;
2) загальний час t, якщо середня швидкість, із якою плив тріатлоніст, становила 2 км/год;
3) чи потрапив тріатлоніст у призери, якщо учасник, який посів третє місце, подолав усі етапи змагання за 2 год.

Етап	s, км	v, км/год
Плавання	0,5	v
Велоперегони	22	$16v$
Крос	6	$v+6$

Видавництво «Ранок»

4.14 **Прогулянка містом.** Олеся, знайомлячись із Києвом, пройшла пішки 10 км зі швидкістю x км/год, а потім проїхала 25 км на велосипеді за маршрутом Поділ — Труханів острів — острів Муромець зі швидкістю, удвічі більшою, ніж на пішохідній частині маршруту.

1) Скільки часу (у год) витратила дівчина на пішохідну частину маршруту? На велосипедну частину маршруту?
2) Скільки часу (у год) витратила Олеся на весь маршрут? Складіть вираз.
3) Обчисліть значення складеного виразу, якщо $x = 5$ км/год.

ПОМІРКУЙТЕ

Дівчина планувала витратити на всю подорож не більше 8 год. Чи було реалізовано її план?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Завдання 4.15, 4.16 → Приклад 1
Завдання 4.17, 4.18 → Приклад 2
Завдання 4.19 → Приклад 3
Завдання 4.20 → Практикум, 4.2
Завдання 4.21 → Практикум, 4.3
Завдання 4.22 → Практикум, 4.4
Завдання 4.23 → Практикум, 4.5, 4.6
Завдання 4.24 → Практикум, 4.7
Завдання 4.25 → Практикум, 4.8
Завдання 4.26 → Практикум, 4.9
Завдання 4.27 → Практикум, 4.10
Завдання 4.28 → Math for life, 4.13
Завдання 4.29 → Актуальна задача
Завдання 4.30 → Інтелектуальний фітнес, 4.12

4.15 Виконайте дії:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{4}$; 2) $\frac{10}{y}-\frac{1}{x}$; 3) $\frac{2}{x}+\frac{1}{9y}$; 4) $\frac{6}{5y}-\frac{y}{3x}$.

4.16 Виконайте дії та спростіть вираз:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{8-x}$; 2) $\frac{1}{x}-\frac{7}{7x+1}$; 3) $\frac{5}{1-4x}+\frac{5}{1+4x}$; 4) $\frac{x+6}{x-6}-\frac{x-6}{x+6}$.

4.17 Виконайте дії:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{4x}$; 2) $\frac{1}{3x}-\frac{1}{9x}$; 3) $\frac{1}{6x^2}+\frac{5}{3x}$; 4) $\frac{5}{14x^3}-\frac{2}{35x^2}$.

4.18 Виконайте дії:

1) $\frac{1}{y-8}-\frac{1}{y(y-8)}$; 2) $\frac{5}{y-4}-\frac{20}{y^2-16}$; 3) $\frac{2}{y^2-25}+\frac{7}{3y+15}$.

4.19 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $1+\frac{6}{a-6}$; 2) $2-\frac{16}{a+8}$; 3) $6+\frac{31-6a}{a-5}$; 4) $\frac{7a^2-3a}{7a-4}-a$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Допустимими значеннями змінних, які входять до дробового виразу, є всі числа, за яких знаменник виразу відмінний від нуля.

4.20 Виконайте дії з урахуванням ОДЗ дробів:

1) $\frac{y}{6}+\frac{5y}{2}$; 2) $\frac{4}{a}-\frac{1}{3a}$; 3) $\frac{6}{n}+\frac{x}{n^2}$; 4) $\frac{m}{4y^6}-\frac{n}{8y^3}$.

4.21 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{2}{m^6}+\frac{1}{m^5}$; 2) $\frac{4m+7}{m^7}-\frac{4}{m^6}$; 3) $\frac{m^4-2}{2m^4}+\frac{m^4+9}{9m^4}$.

4.22 Укажіть ОДЗ виразу, спростіть вираз:

1) $\frac{3}{a}+\frac{6}{a(a-2)}$; 3) $\frac{2}{(b+5)(b-2)}+\frac{1}{b+5}$; 5) $\frac{x+3}{x-3}-\frac{12x}{(x-3)(x+3)}$;

2) $\frac{4}{a}-\frac{12}{a(a+3)}$; 4) $\frac{b}{(b-3)(b+1)}-\frac{1}{b+1}$; 6) $\frac{b-4}{b+4}+\frac{16b}{(b-4)(b+4)}$.

Видавництво «Ранок»

4.23 Виконайте дії з раціональними дробами:

1) $\frac{5a}{(a-5)(a+5)}-\frac{5}{a+5}$;
2) $\frac{12a}{49-16a^2}+\frac{3}{4a+7}$;
3) $\frac{a}{(a-6)^2}-\frac{1}{a-6}$;
4) $\frac{8}{3-a}+\frac{8a}{9-6a+a^2}$.

4.24 Укажіть допустимі значення змінних виразу і спростіть вираз:

1) $\frac{n+4}{n-4}-\frac{n-4}{n+4}+\frac{64}{n^2-16}$;
2) $\frac{3}{a-4b}-\frac{24b}{a^2-16b^2}+\frac{3}{a+4b}$.

4.25 Спростіть вираз:

1) $\frac{25y}{x-5y}+\frac{17y}{5y-x}$;
2) $\frac{11}{x(y-x)}+\frac{11}{y(x-y)}$;
3) $\frac{x-6}{xy-x^2}-\frac{6-y}{xy-y^2}$.

4.26 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a+\frac{a^2}{11-a}$;
2) $\frac{7ab+8b^2}{a+b}-7b$;
3) $\frac{4a^3-24ab}{a^2-8b}-3a$.

4.27 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $x-1+\frac{2x}{x-1}$;
2) $\frac{9x^2+y^2}{3x+y}+3x-y$.

4.28 Під час спеціальної підготовки Олег мав пройти випробування, що складалося із двох етапів. У таблиці наведено інформацію щодо проходження Олегом цих етапів.

Етап	Відстань, км	Швидкість, км/год
I Крос	12	$v+5$
II Плавання	3	v

1) Скільки часу (у год) Олег витратив на проходження I етапу? II етапу?
2) Скільки часу (у год) Олег витратив на проходження двох етапів? Складіть вираз.
3) Обчисліть значення складеного виразу, якщо $v=3$ км/год.

4.29 Туристи вирішили проплисти Сіверським Дінцем на байдарках від бази відпочинку «Під Козачею горою» до села Гайдари. Відстань, яку вони мали подолати в обидва боки, становила 10 км. Перші 5 км туристи пливли проти течії річки зі швидкістю $(v-3)$ км/год, а повертались — за течією зі швидкістю $(v+3)$ км/год.

1) Визначте загальний час, витрачений туристами на всю подорож. Складіть вираз.
2) Знайдіть значення складеного виразу, якщо $v=5$.

Бонусне завдання

4.30 Відомо, що $\frac{b-2a}{ab}=12$. Знайдіть значення виразів:

1) $\frac{1}{a}-\frac{2}{b}$;
2) $\frac{1}{3a}-\frac{2}{3b}$;
3) $\frac{5}{a}-\frac{10}{b}$;
4) $\frac{3+a}{a}-\frac{6+b}{b}$.

BE SMART

Знайдіть цікаву інформацію про дроби і здивуйте друзів своїми знахідками.

Наприклад:

- чому в стародавніх підручниках з математики дроби називали «ламаними числами»;
- для яких дробів у Китаї використовували ієрогліф «бань» (бань, шао бань, тай бань);
- яке значення має приказка «потрапити в дроби», яка збереглася в німецькій мові до наших часів

ПОМІРКУЙТЕ

Ураховуючи отриманий результат, з'ясуйте, хто впорався із проходженням усіх етапів краще — Олег чи Аліса (2 год 25 хв).

Видавництво «Ранок»

§5 МНОЖЕННЯ І ДІЛЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ. ПІДНЕСЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ

УЧОРА — Ви множили і ділили звичайні дроби, виконували дії зі степенями

СЬОГОДНІ — Ви навчитеся множити і ділити раціональні дроби та підносити їх до степеня

ЗАВЖДИ — Ви зможете розв'язувати задачі на відсоткові розрахунки та задачі з величинами, поданими в різних одиницях вимірювання

mk.com.ua/107915

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- множення дробів (multiplying fractions)
- ділення дробів (dividing fractions)
- піднесення до степеня (raising to a power)
- обернений до дробу (reciprocal of fraction)

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ПРИГАДАЙ → ЗНАЙДИ → ЗАСТОСУЙ

Восьмикласники підготували плакат із завданнями для учнів і учениць 6 класу. Чи зможете ви пригадати правила множення, ділення і піднесення до степеня звичайних дробів та позмагатися із шестикласниками?

Пригадайте правила виконання арифметичних дій зі звичайними дробами. До кожного правила (1–6) доберіть приклад (А–Е).

1 Множення двох дробів (a, b, c, d — деякі числа, причому $c \neq 0$, $d \neq 0$) $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$

2 Множення числа на дріб $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$

3 Ділення дробів (a, b, c, d — деякі числа, причому $b \neq 0$, $d \neq 0$, $c \neq 0$) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

4 Ділення числа на дріб $c : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} : \frac{a}{b} = \frac{c}{1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{cb}{a}$

5 Ділення дробу на число $\frac{a}{b} : d = \frac{a}{b} : \frac{d}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a}{bd}$

6 Піднесення дробу до степеня (причому $b \neq 0$) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n}$

А $6 \cdot \frac{3}{8} = \frac{6 \cdot 3}{8} = \frac{9}{4}$

Б $\frac{5}{6} : \frac{25}{18} = \frac{5}{6} \cdot \frac{18}{25} = \frac{5 \cdot 18}{6 \cdot 25} = \frac{3}{5}$

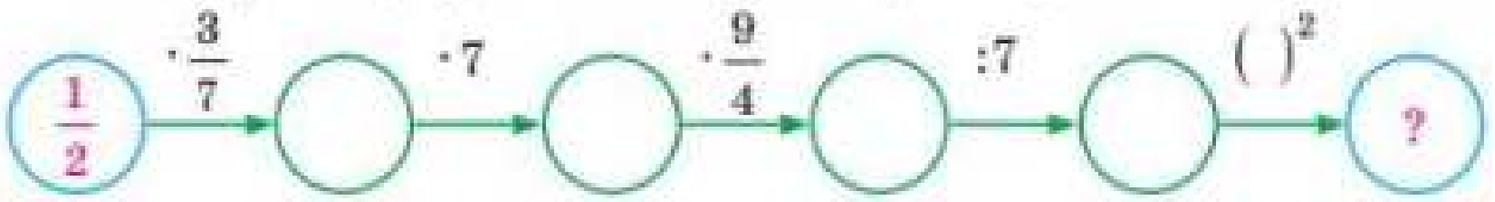
В $24 : \frac{16}{3} = \frac{24}{1} \cdot \frac{3}{16} = \frac{24 \cdot 3}{16} = \frac{9}{2}$

Г $\frac{3}{14} \cdot \frac{28}{21} = \frac{3 \cdot 28}{14 \cdot 21} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{7}}{\cancel{2} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{3} \cdot 7} = \frac{2}{7}$

Д $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$

Е $\frac{33}{2} : 11 = \frac{33}{2} \cdot \frac{1}{11} = \frac{33}{2 \cdot 11} = \frac{3}{2}$

Застосуйте ці правила на практиці — відновіть ланцюжок.



Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Множення раціональних дробів

Щоб **помножити** два раціональні дроби, слід перемножити окремо їхні чисельники та окремо знаменники, записавши перший добуток у чисельнику, а другий — у знаменнику нового дробу.

Правило множення дробів можна поширити на добуток трьох і більше множників.

СЛІД ЗНАТИ!

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},$$

де B і D — многочлени, причому $B\neq 0$, $D\neq 0$.

РОЗМИНКА 1

Виконайте множення дробів:

1) $\frac{2}{5}\cdot\frac{a}{b}$; 2) $\frac{a}{c}\cdot\frac{4b}{7d}$; 3) $\frac{9x}{5t}\cdot\frac{8y}{t}$; 4) $\frac{3a}{b}\cdot\left(-\frac{a}{2b}\right)$; 5) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}$.

ПРИКЛАД 1

Виконайте множення:

1) $\frac{5b^2}{2a^3}\cdot\frac{8a^2}{15b^5}$; 2) $\frac{4m-4n}{m^2-n^2}\cdot\frac{m^2+mn}{8}$.

Розв'язання

	1) $\frac{5b^2}{2a^3}\cdot\frac{8a^2}{15b^5}=$	2) $\frac{4m-4n}{m^2-n^2}\cdot\frac{m^2+mn}{8}=$
Застосовуємо правило множення	$=\frac{5b^2\cdot 8a^2}{2a^3\cdot 15b^5}=$	$=\frac{(4m-4n)(m^2+mn)}{(m^2-n^2)\cdot 8}=$
Розкладаємо чисельник і знаменник **на множники**	$=\frac{5b^2\cdot 4\cdot 2a^2}{2a^2\cdot a\cdot 3\cdot 5b^2\cdot b^3}=$	$=\frac{4(m-n)m(m+n)}{(m-n)(m+n)\cdot 4\cdot 2}=$
Скорочуємо дріб. **Записуємо** відповідь	$=\frac{\cancel{5b^2}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{2a^2}}{\cancel{2a^2}\cdot a\cdot 3\cdot\cancel{5b^2}\cdot b^3}=\frac{4}{3ab^3}$	$=\frac{\cancel{4}\,\cancel{(m-n)}\,m\,\cancel{(m+n)}}{\cancel{(m-n)}\,\cancel{(m+n)}\cdot\cancel{4}\cdot 2}=\frac{m}{2}$

Відповідь: 1) $\frac{4}{3ab^3}$; 2) $\frac{m}{2}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

1 Виконайте множення:

1) $\frac{6}{a}\cdot\frac{a}{3}$; 2) $\frac{4}{a}\cdot\frac{a}{8}$; 3) $\frac{a^2}{4}\cdot\frac{4}{a}$; 4) $\frac{5}{a}\cdot\frac{a^3}{5}$; 5) $\frac{12a^3}{b^4}\cdot\frac{b}{4a^3}$; 6) $\frac{5b^2}{a^2}\cdot\frac{a^5}{15b^2}$; 7) $\frac{49a^3}{30b^4}\cdot\frac{15b^9}{7a^6}$; 8) $\frac{24a^{10}}{25b^8}\cdot\frac{5b^6}{8a^7}$.

СЛІД ЗНАТИ!

Після запису у вигляді добутків чисельника і знаменника нового дробу слід виконати скорочення дробу (якщо це можливо).

Видавництво «Ранок»

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$$\frac{a-2}{a+2}\cdot\frac{4a}{a^2-4a+4}=\frac{1}{a^2+4};$$

$$\frac{b^2-16}{b-3}\cdot\frac{3-b}{b+4}=$$

$$=\frac{(b-4)(b+4)(b-3)}{(b-3)(b+4)}=b-4$$

Виконайте множення правильно

2 Виконайте множення:

1) $\frac{m-6}{6}\cdot\frac{12}{m-6}$;

2) $\frac{21}{5+m}\cdot\frac{5+m}{42}$;

3) $\frac{30}{m(n+4)}\cdot\frac{n+4}{10}$;

4) $\frac{m-9}{10}\cdot\frac{40}{n(m-9)}$;

5) $\frac{35}{(8-m)(8+m)}\cdot\frac{mn+8n}{7}$;

6) $\frac{mn-9m}{6}\cdot\frac{42}{(n-9)(n+9)}$;

7) $\frac{6n-12}{n^2-4}\cdot\frac{mn+2m}{48}$;

8) $\frac{n^2-25}{7n+35}\cdot\frac{28}{mn-5m}$.

ДОСЛІДЖУЄМО

Проаналізуйте множення цілого виразу (числа, одночлена і многочлена) на раціональний дріб.

Перевірте, чи є справедливою формула $A\cdot\frac{B}{C}=\frac{A}{1}\cdot\frac{B}{C}=\frac{A\cdot B}{C}$, якщо $C\neq 0$.

Запишіть формулу, за якою можна помножити раціональний дріб на цілий вираз.

7	$7\cdot\frac{5x}{63y}=\frac{7}{1}\cdot\frac{5x}{63y}=\frac{7\cdot 5x}{7\cdot 9y}=\frac{5x}{9y}$
$2a^2$	$2a^2\cdot\frac{9b}{8a}=\frac{2a^2}{1}\cdot\frac{9b}{8a}=\frac{2a^2\cdot 9b}{4\cdot 2a}=\frac{9ab}{4}$
$(c-5)$	$(c-5)\cdot\frac{3c}{2c-10}=\frac{c-5}{1}\cdot\frac{3c}{2c-10}=\frac{(c-5)\cdot 3c}{2(c-5)}=\frac{3c}{2}$

СЛІД ЗНАТИ!

$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$, де $B\neq 0$.

Якщо $n=1$, маємо:

$\left(\frac{A}{B}\right)^1=\frac{A}{B}$

Піднесення раціонального дробу до степеня

Щоб **піднести дріб до степеня**, слід піднести до цього степеня окремо чисельник та окремо знаменник і записати перший результат у чисельнику, а другий — у знаменнику нового дробу.

ПРИКЛАД 2

Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\left(-\frac{2x^2}{3a^3b}\right)^4$;

2) $\left(-\frac{3xy^3}{4a^2}\right)^3$.

Розв'язання:

	1) $\left(-\frac{2x^2}{3a^3b}\right)^4$	2) $\left(-\frac{3xy^3}{4a^2}\right)^3$
Визначаємо знак результату, ураховуючи, **парний** чи **непарний** показник степеня	$=\left(\frac{2x^2}{3a^3b}\right)^4$	$=-\left(\frac{3xy^3}{4a^2}\right)^3$
Підносимо до степеня окремо чисельник та окремо знаменник дробу	$\frac{(2x^2)^4}{(3a^3b)^4}=\frac{2^4(x^2)^4}{3^4(a^3)^4b^4}$	$\frac{(3xy^3)^3}{(4a^2)^3}=\frac{3^3x^3(y^3)^3}{4^3(a^2)^3}$
Записуємо відповідь з урахуванням **знака виразу**	$\frac{16x^8}{81a^{12}b^4}$	$-\frac{27x^3y^9}{64a^6}$

Видавництво «Ранок»

ТРЕНУЄМОСЯ 2

1 Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\left(\frac{11}{y}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{y}{7x}\right)^2$; 5) $\left(\frac{x^3a}{3y}\right)^4$; 7) $\left(-\frac{2y^2}{5xa^3}\right)^4$;

2) $\left(\frac{10}{x}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{x}{8y}\right)^2$; 6) $\left(\frac{ay^2}{2x}\right)^4$; 8) $\left(-\frac{3x^3y}{4a^2}\right)^4$.

2 Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\left(\frac{4}{a}\right)^3$; 3) $\left(-\frac{a}{3b}\right)^3$; 5) $\left(\frac{2x}{ay^3}\right)^3$; 7) $\left(-\frac{5y^5}{2xa^2}\right)^3$;

2) $\left(\frac{5}{b}\right)^3$; 4) $\left(-\frac{b}{2a}\right)^3$; 6) $\left(\frac{3a}{x^4y}\right)^3$; 8) $\left(-\frac{4x^2}{3ya^3}\right)^3$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

$\frac{2x^2}{y^3}$	⬠	$\frac{32x^{10}}{y^{15}}$
$\frac{a^4}{3b^3}$	▭	$\frac{a^{16}}{81b^{12}}$
$\frac{5c^{10}}{7d^5}$	△	?

Ділення раціональних дробів

Щоб **поділити** один раціональний дріб на інший, слід перший дріб помножити на дріб, обернений до другого.

СЛІД ЗНАТИ!

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C},$$

причому $B\neq 0$, $D\neq 0$, $C\neq 0$.

ПРИКЛАД 3

Виконайте ділення дробів:

1) $\frac{4m^3}{a}:\frac{8m}{a^2}$; 2) $\frac{(m-4)^3}{2m^3}:\frac{(4-m)^2}{20m}$.

Розв'язання

	1) $\frac{4m^3}{a}:\frac{8m}{a^2}$,	2) $\frac{(m-4)^3}{2m^3}:\frac{(4-m)^2}{20m}$,
Знаходимо ОДЗ	якщо $a\neq 0$, $m\neq 0$	якщо $m\neq 0$, $m\neq 4$
Множимо перший дріб на дріб, **обернений** до другого	$\frac{4m^3}{a}:\frac{8m}{a^2}=\frac{4m^3}{a}\cdot\frac{a^2}{8m}$	$\frac{(m-4)^3}{2m^3}:\frac{(4-m)^2}{20m}=\frac{(m-4)^3}{2m^3}\cdot\frac{20m}{(4-m)^2}$
Виконуємо множення	$\frac{4m^3}{a}\cdot\frac{a^2}{8m}=\frac{4m^3\cdot a^2}{8m\cdot a}$	$\frac{(m-4)^3}{2m^3}\cdot\frac{20m}{(4-m)^2}=\frac{20m(m-4)^3}{2m^3(m-4)^2}$
Скорочуємо дроби	$\frac{4m^3\cdot a^2}{8m\cdot a}=\frac{\cancel{4m}\cdot m^2\cdot\cancel{a}\cdot a}{2\cdot\cancel{4m}\cdot\cancel{a}}$	$\frac{20m(m-4)^3}{2m^3(m-4)^2}=\frac{10\cdot\cancel{2m}\cdot\cancel{(m-4)^2}(m-4)}{\cancel{2m}\cdot m^2\cdot\cancel{(m-4)^2}}$
Записуємо відповідь з урахуванням ОДЗ	$\frac{am^2}{2}$, якщо $a\neq 0$, $m\neq 0$	$\frac{10(m-4)}{m^2}$, якщо $m\neq 0$, $m\neq 4$

Видавництво «Ранок»

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

- Дріб $\frac{D}{C}$ називають **оберненим** до дробу $\frac{C}{D}$.

  Наприклад:

  дріб $\frac{2}{x}$ — обернений до дробу $\frac{x}{2}$,

  дріб $-\frac{t-3}{m^2}$ — обернений до дробу $-\frac{m^2}{t-3}$,
- Якщо ділимо раціональні дроби, чисельник дробу-дільника також має бути **відмінним від нуля**

ТРЕНУЄМОСЯ 3

1 Виконайте ділення дробів:

1) $\frac{m}{10}:\frac{m}{30}$; 2) $\frac{40}{m}:\frac{20}{m}$; 3) $\frac{11}{m^3}:\frac{11}{m}$; 4) $\frac{m}{9}:\frac{m^2}{9}$; 5) $\frac{m^6}{21a^2}:\frac{m}{7a^2}$; 6) $\frac{18a^2}{m}:\frac{3a^2}{m^5}$; 7) $\frac{42a^3}{m^2}:\frac{7a^6}{m^7}$; 8) $\frac{m^2}{9a^3}:\frac{m^5}{45a^4}$.

2 Виконайте ділення дробів:

1) $\frac{m^2}{m+3}:\frac{m}{3+m}$; 2) $\frac{m^3}{2+m}:\frac{m}{m+2}$; 3) $\frac{1-m}{m^3}:\frac{m-1}{m}$; 4) $\frac{m-4}{m^4}:\frac{4-m}{m}$; 5) $\frac{20m^2}{(m-6)^2}:\frac{4m^3}{(6-m)^2}$; 6) $\frac{19m^4}{(9-m)^2}:\frac{38m^2}{(m-9)^2}$; 7) $\frac{(5-m)^3}{48m^6}:\frac{(m-5)^2}{6m^2}$; 8) $\frac{(m-7)^2}{9m^2}:\frac{(7-m)^3}{54m^8}$.

ДОСЛІДЖУЄМО

Проаналізуйте, як ділиться:

- цілий вираз на дріб,
- дріб на цілий вираз.

Перевірте справедливість формул

$A:\frac{C}{D}=\frac{A}{1}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{C}$	$\frac{A}{B}:C=\frac{A}{B}:\frac{C}{1}=\frac{A}{B}\cdot\frac{1}{C}=\frac{A}{B\cdot C}$
$a^2:\frac{4x}{3y}=\frac{a^2}{1}\cdot\frac{3y}{4x}=\frac{3ya^2}{4x}$	$\frac{(x+1)^2}{5y}:(x+1)=\frac{(x+1)^2}{5y}\cdot\frac{1}{(x+1)}=\frac{(x+1)^2}{5y(x+1)}=\frac{x+1}{5y}$
$1:\frac{C}{D}=\frac{D}{C}$	$\frac{A}{B}:1=\frac{A}{B}$
$1:\frac{x-1}{y+3}=\frac{y+3}{x-1}$	$\frac{11x}{2y}:1=\frac{11x}{2y}$

ПРАКТИКУМ

ПРИГАДАЙТЕ!

$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$,

де B і D — многочлени, причому $B\neq 0$, $D\neq 0$.

СЛІД ЗНАТИ!

$(+)\cdot(-)=(-)$

$(-)\cdot(+)=(-)$

$(-)\cdot(-)=(+)$

5.1 Виконайте множення дробів:

1) $\frac{12}{x}\cdot\frac{xy}{18}$; 2) $\frac{b}{16}\cdot\frac{24}{ab}$; 3) $\frac{4}{x^2}\cdot\frac{x^3}{8}$; 4) $\frac{5y^2}{3}\cdot\frac{9}{10y}$; 5) $\frac{64m^3}{n^2}\cdot\frac{3n}{8m^2}$; 6) $\frac{5x}{14y^2}\cdot\frac{21y^4}{15x^2}$.

5.2 Виконайте множення:

1) $-\frac{x}{y}\cdot\frac{y^2}{x^3}$; 2) $-\frac{a^2}{b}\cdot\left(-\frac{2b^2}{a}\right)$; 3) $-\frac{6a}{b}\cdot\frac{b^2}{12a}$; 4) $\frac{7x^2}{y}\cdot\left(-\frac{y^2}{14x^3}\right)$; 5) $\frac{14ab}{-81}\cdot\frac{9}{7ab^2}$; 6) $\frac{20x^3y^7}{3}\cdot\frac{-27}{80y^8x^3}$.

Видавництво «Ранок»

5.3 Виконайте множення та спростіть вираз:

1) $4\cdot\frac{5x}{8}$; 2) $\frac{3x}{16}\cdot 32$; 3) $-12x\cdot\frac{y}{16x^2}$; 4) $\frac{4a}{9b^2}\cdot\left(-18b^2\right)$.

5.4 Виконайте множення та спростіть вираз:

1) $25m^2\cdot\frac{n^3}{(-5mn)^2}$; 3) $a^{15}\cdot\frac{-3b}{a^{14}}$;

2) $-16a^{10}\cdot\left(-\frac{3b}{40a^9}\right)$; 4) $y^{18}\cdot\left(-\frac{2x}{y^{20}}\right)$.

5.5 Спростіть вираз:

1) $\left(b^2-a^2\right)\cdot\frac{7}{4a+4b}$; 3) $\frac{6(x+y)}{5}\cdot\frac{10}{3x+3y}$; 5) $\frac{a^2-b^2}{4a}\cdot\frac{8ab}{3a+3b}$;

2) $\frac{3}{8x-8y}\cdot\left(x^2-y^2\right)$; 4) $\frac{3}{2a-2b}\cdot\frac{8(a-b)}{9}$; 6) $\frac{5x-5y}{7}\cdot\frac{14}{x^2-y^2}$.

5.6 Спростіть вираз:

1) $\frac{(a+b)^4}{2}\cdot\frac{6}{(b+a)^5}$; 2) $\frac{13}{(x-y)^9}\cdot\frac{(y-x)^{10}}{26}$; 3) $\frac{(a-b)^6}{18}\cdot\frac{27}{(b-a)^7}$.

5.7 Виконайте дії та спростіть вираз:

1) $a^{14}\cdot\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{a^6}\right)^3$; 2) $y^{17}\cdot\left(\frac{t^3}{y^4}\right)^3\cdot\left(\frac{t^2}{y^3}\right)^2\cdot\frac{3}{t^{12}}$.

5.8 Спростіть вираз та обчисліть його значення для вказаних значень змінних.

1) $\frac{a^8+a^7}{b^6}\cdot\frac{b^7}{a^6+a^7}$, якщо $a=2$, $b=-3$;

2) $\frac{c^9+c^{10}}{d^{10}}\cdot\frac{d^9}{c^{11}+c^{10}}$, якщо $c=-\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{5}$.

5.9 Виконайте ділення дробів:

1) $\frac{m}{a}:\frac{2m}{3a}$; 3) $\frac{a^2b}{4}:\frac{ab^2}{8}$; 5) $\frac{10c^6}{3t^4}:\frac{30c^5}{6t^3}$;

2) $\frac{2x}{3y}:\frac{x}{y}$; 4) $\frac{9}{x^3y^2}:\frac{18}{x^2y^3}$; 6) $\frac{24x^9}{5y^8}:\frac{6x^{10}}{25y^9}$.

5.10 Виконайте ділення та спростіть вираз:

1) $\frac{m+n}{4m^2}:\frac{2(m+n)}{m^3}$; 3) $\frac{x^2-2xy+y^2}{5xy}:\frac{3x-3y}{10x^2y^2}$;

2) $\frac{2a-3b}{2b^3}:\frac{6a-9b}{b^2}$; 4) $\frac{12y^2}{2x-y}:\frac{6y}{4x^2-4xy+y^2}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть невідомий вираз.

ПРИГАДАЙТЕ!

Щоб піднести дріб до степеня n, треба перемножити n таких дробів:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n}=$$

$$=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n}}=\frac{a^n}{b^n},$$

причому $b\neq 0$.

Видавництво «Ранок»

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Гра «Відгадай дріб»

- 1 і 2 гравці загадують по одному раціональному дробу.
- 2 гравець записує свій дріб на аркушику й передає запис 1 гравцю.
- 1 гравець множить свій дріб на дріб 2 гравця і повідомляє **результат множення** 2 гравцю.
- 2 гравець **за результатом множення** має визначити, який дріб задумав 1 гравець.
- Потім гравці міняються ролями і гра повторюється.

Виграє той / та, хто швидше отримає правильний результат.

5.11 Виконайте дії та спростіть вираз:

1) $\frac{9x^2-12x+4}{12}:\frac{9x^2-4}{4}$;

2) $\frac{36a^2-b^2}{2a^7}:\frac{36a^2-12ab+b^2}{8a^8}$;

3) $\frac{2a^2-4ab+2b^2}{3}:\frac{(a-b)^2}{2}$;

4) $\frac{3x^2+6xy+3y^2}{x}:\frac{(y+x)^2}{x^2}$.

5.12 Виконайте ділення дробу на цілий вираз:

1) $\frac{5x}{3}:15$;

2) $\frac{4}{7x}:8$;

3) $\frac{a-2}{6}:3$;

4) $\frac{4-b}{9}:2$;

5) $\frac{x^2-y^2}{2}:(x+y)$;

6) $\frac{a^2-2ab+b^2}{4}:(a-b)$.

5.13 Виконайте ділення цілого виразу на дріб:

1) $40:\frac{8}{3x}$;

2) $60:\frac{15x}{2}$;

3) $42:\frac{7a}{3b}$;

4) $18:\frac{54x}{y}$;

5) $(a-b):\frac{a^2-b^2}{4}$;

6) $(x+y):\frac{x^2-y^2}{5}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

5.14 Відомо, що $ab=20$. Знайдіть значення виразу:

1) $ac:\frac{c}{2b}$;

2) $a^2c^2:\frac{5c^2}{b^2}$;

3) $\frac{4c^3}{a^2}:b^2c^3$;

4) $\frac{40c}{a}:(-2bc)$.

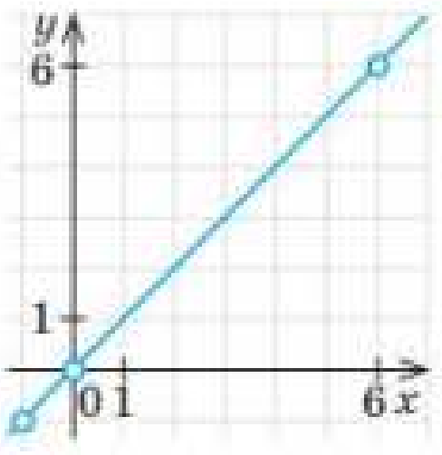
5.15 Побудуйте графік функції 1–4.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$A:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{C},$$

$$\frac{A}{B}:C=\frac{A}{B\cdot C}$$

Аналізуємо	Виконуємо
1) $y=\frac{x^2-6x}{x^2+x}:\frac{x-6}{x^2+x}$.	2) $y=1:\frac{1}{x}-3$;
• Знаходимо ОДЗ дробу: $x^2+x\neq 0$, $x-6\neq 0$; $x\neq 0$, $x\neq -1$, $x\neq 6$.	3) $y=2:\frac{1}{x}+1$;
• Спрощуємо дріб з урахуванням ОДЗ: $\frac{x^2-6x}{x^2+x}:\frac{x-6}{x^2+x}=\frac{x(x-6)}{x(x+1)}\cdot\frac{x(x+1)}{(x-6)}=\frac{x(x-6)\cdot x(x+1)}{x(x+1)(x-6)}=x$	4) $y=\frac{x^2-4}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+2}$.
• Будуємо графік функції $y=x$.	
• Вилучаємо на графіку точки, абсциси яких не входять в ОДЗ ($x=0$, $x=-1$, $x=6$).	



Видавництво «Ранок»

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Виконайте множення $\frac{6}{n} \cdot \frac{k}{3}$.

А	Б	В	Г
$\frac{2k}{n}$	$\frac{3k}{n}$	$\frac{k}{3n}$	$\frac{k}{2n}$

2 Виконайте ділення $\frac{x}{y^2} : \frac{x}{y^8}$.

А	Б	В	Г
$\frac{x^2}{y^{10}}$	$\frac{x^2}{y^{16}}$	$\frac{1}{y^6}$	y^6

3 Піднесіть дріб до степеня: $\left(\frac{2}{m^5}\right)^4$.

А	Б	В	Г
$\frac{8}{m^{20}}$	$\frac{16}{m^{20}}$	$\frac{8}{m^9}$	$\frac{16}{m^9}$

4 Піднесіть дріб до степеня: $\left(-\frac{4}{n}\right)^3$.

А	Б	В	Г
$\frac{12}{n^3}$	$-\frac{12}{n^3}$	$-\frac{64}{n^3}$	$\frac{64}{n^3}$

5 Усього в готелі m номерів, n із них — це номери люкс. Яку частину від загальної кількості номерів готелю становлять номери люкс? Подайте відповідь у відсотках.

А	Б	В	Г
$\frac{100m}{n}$	$\frac{100n}{m}$	$\frac{n}{m}$	$\frac{m}{n}$

6 До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Г), якщо $x \neq 0$, $y \neq 0$.

1	$\frac{9y}{x} : \frac{1}{9}$	А	$\frac{x}{y}$
2	$\frac{x}{9y} : 9$	Б	$\frac{y}{x}$
3	$9 : \frac{9y}{x}$	В	$\frac{81y}{x}$
		Г	$\frac{x}{81y}$

7 Спростіть вираз $\frac{26ab}{(b-a)^3} \cdot \frac{(a-b)^4}{52ab}$ та знайдіть його значення, якщо $a = 231$, $b = 220$.

8 Спростіть вираз $\frac{x^2-10x+25}{x+20} : \frac{4x-20}{x+20}$ та знайдіть його значення, якщо $x = 5{,}8$.

MATH FOR LIFE

5.16 **Соціологія.** Група в соціальній мережі налічує m учасників та учасниць, $\frac{2}{n}$ із них активно спілкуються. Відомо, що p % активних учасників групи займаються фітнесом. Запишіть вираз, за яким можна визначити кількість активних учасників та учасниць групи, які займаються фітнесом.

Видавництво «Ранок»

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо необхідно виконати перетворення дробів, що містять одиниці вимірювання, ці дроби можна ділити і множити на одиниці вимірювання так само, як коли б вони були змінними. Це стане вам у пригоді на уроках фізики.

Наприклад, щоб перевести одну одиницю вимірювання в іншу, її можна домножити й розділити на одну й ту саму величину, виражену в початковій і шуканій одиницях вимірювання.

5.17 **Плавання.** На Чемпіонаті світу з водних видів спорту 2024 року в Досі (Катар) український спортсмен Владислав Бухов виборов золоту медаль за перемогу на дистанції 50 м вільним стилем із результатом 21,44 с. Якою була його швидкість у кілометрах за годину? Скористайтеся підказкою. Округліть результат до десятих.

Розв'язання

$$\frac{50\ \text{м}}{21{,}44\ \text{с}} \cdot \frac{1\ \text{км}}{1000\ \text{м}} \cdot \frac{60\ \text{с}}{1\ \text{хв}} \cdot \frac{60\ \text{хв}}{1\ \text{год}} = \frac{50\ \text{м} \cdot 1\ \text{км} \cdot 60\ \text{с} \cdot 60\ \text{хв}}{21{,}44\ \text{с} \cdot 1000\ \text{м} \cdot 1\ \text{хв} \cdot 1\ \text{год}} = \dots$$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

5.18 Виконайте множення:

1) $\frac{10}{a} \cdot \frac{a}{2}$; 2) $\frac{a^4}{6} \cdot \frac{6}{a^2}$; 3) $\frac{18a^4}{b^5} \cdot \frac{b}{3a^4}$; 4) $\frac{64a^4}{33b^8} \cdot \frac{11b^{10}}{8a^5}$.

5.19 Виконайте множення:

1) $\frac{m+4}{4} \cdot \frac{24}{m+4}$;

2) $\frac{60}{m(n-6)} \cdot \frac{n-6}{20}$;

3) $\frac{32}{(7-m)(7+m)} \cdot \frac{mn+7n}{8}$;

4) $\frac{4n-12}{n^2-9} \cdot \frac{mn+3m}{36}$.

5.20 Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\left(\frac{12}{y}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{y}{6x}\right)^2$; 5) $\left(\frac{x^5a}{2y}\right)^4$; 7) $\left(-\frac{3y^3}{5xa^4}\right)^4$;

2) $\left(\frac{6}{a}\right)^3$; 4) $\left(-\frac{x}{3y}\right)^3$; 6) $\left(\frac{2a}{xy^2}\right)^3$; 8) $\left(-\frac{4x^4}{5ya^3}\right)^3$.

5.21 Виконайте ділення дробів:

1) $\frac{m^3}{m+6} : \frac{m}{6+m}$;

2) $\frac{8-m}{m^4} : \frac{m-8}{m}$;

3) $\frac{m^4}{8a^3} : \frac{m}{24a^3}$;

4) $\frac{56a^4}{m^3} : \frac{7a^{12}}{m^6}$;

5) $\frac{63m^2}{(m-7)^2} : \frac{7m^4}{(7-m)^2}$;

6) $\frac{(2-m)^3}{28m^8} : \frac{(m-2)^2}{4m^2}$.

5.22 Виконайте множення дробів:

1) $\frac{18}{a} \cdot \frac{ab}{24}$; 2) $\frac{20}{a^2} \cdot \left(-\frac{a^3}{35}\right)$; 3) $\frac{a^2}{27b} \cdot \frac{81b^2}{a}$; 4) $\frac{-18x}{3y^2} \cdot \frac{9y^3}{-x^2}$.

5.23 Виконайте множення та спростіть вираз:

1) $2x \cdot \frac{3}{8x}$; 2) $9a^3 \cdot \frac{2}{63a^2}$; 3) $20a^2 \cdot \left(-\frac{8b^6}{5a^3}\right)$; 4) $-36y \cdot \frac{5x}{48y}$.

Завдання 5.18, 5.19 → Приклад 1
Завдання 5.20 → Приклад 2
Завдання 5.21 → Приклад 3
Завдання 5.22 → Практикум, 5.1, 5.2
Завдання 5.23 → Практикум, 5.3, 5.4
Завдання 5.24 → Практикум, 5.5
Завдання 5.25 → Практикум, 5.6
Завдання 5.26 → Практикум, 5.7
Завдання 5.27 → Практикум, 5.8
Завдання 5.28 → Практикум, 5.9
Завдання 5.29 → Практикум, 5.10
Завдання 5.30 → Math for life, 5.16
Завдання 5.31 → Інтелектуальний фітнес, 5.15

 # BE SMART

Правило ділення на дріб почали застосовувати спочатку китайські, а пізніше — індійські математики в VII–IX ст.

У 1544 р. німецький математик Міхаель Штіфель сформулював правило ділення на дріб як множення на обернений дріб.

Видавництво «Ранок»

5.24 Спростіть вираз:

1) $\left(x^2-y^2\right)\cdot\dfrac{6}{4x+4y}$;

2) $\dfrac{4}{7x-7y}\cdot\left(x^2-y^2\right)$;

3) $\dfrac{8\left(a^2-b^2\right)}{3}\cdot\dfrac{9}{2a-2b}$;

4) $\dfrac{m^2-n^2}{14n}\cdot\dfrac{21mn^2}{0{,}5m-0{,}5n}$.

5.25 Спростіть вираз:

1) $\dfrac{(3-x)^4}{3}\cdot\dfrac{9x}{(x-3)^3}$; 2) $\dfrac{48}{(a+b)^7}\cdot\dfrac{(a+b)^8}{8a}$; 3) $\dfrac{(4-m)^6}{3m^2}\cdot\dfrac{9m}{(m-4)^6}$.

5.26 Виконайте дії та спростіть вираз:

1) $b\cdot\left(\dfrac{a^8}{b^2}\right)^3\cdot\left(\dfrac{b}{a^3}\right)^7$; 2) $c^2\cdot\left(\dfrac{c^5}{b^2}\right)^7\cdot\left(\dfrac{b^7}{c^{18}}\right)^2$; 3) $a^9\cdot\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)^5\cdot\left(\dfrac{b^5}{a^{11}}\right)^2$.

5.27 Спростіть вираз та обчисліть його значення для вказаних значень змінних:

1) $\dfrac{x^3+x^2}{9x}\cdot\dfrac{18x^2}{x^3+x^4}$, якщо $x=2$;

2) $\dfrac{m^5-m^6}{28}\cdot\dfrac{42m^6}{m^7-m^8}$, якщо $m=-2$.

5.28 Виконайте ділення дробів:

1) $\dfrac{x}{4a}:\dfrac{3x^2}{a}$; 2) $\dfrac{b}{2a}:\dfrac{2b^2}{a^3}$; 3) $\dfrac{x}{y^5}:\dfrac{3x}{y^6}$; 4) $\dfrac{12x}{a^3}:\dfrac{3}{a^3x}$.

5.29 Виконайте ділення та спростіть вираз:

1) $\dfrac{x+y}{2x^2}:\dfrac{3(x+y)}{x}$; 2) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{15xy}:\dfrac{(y-x)^2}{20x^2y^2}$; 3) $\dfrac{m^2-n^2}{10mn}:\dfrac{2n+2m}{20nm^2}$.

5.30 У студії танців займаються x дівчат, $\dfrac{4}{y}$ із них взяли участь у всеукраїнському турнірі. Відомо, що k % представниць цієї студії на турнірі вільно володіють п'ятьма мовами. Запишіть вираз, за яким можна визначити кількість дівчат, які тренуються в цій студії, брали участь у всеукраїнському турнірі й вільно володіють п'ятьма мовами.

Бонусне завдання

5.31 Побудуйте графік функції:

1) $y=3:\dfrac{1}{x}+3$; 2) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2-9}{x+1}$; 3) $y=\dfrac{2x^2+4x}{x^2-x}:\dfrac{x+2}{x^2-x}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Спробуйте візуалізувати (за допомогою улюблених героїв, персонажів, тварин тощо) правила виконання дій із дробами для кращого запам'ятовування (див. с. 29, 40). Влаштуйте в класі конкурс на кращу візуалізацію.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Українські спортсмени неодноразово виборювали золоті нагороди на чемпіонатах світу з плавання.

Плавець	Рік	Дистанція
Денис Силантьєв	1998	200 м
Олег Лісогор	2001	50 м
Олег Лісогор	2007	50 м

Використовуючи інтернет або інші джерела, знайдіть інформацію про результати наших плавців (час проходження ними дистанції) та обчисліть швидкості їхнього руху. Подайте відповіді в кілометрах за годину. Знайдіть також інформацію про інші визначні досягнення українських спортсменів і спортсменок.

Видавництво «Ранок»

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 1–5

Алгоритм знаходження області допустимих значень (ОДЗ) виразу

1. Прирівняти до нуля знаменники дробів, що входять у вираз.
2. Знайти розв'язки отриманих рівнянь.
3. Записати ОДЗ, зазначивши, що отримані в п. 2 розв'язки до неї не входять.

Алгоритм знаходження спільного знаменника дробів

1. Розкласти на множники кожний знаменник.
2. Знайти найменше спільне кратне числових коефіцієнтів, що містяться в отриманих розкладах.
3. Утворити добуток, що міститиме числовий коефіцієнт (НСК числових коефіцієнтів знаменників вихідних дробів) та всі множники-вирази, що входять у розклади. Множники, що повторюються, слід брати з найбільшим показником степеня.

Алгоритм додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками

1. Записати в чисельнику суму (різницю) чисельників дробів, а знаменник залишити той самий.
2. Виконати в отриманому чисельнику відповідні дії додавання (віднімання).
3. Розкрити дужки та звести подібні доданки (якщо потрібно).
4. Скоротити отриманий дріб (якщо це можливо).

Алгоритм множення раціональних дробів

1. Записати добуток чисельників заданих дробів у чисельник нового дробу.
2. Записати добуток знаменників дробів у знаменник нового дробу.
3. Розкласти чисельники і знаменники заданих дробів на множники.
4. Скоротити дріб (якщо це можливо).
5. Записати відповідь.

Алгоритм зведення дробу до нового знаменника

1. Розкласти новий знаменник на множники, якщо потрібно.
2. Знайти доповняльний множник як частку від ділення нового знаменника на знаменник початкового дробу.
3. Помножити чисельник і знаменник заданого дробу на знайдений доповняльний множник.
4. Виконати дії в чисельнику та знаменнику отриманого дробу.
5. Записати отриманий дріб (урахувуючи ОДЗ).

Алгоритм додавання (віднімання) дробів із різними знаменниками

1. Знайти спільний знаменник заданих дробів.
2. Знайти доповняльні множники для кожного дробу.
3. Помножити чисельник і знаменник кожного дробу на доповняльний множник.
4. Виконати дії за алгоритмом додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.
5. Спростити вираз, якщо це можливо.

Алгоритм ділення раціональних дробів

1. Записати дріб, обернений до дільника.
2. Знайди добуток діленого і дробу, оберненого до дільника, за алгоритмом множення раціональних дробів.
3. Скоротити дріб (якщо це можливо).
4. Записати відповідь.

Видавництво «Ранок»

ПІДСУМКОВА РОБОТА № 2

Інший варіант роботи в електронному додатку

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Знайдіть значення виразу $\frac{1+x}{x+3}$, якщо $x=1$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	2

2 Скоротіть дріб $\frac{10a}{5a^2}$.

А	Б	В	Г
$5a$	$2a$	$\frac{5}{a}$	$\frac{2}{a}$

3 Подайте дріб $\frac{6y-2}{y}$ у вигляді різниці цілого числа і дробу.

А	Б	В	Г
4	$4-\frac{1}{y}$	$6-\frac{2}{y}$	$5-\frac{2}{y}$

4 Виконайте додавання: $\frac{k+1}{3k-5}+\frac{2k-6}{3k-5}$.

А	Б	В	Г
0	1	2	3

5 Виконайте віднімання: $\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{x-5}$	$-\frac{1}{x-5}$	$-\frac{1}{x+5}$	$\frac{1}{x+5}$

6 Перший комп'ютер за t хв розв'язує x задач, а другий — y задач. Скільки задач розв'язують ці два комп'ютери, працюючи разом, за одну хвилину?

А	Б	В	Г
$\frac{2t}{x+y}$	$\frac{t}{x+y}$	$\frac{x+y}{2t}$	$\frac{x+y}{t}$

7 Подайте у вигляді дробу вираз $4a+\frac{2a(2b-a)}{a-b}$.

8 Доведіть тотожність $\frac{x(x+5)}{x+2}-\frac{x^2+2x-6}{x+2}=3$, якщо $x\neq -2$.

9 Подайте вираз $\frac{2x^3+6x^2-14x}{2x^2}$, де $x\neq 0$, у вигляді суми та різниці нескоротних дробів.

10 Дано вираз $\frac{n+3}{n-1}-\frac{n^2+n-2}{n^2-2n+1}$.

1) Спростіть цей вираз.

2) Знайдіть його значення, якщо $n=1{,}1$.

Бонусне завдання

Відомо, що $\frac{x}{y}=10$. Знайдіть значення виразу $\frac{x^2-15xy+9y^2}{xy}$.

Видавництво «Ранок»

§6 ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

УЧОРА — Ви спрощували числові та буквені вирази та обчислювали їх значення

СЬОГОДНІ — Ви навчитеся перетворювати раціональні вирази та зводити їх до простіших, тотожно рівних їм; опануєте секрети спрощення раціональних виразів

ЗАВЖДИ — Ви зможете знаходити раціональні шляхи розв'язування завдань; навчитися економити свій час і кошти.

mk.com.ua/108715

Проаналізуйте підказку Математичної Феї та допоможіть своїй улюбленій героїні.

Чарівна підказка

Тотожність:

$$\frac{1}{a(a+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}\right).$$

Доведення:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+2-a}{a(a+2)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{a(a+2)}=\frac{1}{a(a+2)}$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$\frac{1}{2\cdot(2+2)}=\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{1}{8};$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8};$$

$$\frac{1}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right).$$

ДОСЛІДЖУЄМО

За яких умов заданий вираз і одержаний після спрощення дріб $\frac{3}{a(a+6)}$ будуть тотожно рівними?

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

СТАРА ДОБРА КАЗКА, АБО ДОПОМОГА МАТЕМАТИЧНОЇ ФЕЇ

Небагато років тому в одній казковій країні Попелюшка (Русалонька або Рапунцель) дуже хотіла потрапити на бал (побачення або квест).

Проте зла Мачуха (Урсула або матуся Готель) не дозволила їй розважатися, поки мила дівчина не спростить вираз

$$\frac{1}{a(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+6)}.$$

Юна леді розуміла, що вона дуже довго буде додавати раціональні дроби, шукати спільні знаменники та знаходити доповняльні множники, і їй було дуже прикро. Але на допомогу розумним, добрим і веселим людям завжди приходить Чарівна Фея (або Фей, за сумісництвом — учитель математики).

Вона (або Він) запропонувала засмученій дівчині довести нескладну тотожність і застосувати отриманий результат для спрощення виразу.

Розв'язання

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a+4}-\frac{1}{a+6}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+6}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+6}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+6-a}{a(a+6)}\right)=$$
$$=\frac{6}{2a(a+6)}=\frac{3}{a(a+6)}.$$

Отже, кожний раціональний дріб, що входить до заданого виразу, можна замінити тотожно рівним йому виразом, потім застосувати розподільний закон множення, звести подібні доданки, спростити результат відповідно до порядку дій і з легкістю знайти значення виразу.

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

За допомогою арифметичних дій будь-який раціональний вираз можна перетворити на **тотожний йому раціональний дріб**.

Тотожні перетворення раціонального виразу виконуються на **області допустимих значень** цього виразу.

Арифметичні дії в раціональних виразах виконують, як у числових виразах, **згідно з прийнятим порядком дій**.

Якщо замість змінних підставити у вираз їхні числові значення, то раціональний вираз набуде конкретного **числового значення**.

Для **спрощення** раціональних виразів застосовують:

- властивості арифметичних дій (переставну, сполучну, розподільну);
- формули скороченого множення;
- різні способи розкладання на множники;
- основну властивість дробу тощо.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- перетворення виразів (transformation of expressions)
- спрощення виразів (simplifying expressions)
- порядок дій (order of operations)
- тотожні вирази (identical expressions)
- тотожність (identity)

ПРИКЛАД 1

Визначте порядок виконання дій у виразі та спростіть його:

$$\left(\frac{4}{a+1}-\frac{4}{a-1}\right)\cdot\left(3a-\frac{23a-1}{8}\right):\frac{1}{a^2-2a+1}.$$

Розв'язання

$$\left(\frac{4}{a+1}-\frac{4}{a-1}\right)\cdot\left(3a-\frac{23a-1}{8}\right):\frac{1}{a^2-2a+1}.$$

1) $\frac{4}{a+1}-\frac{4}{a-1}=\frac{4(a-1)-4(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{4a-4-4a-4}{(a+1)(a-1)}=\frac{-8}{(a+1)(a-1)}$;

2) $3a-\frac{23a-1}{8}=3a+\frac{1-23a}{8}=\frac{24a+1-23a}{8}=\frac{a+1}{8}$;

3) $\frac{-8}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{a+1}{8}=\frac{-8(a+1)}{8(a+1)(a-1)}=\frac{-1}{a-1}=-\frac{1}{a-1}=\frac{1}{1-a}$;

4) $\frac{1}{1-a}:\frac{1}{a^2-2a+1}=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{(a-1)^2}{1}=\frac{1}{1-a}\cdot\frac{(1-a)^2}{1}=\frac{(1-a)^2}{1-a}=1-a$.

Відповідь: $1-a$.

Стратегія

Визначаємо порядок виконання дій.

1) Віднімання дробів із різними знаменниками (у дужках).

2) Віднімання дробу від цілого виразу (у дужках)

3) Множення дробів. Звертаємо увагу на знаки! $\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}=\frac{x}{-y}$.

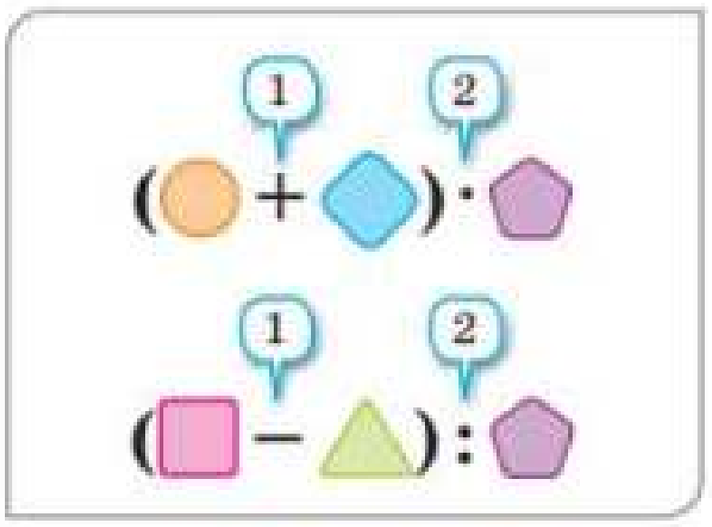
4) Ділення дробів. Пригадайте: $(a-1)^2=(1-a)^2$.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

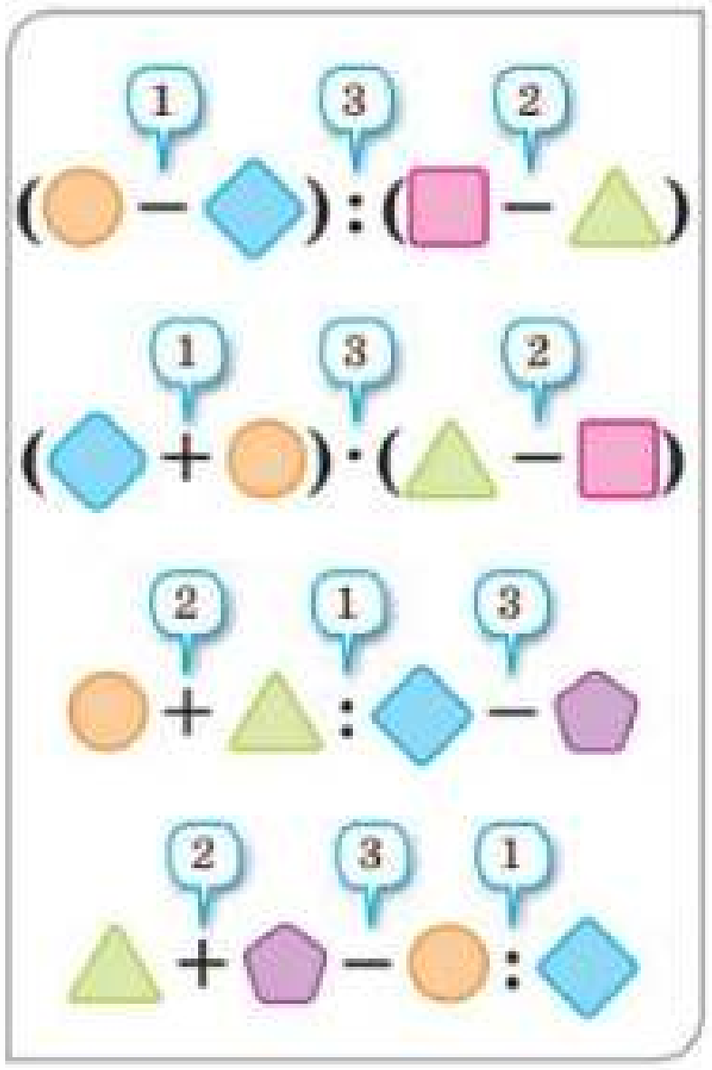
Визначте порядок виконання дій у виразі та спростіть його:

1) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{a}{6}$; 3) $\left(\frac{a}{b}+\frac{2}{a}\right)\cdot\frac{a^2}{a^2+2b}$; 5) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2xy}{x+y}$;

2) $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{3b}\right)\cdot\frac{b}{8}$; 4) $\left(\frac{x}{y}-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{y^3}{x^2-3y}$; 6) $\left(\frac{1}{m}-\frac{m}{n^2}\right)\cdot\frac{3mn}{n-m}$.



Видавництво «Ранок»



Стратегія 1

1) Застосовуємо формулу різниці квадратів $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

2) Зводимо подібні доданки в кожних дужках.

3) Множимо дріб на цілий вираз.

Стратегія 2

1) Застосовуємо формули квадрата суми і квадрата різниці:
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

2) Скорочуємо дроби.

3) Зводимо подібні доданки.

7) $\left(\frac{1}{a-3}-\frac{1}{a+3}\right)\cdot\frac{a^2-9}{2}$; 9) $\left(\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a-2}\right):\frac{4}{(a+2)^2}$;

8) $\left(\frac{1}{a-4}-\frac{1}{a+4}\right)\cdot\frac{a^2-16}{8}$; 10) $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{2}{(a+1)^2}$.

11) $\left(1+\frac{1}{6a}\right):\frac{1}{2a}$; 13) $\left(2-\frac{a-1}{2a}\right):\frac{4}{a}$; 15) $\left(1-\frac{a+b}{b-a}\right):\frac{2}{a-b}$;

12) $\left(1-\frac{1}{8x}\right):\frac{1}{4x}$; 14) $\left(3-\frac{x+2}{5x}\right):\frac{5}{x}$; 16) $\left(\frac{x+y}{x-y}-1\right):\frac{1}{y-x}$.

17) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{9}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{9}\right)$; 19) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{8}\right)$;

18) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{8}\right):\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{x}\right)$; 20) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{5-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{15}\right)$.

21) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x+6}:\frac{x}{x+6}-\frac{5}{x+1}$; 23) $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}-\frac{5x-y}{2x}:\frac{5x-y}{2}$;

22) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+8}:\frac{x}{x+8}-\frac{3}{x+1}$; 24) $\frac{1}{x}+\frac{6}{y}-\frac{x-4y}{3x}:\frac{x-4y}{3}$.

Якщо треба спростити раціональний вираз, слід шукати *найбільш зручний спосіб.*

ПРИКЛАД 2

Спростіть вирази 1 і 2, скориставшися **формулами скороченого множення.**

1) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-\left(x-\frac{2}{x}\right)^2$; 2) $\frac{c^2+6cd+9d^2}{c+3d}-\frac{c^2-6cd+9d^2}{c-3d}$.

Розв'язання

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

1) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^2-\left(x-\frac{2}{x}\right)^2=\left(x+\frac{2}{x}-x+\frac{2}{x}\right)\left(x+\frac{2}{x}+x-\frac{2}{x}\right)=\frac{4}{x}\cdot 2x=8.$

$2\cdot c\cdot 3d$ $(3d)^2$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

2) $\frac{c^2+6cd+9d^2}{c+3d}-\frac{c^2-6cd+9d^2}{c-3d}=\frac{(c+3d)^2}{(c+3d)}-\frac{(c-3d)^2}{(c-3d)}=c+3d-(c-3d)=6d.$

Відповідь: 1) 8; 2) $6d$.

Видавництво «Ранок»

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Спростіть вираз, скориставшися формулами скороченого множення.

1) $\left(7a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(7a-\frac{1}{a}\right)^2$;

2) $\left(a+\frac{6}{a}\right)^2-\left(a-\frac{6}{a}\right)^2$;

3) $\frac{a^2+6a+9}{a+3}-\frac{a^2-6a+9}{a-3}$;

4) $\frac{a^2+8a+16}{a+4}-\frac{a^2-8a+16}{a-4}$.

ПРИКЛАД 3

Спростіть раціональний вираз $\left(\frac{y}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)\cdot\left(x^2-y^2\right)$, застосувавши розподільну властивість множення.

Розв'язання

$$\left(\frac{y}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)\cdot\left(x^2-y^2\right)=\frac{y(x-y)(x+y)}{x-y}-\frac{y(x-y)(x+y)}{x+y}=$$

$$=y(x+y)-y(x-y)=y(x+y-x+y)=2y^2.$$

Відповідь: $2y^2$.

Стратегія

1) Ураховуємо, що множник $\left(x^2-y^2\right)=(x-y)(x+y)$ ділиться на знаменники й першого, і другого дробів.

2) Застосовуємо розподільний закон множення.

3) Скорочуємо дроби.

4) Виносимо спільний множник y за дужки.

5) Зводимо подібні доданки.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Спростіть раціональний вираз, застосувавши розподільну властивість множення.

1) $\left(\frac{3}{x+9}-\frac{3}{x-9}\right)(x+9)(x-9)$;

2) $\left(\frac{4}{x-6}-\frac{4}{x+6}\right)(x+6)(x-6)$;

3) $\left(\frac{5}{x-5}-\frac{5}{x+5}\right)\left(x^2-25\right)$;

4) $\left(\frac{7}{x+7}-\frac{7}{x-7}\right)\left(x^2-49\right)$.

ПРИКЛАД 4

Спростіть раціональний вираз $\frac{\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}}$, застосувавши основну властивість дробу.

Розв'язання

$$\frac{\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}}=\frac{\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)\cdot xy}{\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)\cdot xy}=\frac{\frac{x}{y}\cdot xy+2xy+\frac{y}{x}\cdot xy}{\frac{x}{y}\cdot xy-2xy+\frac{y}{x}\cdot xy}=$$

$$=\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2.$$

Стратегія

1) Застосовуємо основну властивість дробу: множимо чисельник і знаменник заданого дробу на спільний вираз xy.

2) Застосовуємо розподільний закон множення.

3) Скорочуємо дроби.

4) Використовуємо формули квадрата суми і квадрата різниці.

5) Застосовуємо властивість степеня.

Видавництво «Ранок»

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Спростіть раціональний вираз, застосувавши **основну властивість дробу.**

1) $\dfrac{1-\dfrac{16}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}}$; 2) $\dfrac{1-\dfrac{9}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}$; 3) $\dfrac{\dfrac{4x}{y}-4+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+2+\dfrac{y}{x}}$; 4) $\dfrac{\dfrac{x}{y}+2+\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}-4+\dfrac{4y}{x}}$.

ПРАКТИКУМ

6.1 Виконайте дії:

1) $\dfrac{3x^2}{25}\cdot\dfrac{5}{x}:\dfrac{3x}{5}$; 3) $\dfrac{24}{x^2y}:\dfrac{6}{x^2}:\dfrac{8}{y^2}$; 5) $\dfrac{x^4}{8y^3}\cdot\dfrac{10y^5}{x^3}:\left(2{,}5x^2y\right)$;

2) $\dfrac{36}{7x^2}:\dfrac{6}{x}\cdot\dfrac{7x}{6}$; 4) $\dfrac{22}{xy^2}:\dfrac{10}{x}:\dfrac{11}{y}$; 6) $\dfrac{y^6}{5x^3}\cdot\dfrac{9x^5}{y^2}:\left(3{,}6xy^3\right)$.

6.2 Визначте порядок виконання дій. Спростить вираз.

1) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{x^2-25}{50}\cdot\dfrac{10}{x+5}$; 3) $\dfrac{5x-3}{x^2-9}+\dfrac{12}{x^2-9}:\dfrac{12}{x+3}+\dfrac{x}{x+3}$;

2) $\dfrac{x}{6}+\dfrac{36-x^2}{72}\cdot\dfrac{12}{x+6}$; 4) $\dfrac{7x-4}{x^2-16}+\dfrac{5}{x^2-16}:\dfrac{5}{x+4}+\dfrac{x}{x+4}$.

6.3 Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $a-\dfrac{a^2-9a}{a+9}\cdot\dfrac{a}{a-9}$; 3) $(a+5)\cdot\dfrac{a+2}{a-1}-\dfrac{2a+10}{a-1}$;

2) $a-\dfrac{a^2-7a}{a+7}\cdot\dfrac{a}{a-7}$; 4) $\dfrac{a+2}{a-2}\cdot(a+3)-\dfrac{2a+6}{a-2}$.

6.4 Визначте порядок виконання дій у виразі та спростить його:

1) $\dfrac{a+6}{6}\cdot\left(\dfrac{a}{a+6}-\dfrac{a-6}{a}\right)$; 3) $\left(\dfrac{a^2+25}{a^2-25}-\dfrac{a-5}{a+5}\right):\dfrac{5a}{a+5}$;

2) $\left(\dfrac{a}{a+4}-\dfrac{a-4}{a}\right)\cdot\dfrac{a+4}{4}$; 4) $\left(\dfrac{a^2+49}{a^2-49}-\dfrac{a-7}{a+7}\right):\dfrac{2a}{a+7}$.

6.5 Спростіть вираз, скориставшися формулами скороченого множення:

1) $\left(y^2-4\right):\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\dfrac{y}{5}+\dfrac{5}{y}-2\right):(y-5)$;

2) $\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{3}\right):\left(y^2-9\right)$; 4) $\left(\dfrac{y}{7}+\dfrac{7}{y}-2\right):(y-7)$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $\dfrac{2}{a}+\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{b}$;

2) $\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{b}{c}\right)\cdot\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{b}$

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Визначте порядок виконання дій у виразах:

$$x-\frac{1}{x-3}:\frac{6x}{x^2-9}+\frac{x+2}{x};$$

$$\left(x-\frac{1}{x-3}\right):\left(\frac{6x}{x^2-9}+\frac{x+2}{x}\right);$$

$$x-\left(\frac{1}{x-3}:\frac{6x}{x^2-9}+\frac{x+2}{x}\right);$$

$$x-\frac{1}{x-3}:\left(\frac{6x}{x^2-9}+\frac{x+2}{x}\right).$$

Створіть якомога більше різних виразів із поданого, додавши дужки:

$$y+2-\frac{y^2}{y+5}\cdot\frac{y-1}{3y}+\frac{1}{y}.$$

Обміняйтеся записами. Визначте порядок виконання дій у кожному виразі. Перевірте результати один одного.

Видавництво «Ранок»

6.6 Спростіть вираз та знайдіть його значення.

1) $\left(\frac{4}{m-4}-\frac{4}{m+4}\right)\cdot\frac{m^2+8m+16}{32}$, якщо $m=4{,}5$;

2) $\left(\frac{6}{m-6}-\frac{6}{m+6}\right)\cdot\frac{m^2+12m+36}{72}$, якщо $m=6{,}2$;

3) $\left(\frac{3m+1}{3m-1}-\frac{3m-1}{3m+1}\right):\frac{15m}{6m-2}$, якщо $m=-1$;

4) $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{8m}{12m-6}$, якщо $m=-3$.

6.7 Визначте порядок виконання дій. Спростіть вирази.

1) $\left(\frac{81}{x}-x\right)\cdot\left(\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x-9}\right)$;

2) $\left(\frac{100}{x}-x\right)\cdot\left(\frac{1}{x+10}-\frac{1}{x-10}\right)$;

3) $\left(\frac{5}{x+3}-\frac{5}{x-3}\right):\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}\right)$;

4) $\left(\frac{3}{x+2}-\frac{3}{x-2}\right):\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}\right)$.

6.8 Спростіть вираз, використавши формули квадрата суми або різниці:

1) $\left(\frac{1}{2a}-a\right)^2$; 2) $\left(\frac{3}{a}+\frac{a}{3}\right)^2$; 3) $\left(\frac{a^2}{6}-\frac{6}{a^2}\right)^2$; 4) $\left(b-\frac{3}{b}\right)^2+6$.

6.9 Спростіть вираз за формулою різниці квадратів:

1) $\left(b-\frac{10}{b}\right)^2-\left(b+\frac{10}{b}\right)^2$; 2) $\left(b+\frac{7}{b}\right)^2-\left(b-\frac{7}{b}\right)^2$.

6.10 Спростіть раціональний вираз, застосувавши основну властивість дробу:

1) $\dfrac{\frac{x}{3}+1}{1+\frac{3}{x}}$; 2) $\dfrac{\frac{6}{x}-11}{\frac{6}{11}-x}$; 3) $\dfrac{\frac{x}{7}-\frac{7}{x}}{\frac{x}{7}+\frac{7}{x}}$; 4) $\dfrac{\frac{x}{8}-\frac{8}{x}}{\frac{x}{8}+\frac{8}{x}}$.

6.11 Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{a}{6a-24}-\frac{2}{a-4}\right):\frac{a-12}{6}=\frac{1}{a-4}$;

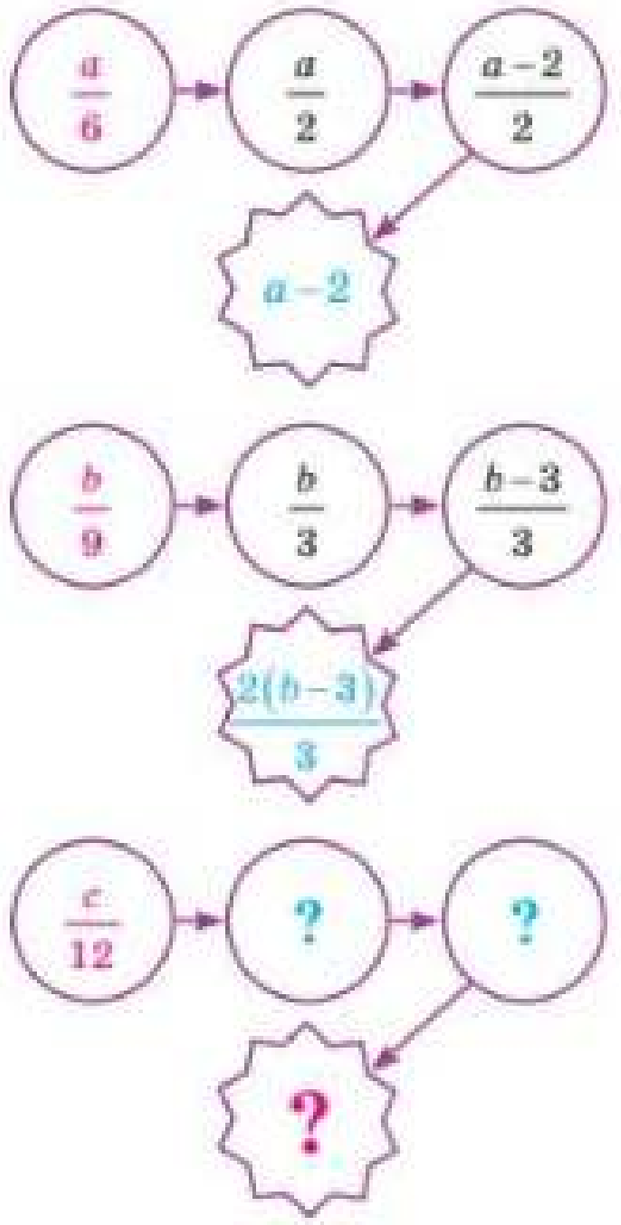
2) $\dfrac{\frac{1}{2x}+\frac{6}{y}}{\frac{1}{2x}-\frac{6}{y}}\cdot\frac{y-12x}{12x+y}=1$.

6.12 Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної.

1) $\frac{16-a^2}{4}\cdot\left(\frac{a+4}{a^2-4a}-\frac{a-4}{a^2+4a}\right)$; 2) $\left(\frac{a+3}{a^2-3a}-\frac{a-3}{a^2+3a}\right):\frac{12}{a^2-9}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

1. Знайдіть невідомі вирази.
2. Які дії ви виконували?



СЛІД ЗНАТИ!

Раціональні вирази можна перетворювати частинами **тільки на області допустимих значень** (по діях, згідно з порядком виконання дій) або «ланцюжком» (у цьому випадку слід бути дуже уважними і спостережливими!).

ПРИГАДАЙТЕ!

Порядок виконання дій

1. Дії в дужках.
2. Піднесення до степеня.
3. Множення і ділення (зліва направо).
4. Додавання і віднімання (зліва направо)

Видавництво «Ранок»

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

6.13 Знайдіть значення дробів 1–4.

Аналізуємо

1) $\dfrac{x^2-4xy-y^2}{x^2-y^2}$, якщо $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{5}$.

- Ділимо почленно чисельник дробу на знаменник:

$$\frac{x^2-4xy-y^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}-\frac{4xy}{x^2-y^2}=1-\frac{4xy}{x^2-y^2}.$$

- Підставляємо значення: якщо $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{5}$, то $y=5x$.

$$1-\frac{4xy}{x^2-y^2}=1-\frac{4\cdot x\cdot 5x}{x^2-(5x)^2}=1-\frac{20x^2}{-24x^2}=1+\frac{5}{6}=1\frac{5}{6}.$$

Виконуємо

2) $\dfrac{a^2-3ab+b^2}{a^2+b^2}$, якщо $\dfrac{a}{b}=3$;

3) $\dfrac{x^2-5xy-y^2}{xy}$, якщо $\dfrac{x}{y}=2$;

4) $\dfrac{c^2-5cd+d^2}{cd}$, якщо $\dfrac{c}{d}=\dfrac{1}{5}$.

1) Обидві частини рівності $x\pm\dfrac{1}{x}=A$ підносимо до квадрата: $\left(x\pm\dfrac{1}{x}\right)^2=A^2$.

2) Застосовуємо формулу квадрата суми (різниці).

3) Знаходимо значення виразу $x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

6.14 Знайдіть значення виразу:

1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, якщо $x+\dfrac{1}{x}=3$;

2) $y^2+\dfrac{1}{y^2}$, якщо $y-\dfrac{1}{y}=5$;

3) $4b^2+\dfrac{1}{4b^2}$, якщо $2b+\dfrac{1}{2b}=-7$;

4) $16x^2+\dfrac{25}{x^2}$, якщо $4x-\dfrac{5}{x}=-10$.

6.15 Побудуйте графік функції:

1) $y=1:\dfrac{1}{x+1}-3$; 2) $y=4-1:\dfrac{1}{x+2}$; 3) $y=-5+1:\dfrac{1}{1-x}$.

MATH FOR LIFE

6.16 **Зоологія.** Власна швидкість руху блакитної акули дорівнює 19 км/год. Акула подолала відстань 25 км за течією, а потім повернулася тим самим шляхом. Швидкість течії v км/год. Складіть вираз, за яким можна знайти час (у год), витрачений акулою на подорож. Спростіть отриманий вираз.

6.17 **Волонтерство.** Аліса і Макар плетуть маскувальні сітки. Аліса може сплести сітку певного розміру за x год, а Макар — таку саму сітку за y год. Скільки часу знадобиться дітям, якщо вони працюватимуть разом, щоб сплести:
1) одну таку сітку; 2) три таких сітки; 3) n таких сіток?

Складіть вирази за умовою задачі та спростіть їх. Обчисліть значення останнього виразу, якщо $x=5$, $y=6$, $n=22$.

$$\text{Час спільної роботи}=\frac{\text{обсяг роботи (1)}}{\text{продуктивність спільної роботи}}$$

ПРИГАДАЙТЕ!

Для розв'язання задач на спільну роботу обсяг роботи позначають за одиницю (1).

Виконавець	Аліса	Макар
Продуктивність (обсяг роботи за 1 год)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$
Продуктивність спільної роботи	$\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}$	

Видавництво «Ранок»

6.18 **Ранкова пригода.** Назар ішов до школи зі швидкістю v_1 км/год. Наприкінці шляху виявилося, що він забув рюкзак, і хлопець повернувся додому зі швидкістю v_2 км/год. Майже запізнюючись, Назар побіг до школи зі швидкістю v_3 км/год. Якою була середня швидкість Назара того ранку, якщо відстань від його будинку до школи становила s км?

Складіть вираз за умовою задачі та спростіть його.

Обчисліть значення цього виразу, якщо $v_1 = 3$ км/год, $v_2 = 4$ км/год, $v_3 = 6$ км/год.

	s → v_1	s ← v_2	s → v_3
Час	$t_1 = \frac{s}{v_1}$	$t_2 = \frac{\square}{\square}$	$t_3 = \frac{\square}{\square}$

$$v_{сер} = \frac{\text{загальна відстань}}{\text{загальний час}}$$

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Спростіть вираз $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{3b}\right) \cdot \frac{b}{2}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3b}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2b}$

2 Спростіть вираз $\left(2 + \frac{1}{a}\right) : \frac{2a+1}{a}$.

А	Б	В	Г
$\left(\frac{2a+1}{a}\right)^2$	1	0	$\left(\frac{a}{2a+1}\right)^2$

3 Перетворіть вираз $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6}\right)$ на дріб.

А	Б	В	Г
$\frac{6+x}{6-x}$	$\frac{6+x}{x-6}$	$\frac{6-x}{6+x}$	$\frac{x-6}{x+6}$

4 Виконайте дії: $\frac{a^2-25}{5} \cdot \frac{5}{a-5} - 5$.

А	Б	В	Г
$a-10$	$a-5$	$a+5$	a

5 Власна швидкість морської черепахи становить v км/год. Черепаха пропливла s км за течією і повернулася назад тим самим шляхом. Скільки годин тривала подорож черепахи, якщо швидкість течії 1 км/год? Складіть вираз.

А	Б	В	Г
$\frac{s}{v+1} + \frac{s}{v-1}$	$\frac{s}{v+1} - \frac{s}{v-1}$	$\frac{2s}{v+1}$	$\frac{2s}{v-1}$

6 До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Г).

1	$\frac{x-3}{x+3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\right)$	А	$\frac{1}{3x(x+3)}$
2	$\left(x^2-9\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right)$	Б	$\frac{x-3}{3x}$
3	$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right) : \left(x^2-9\right)$	В	$\frac{3x}{x-3}$
		Г	$3x(x+3)$

7 Спростіть вираз $\frac{1}{1 - \frac{9}{a}}$ та знайдіть його значення, якщо $a = 8{,}9$.

8 Доведіть тотожність $\left(\frac{a}{2a+8} - \frac{5}{a+4}\right) \cdot \frac{4}{a-10} = \frac{2}{a+4}$.

Видавництво «Ранок»

Завдання 6.19–6.23 → Приклад 1
Завдання 6.24 → Приклад 2
Завдання 6.25 → Приклад 3
Завдання 6.26 → Приклад 4
Завдання 6.27 → Практикум, 6.1
Завдання 6.28 → Практикум, 6.2
Завдання 6.29 → Практикум, 6.3
Завдання 6.30 → Практикум, 6.4
Завдання 6.31 → Практикум, 6.5
Завдання 6.32 → Практикум, 6.6
Завдання 6.33 → Практикум, 6.7
Завдання 6.34 → Практикум, 6.8
Завдання 6.35 → Практикум, 6.9
Завдання 6.36 → Практикум, 6.10
Завдання 6.37 → Практикум, 6.11
Завдання 6.38 → Практикум, 6.12
Завдання 6.39 → Інтелектуальний фітнес, 6.14
Завдання 6.40 → Math for life, 6.17
Завдання 6.41 → Math for life, 6.18
Завдання 6.42 → Інтелектуальний фітнес, 6.15

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

6.19 Визначте порядок виконання дій. Спростіть вираз.

1) $\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x}{10}$; 3) $\left(\frac{x}{y}+\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{y^2}{x^2+3y}$; 5) $\left(\frac{a}{c^2}-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{5ac}{a+c}$;

2) $\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{6y}\right)\cdot\frac{y}{5}$; 4) $\left(\frac{a}{b}-\frac{6}{a}\right)\cdot\frac{a^4}{a^2-6b}$; 6) $\left(\frac{1}{k}-\frac{k}{m^2}\right)\cdot\frac{7km}{m-k}$.

6.20 Визначте порядок виконання дій. Спростіть вираз.

1) $\left(\frac{1}{a-5}-\frac{1}{a+5}\right)\cdot\frac{a^2-25}{2}$; 2) $\left(\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a-3}\right):\frac{6}{(a+3)^2}$.

6.21 Визначте порядок виконання дій. Спростіть вираз.

1) $\left(1+\frac{1}{9b}\right):\frac{1}{3b}$; 2) $\left(2-\frac{b-2}{3b}\right):\frac{6}{b}$; 3) $\left(1-\frac{k+m}{k-m}\right):\frac{2}{m-k}$.

6.22 Визначте порядок виконання дій. Спростіть вираз.

1) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{7}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{7}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{12}\right)$.

6.23 Визначте порядок виконання дій. Спростіть вираз.

1) $\frac{2}{x}+\frac{4}{x+7}:\frac{x}{x+7}-\frac{6}{x+1}$; 2) $\frac{1}{x}+\frac{8}{y}-\frac{x+3y}{5x}:\frac{x+3y}{5}$.

6.24 Спростіть вираз, скориставшися формулами скороченого множення.

1) $\left(8a+\frac{1}{a}\right)^2-\left(8a-\frac{1}{a}\right)^2$; 2) $\frac{a^2+10a+25}{a+5}-\frac{a^2-10a+25}{a-5}$.

6.25 Спростіть раціональний вираз, застосувавши розподільну властивість множення.

1) $\left(\frac{2}{x+8}-\frac{2}{x-8}\right)(x+8)(x-8)$; 2) $\left(\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x+3}\right)\left(x^2-9\right)$.

6.26 Спростіть раціональний вираз.

1) $1-\frac{1}{\frac{1}{c}}$; 2) $\frac{1}{1-\frac{2}{y}}$; 3) $\frac{1-\frac{25}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}$; 4) $\frac{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}}{\frac{4x}{y}+4+\frac{y}{x}}$.

6.27 Виконайте дії:

1) $\frac{16}{5x^2}:\frac{4}{x}\cdot\frac{5x}{4}$; 2) $\frac{35}{xy^2}:\frac{5}{x^2}:\frac{14}{y^2}$; 3) $\frac{y^5}{5x^2}\cdot\frac{7x^3}{y}:\left(2{,}8x^2y^3\right)$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$;
$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$;
$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо одиницю поділити на дріб, то отримаємо дріб, обернений до заданого:

$1:\frac{a}{b}=1\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$

Видавництво «Ранок»

6.28 Визначте порядок виконання дій. Спростіть вираз.

1) $\frac{x}{4}+\frac{16-x^2}{16}\cdot\frac{4}{x+4}$; 2) $\frac{9x-5}{x^2-25}+\frac{15}{x^2-25}:\frac{15}{x+5}+\frac{x}{x+5}$.

6.29 Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $a-\frac{a^2-8a}{a+8}\cdot\frac{a}{a-8}$; 2) $\frac{a+2}{a-3}\cdot(a+1)-\frac{2a+2}{a-3}$.

6.30 Визначте порядок виконання дій. Спростіть вираз.

1) $\frac{a+5}{5}\cdot\left(\frac{a}{a+5}-\frac{a-5}{a}\right)$; 2) $\left(\frac{a^2+36}{a^2-36}-\frac{a-6}{a+6}\right):\frac{6a}{a+6}$.

6.31 Спростіть вираз.

1) $\left(y^2-64\right):\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{8}\right)$; 2) $\left(\frac{y}{6}+\frac{6}{y}-2\right):(y-6)$.

6.32 Спростіть вираз і знайдіть його значення.

1) $\left(\frac{2}{m-2}-\frac{2}{m+2}\right)\cdot\frac{m^2+4m+4}{8}$, якщо $m=2{,}1$;

2) $\left(\frac{5m+1}{5m-1}-\frac{5m-1}{5m+1}\right):\frac{15m}{10m-2}$, якщо $m=\frac{1}{3}$.

6.33 Визначте порядок виконання дій. Спростіть вираз.

1) $\left(\frac{64}{x}-x\right)\cdot\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x-8}\right)$; 2) $\left(\frac{4}{x+1}-\frac{4}{x-1}\right):\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)$.

6.34 Виконайте піднесення виразу до квадрата:

1) $\left(\frac{1}{a}-a\right)^2$; 2) $\left(\frac{2}{a}+\frac{a}{2}\right)^2$; 3) $\left(\frac{a^2}{3}-\frac{3}{a^2}\right)^2$; 4) $\left(b+\frac{4}{b}\right)^2-8$.

6.35 Спростіть вираз, скориставшися формулою різниці квадратів.

1) $\left(b-\frac{5}{b}\right)^2-\left(b+\frac{5}{b}\right)^2$; 2) $\left(b+\frac{11}{b}\right)^2-\left(b-\frac{11}{b}\right)^2$.

6.36 Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\frac{x}{2}+1}{1+\frac{2}{x}}$; 2) $\dfrac{\frac{3}{x}-10}{\frac{3}{10}-x}$; 3) $\dfrac{\frac{x}{4}-\frac{4}{x}}{\frac{x}{4}+\frac{4}{x}}$; 4) $\dfrac{\frac{x}{5y}+\frac{5y}{x}-\frac{1}{5xy}}{\frac{x}{5y}-\frac{5y}{x}+\frac{1}{5xy}}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Площу повної поверхні та об'єм циліндричної банки обчислюють за формулами: $S=2\pi r^2+2\pi rh$ та $V=\pi r^2h$, де r — радіус, h — висота.

Виконайте завдання.

1. Підставте вирази для S і V у формулу коефіцієнта ефективності банки $k=\frac{S}{V}$ і спростить одержаний вираз.
2. Виміряйте розміри трьох будь-яких банок.
3. Обчисліть коефіцієнт ефективності кожної банки.
4. Назвіть банку з найменшим коефіцієнтом ефективності.

Зауважимо: чим менше матеріалів іде на виготовлення банки (S) і чим більший об'єм продукції (V) міститься в банці, тим кращим є коефіцієнт ефективності.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Із жерстяних банок, картону й парафіну волонтери виготовляють окопні свічки для військових. Їх використовують для приготування їжі, опалення невеликих приміщень і просто щоб погріти руки

Видавництво «Ранок»

 # BE SMART

Існує безліч математичних і фізичних об'єктів (числа, теореми, рівняння, функції, тотожності тощо), названих на честь Леонарда Ейлера. Є жартівливе правило: «У математиці заведено називати відкриття ім'ям другої людини, яка його зробила — інакше довелося б усе називати ім'ям Ейлера» 🤣

Спробуйте довести одну з тотожностей Ейлера:

$$a^3+b^3+\left(\frac{b\left(2a^3+b^3\right)}{a^3-b^3}\right)^3=\left(\frac{a\left(a^3+2b^3\right)}{a^3-b^3}\right)^3.$$

Продовжте стратегію доведення:

1) Підносимо дріб до степеня.
2) Групуємо доданки.
3) Зводимо до спільного знаменника.
4) Виносимо спільний множник за дужки.
5) Застосовуємо формули куба суми.
6) Зводимо подібні доданки.
...

6.37 Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{a}{4a+8}+\frac{6}{a+2}\right):\frac{a+24}{4}=\frac{1}{a+2}$;

2) $\frac{\frac{1}{2x}-\frac{3}{y}}{\frac{1}{2x}+\frac{3}{y}}\cdot\frac{6x+y}{y-6x}=1.$

6.38 Доведіть, що значення виразу $\left(\frac{a+2}{a^2-2a}-\frac{a-2}{a^2+2a}\right):\frac{10}{a^2-4}$ не залежить від значення змінної.

6.39 Знайдіть значення виразу:

1) $y^2+\frac{1}{y^2}$, якщо $y-\frac{1}{y}=6$; 3) $9a^2+\frac{1}{9a^2}$, якщо $3a-\frac{1}{3a}=-1$;

2) $x^2+\frac{1}{x^2}$, якщо $x+\frac{1}{x}=8$; 4) $49b^2+\frac{81}{b^2}$, якщо $7b+\frac{9}{b}=-10$.

6.40 **Подорожі Україною.** Група велосипедистів і велосипедисток вирушила в подорож із Києва до Чернігова. Першу третину шляху група проїхала зі швидкістю 18 км/год, другу третину — зі швидкістю 12 км/год, а останню третину — 9 км/год. Якою була середня швидкість руху групи протягом усього шляху?

Позначимо весь шлях як $3s$ км.

Частина шляху	I третина (s км)	II третина (s км)	III третина (s км)
Час подолання частини шляху	$t_1=\frac{s}{18}$	$t_2=\frac{s}{\square}$	$t_3=\frac{s}{\square}$
Загальний час подорожі	$t_1+t_2+t_3=\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}$		
Середня швидкість руху	$v_{сер}=\frac{\text{загальний шлях}}{\text{загальний час}}$		

Кількість упаковок корму			
На 1 день	$\frac{1}{12}$	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$
Разом на 1 день	$\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}$		
Разом на 30 днів	$30\cdot\left(\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}\right)$		

6.41 **Догляд за тваринами.** У Злати й Тимофія є три собаки, які споживають однаковий сухий корм. Перший собака з'їдає один пакет корму за 12 днів, другий — такий пакет корму за 15 днів, а третій — за 20 днів. Скільки пакетів корму треба купити Златі й Тимофію, щоб трьом собакам вистачило їжі на 30 днів?

Бонусне завдання

6.42 Побудуйте графік функції:

1) $y=1:\frac{1}{x-1}-2$; 2) $y=1:\frac{1}{x+1}+3$; 3) $y=3-1:\frac{1}{x-2}$.

Видавництво «Ранок»

§7 РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РІВНОСИЛЬНІ РІВНЯННЯ

УЧОРА Ви розв'язували лінійні рівняння на основі властивостей рівнянь, виконували тотожні перетворення раціональних виразів

СЬОГОДНІ Ви дізнаєтесь, які рівняння називають рівносильними; навчитеся розв'язувати раціональні рівняння різними способами й вилучати сторонні корені

ЗАВЖДИ Ви зможете знаходити оптимальні фінансові рішення та розраховувати час для виконання сумісної роботи

mk.com.ua/107819

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

СТВОРЮЄМО МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ

1 Щомісячна оплата за користування сервісом для завантаження пісень становить 100 г. о., а ціна кожної пісні — 20 г. о. Скільки пісень треба завантажити за місяць, щоб витрати на одну пісню дорівнювали 30 г. о.?

Кількість пісень	Вартість завантаження (г.о.)	Загальна вартість (г.о.)	Вартість за одну пісню (г.о.)	Рівняння
x	$20x$	$20x+100$	$\frac{20x+100}{x}$	$\frac{20x+100}{x}=30$

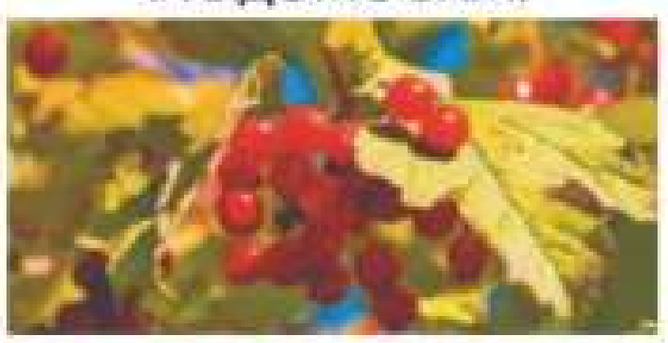
2 Велосипедист долає 30 км за той самий час, за який велосипедистка долає 24 км. Швидкість велосипедистки на 3 км/год менша, ніж велосипедиста. Знайдіть швидкості спортсмена і спортсменки.

Велосипедист		Велосипедистка		Рівняння
Швидкість (км/год)	Час (год)	Швидкість (км/год)	Час (год)	
y	$\frac{30}{y}$	$y-3$	$\frac{24}{y-3}$	$\frac{30}{y}=\frac{24}{y-3}$

3 Софія і Ярослав вирішили пофарбувати бабусин паркан. Самостійно Софія може пофарбувати весь паркан за 2 год, а Ярослав — за 3 год. За який час вони можуть виконати всю роботу разом?

Обсяг роботи	Час (год) на спільну роботу	Час (год) виконання поодинці		Продуктивність виконання поодинці		Рівняння
		Софія	Ярослав	Софія	Ярослав	
1	x	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{x}$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



«Ой у лузі червона калина» — пісня українських січових стрільців. Її написав С. Чарнецький. У 1914 р. січовий стрілець Г. Трух дописав до першої строфи пісні ще три. Так народився патріотичний гімн «Червона калина».

У 2022 р. культовий гурт Pink Floyd створив на цю пісню кавер «Hey, Hey, Rise Up!». Кошти, які приніс кавер, були передані українським медичним та волонтерським організаціям.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Ми отримали математичні моделі задач у вигляді рівнянь, у яких одна або обидві частини є раціональними виразами. У цьому параграфі ви навчитеся розв'язувати раціональні рівняння.

Видавництво «Ранок»

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- раціональні рівняння (rational equations)
- рівносильні рівняння (equivalent equations)
- сторонні розв'язки (extraneous solutions)

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Для розв'язування рівнянь використовують **властивості рівнянь,** відомі вам із курсу алгебри 7 класу.

- Якщо до обох частин рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке має *такі самі корені, що й дане.*
- Якщо перенести доданок з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке має *такі самі корені, що й дане.*
- Якщо обидві частини рівняння помножити (або поділити) на одне й те саме **відмінне від нуля число**, то отримаємо рівняння, яке має *такі самі корені, що й дане.*

У результаті виконання цих перетворень ми отримаємо рівняння, **рівносильні даному**.

Два рівняння називають рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені.

Рівносильними вважають і ті рівняння, які не мають коренів.

Наприклад:

Рівняння	1) $x-5=0$	2) $3x=15$	3) $(y+7)(y-7)=0$	4) $y(y-7)=0$	5) $b^2+1=0$	6) $2b+1=2b-9$
Корені рівняння	$x=5$	$x=5$	$y=-7$ $y=7$	$y=0$ $y=7$	Коренів немає	Коренів немає
Висновки	Корені однакові — рівняння рівносильні		Корені різні — рівняння не є рівносильними		Коренів немає — рівняння рівносильні	

РОЗМИНКА 1

Назвіть пари рівносильних рівнянь:

1) $4x=16$ і $2x-8=0$;
2) $y+2=0$ і $y(y+2)=0$;
3) $(a-7)(a+7)=0$ і $a^2=49$;
4) $b^2=-9$ і $9b-1=2+9b$.

Рівняння називають раціональним, якщо його ліва і права частини є раціональними виразами.

Усі раціональні рівняння поділяють на цілі та дробові.

Ціле раціональне рівняння — рівняння, ліва і права частина якого є цілими раціональними виразами.

Наприклад: $5x=\frac{1}{10}$;

$3y+\frac{1}{6}=0$; $\frac{3a+7}{4}=7a-\frac{2}{5}$.

Рівняння називається дробово-раціональним, якщо хоча б одна з його частин є дробовим раціональним виразом.

Наприклад: $\frac{1}{x}=5$;

$\frac{1}{3}y=\frac{2}{y}$; $\frac{a-3}{a+2}=\frac{a+7}{a-3}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Цілий вираз — вираз, що не містить дію ділення на вираз зі змінною.

Дробовий вираз — вираз, що містить дію ділення на вираз зі змінною

Видавництво «Ранок»

РОЗМИНКА 2

1 Назвіть цілі та дробові раціональні рівняння.

1) $\frac{3}{y}=4$; 3) $\frac{x-1}{2}=\frac{2x}{3}$; 5) $\frac{6}{b}-\frac{b}{6}=0$;

2) $\frac{y}{4}-7=0$; 4) $\frac{5-x}{x}=\frac{x}{2}$; 6) $\frac{7b^2}{8}=\frac{1}{4}$.

2 Перевірте, чи є число 3 коренем рівняння:

1) $\frac{x-3}{2}=0$; 3) $\frac{(y-3)(y+3)}{y+3}=0$;

2) $\frac{27}{b}+3=0$; 4) $\frac{a-3}{(a+3)(a-3)}=0$.

3 Знайдіть область допустимих значень змінної рівняння:

1) $\frac{2x+7}{x}=0$; 3) $\frac{a^2}{(a-4)(a+8)}=a$;

2) $\frac{y-5}{y+5}=2$; 4) $\frac{1}{b}+\frac{3b^2}{b-9}=1$.

4 За якого значення змінної дріб дорівнює нулю?

1) $\frac{x-1}{x}$; 3) $\frac{(a-9)(y+9)}{y+9}$;

2) $\frac{3y-18}{y-3}$; 4) $\frac{b^2+1}{b}$.

Для розв'язування раціональних рівнянь застосовують, зокрема, тотожні перетворення раціональних виразів. Отримане після перетворень рівняння може бути неріВносильним початковому рівнянню, тобто воно може мати сторонні корені, які не відповідають області допустимих значень (ОДЗ) змінної початкового рівняння.

! Оскільки одна або обидві частини дробово-раціонального рівняння містять дробові вирази, то під час розв'язування рівнянь отримані значення змінної слід перевіряти одним із двох способів:

- **знайти область допустимих значень** (ОДЗ) змінної рівняння та визначити, чи входять в ОДЗ отримані значення;
- **здійснити безпосередню підстановку** отриманих значень у початкове рівняння.

Розглянемо декілька *способів* розв'язування дробово-раціональних рівнянь.

Один із найпоширеніших способів — це застосування **умови рівності дробу нулю.**

ПРИГАДАЙТЕ!

- Розв'язком рівняння (коренем рівняння) називають **значення змінної**, яке перетворює рівняння в правильну числову рівність.
- Розв'язати рівняння — означає знайти **всі його розв'язки** або довести, що **їх немає.**

ПРИГАДАЙТЕ!

Раціональний дріб $\frac{M(x)}{N(x)}$ **дорівнює нулю**, якщо чисельник дробу дорівнює нулю $(M(x)=0)$, а знаменник не дорівнює нулю $(N(x)\neq 0)$.

! **СЛІД ЗНАТИ!**

Корені, які не входять до області допустимих значень (ОДЗ) змінної початкового рівняння, називають сторонніми коренями.

ПРИГАДАЙТЕ!

Допустимими значеннями змінних, що входять до дробового виразу, є всі значення (числа), за яких знаменник виразу відмінний від нуля.

Видавництво «Ранок»

Алгоритм розв'язування дробово-раціонального рівняння з використанням умови рівності дробу нулю

1. Звести рівняння до вигляду $\frac{M(x)}{N(x)}=0$, де $M(x)$ і $N(x)$ — многочлени.

Спосіб 1.

Зведення рівняння до рівносильної системи.

2. Записати рівносильну систему

$$\frac{M(x)}{N(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} M(x)=0, \\ N(x)\neq 0. \end{cases}$$

3. Знайти ОДЗ початкового рівняння: $N(x)\neq 0$.
4. Розв'язати рівняння $M(x)=0$.
5. Проаналізувати, які розв'язки рівняння $M(x)=0$ задовольняють ОДЗ. Записати відповідь.

Спосіб 2.

Здійснення безпосередньої перевірки.

2. Розв'язати рівняння $M(x)=0$.
3. Виконати перевірку отриманих коренів, підставивши їх безпосередньо в початкове рівняння.
4. Вилучити сторонні корені (ті корені рівняння, для яких знаменник початкового рівняння дорівнює нулю). Записати відповідь.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Спосіб безпосередньої перевірки

Виконуючи перевірку, слід підставляти отримані значення змінної в **початкове рівняння** $\frac{x^2-9}{3x+9}=0$.

1) Якщо $x=-3$, маємо:

$$\frac{(-3)^2-9}{3\cdot(-3)+9}=0;$$

$\frac{0}{0}=0$ — неправильно,

тому $x=-3$ не є коренем рівняння;

2) Якщо $x=3$, маємо:

$$\frac{3^2-9}{3\cdot 3+9}=0;$$

$\frac{0}{18}=0$ — правильно,

тому $x=3$ є коренем рівняння

СЛІД ЗНАТИ!

Рівняння $\frac{M(x)}{N(x)}=0$ зводиться до рівносильної системи $\begin{cases} M(x)=0, \\ N(x)\neq 0. \end{cases}$

ПРИКЛАД 1

Скористайтесь **умовою рівності дробу нулю** та розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-9}{3x+9}=0$.

Розв'язання

1) Записуємо умову рівності дробу нулю. $\frac{x^2-9}{3x+9}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9=0, \\ 3x+9\neq 0 \end{cases}$

2) Знаходимо ОДЗ змінної рівняння $3x+9\neq 0$; $3x\neq -9$; $x\neq -3$

3) Розв'язуємо рівняння системи. $x^2-9=0$;

Знаходимо значення змінної, які *можуть* бути коренями рівняння. $(x-3)(x+3)=0$;

$x-3=0$ або $x+3=0$,

$x=3$ або $x=-3$

4) Аналізуємо, які з отриманих значень змінної задовольняють ОДЗ. $\begin{cases} x=3 \text{ або } x=-3, \\ x\neq -3; \end{cases}$

$x=-3$ — не задовольняє ОДЗ,

$x=3$ — задовольняє ОДЗ, отже, є коренем рівняння

Відповідь: 3.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-9}{x+2}=0$; 3) $\frac{2x+6}{x+11}=0$; 5) $\frac{x^2-25}{x-5}=0$; 7) $\frac{16-x^2}{5x+20}=0$;

2) $\frac{x-8}{x+1}=0$; 4) $\frac{4x+8}{x+13}=0$; 6) $\frac{x^2-36}{x+6}=0$; 8) $\frac{64-x^2}{2x-16}=0$.

Видавництво «Ранок»

ДОСЛІДЖУЄМО

Проаналізуйте розв'язання дробово-раціональних рівнянь 1–4. Дайте відповіді на запитання.

- Скільки коренів мають ці рівняння?
- Скільки коренів може мати раціональне рівняння?

1) $\frac{x^2-1}{x}=0$	2) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$	3) $\frac{x+1}{x^2-1}=0$	4) $\frac{x^2-x^2}{x+1}=0$
$\begin{cases}(x-1)(x+1)=0,\\ x\neq 0;\end{cases}$	$\begin{cases}(x-1)(x+1)=0,\\ x+1\neq 0;\end{cases}$	$\begin{cases}x+1=0,\\ x^2-1\neq 0;\end{cases}$	$\begin{cases}x^2-x^2=0,\\ x+1\neq 0;\end{cases}$
$\begin{cases}x=-1 \text{ або } x=1\\ x\neq 0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=-1 \text{ або } x=1\\ x\neq -1.\end{cases}$	$\begin{cases}x=-1,\\ x\neq -1,\ x\neq 1.\end{cases}$	$\begin{cases}x \text{ — будь-яке число},\\ x\neq -1.\end{cases}$

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5}{x+2}-\frac{4}{x}=0$; 2) $\frac{2}{3-x}=\frac{4}{x-3}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Якщо $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $a\cdot d=b\cdot c$.

Розв'язання

Рівняння	1) $\frac{5}{x+2}-\frac{4}{x}=0$	2) $\frac{2}{3-x}=\frac{4}{x-3}$
Знаходимо ОДЗ рівняння	$x+2\neq 0$ і $x\neq 0$; $x\neq -2$ і $x\neq 0$	$3-x\neq 0$ і $x-3\neq 0$; $x\neq 3$
Зводимо рівняння до вигляду: $\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{C(x)}{D(x)}$	$\frac{5}{x+2}=\frac{4}{x}$	$\frac{2}{3-x}=\frac{4}{x-3}$
Застосовуємо **основну властивість пропорції**	$5x=4(x+2)$	$2(x-3)=4(3-x)$
Розв'язуємо ціле рівняння	$5x=4x+8;\ x=8$	$2x-6=12-4x;\ x=3$
Вилучаємо корені, які не задовольняють ОДЗ	$x=8$ Задовольняє ОДЗ	$x=3$ Не задовольняє ОДЗ

Відповідь: 1) 8; 2) коренів немає.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x-1}=\frac{x+2}{x}$; 4) $\frac{x}{x-1}=\frac{7x+6}{7x}$; 7) $\frac{x+3}{2-x}=\frac{6x-4}{1-6x}$;

2) $\frac{x-2}{x}=\frac{x}{x+3}$; 5) $\frac{x-9}{x-3}=\frac{x-2}{x+3}$; 8) $\frac{x+1}{2-x}=\frac{5x-3}{2-5x}$.

3) $\frac{6x-5}{x}=\frac{6x}{x+1}$; 6) $\frac{x-7}{x+6}=\frac{x-8}{x+4}$;

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо розв'язувати рівняння без визначення ОДЗ змінної, **обов'язково** треба виконати перевірку безпосередньою підстановкою отриманих значень у початкове рівняння.

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x+2}=\frac{x^2+4}{x^2-4}$ способом **множення обох частин рівняння на спільний знаменник.**

Розв'язання

Розкладаємо знаменник правої частини рівняння на множники.	$\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x+2}=\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}$
Знаходимо ОДЗ змінної рівняння.	$x-2\neq 0$ і $x+2\neq 0$ $x\neq 2$ і $x\neq -2$
Знаходимо спільний знаменник дробів.	$(x-2)(x+2)$
Множимо обидві частини рівняння на спільний знаменник.	$\frac{x^{\backslash(x+2)}}{x-2}+\frac{3^{\backslash(x-2)}}{x+2}=\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}\ \Big\vert\ \cdot(x-2)(x+2)$
Розв'язуємо рівняння: • розкриваємо дужки; • зводимо подібні доданки.	$x(x+2)+3(x-2)=x^2+4;$ $x^2+2x+3x-6=x^2+4;$ $5x=10;\ x=2$
Вилучаємо корені, які не входять до ОДЗ.	Корінь $x=2$ не задовольняє ОДЗ

Відповідь: коренів немає.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Найчастіше розв'язування дробово-раціональних рівнянь починають зі **знаходження ОДЗ.**

Проте в кожному конкретному випадку вибір одного з наведених способів перевірки залишається за вами. Вибирайте той спосіб, який полегшить розв'язування.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{x+3}+2=\frac{x}{x+3}$;
2) $\frac{1}{x+4}+2=\frac{x}{x+4}$;
3) $\frac{3}{x-5}-1=\frac{9-x}{x-5}$;
4) $\frac{1}{x-6}-2=\frac{3-2x}{x-6}$;
5) $\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x+3}=\frac{10x^2}{x^2-9}$;
6) $\frac{x}{x-4}-\frac{4}{x+4}=\frac{17x^2}{x^2-16}$;
7) $\frac{4}{x-1}-\frac{4}{x+5}=\frac{x^2-1}{(x-1)(x+5)}$;
8) $\frac{5}{x-3}-\frac{5}{x+2}=\frac{x^2+16}{(x-3)(x+2)}$.

ПРАКТИКУМ

7.1 Укажіть дробово-раціональні рівняння й визначте область допустимих значень змінних, що входять у ці рівняння.

1) $\frac{x+4}{x}=\frac{1}{3}$; 2) $\frac{x-3}{5}=\frac{x-1}{2}$; 3) $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x}{2}=0$; 4) $\frac{5x}{10}-\frac{x}{3}=0$.

7.2 Визначте, які із чисел: 0; 1; −1 — є коренями рівняння:

1) $\frac{x+1}{x}=\frac{x+1}{2x}$; 2) $\frac{5x}{x+6}=\frac{x}{x+7}$; 3) $\frac{3x+6}{9x}-\frac{x+1}{2}=0$.

Видавництво «Ранок»

7.3 Скористайтеся умовою рівності дробу нулю і розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{(x-9)(x+8)}{x+8}=0$; 3) $\frac{(x-1)(x+11)}{11x-11}=0$; 5) $\frac{x^2-16}{2x-8}=0$;

2) $\frac{(x+5)(x-6)}{x-6}=0$; 4) $\frac{(x+1)(x-13)}{13x+13}=0$; 6) $\frac{x^2-36}{3x+18}=0$.

7.4 Скористайтеся формулами скороченого множення і розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-2x+1}{12}=0$; 3) $\frac{x^2+10x+25}{x+25}=0$; 5) $\frac{4x^2-12x+9}{2x-3}=0$;

2) $\frac{x^2+4x+4}{14}=0$; 4) $\frac{x^2-12x+36}{x-36}=0$; 6) $\frac{9x^2+24x+16}{3x+4}=0$.

7.5 Визначте кількість коренів рівняння:

1) $\frac{x^2-4}{2x}=0$; 2) $\frac{x^2-4}{x-2}=0$; 3) $\frac{x-2}{x^2-4}=0$; 4) $\frac{x^2-x^2}{x-2}=0$.

7.6 Розв'яжіть рівняння, застосувавши основну властивість пропорції:

1) $\frac{4x^2-4}{3x}=x$; 3) $\frac{6x^2-9}{3x+1}=2x$; 5) $\frac{x^2+16}{x-4}=x+4$;

2) $\frac{8x^2-9}{7x}=x$; 4) $\frac{8x^2-7}{4x-1}=2x$; 6) $\frac{x^2+4}{x+2}=x-2$.

7.7 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x+12}=\frac{1}{3}$; 3) $\frac{x-1}{x+4}=\frac{x+4}{x-1}$; 5) $\frac{x-6}{x-1}=\frac{x+1}{x+6}$;

2) $\frac{x}{x+28}=\frac{1}{5}$; 4) $\frac{x+1}{x-5}=\frac{x-5}{x+1}$; 6) $\frac{x-2}{x-5}=\frac{x+5}{x+2}$.

7.8 Знайдіть кількість коренів рівняння:

1) $\frac{x+12}{3x}=1$; 3) $\frac{6x-18}{6-2x}=-3$; 5) $\frac{6x^2+6}{x^2+1}=6$;

2) $\frac{x+27}{4x}=1$; 4) $\frac{6x-24}{12-3x}=-2$; 6) $\frac{7x^2+14}{x^2+2}=7$.

7.9 Розв'яжіть рівняння, скориставшись умовою рівності двох дробів:

1) $\frac{5x}{x-8}=\frac{35}{x-8}$; 3) $\frac{5x-4}{x+5}=\frac{3x+8}{5+x}$; 5) $\frac{x-11}{x-1}=\frac{x-12}{1-x}$;

2) $\frac{7x}{x-9}=\frac{56}{x-9}$; 4) $\frac{9x-5}{x+6}=\frac{7x+11}{6+x}$; 6) $\frac{x-9}{x-2}=\frac{x-18}{2-x}$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $\frac{x-5}{x+5}=0$;

$\begin{cases}x-5=0,\\x+5=0;\end{cases}$

$\begin{cases}x=5,\\x=-5.\end{cases}$

Відповідь: -5; 5.

2) $\frac{2y^2-8}{y^2+2y}=0$;

ОДЗ: $y^2+2y\neq 0$;

$y(y+2)\neq 0$;

$y\neq 0$ або $y\neq -2$.

$2y^2-8=0$;

$2(y-2)(y+2)=0$;

$y=-2$ або $y=2$.

Відповідь: -2; 2.

Стратегія (7.6–7.8)

1) Зводимо рівняння до вигляду $\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{C(x)}{D(x)}$.

2) Знаходимо ОДЗ змінної рівняння: $B(x)\neq 0$; $D(x)\neq 0$.

3) Застосовуємо **основну властивість пропорції**: $A(x)\cdot D(x)=B(x)\cdot C(x)$

4) Розв'язуємо одержане рівняння.

5) Вилучаємо **сторонні корені** — які не задовольняють ОДЗ. Записуємо відповідь.

Видавництво «Ранок»

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

До рівняння $x - 3 = 0$ складіть і запишіть два рівносильних рівняння та два рівняння, що не є рівносильними до нього. Обміняйтеся записами й перевірте результати одне одного.

СЛІД ЗНАТИ!

1. Знайдіть ОДЗ змінних рівняння.
2. Відніміть від обох частин рівняння один і той самий вираз.
3. Розв'яжіть рівняння.
4. Вилучіть сторонні корені, якщо потрібно.

Стратегія (7.14–7.16)

1) Знаходимо ОДЗ змінної рівняння.

2) Знаходимо **спільний знаменник** дробів, що входять у рівняння.

3) Множимо обидві частини рівняння на **спільний знаменник**.

4) Розв'язуємо отримане рівняння.

5) Вилучаємо корені, які не задовольняють ОДЗ. Записуємо відповідь.

7.10 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2}{x-9}=\frac{81}{x-9}$; 3) $\frac{x^2-5}{x+4}=\frac{11}{x+4}$; 5) $\frac{x^2}{x-3}=\frac{-3x}{3-x}$;

2) $\frac{x^2}{x-8}=\frac{64}{x-8}$; 4) $\frac{x^2-9}{x+5}=\frac{16}{x+5}$; 6) $\frac{7x}{x-7}=\frac{-x^2}{7-x}$.

7.11 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{6x}{x-7}=\frac{42}{x-7}$; 3) $\frac{7x+1}{x+2}=\frac{4x-5}{x+2}$; 5) $\frac{x^2-x}{x-3}=\frac{5x-9}{x-3}$;

2) $\frac{5x}{x-8}=\frac{40}{x-8}$; 4) $\frac{8x+2}{x+1}=\frac{5x-1}{x+1}$; 6) $\frac{x^2-x}{x-4}=\frac{7x-16}{x-4}$.

7.12 Визначте, рівносильними чи не рівносильними є рівняння в кожній парі:

1) $\frac{8}{x+2}=\frac{x-1}{x+2}$ і $x+1=10$; 3) $x^2=49$ і $\frac{x^2}{x-7}=\frac{49}{x-7}$;

2) $\frac{x+4}{x-3}=\frac{9}{x-3}$ і $x-4=1$; 4) $x^2=36$ і $\frac{x^2}{x+6}=\frac{36}{x+6}$.

7.13 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3}{x-2}+6x=12+\frac{3}{x-2}$; 3) $\frac{7}{x+5}+x^2=25+\frac{7}{x+5}$;

2) $\frac{8}{x+6}-2x=12+\frac{8}{x+6}$; 4) $x^2-\frac{2}{x-7}=49-\frac{2}{x-7}$.

7.14 Розв'яжіть рівняння способом множення обох частин рівняння на спільний знаменник:

1) $\frac{1}{3x}+\frac{x}{x+1}=\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{x+3}+\frac{x}{x-3}=1$; 5) $\frac{5x}{x-2}+\frac{x+10}{x+2}=5$;

2) $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$; 4) $\frac{4}{x+1}+\frac{x}{x-1}=1$; 6) $\frac{2x}{x-4}+\frac{x+8}{x+4}=2$.

7.15 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x}{x+5}+\frac{10}{x^2-25}=2$; 3) $\frac{x}{x+2}-\frac{10}{x^2-4}=\frac{x-3}{x-2}$;

2) $\frac{3x}{x-4}+\frac{24}{x^2-16}=3$; 4) $\frac{x}{x+3}-\frac{4}{x^2-9}=\frac{x+1}{x-3}$.

7.16 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2}{x}-\frac{2}{x(x+1)}=\frac{x-3}{x+1}$; 3) $\frac{3}{x}+\frac{3x+27}{3x-x^2}=\frac{4x}{3-x}$;

2) $\frac{3}{x}-\frac{6}{x(x+2)}=\frac{2x-1}{x+2}$; 4) $\frac{2}{x}+\frac{2x+16}{2x-x^2}=\frac{5x}{2-x}$.

Видавництво «Ранок»

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

7.17 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{|x|-3}{x+3}=0$; 3) $\frac{|x-2|-5}{x-7}=0$; 5) $\frac{|2x-3|-11}{(x+4)(x-7)}=0$;

2) $\frac{|x|-4}{x-4}=0$; 4) $\frac{|x-1|-7}{x+6}=0$; 6) $\frac{|2x+1|-19}{(x+10)(x-9)}=0$.

7.18 Визначте всі значення a, за яких рівняння не має коренів.

Аналізуємо

1) $\frac{x-a+5}{x(x+3)}=0$.

Знаходимо ОДЗ: $x(x+3)\neq 0$; $x\neq 0$ або $x\neq -3$.

Підставляємо «заборонені» значення x у чисельник і розв'язуємо рівняння **відносно** a.

$x-a+5=0$

- Якщо $x=0$, то $0-a+5=0$; $a=5$.
- Якщо $x=-3$, то $-3-a+5=0$; $a=2$.

Відповідь: рівняння не має коренів, якщо $a=2$ і $a=5$.

Виконуємо

2) $\frac{x-3a}{x-18}=0$;

3) $\frac{x-2a}{x-10}=0$;

4) $\frac{x-a+4}{x(x+1)}=0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$|3x+2|-7=0$

$|3x+2|=7$

$3x+2=-7$ або $3x+2=7$

$x=-3$ або $x=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Складіть дробово-раціональні рівняння, які можна розв'язати за допомогою:

- умови рівності дробу нулю;
- основної властивості пропорції;
- множення обох частин рівняння на спільний множник.

Запишіть ОДЗ змінних для кожного рівняння.

Обміняйтеся записами. Перевірте результати одне одного.

MATH FOR LIFE

7.19 **Зустріч на фестивалі.** Юрко та Оленка домовились зустрітися в Палаці спорту на фестивалі з робототехніки. Юрко вийшов із дому й пішки вчасно дістався місця зустрічі. Оленка, яка живе на 600 м ближче до Палацу спорту, ніж Юрко, вийшла з дому на 12 хв пізніше за Юрка і теж прийшла вчасно. Юрко й Оленка рухалися з однаковою швидкістю. Відстань від будинку Юрка до Палацу спорту становить 1,8 км. Який час витратив Юрко на дорогу? З якою швидкістю рухалась Оленка?

	Юрко	Оленка
s (м)	1800	1800 – 600
t (хв)	x	$x-12$
v (м/хв)	$\frac{\square}{\square}$	$\frac{\square}{\square}$
	однакова	

7.20 **Виробництво байків.** Фіксовані витрати на виробництво байків (оренда приміщення й устаткування, заробітна плата співробітників тощо) становлять 56 000 г. о. на місяць. Змінні витрати (деталі, упаковка тощо) дорівнюють 140 г. о. на один байк. Скільки байків треба виготовити протягом місяця, щоб виробництво одного байка коштувало 180 г. о.?

7.21 **Продуктивність праці.** Микола, Петро й Вадим працюють на автомийці. Микола миє одну автівку за 40 хв, Петро — за x хв, а Вадим — за той же час, що й Микола. Якщо хлопці працюватимуть разом, то вони помиють автівку за 12 хв. За який час миє одну автівку Петро, працюючи самостійно?

	Час на миття 1 автівки (хв)	Продуктивність
Микола		
Петро		
Вадим		
Продуктивність спільної праці	$\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$	

Видавництво «Ранок»

Інший варіант роботи в електронному додатку

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Розв'яжіть рівняння $\frac{7}{x+2}=\frac{6}{x}$.

А	Б	В	Г
6	7	12	14

2 Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-5}{x-1}-\frac{3}{x-1}=0$.

А	Б	В	Г
4	1	−1	−4

3 Скільки коренів має рівняння $\frac{x^2-9}{5x-15}=0$?

А	Б	В	Г
Жодного	Один	Два	Три

4 Розв'яжіть рівняння $\frac{5x-6}{x}=4$.

А	Б	В	Г
−3	3	−6	6

5 Перший плавець, рухаючись зі швидкістю x м/с, долає 60 м за той самий час, за який другий плавець долає 20 м, рухаючись зі швидкістю, на 1 м/с меншою. Запишіть рівняння за умовою задачі.

А	Б	В	Г
$\frac{60}{x+1}=\frac{20}{x}$	$\frac{60}{x}=\frac{20}{x+1}$	$\frac{60}{x-1}=\frac{20}{x}$	$\frac{60}{x}=\frac{20}{x-1}$

6 Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та рівносильним йому рівнянням (А–Г).

1	$\frac{x(x-6)}{x}=0$	А	$x-6=x+6$
		Б	$(x-6)(x+6)=0$
2	$\frac{x^2-6x}{6}=0$	В	$x-6=0$
3	$x^2+36=0$	Г	$x(x-6)=0$

7 Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{x^2+9}{x^2-9}$.

8 Учень і учениця можуть прибрати клас за 6 хв, працюючи разом. За скільки хвилин вони можуть зробити це поодинці, якщо учениця прибирає клас удвічі швидше за учня?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

7.22 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-7}{x+3}=0$;
2) $\frac{3x+6}{x+15}=0$;
3) $\frac{x^2-49}{x-7}=0$;
4) $\frac{25-x^2}{6x+30}=0$.

7.23 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-2}{x}=\frac{x}{x+1}$;
2) $\frac{5x}{x-1}=\frac{5x+4}{x}$;
3) $\frac{x-5}{x+5}=\frac{x-7}{x+2}$;
4) $\frac{x+1}{2-x}=\frac{4x-1}{3-4x}$.

Завдання 7.22	→ Приклад 1
Завдання 7.23	→ Приклад 2
Завдання 7.24	→ Приклад 3
Завдання 7.25–7.38	→ Практикум, 7.3–7.16
Завдання 7.39	→ Math for life, 7.20
Завдання 7.40–7.41	→ Math for life, 7.19
Завдання 7.42	→ Math for life, 7.21
Завдання 7.43–7.44	→ Інтелектуальний фітнес, 7.17–7.18

Видавництво «Ранок»

7.24 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{x+5}+2=\frac{x}{x+5}$; 3) $\frac{x}{x-5}-\frac{5}{x+5}=\frac{26x^2}{x^2-25}$;

2) $\frac{5}{x-4}-1=\frac{2-x}{x-4}$; 4) $\frac{4}{x-3}-\frac{4}{x+1}=\frac{x^2+7}{(x-3)(x+1)}$.

7.25 Скористайтеся умовою рівності дробу нулю і розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{(x-7)(x+2)}{x+2}=0$; 2) $\frac{(x-1)(x-14)}{14x-14}=0$; 3) $\frac{x^2-25}{2x-10}=0$.

7.26 Скористайтеся формулами скороченого множення і розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2+2x+1}{16}=0$; 2) $\frac{x^2-10x+25}{x-25}=0$; 3) $\frac{9x^2+12x+4}{3x+2}=0$.

7.27 Визначте кількість коренів рівняння:

1) $\frac{x^2-9}{3x}=0$; 2) $\frac{x^2-9}{x+3}=0$; 3) $\frac{x+3}{x^2-9}=0$; 4) $\frac{x^2-x^2}{x+3}=0$.

7.28 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{7x^2-64}{6x}=x$; 2) $\frac{12x^2-18}{3x-1}=4x$; 3) $\frac{x^2+36}{x-6}=x+6$.

7.29 Розв'яжіть рівняння, скориставшись основною властивістю пропорції:

1) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{x+1}{x-3}$; 2) $\frac{x-1}{x+3}=\frac{x+3}{x-1}$; 3) $\frac{x-4}{x-7}=\frac{x+7}{x+4}$.

7.30 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+60}{5x}=1$; 2) $\frac{10x-40}{8-2x}=-5$; 3) $\frac{8x^2+24}{x^2+3}=8$.

7.31 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{6x}{x-7}=\frac{30}{x-7}$; 2) $\frac{7x-4}{x+9}=\frac{5x+8}{9+x}$; 3) $\frac{x-7}{x-3}=\frac{x-16}{3-x}$.

7.32 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2}{x-7}=\frac{49}{x-7}$; 2) $\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{8}{x+3}$; 3) $\frac{5x}{x-5}=\frac{-x^2}{5-x}$.

7.33 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{7x}{x-9}=\frac{63}{x-9}$; 2) $\frac{8x+7}{x+3}=\frac{5x-2}{x+3}$; 3) $\frac{x^2-x}{x-2}=\frac{3x-4}{x-2}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

1. За допомогою сервісу Google maps прокладіть маршрути від школи до вашого будинку та до будинку вашого друга або подруги. Визначте довжини цих маршрутів (у км).
2. Ви долаєте свої маршрути за той самий час, однак рухаєтесь зі швидкостями, що відрізняються на 1 км/год. Запишіть рівняння, за яким можна знайти вашу швидкість (x км/год).
3. Знайдіть вашу швидкість і швидкість вашого друга або подруги.
4. Від яких величин (за умовою задачі) залежить, більшою чи меншою буде ваша швидкість порівняно зі швидкістю вашого друга або вашої подруги?

Заповніть таблицю.

	Ви	Друг / подруга
Відстань (км)		
Швидкість руху (км/год)		

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$$\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x+2}$$

Відповідь: -2; -1.

Чи можете Ви, не розв'язуючи рівняння, сказати, що корені рівняння знайдені неправильно?

Видавництво «Ранок»

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Перевірте перетворення й знайдіть помилку.

$$a=b \mid \cdot a$$
$$a^2=ab \mid -b^2$$
$$a^2-b^2=ab-b^2$$
$$(a+b)(a-b)=b(a-b) \mid :(a-b)$$
$$a+b=b$$

Оскільки $a=b$, то

$$b+b=b$$
$$2b=b$$
$$2=1$$

BE SMART

Щороку в третю суботу вересня проходить Всесвітній день прибирання «World Cleanup Day», участь у якому беруть понад 190 країн світу, зокрема Україна.

За даними Всеукраїнського молодіжного руху «Let's do it Ukraine», у Всесвітньому дні прибирання в Україні за 5 років взяла участь 1 082 501 людина. Було зібрано 4647 тонн сміття, з них 456,5 тонн пішло на вторинну переробку.

Цифрове прибирання — один зі способів долучитися до акції. Видалення зайвої інформації з гаджетів, хмарних сховищ, інтернет-ресурсів допоможе розвантажити центри баз даних, унаслідок чого буде зекономлена величезна кількість енергії та зменшиться кількість викидів CO_2 в атмосферу.

7.34 Визначте, рівносильними чи не рівносильними є рівняння в кожній парі:

1) $\frac{x-6}{x-1}=\frac{8}{x-1}$ і $x+6=20$; 2) $x^2=64$ і $\frac{x^2}{x+8}=\frac{64}{x+8}$.

7.35 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{6}{x+3}-7x=21+\frac{6}{x+3}$; 2) $x^2-\frac{9}{x+6}=36-\frac{9}{x+6}$.

7.36 Розв'яжіть рівняння способом множення обох частин рівняння на спільний знаменник:

1) $\frac{x}{x-3}-\frac{3}{4x}=\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{x+2}+\frac{x}{x-2}=1$; 3) $\frac{2x}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}=2$.

7.37 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x}{x+3}+\frac{24}{x^2-9}=4$; 2) $\frac{x}{x+1}-\frac{12}{x^2-1}=\frac{x+3}{x-1}$.

7.38 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2}{x}-\frac{6}{x(x+3)}=\frac{3x-1}{x+3}$; 2) $\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x-x^2}=\frac{2x}{1-x}$.

7.39 Завершіть ров'язання першої частини Актуальної задачі.

7.40 Завершіть ров'язання другої частини Актуальної задачі.

7.41 Пес Патрон пробігає 300 м за той же час, за який пес Фокстер долає 180 м. Швидкість Патрона на 4 м/с більша за швидкість Фокстера. Визначте середні швидкості бігу кожного собаки.

7.42 Учні й учениці 8 класів запланували взяти участь в екологічній акції «Побачив? Прибери!», локацією якої став парк біля школи. Діти 8-А класу можуть прибрати парк у два рази швидше, ніж діти 8-Б класу, а, працюючи разом, вони виконають цю роботу за 1 год. За скільки годин учні й учениці обох класів приберуть парк поодинці?

Бонусні завдання

7.43 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{|x|-2}{x+2}=0$; 2) $\frac{|x-1|-9}{x+8}=0$; 3) $\frac{|2x+3|-13}{(x+8)(x-5)}=0$.

7.44 Визначте всі значення a, за яких наведене рівняння не має коренів.

1) $\frac{x-2a}{x-14}=0$; 2) $\frac{x-a+6}{x(x+3)}=0$; 3) $\frac{x+2a-8}{x(x+4)}=0$.

Видавництво «Ранок»

ПІДСУМКОВА РОБОТА № 3

Інший варіант роботи в електронному додатку

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Виконайте множення: $\frac{18}{a^{15}} \cdot \frac{a^5}{6}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3a^3}$	$\frac{3}{a^3}$	$\frac{3}{a^{10}}$	$\frac{1}{3a^{10}}$

2 Виконайте дії: $\left(\frac{2}{y^3}\right)^2 : \frac{1}{y^6}$.

А	Б	В	Г
4	$\frac{1}{4}$	$4y$	$\frac{4}{y^{12}}$

3 Виконайте дії: $\frac{7x^2}{4} \cdot \frac{2}{x} : \frac{7x}{4}$.

А	Б	В	Г
2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$

4 Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-16}{x+4}=0$.

А	Б	В	Г
$x=\pm 4$	$x=-4$	$x=4$	Рівняння не має коренів

5 Спростіть вираз $\left(a+\frac{10}{a}\right)^2-\left(a-\frac{10}{a}\right)^2$, скориставшися формулою скороченого множення.

А	Б	В	Г
0	20	40	100

6 Перший компресор, працюючи з продуктивністю x л/хв, нагнітає 1500 літрів повітря за той самий час, за який другий компресор нагнітає 900 л. Продуктивність Другого компресора на 100 л/хв менша, ніж першого. Складіть рівняння за умовою задачі.

А	В
$\frac{900}{x}=\frac{1500}{x+100}$	$\frac{1500}{x}=\frac{900}{x+100}$
Б	**Г**
$\frac{900}{x}=\frac{1500}{x-100}$	$\frac{1500}{x}=\frac{900}{x-100}$

7 Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{x+3}=\frac{2x-11}{2x}$.

8 Доведіть тотожність $\left(1+\frac{m+12}{12-m}\right):\frac{4}{12-m}=6$, якщо $m \neq 12$.

9 Спростіть вираз $\left(\frac{7}{a-7}-\frac{7}{a+7}\right)\frac{a^2+14a+49}{14}$ та знайдіть його значення, якщо $a=8$.

10 Розв'яжіть рівняння $\frac{8}{x+2}+\frac{x}{x-2}=1$.

Бонусне завдання

Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{144}{x^2}$, якщо відомо, що $x-\frac{12}{x}=5$.

> «Можливо все. На неможливе просто потрібно більше часу.»
>
> Ден Браун

Видавництво «Ранок»

§8 СТЕПІНЬ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

УЧОРА Ви навчилися записувати степінь із натуральним показником, обчислювати значення степенів із натуральним показником

СЬОГОДНІ Ви дізнаєтеся, що таке степінь із цілим показником, навчитеся знаходити значення степеня з від'ємним цілим показником і записувати числа в стандартному вигляді

ЗАВЖДИ Ви зможете скорочувати записи дуже малих чисел, доречно застосовувати вислів «на порядок більший»

mk.com.ua/107821

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Часто доводиться чути вираз «на порядок більше» (an order of magnitude more). У математиці це означає «більше в 10 разів». Вираз «зменшитися на два порядки» означає «зменшитися у $10^2 = 100$ разів».

Поясніть твердження: «Якщо я опануюю алгебру, мої шанси вступити до університету збільшаться на два порядки».

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- цілий показник степеня (integer exponent)
- від'ємний показник степеня (negative exponent)
- нульовий показник степеня (zero exponent)
- стандартний вигляд числа (scientific notation)
- взаємно обернені числа (reciprocal numbers)

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ІНТЕНСИВНІСТЬ ЗВУКУ

Інтенсивність звуку вимірюється у ватах на квадратний метр. У таблиці наведені деякі значення інтенсивності звуку та запис відповідних чисел у вигляді степеня.

Звук	Інтенсивність (Вт/м²)	Степінь числа 10
Потяг на естакаді	1000	10^3
Жвавий вуличний рух	100	10^2
Радіо	10	10^1
Звичайна розмова	1	10^0
Пилотяг	$0,1 = \frac{1}{10^1}$	10^{-1}
Звичайний шум у будинку	$0,01 = \frac{1}{10^2}$	10^{-2}
Перегортання сторінок книги	$0,001 = \frac{1}{10^3}$	$10^{-\square}$
Шум спокійного саду	$0,0001 = \frac{1}{10^4}$	$10^{\square}$
Спокійне дихання	$0,000\,01 = \frac{1}{10^5}$	$\square^{\square}$

1) Установіть послідовність запису степенів числа 10 і завершіть заповнення таблиці.

2) За допомогою яких чисел (додатних чи від'ємних) записані показники степенів, що відповідають дробам?

3) Укажіть значення степеня 10^0.

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Степінь із цілим показником

У математиці, природничих і комп'ютерних науках дуже великі й дуже малі числа записують у **стандартному вигляді**, використовуючи **степінь із цілим показником**.

ДОСЛІДЖУЄМО

1) Проаналізуйте спрощення виразів $\frac{4^3}{4^5}$ і $\frac{7^4}{7^4}$ за допомогою властивості степеня й означення степеня та порівняйте результати.

2) Спростіть вирази $\frac{5^2}{5^4}$, $\frac{6^2}{6^3}$ і $\frac{9^4}{9^4}$ та перевірте, чи правильно зроблений висновок.

Вирази	1 спосіб (властивість степеня)	2 спосіб (означення степеня)	Результат
$\frac{4^3}{4^5}$	$\frac{4^3}{4^5}=4^{3-5}=4^{-2}$	$\frac{4^3}{4^5}=\frac{4\cdot4\cdot4}{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4}=\frac{1}{4^2}$	$4^{-2}=\frac{1}{4^2}$
$\frac{7^4}{7^4}$	$\frac{7^4}{7^4}=7^{4-4}=7^0$	$\frac{7^4}{7^4}=\frac{7\cdot7\cdot7\cdot7}{7\cdot7\cdot7\cdot7}=1$	$7^0=1$

Висновок.

Степінь із цілим від'ємним показником

Для будь-якого числа a, відмінного від нуля, і натурального числа n,

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\neq 0.$$

Наприклад:

$$5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125};$$

$$(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81};$$

$$(-7)^{-1}=\frac{1}{(-7)^1}=-\frac{1}{7}.$$

Степінь із нульовим показником

Для будь-якого числа a, відмінного від нуля,

$$a^0=1,\ a\neq 0.$$

0^0 — не має змісту!

Наприклад:

$$10^0=1;$$

$$(-9)^0=1;$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^0=1.$$

$$\left(-1\frac{2}{3}\right)^0=1.$$

Для будь-якого числа $a\neq 0$ та цілого n виконується рівність

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

ПРИГАДАЙТЕ!

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множників}}$$

a^n — степінь числа a;

a — основа степеня (будь-яке число або вираз);

n — показник степеня, натуральне число

Основа степеня — a — Показник степеня

Степінь числа a

СЛІД ЗНАТИ!

Степінь із **цілим показником** містить три види степеня

- Степінь із **натуральним** показником
- Степінь із **нульовим** показником
- Степінь із **цілим від'ємним** показником

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Читаємо правильно:

5^{-3} — «5 у мінус третьому степені»

$(-3)^{-4}$ — «мінус 3 у мінус четвертому степені»

$\left(\frac{3}{7}\right)^0$ — «$\frac{3}{7}$ у нульовому степені»

Видавництво «Ранок»

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Рівність $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, якщо $a\neq 0$, означає, що

a^{-n} і a^n — взаємно обернені числа, тобто $a^{-n}\cdot a^n=1$:

😂 · 😢 = 1

Отже, $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$:

😂 = $\frac{1}{😢}$

Застосовуємо формули

Якщо $a\neq 0$, то:

$$a^{-1}=\frac{1}{a};$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n};$$

$$b\cdot a^{-n}=\frac{b}{a^n};$$

$$-a^{-n}=-\frac{1}{a^n}.$$

Якщо $b\neq 0$, $x\neq 0$, то

$$\frac{a}{b}\cdot x^{-n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x^n}=\frac{a}{bx^n}$$

РОЗМИНКА 1

1 Знайдіть значення степеня:

1) 2^0; 2) $(-6)^0$; 3) 1^0; 4) $(-1)^0$; 5) 100^0; 6) $(-0{,}1)^0$.

2 Запишіть вирази у вигляді степеня з натуральним показником:

1) $9^{-5}=\frac{1}{9^5}$; 2) a^{-10}; 3) 7^{-1}; 4) b^{-1}; 5) $(-8)^{-2}$; 6) $(-c)^{-10}$.

3 Запишіть дроби у вигляді степеня з цілим від'ємним показником:

1) $\frac{1}{10^4}=10^{-4}$; 2) $\frac{1}{a^6}$; 3) $\frac{1}{10}$; 4) $\frac{1}{b}$; 5) $\frac{1}{(-4)^3}$; 6) $\frac{1}{(-c)^7}$.

4 Запишіть дроби у вигляді степеня з натуральним показником:

1) $\frac{1}{7^{-9}}=7^9$; 2) $\frac{1}{a^{-4}}$; 3) $\frac{1}{10^{-1}}$; 4) $\frac{1}{b^{-1}}$; 5) $\frac{1}{(-8)^{-5}}$; 6) $\frac{1}{(-c)^{-3}}$.

ПРИКЛАД 1

Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $(7a)^{-1}$; 2) $(-3b)^{-9}$; 3) $8c^{-5}$; 4) $-5d^{-1}$; 5) $\frac{1}{8}x^{-6}$; 6) $0{,}3y^{-2}$; 7) $4(c+7)^{-1}$; 8) $\frac{5}{9}(x-y)^{-2}$.

Розв'язання

1) $(7a)^{-1}=\frac{1}{(7a)^1}=\frac{1}{7a}$;

2) $(-3b)^{-9}=\frac{1}{(-3b)^9}$;

3) $8c^{-5}=8\cdot\frac{1}{c^5}=\frac{8}{c^5}$;

4) $-5d^{-1}=-5\cdot\frac{1}{d^1}=-\frac{5}{d}$;

5) $\frac{1}{8}x^{-6}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^6}=\frac{1}{8x^6}$;

6) $0{,}3y^{-2}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{3}{10y^2}$;

7) $4(c+7)^{-1}=4\cdot\frac{1}{c+7}=\frac{4}{c+7}$;

8) $\frac{5}{9}(x-y)^{-2}=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{(x-y)^2}=\frac{5}{9(x-y)^2}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $(4a)^{-1}$; $(7a)^{-1}$; $(-10b)^{-1}$; $(-24b)^{-1}$; $(-5b)^{-11}$; $(-6b)^{-13}$;

2) $11c^{-1}$; $13c^{-1}$; $9c^{-4}$; $7c^{-6}$; $-30d^{-1}$; $-13d^{-1}$; $-20d^{-2}$; $-34d^{-3}$;

3) $\frac{1}{16}x^{-1}$; $\frac{1}{13}x^{-1}$; $\frac{1}{3}x^{-8}$; $\frac{1}{6}x^{-7}$; $2{,}5y^{-1}$; $1{,}5y^{-3}$; $1{,}2y^{-5}$; $1{,}8y^{-4}$;

4) $2(a-9)^{-1}$; $5(a+8)^{-1}$; $\frac{6}{17}(a+b)^{-2}$; $\frac{19}{8}(a-b)^{-3}$; $\frac{3}{7}(5-b)^{-5}$.

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 2

Подайте дріб у вигляді степеня з від'ємним цілим показником або у вигляді добутку:

1) $\frac{1}{121}$; 2) $-\frac{5}{81}$; 3) $\frac{1}{(8a)^4}$; 4) $\frac{2}{ab}$; 5) $\frac{x^8}{y^3}$; 6) $\frac{7x^5}{(-y)^7}$.

Розв'язання

1) $\frac{1}{121}=\frac{1}{11^2}=11^{-2}$;

2) $-\frac{5}{81}=-\frac{5}{9^2}=(-5)\cdot 9^{-2}$;

3) $\frac{1}{(8a)^4}=(8a)^{-4}$;

4) $\frac{2}{ab}=2\cdot(ab)^{-1}$;

5) $\frac{x^8}{y^3}=x^8\cdot y^{-3}$;

6) $\frac{7x^5}{(-y)^7}=7x^5\cdot(-y)^{-7}$.

Застосовуємо формули

Якщо $a\neq 0$, то:

$$\frac{1}{a^n}=a^{-n};$$

$$-\frac{1}{a^n}=-a^{-n};$$

$$\frac{b}{a^n}=b\cdot a^{-n}$$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У другій половині XV ст. французький математик Нікола Шюке ввів від'ємні та нульовий показники степеня. Ними користувалися також англійські математики Джон Волліс та Ісаак Ньютон.

Сучасний запис степеня запропонував французький математик Рене Декарт у XVII ст.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Подайте дріб у вигляді степеня з від'ємним цілим показником або у вигляді добутку:

1) $\frac{1}{81}$; $\frac{1}{64}$; $-\frac{12}{121}$; $-\frac{11}{144}$;

2) $\frac{1}{(3a)^7}$; $\frac{1}{(2a)^9}$; $\frac{5}{ab}$; $\frac{6}{abc}$;

3) $\frac{x^{14}}{y^8}$; $\frac{x^5}{y^{12}}$; $\frac{4x^4}{(-y)^{11}}$; $\frac{9x^7}{(-y)^{15}}$;

4) $\frac{x}{y^{23}}$; $\frac{x^{31}}{y}$; $\frac{2x}{(-y)^{21}}$; $\frac{5x}{(-y)^{25}}$.

Розглянемо піднесення *звичайного дробу* до степеня з від'ємним цілим показником.

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^5}=1:\left(\frac{2}{3}\right)^5=1:\frac{2^5}{3^5}=1\cdot\frac{3^5}{2^5}=\left(\frac{3}{2}\right)^5$,

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$, якщо $a\neq 0$, $b\neq 0$;

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3}=1:\left(\frac{1}{5}\right)^3=1:\frac{1^3}{5^3}=1\cdot\frac{5^3}{1}=5^3$,

$\left(\frac{1}{b}\right)^{-n}=b^n$, якщо $b\neq 0$.

РОЗМИНКА 2

1 Запишіть дріб у вигляді степеня з натуральним показником:

1) $\frac{1}{5^{-1}}$; 3) $\frac{1}{4^{-7}}$; 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$; 7) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-6}$; 9) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$; 11) $\left(\frac{7}{8}\right)^{-3}$;

2) $\frac{1}{a^{-1}}$; 4) $\frac{1}{a^{-2}}$; 6) $\left(\frac{1}{b}\right)^{-1}$; 8) $\left(\frac{1}{b}\right)^{-5}$; 10) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$; 12) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5}$.

2 Визначте знак виразу, не виконуючи піднесення до степеня:

1) $(-2)^9$; 2) $(-2)^{12}$; 3) 2^{-7}; 4) 2^{-10}; 5) $(-2)^{-11}$; 6) $(-2)^{-8}$.

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо $a\neq 0$, $b\neq 0$, то:

$$\frac{1}{a^{-n}}=a^n;\quad \left(\frac{1}{b}\right)^{-n}=b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Видавництво «Ранок»

Стратегія

1) Перетворюємо мішане число або десятковий дріб у звичайний дріб (якщо це потрібно).

2) Застосовуємо формули:

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n};\quad \frac{1}{a^{-n}}=a^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}=\frac{b^n}{a^n}.$$

3) Виконуємо обчислення (з урахуванням знака основи й парності показника степеня).

ПРИКЛАД 3

Обчисліть:

1) 2^{-5}; 2) $(-8)^{-2}$; 3) $\frac{1}{5^{-3}}$; 4) $\frac{1}{(-4)^{-3}}$; 5) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$; 6) $\left(2\frac{3}{5}\right)^{-1}$; 7) $(0{,}1)^{-4}$; 8) $(-1{,}5)^{-3}$.

Розв'язання

1) $2^{-5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$ — Застосовуємо формулу $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$. Обчислюємо.

2) $(-8)^{-2}=\frac{1}{(-8)^2}=\frac{1}{64}$

3) $\frac{1}{5^{-3}}=5^3=125$ — Застосовуємо формулу $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$. Обчислюємо.

4) $\frac{1}{(-4)^{-3}}=(-4)^3=-64$

5) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}=\left(\frac{4}{3}\right)^{3}=\frac{4^3}{3^3}=\frac{64}{27}=2\frac{10}{27}$ — Застосовуємо формули: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{n}=\frac{b^n}{a^n}$.

6) $\left(2\frac{3}{5}\right)^{-1}=\left(\frac{13}{5}\right)^{-1}=\left(\frac{5}{13}\right)^{1}=\frac{5}{13}$

7) $(0{,}1)^{-4}=\left(\frac{1}{10}\right)^{-4}=\left(\frac{10}{1}\right)^{4}=10^4=10\,000$ — Перетворюємо десятковий дріб у звичайний. Застосовуємо формули $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $\left(\frac{b}{a}\right)^{n}=\frac{b^n}{a^n}$.

8) $(-1{,}5)^{-3}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}=-\frac{2^3}{3^3}=-\frac{8}{27}$

ПРИГАДАЙТЕ!

Від'ємне число в парному степені є додатним числом. Від'ємне число в непарному степені є від'ємним числом.

СЛІД ЗНАТИ!

Під час обчислення **значення степеня із цілим від'ємним показником** спочатку застосовують означення степеня, а потім обчислюють значення степеня з натуральним показником (скориставшись означенням степеня з натуральним показником).

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Обчисліть:

1) 587^0; 100^{-1}; 3^{-3}; 2^{-4}; $(-6)^{-2}$; $(-7)^{-2}$; $(-20)^{-2}$; $(-10)^{-4}$;

2) $\frac{1}{19^{-1}}$; $\frac{1}{107^{-1}}$; $\frac{1}{15^{-2}}$; $\frac{1}{4^{-3}}$; $\frac{1}{(-10)^{-1}}$; $\frac{1}{(-2)^{-3}}$; $\frac{1}{(-54)^{-1}}$; $\frac{1}{(-6)^{-3}}$;

3) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-1}$; $\left(\frac{2}{9}\right)^{-2}$; $\left(3\frac{2}{7}\right)^{-1}$; $\left(5\frac{1}{3}\right)^{-1}$; $\left(-6\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $\left(-4\frac{1}{5}\right)^{-1}$;

4) $0{,}1^{-1}$; $0{,}02^{-1}$; $0{,}5^{-4}$; $0{,}1^{-5}$; $(-1{,}1)^{-1}$; $(-1{,}2)^{-3}$.

Видавництво «Ранок»

Стандартний вигляд числа

У науковій літературі ми часто зустрічаємося з дуже великими або дуже малими величинами. Для скорочення запису таких чисел застосовують спеціальний запис, який називають *стандартним виглядом числа*.

Наприклад:

1) Світовий рік становить 10 000 000 000 000 км = $1 \cdot 10^{13}$ м

2) Маса гігантозавра 13 800 кг = $1{,}38 \cdot 10^{4}$ кг

3) Діаметр віріона коронавірусу близько 0,000 000 12 м = $1{,}2 \cdot 10^{-7}$ м

4) Маса північної сумчастої миші 0,004 кг = $4 \cdot 10^{-3}$ кг

Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$, n — ціле число.

У записі $A = a \cdot 10^n$ число a називають значущою частиною числа A, а показник степеня n — порядком числа A.

Значуща частина числа A — Порядок числа A

$45\,600\,000 = 4{,}56 \cdot 10^{7}$

Число A — Число A, записане в стандартному вигляді

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$320 = 3{,}2 \cdot 10^{2}$

$47\,000 = 4{,}7 \cdot 10^{4}$

$1\,357\,972 = 1{,}357\,972 \cdot 10^{6}$

$0{,}0073 = 7{,}3 \cdot 10^{-3}$

$0{,}000\,004 = 4 \cdot 10^{-6}$

РОЗМИНКА 3

1 Назвіть числа, які записані в стандартному вигляді:

1) $4{,}5 \cdot 10$; 2) $16{,}3 \cdot 10^{4}$; 3) $0{,}9 \cdot 10^{-7}$; 4) $7 \cdot 10^{-5}$.

2 Назвіть значущу частину і порядок числа:

1) $6{,}7 \cdot 10^{9}$; 2) $1{,}4 \cdot 10$; 3) $2{,}9 \cdot 10^{-1}$; 4) 4000; 5) 0,003.

У цілій частині числа, записаного в стандартному вигляді (до коми), може міститися лише одна цифра. Решта цифр мають бути записані після коми, тобто в дробовій частині числа.

Число	$9{,}12 \cdot 10^{1}$	$5 \cdot 10^{-4}$
Значуща частина числа	9,12	5
Порядок числа	1	−4

ПРИКЛАД 4

Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:

1) 1500; 2) 36; 3) 0,027; 4) 0,0009.

Розв'язання

Число	1) 1500	2) 36	3) 0,027	4) 0,0009
Дія	Переносимо кому вліво		Переносимо кому вправо	
	на 3 позиції	на 1 позицію	на 2 позиції	на 4 позиції
Порядок числа	3	1	−2	−4
Запис числа	$1{,}5 \cdot 10^{3}$	$3{,}6 \cdot 10$	$2{,}7 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-4}$

Видавництво «Ранок»

Стратегія

1) Ставимо кому після першої значущої цифри.

2) Знаходимо порядок числа.

3) Записуємо число в стандартному вигляді.

ДОСЛІДЖУЄМО

1) Проаналізуйте послідовність запису чисел.

2) На скільки позицій і в який бік пересувається кома залежно від показника степеня?

$1{,}28\cdot10^{2}$	128
$1{,}28\cdot10^{1}$	12,8
$1{,}28\cdot10^{0}$	1,28
$1{,}28\cdot10^{-1}$	0,128
$1{,}28\cdot10^{-2}$	0,0128

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо показник степеня **додатний**, то десяткову кому переносимо **вправо**.

Якщо показник степеня **від'ємний**, то десяткову кому переносимо **вліво**.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $5^{-1}=-5$;

2) $3^{-4}=3\cdot(-4)=-12$;

3) $(-7)^{-3}=-343$;

4) $2x^{-5}=\dfrac{1}{2x^{5}}$;

5) $a^{6}b^{-2}=\dfrac{a^{6}}{b^{-2}}$

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:

1) 2600; 2) 19 000; 3) 94; 4) 350; 5) 0,81; 6) 0,056; 7) 0,007; 8) 0,0002.

ПРИКЛАД 5

Запишіть у вигляді натурального числа або десяткового дробу число, подане в стандартному вигляді:

1) $3{,}57\cdot10^{1}$; 2) $6{,}2\cdot10^{4}$; 3) $8\cdot10^{-1}$; 4) $5{,}62\cdot10^{-3}$.

Розв'язання

1) $3{,}57\cdot10^{1}=3{,}57\cdot10=35{,}7$ — Переносимо кому на 1 позицію вправо.

2) $6{,}2\cdot10^{4}=6{,}2\cdot10\,000=62\,000$ — Переносимо кому на 4 позиції вправо.

3) $8\cdot10^{-1}=8\cdot0{,}1=0{,}8$ — Переносимо кому на 1 позицію вліво.

4) $5{,}62\cdot10^{-3}=5{,}62\cdot0{,}001=0{,}00562$ — Переносимо кому на 3 позиції вліво.

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Запишіть у вигляді натурального числа або десяткового дробу число, подане в стандартному вигляді:

1) $1{,}24\cdot10^{2}$; 2) $5{,}63\cdot10^{3}$; 3) $9{,}7\cdot10^{-1}$; 4) $4{,}8\cdot10^{-2}$; 5) $3{,}81\cdot10^{-1}$; 6) $2{,}6\cdot10^{-1}$; 7) $4{,}1\cdot10^{-3}$; 8) $2{,}94\cdot10^{-3}$.

ПРАКТИКУМ

8.1 Подайте числа у вигляді степеня з основою a:

1) 8; 1; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$, якщо $a=2$; 2) 25; 5; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$, якщо $a=\frac{1}{5}$.

8.2 Подайте запропоноване число у вигляді степеня з основою:

а) 10; б) $\frac{1}{10}$.

1) 1; 2) 10; 3) 1000; 4) 0,01; 5) 0,0001; 6) 0,000 001.

8.3 Подайте дріб у вигляді степеня простого числа:

1) 25; 2) 121; 3) $\frac{1}{13}$; 4) $\frac{1}{19}$; 5) $\frac{1}{49}$; 6) $\frac{1}{169}$; 7) $\frac{1}{81}$; 8) $\frac{1}{32}$.

Видавництво «Ранок»

8.4. Подайте дріб у вигляді добутку:

1) $\frac{8}{a+11}$; 2) $\frac{7}{a-12}$; 3) $\frac{6}{a^{-5}}$; 4) $\frac{9}{a^{-2}}$; 5) $\frac{3b^2}{a^{-1}}$; 6) $\frac{5b}{a^{-3}}$.

8.5 Запишіть вираз із додатним показником степеня, тотожно рівний заданому:

1) $\left(\frac{1}{a-3}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{3}{a+2}\right)^{-1}$; 3) $\left(\frac{1}{a+4}\right)^{-2}$; 4) $\left(\frac{5}{a-1}\right)^{-3}$.

8.6 Обчисліть:

1) $(-1)^{-13}$; 3) $(-1)^{-18}$; 5) $(-0{,}5)^{-1}$; 7) $\left(-3\frac{1}{2}\right)^{-2}$;

2) $(-1)^{-17}$; 4) $(-1)^{-12}$; 6) $(-0{,}05)^{-1}$; 8) $\left(-2\frac{1}{5}\right)^{-2}$.

8.7 Знайдіть значення виразу:

1) $15\cdot 5^{-1}$; 3) $20\cdot 10^{-2}$; 5) $1{,}5^0+0{,}1^{-3}$; 7) $(0{,}5)^{-3}:16$;

2) $24\cdot 3^{-1}$; 4) $30\cdot 10^{-3}$; 6) $0{,}1^{-2}-2{,}7^0$; 8) $(0{,}4)^{-2}:2{,}5$.

8.8 Обчисліть:

1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\cdot 10^{-1}-6^0+0{,}4^{-1}$; 3) $(-0{,}3)^{-4}\cdot 0{,}3^5+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}\cdot 10^{-1}+7^0-0{,}25^{-1}$; 4) $(-0{,}8)^{-3}\cdot 0{,}8^4+\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$.

8.9 Обчисліть значення виразу та порівняйте його з нулем.

1) $(-1)^{-53}$; 2) $(-1)^{-46}$; 3) $(-2)^{-4}$; 4) $(-4)^{-3}$; 5) $-(-7)^{-2}$; 6) $-(-3)^{-3}$.

8.10 Розташуйте числові вирази за зростанням їхніх значень.

1) 3^3; 3^0; 3^{-1}; 3^{-4}; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^0$; $\left(\frac{1}{4}\right)^2$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$;

2) 7^{-2}; 7^4; 7^0; 7^{-3}; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^2$; $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$; $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$; $\left(\frac{1}{6}\right)^0$.

8.11 Знайдіть значення n, за яких є правильною рівність:

1) $3^n=3$; 2) $3^n=1$; 3) $3^n=9$; 4) $3^n=81$; 5) $3^n=\frac{1}{9}$; 6) $3^n=\frac{1}{27}$.

8.12 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-1}=2$; 2) $x^{-1}=\frac{1}{6}$; 3) $x^{-2}=\frac{1}{9}$; 4) $x^{-2}=25$.

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо $a\neq 0$, $b\neq 0$, то

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{-n}=b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}=\frac{b^n}{a^n}$$

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

1. Виберіть по одній групі виразів, обчисліть значення виразів та порівняйте їх із нулем.

1 група	$(-2)^{-3}$; $(-2)^{-2}$; 2^{-2}; 2^{-3}
2 група	$(-3)^{-3}$; $(-3)^{-2}$; 3^{-2}; 3^{-3}

Обміняйтеся записами. Порівняйте результати. Зробіть висновки.

2. Виберіть по одній групі виразів, розташуйте вирази за спаданням їхніх значень.

1 група	$(-3)^{-3}$; $(-2)^{-2}$; 3^{-2}; 2^{-3}
2 група	$(-2)^{-3}$; $(-3)^{-2}$; 2^{-2}; 3^{-3}

Обміняйтеся записами. Перевірте результати.

Видавництво «Ранок»

В ОДИН КЛІК

Перевірити правильність виконання завдання ви можете за допомогою калькулятора. Наприклад:

$$3{,}45\cdot10^{-8}$$

3,45 ⇒ EE ⇒ 8 ⇒ +/− ⇒ =

$$3{,}45\cdot10^{-8}=0{,}000\,000\,0345$$

8.13 Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $a^{-2}-x^{-2}$;
2) $a^{-1}+b^{-1}$;
3) $25a^2\left(5^{-2}+a^{-2}\right)$;
4) $49a^2\left(a^{-2}-7^{-2}\right)$;
5) $\left(a^{-1}-3^{-1}\right)(3-a)^{-1}$;
6) $\left(a^{-1}+4^{-1}\right)(4+a)^{-1}$.

8.14 Порівняйте числа, записані в стандартному вигляді:

1) $1{,}8\cdot10^{5}$ і $1{,}8\cdot10^{-5}$;
2) $2{,}1\cdot10^{-6}$ і $2{,}1\cdot10^{6}$;
3) $6{,}9\cdot10^{11}$ і $7{,}3\cdot10^{11}$;
4) $5{,}2\cdot10^{4}$ і $4{,}8\cdot10^{4}$;
5) $3{,}1\cdot10^{-2}$ і $3{,}2\cdot10^{-2}$;
6) $1{,}4\cdot10^{-3}$ і $1{,}3\cdot10^{-3}$;
7) $4{,}3\cdot10^{-4}$ і $3{,}2\cdot10^{-3}$;
8) $8{,}5\cdot10^{-6}$ і $2{,}7\cdot10^{-5}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

8.15 Не виконуючи обчислень, порівняйте з нулем значення виразу:

1) 12^{-20};
2) 15^{-31};
3) $(-11)^{-14}$;
4) $(-19)^{-12}$;
5) $(-14)^{-17}$;
6) $(-18)^{-21}$;
7) $-(-3{,}7)^{-10}$;
8) $-(-1{,}5)^{-16}$.

8.16 Розташуйте числові вирази за спаданням їхніх значень.

1) $(-5)^0$; $(-5)^{-2}$; $(-5)^{-3}$;
2) $(-2)^{-5}$; $(-2)^{-4}$; $(-2)^0$;
3) $(-0{,}1)^{-2}$; $(-0{,}1)^{-1}$; $(-0{,}1)^0$;
4) $(-0{,}3)^{-1}$; $(-0{,}3)^0$; $(-0{,}3)^{-4}$.

8.17. Спростіть вираз, використовуючи формули скороченого множення:

1) $9x^2\left(3^{-2}+x^{-2}\right)-6x$;
2) $16x^2\left(4^{-2}+x^{-2}\right)+8x$;
3) $a\cdot5^{-1}+5\cdot a^{-1}+2$;
4) $a\cdot6^{-1}+6\cdot a^{-1}-2$.

8.18 Розв'яжіть рівняння 1–6.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $1-2x^{-1}+x^{-2}=0$; ОДЗ: $x\neq0$. $1\,\vert\cdot x^2\quad -\dfrac{2\,\vert\cdot x}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$; $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2}=0$; $\dfrac{(x-1)^2}{x^2}=0$; $\begin{cases}(x-1)^2=0,\\ x^2\neq0;\end{cases}\ \begin{cases}x-1=0,\\ x\neq0;\end{cases}\ \begin{cases}x=1,\\ x\neq0;\end{cases}\ x=1.$ *Відповідь:* 1.	2) $8x^{-2}-x^{-1}=0$; 3) $4x^{-2}+x^{-1}=0$; 4) $1+6x^{-1}+9x^{-2}=0$; 5) $49y^{-2}+1=14y^{-1}$; 6) $25+40y^{-1}=-16y^{-2}$.

СЛІД ЗНАТИ!

$a>0$	n — ціле число	$a^n>0$
$a<0$	n — від'ємне парне число	$a^n>0$
$a<0$	n — від'ємне непарне число	$a^n<0$

ПРИГАДАЙТЕ!

Порядок виконання дій
1. Піднесення до степеня.
2. Дії в дужках.
3. Множення / ділення.
4. Додавання / віднімання

В ОДИН КЛІК

Значення степеня можна знайти за допомогою калькулятора. Наприклад:

$$2^{-6}$$

2 ⇒ x^y ⇒ 6 ⇒ +/− ⇒ =

$$2^{-6}=0{,}015\,625$$

Обчисліть за допомогою калькулятора:
3^{-7}; 5^{-4}; 9^{-7}

Видавництво «Ранок»

MATH FOR LIFE

8.19 **Океани.** У таблиці наведені площі океанів у стандартному вигляді. Запишіть:

1) величини площ, виражені в мільйонах квадратних кілометрів;

2) назви океанів від найменшого до найбільшого за площею.

Океан	Площа (у кв. км)
Атлантичний	$9{,}17 \cdot 10^7$
Індійський	$7{,}62 \cdot 10^7$
Північний Льодовитий	$1{,}48 \cdot 10^7$
Тихий	$1{,}8 \cdot 10^8$
Південний	$2{,}03 \cdot 10^7$

8.20 **Мікро- і макровеличини.** Запишіть числа, наведені в тексті, у стандартному вигляді та вкажіть порядок чисел:

1) маса блакитного кита становить 150 000 кг;

2) людина моргає близько 6,25 мільйонів разів на рік;

3) понад 5,17 млрд людей користуються соцмережами;

4) довжини хвиль кольорів національного прапора України: жовтий — 0,000 000 585 м, синій — 0,000 000 45 м;

5) діаметр павутиння становить 0,000 002 м;

6) маса сункуса етруського — 0,0017 кг.

8.21 **Вітаміни.** У таблиці подано маси вітамінів, що містяться у 100 г молока жирністю 2,5 %.

1) Запишіть маси вітамінів (у мг) у стандартному вигляді.

2) Назвіть порядки отриманих чисел.

3) Визначте, на скільки порядків маса вітаміну C більша за масу вітаміну B_1.

Вітамін	Маса (у мг)
A	0,022
B_1	0,04
B_2	0,15
C	1,3
PP	0,8

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

8.22 Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $(3a)^{-1}$; $(-2b)^{-1}$; $(-8b)^{-15}$;

2) $5c^{-1}$; $11c^{-8}$; $-4d^{-1}$; $-d^{-2}$;

3) $\frac{1}{5}x^{-9}$; $(2{,}6y)^{-1}$; $1{,}6y^{-6}$;

4) $3(a-7)^{-1}$; $\frac{5}{7}(a+b)^{-2}$.

8.23 Подайте дріб у вигляді степеня з від'ємним цілим показником або у вигляді добутку:

1) $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{49}$; $-\frac{15}{169}$; $-\frac{17}{196}$;

2) $\frac{1}{(4a)^5}$; $\frac{1}{(3a)^6}$; $\frac{8}{ab}$; $\frac{9}{abc}$;

3) $\frac{x^6}{y^{10}}$; $\frac{x^9}{y^4}$; $\frac{5x}{(-y)^{17}}$; $\frac{8x^3}{(-y)^{19}}$;

4) $\frac{x}{y^{20}}$; $\frac{x^{30}}{y}$; $\frac{7x}{(-y)^{11}}$; $\frac{3x}{(-y)^{13}}$.

8.24 Обчисліть:

1) 32^0; 5^{-1}; 4^{-3}; $(-9)^{-2}$;

2) $\frac{1}{21^{-1}}$; $\frac{1}{2^{-3}}$; $\frac{1}{(-10)^{-3}}$;

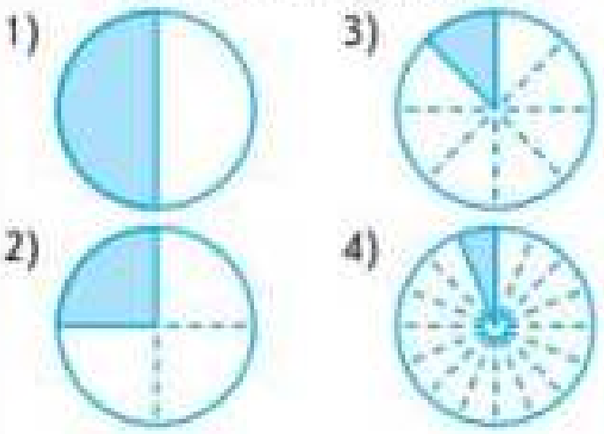
3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$; $\left(3\frac{5}{9}\right)^{-1}$; $\left(-5\frac{1}{2}\right)^{-1}$;

4) $0{,}1^{-6}$; $(-1{,}6)^{-1}$; $(-1{,}4)^{-3}$.

Завдання 8.22 → Приклад 1
Завдання 8.23 → Приклад 2
Завдання 8.24 → Приклад 3
Завдання 8.25 → Приклад 4
Завдання 8.26 → Приклад 5
Завдання 8.27 → Практикум, 8.1
Завдання 8.28 → Практикум, 8.2
Завдання 8.29 → Практикум, 8.4
Завдання 8.30 → Практикум, 8.5
Завдання 8.31 → Практикум, 8.7
Завдання 8.32 → Практикум, 8.8
Завдання 8.33–8.37 → Практикум, 8.10–8.14
Завдання 8.38–8.40 → Інтелектуальний фітнес, 8.15–8.17
Завдання 8.41–8.43 → Math for life, 8.20, 8.19, 8.21
Завдання 8.44 → Інтелектуальний фітнес, 8.18

Видавництво «Ранок»

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ



Розгляньте рисунки.

1. Яка частина кожного круга зафарбована блакитним кольором?
2. Запишіть кожен отриманий дріб у вигляді 2^n, де n — ціле число.
3. Знайдіть закономірність у послідовності.
4. Яка частина круга буде заштрихована на рис. 11, якщо закономірність продовжиться? Запишіть відповідь у вигляді 2^n.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Серцеві скорочення

Учені підрахували, що серце людини скорочується близько 36 800 000 разів за один рік.

1. З огляду на свій вік визначте, скільки приблизно скорочень зробило ваше серце.
2. Обчисліть кількість серцевих скорочень для ваших рідних та друзів, ураховуючи їхній вік.
3. Запишіть отримані результати в стандартному вигляді.
4. Порівняйте порядки чисел.

8.25 Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:

1) 31 000; 2) 570 000; 3) 42; 4) 2700; 5) 0,25; 6) 0,058; 7) 0,001; 8) 0,000 03.

8.26 Запишіть у вигляді натурального числа або десяткового дробу число, подане в стандартному вигляді:

1) $2{,}03\cdot10^{2}$; 2) $7{,}12\cdot10^{3}$; 3) $3{,}8\cdot10^{-1}$; 4) $5{,}1\cdot10^{-2}$; 5) $9{,}01\cdot10^{-1}$; 6) $4{,}2\cdot10^{-1}$; 7) $1{,}3\cdot10^{-3}$; 8) $8{,}76\cdot10^{-3}$.

8.27 Подайте числа у вигляді степеня з основою a.

1) $3; 9; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}$, якщо $a=3$; 2) $1; 4; 16; \frac{1}{4}; \frac{1}{64}$, якщо $a=\frac{1}{4}$.

8.28 Подайте запропоноване число у вигляді степеня з основою:

а) 10; б) $\frac{1}{10}$.

1) 1; 2) 100; 3) 10 000; 4) 0,1; 5) 0,001; 6) 0,000 01.

8.29 Подайте дріб у вигляді добутку:

1) $\frac{3}{a+15}$; 2) $\frac{2}{a-16}$; 3) $\frac{8}{a^{-3}}$; 4) $\frac{7}{a^{-4}}$; 5) $\frac{6b^4}{a^{-2}}$; 6) $\frac{9b}{a^{-1}}$.

8.30 Запишіть вираз із додатним показником степеня, тотожно рівний заданому:

1) $\left(\frac{1}{1-a}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{3}{4+a}\right)^{-1}$; 3) $\left(\frac{1}{a+3}\right)^{-4}$; 4) $\left(\frac{4}{a-2}\right)^{-5}$.

8.31 Знайдіть значення виразу:

1) $42\cdot7^{-1}$; 2) $40\cdot10^{-2}$; 3) $0{,}1^{-3}-1{,}8^{0}$; 4) $(0{,}5)^{-5}:16$.

8.32 Обчисліть:

1) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}\cdot10^{-1}-9^{0}+0{,}5^{-1}$; 2) $(-0{,}4)^{-3}\cdot0{,}4^{4}+\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$.

8.33 Розташуйте числові вирази за зростанням їхніх значень.

1) $5^4; 5^0; 5^{-3}; 5^{-2}$; 2) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2}; \left(\frac{1}{7}\right)^{0}; \left(\frac{1}{7}\right)^{-3}; \left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$.

8.34 Знайдіть значення n, за яких є правильною рівність:

1) $2^n=1$; 2) $2^n=2$; 3) $2^n=8$; 4) $2^n=4$; 5) $2^n=\frac{1}{4}$; 6) $2^n=\frac{1}{16}$.

8.35 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-1}=4$; 2) $x^{-1}=\frac{1}{3}$; 3) $x^{-2}=\frac{1}{64}$; 4) $x^{-2}=49$.

Видавництво «Ранок»

8.36 Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $a^{-1}+x^{-1}$; 2) $36a^2\left(a^{-2}-6^{-2}\right)$; 3) $\left(a^{-1}+5^{-1}\right)(5+a)^{-1}$.

8.37 Порівняйте числа, записані в стандартному вигляді:

1) $1{,}3\cdot10^{-7}$ і $1{,}3\cdot10^{7}$;
2) $6{,}4\cdot10^{6}$ і $5{,}9\cdot10^{6}$;
3) $2{,}1\cdot10^{-3}$ і $2{,}5\cdot10^{-3}$;
4) $5{,}9\cdot10^{23}$ і $1{,}4\cdot10^{25}$;
5) $5{,}2\cdot10^{-3}$ і $8{,}3\cdot10^{-6}$;
6) $7{,}01\cdot10^{-8}$ і $7{,}1\cdot10^{-8}$.

8.38 Не виконуючи обчислень, порівняйте з нулем значення виразу:

1) 11^{-35}; 2) $(-16)^{-15}$; 3) $(-13)^{-20}$; 4) $-(-2{,}4)^{-14}$.

8.39 Розташуйте числові вирази за спаданням їхніх значень.

1) $(-7)^{-1}$; $(-7)^{-2}$; $(-7)^{0}$; 2) $(-0{,}2)^{-4}$; $(-0{,}2)^{-3}$; $(-0{,}2)^{0}$.

8.40 Спростіть вираз, використовуючи формули скороченого множення:

1) $25x^2\left(5^{-2}+x^{-2}\right)-10x$; 2) $a\cdot3^{-1}+3\cdot a^{-1}+2$.

8.41 Запишіть числа, наведені в тексті, у стандартному вигляді та укажіть порядок чисел:

1) піраміда Хеопса складена з 2,5 млн кам'яних блоків;
2) кількість способів, якими шахіст може зіграти перші чотири ходи в партії, становить 3 000 000 000;
3) розмір організмів фітопланктону близько 0,000 002 м;
4) частинка пилу, що літає в повітрі, важить 0,000 000 753 г;
5) довжина хвилі фіолетового кольору — 0,000 0004 м.

8.42 Знайдіть інформацію щодо площ басейнів п'яти річок України (на ваш вибір). Запишіть:

1) значення площ (у кв. км) у стандартному вигляді;
2) назви річок від найбільшої до найменшої площі басейну.

8.43 У таблиці подано маси вітамінів, що містяться у 100 г насіння соняшнику.

1) Запишіть маси вітамінів (у мг) у стандартному вигляді;
2) Назвіть порядки отриманих чисел;
3) Визначте, на скільки порядків маса вітаміну B_2 менша від маси вітаміну B_1.

Вітамін	Маса (у мг)
A	0,005
B_1	1,84
B_2	0,18
E	31,2
PP	15,7

Бонусне завдання

8.44 Розв'яжіть рівняння:

1) $9x^{-2}-x^{-1}=0$; 2) $16-8y^{-1}=-y^{-2}$; 3) $49+4y^{-2}=28y^{-1}$.

IQ

 # BE SMART

Для зручного запису великих і малих значень величин використовують кратні та частинні (дольні) одиниці. Їхні назви містять спеціальні префікси. Наведіть приклади назв одиниць вимірювання, в яких застосовуються наведені в таблиці префікси.

Префікси

Кратні	
мега-	10^{6}
гіга-	10^{9}
тера-	10^{12}
пета-	10^{15}
Частинні	
мікро-	10^{-6}
нано-	10^{-9}
піко-	10^{-12}
фемто-	10^{-15}

Видавництво «Ранок»

§9 ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

УЧОРА Ви спрощували вирази, що містять степені з натуральними показниками, записували числа в стандартному вигляді

СЬОГОДНІ Ви навчитеся виконувати дії зі степенями із цілими показниками та застосовувати властивості степенів для спрощення виразів і знаходження їхніх значень

ЗАВЖДИ Ви зможете виконувати дії із числами з макро- і мікросвітів, а також подбати про своє здоров'я та здоров'я близьких, правильно розраховуючи добову дозу вітамінів і мікроелементів

mk.com.ua/107852

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

АЛГЕБРА Й ЦІКАВІ ФАКТИ ПРО ЛЮДИНУ

Ріст волосся

Звичайна швидкість росту людського волосся становить $3{,}3\cdot10^{-4}$ м за добу.

Якою стане довжина волосся, якщо його не стригти протягом 10 років? Вважайте, що в одному році 365 днів.

Потреба в кальції

Підлітки віком від 11 до 18 років мають отримувати 1,2 г кальцію щодня.

Скільки грамів малини треба споживати підліткам щодня, якщо в 1 г малини міститься 0,0004 г кальцію?

Кількість гемоглобіну

У 1 мм³ крові людини близько $5\cdot10^6$ еритроцитів.

Кожен еритроцит містить приблизно $4\cdot10^8$ молекул гемоглобіну.

Скільки молекул гемоглобіну в 1 л крові?

Розв'язання:

1) $365\cdot10=3{,}65\cdot10^3$ — кількість днів у 10 роках;
2) $(3{,}3\cdot10^{-4})\cdot(3{,}65\cdot10^3)$ м — довжина волосся.

1) $0{,}0004=4\cdot10^{-4}$ — записуємо число в стандартному вигляді;
2) $1{,}2:(4\cdot10^{-4})$ г — шукана маса малини.

1) $1\text{ л}=10^6$ мм³ — переводимо одиниці вимірювання;
2) $(5\cdot10^6)\cdot(4\cdot10^8)\cdot10^6$ — шукана кількість молекул.

Для розв'язування цих задач необхідно:

- уміти виконувати дії із числами, записаними в стандартному вигляді;
- знати переставний і сполучний закони множення;
- уміти застосовувати властивості степенів.

Пригадаємо властивості степеня з натуральним показником ($m, n\in N$): $a^m a^n=a^{m+n}$, $a^m:a^n=a^{m-n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$, $(ab)^n=a^n b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $b\neq0$.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- Добуток степенів (product of powers)
- Частка степенів (quotient of powers)
- Степінь степеня (power of a power)

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Властивості степеня з **відмінною від нуля** основою та цілим показником такі самі, як і властивості степеня з натуральним показником.

Властивості степенів з однаковими основами

Множення степенів з однаковими основами

Властивість 1	Правило множення степенів з однаковими основами
Для будь-якого $a \neq 0$ та будь-яких цілих чисел m і n справджується рівність $a^m a^n = a^{m+n}$	При **множенні** степенів *з однаковими основами*, відмінними від нуля, основу залишають тією самою, а показники степенів **додають**.

Наприклад:

$b^{-5} \cdot b^{12} = b^{-5+12} = b^7$

$c = c^1$

$c \cdot c^{-6} = c^1 \cdot c^{-6} = c^{1-6} = c^{-5}$

$d^{-4} \cdot d^{-3} \cdot d = d^{-4-3+1} = d^{-6}$

$2^{-4} \cdot 2^4 = 2^{-4+4} = 2^0 = 1$

$3^{-9} \cdot 3 = 3^{-9} \cdot 3^1 = 3^{-9+1} = 3^{-8}$

$(-2)^{-3} \cdot (-2)^{-3} = (-2)^{-3-3} = (-2)^{-6}$

РОЗМИНКА 1

1. Подайте у вигляді степеня добуток:

   1) $a^{-2} \cdot a^9$; 2) $b^5 \cdot b^{-6}$ 3) $c \cdot c^{-3}$; 4) $d^{-7} \cdot d^{-4}$; 5) $n \cdot n^{-1} \cdot n^4$.

2. Застосуйте правило множення степенів та обчисліть значення виразу:

   1) $2^{-5} \cdot 2^7$; 2) $3^3 \cdot 3^{-4}$; 3) $0{,}1^7 \cdot 0{,}1^{-7}$; 4) $10 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3$.

Ділення степенів з однаковими основами

Властивість 2	Правило ділення степенів з однаковими основами
Для будь-якого $a \neq 0$ та будь-яких цілих чисел m та n справджується рівність: $a^m : a^n = a^{m-n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	При **діленні** степенів з *однаковими основами*, відмінними від нуля, основу залишають тією самою, а від показника степеня діленого **віднімають** показник степеня дільника.

Наприклад:

$b^8 : b^{-2} = b^{8-(-2)} = b^{10}$

$c^{-5} : c = c^{-5} : c^1 = c^{-5-1} = c^{-6}$

$d^{-3} : d^{-4} = d^{-3-(-4)} = d^1 = d$

$7^7 : 7^{-9} = 7^{7-(-9)} = 7^{16}$

$9 : 9^4 = 9^1 : 9^4 = 9^{1-4} = 9^{-3}$

$10^{-6} : 10^{-7} = 10^{-6-(-7)} = 10^1 = 10$

РОЗМИНКА 2

1. Запишіть частку у вигляді степеня:

   1) $b^{-5} : b^3$; 2) $c^6 : c^{-2}$; 3) $d^{-8} : d$; 4) $n : n^{-4}$; 5) $k^{-15} : k^{-5}$.

2. Обчисліть значення виразу:

   1) $2^2 : 2^{-3}$; 2) $10^{-6} : 10^{-3}$; 3) $4^{-4} : 4^{-5}$; 4) $7^{-1} : 7$; 5) $5 : 5^{-2}$.

СЛІД ЗНАТИ!

$a^m : a^n = a^{m-n}$; $a^{m-n} = a^m : a^n$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$

Ця властивість поширюється також на частку трьох і більше степенів:

$b^m : b^n : b^k = b^{m-n-k}$, $b \neq 0$

Видавництво «Ранок»

Наприклад:

$\left(a^{-3}\right)^{7}=a^{(-3)\cdot 7}=a^{-21}$

$\left(b^{6}\right)^{-6}=b^{6\cdot(-6)}=b^{-36}$

$\left(\left(a^{-2}\right)^{-1}\right)^{5}=a^{(-2)\cdot(-1)\cdot 5}=a^{10}$

$\left(8^{2}\right)^{-3}=8^{2\cdot(-3)}=8^{-6}$

$\left(9^{-4}\right)^{-4}=9^{(-4)\cdot(-4)}=9^{16}$

$\left((-2)^{-1}\right)^{5}=(-2)^{(-1)\cdot 5}=(-2)^{-5}$

СЛІД ЗНАТИ!

$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{m\cdot n}=a^{n\cdot m}$

$a^{m\cdot n}=\left(a^{m}\right)^{n}=\left(a^{n}\right)^{m}$

Правильною є й така рівність:

$\left(\left(a^{m}\right)^{n}\right)^{k}=a^{m\cdot n\cdot k},\ a\neq 0$

Стратегія

1) Записуємо числа у вигляді степеня з відповідними основами:

$64=2^{6};\ 27=3^{3};\ 81=3^{4}.$

2) Застосовуємо властивості множення:

$a\cdot b=b\cdot a;\ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$

3) Застосовуємо властивості степеня:

$a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n};\ \frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}.$

Піднесення степеня до степеня

Властивість 3	Правило піднесення степеня до степеня
Для будь-якого $a\neq 0$ та будь-яких цілих чисел m та n справджується рівність $\left(a^{m}\right)^{n}=a^{m\cdot n}$	При **піднесенні степеня до степеня** відмінну від нуля основу залишають тією самою, а показники степенів **перемножують.**

РОЗМИНКА 3

1 Виконайте піднесення до степеня.

1) $\left(6^{-2}\right)^{7}$; 2) $\left(3^{2}\right)^{-4}$; 3) $\left(9^{-5}\right)^{-2}$; 4) $\left(8^{-1}\right)^{-1}$; 5) $\left(\left(7^{3}\right)^{-7}\right)^{-2}$.

2 Запишіть вираз b^{-24} у вигляді степеня з основою:

1) b^{2}; 2) b^{3}; 3) b^{4}; 4) b^{24}; 5) b^{-1}; 6) b^{-6}; 7) b^{-8}; 8) b^{-12}.

ПРИКЛАД 1

Виконайте дії:

1) множення $2^{-5}\cdot a^{-4}b^{3}\cdot 64a^{5}b^{-5}$, якщо $a\neq 0,\ b\neq 0$;

2) ділення $27x^{-3}y^{-4}:\left(81x^{-1}y\right)$, якщо $x\neq 0,\ y\neq 0$.

Розв'язання

1) $2^{-5}a^{-4}b^{3}\cdot 64a^{5}b^{-5}=2^{-5}a^{-4}b^{3}\cdot 2^{6}a^{5}b^{-5}=$

$=\left(2^{-5}\cdot 2^{6}\right)\left(a^{-4}\cdot a^{5}\right)\left(b^{3}\cdot b^{-5}\right)=2^{-5+6}\cdot a^{-4+5}\cdot b^{3+(-5)}=2ab^{-2}=\frac{2a}{b^{2}}.$

2) $27x^{-3}y^{-4}:\left(81x^{-1}y\right)=\frac{3^{3}x^{-3}y^{-4}}{3^{4}x^{-1}y}=\frac{3^{3}}{3^{4}}\cdot\frac{x^{-3}}{x^{-1}}\cdot\frac{y^{-4}}{y}=$

$=\frac{1}{3}x^{-3-(-1)}y^{-4-1}=\frac{1}{3}x^{-2}y^{-5}.$

Відповідь: 1) $\frac{2a}{b^{2}}$; 2) $\frac{1}{3}x^{-2}y^{-5}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Виконайте множення і ділення:

1) $9^{-1}a^{6}\cdot 9a^{-5}$;

2) $8a^{-7}\cdot 8^{-1}a^{8}$;

3) $27a^{-3}b^{-4}\cdot 3^{-2}a^{3}b^{5}$;

4) $16a^{3}b^{-6}\cdot 2^{-5}a^{-2}b^{6}$;

5) $20a^{-1}:\left(5a^{3}\right)$;

6) $42a^{-1}:\left(7a^{2}\right)$;

7) $25a^{-5}b:\left(125a^{-1}b^{-2}\right)$;

8) $512ab^{-4}:\left(64a^{-2}b^{-1}\right)$.

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 2

Обчисліть значення виразу $\dfrac{3^{-3}\cdot 81^{-3}}{27^{-5}}$.

Розв'язання

$$\frac{3^{-3}\cdot 81^{-3}}{27^{-5}}=\frac{27^{5}}{3^{3}\cdot 81^{3}}=\frac{\left(3^{3}\right)^{5}}{3^{3}\cdot\left(3^{4}\right)^{3}}=\frac{3^{15}}{3^{3}\cdot 3^{4\cdot 3}}=\frac{3^{15}}{3^{3}\cdot 3^{12}}=\frac{3^{15}}{3^{3+12}}=\frac{3^{15}}{3^{15}}=1.$$

Стратегія

1) Застосовуємо формули:
$a^{-n}=\dfrac{1}{a^{n}}$; $\dfrac{1}{a^{-n}}=a^{n}$.

2) Записуємо всі степені з основою 3:
$81=3^{4}$; $27=3^{3}$.

3) Застосовуємо властивості:
$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{m\cdot n}$; $a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$;
$\dfrac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Обчисліть значення виразу:

1) $49\cdot 7^{-3}$;
2) $64\cdot 8^{-3}$;
3) $3\cdot 9^{-2}$;
4) $2\cdot 4^{-3}$;
5) $\dfrac{5^{-4}}{25^{-3}}$;
6) $\dfrac{6^{-9}}{36^{-5}}$;
7) $\dfrac{4^{-3}\cdot 64^{-1}}{16^{-4}}$;
8) $\dfrac{4^{-5}}{2^{-7}\cdot 8^{-1}}$.

ПРИКЛАД 3

Спростіть вираз $\dfrac{a\cdot\left(a^{3}\right)^{-5}}{\left(a^{-4}\right)^{4}}$, якщо $a\neq 0$.

Розв'язання

$$\frac{a\cdot\left(a^{3}\right)^{-5}}{\left(a^{-4}\right)^{4}}=\frac{a\cdot a^{3\cdot(-5)}}{a^{-4\cdot 4}}=\frac{a^{1}\cdot a^{-15}}{a^{-16}}=\frac{a^{1+(-15)}}{a^{-16}}=\frac{a^{-14}}{a^{-16}}=a^{-14-(-16)}=a^{2}.$$

Стратегія

Визначаємо порядок дій:

1) піднесення степеня до степеня:
$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{m\cdot n}$;

2) множення степенів:
$a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$;

3) ділення степенів:
$\dfrac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Спростіть вираз, якщо $a\neq 0$:

1) $\dfrac{a\cdot a^{-2}}{a^{-1}}$;
2) $\dfrac{a^{-1}\cdot a}{a^{-2}}$;
3) $\dfrac{a^{-7}}{a^{-5}\cdot a^{4}}$;
4) $\dfrac{a^{-9}}{a^{3}\cdot a^{-2}}$;
5) $\dfrac{a^{2}\cdot a^{-4}}{\left(a^{3}\right)^{-1}}$;
6) $\dfrac{a^{-3}\cdot a^{2}}{\left(a^{4}\right)^{-1}}$;
7) $\dfrac{\left(a^{3}\right)^{-2}}{a^{2}\cdot\left(a^{4}\right)^{-5}}$;
8) $\dfrac{\left(a^{2}\right)^{-4}}{a^{3}\cdot\left(a^{5}\right)^{-2}}$.

Властивості степенів із різними основами

Степінь добутку двох множників

Властивість 4	Правило піднесення добутку до степеня
Для будь-яких $a\neq 0$, $b\neq 0$ та довільного цілого числа n справджується рівність $(ab)^{n}=a^{n}\cdot b^{n}$	При піднесенні **добутку** до степеня треба піднести до цього степеня **кожний із множників** і результати перемножити.

Наприклад:

$(b\cdot c)^{-6}=b^{-6}\cdot c^{-6}$

$(5d)^{-3}=5^{-3}d^{-3}$

$(4\cdot m\cdot n)^{-1}=4^{-1}m^{-1}n^{-1}$

$(2\cdot 11)^{-9}=2^{-9}\cdot 11^{-9}$

$((-3)\cdot 8)^{-7}=(-3)^{-7}\cdot 8^{-7}$

$(2\cdot 9\cdot 5)^{-2}=2^{-2}\cdot 9^{-2}\cdot 5^{-2}$

Видавництво «Ранок»

СЛІД ЗНАТИ!

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

Ця властивість поширюється також на степінь добутку трьох і більше множників:

$$(abc)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n,$$
$$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

РОЗМИНКА 4

1 Подайте у вигляді добутку степенів вираз:

1) $(cd)^{-2}$; 2) $(5a)^{-3}$; 3) $(-4b)^{-7}$; 4) $(-xy)^{-4}$; 5) $(7bc)^{-5}$.

2 Обчисліть раціональним способом:

1) $2^{-4} \cdot (0{,}5)^{-4}$; 2) $4^{-3} \cdot (0{,}25)^{-3}$; 3) $(10)^{-2} \cdot (-0{,}1)^{-2}$.

ПРИКЛАД 4

Подайте:

1) степінь у вигляді добутку: $\left(0{,}25x^3y^{-4}\right)^{-2}$, якщо $x \neq 0$, $y \neq 0$;

2) добуток у вигляді степеня з показником 2: $225a^{-6}b^{-10}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Розв'язання

1) Підносимо до степеня кожний із множників. Виконуємо дії.

$$\left(0{,}25x^3y^{-4}\right)^{-2} = (0{,}25)^{-2} \cdot \left(x^3\right)^{-2} \cdot \left(y^{-4}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot x^{3(-2)} \cdot y^{-4(-2)} = 4^2 \cdot x^{-6} \cdot y^8 = 16x^{-6}y^8.$$

2) Подаємо кожний із множників у вигляді квадрата одночлена. Перетворюємо добуток степенів на степінь добутків.

$$225a^{-6}b^{-10} = \underbrace{15 \cdot 15}_{2} \cdot \underbrace{a^{-3} \cdot a^{-3}}_{2} \cdot \underbrace{b^{-5} \cdot b^{-5}}_{2} = 15^2 \cdot \left(a^{-3}\right)^2 \cdot \left(b^{-5}\right)^2 = \left(15a^{-3}b^{-5}\right)^2.$$

$a^n \cdot b^n \cdot c^n = (abc)^n$

СЛІД ЗНАТИ!

Усі властивості можна використовувати як у прямому, так і у зворотному порядку.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Подайте:

1) степінь у вигляді добутку, якщо $x \neq 0$, $y \neq 0$:

а) $\left(0{,}1x^5\right)^{-2}$; б) $\left(0{,}1x^2\right)^{-3}$; в) $\left(0{,}5x^{-1}y^6\right)^{-3}$; г) $\left(0{,}2x^7y^{-1}\right)^{-2}$;

2) добуток у вигляді степеня з показником n ($x \neq 0$, $y \neq 0$):

а) $49x^{-4}$; $36x^{-6}$, якщо $n = 2$; б) $27x^{-3}y^{-6}$; $8x^{-6}y^{-9}$, якщо $n = 3$.

Наприклад:

$$\left(\frac{4b}{5c}\right)^{-7} = \frac{(4b)^{-7}}{(5c)^{-7}}$$

$$(m:n)^{-1} = m^{-1} : n^{-1}$$

$$\left(\frac{2}{9}\right)^{-5} = \frac{2^{-5}}{9^{-5}}$$

$$(10:0{,}5)^{-6} = 10^{-6} : (0{,}5)^{-6}$$

Степінь частки

Властивість 5	Правило піднесення дробу (частки) до степеня
Для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$ та довільного цілого числа n справджується рівність $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $(a:b)^n = a^n : b^n$	Виконуючи **піднесення до степеня** дробу, слід піднести до цього степеня **окремо чисельник** та **окремо знаменник** і записати перший результат у чисельник, а другий — у знаменник нового дробу.

Видавництво «Ранок»

РОЗМИНКА 5

Запишіть вираз у вигляді частки степенів:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$; 2) $\left(\frac{c}{d}\right)^{-3}$; 3) $\left(\frac{-5}{a}\right)^{-2}$; 4) $\left(\frac{b}{-4}\right)^{-6}$; 5) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2}$; 6) $\left(\frac{1}{d}\right)^{8}$.

ДОСЛІДЖУЄМО

1) Проаналізуйте інформацію, подану в таблиці — запис виразів різними способами.
2) Які властивості та формули було застосовано?

Вираз	Вигляд запису виразу			
	Частка степенів із від'ємними показниками	Степінь із додатним показником	Частка степенів із додатними показниками	Добуток степенів
$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$	$\frac{2^{-3}}{5^{-3}}$	$\left(\frac{5}{2}\right)^{3}$	$\frac{5^3}{2^3}$	$2^{-3}\cdot 5^3$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-5}$	$\frac{a^{-5}}{b^{-5}}$	$\left(\frac{b}{a}\right)^{5}$	$\frac{b^5}{a^5}$	$a^{-5}\cdot b^5$

Запишіть різними способами вирази $\left(\frac{7}{x}\right)^{-5}$; $\left(\frac{1}{c}\right)^{-9}$; $\left(\frac{y}{3}\right)^{4}$.

СЛІД ЗНАТИ!

$(a:b)^n = a^n : b^n$

$a^n : b^n = (a:b)^n$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Вираз із цілим показником можна переносити із чисельника в знаменник і навпаки, змінюючи знак показника степеня на протилежний.

$$\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}$$

ПРИКЛАД 5

Обчисліть: $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

Розв'язання

Стратегія

1) Перетворюємо основи степеня в неправильні дроби: $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$; $1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

2) Застосовуємо формулу $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}=\frac{b^n}{a^n}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

3) Множимо дроби.

4) Застосовуємо властивість $a^{m+n}=a^m a^n$, $a\neq 0$: $3^3=3\cdot 3^2$; $4^3=4\cdot 4^2$

5) Скорочуємо дроби, обчислюємо.

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3}=\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{3^3}{4^3}=\frac{\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{3^2}}{\cancel{3^2}\cdot\cancel{4}\cdot 4^2}=\frac{3}{16}.$$

Відповідь: $\frac{3}{16}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Обчисліть:

1) $11\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^{-1}$; 4) $\left(\frac{3}{17}\right)^{-2}\cdot 17^{-2}$; 7) $\left(2\frac{1}{5}\right)^{-2}:2{,}2^{-3}$;

2) $12\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{-1}$; 5) $\left(\frac{8}{7}\right)^{-2}:\left(1\frac{1}{7}\right)^{-1}$; 8) $\left(3\frac{3}{5}\right)^{-3}:3{,}6^{-4}$.

3) $\left(\frac{2}{15}\right)^{-2}\cdot 15^{-2}$; 6) $\left(\frac{11}{9}\right)^{-2}:\left(1\frac{2}{9}\right)^{-1}$;

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 6

Виконайте дії. Відповідь запишіть у стандартному вигляді.

1) $(5\cdot10^{-9})(2{,}7\cdot10^{3})$; **2)** $\dfrac{1{,}3\cdot10^{-3}}{2{,}6\cdot10^{-8}}$.

Розв'язання

1) $(5\cdot10^{-9})(2{,}7\cdot10^{3})=(5\cdot2{,}7)(10^{-9}\cdot10^{3})=\ldots\ldots$

$=13{,}5\cdot10^{-9+3}=13{,}5\cdot10^{-6}=$

$=(1{,}35\cdot10^{1})\cdot10^{-6}=1{,}35\cdot10^{1-6}=1{,}35\cdot10^{-5}$

Застосовуємо переставний і сполучний закони множення. Виконуємо множення чисел і степенів.

Записуємо число $13{,}5$ у стандартному вигляді. Виконуємо множення степенів.

2) $\dfrac{1{,}3\cdot10^{-3}}{2{,}6\cdot10^{-8}}=\dfrac{1{,}3}{2{,}6}\cdot\dfrac{10^{-3}}{10^{-8}}=\dfrac{1}{2}\cdot10^{-3-(-8)}=\ldots\ldots\ldots$

$=0{,}5\cdot10^{5}=(5\cdot10^{-1})\cdot10^{5}=5\cdot10^{-1+5}=5\cdot10^{4}$ . . .

Записуємо у вигляді добутку. Виконуємо ділення чисел і степенів.

Записуємо число $0{,}5$ у стандартному вигляді. Виконуємо множення степенів.

СЛІД ЗНАТИ!

1) $(a\cdot10^{m})(b\cdot10^{n})=ab\cdot10^{m+n}$

2) $\dfrac{a\cdot10^{m}}{b\cdot10^{n}}=\dfrac{a}{b}\cdot10^{m-n}$

3) $(a\cdot10^{m})^{n}=a^{n}\cdot10^{m\cdot n}$

ТРЕНУЄМОСЯ 6

Виконайте дії. Відповідь запишіть у стандартному вигляді.

1) $(3\cdot10^{-4})\cdot(2{,}1\cdot10^{5})$; **3)** $(5\cdot10^{-5})\cdot(4\cdot10^{-3})$;

2) $(1{,}3\cdot10^{-7})\cdot(2\cdot10^{9})$; **4)** $(6\cdot10^{-2})\cdot(5\cdot10^{-7})$;

5) $\dfrac{5{,}4\cdot10^{12}}{1{,}8\cdot10^{12}}$; **6)** $\dfrac{8{,}4\cdot10^{8}}{2{,}1\cdot10^{8}}$; **7)** $\dfrac{1{,}2\cdot10^{-15}}{2\cdot10^{-20}}$; **8)** $\dfrac{2{,}8\cdot10^{-18}}{4\cdot10^{-25}}$.

ПРАКТИКУМ

9.1 Обчисліть:

1) $4^{10}\cdot4^{-8}$; **3)** $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{6}\cdot\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-6}$; **5)** $1{,}6^{-13}\cdot\left(1\dfrac{3}{5}\right)^{14}$;

2) $3^{12}\cdot3^{-10}$; **4)** $\left(\dfrac{9}{2}\right)^{-7}\cdot\left(\dfrac{9}{2}\right)^{7}$; **6)** $\left(1\dfrac{4}{5}\right)^{17}\cdot1{,}8^{-16}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$a^{n+m}=a^{n}a^{m}$

$a^{-6}=a^{-3+(-3)}=a^{-3}a^{-3}$

$a^{-6}=a^{1+(-7)}=a^{1}a^{-7}$

$a^{-6}=a^{-10+4}=a^{-10}a^{4}$

9.2 Запишіть у вигляді добутку двох однакових степенів степінь:

1) 3^{-8}; **2)** 5^{-2}; **3)** $(-7)^{-6}$; **4)** a^{-10}; **5)** b^{-2}; **6)** $(-c)^{-50}$.

9.3 Подайте вираз a^{-10} у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами, один із яких дорівнює:

1) a^{-4}; **2)** a^{-5}; **3)** a^{5}; **4)** a^{2}; **5)** a^{1}; **6)** a^{-1}; **7)** a^{0}; **8)** a^{-10}.

Видавництво «Ранок»

9.4 Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{7}x \cdot 7x^{-1}$; 3) $36x^{-1}y \cdot \frac{1}{12}xy^{-1}$; 5) $4x^{-2}y^{3} \cdot 0{,}25x^{2}y^{-3}$;

2) $53x : \left(53x^{-1}\right)$; 4) $48xy^{-3} : \left(24x^{-1}y^{-4}\right)$; 6) $3x^{-8}y^{-2} : \left(6x^{-7}y^{-2}\right)$.

9.5 Подайте у вигляді степеня числа 10 значення виразу:

1) $10^{3} \cdot 10^{-5}$; 2) $10^{-5} : 10^{-6}$; 3) $10 \cdot 10^{-1} : 10^{4}$.

9.6 Подайте вирази у вигляді степеня:

а) з показником -2; б) з показником -4.

1) 2^{-12}; 2) a^{-8}; 3) 3^{16}; 4) b^{20}; 5) 5^{4}; 6) c^{4}.

9.7 Запишіть вираз у вигляді степеня з основою a:

1) $7^{-9} : 343^{-4}$, $a = 7$;
2) $11^{-4} : 121$, $a = 11$;
3) $25^{-5} : 125^{-4}$, $a = 5$;
4) $16^{-4} : 64^{-5}$, $a = 4$.

9.8 Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $\left((-b)^{2}\right)^{-1}$; 3) $\left((-b)^{5}\right)^{-1}$; 5) $\left(-b^{3}\right)^{-4}$; 7) $\left(-b^{6}\right)^{-5}$;

2) $\left((-b)^{4}\right)^{-1}$; 4) $\left((-b)^{3}\right)^{-1}$; 6) $\left(-b^{5}\right)^{-2}$; 8) $\left(-b^{4}\right)^{-3}$.

9.9 Спростіть вираз:

1) $\frac{a^{-2}\left(b^{2}\right)^{3}}{a^{-3}b^{5}}$; 2) $\frac{a^{-3}\left(b^{3}\right)^{4}}{a^{-4}b^{11}}$; 3) $\frac{a^{-9}\left(b^{5}\right)^{-1}}{a^{-10}b^{-4}}$; 4) $\frac{a^{-12}\left(b^{6}\right)^{-1}}{a^{-11}b^{-7}}$.

9.10 Обчисліть раціональним способом:

1) $\left(-\frac{1}{9}\right)^{-4} \cdot 9^{-4}$; 3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-5} \cdot \left(-\frac{14}{6}\right)^{-5}$; 5) $(-2{,}5)^{-10} \cdot \left(-\frac{6}{15}\right)^{-10}$;

2) $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-6} \cdot 8^{-6}$; 4) $\left(\frac{2}{9}\right)^{-7} \cdot \left(-\frac{27}{6}\right)^{-7}$; 6) $(-1{,}2)^{-12} \cdot \left(-\frac{20}{24}\right)^{-12}$.

9.11 Подайте добуток у вигляді степеня з показником -3.

1) $\frac{1}{11^{3}} \cdot x^{-3}$; 3) $\frac{1}{x^{6}} \cdot 17^{-6}$; 5) $8 \cdot x^{-15}$; 7) $0{,}001 \cdot x^{-21}$;

2) $\frac{1}{x^{3}} \cdot 13^{-3}$; 4) $\frac{1}{15^{6}} \cdot x^{-6}$; 6) $27 \cdot x^{-12}$; 8) $0{,}064 \cdot x^{-24}$.

9.12 Виконайте дії та запишіть результат у стандартному вигляді:

1) $2 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{3}$; 3) $1{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 4$; 5) $8 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{6}$; 7) $4 \cdot 5{,}4 \cdot 10^{-4}$;

2) $\left(2 \cdot 10^{-3}\right)^{2}$; 4) $\left(3 \cdot 10^{-4}\right)^{2}$; 6) $\left(5 \cdot 10^{-6}\right)^{3}$; 8) $\left(6 \cdot 10^{-9}\right)^{3}$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$8^{-3} \cdot 8^{-4} = (8 \cdot 8)^{-3-4} = 64^{-7}$;

$6^{-2} \cdot 6^{5} = 6^{(-2)5} = 6^{-10}$;

$5^{-6} : 5^{3} = 5^{(-6):3} = 5^{-2}$;

$a^{10} \cdot a^{-9} = a^{10-9} = 1$;

$\frac{a^{-3}}{a^{-4}} = a^{-3-4} = a^{-7}$

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Запишіть вираз $256a^{-24}b^{48}$ у вигляді степеня різними способами.

Виграє той / та, хто знайде найбільше способів.

ПРИГАДАЙТЕ!

$a^{n} \cdot b^{n} = (a \cdot b)^{n}$

$(-a)^{n} = (-1)^{n} \cdot a^{n}$

Видавництво «Ранок»

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

9.13 Винесіть за дужки спільний множник x у найменшому степені у виразах 1–7.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $4x^{-3}+x^{-10}$. • Визначаємо найменший показник степеня: x^{-10}. • Виносимо множник x^{-10} за дужки, поділивши на нього кожний із доданків: $4x^{-3}+x^{-10}=x^{-10}\left(\frac{4x^{-3}}{x^{-10}}+\frac{x^{-10}}{x^{-10}}\right)=x^{-10}\left(4x^{-3+10}+1\right)=x^{-10}\left(4x^{7}+1\right)$. *Відповідь*: $x^{-10}\left(4x^{7}+1\right)$.	2) $3x^{4}+x^{9}$; 3) $x^{6}+2x^{2}$; 4) $3x^{-4}+x^{-9}$; 5) $x^{-6}+2x^{-2}$; 6) $3x^{3}-2x^{-2}+x^{-3}$; 7) $x^{-4}+5x^{2}-6x^{-1}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Знайдіть порядок числа $\frac{a}{10^{-8}}$, якщо порядок числа a дорівнює -15.

1. Записуємо число a в стандартному вигляді:
$$a=b\cdot 10^{-15}.$$
2. Підставляємо, спрощуємо:
$$\frac{a}{10^{-8}}=a\cdot 10^{8}=$$
$$=b\cdot 10^{-15}\cdot 10^{8}=b\cdot 10^{-7}.$$
3. Відповідь: порядок числа -7.

9.14 Знайдіть порядок числа:

1) $a\cdot 10^{8}$, якщо порядок числа a дорівнює -16;
2) $a\cdot 10^{-3}$, якщо порядок числа a дорівнює 10;
3) $\frac{a}{10^{-7}}$, якщо порядок числа a дорівнює -11;
4) $\frac{a}{10^{-12}}$, якщо порядок числа a дорівнює 5.

9.15 Спростіть вираз:

1) $\frac{35^{n}}{7^{n}\cdot 5^{n-2}}$; 2) $\frac{10^{m}}{2^{m-1}\cdot 5^{m}}$; 3) $\frac{7^{k}\cdot 2^{k+1}}{14^{k}}$; 4) $\frac{4^{m+1}\cdot 9^{m}}{36^{m}}$.

MATH FOR LIFE

9.16 **Запаси прісної води.** У таблиці наведена кількість запасів прісної води на Землі в різних частинах гідросфери. Визначте, у скільки разів кількість прісної води:

1) у льодовиках перевищує її кількість у річкових водах;
2) у підземних джерелах менша від її кількості в льодовиках.

Джерела прісної води	Кількість запасів (у км^3)
Льодовики	$2{,}4\cdot 10^{7}$
Підземні джерела	$4\cdot 10^{6}$
Річкові води	$1{,}2\cdot 10^{3}$

ПРИГАДАЙТЕ!

$$(ab)^{n}=a^{n}b^{n}$$
$$\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m}:a^{n}=a^{m-n}$$
$$a\neq 0$$

9.17 **Астрономія.** Розв'яжіть задачі та запишіть відповіді у стандартному вигляді.

1) Рухаючись навколо Сонця, за добу Земля проходить відстань $2{,}7\cdot 10^{6}$ км. Яку відстань Земля подолає за 50 діб?
2) За одну секунду Сонце «спалює» близько $4{,}4\cdot 10^{6}$ т водню. Скільки водню «спалює» Сонце за 100 хв?
3) Швидкість світла дорівнює $3\cdot 10^{5}$ км/с. Відстань від Землі до Сонця в середньому становить 150 млн км. За скільки секунд світло долає цю відстань?

Видавництво «Ранок»

9.18 **Вітаміни.** Підлітки мають щодня отримувати орієнтовно 10^{-3} г вітаміну А та $7 \cdot 10^{-2}$ г вітаміну С. У таблиці наведено вміст (у г) вітамінів А і С у 100 г різних соків.

1) У скільки разів вміст вітаміну С більший за вміст вітаміну А у 100 г грейпфрутового соку?
2) У скільки разів вміст вітаміну С у 100 г томатного соку менший, ніж у 100 г апельсинового?
3) Скільки грамів томатного соку можуть забезпечити добову потребу підлітків у вітаміні С?
4) Скільки грамів апельсинового соку можуть забезпечити добову потребу підлітків у вітаміні А?
5) Як ви вважаєте, чи можна задовольнити добову потребу у вітаміні А за рахунок апельсинового соку?

Сік	Вітамін А	Вітамін С
Апельсиновий	10^{-5} г	$5 \cdot 10^{-2}$ г
Грейпфрутовий	$2 \cdot 10^{-6}$ г	$4 \cdot 10^{-2}$ г
Томатний	$5 \cdot 10^{-5}$ г	10^{-2} г

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 7

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Виконайте множення: $3^5 \cdot 3^{-2}$.

А	Б	В	Г
3^{-7}	3^{-10}	3^3	3^7

2 Виконайте ділення: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

А	Б	В	Г
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^7$	$\left(\frac{2}{3}\right)^7$	$\frac{2}{3}$

3 Спростіть вираз $(9a)^{-1}$.

А	Б	В	Г
$-9a$	$\frac{1}{9a}$	$\frac{9}{a}$	$-\frac{1}{9a}$

4 Виконайте піднесення до степеня: $\left(n^3\right)^{-2}$.

А	Б	В	Г
n^{-5}	n	n^5	n^{-6}

5 У Всесвітній день кішок, який відзначається 1 березня, близько 17 тисяч безпритульних тварин знайшли свій дім. Запишіть це число в стандартному вигляді.

А	Б	В	Г
$1{,}7 \cdot 10^4$	$1{,}7 \cdot 10^3$	$17 \cdot 10^4$	$17 \cdot 10^3$

6 Установіть відповідність між значенням виразу (1–3) та записом цього значення в стандартному вигляді (А–Г).

1	$500 \cdot 100$	А	$5 \cdot 10^{-3}$
2	$50 \cdot 10^{-5}$	Б	$5 \cdot 10^{-4}$
3	$0{,}5 \cdot 10^{-2}$	В	$5 \cdot 10^4$
		Г	$5 \cdot 10^3$

7 Обчисліть значення виразу $\frac{125^{-6}}{5^{-3} \cdot 25^{-7}}$.

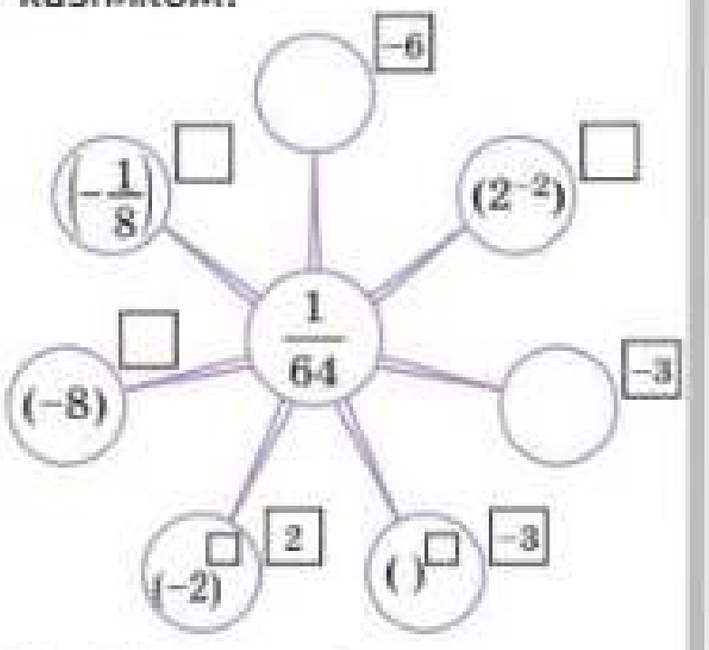
8 Спростіть вираз $\frac{\left(a^{-2}\right)^6}{a \cdot \left(a^5\right)^{-3}}$, якщо $a \neq 0$.

Видавництво «Ранок»

Завдання 9.19 → Практикум, 9.1
Завдання 9.20 → Практикум, 9.3
Завдання 9.21 → Приклад 1
Завдання 9.22 → Практикум, 9.4
Завдання 9.23 → Практикум, 9.5
Завдання 9.24 → Практикум, 9.7
Завдання 9.25–9.26 → Приклади 2, 3
Завдання 9.27 → Практикум, 9.8
Завдання 9.28 → Практикум, 9.11
Завдання 9.29–9.30 → Приклади 5, 4
Завдання 9.31 → Практикум, 9.10
Завдання 9.32 → Практикум, 9.12
Завдання 9.33 → Приклад 6
Завдання 9.34 → Інтелектуальний фітнес, 9.13
Завдання 9.35–9.36 → Math for life, 9.17–9.18
Завдання 9.37 → Інтелектуальний фітнес, 9.14

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Заповніть порожні комірки на схемі, подавши число $\frac{1}{64}$ у вигляді степеня із цілим показником.



Зробіть аналогічну схему з порожніми комірками для числа $\frac{1}{128}$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

9.19 Обчисліть:

1) $6^{14}\cdot 6^{-12}$; 2) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-8}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{8}$; 3) $\left(1\frac{2}{5}\right)^{13}\cdot 1{,}4^{-12}$.

9.20 Подайте вираз a^{-12} у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами, один із яких дорівнює:

1) a^{-3}; 2) a^{-6}; 3) a^{7}; 4) a^{6}; 5) a^{1}; 6) a^{-1}; 7) a^{0}; 8) a^{-12}.

9.21 Виконайте дії:

1) $7^{-1}a^{8}\cdot 7a^{-9}$;
2) $64a^{-4}b^{-5}\cdot 4^{-4}a^{4}b^{6}$;
3) $28a^{-1}:\left(4a^{3}\right)$;
4) $81a^{-3}b:\left(27a^{-2}b^{-1}\right)$.

9.22 Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{6}x\cdot 6x^{-1}$; 3) $52x^{-1}y\cdot\frac{1}{26}xy^{-1}$; 5) $2x^{-3}y^{4}\cdot 0{,}5x^{3}y^{-4}$;
2) $67x:\left(67x^{-1}\right)$; 4) $35x^{-8}:\left(7x^{-9}\right)$; 6) $4x^{-4}y^{-6}:\left(12x^{-4}y^{-5}\right)$.

9.23 Подайте у вигляді степеня числа 10 значення виразу:

1) $10^{2}\cdot 10^{-3}$; 2) $10^{-8}:10^{-11}$; 3) $10\cdot 10^{-1}:10^{8}$.

9.24 Запишіть вираз у вигляді степеня з основою a:

1) $5:25^{-4}$, $a=5$; 2) $13^{-6}:169$, $a=13$; 3) $2^{-14}:16^{-5}$, $a=2$.

9.25 Обчисліть значення виразу:

1) $81\cdot 9^{-3}$; 2) $5\cdot 25^{-4}$; 3) $\frac{7^{-6}}{49^{-4}}$; 4) $\frac{81^{-3}}{3^{-10}\cdot 27^{-1}}$.

9.26 Спростіть вираз, якщо $a\neq 0$:

1) $\frac{a\cdot a^{-3}}{a^{-1}}$; 2) $\frac{a^{-8}}{a^{-6}\cdot a^{5}}$; 3) $\frac{a^{3}\cdot a^{-5}}{\left(a^{2}\right)^{-1}}$; 4) $\frac{\left(a^{3}\right)^{-5}}{a^{4}\cdot\left(a^{4}\right)^{-6}}$; 5) $\frac{a^{-5}b}{a^{-5}b^{-1}}$.

9.27 Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $\left((-b)^{6}\right)^{-1}$; 2) $\left((-b)^{7}\right)^{-1}$; 3) $\left(-b^{3}\right)^{-2}$; 4) $\left(-b^{2}\right)^{-5}$.

9.28 Подайте добуток у вигляді степеня з показником -2.

1) $\frac{1}{17^{2}}\cdot x^{-2}$; 2) $\frac{1}{x^{6}}\cdot 15^{-6}$; 3) $16\cdot x^{-14}$; 4) $0{,}01\cdot x^{-18}$.

9.29 Обчисліть:

1) $\left(\frac{2}{19}\right)^{-2}\cdot 19^{-2}$; 2) $\left(\frac{13}{8}\right)^{-2}:\left(1\frac{5}{8}\right)^{-1}$; 3) $\left(4\frac{1}{2}\right)^{-4}:4{,}5^{-5}$.

Видавництво «Ранок»

9.30 Подайте:

1) степінь у вигляді добутку, якщо $x \neq 0$, $y \neq 0$:

а) $\left(0{,}25x^3\right)^{-2}$; б) $\left(0{,}1x^5\right)^{-3}$; в) $\left(0{,}4x^6y^{-1}\right)^{-2}$; г) $\left(0{,}2x^{-1}y^{-6}\right)^{-3}$;

2) добуток у вигляді степеня з показником n ($x \neq 0$, $y \neq 0$):

а) $100x^{-2}$; $81x^{-6}$, якщо $n=2$;

б) $64x^{-9}y^{-6}$; $27x^{-12}y^{-24}$, якщо $n=3$.

9.31 Обчисліть раціональним способом:

1) $\left(-\frac{1}{7}\right)^{-2}\cdot 7^{-2}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}\cdot\left(-\frac{28}{21}\right)^{-3}$; 3) $(-1{,}5)^{-14}\cdot\left(-\frac{16}{24}\right)^{-14}$.

9.32 Виконайте обчислення і запишіть результат у стандартному вигляді:

1) $3\cdot 1{,}4\cdot 10^5$; 2) $2{,}1\cdot 10^{-5}\cdot 3$; 3) $4\cdot 6{,}2\cdot 10^8$; 4) $6\cdot 3{,}2\cdot 10^{-7}$.

9.33 Виконайте дії. Відповідь запишіть у стандартному вигляді.

1) $\left(5\cdot 10^{-4}\right)\cdot\left(8\cdot 10^{-6}\right)$; 2) $\frac{9{,}3\cdot 10^{11}}{3{,}1\cdot 10^{11}}$; 3) $\frac{4{,}5\cdot 10^{-19}}{9\cdot 10^{-24}}$.

9.34 Винесіть за дужки спільний множник x у найменшому степені у виразі:

1) x^5+7x^8; 2) $x^{-5}+7x^{-8}$; 3) $4x^{-3}-6x^{-4}+x^4$.

9.35 Розв'яжіть задачі та запишіть відповіді в стандартному вигляді.

1) За одну секунду Сонце генерує близько $3{,}75\cdot 10^{26}$ Дж енергії. Скільки енергії (у Дж) Сонце генерує за 600 хв?
2) Швидкість світла дорівнює $3\cdot 10^5$ км/с. Відстань від Венери до Сонця в середньому становить 108 млн км. За скільки секунд світло долає цю відстань?

9.36 Користуючись даними таблиці до задачі 9.18, визначте й запишіть у стандартному вигляді:

1) у скільки разів вміст вітаміну С більший за вміст вітаміну А в 100 г апельсинового соку;
2) скільки грамів грейпфрутового соку можуть забезпечити добову потребу підлітків у вітаміні А.

Бонусне завдання

9.37 Знайдіть порядок числа:

1) $a\cdot 10^5$, якщо порядок числа a дорівнює -14;

2) $\frac{a}{10^{-6}}$, якщо порядок числа a дорівнює -19.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Виконайте завдання, скориставшися даними Актуальної задачі.

1) З'ясуйте, скільки грамів «Голландського» сиру мають споживати підлітки щодня, якщо в 1 г сиру міститься 0,01 г кальцію.

2) Знайдіть інформацію, скільки літрів крові у вашому організмі (залежно від віку, статі й ваги) та обчисліть відповідну кількість молекул гемоглобіну.

 # BE SMART

Ученим з Університету Ґете (Німеччина) вдалося виміряти час у зептосекундах: за 247 зептосекунд фотон перетинає молекулу водню.

Зептосекунда — це трильйонна частина мільярдної частки секунди. Запишіть це число в стандартному вигляді.

Дізнайтеся самостійно:

- на честь яких учених названі одиниці вимірювання ангстрем і фермі;
- як ці одиниці пов'язані з нанометром;
- для вимірювання яких величин вони використовуються.

Видавництво «Ранок»

§10 ФУНКЦІЯ $y=\frac{k}{x}$, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

УЧОРА — Ви познайомилися з окремим випадком лінійної функції — прямою пропорційністю $(y=kx)$, її графіком і властивостями

СЬОГОДНІ — Ви дізнаєтеся, яку функцію називають оберненою пропорційністю, які її графік і властивості

ЗАВЖДИ — Ви зможете за допомогою графіка оберненої пропорційності виконувати дослідження та приймати оптимальні фінансові й логістичні рішення.

mk.com.ua/107914

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ
- обернена пропорційність (inverse variation)
- гіпербола (hyperbola)

ПРИГАДАЙТЕ!

Дві величини називають **обернено пропорційними**, якщо в разі збільшення (зменшення) однієї з них у декілька разів інша величина зменшується (збільшується) у стільки ж разів.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

В обернено пропорційних залежностях:
- добуток обернено пропорційних величин **не змінюється**;
- обидві величини змінюються **в однакову кількість разів**.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ПЛАНУВАННЯ ЕКСКУРСІЇ

Під час планування екскурсії до етнографічного музею виникла низка запитань. Спробуйте дати відповіді на деякі з них.

1) Скільки часу може бути витрачено на дорогу в один бік, якщо відстань від школи до музею становить 240 км?

2) Скільки автобусів необхідно замовити, якщо мають поїхати 120 осіб?

Час поїздки в один бік	Кількість автобусів
Час t на дорогу до музею залежить від швидкості v автобуса: $t=\frac{240}{v}$	Кількість n автобусів залежить від кількості m місць у них: $n=\frac{120}{m}$
Збільшилася у 2 рази / Швидкість v (км/год): 40, 60, 80 / Час t (год): 6, 4, 3 / Зменшився у 2 рази	Зменшилася в 6 разів / Кількість місць m: 60, 30, 10 / Кількість автобусів n: 2, 4, 12 / Збільшилася в 6 разів
Якщо швидкість збільшується, то час руху зменшується **в стільки ж разів**	Якщо місць в автобусі менше, то кількість автобусів буде більшою **в стільки ж разів**
$40\cdot 6=60\cdot 4=80\cdot 3=240$	$60\cdot 2=30\cdot 4=10\cdot 12=120$
У разі зміни значень обернено пропорційних величин їхній добуток не змінюється (є сталою величиною)	

У розглянутій задачі математичною моделлю реальних ситуацій є **обернено пропорційна залежність**, яку можна задати формулою виду $y=\frac{k}{x}$.

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Функція виду $y=\frac{k}{x}$, де $k\neq 0$, називається оберненою пропорційністю.

Число k — коефіцієнт, x — аргумент (незалежна змінна).

СЛІД ЗНАТИ!

k — коефіцієнт оберненої пропорційності;
k — стала величина; $k\neq 0$

Наприклад:

Обернена пропорційність	Не є оберненою пропорційністю
1) $y=\frac{11}{x}\to k=11$; 2) $y=-\frac{7}{x}\to k=-7$; 3) $y=-\frac{1}{8x}\to k=-\frac{1}{8}$.	1) $y=\frac{x}{5}$; 2) $y=-\frac{3}{4x^2}$; 3) $\frac{y}{x}=9$.

РОЗМИНКА 1

Яка функція є оберненою пропорційністю? Укажіть значення k. Запишіть рівняння оберненої пропорційності іншими способами.

1) $y=\frac{5}{x}$; 2) $y=\frac{1}{6}x$; 3) $y=-\frac{1}{x}$; 4) $xy=7$; 5) $\frac{y}{x}=3$; 6) $y=\frac{4}{9x}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Функцію $y=\frac{k}{x}$ $(x\neq 0,\ k\neq 0)$ можна записати у вигляді рівнянь $y=kx^{-1}$ або $xy=k$.

Наприклад:

$y=\frac{3}{x}$: $y=3x^{-1}$ або $xy=3$

Графік оберненої пропорційності

Побудуємо графік функції $y=\frac{2}{x}$.

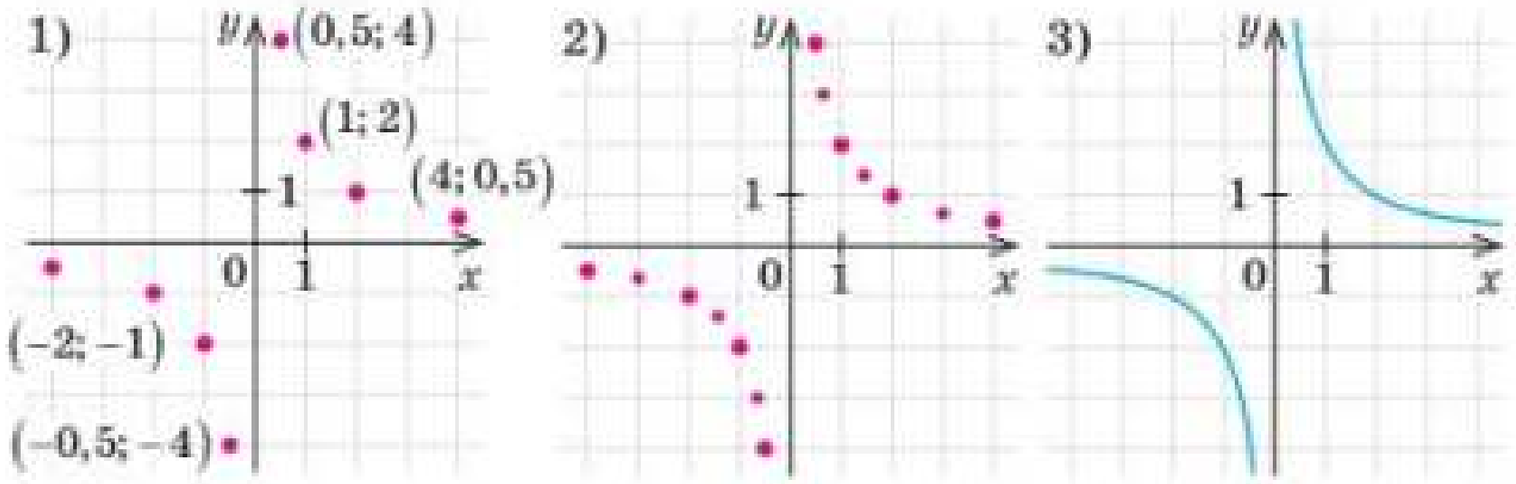
1. Складаємо таблицю значень функції для вибраних значень аргумента.

2. Позначаємо на координатній площині точки, координатами яких є отримані впорядковані пари чисел.

3. Сполучаємо ці точки (окремо в I та в III координатних чвертях).

Чим більше значень x ми візьмемо, тим точніше буде побудований графік функції.

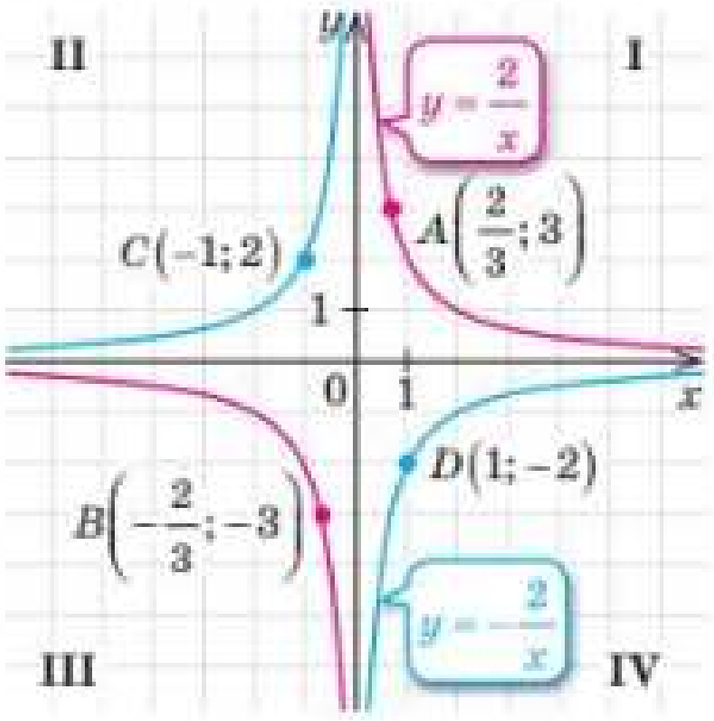
x	$y=\frac{2}{x}$	y	$(x;y)$
-4	$y=\frac{2}{(-4)}$	$-0{,}5$	$(-4;-0{,}5)$
-2	$y=\frac{2}{(-2)}$	-1	$(-2;-1)$
-1	$y=\frac{2}{(-1)}$	-2	$(-1;-2)$
$-0{,}5$	$y=\frac{2}{(-0{,}5)}$	-4	$(-0{,}5;-4)$
$0{,}5$	$y=\frac{2}{0{,}5}$	4	$(0{,}5;4)$
1	$y=\frac{2}{1}$	2	$(1;2)$
2	$y=\frac{2}{2}$	1	$(2;1)$
4	$y=\frac{2}{4}$	$0{,}5$	$(4;0{,}5)$



СЛІД ЗНАТИ!

Фігуру, яка є графіком функції $y=\frac{k}{x}$, де $k\neq 0$, називають **гіперболою**. Графік оберненої пропорційності складається з двох частин — **віток гіперболи**.

Видавництво «Ранок»



ДОСЛІДЖУЄМО

Розгляньте графіки функцій $y=\frac{2}{x}$ і $y=-\frac{2}{x}$ та дайте відповіді на запитання.

1) У яких координатних чвертях розташовані вітки гіперболи залежно від значення коефіцієнта k?
2) Чи перетинають вітки гіперболи осі координат? Поясніть чому.
3) Порівняйте абсциси й ординати точок A і B, точок C і D. Якими числами є відповідні координати?

За графіком можна визначити властивості оберненої пропорційності.

Властивості функції $y=\frac{k}{x}$, де $k\neq 0$

$k>0$	$k<0$
Вітки графіка функції розташовані:	
у I і III координатних чвертях	у II і IV координатних чвертях
Область визначення — усі числа, крім $x=0$	
Область значень — усі числа, крім $y=0$	
Значення функції:	
• якщо $x>0$, то $y>0$ • якщо $x<0$, то $y<0$	• якщо $x>0$, то $y<0$ • якщо $x<0$, то $y>0$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Для оберненої пропорційності $y=\frac{k}{x}$, де $k\neq 0$:

- $D(y)$: $x\neq 0$ (на нуль ділити не можна);
- $E(y)$: $y\neq 0$ (оскільки $k\neq 0$ за означенням)

ПРИКЛАД 1

Функцію задано формулою $y=-\frac{12}{x}$. Знайдіть:

1) y, якщо $x=-4;\ 12$; 2) x, якщо $y=-12;\ 6$;

Чи належать точки $A(-2;6)$ і $B(-3;-4)$ графіку цієї функції?

Розв'язання

1) Підставляємо у формулу значення x, знаходимо y.
2) Підставляємо у формулу значення функції y, знаходимо x.

Підставляємо у формулу координати точок.

1) $x=-4 \to y=-\frac{12}{(-4)}=3$

$x=12 \to y=-\frac{12}{12}=-1$

2) $y=-12 \to -\frac{12}{x}=-12 \to x=1$

$y=6 \to -\frac{12}{x}=6 \to x=-2$

$(x;y)$	x	y	$y=-\frac{12}{x}$	Висновок
$A(-2;6)$	-2	6	$6=-\frac{12}{(-2)}$ $6=6$	Рівність правильна. Точка $(-2;6)$ належить графіку функції
$B(-3;-4)$	-3	-4	$-4=-\frac{12}{(-3)}$ $-4=4$	Рівність неправильна. Точка $(-3;-4)$ не належить графіку функції

Відповідь: 1) 3; −1; 2) 1; −2; точка $A(-2;6)$ належить графіку функції, точка $B(-3;-4)$ — не належить.

Видавництво «Ранок»

ТРЕНУЄМОСЯ 1

1) Функцію задано формулою $y=\frac{10}{x}$. Знайдіть значення:

а) y, якщо $x=2;-5;0{,}1$; б) x, якщо $y=1;-2;-1000$.

2) Функцію задано формулою $y=-\frac{9}{x}$. Знайдіть значення:

а) y, якщо $x=3;-6;1{,}8$; б) x, якщо $y=9;-4{,}5;-0{,}09$.

3) Визначте, чи належать графіку заданої функції точки A і B:

а) $y=\frac{5}{x}$, $A(5;1)$, $B(-2;2{,}5)$; б) $y=-\frac{7}{x}$, $A(-1;-7)$, $B(2;-3{,}5)$.

ПРИГАДАЙТЕ!

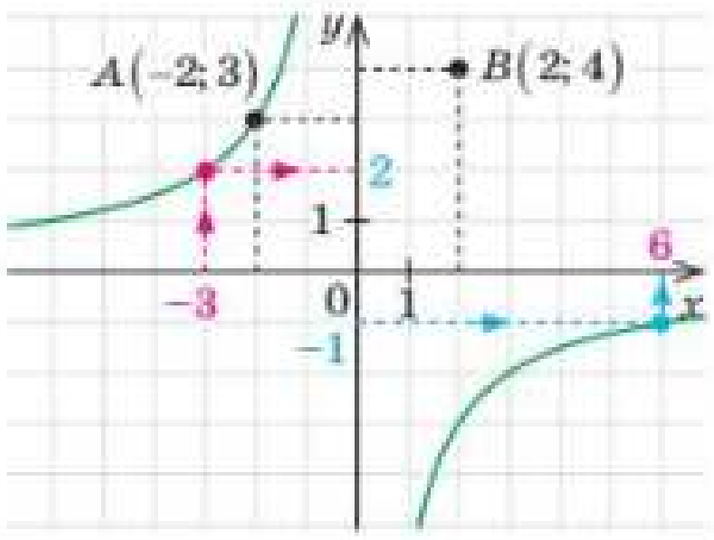
Якщо точка належить графіку функції, то її координати перетворюють формулу в правильну рівність.

ПРИКЛАД 2

Побудуйте графік функції $y=\frac{k}{x}$, якщо він проходить через точку $N(12;-0{,}5)$. За графіком визначте:

1) y, якщо $x=-3$; 2) x, якщо $y=-1$;

3) чи належать точки $A(-2;3)$ і $B(2;4)$ графіку цієї функції.



Розв'язання

Записуємо рівняння $y=\frac{k}{x}$ в іншому вигляді. ..... $xy=k$

Підставляємо координати точки $N(12;-0{,}5)$ в рівняння. Знаходимо k. ... $k=12\cdot(-0{,}5)=-6$

Будуємо графік функції $y=-\frac{6}{x}$. ..... Наприклад, скориставшися програмою Microsoft Excel.

1) Знаходимо значення y, якщо $x=-3$. ..... Якщо $x=-3$, то $y=2$.

2) Знаходимо значення x, якщо $y=-1$. ..... Якщо $y=-1$, то $x=6$.

3) Позначаємо точки $A(-2;3)$ і $B(2;4)$. $A(-2;3)$ — належить графіку; $B(2;4)$ — не належить графіку.

Робимо висновок.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

1) Побудуйте графік функції $y=\frac{k}{x}$, якщо він проходить через точку $(2;1)$. За графіком визначте:

а) y, якщо $x=1;-2$; в) чи належать точки $A(1;4)$

б) x, якщо $y=4;-1$; і $B(-1;-2)$ цьому графіку.

2) Побудуйте графік функції $y=\frac{k}{x}$, якщо він проходить через точку $(0{,}5;-6)$. За графіком визначте:

а) y, якщо $x=3;-1$; в) чи належать точки $A(1;3)$

б) x, якщо $y=1;-2$; і $B(-3;-1)$ цьому графіку.

В ОДИН КЛІК

Таблицю значень для побудови графіка функції легко скласти за допомогою програми Microsoft Excel.

	A	B	C
1	x	y=k/x	k
2	1	8,00	8
3	2	4,00	
4	4	2,00	

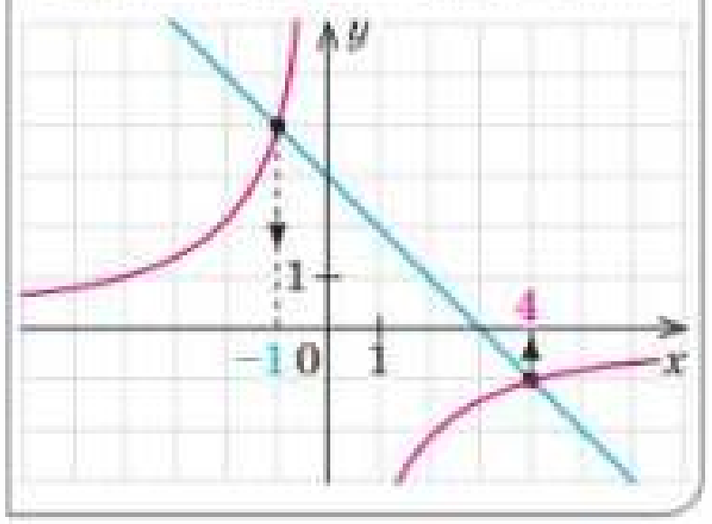
Видавництво «Ранок»

$y=-x+3$

x	0	3
y	3	0

$y=-\frac{4}{x}$

x	-4	-2	-1	1	2	4
y	1	2	4	-4	-2	-1



ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть графічним способом рівняння $-x+3=-\frac{4}{x}$.

Розв'язання

1. Записуємо два рівняння. $y=-x+3$; $y=-\frac{4}{x}$
2. Будуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь.
3. Знаходимо точки перетину графіків рівнянь. Записуємо абсциси цих точок. 1) $x=-1$; 2) $x=4$
4. Перевіряємо, чи є отримані значення розв'язками початкового рівняння.
   1) $x=-1$; $-(-1)+3=-\frac{4}{(-1)}$; $4=4$.
   2) $x=4$; $-4+3=-\frac{4}{4}$; $-1=-1$.
5. Робимо висновок: кожна з рівностей є правильною, отже -1 і 4 є коренями рівняння.

Відповідь: -1; 4.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розв'яжіть графічним способом рівняння:

1) $\frac{1}{x}=1$; 2) $\frac{1}{x}=-1$; 3) $\frac{2}{x}=2x$; 4) $\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x$; 5) $4-x=-\frac{5}{x}$; 6) $x-3=\frac{4}{x}$; 7) $-3x=\frac{3}{x}$; 8) $2x=-\frac{2}{x}$.

ПРАКТИКУМ

10.1 Запишіть формулою залежність:

1) ширини прямокутника b (у см) від його довжини a (у см), якщо площа прямокутника дорівнює 26 см^2;
2) швидкості руху v (у км/год) від часу t (у год), якщо відстань дорівнює 35 км;
3) тиску p (у Па) від площі поверхні S (у м^2), якщо сила тиску дорівнює 12 Н.

10.2 Не виконуючи побудови, з'ясуйте, чи проходить графік функції $y=\frac{15}{2x}$ через точку: $A(5;1{,}5)$; $B(0{,}5;15)$; $C(-3;2{,}5)$; $D(-1;-7{,}5)$; $E(0;0)$.

10.3 Визначте k і запишіть формулу оберненої пропорційності $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$, якщо її графік проходить через точку:

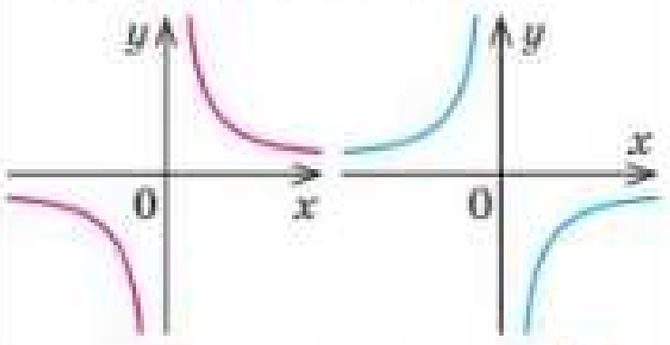
1) $A(-1;5)$ 2) $B(3;-2)$; 3) $C(-6;-0{,}5)$; 4) $D(-0{,}4;-10)$.

В ОДИН КЛІК

За допомогою будь-якого графічного редактора (Desmos, Advanced Grapher тощо) можна побудувати графіки функції $y=\frac{k}{x}$ та перевірити правильність виконання завдання.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Запишіть координати точки замість знака питання.



(4; 1), (−4; −1) (−5; 1), ?

Видавництво «Ранок»

10.4 Графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $N(0{,}5;-5)$.

З'ясуйте, чи проходить графік цієї функції через точки: $A(5;2)$, $B(-3;-5)$, $C(-0{,}5;5)$, $D(2{,}5;-1)$, $E(0;-5)$.

10.5 Визначте абсциси точок перетину графіків функцій, побудувавши їх в одній системі координат:

1) $y=-\frac{6}{x}$ і $y=3$; 2) $y=\frac{4}{x}$ і $y=\frac{x}{4}$; 3) $y=\frac{5}{x}$ і $y=\frac{x}{5}$.

10.6 Розв'яжіть графічним способом рівняння:

1) $1-\frac{x}{2}=-\frac{4}{x}$; 2) $4-2x=-\frac{6}{x}$; 3) $\frac{3}{x}=3-4x$; 4) $\frac{2}{x}=2-3x$.

10.7 Розв'яжіть систему рівнянь графічним способом.

1) $\begin{cases} y=-\frac{3}{x}, \\ y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=\frac{5}{x}, \\ y=-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=\frac{2}{x}, \\ y-x=-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=\frac{4}{x}, \\ y-\frac{x}{2}=1. \end{cases}$

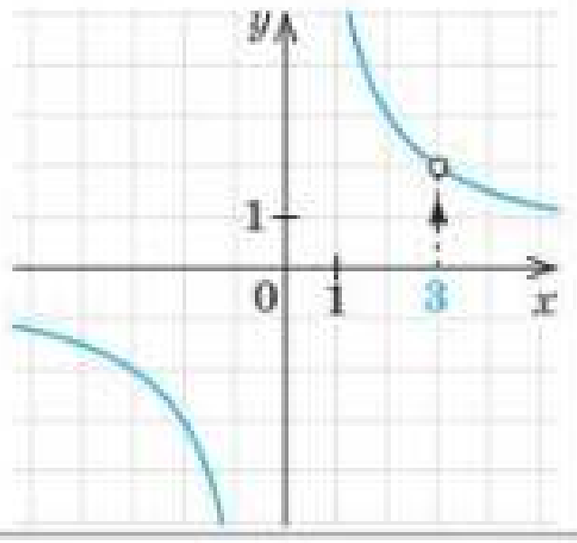
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

10.8 Побудуйте графіки функцій 1–6.

Аналізуємо

1) $y=\frac{6x-18}{x^2-3x}$.

- Розкладаємо на множники: $y=\frac{6x-18}{x^2-3x}=\frac{6(x-3)}{x(x-3)}$.
- Знаходимо область визначення функції: $x(x-3)\neq 0$; $D(y)$: $x\neq 0$, $x\neq 3$.
- Будуємо графік функції: $y=\frac{6\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}}=\frac{6}{x}$.
- Вилучаємо на графіку точку з абсцисою $x=3$. Умова $x\neq 0$ виконується автоматично.



Виконуємо

2) $y=\frac{x+1}{x(x+1)}$;

3) $y=\frac{x+2}{x(x+2)}$;

4) $y=\frac{2(2-x)}{x(x-2)}$;

5) $y=\frac{3(3-x)}{x(x-3)}$;

6) $y=\frac{5x+5}{x^2+x}$.

11.9 За яких значень k і b графіки прямої $y=kx+b$ і оберненої пропорційності $y=\frac{k}{x}$ проходять через точку з координатами:

1) $A(3;1)$; 2) $B(-2;2)$; 3) $C(2;-4)$; 4) $D(0;5)$?

10.10 Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{1}{|x|}$; 2) $y=-\frac{1}{|x|}$; 3) $y=-\frac{4}{|x|}$; 4) $y=\frac{4}{|x|}$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Побудуйте в одній системі координат графіки двох функцій:

1) $y=\frac{4}{x}$ і $y=x$;

2) $y=\frac{4}{x}$ і $y=-x-4$;

3) $y=\frac{4}{x}$ і $y=-x+5$;

4) $y=\frac{4}{x}$ і $y=x+2$.

Визначте за кожним рисунком:

- кількість точок перетину графіків функцій;
- абсциси точок перетину.

Обміняйтеся записами.

Поміркуйте, чи можуть пряма та гіпербола мати три спільні точки.

Підставляємо значення:
1) x і y в рівняння $xy=k$;
2) x, y, k в рівняння $y=kx+b$.

$$\frac{1}{|x|}=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x>0, \\ -\frac{1}{x}, & \text{якщо } x<0. \end{cases}$$

Видавництво «Ранок»

MATH FOR LIFE

p (атм)	V (л)
100	0,70
200	0,35
350	0,20

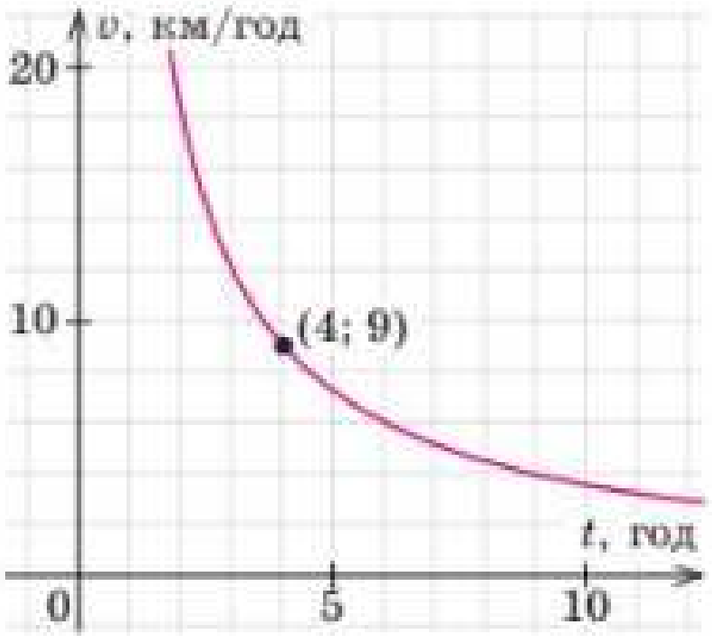
10.11 **Рукоділля.** Для виготовлення ґерданів майстриня купила 480 г бісеру. Запишіть формулою залежність кількості ґерданів y (у шт.) від маси бісеру x (у г), необхідного на виготовлення одного ґердана. Складіть і заповніть таблицю відповідних значень, якщо:

1) $x = 16; 20;$ 2) $y = 5; 10.$

10.12 **Фізика.** У таблиці подані відповідні значення тиску p (в атм) та об'єму V (у л) кисню певної маси за температури 0 °С. Покажіть, що залежність $p(V)$ є оберненою пропорційністю. Запишіть формулу цієї залежності. За формулою визначте:

1) об'єм кисню (у л), якщо $p = 50$ атм; 700 атм;

2) тиск (в атм), якщо $V = 2{,}8$ л; 1 л.



10.13 **Велоспорт.** Обраний маршрут можна подолати на велосипеді за t год, рухаючись зі швидкістю υ км/год. За поданим графіком залежності $\upsilon(t)$:

1) з'ясуйте, за скільки годин можна проїхати цей маршрут, рухаючись зі швидкістю 18 км/год;

2) визначте, з якою швидкістю треба їхати, щоб час руху становив 3 год;

3) виберіть два значення часу, за який можна подолати маршрут, якщо швидкість руху буде меншою, ніж 10 км/год.

Запишіть за допомогою формули виду $y = \frac{k}{x}$ залежність швидкості υ (у км/год) від часу t (у год). Який фізичний зміст коефіцієнта k за умовою задачі?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Завдання 10.14–10.15	→ Приклад 1
Завдання 10.16	→ Приклад 2
Завдання 10.17–10.20	→ Практикум, 10.1–10.4
Завдання 10.21	→ Практикум, 10.6
Завдання 10.22	→ Інтелектуальний фітнес, 10.8
Завдання 10.23	→ Math for life, 10.11
Завдання 10.24	→ Інтелектуальний фітнес, 10.9

10.14 Функцію задано формулою $y = \frac{14}{x}$. Знайдіть значення:

1) y, якщо $x = 2; -7; 0{,}5;$ 2) x, якщо $y = 14; -1; -0{,}1.$

10.15 Визначте, чи належать графіку заданої функції точки A і B:

1) $y = \frac{9}{x}$, $A(3; 3)$, $B(9; 81)$; 2) $y = -\frac{3}{x}$, $A(-3; -1)$, $B(2; -1{,}5)$.

10.16 Побудуйте графік функції $y = \frac{k}{x}$, якщо він проходить через точку $(-0{,}5; 4)$. За графіком визначте:

1) y, якщо $x = 1; -2;$ 2) x, якщо $y = 8; -1;$

3) чи належать точки $A(2; 1)$ і $B(-1; 2)$ цьому графіку.

Видавництво «Ранок»

10.17 Запишіть формулою залежність:

1) довжини прямокутника a (см) від його ширини b (см), якщо площа прямокутника дорівнює 21 см^2;
2) часу t (у год) від швидкості руху v (у км/год), якщо відстань дорівнює 40 км;
3) площі поверхні S (у м^2) від тиску p (у Па), якщо сила тиску дорівнює 18 Н.

10.18 Не виконуючи побудови, з'ясуйте, чи проходить графік функції $y=\frac{3}{2x}$ через точку: $A(1;1{,}5)$; $B(0{,}5;6)$; $C(-3;-0{,}5)$; $D(-6;0{,}25)$; $E(0;0)$.

10.19 Визначте k і запишіть формулу оберненої пропорційності $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$, якщо її графік проходить через точку:

1) $A(-1;3)$; 2) $B(5;-2)$; 3) $C(-12;-0{,}5)$; 4) $D(-0{,}7;-10)$.

10.20 Графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $N(0{,}5;-7)$. З'ясуйте, чи проходить графік цієї функції через точки: $A(0;-7)$; $B(-1;3{,}5)$; $C(-0{,}5;7)$; $D(-7;-2)$; $E(0;-7)$.

10.21 Розв'яжіть графічним способом рівняння:

1) $-\frac{1}{x}=1$; 2) $\frac{3}{x}=\frac{1}{3}x$; 3) $1-x=-\frac{2}{x}$; 4) $-4x=\frac{4}{x}$.

10.22 Знайдіть область визначення функції, побудуйте її графік:

1) $y=\frac{x-1}{3x(x-1)}$; 2) $y=\frac{5(4-x)}{x(x-4)}$; 3) $y=\frac{3x+3}{x^2+x}$.

10.23 Вартість абонемента для заняття йогою становить 400 г. о. на місяць незалежно від кількості занять, відвіданих протягом місяця. Запишіть формулою залежність ціни одного заняття y (у г. о.) від кількості занять x. Складіть і заповніть таблицю відповідних значень, якщо:

1) $x=16;\ 20$; 2) $y=10;\ 50$.

Бонусне завдання

10.24 За яких значень k і b графіки прямої $y=kx+b$ і оберненої пропорційності $y=\frac{k}{x}$ проходять через точку з координатами:

1) $A(2;1)$; 2) $B(-1;1)$; 3) $C(3;-6)$; 4) $D(0;4)$?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Приклади оберненої пропорційності

Фізика — закон Ома: сила струму на ділянці кола прямо пропорційна напрузі на кінцях цієї ділянки й обернено пропорційна її опору.

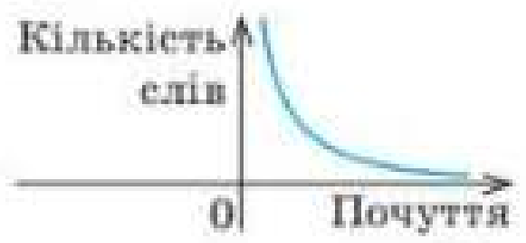
Музика — висота звуку: за сталих параметрів струни частота її коливань обернено пропорційна довжині.

Економіка — закон попиту: якщо ціна товару підвищується, то за незмінних решти умов попитом буде користуватися менша кількість цього товару.

Знайдіть і наведіть інші приклади оберненої пропорційності, їхні графіки та приклади застосування.

BE SMART

Як ви гадаєте, яку цитату з комедії Вільяма Шекспіра можна проілюструвати за допомогою поданого графіка оберненої пропорційності?



А чи знаєте ви, що прислів'я можуть «проілюструвати» функцію оберненої пропорційності?

- М'яко стелить, та жорстко спати.
- Родичів багато, та ніде пообідати.
- Хто вище злізе, дужче падає.

Наведіть інші приклади таких прислів'їв.

Видавництво «Ранок»

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 8–10

Степінь із цілим показником містить три види степеня:

- степінь із **натуральним** показником;
- степінь із **нульовим** показником;
- степінь із **цілим від'ємним** показником.

Для будь-якого числа a, відмінного від нуля:

- $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, де $n\in Z$;
- $a^0=1$.

Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді $a\cdot 10^n$, де $1\leqslant a<10$, n — ціле число.

У записі $A=a\cdot 10^n$ число a називають **значущою частиною** числа A, а показник степеня n — **порядком** числа A.

Функція виду $y=\frac{k}{x}$, де $k\neq 0$, називається **оберненою пропорційністю.**

Число k — коефіцієнт оберненої пропорційності, стала величина для кожної окремої функції, x — аргумент (незалежна змінна).

Властивості степенів

Для будь-якого $a\neq 0$ та довільних цілих m і n:

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ — множення степенів з однаковою основою;

2) $a^m:a^n=a^{m-n}$ — ділення степенів з однаковою основою;

3) $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$ — піднесення степеня до степеня.

Для будь-яких $a\neq 0$, $b\neq 0$ і довільного цілого n:

4) $(ab)^n=a^nb^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$;

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$.

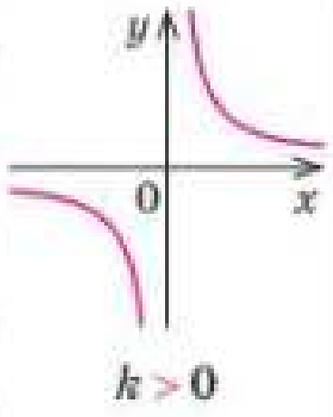
Усі властивості можна використовувати як у прямому, так і у зворотному порядку!

Графіком функції $y=\frac{k}{x}$, де $k\neq 0$, є **гіпербола.**

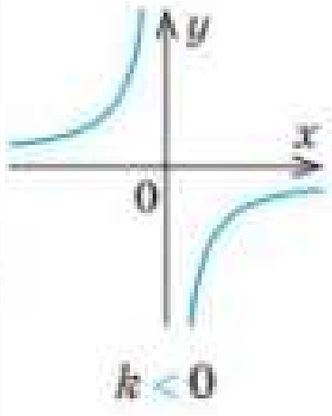
Гіпербола складається з двох частин — **віток гіперболи.**

Властивості функції $y=\frac{k}{x}$, де $k\neq 0$

$k>0$	$k<0$
Вітки графіка функції розташовані:	
у I і III координатних чвертях	у II і IV координатних чвертях
Область визначення — усі числа, крім $x=0$	
Область значень — усі числа, крім $y=0$	
Значення функції:	
• якщо $x>0$, то $y>0$ • якщо $x<0$, то $y<0$	• якщо $x>0$, то $y<0$ • якщо $x<0$, то $y>0$



$k>0$



$k<0$

Видавництво «Ранок»

ПІДСУМКОВА РОБОТА № 4

Інший варіант роботи в електронному додатку

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Обчисліть $2^4 \cdot 8^{-1}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{2}$	2

2 Подайте степінь $\left(\frac{1}{4}x^8\right)^{-2}$ у вигляді добутку.

А	Б	В	Г
$16 \cdot x^6$	$16 \cdot x^{-16}$	$-\frac{1}{2} \cdot x^{-16}$	$-\frac{1}{2} \cdot x^6$

3 Виконайте множення: $4n^{-4} \cdot 4^{-1} n^{-3}$.

А	Б	В	Г
$-16n^{-7}$	$16n^{-7}$	n^{-7}	n^{12}

4 Виконайте ділення: $20m^{-10} : 10m^2$.

А	Б	В	Г
$2m^{-12}$	$20m^{-12}$	$2m^{-5}$	$20m^{-5}$

5 Правильне виконання всіх завдань тесту оцінюється у 200 балів, кожне завдання — у b балів. Запишіть формулою залежність кількості N завдань у тесті від кількості балів b.

А	Б	В	Г
$N = \frac{b}{200}$	$N = \frac{200}{b}$	$N = 200b$	$N = 200 + b$

6 Подайте добуток $64 \cdot x^{-16}$ у вигляді степеня з показником 2.

А	Б	В	Г
$\left(32x^{-18}\right)^2$	$\left(32x^{-8}\right)^2$	$\left(8x^{-18}\right)^2$	$\left(8x^{-8}\right)^2$

7 Виконайте дії: $\left(8 \cdot 10^{-9}\right) \cdot \left(5 \cdot 10^{-6}\right)$ та запишіть відповідь у стандартному вигляді.

8 Графік оберненої пропорційності $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $(-1{,}5; 6)$.

1) Знайдіть значення k.

2) З'ясуйте, чи проходить графік цієї функції через точки $A(-2; 4{,}5)$ і $B(9; 1)$.

9 Обчисліть значення виразу $\frac{7^5 \cdot 7^{-10}}{49^{-3}} + 7^0$.

10 Розв'яжіть графічним способом рівняння $\frac{2}{x} = x - 1$.

Бонусне завдання

Розв'яжіть рівняння $1 - 10x^{-1} + 25x^{-2} = 0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Одним із перших дослідників гіперболи був Апполоній Перзький (III ст. до н. е.). Завдяки йому з'явилися терміни асимптота, абсциса, ордината, апліката, гіпербола, парабола. Учений показав, що якщо взяти довільний подвоєний круговий конус і перетнути обидві його бічні поверхні площиною, то отримаємо гіперболу — криву, що складається з двох віток.

Кожна з віток побудованої в координатній площині xOy гіперболи $y = \frac{k}{x}$ в горизонтальному напрямі наближається до осі Ox, а у вертикальному — до осі Oy. Прямі, до яких необмежено близько наближаються графіки функцій, називають **асимптотами.**

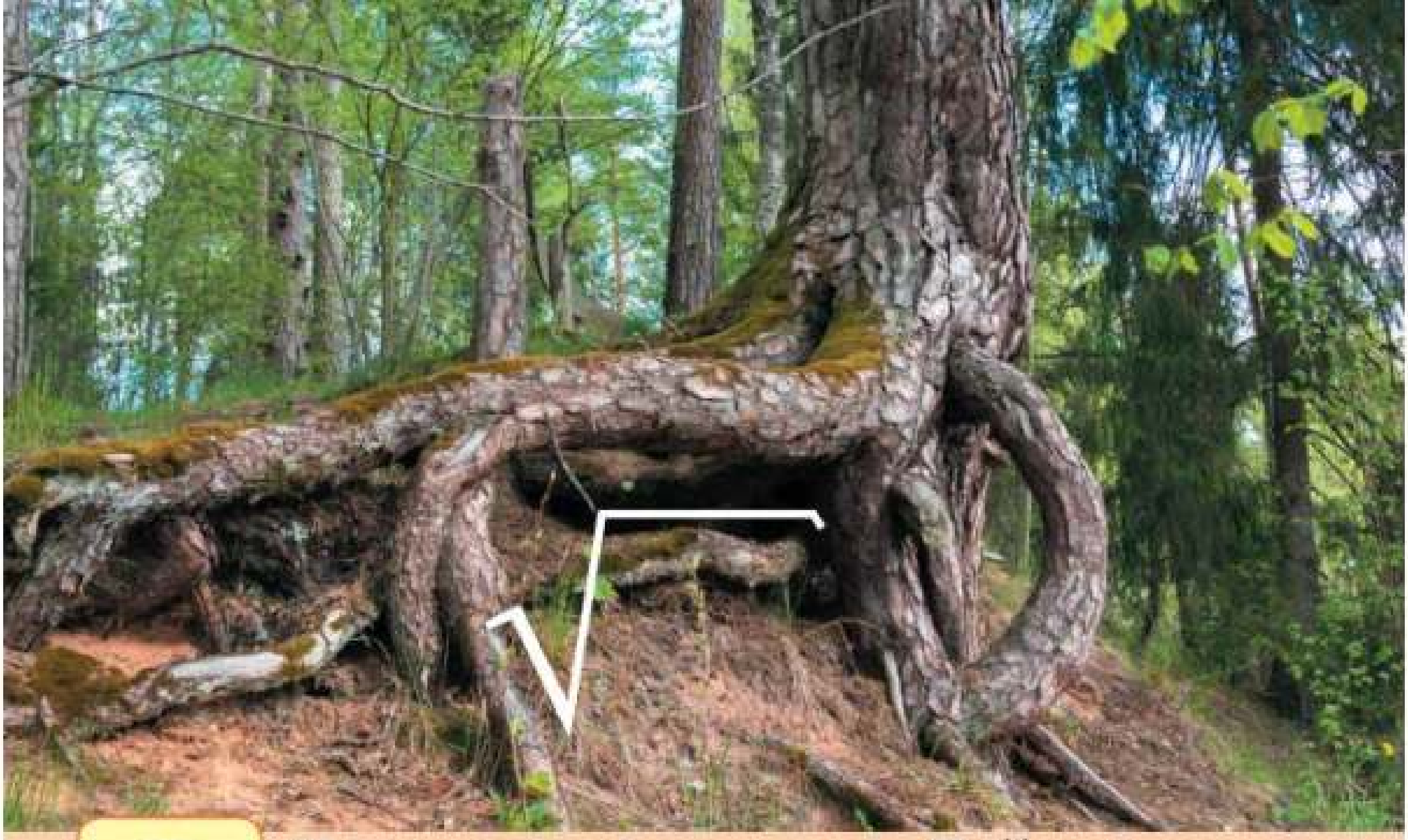
Гіперболи є основою багатьох архітектурних конструкцій. Зокрема, в Україні побудовані унікальні гіперболоїдні водонапірні вежі в Черкасах, Конотопі, Білій Церкві; Станіслав-Аджигольський маяк на Херсонщині тощо.

Видавництво «Ранок»

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ ОДНОЦИФРОВИХ І ДВОЦИФРОВИХ ЧИСЕЛ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Видавництво «Ранок»



2 Квадратні корені. Дійсні числа
Square roots. Real numbers

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

- Знання властивостей квадратичної функції стануть вам у пригоді під час розв'язування різноманітних задач із геометрії, фізики, економіки.
- Математична модель дійсних чисел використовується в науці й техніці для вимірювання величин, що безперервно змінюються; основне призначення цієї моделі — бути базою для аналітичних методів досліджень.
- За допомогою прикладних комп'ютерних програм ви навчитеся будувати графіки функцій і розв'язувати рівняння графічним способом.

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

- Походження та еволюція знака квадратного кореня.
- Алгоритми добування квадратного кореня.
- Формули складного кореня.
- Золотий переріз у мистецтві та музиці.
- Парабола навколо нас.
- Таємниця числа π.
- Георг Кантор і теорія множин.

> “ Якщо ви хочете мати те, чого ніколи не мали, — почніть робити те, чого ніколи не робили. ”
>
> Річард Девід Бах

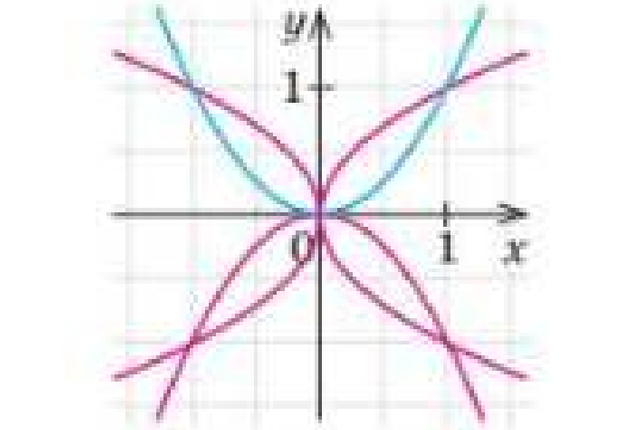
§11 ФУНКЦІЯ $y = x^2$, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ. ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

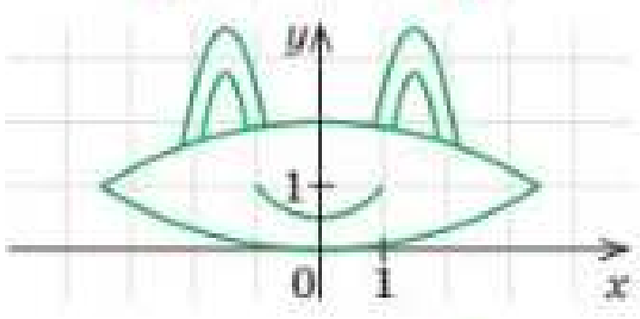
ВЧОРА Ви будували графіки лінійної функції та функції оберненої пропорційності, вивчали їхні властивості

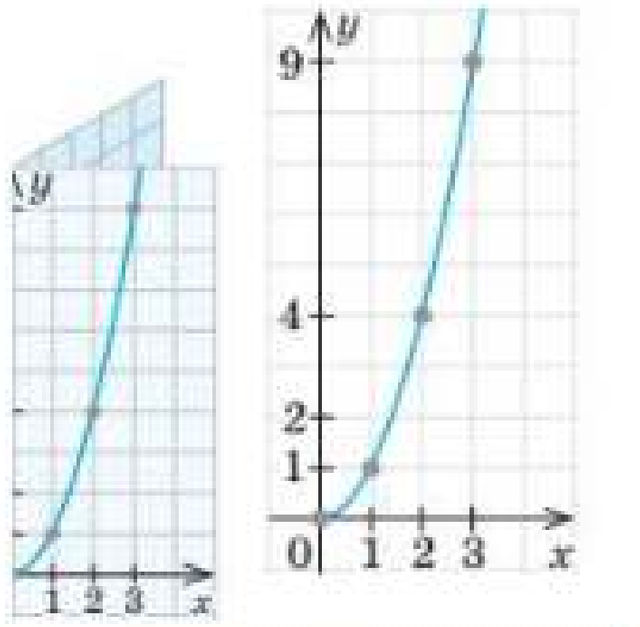
СЬОГОДНІ Ви познайомитесь із окремим випадком квадратичної функції, з її графіком і властивостями, удосконалите свої вміння розв'язувати рівняння графічним способом

ЗАВЖДИ Ви зможете створювати цікаві рисунки, використовуючи графіки функцій, властивості функцій та свою фантазію

mk.com.ua/107916







АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

МАЛЮЄМО ГРАФІКАМИ ФУНКЦІЙ

Вам треба створити елемент декору за допомогою кривих певного типу. Для того щоб дізнатися, що це за тип кривих і які властивості має така крива, розгляньте рисунок та виконайте завдання.

1) Користуючись графіком, заповніть таблицю значень і запишіть отримані впорядковані пари.

x	0	1	2	3
y				

2) На аркуші в клітинку намалюйте осі координат і позначте точки за отриманими координатами. Сполучіть одержані точки плавною лінією.

3) Складіть папір по осі ординат навпіл. Проколіть голкою позначені точки. Розгорніть папір. Сполучіть проколоті точки плавною лінією.

4) Користуючись отриманим результатом, заповніть таблицю значень і запишіть одержані впорядковані пари.

x	0	-1	-2	-3
y				

5) Порівняйте значення y, якщо значення x є протилежними числами.

6) Заповніть пропуски.

- Графік проходить через початок координат — точку $O(_;_)$.
- Графік розташований у __ і __ координатних чвертях.
- Якщо точка $A(3; 9)$ належить графіку, то і точка $B(_; 9)$ належить графіку.
- Графік симетричний відносно осі _____.
- Графік ілюструє залежність, яку можна задати за допомогою рівняння $y = x^{\square}$.
- Кожному значенню незалежної змінної x ставиться у відповідність єдине значення залежної змінної y, отже ця залежність є _____.

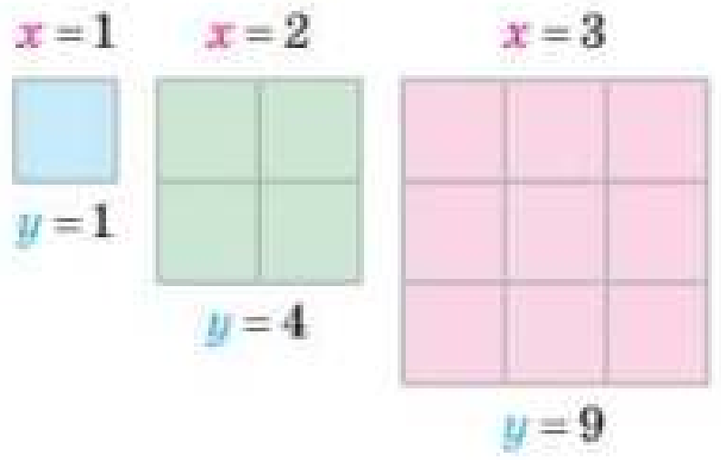
КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- квадратична функція (quadratic function)
- парабола (parabola)
- вершина параболи (vertex of parabola)
- вісь симетрії (axis of symmetry)

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Залежність площі y квадрата від його сторони x можна задати формулою $y = x^2$. Кожному значенню x (**незалежної змінної**) відповідає **єдине** значення y (**залежної змінної**). Саме тому таку залежність можна вважати функціональною.



! Функція $y = x^2$ є окремим випадком **квадратичної функції**.

Побудуємо графік функції $y = x^2$.

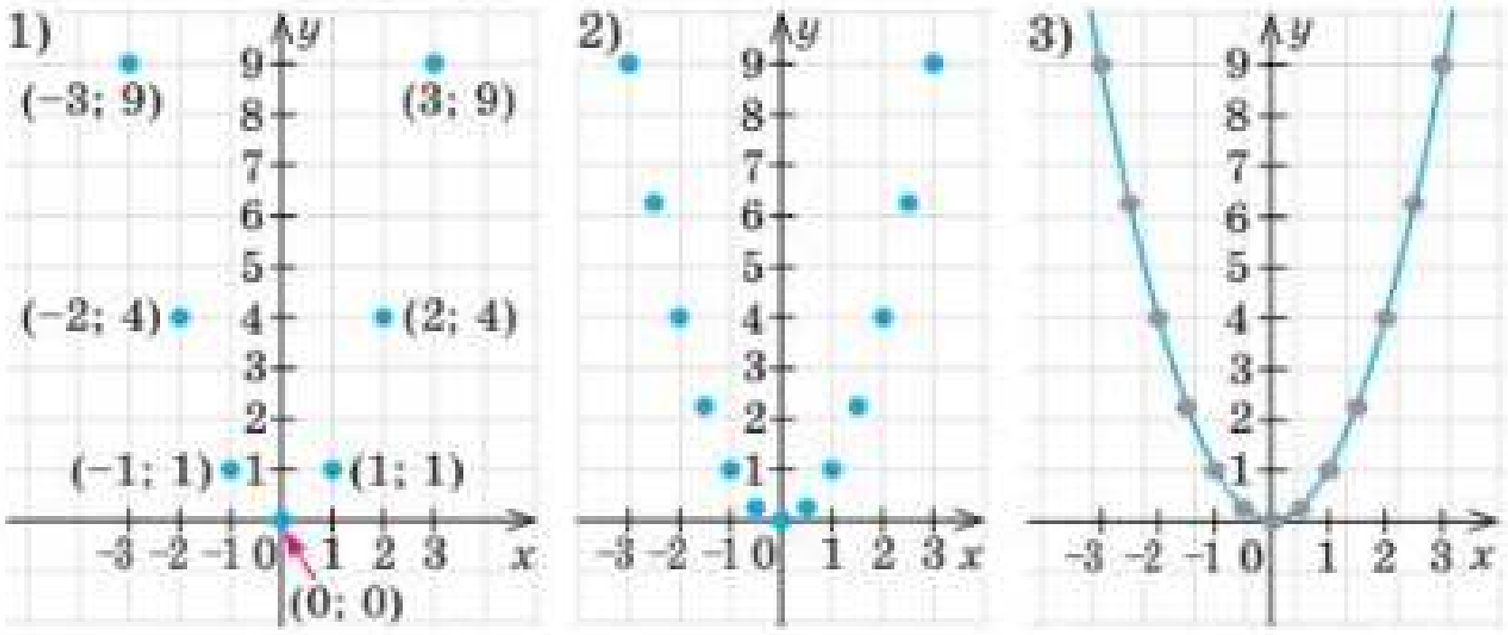
Складаємо таблицю значень функції для вибраних значень аргумента.

Позначаємо на координатній площині точки, координатами яких є отримані впорядковані пари чисел.

Сполучаємо ці точки.

x	$y = x^2$	y	$(x; y)$
-3	$y = (-3)^2$	9	$(-3; 9)$
-2	$y = (-2)^2$	4	$(-2; 4)$
-1	$y = (-1)^2$	1	$(-1; 1)$
0	$y = 0^2$	0	$(0; 0)$
1	$y = 1^2$	1	$(1; 1)$
2	$y = 2^2$	4	$(2; 4)$
3	$y = 3^2$	9	$(3; 9)$

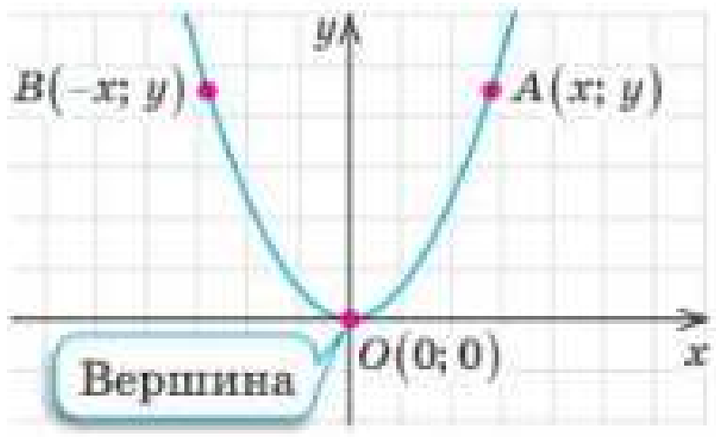
Чим більше значень x ми візьмемо, тим точніше буде побудований графік функції.



! Фігуру, яка є графіком функції $y = x^2$, називають **параболою**.

Частини графіка, що розташовані в I і II координатних чвертях, називають **вітками параболи**.

Точку $O(0; 0)$, яка ділить параболу на дві рівні частини, називають **вершиною параболи**.

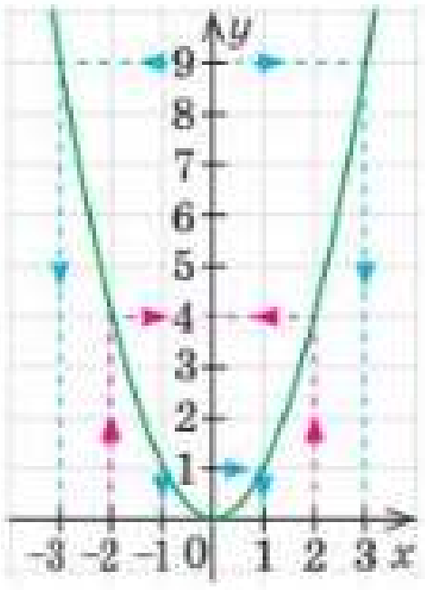


За графіком можна визначити властивості функції $y = x^2$.

Властивості функції $y = x^2$

Графік функції проходить через *початок координат* — точку $O(0; 0)$
Графік функції розташований у I і II координатних чвертях
Область визначення $D(y)$: x — усі числа
Область значень $E(y)$: y — усі **невід'ємні** числа $(y \geqslant 0)$
Графік функції *симетричний* відносно осі ординат
Протилежним значенням аргумента відповідає одне й те саме значення функції
Якщо точка $A(x; y)$ належить графіку функції, то й точка $B(-x; y)$ також належить цьому графіку

Видавництво «Ранок»



РОЗМИНКА 1

1 За графіком функції $y=x^2$ знайдіть значення:

1) y, якщо $x=0;\ 2;\ -2$; 2) x, якщо $y=0;\ 1;\ 9$.

2 Запишіть невідомі координати точок, що належать графіку функції $y=x^2$: $A(3;_)$; $B(-3;_)$; $C(__;4)$; $D(_;4)$.

ПРИКЛАД 1

Функцію задано формулою $y=x^2$. Не використовуючи графік функції:

1) знайдіть значення y, якщо $x=7;\ -0{,}1$;

2) визначте, чи належать точки $A(-11;121)$ і $B(-8;-64)$ графіку цієї функції.

Розв'язання

1) Підставляємо у формулу значення x, знаходимо y.

Значення аргумента x		Функція $y=x^2$		Значення функції y
$x=7$	$\to$	$y=7^2$	$\to$	$y=49$
$x=-0{,}1$	$\to$	$y=(-0{,}1)^2$	$\to$	$y=0{,}01$

2) Підставляємо у формулу координати точок.

$(x;\ y)$	x	y	$y=x^2$	Висновок
$A(-11;121)$	-11	121	$121=(-11)^2$ $121=121$	Рівність правильна. Точка $(-11;121)$ належить графіку функції
$B(-8;-64)$	-8	-64	$-64=(-8)^2$ $-64=64$	Рівність неправильна. Точка $(-8;-64)$ не належить графіку функції

Відповідь: 1) 49; 0,01; 2) точка $A(-11;121)$ належить графіку функції, точка $B(-8;-64)$ — не належить.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Функцію задано формулою $y=x^2$. Не використовуючи графік функції:

1) знайдіть значення y, якщо $x=10;\ 13;\ 0{,}5;\ 1{,}7;\ -10;\ -24$;

2) визначте, чи належать задані точки графіку цієї функції:

$A(12;144)$; $C(-19;281)$; $E(0{,}6;\ 0{,}36)$; $M(1{,}5;\ 0{,}225)$;

$B(17;149)$; $D(-20;\ 400)$; $F(-0{,}8;\ -0{,}64)$; $N(-1{,}3;\ 1{,}69)$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Щоб перевірити, чи *належить точка графіку функції*, її координати треба підставити у формулу, якою задана функція. Якщо в результаті отримано правильну рівність, то точка належить графіку.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Розгляньте приклади піднесення чисел до квадрата.

$100^2=10000$

$102^2=10404$ ($+2^2$)

$102-100=2 \to +2;\ 2$

$109^2=11881$ ($+9^2$)

$109-100=9 \to +9;\ 2$

Обчисліть без калькулятора: 104^2; 105^2; 107^2.

Видавництво «Ранок»

ДОСЛІДЖУЄМО

1) Складіть таблицю значень для функції $y=-x^2$, якщо $-4 \leqslant x \leqslant 4$, із кроком 1.
2) Побудуйте графік функції $y=-x^2$ і назвіть її властивості.
3) Порівняйте властивості функцій $y=-x^2$ і $y=x^2$.

Порівняйте отриманий результат із таблицею в інтерактивному електронному додатку

Графічний спосіб розв'язування рівнянь

У 7 класі ви навчилися розв'язувати *системи лінійних рівнянь* із двома невідомими графічним способом, для цього знаходили координати точок перетину графіків рівнянь. Щоб розв'язати *рівняння з одним невідомим* графічним способом, достатньо знайти абсцису точок перетину графіків функцій.

Алгоритм розв'язування рівнянь графічним способом

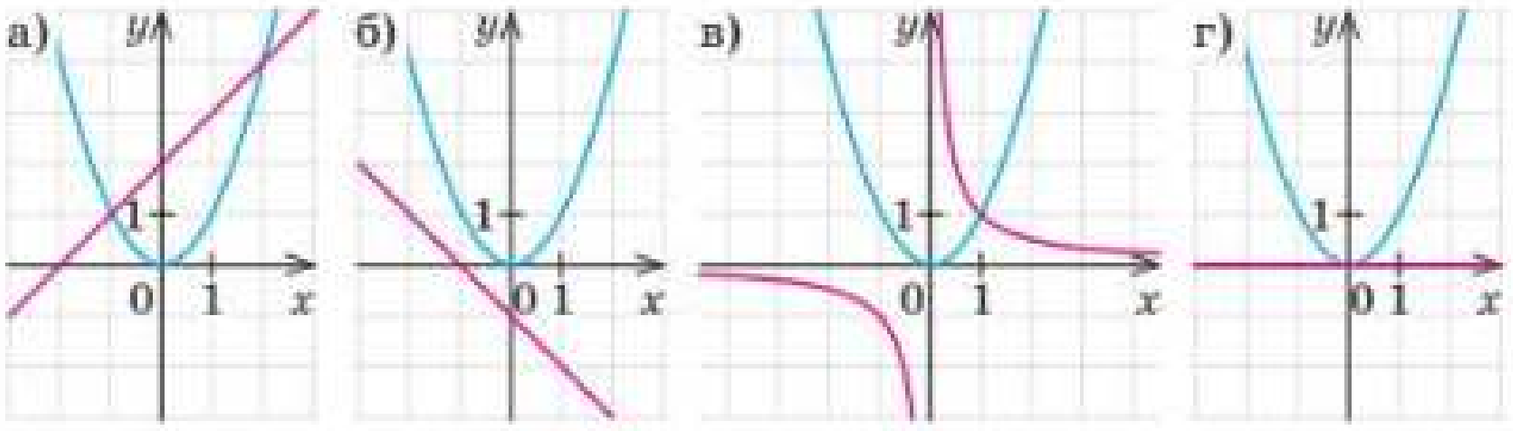
1. Зводимо вихідне рівняння до такого вигляду, щоб у лівій і правій частинах були рівняння, що відповідають функціям, графіки яких ви вмієте будувати.
2. Записуємо дві відповідні функції.
3. Будуємо графіки цих функцій в одній системі координат.
4. Знаходимо точки перетину графіків функцій, записуємо абсциси цих точок.
5. Перевіряємо, чи є отримані значення розв'язками початкового рівняння.

РОЗМИНКА 2

1 Знайдіть за рисунком:

1) скільки точок перетину мають графіки функцій;

2) абсциси точок перетину графіків функцій.



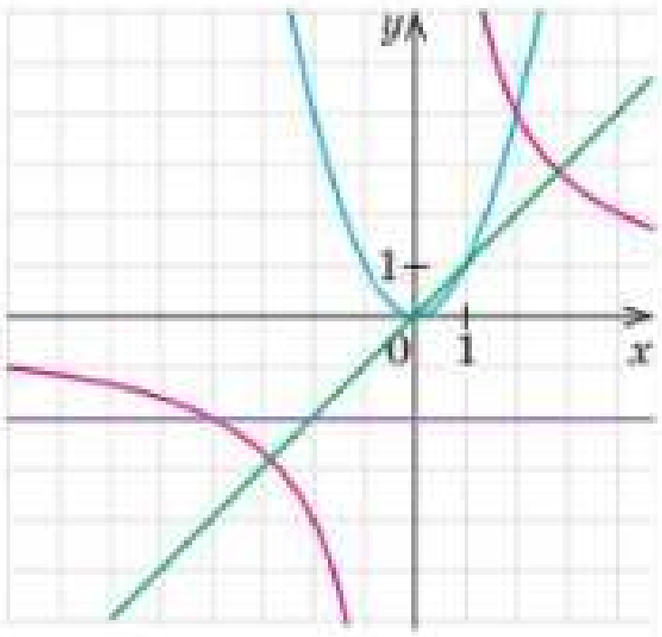
2 Запишіть задане рівняння так, щоб у лівій і правій частинах опинилися рівняння, що відповідають функціям, графіки яких ви вмієте будувати:

1) $x^2+5=0$; 3) $x^2-3x=0$; 5) $x^2-\frac{2}{x}=0$; 7) $x^2-(x+1)=0$;

2) $x^2-7=0$; 4) $x^2+7x=0$; 6) $\frac{2}{x}-x^2=0$; 8) $4x-1-x^2=0$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

На рисунку зображені графіки функцій $y=x^2$; $y=\frac{8}{x}$; $y=x$; $y=-2$.



За рисунком запишіть рівняння, що мають:
1) один корінь;
2) два корені;
3) не мають коренів.
Обміняйтеся записами.
Виграє той / та, хто знайде найбільшу кількість можливих варіантів.

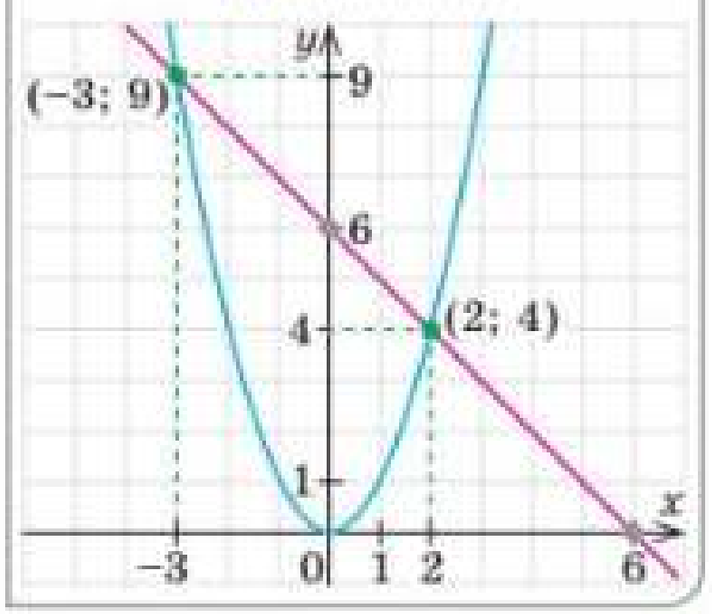
Видавництво «Ранок»

1) $y=x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

2) $y=-x+6$

x	0	6
y	6	0



ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть рівняння $x^2+x-6=0$ графічним способом.

Розв'язання

1. Зводимо рівняння до такого вигляду, щоб у лівій і правій частинах були рівняння, що відповідають функціям, графіки яких ми вміємо будувати. $x^2=-x+6$
2. Записуємо дві функції. 1) $y=x^2$; 2) $y=-x+6$
3. Будуємо графіки обох функцій в одній системі координат.
4. Знаходимо точки перетину графіків функцій. Записуємо абсциси цих точок. 1) $x=-3$; 2) $x=2$
5. Перевіряємо, чи є отримані значення розв'язками початкового рівняння $x^2+x-6=0$. 1) $x=-3$: $(-3)^2+(-3)-6=0$; $0=0$ 2) $x=2$: $2^2+2-6=0$; $0=0$
6. Робимо висновок. Кожна з рівностей є правильною. Отже, -3 і 2 є коренями рівняння

Відповідь: -3; 2.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

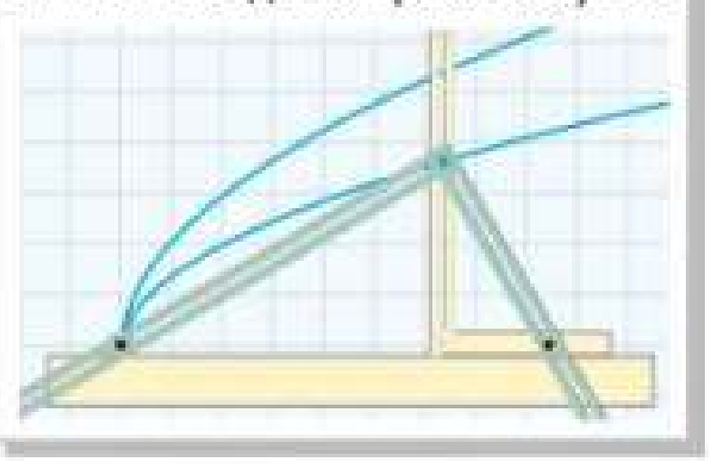
Розв'яжіть графічним способом рівняння:

1) $x^2-4=0$; 3) $x^2+3x=0$; 5) $x^2+x-2=0$; 7) $x^2+\frac{8}{x}=0$;

2) $x^2+5=0$; 4) $x^2-2x=0$; 6) $x^2-x+2=0$; 8) $-\frac{1}{x}-x^2=0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Цікавий спосіб малювання параболи вигадав італійський математик Бонавентура Кавальєрі в XVII ст. Параболограф Кавальєрі складається з трьох частин: лінійки та двох прямих кутів.



ПРАКТИКУМ

11.1 Функція задана формулою $y=x^2$. Не використовуючи графік функції, знайдіть значення функції, якщо значення аргумента дорівнює:

1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $-0{,}6$; 4) $-0{,}9$; 5) $-\frac{1}{11}$; 6) $-\frac{1}{13}$.

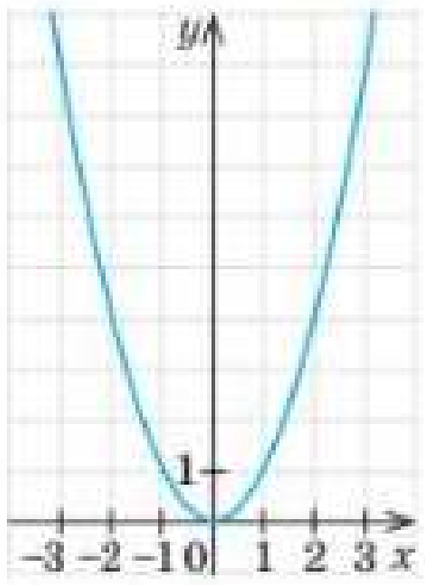
11.2 Функція задана формулою $y=x^2$. Не використовуючи графік функції, з'ясуйте, чи належать цьому графіку точки:

$A\left(\frac{3}{8};\frac{6}{64}\right)$; $B\left(\frac{7}{6};\frac{49}{36}\right)$; $C(-0{,}2;-0{,}04)$; $D(-0{,}5;0{,}25)$.

Видавництво «Ранок»

11.3 За графіком функції $y=x^2$ (див. рисунок) знайдіть два значення функції та порівняйте їх:

1) $y(0)$ і $y(2)$; 3) $y(-3)$ і $y(3)$; 5) $y(1)$ і $y(-3)$;
2) $y(-3)$ і $y(0)$; 4) $y(1)$ і $y(-1)$; 6) $y(-2)$ і $y(1)$.



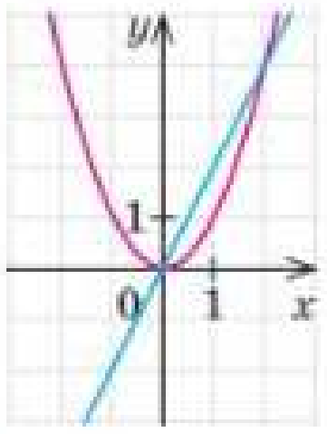
11.4 Складіть таблицю значень для функції $y=x^2$ із кроком 0,5 та побудуйте графік цієї функції, якщо:

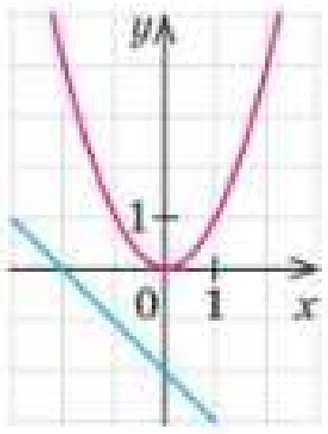
1) $-3\leqslant x\leqslant 3$; 2) $-2\leqslant x\leqslant 2$; 3) $-3\leqslant x\leqslant 1$; 4) $-1\leqslant x\leqslant 2$.

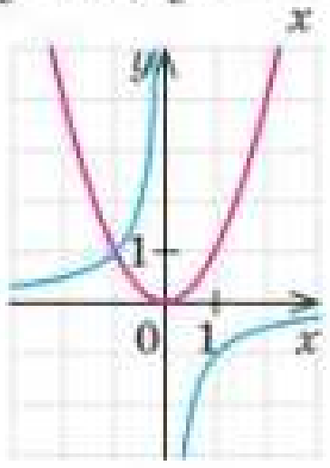
Запишіть область визначення та область значень кожної функції.

11.5 Визначте за рисунком кількість точок перетину графіків функцій та координати точок перетину, якщо вони є.

1) $y=x^2$; $y=2x$; 2) $y=x^2$; $y=-x-2$; 3) $y=x^2$; $y=-\frac{1}{x}$.







11.6 Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2-1=0$; 3) $x^2-4x=0$; 5) $x^2-2x=3$;
2) $x^2-4=0$; 4) $x^2+3x=0$; 6) $x^2-x=2$.

11.7 Установіть графічним способом кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ 2y=3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ y+2=1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ y-x=1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ y-\frac{2}{x}=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ 2y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ y+1=-2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ y+x=1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ y+\frac{3}{x}=0. \end{cases}$

11.8 Графіки функцій $y=x^2$ і $y=a$ перетинаються в точці A з координатами $A(x_0;y)$. Знайдіть ординату точки A, координати другої точки перетину цих графіків — точки B; запишіть рівняння прямої $y=a$, якщо:

1) $A(7;y)$; 2) $A(-11;y)$; 3) $A(2{,}5;y)$; 4) $A(-1{,}6;y)$.

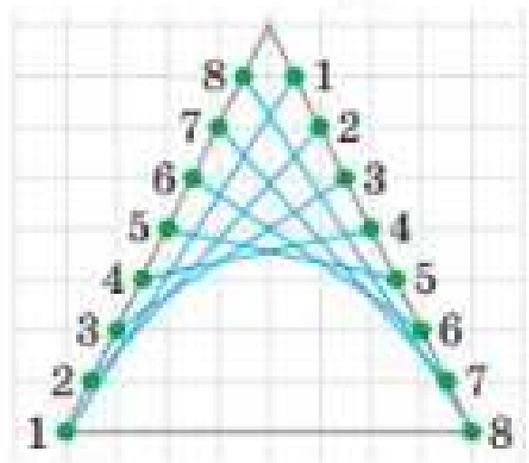
11.9 Чи перетинає графік функції $y=-x^2$ пряма:

1) $y=0$; 2) $y=4$; 3) $y=-4$; 4) $y=0{,}04$; 5) $y=-0{,}04$?

Якщо перетинає, запишіть координати точок перетину.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Техніка String art



1. Нарисуйте довільний рівнобедрений трикутник.
2. На рівних сторонах трикутника, починаючи від вершини, позначте однакову кількість точок так, щоб відстані між точками були рівними.
3. Пронумеруйте точки від 1 до N: з однієї сторони — від вершини кута, а з іншої — до вершини кута.
4. З'єднайте прямими лініями точки з однаковими номерами. Ви побачите параболу.
5. Спробуйте виконати це завдання для різних трикутників.

Видавництво «Ранок»

ПРИГАДАЙТЕ!

Якщо функція задана раціональним виразом, то область визначення функції — це всі значення змінної, за яких цей вираз має зміст.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

11.10 Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $y=\dfrac{x^5}{x^3}$; 2) $y=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$; 3) $y=\dfrac{x^4-x^2}{x^2-1}$; 4) $y=\dfrac{9x^2-x^4}{x^2-9}$.

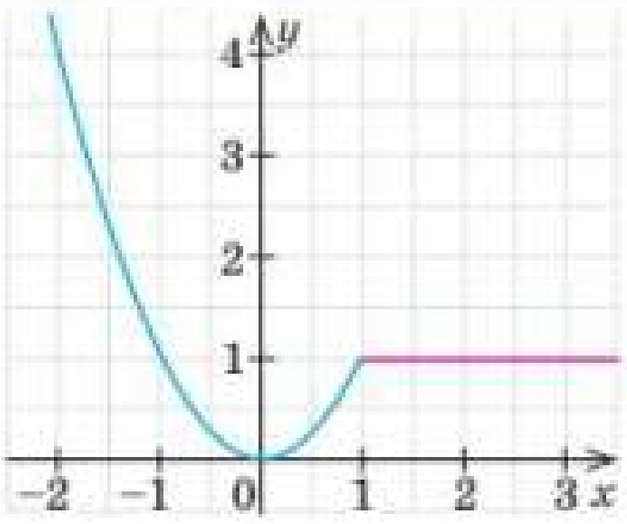
11.11 Побудуйте графік функції 1–4, яка подана у вигляді системи.

Аналізуємо

1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

Будуємо частини графіка функції:

- $y=x^2$, якщо $-2\leqslant x\leqslant 1$;
- $y=1$, якщо $x>1$.



Виконуємо

2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 4, & 2<x\leqslant 4;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 3;\end{cases}$

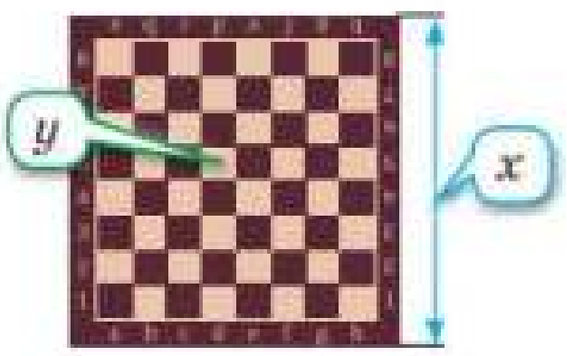
4) $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1<x\leqslant 1,\\ -x, & -3\leqslant x\leqslant -1.\end{cases}$

11.12 Побудуйте ескізи графіків відомих вам функцій та складіть рівняння, що мають корені:

1) -4 і 4; 3) 1; 5) рівняння не мають коренів.

2) -1 і 0; 4) -3;

MATH FOR LIFE

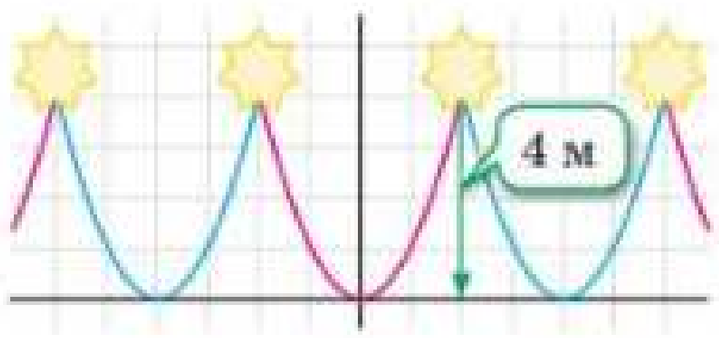


11.13 **Шахи.** На звичайній шаховій дошці є **64** клітинки, але існують інші дошки. Запишіть рівняння залежності загальної кількості клітинок y від кількості клітинок x на одній стороні шахової дошки. Чи може квадратна дошка складатися із:

1) 225 клітинок; 2) 76 клітинок?

Поясніть свої відповіді.

11.14 **Дизайн.** Елемент декору для інсталяції можна задати за допомогою квадратичної функції $y=x^2$ (див. рисунок). У верхніх точках розташовані світильники.



1) Якою буде відстань між світильниками, якщо висота інсталяції становить 4 м?

2) На якій висоті мають бути встановлені додаткові світильники, щоб відстань між ними була 2 м?

3) Якою має бути висота інсталяції, щоб відстань між світильниками становила 6 м?

Видавництво «Ранок»

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

11.15 Функція задана формулою $y = x^2$. Не використовуючи графік функції:

у завданнях 1–6 знайдіть значення функції, якщо значення аргумента x дорівнює:

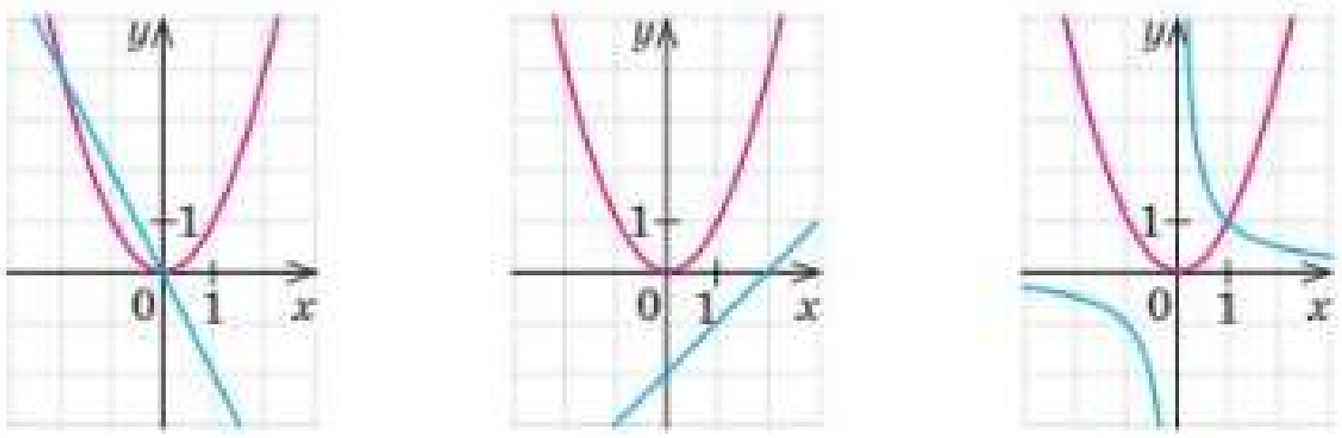
1) $\frac{4}{9}$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $-0{,}7$; 4) $-0{,}8$; 5) $-\frac{1}{12}$; 6) $-\frac{1}{15}$;

у завданнях 7–10 з'ясуйте, чи належать цьому графіку точки:

7) $A\left(\frac{9}{2}; \frac{81}{4}\right)$; 8) $B\left(\frac{5}{7}; \frac{10}{49}\right)$; 9) $C(-0{,}1; 0{,}01)$; 10) $D(-0{,}6; -0{,}36)$.

11.16 Визначте за рисунком кількість точок перетину графіків функцій та координати точок перетину, якщо вони є.

1) $y = x^2$ і $y = -2x$; 2) $y = x^2$ і $y = x - 2$; 3) $y = x^2$ і $y = \frac{1}{x}$.



11.17 Розв'яжіть графічним способом рівняння:

1) $x^2 - 9 = 0$; 2) $x^2 - 3x = 0$; 3) $x^2 + x = 2$; 4) $x^2 + \frac{1}{x} = 0$.

11.18 Установіть графічним способом кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ y + 6 = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ y + x = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ y - \frac{4}{x} = 0. \end{cases}$

Бонусні завдання

11.19 Знайдіть область визначення функції і побудуйте її графік:

1) $y = \frac{x^7}{x^5}$; 2) $y = \frac{x^3 + x^2}{x + 1}$; 3) $y = \frac{16x^2 - x^4}{x^2 - 16}$.

11.20 Побудуйте ескізи графіків відомих вам функцій та складіть рівняння, що мають корені:

1) -1 і 1; 2) 0 і 2; 3) 2; 4) рівняння не мають коренів.

Перевірте одержані результати за допомогою графічного калькулятора.

Завдання 11.15 → Приклад 1
Завдання 11.16 → Практикум 11.5
Завдання 11.17 → Приклад 2
Завдання 11.18 → Практикум 11.7
Завдання 11.19, 11.20 → Інтелектуальний фітнес, 11.10, 11.12

В ОДИН КЛІК

За допомогою графічного калькулятора Desmos перевірте, чи правильно побудовані графіки функцій у завданнях 11.16-11.18.

BE SMART

Техніка String art

Техніка String-art — це мистецтво створення картин за допомогою цвяхів і ниток. Вважають, що цю техніку започаткували англійські ткачі XVII ст. Забиваючи цвяхи в дощечки й натягуючи нитки в певній послідовності, вони робили прикраси для дому.

У середині XIX ст. Мері Еверест Буль — педагог, автор книг, помічниця та дружина математика й логіка Джорджа Буля, використала цей старовинний вид рукоділля як оригінальний спосіб навчання дітей основам математики.

Видавництво «Ранок»

§12 КВАДРАТНІ КОРЕНІ. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ

ВЧОРА Ви виконували із числами арифметичні дії; підносили числа до квадрата; познайомилися з функцією $y = x^2$; розв'язували рівняння графічним способом

СЬОГОДНІ Ви дізнаєтеся, що таке квадратний корінь із числа, познайомитеся з новою математичною дією — добуванням квадратного кореня із числа; навчитеся розв'язувати рівняння виду $x^2 = a$

ЗАВЖДИ Ви зможете розв'язувати геометричні й фізичні задачі, наприклад, розрахувати час польоту парашутиста у стані вільного падіння

mk.com.ua/109564

Таблиця квадратів чисел від 1 до 19

x	$y = x^2$	y
1	1^2	1
2	2^2	4
3	3^2	9
4	4^2	16
5	5^2	25
6	6^2	36
7	7^2	49
8	8^2	64
9	9^2	81
10	10^2	100
11	11^2	121
12	12^2	144
13	13^2	169
14	14^2	196
15	15^2	225
16	16^2	256
17	17^2	289
18	18^2	324
19	19^2	361

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ЗАШИФРОВАНЕ ПОВІДОМЛЕННЯ

Перед вами зашифрований вислів Святослава Вакарчука. Спробуйте відновити його, скориставшися таблицею квадратів натуральних чисел. Знайдіть продовження цієї цитати й зашифруйте її самостійно. (Шукайте підказку наприкінці підручника.)

12	3	10	2	10	7	1	—	18	8	
3	16	5	14	14	19					
12	13	1	9	1	15	4		15	1	13
12	3	10	6	16		16	11	5	19	16

Ключ

А = $\sqrt{1}$	И = $\sqrt{16}$	О = $\sqrt{100}$
Б = $\sqrt{4}$	І = $\sqrt{25}$	Р = $\sqrt{121}$
В = $\sqrt{9}$	Ї = $\sqrt{36}$	С = $\sqrt{144}$
Д = $\sqrt{49}$	К = $\sqrt{169}$	Т = $\sqrt{225}$
Е = $\sqrt{64}$	М = $\sqrt{256}$	Ц = $\sqrt{324}$
З = $\sqrt{81}$	Н = $\sqrt{196}$	Я = $\sqrt{361}$

Розшифровуючи вислів, ви виконували дію **добування квадратного кореня**, яка є оберненою до дії **піднесення числа до квадрата**.

Для запису дії добування квадратного кореня використовують спеціальний знак: $\sqrt{\ }$. У таблиці-ключі під цим знаком записані числа, які називають *квадратами*, або *точними квадратами*, або *ідеальними квадратами*, або *квадратними числами*. Це додатні цілі числа, які можуть бути записані у вигляді **квадрата** деякого цілого числа.

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви вже вмієте знаходити квадрати чисел. Опанувавши цей параграф, ви дізнаєтеся, як виконувати обернену дію, яка називається **знаходженням квадратного кореня із числа** (або *добуванням квадратного кореня*).

Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.

Наприклад,

1) $8^2=64$ і $(-8)^2=64$, отже, числа 8 і (-8) є квадратними коренями із числа 64;

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ і $\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$, отже, числа $\frac{2}{3}$ і $\left(-\frac{2}{3}\right)$ є квадратними коренями із числа $\frac{4}{9}$;

3) $0^2=0$, отже 0 — квадратний корінь із числа 0.

- Квадратний корінь із додатного числа має **два** значення — два протилежні числа.
- З огляду на те, що серед відомих вам чисел не існує числа, квадрат якого дорівнює від'ємному числу, то **квадратного кореня** із від'ємного числа **не існує**!

Невід'ємний квадратний корінь із числа має спеціальну назву — *арифметичний квадратний корінь*.

Арифметичним квадратним коренем із числа a називають **невід'ємне** число, квадрат якого дорівнює a.

- Арифметичний квадратний корінь позначають $\sqrt{a}$, читають «квадратний корінь з a», слово «арифметичний» зазвичай пропускають.
- Вираз, що стоїть під знаком кореня, називають підкореневим виразом.
- Підкореневий вираз може набувати тільки невід'ємних значень. Якщо $a<0$, вираз $\sqrt{a}$ не має змісту.
- Дію знаходження арифметичного квадратного кореня із числа називають **добуванням квадратного кореня**.

Наприклад:

$\sqrt{121}=\sqrt{11^2}=11$, оскільки: 1) $11\geqslant 0$; 2) $11^2=121$;

$\sqrt{0{,}01}=\sqrt{0{,}1^2}=0{,}1$, оскільки: 1) $0{,}1\geqslant 0$; 2) $0{,}1^2=0{,}01$;

$\sqrt{1}=1$, оскільки: 1) $1\geqslant 0$; 2) $1^2=1$;

$\sqrt{0}=0$, оскільки: 1) $0\geqslant 0$; 2) $0^2=0$.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- квадрат числа (square of a number)
- точний квадрат (perfect square)
- квадратний корінь (square root)
- знак кореня (radical symbol)
- підкореневий вираз (radicand)
- знаходження квадратного кореня (finding square root)

Арифметичний квадратний корінь

Знак квадратного кореня — радикал

Під-кореневий вираз

$\sqrt{a}=b$

Арифме-тичний квадратний корінь із числа a

Значення арифме-тичного квадратного кореня

$a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ b^2=a$

СЛІД ЗНАТИ!

Число b є арифметичним квадратним коренем із числа a:

$b=\sqrt{a}$, де $a\geqslant 0$,

якщо виконуються дві умови:

1) $b\geqslant 0$; 2) $b^2=a$.

Видавництво «Ранок»

СЛІД ЗНАТИ!

- $\sqrt{-25}$ — не має змісту, тому що $-25 < 0$;
- -7 не є арифметичним квадратним коренем із числа 49. $\sqrt{49} \neq -7$, тому що $-7 < 0$

Стратегія

1) Записуємо підкореневий вираз у вигляді квадрата числа.

2) Знаходимо значення коренів.

3) Виконуємо дії з урахуванням їх порядку.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Середньовічні вчені позначали квадратний корінь Rx — це скорочення від латинського слова *radix* — корінь.
- Сучасне позначення квадратного кореня вперше застосував німецький математик Крістоф Рудольф у 1525 р.
- Риски над підкореневим виразом спочатку не було, її пізніше ввів Рене Декарт з іншою метою, замість дужок. Ця риска незабаром злилася зі знаком кореня.

РОЗМИНКА 1

1 Назвіть усі квадратні корені із числа:

1) 16; 25; 36; 2) 0,01; 0,04; 0,25; 3) $\frac{1}{16}$; $\frac{25}{36}$; $\frac{49}{64}$.

2 Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{10\,000}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{16}{25}}$; $\sqrt{\frac{64}{81}}$; $\sqrt{\frac{100}{121}}$.

2) $\sqrt{0{,}09}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{0{,}36}$; $\sqrt{0{,}49}$;

ПРИКЛАД 1

Обчисліть значення виразу:

1) $5\sqrt{0{,}04} + 4\sqrt{0{,}25}$; 2) $8\sqrt{1\frac{9}{16}} - 7\sqrt{\frac{36}{49}}$.

Розв'язання

1) $5\sqrt{0{,}04} + 4\sqrt{0{,}25} = 5\sqrt{0{,}2^2} + 4\sqrt{0{,}5^2} = 5 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}5 = 1 + 2 = 3.$

2) Перетворюємо *мішане число* в *неправильний дріб:*

$$\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}}.$$

$$8\sqrt{1\frac{9}{16}} - 7\sqrt{\frac{36}{49}} = 8\sqrt{\frac{25}{16}} - 7\sqrt{\frac{36}{49}} = 8\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2} - 7\sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2} =$$

$$= 8 \cdot \frac{5}{4} - 7 \cdot \frac{6}{7} = 10 - 6 = 4.$$

Відповідь: 1) 3; 2) 4.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Обчисліть значення виразу:

1) $10\sqrt{4} + 6\sqrt{25}$;

2) $20\sqrt{49} + 5\sqrt{16}$;

3) $2\sqrt{0{,}09} - 8\sqrt{0{,}36}$;

4) $9\sqrt{0{,}01} - 7\sqrt{0{,}64}$;

5) $10\sqrt{\frac{36}{25}} + 4\sqrt{2\frac{1}{4}}$;

6) $2\sqrt{6\frac{1}{4}} + 18\sqrt{\frac{121}{81}}$;

7) $3\sqrt{2\frac{7}{9}} - 7\sqrt{30\frac{1}{4}}$;

8) $6\sqrt{3\frac{1}{16}} - 18\sqrt{2\frac{7}{81}}$.

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 2

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{x^2-y^2}$, якщо $x=5;\ y=-3$;

2) $\sqrt{b^2-4ac}$, якщо $a=2;\ b=3;\ c=-5$.

Розв'язання

1) $x=5;\ y=-3$, тоді

$$\sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{5^2-(-3)^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4.$$

2) $a=2;\ b=3;\ c=-5$, тоді

$$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-5)}=\sqrt{9+40}=\sqrt{49}=\sqrt{7^2}=7.$$

Відповідь: 1) 4; 2) 7.

Стратегія

1) Підставляємо у вираз значення змінних.

2) Знаходимо значення підкореневого виразу з урахуванням порядку дій.

3) Добуваємо квадратний корінь.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

У завданнях 1–4 обчисліть значення виразу $\sqrt{x^2-y^2}$, якщо:

1) $x=5,\ y=4$;
2) $x=10,\ y=6$;
3) $x=-13,\ y=5$;
4) $x=10,\ y=-6$.

У завданнях 5–8 обчисліть значення виразу $\sqrt{b^2-4ac}$, якщо:

5) $a=1,\ b=-6,\ c=9$;
6) $a=1,\ b=-8,\ c=16$;
7) $a=2,\ b=7,\ c=-15$;
8) $a=2,\ b=9,\ c=-18$.

Тотожність $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, якщо $a\geqslant 0$

З означення арифметичного квадратного кореня за умови $a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$ випливає: $\sqrt{a}=b$, якщо $b^2=a$.

Підставимо значення $b=\sqrt{a}$ в останню рівність, отримаємо тотожність, яка справджується для будь-якого $a\geqslant 0$:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

СЛІД ЗНАТИ!

Для будь-якого $a\geqslant 0$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Наприклад:

$$\left(\sqrt{45}\right)^2=45;\ \left(\sqrt{0{,}7}\right)^2=0{,}7;$$

$$\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2=\frac{3}{8}$$

РОЗМИНКА 2

Скориставшись тотожністю $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, де $a\geqslant 0$, знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{5}\right)^2$;
2) $\left(\sqrt{1}\right)^2$;
3) $\left(-\sqrt{2}\right)^2$;
4) $\left(-\sqrt{3{,}7}\right)^2$;
5) $\left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^2$;
6) $\left(-\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^2$;
7) $\left(\sqrt{0}\right)^2$;
8) $-\left(\sqrt{10}\right)^2$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$\left(-\sqrt{a}\right)^2=a,\ a\geqslant 0$.

Наприклад,

$$\left(-\sqrt{9}\right)^2=(-1)^2\cdot\left(\sqrt{9}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{9}\right)^2=9.$$

Видавництво «Ранок»

Стратегія

1) Підносимо добуток до квадрата:
$(a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2$.

2) Застосовуємо тотожність
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \geqslant 0$.

3) Обчислюємо значення виразу.

СЛІД ЗНАТИ!

За означенням арифметичного квадратного кореня:
$\sqrt{x} = 5;$
$x = 5^2;$
$x = 25$

СЛІД ЗНАТИ!

Число b є арифметичним квадратним коренем із числа a:
$b = \sqrt{a}$, де $a \geqslant 0$,
якщо виконуються дві умови:
1) $b \geqslant 0$; 2) $b^2 = a$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Щоб знайти значення підкореневого виразу, спід значення кореня піднести до квадрата.

ПРИКЛАД 3

Обчисліть значення виразу $\left(-2\sqrt{10}\right)^2 - \left(3\sqrt{4}\right)^2$.

Розв'язання

$\left(-2\sqrt{10}\right)^2 - \left(3\sqrt{4}\right)^2 = (-2)^2\cdot\left(\sqrt{10}\right)^2 - 3^2\cdot\left(\sqrt{4}\right)^2 =$
$= 4\cdot 10 - 9\cdot 4 = 40 - 36 = 4.$

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{11}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2$; 4) $\left(2\sqrt{7}\right)^2 - \left(\sqrt{17}\right)^2$; 7) $\left(3\sqrt{5}\right)^2 - \left(-5\sqrt{3}\right)^2$;
2) $\left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2$; 5) $\left(2\sqrt{10}\right)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2$; 8) $\left(6\sqrt{7}\right)^2 - \left(-7\sqrt{6}\right)^2$.
3) $\left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{15}\right)^2$; 6) $\left(7\sqrt{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{5}\right)^2$;

РОЗМИНКА 3

Визначте, за якого значення змінної буде правильною рівність:

1) $\sqrt{x} = 4$; 2) $\sqrt{x} = 15$; 3) $\sqrt{x} = 0{,}8$; 4) $\sqrt{x} = 2{,}5$, 5) $\sqrt{x} = 0$.

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sqrt{x} - 16 = 0$; 2) $\sqrt{5x+11} - 6 = 0$.

Розв'язання

	1) $2\sqrt{x} - 16 = 0$	2) $\sqrt{5x+11} - 6 = 0$
1) Зводимо рівняння до вигляду $\sqrt{x} = b$.	$2\sqrt{x} - 16 = 0;$ $2\sqrt{x} = 16;$ $\sqrt{x} = 8;$	$\sqrt{5x+11} - 6 = 0;$ $\sqrt{5x+11} = 6;$
2) Застосовуємо означення арифметичного квадратного кореня: $x = b^2$.	$x = 8^2;$ $x = 64$	$5x+11 = 6^2;$ $5x = 36 - 11;$ $5x = 25;$ $x = 5$

Відповідь: 1) 64; 2) 5.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} - 6 = 0$; 4) $4\sqrt{x} - 36 = 0$; 7) $\sqrt{6x-5} - 11 = 0$;
2) $\sqrt{x} - 7 = 0$; 5) $\sqrt{2x} - 12 = 0$; 8) $\sqrt{4x+1} - 7 = 0$.
3) $3\sqrt{x} - 15 = 0$; 6) $\sqrt{3x} - 15 = 0$;

Видавництво «Ранок»

Рівняння $x^2 = a$

ДОСЛІДЖУЄМО

Розгляньте розв'язування рівняння $x^2 = a$ графічним способом. Дайте відповіді на запитання.

1) Скільки розв'язків мають рівняння? Назвіть ці розв'язки.

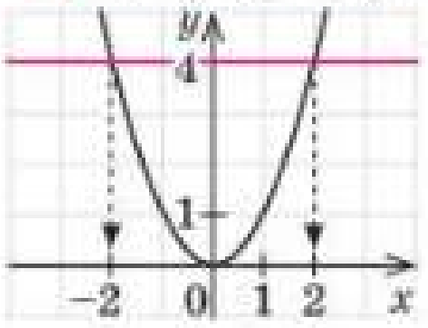
2) Від чого залежить кількість розв'язків рівняння $x^2 = a$?

Перевірте, чи правильно зроблені висновки.

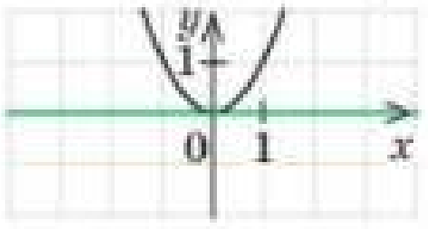
Висновки: розв'язки рівняння $x^2 = a$.

$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
Рівняння має два різні розв'язки — протилежні числа x_1 і x_2: $x_1 = -\sqrt{a}$ і $x_2 = \sqrt{a}$	Рівняння має **один** розв'язок $x = 0$	Рівняння не має розв'язків
Наприклад:		
$x^2 = 64$ два розвязки $x_1 = -\sqrt{64} = -8$; $x_2 = \sqrt{64} = 8$	$x^2 = 0$ **один** розв'язок $x = 0$	$x^2 = -5$ розв'язків немає

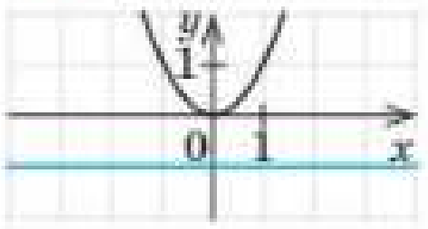
$x^2 = 4 \rightarrow y = x^2$ і $y = 4$



$x^2 = 0 \rightarrow y = x^2$ і $y = 0$



$x^2 = -1 \rightarrow y = x^2$ і $y = -1$



РОЗМИНКА 4

Знайдіть розв'язки рівняння:

1) $x^2 = 0$; 2) $x^2 = -9$; 3) $x^2 = 25$; 4) $x^2 = 1$; 5) $x^2 = \frac{49}{81}$.

ПРИКЛАД 5

Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 75 = 0$; 2) $(y+6)^2 - 100 = 0$.

Розв'язання

	1) $3x^2 - 75 = 0$	2) $(y+6)^2 - 100 = 0$
1) Зводимо рівняння до виду $x^2 = a$.	$3x^2 = 75$; $x^2 = 25$	$(y+6)^2 = 100$
2) Визначаємо знак a, робимо висновок про кількість коренів рівняння.	$25 > 0$ — рівняння має два корені	$100 > 0$ — рівняння має два корені
3) Знаходимо корені рівняння $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$.	$x_1 = -\sqrt{25} = -5$; $x_2 = \sqrt{25} = 5$	$y+6 = -\sqrt{100}$ або $y+6 = \sqrt{100}$; $y+6 = -10$ або $y+6 = 10$; $y_1 = -16$ або $y_2 = 4$

Відповідь: 1) ±5; 2) −16; 4.

Видавництво «Ранок»

СЛІД ЗНАТИ!

Корені рівняння $x^2 = a$:

- якщо $a > 0$, то $x_1 = -\sqrt{a}$ і $x_2 = \sqrt{a}$;
- якщо $a = 0$, то $x = 0$;
- якщо $a < 0$, то розв'язків немає

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Паліндром — це число, набір символів, слово, словосполучення або віршований рядок, що однаково читається в обох напрямках.

1) Знайдіть арифметичні квадратні корені з паліндромів:

$\sqrt{121}$

$\sqrt{12321}$

$\sqrt{1234321}$

2) Запишіть наступні 3 паліндроми і знайдіть арифметичні квадратні корені з них.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 9} = 9$;

$\sqrt{-81} = -9$;

$\sqrt{100\,000} = 100$;

$\sqrt{0{,}036} = 0{,}6$;

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{25} = 5$

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 36 = 0$; 4) $2x^2 - 98 = 0$; 7) $(2y-1)^2 - 49 = 0$;

2) $x^2 - 16 = 0$; 5) $(y+3)^2 - 121 = 0$; 8) $(2y+1)^2 - 81 = 0$.

3) $3x^2 - 27 = 0$; 6) $(y-2)^2 - 144 = 0$;

ПРАКТИКУМ

12.1 Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{\frac{121}{49}}$; 2) $\sqrt{\frac{64}{225}}$; 3) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$; 5) $\sqrt{0{,}0001}$; 6) $\sqrt{0{,}0009}$.

12.2 Використовуючи таблицю квадратів, обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{256}$; 2) $\sqrt{324}$; 3) $\sqrt{441}$; 4) $\sqrt{529}$; 5) $\sqrt{1024}$; 6) $\sqrt{1156}$.

12.3 Обчисліть значення виразу, скориставшися таблицею квадратів:

1) $\sqrt{7{,}29}$; 2) $\sqrt{11{,}56}$; 3) $\sqrt{14{,}44}$; 4) $\sqrt{0{,}1681}$; 5) $\sqrt{0{,}1936}$.

12.4 Покажіть, що число:

1) 21 є значенням арифметичного квадратного кореня із числа 441;
2) −26 не є значенням арифметичного квадратного кореня із числа 676;
3) 2,8 не є значенням арифметичного квадратного кореня із числа 8,41.

12.5 Обчисліть значення виразу:

1) $5 \cdot \sqrt{9}$; 3) $\sqrt{81} \cdot \sqrt{0{,}01}$; 5) $\sqrt{64} : 64$; 7) $\sqrt{\frac{1}{4}} : \sqrt{0{,}25}$;

2) $\sqrt{25} \cdot 4$; 4) $\sqrt{0{,}04} \cdot \sqrt{36}$; 6) $49 : \sqrt{49}$; 8) $\sqrt{0{,}81} : \sqrt{\frac{1}{9}}$.

12.6 Обчисліть значення виразу:

1) $-11 \cdot \sqrt{4}$; 2) $-6 \cdot \sqrt{16}$; 3) $0 \cdot \sqrt{169}$; 4) $-23 \cdot \sqrt{0}$.

12.7 Обчисліть значення виразу:

1) $1 + \sqrt{64}$; 4) $\sqrt{121} - \sqrt{25}$; 7) $0 : \sqrt{36} - 20 \cdot \sqrt{0{,}36}$;

2) $\sqrt{81} + 2$; 5) $3 \cdot \sqrt{4} + \sqrt{0{,}09}$; 8) $0 : \sqrt{49} - 30 \cdot \sqrt{0{,}49}$.

3) $\sqrt{100} - \sqrt{36}$; 6) $2 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{0{,}01}$;

Видавництво «Ранок»

12.8 Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{-9}$; 4) $\sqrt{-16}$; 5) $\sqrt{(-7)^2}$; 6) $-\sqrt{-25}$?

12.9 Знайдіть значення виразу:

1) $2a+\sqrt{a}$, якщо $a=1; 9; 25; 100$;

2) $3a-\sqrt{a}$, якщо $a=0; 4; 36; 100$;

3) $\sqrt{25-a}$, якщо $a=25; 9; -11; -75$;

4) $\sqrt{36-a}$, якщо $a=35; 20; -13; -64$.

12.10 Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{4,7}\right)^2$; 3) $\left(10\sqrt{0,9}\right)^2$; 5) $\left(-5\sqrt{3}\right)^2$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{20}}{2}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{2,4}\right)^2$; 4) $\left(20\sqrt{0,7}\right)^2$; 6) $\left(-6\sqrt{2}\right)^2$; 8) $\left(-\frac{\sqrt{45}}{3}\right)^2$.

12.11 Розв'яжіть рівняння:

1) $-0,1+\sqrt{x}=0$; 3) $\sqrt{0,5x}-5=0$; 5) $\sqrt{0,1x-5}-7=0$;

2) $\sqrt{x}+4=0$; 4) $\sqrt{0,5x}+6=0$; 6) $\sqrt{0,1x+1}-8=0$.

12.12 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-0,04=0$; 3) $0,5x^2-18=0$; 5) $(0,1x+4)^2-1=0$;

2) $x^2+100=0$; 4) $0,5x^2+50=0$; 6) $(0,1x-3)^2-1=0$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

12.13 За якого значення змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{x^2}$; 3) $\sqrt{-x}$; 4) $\sqrt{-x^2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{-x}}$?

12.14 Розв'яжіть рівняння 1–4.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $\sqrt{13+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=4$; $13+\sqrt{2+\sqrt{x}}=4^2$; $\sqrt{2+\sqrt{x}}=3$; $2+\sqrt{x}=3^2$; $\sqrt{x}=7$ $x=7^2=49$. *Відповідь:* 49.	2) $\sqrt{3+\sqrt{1+\sqrt{x}}}=2$; 3) $\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$; 4) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$.

Насправді квадратний корінь із від'ємного числа існує. Але ви дізнаєтеся про це, якщо в подальшому вивчатимете математику більш глибоко.

СЛІД ЗНАТИ!

Для будь-якого $a \geqslant 0$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$$

$$\left(-\sqrt{a}\right)^2=a$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$\sqrt{x}=c$,

якщо $x \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $x=c^2$.

Наприклад, рівняння $\sqrt{x}=-5$ не має коренів

ПРИГАДАЙТЕ!

$\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$.

- Підкореневий вираз — невід'ємне число.
- x^2 — невід'ємне число.
- На 0 ділити не можна!

Стратегія

Тричі застосовуємо означення арифметичного квадратного кореня:

$\sqrt{a}=b$;

$a=b^2$;

$a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

Видавництво «Ранок»

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Валентина Миколаївна Закорецька — єдина у світі жінка-парашутистка, яка виконала 11 500 стрибків (загальний час польоту 57 500 хв), дворазова абсолютна чемпіонка світу, володарка 50 світових рекордів.

Інший варіант роботи в електронному додатку

MATH FOR LIFE

12.15 **Геометрія.** Запишіть залежність сторони квадрата a від його площі S у вигляді рівняння. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа становить:

1) 196 см^2; 2) 900 м^2; 3) 0,01 км^2; 4) 123 454 321 мм^2.

12.16 **Рукоділля.** Ви помістили в рамку вишите полотно прямокутної форми, розміри якого 40×90 см, а тепер плануєте замовити рамку для квадратного полотна такої самої площі.

1) Якою має бути сторона цієї рамки?

2) Чи вистачить 2,5 м багета, щоб виготовити таку рамку?

12.17 **Стрибки з парашутом.** Валентина виконала стрибок із парашутом з висоти понад 2000 м над поверхнею землі. Парашут розкрився, коли дівчина пролетіла $s = 490$ м. Скільки секунд Валентина перебувала в польоті до розкриття парашута (тобто в стані вільного падіння), якщо відстань у разі такого руху можна обчислити за формулою $s = \frac{gt^2}{2}$, де $g = 9{,}8$ м/с^2 — прискорення вільного падіння, t (у с) — час руху?

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 8

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Задано функцію $y = x^2$. Знайдіть $y(-4)$.

А	Б	В	Г
16	8	−8	−16

2 Укажіть координати точки, яка належить графіку функції $y = x^2$.

А	Б	В	Г
$(-9; 3)$	$(3; -9)$	$(9; 3)$	$(3; 9)$

3 Знайдіть значення виразу $\left(-\sqrt{1{,}6}\right)^2$.

А	Б	В	Г
−1,6	1,6	0,8	−0,8

4 Розв'яжіть рівняння $3\sqrt{x} = 27$.

А	Б	В	Г
27	9	81	3

5 Обчисліть значення виразу $0 : \sqrt{36} - \sqrt{25}$.

А	Б	В	Г
11	1	−5	−25

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г).

1	$\sqrt{0} + \sqrt{9}$	А	1
2	$\frac{\sqrt{81}}{9}$	Б	2
		В	3
3	$20 \cdot \sqrt{0{,}01}$	Г	4

7 Знайдіть значення виразу $\sqrt{b^2 - 4ac}$, якщо $a = 1$, $b = 3$, $c = -10$.

8 Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 + 4x = 0$.

Видавництво «Ранок»

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

12.18 Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{\frac{25}{144}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt{0{,}04}$; 4) $\sqrt{0{,}0036}$.

12.19 Використовуючи таблицю квадратів, обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{289}$; 3) $\sqrt{484}$; 5) $\sqrt{7{,}84}$; 7) $\sqrt{0{,}1764}$;

2) $\sqrt{400}$; 4) $\sqrt{1296}$; 6) $\sqrt{12{,}25}$; 8) $\sqrt{0{,}2209}$.

12.20 Покажіть, що число:

1) 23 є значенням арифметичного квадратного кореня із числа 529;

2) $-2{,}7$ не є значенням арифметичного квадратного кореня із числа 7,29;

3) $\frac{19}{14}$ є значенням арифметичного квадратного кореня із числа $\frac{361}{196}$.

12.21 Обчисліть значення виразу:

1) $7\cdot\sqrt{4}$; 3) $\sqrt{0{,}01}\cdot\sqrt{25}$; 5) $36:\sqrt{36}$; 7) $\sqrt{0{,}64}:\sqrt{\frac{1}{64}}$;

2) $-14\cdot\sqrt{9}$; 4) $0\cdot\sqrt{225}$; 6) $-27\cdot\sqrt{0}$; 8) $-300\cdot\sqrt{0}$.

12.22 Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{49}+3$; 3) $6\cdot\sqrt{25}+\sqrt{0{,}04}$;

2) $\sqrt{144}-\sqrt{64}$; 4) $0:\sqrt{81}-40\cdot\sqrt{0{,}81}$.

12.23 Обчисліть значення виразу:

1) $20\sqrt{16}+7\sqrt{9}$; 3) $6\sqrt{\frac{169}{36}}+5\sqrt{3\frac{6}{25}}$;

2) $3\sqrt{0{,}64}-5\sqrt{0{,}81}$; 4) $6\sqrt{5\frac{1}{16}}-14\sqrt{2\frac{2}{49}}$.

12.24 Знайдіть значення виразу:

1) $3a+\sqrt{a}$, якщо $a=0;4;64;100$;

2) $\sqrt{16-a}$, якщо $a=15;7;-9;-48$.

Завдання 12.18–12.22 → Практикум, 12.1–12.7
Завдання 12.23 → Приклад 1
Завдання 12.24 → Практикум, 12.9
Завдання 12.25 → Приклад 2
Завдання 12.26 → Практикум, 12.10
Завдання 12.27 → Приклад 3
Завдання 12.28 → Практикум, 12.8
Завдання 12.29 → Приклад 4
Завдання 12.30 → Практикум, 12.11
Завдання 12.31 → Приклад 5
Завдання 12.32 → Практикум, 12.12
Завдання 12.33 → Math for life, 12.17
Завдання 12.34 → Інтелектуальний фітнес, 12.14

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Чи є число 128 повним квадратом?

1. Записуємо множники числа 128 у два стовпчики за зростанням та за спаданням.
2. Перевіряємо, чи є в одному рядку однакові множники:
- якщо є, то число є повним квадратом;
- якщо немає, то число не є повним квадратом.

Множник		Множник		Добуток
1	×	128	=	128
2	×	64	=	128
4	×	32	=	128
8	×	16	=	128
16	×	8	=	128
32	×	4	=	128
64	×	2	=	128
128	×	1	=	128

Перевірте в такий спосіб, чи є повним квадратом число 136.

Видавництво «Ранок»

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Пріянші Сомані, яка народилася в 1998 р. в Індії, легко виконує подумки складні математичні обчислення. В 11 років вона перемогла на змаганні Mental Calculation World Cup — світовому чемпіонаті з усного математичного рахунку. Пріянші першою серед 37 учасників обчислила квадратний корінь із десяти шестицифрових чисел, витративши на це всього 6 хв 51 с. У 2012 р. дівчинка стала новим світовим рекордсменом у добуванні квадратних коренів подумки.

 # BE SMART

День квадратного кореня — неофіційне свято, що відзначається дев'ять разів у столітті: у день, коли і число, і порядковий номер місяця є квадратними коренями з числа, яке складається з двох останніх цифр року. Уперше це свято відзначалося 9 вересня 1981 р (09-09-81). Засновником свята є шкільний учитель Рон Гордон із міста Редвуд-Сіті, Каліфорнія, США. Запишіть усі дні квадратного кореня, що відзначаються у XXI ст.

12.25 Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{x^2-y^2}$, якщо $x=5$, $y=3$;

2) $\sqrt{x^2+y^2}$, якщо $x=-8$, $y=15$;

3) $\sqrt{b^2-4ac}$, якщо $a=1$, $b=-10$, $c=25$;

4) $\sqrt{b^2-4ac}$, якщо $a=2$, $b=5$, $c=-12$.

12.26 Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{3{,}8}\right)^2$; 2) $\left(30\sqrt{0{,}2}\right)^2$; 3) $\left(-3\sqrt{8}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{40}}{2}\right)^2$.

12.27 Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{14}\right)^2+\left(\sqrt{8}\right)^2$; 3) $\left(9\sqrt{2}\right)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2$;

2) $\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{11}\right)^2$; 4) $\left(5\sqrt{7}\right)^2-\left(-7\sqrt{5}\right)^2$.

12.28 Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x}-8=0$; 2) $2\sqrt{x}-20=0$; 3) $\sqrt{3x}-12=0$; 4) $\sqrt{5x-6}-8=0$.

12.29 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-25=0$; 3) $(y-3)^2-169=0$;

2) $2x^2-128=0$; 4) $(2y+1)^2-121=0$.

12.30 Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{-25}$; 3) $\sqrt{(-6)^2}$; 4) $-\sqrt{-16}$?

12.31 Розв'яжіть рівняння:

1) $-0{,}2+\sqrt{x}=0$; 3) $\sqrt{0{,}5x}-3=0$;

2) $\sqrt{x}+1=0$; 4) $\sqrt{0{,}1x-4}-6=0$.

12.32 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-0{,}09=0$; 2) $0{,}5x^2-72=0$; 3) $(0{,}1x-2)^2-1=0$.

12.33 30 найкращих парашутистів України «станцювали» в небі гопак під час стрибка. Скільки секунд парашутисти перебували в стані вільного падіння, якщо вони стрибали з висоти 5 км, а парашути розкрилися, коли вони пролетіли $s=1960$ м? Скористайтеся формулою $s=\frac{gt^2}{2}$, де $g=9{,}8$ м/с^2 — прискорення вільного падіння, t (у с) — час руху.

Бонусне завдання

12.34 Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2+\sqrt{x}}=4$; 2) $\sqrt{3-\sqrt{x}}=1$; 3) $\sqrt{1-\sqrt{1+\sqrt{x}}}=1$.

Видавництво «Ранок»

§13 МНОЖИНА. ПІДМНОЖИНА. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ. РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА. ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА. ДІЙСНІ ЧИСЛА

ВЧОРА Ви виконували дії над натуральними, цілими, дробовими числами

СЬОГОДНІ Ви дізнаєтеся про раціональні, ірраціональні й дійсні числа; про те, як класифікують числа в математиці, у які множини їх об'єднують

ЗАВЖДИ Ви зможете знаходити й унаочнювати логічні зв'язки між явищами та поняттями за допомогою діаграм Ейлера — Венна

rnk.com.ua/109565

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

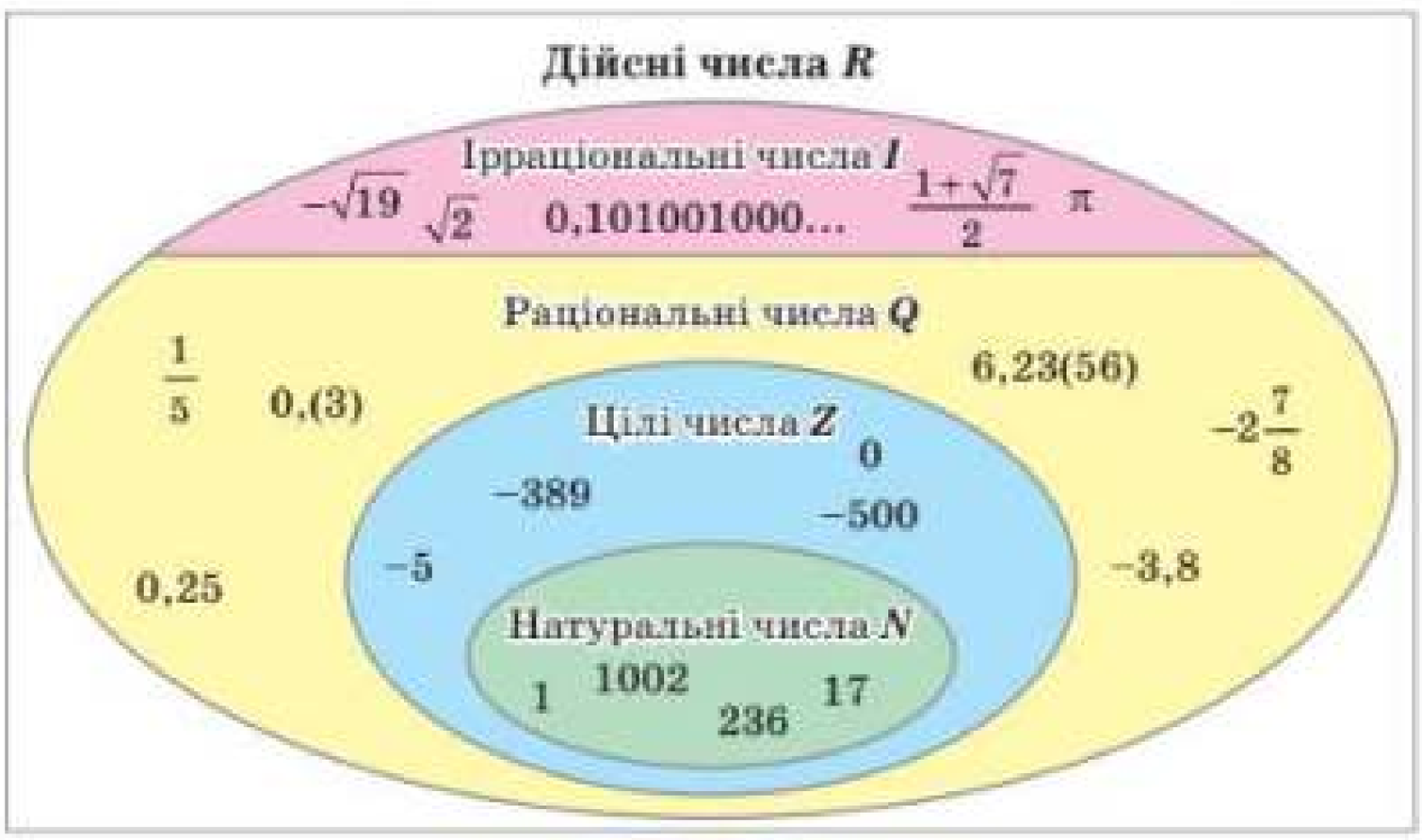
СВІТ ЧИСЕЛ

Зрозуміти, що таке **множина**, можна, уявивши сукупність об'єктів, які об'єднані за певною ознакою або мають певну властивість. Таку властивість називають *характеристичною*.

Множини та відношення між ними зручно зображати за допомогою кругів. Зазвичай їх називають кругами Ейлера.

Розгляньте діаграму, на якій зображено співвідношення між числовими множинами.

1) Які числа вам знайомі?
2) Назви яких чисел є для вас новими?
3) Які позначення чисел є для вас незнайомими?



У цьому параграфі ви познайомитесь із числовими множинами, дізнаєтеся, що, крім раціональних чисел, існують ірраціональні числа. Разом вони утворюють множину дійсних чисел.

Діаграма Ейлера — Венна має вигляд кількох кругів, які частково накладаються один на інший. Круги відповідають множинам. Утворений спільний простір ілюструє спільні властивості множин.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- натуральні числа (natural numbers)
- цілі числа (integers)
- раціональні числа (rational numbers)
- ірраціональні числа (irrational numbers)
- дійсні числа (real numbers)
- числові множини (numerical sets)
- скінченний періодичний десятковий дріб (terminating, repeating decimal)
- нескінченний неперіодичний десятковий дріб (nonterminating, nonrepeating decimal)

Видавництво «Ранок»

СЛІД ЗНАТИ!

- Множини прийнято позначати великими латинськими літерами, а елементи множин — маленькими латинськими літерами. Наприклад: множина A, елемент b множини B.
- Належність або неналежність елемента певній множині позначають спеціальними знаками ($\in$ або $\notin$):
  $x \in A$ — елемент x належить множині A;
  $y \notin D$ — елемент y не належить множині D.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Множина, підмножина

Поняття множини належить до тих основних понять математики, що не мають означення, як, наприклад, число, точка, пряма, площина.

Об'єкти, з яких складається множина, називають **елементами множини.**

Множину, яка не містить жодного елемента, називають **порожньою** і позначають символом $\varnothing$.

Множину можна задати:

- переліком елементів множини, наприклад: множина $P = \{-1; 0; 1\}$; множина літер слова «мережа» $M = \{\text{м}; \text{е}; \text{р}; \text{ж}; \text{а}\}$ (порядок запису елементів не має значення, елементи записують у фігурних дужках);
- описом характеристичної властивості (словесно або аналітично, тобто формулою), наприклад: множина додатних чисел, кратних 5; множина коренів рівняння.

$\in$ — знак «належить»;
$\notin$ — знак «не належить»
$\subset$ — знак підмножини;
$\varnothing$ — порожня множина.

Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, то кажуть, що множина A є **підмножиною** множини B.

Це записують так: $A \subset B$.

$A \subset B \Leftrightarrow$ Якщо $x \in A$, то $x \in B$.

Наприклад, множини $A = \{2; 4; 6\}$ і $B = \{4; 2; 6\}$ містять однакові елементи, отже, ці множини рівні між собою: $A = B$.

Дві множини A і B називають **рівними** тоді й тільки тоді, коли вони містять ті самі елементи, тобто коли кожний елемент множини A є також елементом множини B, і навпаки.

Рівність множин записують так: $A = B$.

Числові множини

Назва	Позначення	Приклад
Числа, які використовують для лічби, називають **натуральними.**	N	$5 \in N$; $0 \notin N$;
Натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль утворюють множину **цілих чисел.**	Z	$-18 \in Z$; $0 \in Z$; $4{,}7 \notin Z$;
Цілі та дробові числа утворюють множину **раціональних чисел.**	Q	$\frac{3}{4} \in Q$; $0 \in Q$; $-389 \in Q$; $74{,}02 \in Q$

Множини N, Z, Q є нескінченними.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- термін «натуральне число» і позначення множини N походить від латинського слова *natura* — природа.
- позначення множини Z походить від німецького слова *zahl* — число.
- термін «раціональне число» походить від латинського *ratio* — відношення, розум.

Видавництво «Ранок»

РОЗМИНКА 1

1 Запишіть за допомогою знака підмножини «$\subset$», яка множина є підмножиною іншої:

1) A — множина підручників із математики, що є в бібліотеці вашої школи; B — множина всіх підручників, що є в бібліотеці вашої школи.

2) M — множина парних натуральних чисел; E — множина парних трицифрових натуральних чисел.

2 Визначте, які з наведених тверджень є правильними, а які — неправильними:

1) $5 \in \boldsymbol{Z}$; 3) $22 \notin \boldsymbol{N}$; 5) $1\frac{1}{3} \in \boldsymbol{Z}$; 7) $0{,}17 \in \boldsymbol{N}$;

2) $1{,}1212 \in \boldsymbol{Q}$; 4) $0 \in \boldsymbol{N}$; 6) $-24 \notin \boldsymbol{Z}$; 8) $\frac{9}{11} \in \boldsymbol{Q}$.

Ілюстрація співвідношення між двома множинами

Дійсні числа

Розглянемо **раціональні числа** докладніше.

Числа, які можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне, називають **раціональними числами.**

Для перетворення звичайного дробу $\frac{m}{n}$ у десятковий використовують дію ділення.

У результаті ділення одного числа на інше ми можемо отримати:

1) *ціле число* — це ділення без остачі;

2) *десятковий дріб*, у якому кількість знаків після коми є скінченною;

3) *десятковий дріб*, у якому кількість знаків після коми є нескінченною, але серед цих знаків обов'язково існує група цифр, що повторюється.

Сукупність цифр, яка повторюється в разі ділення одного числа на інше, називають **періодом числа**. А числа, що мають таку властивість, називають **періодичними.**

Період (сукупність повторюваних цифр) записують один раз у круглих дужках.

Кожний дріб $\frac{m}{n}$, де $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$, можна подати у вигляді **скінченного** десяткового дробу або у вигляді **нескінченного періодичного** десяткового дробу.

Наприклад:

$$8 = \frac{8}{1} = \frac{40}{5};$$

$$0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5};$$

$$-\frac{9}{11} = \frac{-9}{11}.$$

Наприклад:

1) $\frac{6}{2} = 3$; $\frac{15}{3} = 5$;

2) $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{5}{2} = 2{,}5$;

3) $\frac{5}{11} = 0{,}4545\ldots$.

Наприклад:

$\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots = 0{,}(2)$;

$\frac{7}{11} = 0{,}6363\ldots = 0{,}(63)$.

Видавництво «Ранок»

Отже, підсумуємо та визначимо **множину раціональних чисел.**

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in Z,\ n \in N \right\}$$

! *Множину раціональних чисел Q визначають як множину нескоротних дробів із цілим чисельником і натуральним знаменником.*

Але існують числа, які не можуть бути виражені за допомогою відношення цілого числа до натурального. Їх називають **ірраціональними числами.**

Множину ірраціональних чисел позначають I.

Наприклад, ірраціональні числа:

$\sqrt{5} = 2{,}236\,067\,977\,499\,79\ldots;$

$\sqrt{11} = 3{,}326\,624\,790\,355\,4\ldots;$

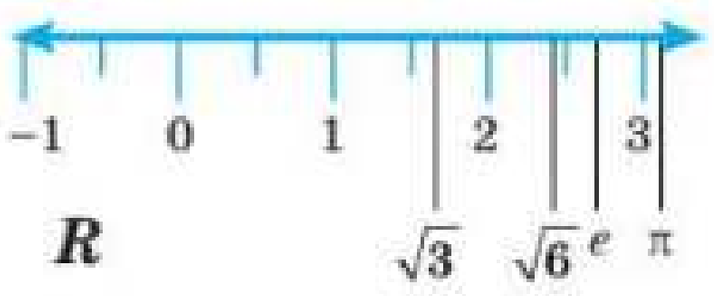
$0{,}110\,110\,011\,000\,11\ldots$

Ірраціональне число можна подати у вигляді **нескінченного десяткового неперіодичного дробу.**

Раціональні та ірраціональні числа утворюють **множину дійсних чисел**, яку позначають R.

З дійсними числами виконують усі арифметичні дії, для них чинні всі правила округлення й порівняння чисел.

Отже, підсумуємо та визначимо **множину дійсних чисел.**



! *Множину дійсних чисел R можна описати як множину скінченних і нескінченних дробів.*

Можна зробити висновок про те, що координатна пряма є **геометричною моделлю множини дійсних чисел**, тому координатну пряму часто називають **числовою прямою.**

ПРИКЛАД 1

Визначте, які з чисел $\frac{3}{4}$; $-\frac{12}{3}$; $\frac{1}{11}$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{1{,}69}$; $0{,}0300300030003\ldots$; $\sqrt{400}$ є:

1) раціональними; 2) ірраціональними.

Розв'язання

Число	Характеристика	Висновок
$\frac{3}{4} = 0{,}75$	Скінченний десятковий дріб	Раціональне число
$-\frac{12}{3} = -4$	Ціле від'ємне число	Раціональне число
$\frac{1}{11} = 0{,}0909\ldots = 0{,}(09)$	Нескінченний періодичний дріб	Раціональне число
$\sqrt{19} = 4{,}358\,898\,944\ldots$	Нескінченний неперіодичний дріб	Ірраціональне число
$\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$	Скінченний десятковий дріб	Раціональне число
$0{,}0300300030003\ldots$	Нескінченний неперіодичний дріб	Ірраціональне число
$\sqrt{400} = 20$	Натуральне число	Раціональне число

Видавництво «Ранок»

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Визначте, які із чисел: $\frac{2}{7}$; $\frac{9}{4}$; $-\frac{15}{3}$; $-\frac{18}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{0{,}09}$; $\sqrt{0{,}64}$; $2{,}121121112\ldots$; $0{,}343443444\ldots$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{225}$ є:

1) раціональними;

2) ірраціональними.

ПРИКЛАД 2

Подайте число у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу:

1) $\frac{3}{11}$; 2) $\frac{2}{15}$.

Розв'язання

	Виконуємо ділення, визначаємо **період**, записуємо відповідь	Читаємо правильно
1) $\frac{3}{11}$	$3:11=0{,}272727\ldots=0{,}(27)$	Нуль цілих, 27 у періоді
2) $\frac{2}{15}$	$2:15=0{,}13333\ldots=0{,}1(3)$	Нуль цілих, 1 десята, 3 в періоді

Відповідь: 1) $0{,}(27)$; 2) $0{,}1(3)$.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Подайте число у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{9}$; 3) $\frac{4}{11}$; 4) $\frac{5}{11}$; 5) $\frac{7}{15}$; 6) $\frac{8}{15}$.

ПРИКЛАД 3

Запишіть число $0{,}(8)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання

1) Позначимо число через a. Запишемо його у вигляді нескінченного періодичного дробу. ..... $a=0{,}(8)=0{,}888\ldots$

2) Помножимо обидві частини рівності на 10. ..... $a=0{,}888\ldots \mid \cdot 10$; $10a=8{,}88\ldots$

3) Віднімемо почленно одержані рівності та розв'яжемо рівняння. ..... $10a-a=8{,}88\ldots-0{,}888\ldots$; $9a=8$; $a=\frac{8}{9}$

Відповідь: $\frac{8}{9}$.

ДОСЛІДЖУЄМО

Проаналізуйте зв'язки між числовими множинами й доповніть твердження.

1) Множина дійсних чисел містить множину _____ чисел та множину _____ чисел.

2) Множина раціональних чисел містить множину _____ чисел.

3) Множина цілих чисел містить множину _____ чисел.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Позначення R множини дійсних чисел походить від англійського слова Real або німецького Reel — дійсний.
- Якщо перекласти з латинської дослівно: «раціональне число» — «розумне число», «ірраціональне число» — «нерозумне число» («ір» означає заперечення).

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Домножати рівність слід на таке число (10, 100, 1000 і т. д.), кількість нулів у якому дорівнює кількості цифр у періоді заданого числа:

$0{,}(7)$ — множимо на 10

$0{,}(51)$ — множимо на 100

$0{,}(243)$ — множимо на 1000

Видавництво «Ранок»

Наприклад:
$4 = 4,000\ldots = 4,(0)$;
$\frac{7}{8} = 0,875 = 0,875\,000\ldots = 0,875(0)$

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Запишіть число у вигляді звичайного дробу:

1) $0,(7)$; 2) $0,(4)$; 3) $0,(18)$; 4) $0,(63)$; 5) $0,2(6)$; 6) $0,7(3)$.

Кожне ціле число або скінченний десятковий дріб можна записати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, приписавши справа від нього нескінченну кількість нулів.

ПРИКЛАД 4

Порівняйте числа:

1) $\frac{1}{9}$ і $0,(1)$; 2) $2,23$ і $\sqrt{5}$; 3) $\frac{3}{8}$ і $0,(37)$.

Розв'язання

	1) $\frac{1}{9}$ і $0,(1)$	2) $2,23$ і $\sqrt{5}$	3) $\frac{3}{8}$ і $0,(37)$
Записуємо числа у вигляді нескінченних десяткових дробів	$\frac{1}{9} = 0,111\ldots$ $0,(1) = 0,111\ldots$	$2,23 = 2,2300\ldots$ $\sqrt{5} = 2,2360\ldots$	$\frac{3}{8} = 0,3750\ldots$ $0,(37) = 0,3737\ldots$
Порівнюємо отримані числа	$0,111\ldots = 0,111\ldots$ $\frac{1}{9} = 0,(1)$	$2,2300\ldots < 2,2360\ldots$ $2,23 < \sqrt{5}$	$0,3750\ldots > 0,3737\ldots$ $\frac{3}{8} > 0,(37)$

Відповідь: 1) $\frac{1}{9} = 0,(1)$; 2) $2,23 < \sqrt{5}$; 3) $\frac{3}{8} > 0,(37)$.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Порівняйте числа:

1) $0,(2)$ і $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{8}{9}$ і $0,(8)$; 3) $\sqrt{6}$ і $2,45$; 4) $\sqrt{7}$ і $2,64$; 5) $\frac{5}{8}$ і $0,(63)$; 6) $\frac{7}{8}$ і $0,(86)$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

«Рентгеноелектрокардіографічний» — найдовше українське слово. Воно увійшло до Книги рекордів.

1. Запишіть множину букв, із яких складається це слово.
2. Складіть слова, множина букв яких є підмножиною множини букв заданого слова. Запишіть ці множини.
3. Порівняйте результати. Чи є серед записаних множин рівні?

Виграє той / та, хто правильно складе більше слів.

ПРАКТИКУМ

13.1 Задайте переліком елементів множину:

1) букв слова «intelligent»;
2) букв, якими записують назву міста (населеного пункту), у якому ви мешкаєте.

13.2 Яка серед зазначених множин є підмножиною множини $A = \{1; 2; 3; 4\}$?

1) $B = \{0; 1\}$; 3) $M = \{4\}$; 5) $P = \{1; 2; 3; 4\}$;
2) $C = \{-1; -2\}$; 4) $L = \{1; 4\}$; 6) $H = \{1; 2; 5\}$.

Видавництво «Ранок»

13.3 Виберіть серед поданих множин порожні:
1) множина двоцифрових чисел, менших від 8;
2) множина натуральних чисел, менших від 0;
3) множина раціональних чисел, більших за 1 000 000;
4) множина цілих чисел, більших за 500, але менших від 501.

13.4 Серед наведених чисел укажіть раціональні:

$\frac{\sqrt{9}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{4}}$; $-2{,}9$; $-5{,}6$; $\sqrt{45}$; $\sqrt{80}$; $15{,}(3)$; $72{,}(1)$.

13.5 Подайте число у вигляді звичайного дробу:
1) 0,8; 2) 0,3; 3) 4,12; 4) 7,94; 5) −5,03; 6) −3,01.

13.6 Подайте число у вигляді нескінченного періодичного дробу:

1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) $\frac{16}{15}$; 4) $\frac{17}{15}$; 5) $\frac{35}{11}$; 6) $\frac{51}{11}$.

13.7 Порівняйте числа:

1) $3{,}01$ і $\sqrt{9}$; 3) $7\frac{5}{9}$ і $7{,}(5)$; 5) $11{,}(32)$ і $11{,}(23)$;

2) $3{,}99$ і $\sqrt{16}$; 4) $8\frac{4}{9}$ і $8{,}(4)$; 6) $12{,}(51)$ і $12{,}(53)$.

13.8 Запишіть за зростанням числа:

1) $3{,}18$; π; $3{,}(15)$; 3) $0{,}5$; $\frac{5}{9}$; $0{,}(49)$;

2) $3{,}11$; π; $3{,}(12)$; 4) $\frac{2}{9}$; $0{,}(23)$; $0{,}2$.

13.9 Використовуючи калькулятор, знайдіть наближене значення виразу. Результат округліть до сотих:

1) $\sqrt{10}-3{,}71$; 3) $2\pi+0{,}17$; 5) $\sqrt{30}-2\sqrt{6}$;

2) $\sqrt{12}-2{,}16$; 4) $3\pi+0{,}57$; 6) $\sqrt{50}-2\sqrt{2}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Визначте, яка ділянка діаграми відповідає множині риб, що живуть у теплих водах і мають сині хвости й жовті плавники, що світяться в темряві.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

13.10 Запишіть за допомогою знака підмножини «$\subset$», яка множина є підмножиною іншої.
1) B — множина коренів рівняння $-2x=14$;
C — множина коренів рівняння $x^2-49=0$;
F — множина коренів рівняння $x(x+7)(x-7)=0$.
2) A — множина натуральних чисел, кратних 4;
B — множина коренів рівняння $\frac{x^2-8x}{x}=0$;
C — множина натуральних чисел, кратних 2;
Z — множина цілих чисел.

Видавництво «Ранок»

13.11 Розмістіть за зростанням числа кожної множини 1–4.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $0,4(1)$; $0,(414)$; $0,(41)$, $\sqrt{0,17}$. Записуємо числа у вигляді нескінченних десяткових дробів: $0,4(1)=0,411111\ldots$ $0,(41)=0,414141\ldots$ $0,(414)=0,414414\ldots$ $\sqrt{0,17}=0,412310\ldots$ $0,411111\ldots<0,412310\ldots<0,414141\ldots<0,414414\ldots$ $0,4(1)<\sqrt{0,17}<0,(41)<0,(414)$. *Відповідь*: $0,4(1)$; $\sqrt{0,17}$; $0,(41)$; $0,(414)$.	2) $0,1(5)$; $0,(15)$; $0,(151)$; $1,5$; 3) $0,(27)$; $0,276$; $0,2(7)$; $0,(272)$; 4) $\sqrt{0,3}$; $0,(54)$; $0,(545)$; $0,5(4)$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$C=2\pi R$

$\pi\approx 3,14$

MATH FOR LIFE

13.12 Знайдіть довжину арени цирку, радіус якої дорівнює 18 м. Результат округліть до десятих.

13.13 Поміркуйте, чи є подані твердження правильними.

1) Якщо C — множина білих акул, які живуть у річці Дніпро, то $C=\varnothing$.
2) Якщо A — множина котів, що народилися в Європі протягом 2024 р., а B — множина котів, що народилися в Європі протягом літа 2024 р., то $A\subset B$.
3) Якщо D — множина дерев на території України, висота яких не перевищує 200 м, а F — множина дерев на території України, висота яких не перевищує 300 м, то $D=F$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

13.14 Запишіть за допомогою знака підмножини «$\subset$», яка множина є підмножиною іншої.

1) G — множина коренів рівняння $(x-6)(x+6)=0$;
M — множина коренів рівняння $8x=48$;
P — множина коренів рівняння $(36-x^2)(x+7)=0$.
2) K — множина натуральних чисел, кратних 4;
M — множина натуральних чисел, кратних 8;
Z — множина цілих чисел;
P — множина коренів рівняння $\dfrac{x^2-24x}{x}=0$.

13.15 Визначте, які із чисел: $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{2}$; $-\frac{24}{3}$; $-\frac{16}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{12}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{0,01}$; $\sqrt{0,81}$; $5,020220222\ldots$; $0,565565556\ldots$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{256}$ є:

1) раціональними; 2) ірраціональними.

Завдання 13.14 → Інтелектуальний фітнес 13.10
Завдання 13.15 → Приклад 1
Завдання 13.16 → Приклад 2
Завдання 13.17 → Приклад 3
Завдання 13.18 → Приклад 4
Завдання 13.19 → Практикум 13.4
Завдання 13.21–13.25 → Практикум 13.5–13.9

Видавництво «Ранок»

13.16 Подайте число у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу:

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{2}{11}$; 4) $\frac{7}{11}$; 5) $\frac{4}{15}$; 6) $\frac{11}{15}$.

13.17 Запишіть число у вигляді звичайного дробу:

1) $0,(6)$; 3) $0,(36)$; 5) $0,4(6)$;
2) $0,(2)$; 4) $0,(45)$; 6) $0,5(3)$.

13.18 Порівняйте числа:

1) $0,(7)$ і $\frac{7}{9}$; 3) $\sqrt{3}$ і $1,73$; 5) $\frac{1}{8}$ і $0,(12)$;
2) $0,(5)$ і $\frac{5}{9}$; 4) $\sqrt{2}$ і $1,41$; 6) $\frac{3}{8}$ і $0,(38)$.

13.19 Серед наведених чисел укажіть раціональні:

$\frac{\sqrt{16}}{3}$; $\frac{2}{\sqrt{25}}$; $-3,2$; $-8,3$; $\sqrt{40}$; $\sqrt{90}$; $62,(5)$; $19,(4)$.

13.20 Подайте число у вигляді відношення цілого числа до натурального:

1) 47; 3) 1,5; 5) -9; 7) $2\frac{1}{4}$;
2) 83; 4) 3,6; 6) -25; 8) $6\frac{3}{5}$.

13.21 Подайте число у вигляді звичайного дробу:

1) 0,2; 2) 0,6; 3) 5,85; 4) 2,16; 5) $-7,02$; 6) $-9,06$.

13.22 Подайте число у вигляді нескінченного періодичного дробу:

1) $\frac{10}{3}$; 2) $\frac{11}{3}$; 3) $\frac{19}{15}$; 4) $\frac{22}{15}$; 5) $\frac{41}{11}$; 6) $\frac{67}{11}$.

13.23 Порівняйте числа:

1) $5,02$ і $\sqrt{25}$; 2) $6\frac{2}{9}$ і $6,(2)$; 3) $10,(17)$ і $10,(71)$.

13.24 Запишіть за зростанням числа:

1) $3,13$; π; $3,(08)$; 2) $0,7$; $0,(78)$; $\frac{7}{9}$.

13.25 Використовуючи калькулятор, знайдіть наближене значення виразу. Результат округліть до сотих:

1) $\sqrt{15}-2,63$; 2) $4\pi+0,45$; 3) $\sqrt{60}-2\sqrt{3}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

$\sqrt{2}$ — перше знайдене ірраціональне число:

$\sqrt{2}=1,41421356237309504 8\ldots$

Існує мнемонічне правило, яке допомагає запам'ятати значення числа $\sqrt{2}$ до 11 знаків після коми (цифри позначають кількість букв у словах):

1 4 1 4 2 1 3 5
Я Галя, я йшла, та я всі цифри
6 2 3 7
кореня до вас знайшла.

Спробуйте скласти мнемонічне правило для запам'ятовування значення числа π.

 # BE SMART

З курсу геометрії вам відомо, що коли довжину будь-якого кола розділити на його діаметр, то отримаємо одне й те саме число — π. Число π виражається нескінченним десятковим дробом 3,141 592 65... . Наприкінці XVIII ст. німецький математик І. Ламберт і французький математик А. Лежандр довели, що число π є ірраціональним. Щороку 14 березня відзначають День числа π.

Видавництво «Ранок»

§14 ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

ВЧОРА Ви дізналися, що таке арифметичний квадратний корінь, навчилися добувати його.

СЬОГОДНІ Ви познайомитеся з добуванням арифметичного квадратного кореня з добутку, частки та степеня.

ЗАВЖДИ Ви зможете знаходити різні швидкості, виконувати обчислення раціональним способом.

rnk.com.ua/109566

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

АРИФМЕТИЧНІ КВАДРАТНІ КОРЕНІ У ФІЗИЦІ

Період коливань T математичного маятника визначають за формулою Гюйгенса: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де $g = 9{,}8$ м/с^2 — прискорення вільного падіння, l — довжина підвісу.

Швидкість, з якою тіло рухається навколо Землі колом радіуса R під дією сили всесвітнього тяжіння, обчислюють за формулою $v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R}}$, де G — гравітаційна стала, M — маса Землі.

Швидкість цунамі обчислюють за формулою $v = \sqrt{g \cdot D}$, де $g = 9{,}8$ м/с^2 — прискорення вільного падіння, D — глибина океану.

Для розрахунку оптимальної швидкості v катера (у м/с) користуються формулою $v = 1{,}1\sqrt{g \cdot L}$, де $g = 9{,}8$ м/с^2 — прискорення вільного падіння, L — довжина судна по ватерлінії.

Щоб знайти значення величин за цими формулами, можна обчислити підкореневий вираз, а потім добути корінь. А можна скористатися правилами знаходження кореня з добутку і частки. Отже, існують різні варіанти порядку виконання дій. Проаналізувавши їх, вибираємо оптимальний спосіб обчислення значення поданих виразів.

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

ДОСЛІДЖУЄМО

1) Виконайте дії і порівняйте відповідні результати.
2) Спробуйте сформулювати правила добування арифметичного квадратного кореня з добутку; із частки.

Добуток		Частка	
$\sqrt{a\cdot b}$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$\sqrt{4\cdot 25}=$ $=\sqrt{100}=10$	$\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}=$ $=2\cdot 5=10$	$\sqrt{\frac{9}{64}}=\sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{3}{8}$	$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}}=\frac{3}{8}$
$\sqrt{9\cdot 100}=$ $=\sqrt{\square}=\square$	$\sqrt{9}\cdot\sqrt{100}=$ $=\square\cdot\square=\square$	$\sqrt{\frac{49}{100}}=\sqrt{\left(\frac{\square}{\square}\right)^2}=\frac{\square}{\square}$	$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}}=\frac{\square}{\square}$

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- властивості коренів (properties of radicals)
- добуток коренів (product of radicals)
- властивість множення квадратних коренів (product property of square roots)
- частка коренів (quotient of radicals)
- властивість частки квадратних коренів (quotient property of square roots)
- квадратний корінь зі степеня (square root of a power)

Арифметичний квадратний корінь із добутку

Арифметичний квадратний корінь із добутку невід'ємних чисел (множників) дорівнює добутку коренів із цих чисел.

Наприклад:

$\sqrt{17\cdot 11}=\sqrt{17}\cdot\sqrt{11}$;

$\sqrt{35}=\sqrt{5\cdot 7}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$;

$\sqrt{36\cdot 49}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{49}=6\cdot 7=42$;

$\sqrt{23b}=\sqrt{23}\cdot\sqrt{b}$, $b\geqslant 0$;

$\sqrt{3\cdot 41\cdot c}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{41}\cdot\sqrt{c}$, $c\geqslant 0$

Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, виконується рівність

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Тотожність справедлива для трьох і більше невід'ємних множників:

$$\sqrt{a\cdot b\cdot c}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c},$$

якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$.

Ознайомитися з доведенням властивостей арифметичного квадратного кореня ви можете, звернувшись до електронного додатку.

РОЗМИНКА 1

1 Подайте у вигляді добутку квадратних коренів вираз:

1) $\sqrt{3\cdot 17}$; 2) $\sqrt{55}$; 3) $\sqrt{4a}$; 4) $\sqrt{31b}$; 5) $\sqrt{6\cdot 9\cdot c}$.

2 Обчисліть за допомогою тотожності $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$:

1) $\sqrt{4\cdot 25}$; 3) $\sqrt{16\cdot 81}$; 5) $\sqrt{0{,}01\cdot 9}$; 7) $\sqrt{1{,}21\cdot 400}$;

2) $\sqrt{9\cdot 36}$; 4) $\sqrt{64\cdot 100}$; 6) $\sqrt{25\cdot 0{,}04}$; 8) $\sqrt{900\cdot 2{,}25}$.

Видавництво «Ранок»

Стратегія

1) Розкладаємо підкореневий вираз на множники так, щоб отримати добуток повних квадратів.

2) Застосовуємо формулу

$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$,
якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

ПРИКЛАД 1

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{32\cdot 18}$; 2) $\sqrt{4{,}9\cdot 640}$.

Розв'язання

1) $\sqrt{32\cdot 18}=\sqrt{16\cdot 2\cdot 2\cdot 9}=\sqrt{16\cdot 4\cdot 9}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=4\cdot 2\cdot 3=24$;

2) $\sqrt{4{,}9\cdot 640}=\sqrt{4{,}9\cdot 10\cdot 64}=\sqrt{49\cdot 64}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{64}=7\cdot 8=56$.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{19\cdot 9\cdot 19}$; 3) $\sqrt{50\cdot 72}$; 5) $\sqrt{1{,}6\cdot 810}$; 7) $\sqrt{0{,}29\cdot 2900}$;

2) $\sqrt{17\cdot 4\cdot 17}$; 4) $\sqrt{12\cdot 75}$; 6) $\sqrt{6{,}4\cdot 360}$; 8) $\sqrt{0{,}51\cdot 5100}$.

Стратегія

1) Застосовуємо формулу різниці квадратів $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

2) Застосовуємо тотожність $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

3) Обчислюємо.

ПРИКЛАД 2

Обчисліть раціональним способом:

1) $\sqrt{29^2-20^2}$; 2) $\sqrt{6{,}8^2-3{,}2^2}$.

Розв'язання

1) $\sqrt{29^2-20^2}=\sqrt{(29-20)(29+20)}=\sqrt{9\cdot 49}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{49}=3\cdot 7=21$;

2) $\sqrt{6{,}8^2-3{,}2^2}=\sqrt{(6{,}8-3{,}2)(6{,}8+3{,}2)}=\sqrt{3{,}6\cdot 10}=\sqrt{36}=6$.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Обчисліть раціональним способом:

1) $\sqrt{13^2-12^2}$; 3) $\sqrt{89^2-80^2}$; 5) $\sqrt{5{,}8^2-4{,}2^2}$;

2) $\sqrt{20^2-16^2}$; 4) $\sqrt{53^2-28^2}$; 6) $\sqrt{8{,}2^2-1{,}8^2}$.

Арифметичний квадратний корінь із частки

Арифметичний квадратний корінь із дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник — додатний, дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь зі знаменника.

Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a\geqslant 0$, $b>0$, виконується рівність

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Наприклад:

1) $\sqrt{\frac{5}{11}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$;

2) $\sqrt{\frac{c}{41}}=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{41}}$, якщо $c\geqslant 0$;

3) $\sqrt{\frac{1}{d}}=\frac{1}{\sqrt{d}}$, якщо $d>0$;

4) $\sqrt{\frac{100}{169}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{169}}=\frac{10}{13}$;

5) $\sqrt{\frac{50}{98}}=\sqrt{\frac{25\cdot 2}{49\cdot 2}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}=\frac{5}{7}$;

6) $\sqrt{1\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$.

Видавництво «Ранок»

РОЗМИНКА 2

1 Подайте у вигляді частки квадратних коренів вираз:

1) $\sqrt{\frac{3}{7}}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 3) $\sqrt{\frac{a}{22}}$; 4) $\sqrt{\frac{31}{b}}$; 5) $\sqrt{1\frac{1}{2}}$; 6) $\sqrt{\frac{10}{15}}$.

2 Знайдіть значення квадратного кореня:

1) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; 2) $\sqrt{\frac{9}{49}}$; 3) $\sqrt{\frac{4}{81}}$; 4) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; 5) $\sqrt{\frac{36}{121}}$; 6) $\sqrt{\frac{100}{169}}$.

СЛІД ЗНАТИ!

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

якщо $a \geqslant 0$, $b>0$

ПРИКЛАД 3

Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{25}{81}\cdot\frac{36}{49}}$; 2) $\sqrt{2\frac{14}{25}\cdot 3\frac{1}{16}}$.

Розв'язання

1) $\sqrt{\frac{25}{81}\cdot\frac{36}{49}}=\sqrt{\frac{25}{81}}\cdot\sqrt{\frac{36}{49}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}}\cdot\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}=\frac{5}{9}\cdot\frac{6}{7}=\frac{5\cdot 6}{9\cdot 7}=\frac{5\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 7}=\frac{10}{21}$.

2) $\sqrt{2\frac{14}{25}\cdot 3\frac{1}{16}}=\sqrt{2\frac{14}{25}}\cdot\sqrt{3\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{64}{25}}\cdot\sqrt{\frac{49}{16}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}}\cdot\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{16}}=$

$=\frac{8}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{2\cdot 4\cdot 7}{5\cdot 4}=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}$.

Відповідь: 1) $\frac{10}{21}$; 2) $2\frac{4}{5}$.

Стратегія

1) Застосовуємо формулу $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

2) Застосовуємо формулу $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a\geqslant 0$, $b>0$.

3) Добуваємо корені.

4) Обчислюємо.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Обчисліть:

1) $\sqrt{4\cdot\frac{1}{9}}$; 3) $\sqrt{\frac{100}{121}\cdot\frac{64}{9}}$; 5) $\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{4}}$; 7) $\sqrt{3\frac{6}{25}\cdot 2\frac{2}{49}}$;

2) $\sqrt{\frac{1}{16}\cdot 9}$; 4) $\sqrt{\frac{169}{144}\cdot\frac{4}{25}}$; 6) $\sqrt{1\frac{11}{25}\cdot\frac{1}{9}}$; 8) $\sqrt{1\frac{57}{64}\cdot 5\frac{1}{16}}$.

Для того щоб множити і ділити квадратні корені, можна застосовувати розглянуті тотожності у зворотному порядку:

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$; $\quad\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$, $a\geqslant 0$, $b>0$.

Наприклад:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{36}=6$;

2) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{27\cdot 3}=\sqrt{81}=9$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\sqrt{\frac{2}{18}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$;

4) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{50}{2}}=\sqrt{25}=5$.

РОЗМИНКА 3

Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3{,}6}\cdot\sqrt{10}$; 3) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{10}}$; 5) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{640}}$.

Видавництво «Ранок»

Стратегія

1) Застосовуємо формули
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$;
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a\geqslant 0$, $b>0$.

2) Розкладаємо на множники підкореневий вираз.

3) Застосовуємо формули
$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$;
$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a\geqslant 0$, $b>0$.

4) Обчислюємо.

ПРИКЛАД 4

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}$; 2) $\dfrac{\sqrt{810}}{\sqrt{1000}}$.

Розв'язання

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}=\sqrt{3\cdot 48}=\sqrt{3\cdot 3\cdot 16}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}=3\cdot 4=12.$

2) $\dfrac{\sqrt{810}}{\sqrt{1000}}=\sqrt{\dfrac{810}{1000}}=\sqrt{\dfrac{81\cdot 10}{100\cdot 10}}=\sqrt{\dfrac{81}{100}}=\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}}=\dfrac{9}{10}.$

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Використовуючи властивості квадратних коренів, знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$; 3) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}$; 5) $\dfrac{\sqrt{162}}{\sqrt{2}}$; 7) $\dfrac{\sqrt{490}}{\sqrt{1000}}$;

2) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{54}$; 6) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; 8) $\dfrac{\sqrt{640}}{\sqrt{1000}}$.

Арифметичний квадратний корінь зі степеня

Корінь із квадрата	Корінь зі степеня	
Для будь-якого дійсного числа a виконується рівність $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$	Для будь-якого невід'ємного числа a і натурального числа n виконується рівність $\sqrt{a^{2n}}=a^n$	Для будь-якого дійсного числа a і натурального числа n виконується рівність $\sqrt{a^{2n}}=\lvert a^n\rvert$
Наприклад: $\sqrt{3^2}=\lvert 3\rvert=3$; $\sqrt{(-6)^2}=\lvert -6\rvert=6$	*Наприклад*: $\sqrt{5^4}=\sqrt{(5^2)^2}=5^2=25$; $\sqrt{2^6}=\sqrt{(2^3)^2}=2^3=8$	*Наприклад*: 1) $\sqrt{(-3)^8}=\sqrt{((-3)^4)^2}=\lvert(-3)^4\rvert=\lvert 81\rvert=81$; 2) $\sqrt{(-1)^{10}}=\sqrt{((-1)^5)^2}=\lvert(-1)^5\rvert=\lvert -1\rvert=1$

ПРИГАДАЙТЕ!

$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$

- Від'ємне число в парному степені є додатним числом.
- Від'ємне число в непарному степені є від'ємним числом.

РОЗМИНКА 4

1 Обчисліть:

1) $\sqrt{7^2}$; 2) $\sqrt{0{,}1^2}$; 3) $\sqrt{\left(\dfrac{2}{5}\right)^2}$; 4) $\sqrt{(-1)^2}$; 5) $\sqrt{(-9{,}1)^2}$; 6) $\sqrt{\left(-\dfrac{3}{8}\right)^2}$.

2 Запишіть у вигляді степеня вираз:

1) $\sqrt{2^{12}}$; 2) $\sqrt{11^{18}}$; 3) $\sqrt{1^{2026}}$; 4) $\sqrt{(-5)^{20}}$; 5) $\sqrt{(-9{,}1)^{14}}$.

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 5

Обчисліть значення виразу:

1) $8\sqrt{5^2}-7\sqrt{(-6)^2}$; 2) $\sqrt{2^8}+\sqrt{(-5)^6}$.

Розв'язання

1) $8\sqrt{5^2}-7\sqrt{(-6)^2}=8\cdot|5|-7\cdot|-6|=8\cdot5-7\cdot6=40-42=-2$.

2) $\sqrt{2^8}+\sqrt{(-5)^6}=\sqrt{(2^4)^2}+\sqrt{((-5)^3)^2}=2^4+|(-5)^3|=16+125=141$.

Відповідь: 1) -2; 2) 141.

Стратегія

1) Застосовуємо тотожності $\sqrt{a^2}=|a|$, $\sqrt{a^{2n}}=|a^n|$.

2) Розкриваємо модуль.

3) Обчислюємо.

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Спростіть вираз і знайдіть його значення.

1 1) $13+\sqrt{(-18)^2}$; 3) $\sqrt{9^2}+\sqrt{(-7)^2}$; 5) $\sqrt{8^2}-5\sqrt{(-2)^2}$;

2) $15+\sqrt{(-19)^2}$; 4) $\sqrt{6^2}+\sqrt{(-5)^2}$; 6) $\sqrt{4^2}-7\sqrt{(-1)^2}$.

2 1) $\sqrt{3^6}$; 3) $\sqrt{(-1)^8}$; 5) $\sqrt{5^4}-\sqrt{(-1)^{14}}$;

2) $\sqrt{2^6}$; 4) $\sqrt{(-10)^8}$; 6) $\sqrt{2^{10}}-\sqrt{(-1)^{18}}$.

ПРИКЛАД 6

Спростіть вираз:

1) $\sqrt{81a^2}$, якщо $a\geqslant0$; 2) $\sqrt{36b^2}$, якщо $b<0$.

Розв'язання

1) $\sqrt{81a^2}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{a^2}=9\cdot|a|$. Якщо $a\geqslant0$, то $9\cdot|a|=9a$.

2) $\sqrt{36b^2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{b^2}=6\cdot|b|$. Якщо $b<0$, то $6\cdot|b|=6\cdot(-b)=-6b$.

Відповідь: 1) $9a$; 2) $-6b$.

Стратегія

1) Застосовуємо формулу (тотожність) $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, якщо $a\geqslant0$, $b\geqslant0$.

2) Застосовуємо тотожність $\sqrt{a^2}=|a|$.

3) Розкриваємо модуль.

4) Записуємо відповідь.

ТРЕНУЄМОСЯ 6

У завданнях 1–4 знайдіть значення виразу:

1) $7\sqrt{a^2}$, якщо $a=5$; 3) $9\sqrt{a^2}$, якщо $a=-2$;

2) $8\sqrt{a^2}$, якщо $a=3$; 4) $6\sqrt{a^2}$, якщо $a=-8$.

У завданнях 5–8 спростіть вираз:

5) $\sqrt{4a^2}$, якщо $a>0$; 7) $\sqrt{49a^2}$, якщо $a<0$;

6) $\sqrt{9a^2}$, якщо $a>0$; 8) $\sqrt{64a^2}$, якщо $a<0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

a і $(-a)$ — протилежні числа

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant0,\\ -a, & a<0\end{cases}$$

Видавництво «Ранок»

ПРАКТИКУМ

14.1 Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

1) $\sqrt{0{,}01\cdot 0{,}36}$; 2) $\sqrt{0{,}04\cdot 0{,}25}$; 3) $\sqrt{9\cdot 49\cdot 121}$; 4) $\sqrt{4\cdot 64\cdot 144}$.

14.2 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{1000\cdot 250}$; 2) $\sqrt{360\cdot 1000}$; 3) $\sqrt{50\cdot 800}$; 4) $\sqrt{630\cdot 70}$.

14.3 Обчисліть:

1) $\sqrt{3^2+4^2}$; 2) $\sqrt{5^2+12^2}$; 3) $\sqrt{0{,}8^2+0{,}6^2}$; 4) $\sqrt{15^2+(-8)^2}$.

14.4 Обчисліть раціональним способом:

1) $\sqrt{(20-16)(20+16)}$; 3) $\sqrt{14{,}5^2-10{,}5^2}$; 5) $\sqrt{365^2-275^2}$;

2) $\sqrt{(37-12)(37+12)}$; 4) $\sqrt{12{,}5^2-3{,}5^2}$; 6) $\sqrt{425^2-385^2}$.

14.5 Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{25}{9}}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\frac{49}{16}}$; 3) $\sqrt{1{,}21\cdot 7\frac{1}{9}}$; 4) $\sqrt{1{,}44\cdot 20\frac{1}{4}}$.

14.6 Використовуючи властивості квадратного кореня, знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{0{,}18}\cdot\sqrt{200}$; 3) $\sqrt{0{,}9}\cdot\sqrt{4{,}9}$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{243}}$; 7) $\frac{\sqrt{2{,}5}}{\sqrt{40}}$;

2) $\sqrt{0{,}12}\cdot\sqrt{300}$; 4) $\sqrt{1{,}6}\cdot\sqrt{8{,}1}$; 6) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{128}}$; 8) $\frac{\sqrt{4{,}9}}{\sqrt{90}}$.

14.7 Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{3}{25}}\cdot\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{3\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{8}{7}}$; 4) $\sqrt{1\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{1\frac{3}{13}}$.

14.8 Доведіть тотожність:

1) $30\sqrt{\frac{a}{900}}=\sqrt{a}$; 2) $\frac{1}{15}\sqrt{225b}=\sqrt{b}$; 3) $\frac{1}{1{,}1}\sqrt{\frac{242c}{200}}=\sqrt{c}$.

14.9 Обчисліть:

1) $\sqrt{12^3}\cdot\sqrt{12}$; 2) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5^5}$; 3) $\sqrt{2^3\cdot 11}\cdot\sqrt{22}$; 4) $\sqrt{3^5\cdot 5}\cdot\sqrt{15}$.

14.10 Використовуючи властивості квадратного кореня, знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{8^2\cdot 10^4}$; 2) $\sqrt{7^2\cdot 10^4}$; 3) $\sqrt{3^4\cdot(-0{,}1)^6}$; 4) $\sqrt{2^8\cdot(-0{,}1)^6}$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

1. Піднесіть число 55 до квадрата. Скористайтеся результатом і знайдіть значення кореня:

1) $\sqrt{3025}$; 3) $\sqrt{30{,}25}$;

2) $\sqrt{302\,500}$; 4) $\sqrt{0{,}3025}$.

2. Складіть аналогічне завдання для будь-якого двозначного числа. Обміняйтеся записами й обчисліть значення коренів. Виграє той / та, хто правильно виконає завдання за менший час.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $\sqrt{400}=\sqrt{100\cdot 4}=$
$=10\cdot 4=40$;

2) $3\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}=3\sqrt{25}=$
$=3\cdot 5=15$;

3) $\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{5^2}+\sqrt{12^2}=$
$=5+12=17$;

4) $\sqrt{11^2-10^2}=\sqrt{1^2}=1$.

Видавництво «Ранок»

14.11 Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(-15)^2 \cdot a^4}$;
2) $\sqrt{(-17)^2 \cdot a^4}$;
3) $-4\sqrt{a^{12}}$;
4) $-3\sqrt{a^{16}}$;
5) $\sqrt{\frac{a^2}{100}}$, якщо $a \geqslant 0$;
6) $\sqrt{\frac{a^2}{400}}$, якщо $a \geqslant 0$;
7) $\sqrt{0{,}01a^6}$, якщо $a \leqslant 0$;
8) $\sqrt{0{,}09a^{10}}$, якщо $a \leqslant 0$.

14.12 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{\frac{\left(17^2 \cdot 2\right)^3}{2^5 \cdot 17^6}}$;
2) $\sqrt{\frac{\left(19^2 \cdot 3\right)^5}{3^3 \cdot 19^{10}}}$;
3) $\sqrt{\frac{\left(3^7 \cdot 2\right)^2}{32 \cdot 3^{17}}}$;
4) $\sqrt{\frac{\left(5^3 \cdot 3\right)^3}{243 \cdot 5^7}}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Розгляньте записи та знайдіть помилку:

$$\sqrt{x^2} = x.$$

Якщо $x = -5$, то

$$\sqrt{(-5)^2} = -5;$$

$$\sqrt{25} = -5.$$

Але $5 \neq -5$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

14.13 Спростіть вирази 1–4.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $\sqrt{c^6 \cdot d^{10}}$, якщо $c < 0$, $d \geqslant 0$. $\sqrt{c^6 \cdot d^{10}} = \sqrt{c^6} \cdot \sqrt{d^{10}} = \sqrt{\left(c^3\right)^2} \cdot \sqrt{\left(d^5\right)^2} =$ $= \left\|c^3\right\| \cdot \left\|d^5\right\|$. Якщо $c < 0$, то $c^3 < 0$, тому $\left\|c^3\right\| = -c^3$. Якщо $d \geqslant 0$, то $d^5 \geqslant 0$, тому $\left\|d^5\right\| = d^5$. Отже, $\left\|c^3\right\| \cdot \left\|d^5\right\| = \left(-c^3\right) \cdot d^5 = -c^3 d^5$. *Відповідь:* $-c^3 d^5$.	2) $\sqrt{a^4 \cdot b^{12}}$, якщо $a < 0$, $b \geqslant 0$; 3) $\sqrt{x^8 \cdot y^{14}}$, якщо $x \geqslant 0$, $y < 0$; 4) $\sqrt{m^{18} \cdot n^{22}}$, якщо $m < 0$, $n < 0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$\sqrt{a^{2n}} = \left|a^n\right|$$

Від'ємне число в парному степені є додатним числом.
Від'ємне число в непарному степені є від'ємним числом.

$$\sqrt{a^{18}} = \left|a^9\right| = \begin{cases} a^9, & a \geqslant 0, \\ -a^9, & a < 0 \end{cases}$$

14.14 Обчисліть значення квадратного кореня, розклавши підкореневий вираз на множники. Калькулятор не використовуйте.

1) $\sqrt{1764}$;
2) $\sqrt{2304}$;
3) $\sqrt{3136}$;
4) $\sqrt{5184}$.

7744	11	$\sqrt{7744} =$
704	4	$= \sqrt{4 \cdot 4^2 \cdot 11^2} =$
176	4	$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{11^2} =$
44	4	$= 2 \cdot 4 \cdot 11 = 88$
11	11	
1		

14.15 Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{\frac{5^2 + 12^2}{8^2 + 15^2}}$;
2) $\sqrt{\frac{135^2 - 65^2}{140}}$;
3) $\sqrt{\frac{235}{130^2 - 105^2}}$;
4) $\sqrt{\frac{41^2 - 40^2}{145^2 - 144^2}}$.

Видавництво «Ранок»

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть помилку в ланцюжку.

$$5\text{ к.} = \sqrt{25\text{ к.}} = \sqrt{\frac{1}{4}\text{ грн}} =$$
$$= \frac{1}{2}\text{ грн} = 50\text{ к.}$$

MATH FOR LIFE

14.16 На співбесіді в IT-компанії претенденту запропонували усно обчислити за 3 секунди значення виразу:

1) $\dfrac{\sqrt{99\,999}}{\sqrt{11\,111}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{111\,111}}{\sqrt{444\,444}}$.

Спробуйте й ви виконати це завдання, використовуючи властивості арифметичного квадратного кореня.

14.17 Швидкість v (у м/с) руху цунамі обчислюють за формулою $v = \sqrt{g \cdot D}$, де $g = 9{,}8$ м/с^2 — прискорення вільного падіння, D (у м) — глибина океану.

1) З якою швидкістю рухатиметься цунамі, якщо $D = 1600$ м? Вважайте, що $\sqrt{g} = 3{,}1$.

2) За який час (у хв) це цунамі пройде відстань 18,6 км? Вважайте, що глибина не змінюється.

Інший варіант роботи в електронному додатку

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 9

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Знайдіть значення виразу $\sqrt{11 \cdot 4 \cdot 11}$.

А	Б	В	Г
22	44	242	484

2 Знайдіть значення виразу $\sqrt{\frac{1}{64} \cdot 9}$.

А	Б	В	Г
$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{8}$

3 Знайдіть значення виразу $\sqrt{5} \cdot \sqrt{500}$.

А	Б	В	Г
25	500	50	250

4 Спростіть вираз $\sqrt{2^4} + \sqrt{(-1)^{14}}$ і знайдіть його значення.

А	Б	В	Г
3	5	7	9

5 Знайдіть значення y за формулою $y = 6\sqrt{x}$, якщо $x = 0{,}01$.

А	Б	В	Г
600	60	0,06	0,6

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) та його числовим значенням (А–Г), якщо $a = -2$.

1	$7 + \sqrt{a^2}$	А	5
2	$7 \cdot \sqrt{a^2}$	Б	14
3	$7 - \sqrt{a^2}$	В	−14
		Г	9

7 Обчисліть раціональним способом: $\sqrt{5{,}45^2 - 4{,}55^2}$.

8 Спростіть вираз $-2\sqrt{100a^2}$, якщо $a < 0$.

Видавництво «Ранок»

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

14.18 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{13\cdot4\cdot13}$; 2) $\sqrt{18\cdot98}$; 3) $\sqrt{2{,}5\cdot810}$; 4) $\sqrt{0{,}34\cdot3400}$.

14.19 Обчисліть раціональним способом:

1) $\sqrt{25^2-24^2}$; 2) $\sqrt{41^2-40^2}$; 3) $\sqrt{5{,}2^2-4{,}8^2}$; 4) $\sqrt{6{,}25^2-3{,}75^2}$.

14.20 Обчисліть:

1) $\sqrt{9\cdot\frac{1}{25}}$; 2) $\sqrt{\frac{144}{121}\cdot\frac{36}{49}}$; 3) $\sqrt{1\frac{13}{36}\cdot\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{1\frac{19}{81}\cdot3\frac{1}{16}}$.

14.21 Використовуючи властивості квадратних коренів, знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}$; 2) $\sqrt{11}\cdot\sqrt{44}$; 3) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{\sqrt{360}}{\sqrt{1000}}$.

14.22 Спростіть вираз і знайдіть його значення.

1) $11+\sqrt{(-17)^2}$; 2) $\sqrt{8^2}+\sqrt{(-9)^2}$; 3) $\sqrt{7^2}-6\sqrt{(-2)^2}$.

14.23 Спростіть вираз і знайдіть його значення.

1) $\sqrt{5^6}$; 2) $\sqrt{(-10)^4}$; 3) $\sqrt{3^8}-\sqrt{(-1)^{10}}$.

14.24 Знайдіть значення виразу:

1) $5\sqrt{a^2}$, якщо $a=4$; 2) $7\sqrt{a^2}$, якщо $a=-6$.

14.25 Спростіть вираз:

1) $\sqrt{36a^2}$, якщо $a>0$; 2) $\sqrt{25a^2}$, якщо $a<0$.

14.26 Знайдіть значення квадратного кореня:

1) $\sqrt{0{,}09\cdot0{,}25}$; 2) $\sqrt{0{,}01\cdot0{,}36}$; 3) $\sqrt{4\cdot81\cdot121}$; 4) $\sqrt{9\cdot49\cdot144}$.

14.27 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{1000\cdot490}$; 2) $\sqrt{640\cdot1000}$; 3) $\sqrt{60\cdot540}$; 4) $\sqrt{1920\cdot30}$.

14.28 Обчисліть:

1) $\sqrt{8^2+6^2}$; 2) $\sqrt{7^2+24^2}$; 3) $\sqrt{0{,}5^2+1{,}2^2}$; 4) $\sqrt{21^2+(-20)^2}$.

14.29 Обчисліть раціональним способом:

1) $\sqrt{(29-20)(29+20)}$; 2) $\sqrt{26{,}5^2-22{,}5^2}$; 3) $\sqrt{200^2-160^2}$.

Завдання 14.18 → Приклад 1
Завдання 14.19 → Приклад 2
Завдання 14.20 → Приклад 3
Завдання 14.21 → Приклад 4
Завдання 14.22, 14.23 → Приклад 5
Завдання 14.24, 14.25 → Приклад 6
Завдання 14.26–14.32 → Практикум, 14.1–14.7
Завдання 14.33–14.35 → Практикум, 14.9–14.11
Завдання 14.36 → Інтелектуальний фітнес 14.14
Завдання 14.37 → Math for life, 14.17
Завдання 14.38 → Інтелектуальний фітнес 14.13

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

У медицині для деяких клінічних досліджень та визначення дози лікарських препаратів використовують показник площі поверхні тіла людини — ППТ, або BSA англійською. Значення цього показника обчислюють за формулою:

$$BSA=\frac{\sqrt{H\cdot W}}{60},$$

де H — зріст людини (у см), W — вага (у кг).

1) Складіть таблицю зросту й ваги для себе, своїх рідних або друзів. Обчисліть показник BSA для кожного, результати округліть до десятих.

3) Знайдіть інформацію про оптимальні значення цього показника залежно від вікової групи та статі.

Видавництво «Ранок»

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Радикал у мовознавстві

Термін «радикал» у мовознавстві — це ієрогліфічний ключ (простий ієрогліф, який є частиною складного ієрогліфа й дозволяє пояснити його значення). У різні часи використовувалися різні набори ієрогліфів. Зокрема, у давнину був поширений набір із 540 ключів, потім їх кількість поступово була зменшена до 214.

А які ще значення слова «радикал» вам відомі?

 # BE SMART

- До появи калькуляторів квадратні корені добували різними методами — арифметичним, геометричним, грубою оцінкою, стовпчиком, методом Герона, методом Ньютона, за допомогою логарифмічної лінійки тощо.
- У 1817 р. Пітер Марк Роже запропонував нову шкалу логарифмічної лінійки для обчислення коренів і степенів чисел.
- У 1972 р. компанія «Хьюлетт-Паккард» випустила перший кишеньковий калькулятор.
- Наразі освічені люди знають таблицю квадратів від 1 до 20 напам'ять. Решта — використовують калькулятори й комп'ютери 😄

14.30 Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{81}{25}}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\frac{64}{49}}$; 3) $\sqrt{1{,}69\cdot 6\frac{1}{4}}$; 4) $\sqrt{1{,}96\cdot 5\frac{4}{9}}$.

14.31 Використовуючи властивості квадратного кореня, знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{450}$; 2) $\sqrt{0{,}9}\cdot\sqrt{3{,}6}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{98}}$; 4) $\frac{\sqrt{6{,}4}}{\sqrt{90}}$.

14.32 Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{7}{4}}\cdot\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{\frac{2}{45}}\cdot\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{5\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{8}{11}}$; 4) $\sqrt{1\frac{1}{16}}\cdot\sqrt{1\frac{8}{17}}$.

14.33 Обчисліть:

1) $\sqrt{11^3}\cdot\sqrt{11}$; 2) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{6^5}$; 3) $\sqrt{3^3\cdot 11}\cdot\sqrt{33}$; 4) $\sqrt{2^5\cdot 7}\cdot\sqrt{14}$.

14.34 Використовуючи властивості квадратного кореня, знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{9^2\cdot 10^4}$; 2) $\sqrt{6^2\cdot 10^4}$; 3) $\sqrt{5^4\cdot(-0{,}1)^6}$; 4) $\sqrt{3^8\cdot(-0{,}1)^6}$.

14.35 Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(-13)^2\cdot a^4}$;

2) $-5\sqrt{a^{12}}$;

3) $\sqrt{\frac{a^2}{900}}$, якщо $a\geqslant 0$;

4) $\sqrt{0{,}04a^6}$, якщо $a\leqslant 0$.

14.36 Обчисліть значення квадратного кореня, розклавши підкореневий вираз на множники. Калькулятор не використовуйте.

1) $\sqrt{3844}$; 2) $\sqrt{4356}$; 3) $\sqrt{9025}$.

14.37 Для розрахунку оптимальної швидкості судна v (м/с) використовують формулу $v=1{,}1\sqrt{g\cdot L}$, де $g=9{,}8$ м/с^2 — прискорення вільного падіння, L (у м) — довжина судна.

1) З якою оптимальною швидкістю рухатиметься катер, якщо $L=25$ м? Вважайте, що $\sqrt{g}=3{,}1$.
2) Яку відстань (у км) подолає цей катер, рухаючись по прямій протягом 5 хв?

Бонусне завдання

14.38 Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a^2\cdot b^{30}}$, якщо $a<0$, $b\geqslant 0$;

2) $\sqrt{x^{10}\cdot y^{40}}$, якщо $x<0$, $y<0$.

Видавництво «Ранок»

§15 ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНІ КОРЕНІ

ВЧОРА Ви навчилися добувати квадратний корінь із добутку, частки, степеня, а також підносити корінь до степеня

СЬОГОДНІ Ви навчитеся перетворювати вирази, що містять квадратні корені; вносити під знак кореня і виносити з-під знака кореня множники, звільнятися від ірраціональності в знаменнику дробу.

ЗАВЖДИ Ви зможете використовувати перетворення виразів із коренями для розв'язування геометричних задач

mk.com.ua/109567

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ЕТИКЕТ У МАТЕМАТИЦІ

Чи відомо вам, що в математиці також існують правила етикету? І кожен, хто знає і любить математику, за записом відповідей до завдань може зробити висновок про вашу математичну культуру.

Наприклад, спрощуючи вирази з коренями, зазвичай дотримуються таких правил.

Правило	Вираз	Відповідь
У підкореневому виразі не повинно бути множників, які є повними квадратами	$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$
Підкореневий вираз не має містити дробів	$\sqrt{\frac{7}{81}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{81}}$	$\frac{\sqrt{7}}{9}$
У знаменнику дробу не має бути коренів	$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$

Поміркуйте, які ще перетворення ви можете виконувати з виразами, що містять квадратні корені. Спробуйте встановити відповідність між перетвореннями (1–4) і виразами (А–Г).

1 Зведення подібних доданків

2 Винесення спільного множника за дужки

3 Застосування формули різниці квадратів

4 Застосування формули квадрата суми

А $\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$

Б $\left(\sqrt{3}+\sqrt{11}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}+\left(\sqrt{11}\right)^2$

В $x\sqrt{6}+y\sqrt{6}=\sqrt{6}\cdot(x+y)$

Г $5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

У цьому параграфі ви познайомитеся з різними прийомами й перетвореннями, які допоможуть вам стати «вихованими математиками».

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- тотожні перетворення (identical transformations)
- спрощення виразів (simplifying expressions)
- спряжені вирази (conjugate expressions)
- винесення множника (removing the factor)
- внесення множника (entering the factor)
- звільнення від ірраціональності (rationalizing the denominator)

Видавництво «Ранок»

СЛІД ЗНАТИ!

З виразами, що містять квадратні корені, можна виконувати дії додавання, віднімання, множення, ділення й піднесення до степеня.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Вирази, які містять корені з однаковими підкореневими виразами, називають подібними радикалами.

Подібні радикали можна додавати й віднімати так само, як і подібні одночлени.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Розберемо приклади перетворення виразів. Зауважимо, що в розглянутих завданнях змінні набувають невід'ємних значень.

Зведення подібних доданків

ДОСЛІДЖУЄМО

1) Порівняйте виконання дій з одночленами й виразами з квадратними коренями.
2) Яка властивість множення застосована для спрощення виразів?

Додавання	Віднімання
$3+4=7$	$10-2=8$
$3x+4x=(3+4)x=7x$	$10y-2y=(10-2)y=8y$
$3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=(3+4)\sqrt{5}=7\sqrt{5}$	$10\sqrt{3}-2\sqrt{3}=(10-2)\sqrt{3}=8\sqrt{3}$
$3\sqrt{x}+4\sqrt{x}=(3+4)\sqrt{x}=7\sqrt{x}$	$10\sqrt{y}-2\sqrt{y}=(10-2)\sqrt{y}=8\sqrt{y}$

РОЗМИНКА 1

1 Назвіть подібні радикали:

1) $\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{a}$; $2\sqrt{b}$; $-b\sqrt{a}$; $a\sqrt{b}$.

2 Зведіть подібні доданки:

1) $2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{x}+8\sqrt{x}$; 3) $-5\sqrt{3}-9\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{x}-7\sqrt{x}$.

ПРИКЛАД 1

Зведіть подібні доданки:

1) $11\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{x}-3\sqrt{y}-2\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Розв'язання

1) $11\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\sqrt{7}=(11+3-1)\sqrt{7}=13\sqrt{7}$.

2) $\sqrt{x}-3\sqrt{y}-2\sqrt{x}+\sqrt{y}=(1-2)\sqrt{x}+(-3+1)\sqrt{y}=-\sqrt{x}-2\sqrt{y}$.

Стратегія

1) Визначаємо й групуємо подібні доданки.

2) Додаємо коефіцієнти подібних доданків (за розподільною властивістю множення): $ab+ac=a(b+c)$

3) Результат множимо на спільну (числову або буквену) частину.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Зведіть подібні доданки:

1) $8\sqrt{3}+5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$;
2) $9\sqrt{6}+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}$;
3) $2\sqrt{5}-7\sqrt{5}-\sqrt{5}$;
4) $6\sqrt{7}-\sqrt{7}-8\sqrt{7}$;
5) $7\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{x}-\sqrt{y}$;
6) $\sqrt{x}+9\sqrt{y}-\sqrt{x}+3\sqrt{y}$;
7) $4\sqrt{x}-5\sqrt{y}-6\sqrt{x}+\sqrt{y}$;
8) $3\sqrt{x}-8\sqrt{y}-7\sqrt{x}+4\sqrt{y}$.

Видавництво «Ранок»

Винесення множника з-під знака кореня

Якщо в підкореневому виразі є числові множники, які можна подати як точні квадрати, або степені з парним показником, їх зазвичай виносять з-під знака кореня.

РОЗМИНКА 2

Запишіть вираз у вигляді добутку двох множників, один із яких можна подати у вигляді квадрата:

1) $45 = 9 \cdot 5$; 2) 50; 3) 200; 4) x^3; 5) y^5; 6) d^{11}.

ПРИКЛАД 2

Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{75}$; 2) $\sqrt{18x}$; 3) $\sqrt{36y^5}$.

Розв'язання

1) $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

2) $\sqrt{18x} = \sqrt{9 \cdot 2x} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2x} = 3\sqrt{2x}$.

3) $\sqrt{36y^5} = \sqrt{36 \cdot y^4 \cdot y} = \sqrt{6^2} \cdot \sqrt{(y^2)^2} \cdot \sqrt{y} = 6y^2\sqrt{y}$.

Стратегія

1) Розкладаємо підкореневий вираз на множники так, щоб серед множників були точні квадрати або степені з парним показником.

2) Застосовуємо формулу $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

3) Добуваємо корінь із кожного множника, що є точним квадратом або степенем із парним показником.

4) Обчислюємо добуток.

5) Множник, з якого неможливо добути корінь, залишаємо під знаком кореня.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{20}$; $\sqrt{24}$; $\sqrt{700}$; $\sqrt{600}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{125}$;

2) $\sqrt{90x}$; $\sqrt{40x}$; $\sqrt{72x}$; $\sqrt{108x}$; $\sqrt{150x}$; $\sqrt{175x}$;

3) $\sqrt{25y^3}$; $\sqrt{16y^3}$; $\sqrt{9y^5}$; $\sqrt{4y^5}$; $\sqrt{64y^7}$; $\sqrt{81y^7}$.

Додавання, віднімання виразів

Зведення подібних доданків і винесення множника з-під знака кореня можна застосовувати при додаванні й відніманні виразів із коренями.

ПРИКЛАД 3

Спростіть вираз:

1) $3\sqrt{20} + \sqrt{45}$; 2) $2\sqrt{48b} - \sqrt{75b}$.

Розв'язання

1) $3\sqrt{20} + \sqrt{45} = 3\sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} =$
$= 3 \cdot 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$.

2) $2\sqrt{48b} - \sqrt{75b} = 2\sqrt{16 \cdot 3b} - \sqrt{25 \cdot 3b} = 2\sqrt{16} \cdot \sqrt{3b} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{3b} =$
$= 2 \cdot 4\sqrt{3b} - 5\sqrt{3b} = 8\sqrt{3b} - 5\sqrt{3b} = 3\sqrt{3b}$.

Стратегія

1) Виносимо множники з-під знака кореня.

2) Зводимо подібні доданки.

Видавництво «Ранок»

СЛІД ЗНАТИ!

$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$,

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$,

якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Спростіть вираз:

1) $\sqrt{28} + \sqrt{7}$;
2) $\sqrt{54} + \sqrt{6}$;
3) $\sqrt{162} - 4\sqrt{72}$;
4) $\sqrt{75} - 9\sqrt{12}$;
5) $5\sqrt{4b} - \sqrt{b}$;
6) $4\sqrt{9b} - \sqrt{b}$;
7) $\sqrt{80b} - 2\sqrt{125b}$;
8) $3\sqrt{98b} - \sqrt{128b}$.

Множення виразів

Виконуючи множення виразів із коренями, застосовують переставну й розподільну властивості множення та правила множення одночлена на многочлен і многочлена на многочлен.

ПРИКЛАД 4

Виконайте множення:

1) $5\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{3}$;
2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{27} - 2\sqrt{3}\right)$.

Розв'язання

1) $5\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{3} = 5 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 40 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 40\sqrt{6}$.

2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{27} - 2\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} - \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 27} - 2\left(\sqrt{3}\right)^2 =$
$= \sqrt{81} - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3.$

ПРИГАДАЙТЕ!

$a \cdot b = b \cdot a$

$a(b + c) = ab + ac$

$a(b - c) = ab - ac$

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Виконайте множення:

1) $\sqrt{15} \cdot 2\sqrt{15}$;
2) $\sqrt{14} \cdot 3\sqrt{14}$;
3) $-3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{5}$;
4) $-7\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{3}$;
5) $\sqrt{7}\left(\sqrt{28} - 3\sqrt{7}\right)$;
6) $\sqrt{2}\left(\sqrt{98} - 4\sqrt{2}\right)$.

Формули скороченого множення

Для перетворення виразів із коренями застосовують також формули скороченого множення: різниці квадратів, квадрата суми і квадрата різниці.

ПРИГАДАЙТЕ!

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Вирази $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ і $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ називають **спряженими**.

Добуток двох спряжених виразів спрощують за допомогою формули різниці квадратів.

РОЗМИНКА 3

Назвіть вираз, що є спряженим до виразу:

1) $2 - \sqrt{3}$;
2) $\sqrt{6} + 4$;
3) $\sqrt{2} - \sqrt{17}$;
4) $\sqrt{5} + \sqrt{13}$.

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 5

Знайдіть значення виразу:

1) $\left(4-\sqrt{5}\right)\cdot\left(4+\sqrt{5}\right)$; **2)** $\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)$; **3)** $\left(\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)^2$.

Розв'язання

1) $\left(4-\sqrt{5}\right)\cdot\left(4+\sqrt{5}\right)=4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=16-5=11.$

2) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)=\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{11}\right)^2=7-11=-4.$

3) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}+\left(\sqrt{10}\right)^2=2-2\sqrt{20}+10=$
$=12-2\sqrt{4\cdot5}=12-2\cdot2\sqrt{5}=12-4\sqrt{5}.$

Стратегія

1) Застосовуємо формули скороченого множення.

2) Застосовуємо властивості $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$; $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$; $a\geqslant0$, $b\geqslant0$.

3) Спрощуємо вирази.

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Знайдіть значення виразу:

1) $\left(5-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+5\right)$; **3)** $\left(\sqrt{2}-\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{13}\right)$; **5)** $\left(\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)^2$;

2) $\left(6-\sqrt{7}\right)\left(6+\sqrt{7}\right)$; **4)** $\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$; **6)** $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2$.

СЛІД ЗНАТИ!

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b,$

$\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2=a\pm2\sqrt{ab}+b,$

якщо $a\geqslant0$, $b\geqslant0$

Розкладання на множники

У ході розкладання на множники виразів, які містять квадратні корені, застосовують відомі вам перетворення.

ПРИКЛАД 6

Розкладіть на множники вираз:

1) $\sqrt{10}+\sqrt{5}$; **3)** $3-\sqrt{3}$; **5)** $b-3$;

2) $\sqrt{42}+\sqrt{77}$; **4)** a^2-11; **6)** $c+2\sqrt{7c}+7$.

Розв'язання

Виносимо спільний множник за дужки.

1) $\sqrt{10}+\sqrt{5}=\sqrt{5\cdot2}+\sqrt{5}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+1\right).$

2) $\sqrt{42}+\sqrt{77}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{7}\cdot\sqrt{11}=\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+\sqrt{11}\right).$

3) $3-\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right).$

Застосовуємо формули скороченого множення.

4) $a^2-11=a^2-\left(\sqrt{11}\right)^2=\left(a-\sqrt{11}\right)\left(a+\sqrt{11}\right).$

5) $b-3=\left(\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{b}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{3}\right).$

6) $c+2\sqrt{7c}+7=\left(\sqrt{c}\right)^2+2\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{c}+\sqrt{7}\right)^2.$

Стратегія

1) Застосовуємо властивості степенів:
$a\geqslant0$, $b\geqslant0$;
$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;
$b=\left(\sqrt{b}\right)^2$.

2) Застосовуємо:
- розподільний закон множення $ab+ac=a(b+c)$;
- формули скороченого множення $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$.

Видавництво «Ранок»

ПРИГАДАЙТЕ!

$$\sqrt{24}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}$$

$$5=\left(\sqrt{5}\right)^2$$

СЛІД ЗНАТИ!

Під знак кореня можна вносити **тільки додатні числа.**

Стратегія

1) Визначаємо знак множника, що стоїть перед знаком кореня.

2) Підносимо цей множник до квадрата і записуємо його під знаком кореня:

$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$, якщо $a\geqslant 0$;

$a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2\cdot b}$, якщо $a<0$.

3) Виконуємо множення коренів:

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

4) Спрощуємо підкореневий вираз.

ПРИГАДАЙТЕ!

Основна властивість дробу:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c},\ b\neq 0,\ c\neq 0;$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

ТРЕНУЄМОСЯ 6

Розкладіть на множники вираз:

1) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{22}-\sqrt{55}$; 7) a^2-13; 10) $b-5$;

2) $\sqrt{3}+\sqrt{21}$; 5) $5+\sqrt{5}$; 8) $15-a^2$; 11) $c+2\sqrt{3c}+3$;

3) $\sqrt{35}-\sqrt{15}$; 6) $\sqrt{2}+2$; 9) $7-b$; 12) $c-2\sqrt{2c}+2$.

Внесення множника під знак кореня

Перетворення, обернене до винесення множника з-під знака кореня, називається внесенням множника під знак кореня.

РОЗМИНКА 4

Подайте вираз у вигляді кореня:

1) $7=\sqrt{7^2}=\sqrt{49}$; 2) 11; 3) 20; 4) a; 5) b^3; 6) $2c$.

ПРИКЛАД 7

Внесіть множник під знак кореня, якщо $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

1) $5\sqrt{3}$; 2) $-4\sqrt{5}$; 3) $x\sqrt{11}$; 4) $-y^3\sqrt{7}$.

Розв'язання

1) $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{25\cdot 3}=\sqrt{75}$.

2) $-4\sqrt{5}=(-1)\cdot 4\sqrt{5}=-\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{16\cdot 5}=-\sqrt{80}$.

3) $x\sqrt{11}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{11}=\sqrt{11x^2}$.

4) $-y^3\sqrt{7}=-\sqrt{\left(y^3\right)^2}\cdot\sqrt{7}=-\sqrt{y^6}\cdot\sqrt{7}=-\sqrt{7y^6}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 7

Внесіть множник під знак кореня, якщо $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

1) $3\sqrt{5}$; $4\sqrt{5}$; $10\sqrt{2}$; $-10\sqrt{3}$; $-5\sqrt{3}$; $-2\sqrt{7}$;

2) $x\sqrt{6}$; $x\sqrt{7}$; $x\sqrt{10}$; $-x\sqrt{8}$; $-x\sqrt{5}$; $-x\sqrt{15}$;

3) $y^2\sqrt{2}$; $y^5\sqrt{3}$; $-y^4\sqrt{6}$; $-y^7\sqrt{8}$.

Звільнення від ірраціональності в знаменнику

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу означає, що необхідно перетворити вираз так, щоб у знаменнику не було квадратного кореня.

Для цього застосовують *основну властивість дробу* — множать чисельник і знаменник дробу на одне й те саме відмінне від нуля число (або вираз).

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 8

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{20}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{6x}}$; 3) $\sqrt{\frac{5}{18}}$.

Розв'язання

1) $\frac{20}{\sqrt{5}}=\frac{20}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{20\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4\cdot5\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}$.

2) $\frac{3}{\sqrt{6x}}=\frac{3}{\sqrt{6x}}\cdot\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{6x}}=\frac{3\cdot\sqrt{6x}}{\sqrt{6x}\cdot\sqrt{6x}}=\frac{3\sqrt{6x}}{\left(\sqrt{6x}\right)^2}=\frac{3\sqrt{6x}}{6x}=\frac{\sqrt{6x}}{2x}$.

3) $\sqrt{\frac{5}{18}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{3\cdot2}=\frac{\sqrt{10}}{6}$.

Стратегія

1) Домножуємо чисельник і знаменник на одне й те саме відмінне від нуля число.

2) Застосовуємо в знаменнику тотожність $\left(\sqrt{a}\right)^2=a,\ a\geqslant0$.

3) Спрощуємо вираз.

ТРЕНУЄМОСЯ 8

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; 5) $\frac{14}{\sqrt{7x}}$; 7) $\sqrt{\frac{3}{98}}$;

2) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{18}{\sqrt{6}}$; 6) $\frac{16}{\sqrt{2x}}$; 8) $\sqrt{\frac{2}{75}}$.

ПРИКЛАД 9

Звільніться від ірраціональності в знаменнику $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

Розв'язання

$$\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{4\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{4}=\sqrt{7}+\sqrt{3}.$$

Стратегія

1) Множимо чисельник і знаменник дробу на вираз, *спряжений* до знаменника.

2) Застосовуємо формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

3) Застосовуємо тотожність $\left(\sqrt{a}\right)^2=a,\ a\geqslant0$.

4) Спрощуємо вираз.

ТРЕНУЄМОСЯ 9

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; 3) $\frac{12}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; 5) $\frac{2a}{\sqrt{3a}+\sqrt{a}}$;

2) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$; 4) $\frac{20}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$; 6) $\frac{4a}{\sqrt{5a}+\sqrt{a}}$.

Видавництво «Ранок»

ПРАКТИКУМ

15.1 Спростіть вираз:

1) $6\sqrt{a}+9\sqrt{7}+\sqrt{a}-9\sqrt{7}$;
2) $8\sqrt{a}+5\sqrt{3}-8\sqrt{a}+\sqrt{3}$;
3) $3\left(5\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)+\sqrt{b}-15\sqrt{a}$;
4) $2\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)+6\sqrt{b}-\sqrt{a}$.

15.2 Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{0{,}04\cdot 21}$;
2) $\sqrt{0{,}09\cdot 23}$;
3) $\sqrt{\frac{7\cdot 64}{121}}$;
4) $\sqrt{\frac{5\cdot 81}{169}}$;
5) $\frac{1}{3}\sqrt{45a^3}$;
6) $\frac{1}{7}\sqrt{98a^3}$;
7) $0{,}5\sqrt{176a^9}$;
8) $0{,}2\sqrt{150a^9}$.

15.3 Винесіть множник з-під знака кореня та зведіть подібні доданки:

1) $0{,}4\sqrt{50}-\frac{\sqrt{128}}{4}$;
2) $\frac{5\sqrt{162}}{9}-0{,}5\sqrt{200}$;
3) $\sqrt{121a}-\sqrt{0{,}36a}$;
4) $\sqrt{225a}-\sqrt{0{,}16a}$;
5) $\frac{\sqrt{49a}}{7}+\frac{\sqrt{144a}}{12}$;
6) $\frac{\sqrt{169a}}{13}+\frac{\sqrt{64a}}{8}$.

15.4 Обчисліть:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}$;
2) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}$;
3) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{35}\cdot\sqrt{14}$;
4) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{6}$.

15.5 Спростіть вираз:

1) $\left(3\sqrt{12}+\sqrt{75}\right)\cdot\sqrt{3}$;
2) $\left(2\sqrt{8}+\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}$;
3) $\left(0{,}2\sqrt{5}-2\sqrt{20}\right)\cdot\sqrt{5}$;
4) $\left(0{,}5\sqrt{6}-3\sqrt{24}\right)\cdot\sqrt{6}$;
5) $\left(\sqrt{50}-\sqrt{288}\right):\sqrt{2}$;
6) $\left(\sqrt{75}-\sqrt{363}\right):\sqrt{3}$.

15.6 Виконайте дії, використовуючи формули скороченого множення:

1) $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$;
2) $\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$;
3) $\left(\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)$;
4) $\left(\sqrt{x}-4\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+4\sqrt{y}\right)$;
5) $\left(\sqrt{x}+5\sqrt{y}\right)^2$;
6) $\left(\sqrt{x}+6\sqrt{y}\right)^2$.

15.7 Розкладіть на множники вираз:

1) $a-2\sqrt{a}$;
2) $a-3\sqrt{a}$;
3) $\sqrt{5a}+a$;
4) $\sqrt{6a}+a$;
5) $a-4b$;
6) $25a-b$;
7) $a+6\sqrt{ab}+9b$;
8) $a+8\sqrt{ab}+16b$.

СЛІД ЗНАТИ!

$\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$

для будь-яких a, $b\geqslant 0$.

$\sqrt{\square^2\,\bigcirc}=|\square|\sqrt{\bigcirc}$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть невідомий вираз

$25x$	$81x$	$14\sqrt{x}$
$49y$	$100y$	$17\sqrt{y}$
$121c$	$144c$	?

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$10-2\sqrt{5}=8\sqrt{5}$

$\sqrt{20}+\sqrt{5}=\sqrt{25}=5$

$\sqrt{4}+\sqrt{-4}=0$

$\sqrt{30}=\sqrt{3\cdot 10}=3\sqrt{10}$

$\frac{\sqrt{16}}{4}=\frac{\sqrt{4\cdot 4}}{4}=\sqrt{4}=2$

Видавництво «Ранок»

15.8 Скоротіть дріб, розклавши на множники чисельник або знаменник:

1) $\frac{10+\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$; 3) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}$; 5) $\frac{a\sqrt{15}+\sqrt{10a}}{\sqrt{2}+\sqrt{3a}}$;

2) $\frac{\sqrt{13}+13}{\sqrt{13}}$; 4) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-1}$; 6) $\frac{a\sqrt{14}+\sqrt{6a}}{\sqrt{3}+\sqrt{7a}}$.

15.9 Внесіть множник під знак кореня:

1) $10\sqrt{0,47}$; 3) $0,6\sqrt{20}$; 5) $-3\sqrt{1\frac{2}{3}}$; 7) $-2a\sqrt{\frac{1}{2a}}$;

2) $10\sqrt{0,53}$; 4) $0,4\sqrt{50}$; 6) $-5\sqrt{1\frac{2}{5}}$; 8) $-6a\sqrt{\frac{1}{6a}}$.

15.10 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$; 3) $\frac{9x}{\sqrt{x}}$; 5) $\frac{12}{\sqrt{x-6}}$; 7) $\frac{x^2-25}{\sqrt{x+5}}$;

2) $\frac{7}{3\sqrt{7}}$; 4) $\frac{8x}{\sqrt{x}}$; 6) $\frac{14}{\sqrt{x+7}}$; 8) $\frac{x^2-16}{\sqrt{x-4}}$.

15.11 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{9}{\sqrt{a}-6}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{a+3}-\sqrt{a}}$; 5) $\frac{a-1}{\sqrt{a}+1}$;

2) $\frac{20}{\sqrt{a}-5}$; 4) $\frac{4}{\sqrt{a+4}-\sqrt{a}}$; 6) $\frac{a-4}{\sqrt{a}+2}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

15.12 Знайдіть добуток двох чисел, якщо:

1) їхня сума дорівнює $\sqrt{18}$, а різниця $\sqrt{10}$;

2) їхня сума дорівнює $\sqrt{37}$, а різниця $\sqrt{17}$.

15.13 Винесіть множники з-під знака кореня:

1) $\sqrt{a^2b}$, якщо $a<0$; 4) $\sqrt{3xy^7}$, якщо $y<0$;

2) $\sqrt{16ab^2}$, якщо $b<0$; 5) $\sqrt{c^3d^5}$, якщо $c<0$;

3) $\sqrt{2x^5y}$, якщо $x<0$; 6) $\sqrt{c^9d^{11}}$, якщо $d<0$.

15.14 Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{5}$, якщо $a<0$; 3) $c^3\sqrt{7}$, якщо $c<0$; 5) $x\sqrt{x}$;

2) $3b\sqrt{2}$, якщо $b<0$; 4) $5d^5\sqrt{6}$, якщо $d<0$; 6) $y\sqrt{-y}$.

СЛІД ЗНАТИ!

$$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b}, & \text{якщо } a\geqslant 0, b\geqslant 0,\\ -\sqrt{a^2b}, & \text{якщо } a<0, b\geqslant 0.\end{cases}$$

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot 3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{1}}=3$$

$$\frac{7}{1-\sqrt{5}}=\frac{7\left(1+\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{7+7\sqrt{5}}{1+5}=\frac{7+7\sqrt{5}}{6}$$

ПРИГАДАЙТЕ!

Розв'язування системи рівнянь способом додавання:

$$\begin{cases}x+y=a,\\ x-y=b\end{cases}$$

$$2x=a+b$$

Видавництво «Ранок»

? ПОМІРКУЙТЕ

Яка довжина сторони (у см) іншого зображення у формі квадрата такої самої площі?

Завдання 15.16, 15.17 → Приклад 1
Завдання 15.18, 15.19 → Приклад 2
Завдання 15.20, 15.21 → Приклад 3
Завдання 15.22–15.24 → Приклад 4
Завдання 15.25, 15.26 → Приклад 5
Завдання 15.27–15.29 → Приклад 6
Завдання 15.30, 15.31 → Приклад 7
Завдання 15.32, 15.33 → Приклад 8
Завдання 15.34, 15.35 → Приклад 9

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Аркуш формату A0 має площу 1 м^2, а його ширина відноситься до довжини як $1:\sqrt{2}$. Якщо скласти цей аркуш навпіл, одержимо прямокутник із тим самим співвідношенням сторін.

1. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Виміряйте ширину й довжину аркуша формату A4.
3. Складіть цей аркуш навпіл і виміряйте ширину й довжину одержаного аркуша формату A5.
4. Перевірте, чи виконується вказане співвідношення для цих двох форматів.
5. Запишіть (без вимірювання) розміри листа формату A6. Переконайтеся в правильності виконаних обчислень.

MATH FOR LIFE

15.15 ШІ згенерував зображення прямокутника, ширина й довжина якого дорівнюють $\left(\sqrt{234}-3\right)$ см та $\left(\sqrt{234}+3\right)$ см відповідно. Потім зображення роздрукували. Визначте:
1) довжину рамки (у см) для обрамлення надрукованого зображення;
2) площу (у см^2) цього зображення.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

15.16 Зведіть подібні доданки:
1) $9\sqrt{5}+4\sqrt{5}-5\sqrt{5}$;
2) $2\sqrt{3}-7\sqrt{3}-\sqrt{3}$;
3) $\sqrt{x}+6\sqrt{y}-\sqrt{x}+2\sqrt{y}$;
4) $5\sqrt{x}-9\sqrt{y}-6\sqrt{x}+2\sqrt{y}$.

15.17 Спростіть вираз:
1) $4\sqrt{a}-3\sqrt{5}-\sqrt{a}+3\sqrt{5}$;
2) $5\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)+11\sqrt{b}-5\sqrt{a}$.

15.18 Винесіть множник з-під знака кореня:
1) $\sqrt{45}$; $\sqrt{200}$; $\sqrt{150}$; $\sqrt{50x}$; $\sqrt{98x}$; $\sqrt{99x}$;
2) $\sqrt{9y^3}$; $\sqrt{4y^3}$; $\sqrt{25y^5}$; $\sqrt{16y^5}$; $\sqrt{36y^7}$; $\sqrt{49y^7}$.

15.19 Винесіть множник з-під знака кореня:
1) $\sqrt{0{,}01\cdot 29}$;
2) $\sqrt{\frac{3\cdot 49}{225}}$;
3) $\frac{1}{2}\sqrt{80a^3}$;
4) $0{,}2\sqrt{175a^9}$.

15.20 Спростіть вираз:
1) $\sqrt{44}+\sqrt{11}$;
2) $\sqrt{108}-2\sqrt{48}$;
3) $3\sqrt{16b}-\sqrt{b}$;
4) $\sqrt{147b}-2\sqrt{75b}$.

15.21 Винесіть множник з-під знака кореня та зведіть подібні доданки:
1) $\sqrt{5}+\sqrt{20}+\sqrt{45}$; 2) $\frac{7\sqrt{180}}{6}-0{,}7\sqrt{500}$; 3) $\sqrt{144a}-\sqrt{0{,}64a}$;

15.22 Виконайте множення:
1) $\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{17}$;
2) $-7\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}$;
3) $\sqrt{3}\left(\sqrt{75}-6\sqrt{3}\right)$.

15.23 Обчисліть:
1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{7}$;
2) $\sqrt{22}\cdot\sqrt{33}\cdot\sqrt{6}$;
3) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{35}\cdot\sqrt{21}$.

15.24 Спростіть вираз:
1) $\left(2\sqrt{7}-0{,}5\sqrt{28}\right)\cdot\sqrt{7}$;
2) $\left(\sqrt{18}-\sqrt{242}\right):\sqrt{2}$.

Видавництво «Ранок»

15.25 Знайдіть значення виразу:

1) $\left(7-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6}+7\right)$; 2) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$; 3) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^2$.

15.26 Виконайте дії, використовуючи формули скороченого множення:

1) $\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)$; 2) $\left(\sqrt{x}-5\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+5\sqrt{y}\right)$; 3) $\left(\sqrt{x}+4\sqrt{y}\right)^2$.

15.27 Розкладіть на множники вираз:

1) $\sqrt{15}+\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{11}+11$; 5) $b-2$;

2) $\sqrt{10}-\sqrt{14}$; 4) $17-a^2$; 6) $c+2\sqrt{5c}+5$.

15.28 Розкладіть на множники вираз:

1) $a-4\sqrt{a}$; 2) $\sqrt{7a}+a$; 3) $9a-b$; 4) $a+10\sqrt{ab}+25b$.

15.29 Скоротіть дріб, розклавши на множники чисельник або знаменник:

1) $\dfrac{11+\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}$; 3) $\dfrac{a\sqrt{30}+\sqrt{12a}}{\sqrt{2}+\sqrt{5a}}$.

15.30 Внесіть множник під знак кореня, якщо $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

1) $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{6}$; $-5\sqrt{2}$; $x\sqrt{3}$; $-x\sqrt{17}$; $-x\sqrt{20}$;

2) $y^2\sqrt{4}$; $y^3\sqrt{5}$; $y^4\sqrt{7}$; $-y^2\sqrt{2}$; $-y^3\sqrt{3}$; $-y^4\sqrt{9}$.

15.31 Внесіть множник під знак кореня:

1) $10\sqrt{0{,}61}$; 2) $0{,}5\sqrt{30}$; 3) $-6\sqrt{1\dfrac{1}{6}}$; 4) $-7a\sqrt{\dfrac{1}{7a}}$.

15.32 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{12}{\sqrt{6}}$; 3) $\dfrac{24}{\sqrt{3x}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{7}{50}}$.

15.33 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{3}{8\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{7x}{\sqrt{x}}$; 3) $\dfrac{10}{\sqrt{x-5}}$; 4) $\dfrac{x^2-36}{\sqrt{x+6}}$.

15.34 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$; 2) $\dfrac{24}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{18}{\sqrt{a+6}-\sqrt{a}}$; 4) $\dfrac{6a}{\sqrt{7a}+\sqrt{a}}$.

15.35 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{8}{\sqrt{a}-4}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{a+2}-\sqrt{a}}$; 3) $\dfrac{a-9}{\sqrt{a}+3}$.

IQ

BE SMART

Добування квадратного кореня

У давнину математики добували наближенні значення квадратного кореня з натуральних чисел. Наприклад, у Вавілоні (більше ніж 4000 років тому) квадратний корінь із числа x знаходили за допомогою формули:

$$\sqrt{x}=\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a},$$

де a^2 — найближчий до числа x точний квадрат числа a, такий що $a^2<x$.

Знайдемо значення $\sqrt{68}$ за цією формулою:

$$\sqrt{68}=\sqrt{64+4}=\sqrt{8^2+4}\approx$$
$$\approx 8+\frac{4}{2\cdot 8}=8+\frac{1}{4}=8{,}25.$$

Обчислюючи значення квадратного кореня за допомогою калькулятора, отримаємо: $\sqrt{68}=8{,}246\,211\,251$. Якщо округлити що ненабагато відрізняється від обчислень за стародавньою формулою. Знайдіть за допомогою формули значення $\sqrt{156}$; $\sqrt{1608}$ і порівняйте результат з одержаним за допомогою калькулятора.

Ця формула може стати вам у пригоді під час складання НМТ (якщо під рукою не буде ґаджета) або якщо вам буде потрібно обчислити сторону квадратної ділянки, яку плануєте колонізували, коли прилетите на Марс

Видавництво «Ранок»

§16 ФУНКЦІЯ $y=\sqrt{x}$, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

ВЧОРА Ви дізналися про функцію $y=x^2$ та її властивості, навчилися будувати графік цієї функції, розв'язувати рівняння виду $x^2=a$

СЬОГОДНІ Ви познайомитеся з функцією $y=\sqrt{x}$, її графіком і властивостями, навчитесь розв'язувати рівняння $\sqrt{x}=a$

ЗАВЖДИ Ви зможете застосовувати функцію $y=\sqrt{x}$ у математичних моделях, що описують фізичні, хімічні, біологічні, економічні процеси тощо

mk.com.ua/109755

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ПУНКТ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Уявіть, що вам необхідно облаштувати пункт спостереження. Якою буде дальність видимого горизонту, якщо ви дивитиметеся вдалечінь:

- стоячи на землі (ваші очі — на висоті 1,6 м над землею);
- з гілки дерева на висоті 5 метрів;
- з вежі, висота якої 10 метрів?

Дальність видимого горизонту L (у км) можна визначити (без урахування фізичних умов) за спрощеною формулою: $L=3{,}83\sqrt{h}$, де h — висота ока спостерігача над землею (у м).

Пункт спостереження	на землі	на гілці дерева	на вежі
Висота ока спостерігача над землею	$h=1{,}6$ м	$h=(5+1{,}6)$ м	$h=(10+1{,}6)$ м
Обчислення за формулою	$L=3{,}83\sqrt{1{,}6}$	$L=3{,}83\sqrt{6{,}6}$	$L=3{,}83\sqrt{11{,}6}$
Дальність видимого горизонту L	4,8 км	9,8 км	13 км

Для розв'язання задачі ми використали формулу залежності дальності видимого горизонту від висоти спостереження.

Дайте відповіді на запитання.

1) Якою буде дальність видимого горизонту, якщо спостереження ведеться з верхнього майданчика Ейфелевої вежі, розташованого на висоті 276 м?

2) На яку висоту має піднятися спостерігач, щоб бачити горизонт на відстані 50 км?

3) Чи є вказана залежність функцією? Поясніть.

4) Як змінюватиметься дальність видимого горизонту, якщо збільшувати висоту спостереження?

Ми надали тільки один приклад розрахунків за формулою виду $y=\sqrt{x}$. Вона застосовується в багатьох математичних моделях, які описують процеси в різних галузях життя, науки і техніки.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

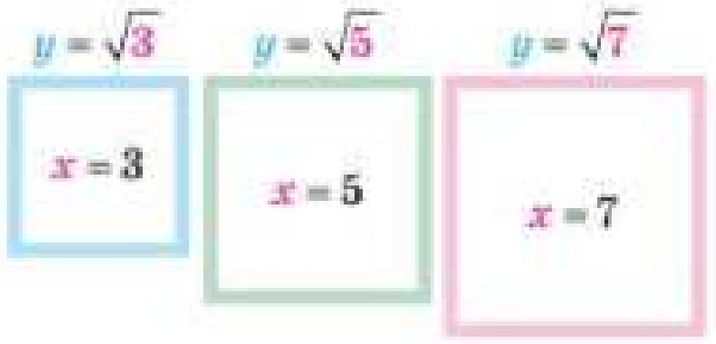
- функція $y=\sqrt{x}$ (square root function)
- графік функції (function graph)
- властивості функції (properties of function)
- рівняння $\sqrt{x}=a$ (radical equation)
- область визначення (domain)
- область значень (range)

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Залежність сторони квадрата від його площі можна задати формулою $y=\sqrt{x}$, де y — сторона квадрата (залежна змінна), а x — площа квадрата (незалежна змінна).

Кожному значенню x відповідає **єдине** значення y. Саме тому таку залежність можна вважати *функціональною*.



Побудуємо графік функції $y=\sqrt{x}$.

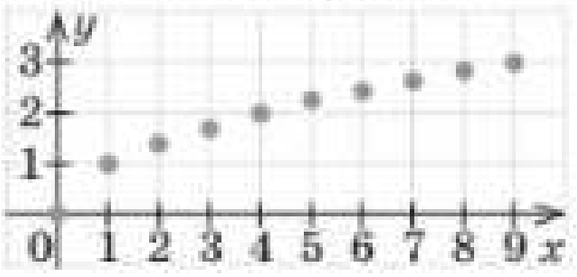
Складаємо таблицю значень функції для вибраних значень аргумента.

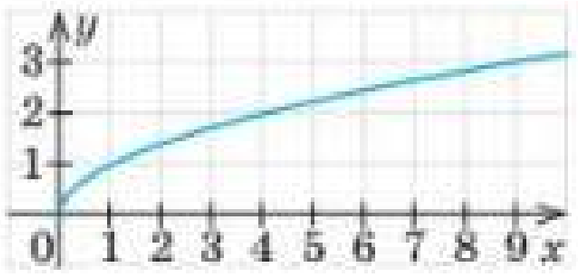
x	$y=\sqrt{x}$	y	$(x;y)$
0	$y=\sqrt{0}$	0	$(0;0)$
1	$y=\sqrt{1}$	1	$(1;1)$
2	$y=\sqrt{2}$	1,4	$(2;1,4)$
3	$y=\sqrt{3}$	1,7	$(3;1,7)$
4	$y=\sqrt{4}$	2	$(4;2)$
9	$y=\sqrt{9}$	3	$(9;3)$

Позначаємо на координатній площині точки, координатами яких є отримані впорядковані пари чисел.

Сполучаємо ці точки.

Чим більше значень x ми візьмемо, тим точніше буде побудований графік функції.



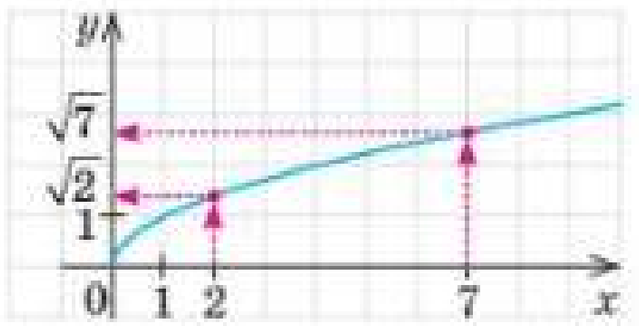


Графіком функції є одна вітка параболи, що виходить із початку координат, точки $O(0;0)$, і розміщена в I координатній чверті.

За графіком можна визначити властивості функції $y=\sqrt{x}$.

ДОСЛІДЖУЄМО

1) Яких значень набуває змінна x?
2) Яких значень набуває змінна y?
3) Знайдіть на графіку функції $y=\sqrt{x}$ точки, які відповідають значенням аргумента $x_1=2$ і $x_2=7$.
4) Знайдіть відповідні значення функції $y_1=\sqrt{2}$ і $y_2=\sqrt{7}$.
5) Порівняйте числа $\sqrt{2}$ і $\sqrt{7}$.
6) Закінчіть висновок: чим більше значення x, тим _____ значення y.
7) Чи є правильним твердження: «Чим більше значення $\sqrt{x}$, тим більше значення x»?



Властивості функції $y=\sqrt{x}$

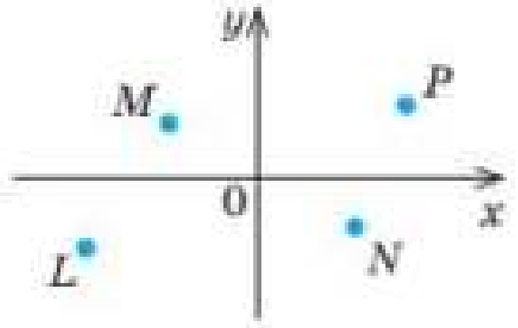
Графік функції розміщений у I координатній чверті

Область визначення $D(y)$: x — усі **невід'ємні** числа $(x\geqslant 0)$

Область значень $E(y)$: y — усі **невід'ємні** числа $(y\geqslant 0)$

Більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції і навпаки, більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента

Видавництво «Ранок»



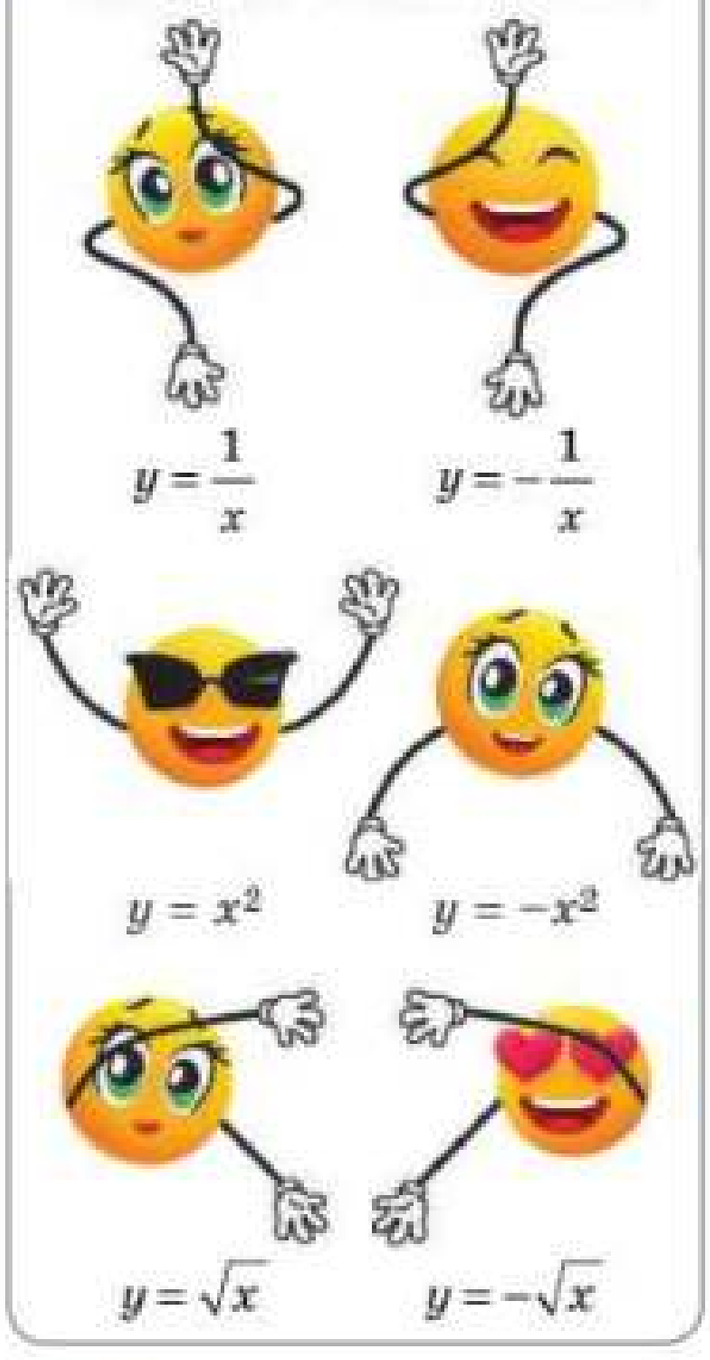
РОЗМИНКА 1

1 Укажіть на рисунку точку, через яку може пройти графік функції $y=\sqrt{x}$.

2 Назвіть серед наведених точки, які не належать графіку функції $y=\sqrt{x}$: $A(16;4)$, $B(-1;1)$, $C(2;-4)$, $D(-3;-9)$. Поясніть свої міркування.

ФІЗКУЛЬТХВИЛИНКА

«Танцювальна математика»



ПРИГАДАЙТЕ!

Щоб перевірити, чи *належить точка графіку функції*, її координати треба підставити у формулу, якою задана функція. Якщо в результаті отримано правильну рівність, то точка належить графіку.

ПРИКЛАД 1

Функцію задано формулою $y=\sqrt{x}$. Не використовуючи графік функції:

1) знайдіть значення y, якщо $x=100;\ 0{,}81$;

2) знайдіть значення x, якщо $y=17;\ 1{,}4$;

3) визначте, чи належать точки $A(225;15)$ і $B(3{,}6;0{,}6)$ графіку цієї функції.

Розв'язання

1) Підставляємо у формулу значення x, знаходимо y;

2) підставляємо у формулу значення y, знаходимо x.

	Значення аргумента x		Функція $y=\sqrt{x}$		Значення функції y
1)	$x=100$	$\rightarrow$	$y=\sqrt{100}$	$\rightarrow$	$y=10$
	$x=0{,}81$	$\rightarrow$	$y=\sqrt{0{,}81}$	$\rightarrow$	$y=0{,}9$
2)			$\sqrt{x}=17$	$\leftarrow$	$y=17$
	$x=289$	$\leftarrow$	$x=17^2$		
			$\sqrt{x}=1{,}4$	$\leftarrow$	$y=1{,}4$
	$x=1{,}96$	$\leftarrow$	$x=1{,}4^2$		

3) Підставляємо у формулу координати точок.

$(x;y)$	x	y	$y=\sqrt{x}$	Висновок
$A(225;15)$	225	15	$15=\sqrt{225}$ $15=15$	Рівність правильна. Точка $(225;15)$ належить графіку функції
$B(3{,}6;0{,}6)$	3,6	0,6	$0{,}6=\sqrt{3{,}6}$ $(0{,}6)^2=3{,}6$ $0{,}36=3{,}6$	Рівність неправильна. Точка $(3{,}6;0{,}6)$ не належить графіку функції

Відповідь: 1) 10; 0,9; 2) 289; 1,96; 3) точка $A(225;15)$ належить графіку функції, точка $B(3{,}6;0{,}6)$ — не належить.

Видавництво «Ранок»

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Функцію задано формулою $y=\sqrt{x}$.

1) Знайдіть значення y, якщо $x=9;\ 25;\ 121;\ 169;\ 0{,}04;\ 0{,}49$.

2) Знайдіть значення x, якщо $y=2;\ 8;\ 14;\ 15;\ 0{,}1;\ 0{,}5$.

3) Визначте, чи належать графіку заданої функції точки:

$$A(1;1);\ B(4;2);\ C(3;9);\ D(16;8);\ E\left(3;\sqrt{3}\right);\ F\left(5;\sqrt{5}\right).$$

Порівняння виразів, що містять квадратні корені

Для порівняння виразів застосовують операцію внесення множника під знак кореня та властивості функції $y=\sqrt{x}$.

РОЗМИНКА 2

1 Внесіть множник під знак кореня та обчисліть значення підкореневого виразу:

1) $2\sqrt{7}=\sqrt{2^2\cdot 7}=\sqrt{28}$; 3) $0{,}1\sqrt{3}$; 5) $4\sqrt{0{,}5}$;

2) $5\sqrt{11}$; 4) $0{,}6\sqrt{5}$; 6) 14.

2 Назвіть усі точні квадрати натуральних чисел, розташовані на координатній прямій між числами:

1) 8 і 38; 2) 99 і 199.

ПРИГАДАЙТЕ!

$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$, якщо $a\geqslant 0$;

$a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2\cdot b}$, якщо $a<0$.

ПРИКЛАД 2

Порівняйте числа:

1) $5\sqrt{3}$ і $3\sqrt{5}$; 2) $2\sqrt{2}$ і 3.

Знайдіть усі натуральні числа, які містяться між числами $3\sqrt{5}$ і $5\sqrt{3}$.

Розв'язання

	1) $5\sqrt{3}$ і $3\sqrt{5}$	2) $2\sqrt{2}$ і 3
Вносимо множник під знак кореня	$\sqrt{5^2\cdot 3}$ і $\sqrt{3^2\cdot 5}$	$\sqrt{2^2\cdot 2}$ і $\sqrt{3^2}$
Обчислюємо підкореневі вирази	$\sqrt{75}$ і $\sqrt{45}$	$\sqrt{8}$ і $\sqrt{9}$
Порівнюємо підкореневі вирази	$75>45$	$8<9$
Робимо висновок	$\sqrt{75}>\sqrt{45}$ $5\sqrt{3}>3\sqrt{5}$	$\sqrt{8}<\sqrt{9}$ $2\sqrt{2}<3$

Знаходимо всі числа, які містяться між числами 45 і 75 та є точними квадратами. $45<49<64<75$

$\sqrt{45}<\sqrt{49}<\sqrt{64}<\sqrt{75}$

Добуваємо корені. $\sqrt{45}<7<8<\sqrt{75}$

Записуємо відповідь. $3\sqrt{5}<7<8<5\sqrt{3}$

Відповідь: 1) $5\sqrt{3}>3\sqrt{5}$; 2) $2\sqrt{2}<3$; числа 7 і 8.

СЛІД ЗНАТИ!

Більшому значенню **аргумента** функції $y=\sqrt{x}$ відповідає більше значення **функції**.

Якщо $x_1<x_2$, то $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$.

Наприклад,

якщо $10>3$, то $\sqrt{10}>\sqrt{3}$,

і навпаки:

якщо $\sqrt{98}>\sqrt{95}$, то $98>95$

Видавництво «Ранок»

В ОДИН КЛІК

1. За допомогою графічного калькулятора Desmos побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

1) $y=\sqrt{x}$ і $y=3$;

2) $y=\sqrt{x}$ і $y=-2$;

3) $y=\sqrt{x}$ і $y=\frac{1}{4}x$;

4) $y=\sqrt{x}$ і $y=-5x$.

2. Скільки коренів має рівняння:

1) $\sqrt{x}=3$; 3) $\sqrt{x}=\frac{1}{4}x$;

2) $\sqrt{x}=-2$; 4) $\sqrt{x}=-5x$?

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Порівняйте значення виразів:

1) $\sqrt{83}$ і $\sqrt{82}$; **3)** 9 і $\sqrt{81}$; **5)** $\sqrt{15{,}9}$ і 4; **7)** $3\sqrt{7}$ і $7\sqrt{3}$;

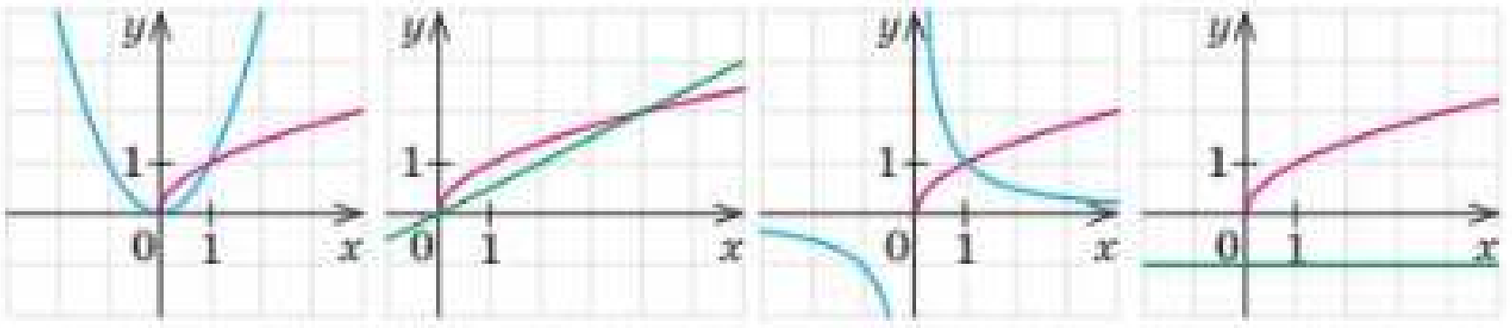
2) $\sqrt{47}$ і $\sqrt{51}$; **4)** $\sqrt{49}$ і 7; **6)** 5 і $\sqrt{24{,}7}$; **8)** $2\sqrt{5}$ і $5\sqrt{2}$.

Розв'язування рівнянь графічним способом

РОЗМИНКА 3

З'ясуйте, скільки коренів має рівняння:

1) $\sqrt{x}=x^2$; **2)** $\sqrt{x}=\frac{1}{2}x$; **3)** $\sqrt{x}=\frac{1}{x}$; **4)** $\sqrt{x}=-1$.



ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть графічним способом рівняння $-x+2=\sqrt{x}$.

Розв'язання

1) Записуємо два рівняння $y=-x+2$ і $y=\sqrt{x}$

2) Будуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь.

3) Знаходимо точку перетину графіків рівнянь. Записуємо абсцису цієї точки. $x=1$

4) Перевіряємо, чи є отримане значення розв'язком початкового рівняння.

$x=1$

$-1+2=\sqrt{1}$

$1=1$

Рівність правильна, отже, 1 є коренем рівняння

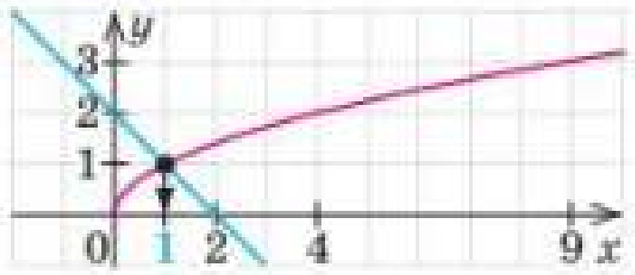
Відповідь: 1.

$y=-x+2$

x	0	2
y	2	0

$y=\sqrt{x}$

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3



ТРЕНУЄМОСЯ 3

У завданнях 1–4 визначте кількість точок перетину графіків функцій:

1) $y=\sqrt{x}$ і $y=1{,}5$; **3)** $y=\sqrt{x}$ і $y=-3$;

2) $y=\sqrt{x}$ і $y=2$; **4)** $y=\sqrt{x}$ і $y=-0{,}5$.

У завданнях 5–8 розв'яжіть графічним способом рівняння:

5) $\sqrt{x}=x-2$; **6)** $\sqrt{x}=6-x$; **7)** $\sqrt{x}=\frac{1}{3}x$; **8)** $\sqrt{x}=\frac{1}{4}x$.

Видавництво «Ранок»

ПРАКТИКУМ

16.1 Функція задана формулою $y=\sqrt{x}$. Заповніть порожні клітинки таблиці.

x	0,49	2,89			$1\frac{21}{100}$	$1\frac{13}{36}$
y			3,5	$2\frac{1}{3}$		

16.2 Не виконуючи побудови, визначте, чи проходить графік функції $y=\sqrt{x}$ через точки:

$A(0{,}01;0{,}1)$, $B(0{,}81;0{,}9)$, $C(4;-2)$, $D(-25;5)$,

$E\left(2\frac{1}{4};1\frac{1}{2}\right)$, $F\left(3\frac{1}{9};9\frac{1}{3}\right)$.

16.3 Побудуйте графік функції $y=-\sqrt{x}$. Запишіть властивості цієї функції.

16.4 Знайдіть область значень функції $y=\sqrt{x}$, якщо вона визначена на проміжках:

1) $0\leqslant x\leqslant 4$; 2) $1\leqslant x\leqslant 9$; 3) $0{,}25\leqslant x\leqslant 36$; 4) $0{,}16\leqslant x\leqslant 64$.

16.5 Порівняйте числа:

1) $\sqrt{0{,}3}$ і 0; 3) $-0{,}7$ і $\sqrt{2}$; 5) 11 і $\sqrt{119}$; 7) $\frac{1}{2}\sqrt{124}$ і $\sqrt{31}$;

2) 0 і $\sqrt{0{,}1}$; 4) $\sqrt{3}$ і $-0{,}4$; 6) $\sqrt{143}$ і 12; 8) $\sqrt{17}$ і $\frac{1}{3}\sqrt{153}$.

16.6 Розташуйте числа за зростанням:

1) 0, -5, $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$, -1, 0; 3) 8, $\sqrt{49}$, $\sqrt{51}$; 4) 5, $\sqrt{36}$, $\sqrt{23}$.

16.7 Між якими двома послідовними цілими числами розташоване на координатній прямій число:

1) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{47{,}2}$; 5) $\sqrt{106}$; 7) $\sqrt{398}$;

2) $\sqrt{11}$; 4) $\sqrt{85{,}3}$; 6) $\sqrt{149}$; 8) $\sqrt{899}$?

16.8 Укажіть усі натуральні числа, розташовані на координатній прямій між числами:

1) 2 і $\sqrt{25}$; 3) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{49}$; 5) $\sqrt{59{,}8}$ і $\sqrt{99}$;

2) $\sqrt{9}$ і 8; 4) $\sqrt{19}$ і $\sqrt{36}$; 6) $\sqrt{23{,}4}$ і $\sqrt{83}$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

Точки

1) $A(5;25)$; 2) $B(28{,}9;1{,}7)$;

3) $C(49;-7)$; 4) $D\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$

належать графіку функції $y=\sqrt{x}$

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

1. Порівняйте числа $5\sqrt{7}$ і $7\sqrt{5}$.
2. Запишіть по одному виразу виду $a\sqrt{b}$, де a і b — числа від 2 до 9, і покажіть їх одне одному.
3. Порівняйте значення двох виразів.
4. Повторіть завдання ще два рази.

Виграє той / та, у кого виявиться найбільша кількість більших виразів.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Запишіть пропущені числа

$\sqrt{13}<\sqrt{19}$	4
$\sqrt{31}<\sqrt{57}$	6; 7
$\sqrt{97}<\sqrt{147}$	?

Видавництво «Ранок»

16.9 Графік функції $y=\sqrt{x}$ перетинає пряму $y=a$. Не виконуючи побудови, визначте координати точки їх перетину, якщо:

1) $a=2$; 3) $a=0{,}6$; 5) $a=15$; 7) $a=30$;
2) $a=5$; 4) $a=0{,}4$; 6) $a=13$; 8) $a=40$.

16.10 Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x}=-3x+4$; 3) $\sqrt{x}=-\frac{1}{2}x$; 5) $\sqrt{x}=-\frac{3}{x}$;
2) $\sqrt{x}=\frac{3}{4}x-1$; 4) $\sqrt{x}=-\frac{1}{3}x$; 6) $\sqrt{x}=-\frac{2}{x}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

16.11 Потужність P електричного струму обчислюють за формулою $P=I^2R$, де I — сила струму, R — опір провідника. Задайте формулою залежність сили струму I $(I>0)$ від потужності P і опору R.

16.12 Площу S круга, діаметр якого дорівнює d, обчислюють за формулою $S=\frac{1}{4}\pi d^2$. Задайте формулою залежність діаметра d $(d>0)$ від площі S.

16.13 Кінетичну енергію E_k тіла обчислюють за формулою $E_k=\frac{mv^2}{2}$, де m — маса тіла, v — швидкість тіла. Задайте формулою залежність швидкості v $(v>0)$ від кінетичної енергії E_k і маси m.

16.14 Винесіть з-під знака кореня вираз:

1) $\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}$; 2) $\sqrt{(4-\sqrt{7})^2}$; 3) $\sqrt{(2-\sqrt{11})^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{2}-6)^2}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Задана формула $S=\frac{gt^2}{2}$ $(S>0,\ t>0)$.

Виражаємо t через S:

$$2S=gt^2,\ gt^2=2S;$$
$$t^2=\frac{2S}{g};$$
$$t=\sqrt{\frac{2S}{g}}$$

ПРИГАДАЙТЕ!

$$\sqrt{a^2}=|a|$$
$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

Наприклад,

$2<\sqrt{6}$; $2-\sqrt{6}<0$, отже,

$|2-\sqrt{6}|=-(2-\sqrt{6})=\sqrt{6}-2$.

16.15 Спростіть вирази 1–4.

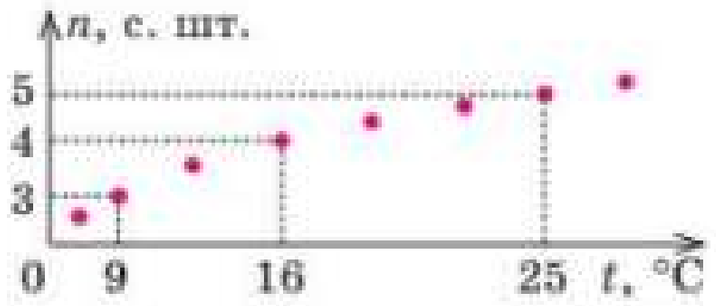
Аналізуємо	Виконуємо
1) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{4+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+3}=$ $=\sqrt{2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=\lvert 2+\sqrt{3}\rvert$. $2+\sqrt{3}>0$, отже, $\lvert 2+\sqrt{3}\rvert=2+\sqrt{3}$. *Відповідь:* $2+\sqrt{3}$.	2) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$; 4) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

Видавництво «Ранок»

MATH FOR LIFE

16.16 Морозиво в спекотний літній день. Для визначення залежності щоденного обсягу продажів морозива від температури повітря в літній період було проведено маркетингове дослідження. На рисунку подано його результати. Точками з координатами $(t; n)$ позначено кількість n (у сотнях штук) порцій морозива, проданих протягом дня, коли середня температура повітря становила t °C. Користуючись графіком, дайте відповіді на запитання.

1) Скільки порцій морозива було продано протягом дня, коли температура повітря становила 25 °C?
2) Якою була середня температура того дня, коли було продано 400 порцій морозива?
3) Задайте формулою залежність n від t.
4) Обчисліть за формулою, скільки порцій морозива буде продано протягом дня, коли температура повітря становитиме 36 °C. Припустіть, що залежність n від t надалі зберігатиметься.



За прогнозом погоди температура повітря найближчими днями становитиме близько 40 °C. Спираючись на ці дані, менеджер із продажів зробив висновок: «У найближчі дні щодня продаватиметься не менше 600, але не більше 700 порцій морозива». Чи має рацію менеджер?

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 10

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Зведіть подібні доданки: $12\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$.

А	Б	В	Г
$15\sqrt{2}$	$9\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	9

2 Спростіть вираз $\sqrt{16a} + \sqrt{a}$.

А	Б	В	Г
$4a$	$\sqrt{17a}$	$5\sqrt{a}$	$9\sqrt{a}$

3 Внесіть множник під знак кореня у виразі $10\sqrt{10}$.

А	Б	В	Г
$\sqrt{50}$	$\sqrt{100}$	$\sqrt{200}$	$\sqrt{1000}$

4 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{49}{\sqrt{7}}$.

А	Б	В	Г
$\sqrt{7}$	7	$49\sqrt{7}$	$7\sqrt{7}$

5 Площу S підлоги квест-кімнати обчислюють за формулою $S = 2a^2$. Виразіть змінну a через S.

А	Б	В	Г
$a = \sqrt{\frac{S}{2}}$	$a = \frac{\sqrt{S}}{2}$	$a = \sqrt{2S}$	$a = 2\sqrt{S}$

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) та його числовим значенням (А–Г).

1	$\sqrt{5}\left(\sqrt{20} - \sqrt{5}\right)$	А	$6 + 2\sqrt{5}$
2	$\left(\sqrt{5} - 1\right)\left(\sqrt{5} + 1\right)$	Б	6
3	$\left(\sqrt{5} + 1\right)^2$	В	4
		Г	5

7 Обчисліть: $\sqrt{40} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{45}$.

8 Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$.

1) Знайдіть значення x, якщо $y = 4$.
2) З'ясуйте, чи належить графіку цієї функції точка $A(0{,}009; 0{,}3)$.

Видавництво «Ранок»

Завдання 16.17 → Приклад 1
Завдання 16.18 → Приклад 2
Завдання 16.19 → Приклад 3
Завдання 16.20 → Практикум, 16.4
Завдання 16.21–16.25 → Практикум, 16.6–16.10
Завдання 16.26 → Інтелектуальний фітнес, 16.15

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

16.17 Функцію задано формулою $y=\sqrt{x}$.

1) Знайдіть значення y, якщо $x=1; 16; 144; 225; 0{,}09; 0{,}25$.

2) Знайдіть значення x, якщо $y=0; 5; 11; 13; 0{,}2; 0{,}7$.

3) Визначте, чи належать графіку заданої функції точки: $A(9;3)$; $B(64;8)$; $C(2;1)$; $D(5;25)$; $E\left(2;\sqrt{2}\right)$; $F\left(6;\sqrt{6}\right)$.

16.18 Порівняйте значення виразів:

1) $\sqrt{101}$ і $\sqrt{103}$; 2) 8 і $\sqrt{64}$; 3) 6 і $\sqrt{35{,}9}$; 4) $2\sqrt{3}$ і $3\sqrt{2}$.

16.19 У завданнях 1–4 визначте кількість точок перетину графіків функцій:

1) $y=\sqrt{x}$ і $y=0{,}5$;
2) $y=\sqrt{x}$ і $y=3$;
3) $y=\sqrt{x}$ і $y=-2$;
4) $y=\sqrt{x}$ і $y=-1{,}5$.

У завданнях 5–8 розв'яжіть рівняння:

5) $\sqrt{x}=-x$; 6) $\sqrt{x}=-2x+3$; 7) $\sqrt{x}=x$; 8) $\sqrt{x}=0{,}25x$.

16.20 Знайдіть область значень функції $y=\sqrt{x}$, якщо вона визначена на проміжку:

1) $0\leqslant x\leqslant 1$; 2) $4\leqslant x\leqslant 25$; 3) $0{,}09\leqslant x\leqslant 16$; 4) $0{,}04\leqslant x\leqslant 81$.

16.21 Розташуйте числа за спаданням:

1) $0, -1, \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}, -2, 0$; 3) $7, \sqrt{66}, \sqrt{81}$; 4) $\sqrt{14}, 4, \sqrt{25}$.

16.22 Між якими двома послідовними цілими числами розташоване на координатній прямій число:

1) $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{61{,}5}$; 3) $\sqrt{171}$; 4) $\sqrt{387}$?

16.23 Укажіть усі натуральні числа, розташовані на координатній прямій між числами:

1) 3 і $\sqrt{36}$; 2) $\sqrt{11}$ і $\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{32{,}9}$ і $\sqrt{79}$.

16.24 Графік функції $y=\sqrt{x}$ перетинає пряму $y=a$. Не виконуючи побудови, визначте координати точки їх перетину, якщо:

1) $a=7$; 2) $a=0{,}5$; 3) $a=14$; 4) $a=20$.

16.25 Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{x}=-\frac{1}{4}x+3$; 2) $\sqrt{x}=-2x$; 3) $\sqrt{x}=-\frac{4}{x}$.

16.26 Спростіть вираз:

1) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Дальність видимого горизонту

Виміряйте відстань від підлоги до очей для себе, членів вашої родини, друзів.

Використовуючи формулу, наведену в Актуальній задачі, знайдіть дальність видимого горизонту для кожного / кожної, хто оглядає місцевість, стоячи на землі, або піднявшись на Говерлу, або з Ейфелевої вежі, або з будь-якого місця на ваш розсуд.

Не забудьте додати до ваших вимірювань висоту місця, з якого буде відбуватися спостереження.

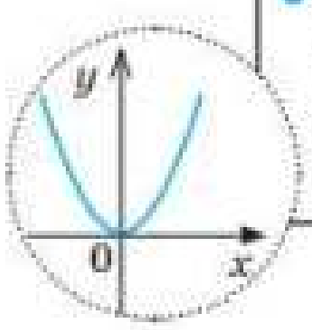
Видавництво «Ранок»

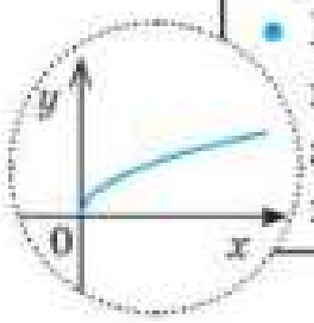
ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 11–16

1 Ви познайомилися з функціями $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$, їх графіками та властивостями.

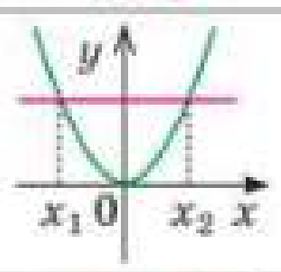
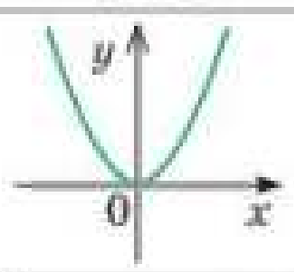
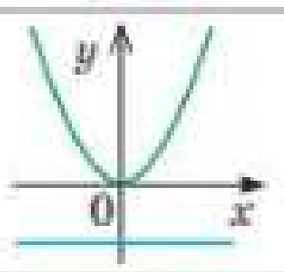
Функція

	$y=x^2$		$y=\sqrt{x}$
Область визначення	$D(y)$: x — будь-яке число	◄···►	$D(y)$: $x \geqslant 0$
Область значень	$E(y)$: $y \geqslant 0$	◄···►	$E(y)$: $y \geqslant 0$
Графік функції	• Графік — парабола, її вітки симетричні відносно осі Oy. • Графік розміщений у I і II координатних чвертях, проходить через початок координат — точку $O(0; 0)$.	◄···►	• Графік розміщений у I координатній чверті, виходить з початку координат — точки $O(0; 0)$. • Більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції і навпаки.





2 Ви навчилися розв'язувати рівняння графічним способом, дослідили розв'язки рівняння $x^2=a$.

$a>0$	$a=0$	$a<0$
		
Рівняння має два різні розв'язки — протилежні числа $x_1=-\sqrt{a}$ і $x_2=\sqrt{a}$	Рівняння має **один** розв'язок $x=0$	Рівняння не має розв'язків

3 Ви дізналися, що таке арифметичний квадратний корінь і які його властивості.

Арифметичним квадратним кореням із числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a:
якщо $\sqrt{a}=b$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $b^2=a$.

Властивості арифметичного квадратного кореня

- $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, якщо $a \geqslant 0$
- $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$
- $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, якщо $a \geqslant 0$, $b>0$
- $\sqrt{a^2}=|a|$, $\sqrt{a^{2n}}=|a^n|$

Винесення множника з-під знака кореня

- $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$, якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$
- $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$ для будь-яких a, $b \geqslant 0$

Внесення множника під знак кореня

$$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b}, & \text{якщо } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0\\ -\sqrt{a^2b}, & \text{якщо } a<0,\ b \geqslant 0\end{cases}$$

Видавництво «Ранок»

Інший варіант роботи в електронному додатку

ПІДСУМКОВА РОБОТА № 5

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Обчисліть $\left(-\sqrt{3{,}6}\right)^2$.

А	Б	В	Г
$-1{,}8$	$1{,}8$	$-3{,}6$	$3{,}6$

2 Розв'яжіть рівняння $9x^2 = 9$.

А	Б	В	Г
± 1	± 9	1	9

3 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\dfrac{33}{\sqrt{11}}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{3}{11}$	$3\sqrt{11}$	3	$33\sqrt{11}$

4 Знайдіть значення виразу $\dfrac{\sqrt{250}}{\sqrt{1000}}$.

А	Б	В	Г
50	5	$0{,}5$	$0{,}05$

5 Укажіть координати точки, яка належить графіку функції $y = \sqrt{x}$.

А	Б	В	Г
$(0{,}01; 0{,}1)$	$(3; 9)$	$(9; -3)$	$(0{,}1; 0{,}01)$

6 Площу S знімального майданчика обчислюють за формулою $S = \dfrac{a^2}{3}$. Виразіть змінну a через S.

А	Б	В	Г
$a = \sqrt{\dfrac{S}{3}}$	$a = \dfrac{\sqrt{S}}{3}$	$a = \sqrt{3S}$	$a = 3\sqrt{S}$

7 Розкладіть на множники вираз $100x - y$.

8 Знайдіть значення виразу $\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{50}\right)$.

9 Спростіть вираз $\dfrac{a\sqrt{12} + \sqrt{14a}}{\sqrt{7} + \sqrt{6a}}$ та знайдіть його значення, якщо $a = 4{,}5$.

10 Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 - 3x = 0$.

Бонусне завдання

Спростіть вираз $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

> Пам'ятайте: хочете навчитися плавати, сміливіше входьте у воду. Хочете навчитися математики, беріться за завдання. Кожне розв'язання є своєрідним мистецтвом пошуку.
>
> Михайло Кравчук

Видавництво «Ранок»

3 Квадратні рівняння
Quadratic equations

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

Пізнання законів природи, розв'язання завдань на просторові форми й кількісні співвідношення, створення програм для обробки звуку, відео, векторної графіки неможливо без знання квадратних рівнянь.

Опанувавши цей розділ, ви навчитеся:

- перекладати мовою математики будь-яку задачу з реального життя, тобто створювати її математичну модель
- визначати час або швидкість для будь-якої подорожі, здійснювати розрахунки для транспортної логістики
- складати план виконання сумісної роботи, раціонально розподіляти час її виконання

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

- Геометрична алгебра та розв'язування квадратних рівнянь
- 13 способів розв'язування квадратних рівнянь
- Цікаві властивості коефіцієнтів квадратних рівнянь
- Квадратні рівняння у фізиці, техніці, спорті
- Омар Хайям — перський математик і поет
- Франсуа Вієт і його теорема
- Розв'язування рівнянь вищих степенів

> “На світі немає нічого неможливого — справа тільки в тому, чи вистачить у тебе хоробрості.”
>
> Дж. Роулінг

§17 КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕПОВНИХ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ

ВЧОРА Ви розв'язували лінійні рівняння та рівняння виду $x^2=a$; застосовували метод розкладання многочлена на множники для розв'язування рівнянь

СЬОГОДНІ Ви познайомитеся з поняттям квадратного рівняння, навчитеся розпізнавати його серед інших рівнянь, опануєте розв'язування неповних квадратних рівнянь

ЗАВЖДИ Ви зможете розв'язувати різноманітні задачі, зокрема геометричного змісту

mk.com.ua/109756

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ПУСТОТЛИВІ МАВПИ

Історія математики має глибоке коріння. Широко відомі досягнення математиків Стародавнього Єгипту, Вавилона, Давньої Греції, Індії, Китаю. Доволі часто індійські вчені складали задачі у віршованій формі. Одну з таких задач математика XII ст. Бхаскарими II ми зараз розглянемо.

На дві зграї розділившись,
Бавились у гаї мавпи.
Одна восьма їх у квадраті
На узліссі забавлялись.

З криком радісним дванадцять
На ліанах колихались.
Разом скільки, ти дізнайся,
Мавп було у тому гаї?

Розв'язання

Нехай загальна кількість мавп — x, тоді:

1) кількість мавп, які забавлялися на узліссі, — $\left(\frac{1}{8}x\right)^2$;

2) кількість мавп, які колихалися на ліанах, — 12.

Запишемо рівняння: $\left(\frac{1}{8}x\right)^2+12=x$.

Ми отримали рівняння $\left(\frac{1}{8}x\right)^2+12=x$, що відрізняється від тих, які ви розв'язували раніше. Це рівняння є цілим, найбільший степінь змінної, яка входить до нього, дорівнює 2.

Ви вмієте розв'язувати лінійні рівняння, тобто рівняння виду $ax+b=0$. Їх ще називають рівняннями першого степеня. Існують рівняння другого, третього і вищих степенів. У цьому параграфі ви розглянете рівняння другого степеня, які називають **квадратними**.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Шість місць у десятці найрозумніших тварин займають примати: бабуїни, шимпанзе, горили, орангутанги, гібони й мавпи.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- квадратне рівняння (quadratic equation)
- квадратний тричлен (quadratic trinomial)
- старший коефіцієнт (leading coefficient)
- корені квадратного рівняння (roots of a quadratic equation)
- властивість рівності добутку нулю (zero product property)

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де x — змінна, a, b, c — числа, причому $a\neq 0$, називають **квадратним**.

1. Многочлен ax^2+bx+c, який міститься в лівій частині рівняння, називають **квадратним тричленом** $(a\neq 0)$.
2. a, b, c — **коефіцієнти рівняння**:
   a — **старший** (перший) коефіцієнт; b — **другий** коефіцієнт; c — **вільний** член.
3. У квадратному рівнянні, якщо $a\neq 0$, коефіцієнти b і c *можуть дорівнювати нулю*.

Наприклад:

$ax^2+bx+c=0$	a	b	c	Види рівнянь
$2x^2+5x+1=0$	2	5	1	Повні квадратні рівняння
$x^2-x-7=0$	1	−1	−7	
$8x^2+3=0$	8	0	3	Неповні квадратні рівняння
$-x^2+2x=0$	−1	2	0	
$9x^2=0$	9	0	0	

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Рівняння **не є** квадратними:

$3x^2-\frac{2}{x}+5=0$;

$x^2+10\sqrt{x}-1=0$;

$-2x^3+x=0$

Квадратне рівняння називають **неповним**, якщо *хоча б один* із його коефіцієнтів, крім старшого, або обидва ці коефіцієнти дорівнюють нулю.

Існують три види неповних квадратних рівнянь:

1) $ax^2+c=0$, якщо $b=0$;

2) $ax^2+bx=0$, якщо $c=0$;

3) $ax^2=0$, якщо $b=c=0$.

СЛІД ЗНАТИ!

Кожний коефіцієнт розглядається з тим знаком, який стоїть перед ним.

$-x^2+10x-2=0$

$(-1)\cdot x^2+10x+(-2)=0$

$a=-1$, $b=10$, $c=-2$

РОЗМИНКА 1

Які з наведених рівнянь є квадратними? Назвіть неповні квадратні рівняння. Запишіть коефіцієнти квадратних рівнянь.

1) $9x^2-4x+5=0$;
2) $-x^2+2x^3-3=0$;
3) $x^2-\frac{6}{x}-7=0$;
4) $-\frac{x}{5}+8x^2+\frac{2}{3}=0$;
5) $-7x^2-11=0$;
6) $x^2-100x=0$;
7) $x^2-\sqrt{x}-5=0$;
8) $-3x^2-\sqrt{5}x=0$;
9) $1{,}5x^2+7\frac{1}{5}=0$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$-x^2=(-1)\cdot x^2$; $a=-1$

$-x=(-1)\cdot x$; $b=-1$

$\frac{x}{10}=\frac{1}{10}\cdot x$; $b=\frac{1}{10}$

Досить часто на практиці ми матимемо справу з квадратними рівняннями, у яких старший коефіцієнт дорівнює 1.

Видавництво «Ранок»

! Квадратне рівняння, у якому *старший коефіцієнт* дорівнює 1, називають **зведеним**.

Для того щоб записати квадратне рівняння у вигляді **зведеного квадратного рівняння**, треба обидві частини заданого рівняння **поділити на старший коефіцієнт**.

Наприклад:

$4x^2+3x-8=0 \mid :4$	$\frac{1}{3}x^2-2x+1=0 \mid :\frac{1}{3}$	$-x^2+\frac{4}{7}x-5=0 \mid :(-1)$
$\frac{4}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{8}{4}=0$	$\left(\frac{1}{3}:\frac{1}{3}\right)x^2-\left(2:\frac{1}{3}\right)x+\left(1:\frac{1}{3}\right)=0$	$\frac{-1}{-1}x^2+\left(\frac{4}{7}:(-1)\right)x+\frac{(-5)}{(-1)}=0$
$x^2+\frac{3}{4}x-2=0$	$x^2-6x+3=0$	$x^2-\frac{4}{7}x+5=0$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

До квадратних рівнянь можна застосовувати всі правила рівносильних перетворень рівнянь:

- доданки можна переносити з однієї частини рівняння в іншу, змінюючи їх знак на протилежний;
- до обох частин рівняння можна додавати те саме число (від обох частин рівняння можна віднімати те саме число);
- обидві частини рівняння можна множити або ділити на те саме число, відмінне від нуля.

ПРИКЛАД 1

Складіть квадратне рівняння, у якому старший коефіцієнт (-3), другий коефіцієнт $\frac{3}{4}$, вільний член 1. Запишіть складене рівняння у вигляді зведеного рівняння.

Розв'язання

1) Підставляємо в рівняння $ax^2+bx+c=0$ задані значення коефіцієнтів. $a=-3;\ b=\frac{3}{4};\ c=1;$ $-3x^2+\frac{3}{4}x+1=0$

2) Ділимо обидві частини рівняння на старший коефіцієнт (-3). $-3x^2+\frac{3}{4}x+1=0 \mid :(-3)$ $\frac{-3}{-3}x^2+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(-3)}x+\frac{1}{(-3)}=0$

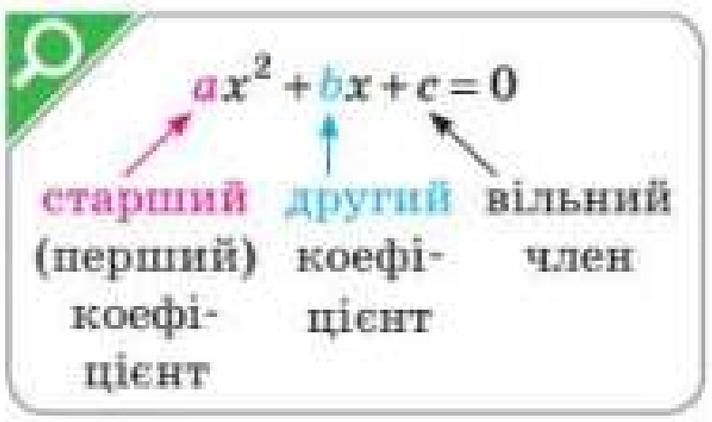
3) Записуємо зведене квадратне рівняння. $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}=0$

Відповідь: $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}=0$.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Складіть квадратне рівняння, якщо задані його старший коефіцієнт, другий коефіцієнт і вільний член. Запишіть складене рівняння у вигляді зведеного рівняння.

1) $a=2,\ b=1,\ c=0;$
2) $a=3,\ b=2,\ c=0;$
3) $a=-1,\ b=0,\ c=5;$
4) $a=-1,\ b=0,\ c=7;$
5) $a=5,\ b=-3,\ c=4;$
6) $a=3,\ b=-2,\ c=1;$
7) $a=-2,\ b=7,\ c=-5;$
8) $a=-3,\ b=8,\ c=-2.$



Видавництво «Ранок»

Розв'язування неповних квадратних рівнянь

Кількість коренів квадратного рівняння залежить від значень його коефіцієнтів.

Під час розв'язування квадратних рівнянь застосовують тотожні перетворення та користуються властивостями рівнянь.

ДОСЛІДЖУЄМО

Проаналізуйте розв'язання неповних квадратних рівнянь.

1) Визначте, скільки коренів мають ці рівняння.
2) Порівняйте свої висновки зі схемою.

$b=0$		$c=0$	$b=0,\ c=0$
$ax^2+c=0$		$ax^2+bx=0$	$ax^2=0$
$x^2-9=0;$	$x^2+4=0;$	$x^2+6x=0;$	$10x^2=0;$
$x^2=9;$	$x^2=-4;$	$x(x+6)=0;$	$x^2=0;$
$x=\pm\sqrt{9};$	$-4<0;$	$x=0,\ x+6=0;$	$x=0.$
$x_1=-3,\ x_2=3$	коренів немає.	$x_1=0,\ x_2=-6.$	

! Неповні квадратні рівняння можуть мати **два** корені, **один** корінь або **не мати** коренів.

Схема розв'язування неповних квадратних рівнянь

$ax^2+c=0$, якщо $b=0$		$ax^2+bx=0$, якщо $c=0$	$ax^2=0$, якщо $b=0,\ c=0$
$x^2=-\frac{c}{a}.$ Якщо $-\frac{c}{a}>0$, рівняння має **два** корені	$x^2=-\frac{c}{a}.$ Якщо $-\frac{c}{a}<0$, рівняння **не має коренів**	$x(ax+b)=0.$ Виносимо спільний множник за дужки і застосовуємо умову рівності добутку нулю. Рівняння має **два** корені	$x^2=0.$ Для будь-яких значень $a\neq 0$ рівняння має **один** корінь
$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$\varnothing$	$x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}$	$x=0$

РОЗМИНКА 2

1. Розкладіть на множники вираз:
   1) x^2-x; 2) x^2+3x; 3) $7x^2-x$; 4) $5x^2+10x$; 5) $-2x^2-3x$.
2. Застосуйте умову рівності добутку нулю й назвіть корені рівняння:
   1) $y(y+2)=0$; 2) $4y(y-1)=0$; 3) $y(3y+9)=0$; 4) $-6y(3y-4)=0$.
3. Скільки коренів має рівняння:
   1) $7x^2=0$; 2) $2x^2=1$; 3) $x^2=-5$; 4) $-3x^2=9$; 5) $-x^2=-16$?
4. Назвіть корені рівняння:
   1) $x^2=1$; 3) $x^2=0{,}16$; 5) $x^2=0{,}01$;
   2) $x^2=225$; 4) $x^2=\frac{49}{81}$; 6) $x^2=1\frac{23}{121}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Умова рівності добутку нулю

Добуток декількох множників дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю:

$a\cdot b\cdot c=0,$
якщо $a=0$
або $b=0,$
або $c=0.$

Видавництво «Ранок»

Стратегія

1) Зводимо рівняння до вигляду $ax^2+bx=0$.

2) Виносимо спільний множник за дужки. Одержуємо рівняння $x(ax+b)=0$.

3) Використовуємо умову рівності добутку нулю:

$x_1=0$ або $ax_2+b=0$;

$x_1=0$ $\qquad x_2=-\frac{b}{a}$.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть рівняння способом розкладання на множники:

1) $5x^2=-20x$; 2) $-0{,}1y^2=-9y$.

Розв'язання

1) $5x^2=-20x$	2) $-0{,}1y^2=-9y$
$5x^2+20x=0$	$0{,}1y^2-9y=0$
$5x(x+4)=0$	$y(0{,}1y-9)=0$
$5x=0$ або $x+4=0$	$y=0$ або $0{,}1y-9=0$
$x_1=0$ $\quad x_2=-4$	$y_1=0$ $\quad y_2=90$

Відповідь: 1) –4; 0; 2) 0; 90.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Розв'яжіть рівняння способом розкладання на множники:

1) $x^2-12x=0$; 3) $x^2=-17x$; 5) $-0{,}3x^2=-6x$;

2) $x^2-13x=0$; 4) $x^2=-19x$; 6) $-0{,}4x^2=-32x$.

Стратегія

1) Зводимо рівняння до вигляду $x^2=m$.

2) Аналізуємо знак m. Робимо висновок:

- якщо $m>0$, то $x_{1,2}=\pm\sqrt{m}$;
- якщо $m=0$, то $x=0$;
- якщо $m<0$, то коренів немає.

3) Знаходимо корені рівняння.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Якщо в рівнянні $ax^2+c=0$ **знаки коефіцієнтів:**

- різні, то рівняння має два корені;
- однакові, то рівняння не має коренів

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2-48=0$; 2) $2y^2-14=0$; 3) $100+4n^2=0$.

Розв'язання

1) $3x^2-48=0$	2) $2y^2-14=0$	3) $100+4n^2=0$
$3x^2=48$	$2y^2=14$	$4n^2=-100$
$x^2=48:3$	$y^2=14:2$	$n^2=(-100):4$
$x^2=16$	$y^2=7$	$n^2=-25$
$16>0$ два корені	$7>0$ два корені	$-25<0$ коренів немає
$x_{1,2}=\pm\sqrt{16}=\pm4$	$x_{1,2}=\pm\sqrt{7}$	коренів немає

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2-27=0$; 3) $4x^2-8=0$; 5) $18+2x^2=0$;

2) $2x^2-50=0$; 4) $5x^2-30=0$; 6) $75+3x^2=0$.

Квадратне рівняння, ліву частину якого можна подати у вигляді квадрата двочлена, можна звести до неповного квадратного рівняння вигляду $x^2=m$.

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть рівняння:

1) $(1+2x)^2-25=0$; 2) $(y-1)^2-17=0$.

Розв'язання

	1) $(1+2x)^2-25=0$	2) $(y-1)^2-17=0$
Зводимо рівняння до вигляду: $x^2=m$	$(1+2x)^2=25$	$(y-1)^2=17$
Якщо $m>0$, рівняння має **два** корені $x_{1,2}=\pm\sqrt{m}$	$25>0$ два корені $1+2x=\pm\sqrt{25}$ $1+2x=\pm5$	$17>0$ два корені $y-1=\pm\sqrt{17}$
Розв'язуємо **два** рівняння	$1+2x=5$ або $1+2x=-5$ $2x=4$ $2x=-6$ $x_1=2$ $x_2=-3$	$y-1=\sqrt{17}$ або $y-1=-\sqrt{17}$ $y_1=1+\sqrt{17}$ $y_2=1-\sqrt{17}$ $y_{1,2}=1\pm\sqrt{17}$

Відповідь: 1) -3; 2; 2) $1\pm\sqrt{17}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x+1)^2=13^2$; 3) $(3x-2)^2-100=0$; 5) $(6+x)^2-12=0$;

2) $(2x+3)^2=17^2$; 4) $(3x-4)^2-64=0$; 6) $(3+x)^2-18=0$.

ПРАКТИКУМ

17.1 Запишіть рівняння у вигляді $ax^2+bx+c=0$. Випишіть значення коефіцієнтів a, b, c квадратного рівняння.

1) $5+2x^2-3x=0$; 3) $x^2+6x=x$; 5) $0{,}1x^2-30=10$;

2) $6x+3x^2-7=0$; 4) $x^2+5x=x$; 6) $0{,}5x^2-40=10$.

17.2 Складіть квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$, якщо:

1) $a=3$, $b=-0{,}6$, $c=-1$; 4) $a=-6$, $b=0$, $c=-0{,}7$;

2) $a=-7$, $b=0{,}4$, $c=-2$; 5) $a=-1$, $b=16$, $c=0$;

3) $a=5$, $b=0$, $c=-0{,}8$; 6) $a=1$, $b=-25$, $c=0$.

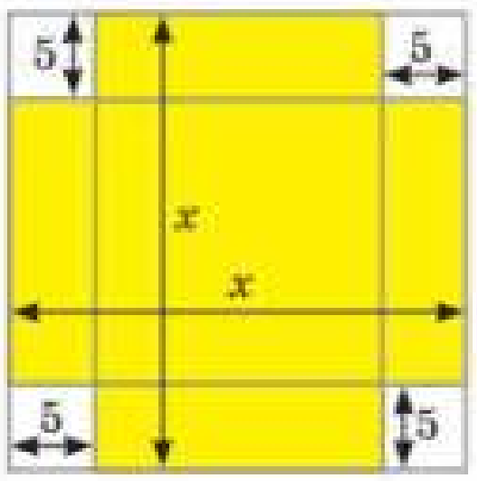
17.3 Зведіть рівняння до вигляду $ax^2+bx+c=0$, де $a>0$:

1) $x(x+2)-6=0$; 4) $3x(x-1)=7x-2$;

2) $x(x-3)+1=0$; 5) $x(x^2-8)=x^2(x-4)+9$;

3) $4x(x+1)=6x-5$; 6) $x(x^2-2)=x^2(x-3)+7$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



Вам треба зробити подарункову коробку заввишки 5 см з квадратного аркуша картону. Якою має бути сторона квадрата, щоб об'єм коробки дорівнював 1000 см^3? Використайте рисунок для складання рівняння.

Видавництво «Ранок»

17.4 Запишіть задане квадратне рівняння у вигляді зведеного квадратного рівняння:

1) $3x^2-12x+6=0$;
2) $3x^2-15x+9=0$;
3) $2x^2+7x-8=0$;
4) $2x^2+5x-6=0$;
5) $-0{,}1x^2+3x-1=0$;
6) $-0{,}2x^2+5x-4=0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Коренем (розв'язком) рівняння називають таке значення змінної, за якого це рівняння перетворюється на правильну числову рівність.

17.5 Доведіть, що число:

1) 0 є коренем рівняння $x^2+11x=0$;
2) 0 є коренем рівняння $x^2-15x=0$;
3) 3 не є коренем рівняння $2x^2-6=0$;
4) 4 не є коренем рівняння $2x^2-8=0$;
5) -1 є коренем рівняння $x^2-x-2=0$;
6) -2 є коренем рівняння $x^2-x-6=0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Добуток дорівнює нулю, якщо один з множників дорівнює нулю.

$x(ax+b)=0$;

$x=0$ або $ax+b=0$;

$x_1=0$ або $x_2=-\frac{b}{a}$

17.6 Розв'яжіть рівняння способом розкладання на множники:

1) $4x^2-6x=0$;
2) $5x^2-9x=0$;
3) $\frac{1}{2}x^2+8x=0$;
4) $\frac{1}{3}x^2+6x=0$;
5) $0{,}07x^2=2{,}8x$;
6) $0{,}09x^2=4{,}5x$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Корені рівняння $x^2=m$:

- якщо $m>0$, то $x_{1,2}=\pm\sqrt{m}$;
- якщо $m=0$, то $x=0$;
- якщо $m<0$, то коренів немає

17.7 Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2+9x+1=9x+2$;
2) $x^2+5x+3=5x+7$;
3) $2x^2-4=x-4$;
4) $5x^2-6=x-6$;
5) $x(3-x)+8=8(1-x)$;
6) $x(2-x)+6=6(1-x)$.

17.8 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2}{16}-\frac{9}{16}=0$;
2) $\frac{x^2}{25}-\frac{49}{25}=0$;
3) $\frac{5-3x^2}{3}=1\frac{2}{3}$;
4) $\frac{7-2x^2}{4}=1\frac{3}{4}$;
5) $\frac{108+3x^2}{100}=0$;
6) $\frac{20+5x^2}{121}=0$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $x^2+49=0$;
$x^2=-49$;
$x=\pm 7$.

2) $y^2-3y=0$;
$y^2=3y$;
$y=3$

17.9 Розв'яжіть рівняння:

1) $9x^2-3x+5=7x^2-4x+5$;
2) $6x^2+2x-8=4x^2+3x-8$;
3) $(x-4)x+4x=0$;
4) $8x+x(x-8)=0$;
5) $(x-5)(x+5)=11$;
6) $(x-6)(x+6)=13$.

17.10 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2+2x}{4}=\frac{x+18}{2}$;
2) $\frac{x^2+2x}{10}=\frac{x+50}{5}$;
3) $\frac{x^2-x}{6}=x$;
4) $\frac{x^2-x}{7}=x$;
5) $\frac{x^2+17}{3}=5$;
6) $\frac{x^2+13}{2}=6$.

Видавництво «Ранок»

17.11 Зведіть рівняння до вигляду $(x-n)^2=m$ і розв'яжіть його:

1) $16-(4-x)^2=0$;
2) $49-(7-x)^2=0$;
3) $(y+0{,}3)^2-0{,}09=0$;
4) $(y-0{,}5)^2+0{,}25=0$;
5) $2(2+x)^2-14=0$;
6) $3(x-1)^2-15=0$.

17.12 За якого значення x значення виразу:

1) $(x-3)(x+1)$ на 2 більше, ніж значення виразу $5(x-1)$;
2) $(x-5)(x+2)$ на 4 менше, ніж значення виразу $3(x-2)$?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

17.13 За яких значень n задане рівняння є неповним квадратним рівнянням? Запишіть одержане неповне рівняння.

1) $x^2+(n+1)x+4=0$;
2) $3x^2+5x+n-2=0$;
3) $7x^2-nx+n(n+1)=0$.

17.14 За якого значення m задане рівняння має два корені, один із яких дорівнює 0, а інший відмінний від нуля?

1) $x^2+2x-m=0$;
2) $4x^2-x-m+3=0$;
3) $6x^2-mx-m(m+2)=0$.

17.15 Застосуйте означення модуля і розв'яжіть рівняння 1–7.

Аналізуємо

1) $x^2-|x|-3x=0$

якщо $x\geqslant 0$, то
$x^2-x-3x=0$
$x(x-4)=0$
$x_1=0$ або $x_2=4$
Обидва корені задовольняють умову $x\geqslant 0$

якщо $x<0$, то
$x^2+x-3x=0$
$x(x-2)=0$
$x_1=0$ або $x_2=2$
$x_2=2$ — не задовольняє умову $x<0$

Відповідь: 0; 4.

Виконуємо

2) $x^2+2|x|=0$;
3) $x^2-5|x|=0$;
4) $2x^2+|x|-5x=0$;
5) $x^2+|x|+6x=0$;
6) $16-\dfrac{x^3}{|x|}=0$;
7) $x^2-\dfrac{9x}{|x|}=0$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

1. Визначте, скільки коренів мають рівняння:
   1) $x^2-25=0$;
   2) $x^2+16=0$;
   3) $x^2-x=0$;
   4) $100x^2=0$.
2. Складіть неповні квадратні рівняння, які мають:
   1) два корені;
   2) один корінь;
   3) не мають коренів.

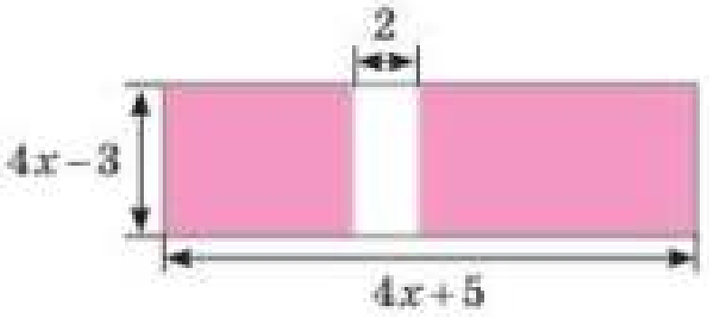
Обміняйтеся записами і розв'яжіть рівняння.
Перевірте результати одне одного.

ПРИГАДАЙТЕ!

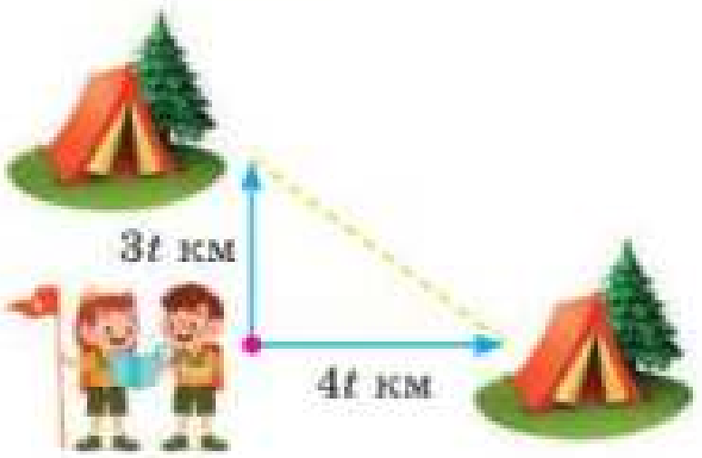
$$|x|=\begin{cases}x, & \text{якщо } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{якщо } x<0\end{cases}$$

MATH FOR LIFE

17.16 **Планування саду.** Вишневий сад прямокутної форми розділено доріжкою. Користуючись даними рисунка, знайдіть довжину цієї доріжки, якщо загальна площа саду (зафарбована частина схеми), дорівнює 391 кв. од.



Видавництво «Ранок»



17.17 **Навчання через дію.** Два загони пластунів вирушили для облаштування наметових таборів з одного пункту в напрямках, що утворюють прямий кут. Швидкість руху першого загону 3 км/год, другого — 4 км/год. Через який час відстань між загонами становитиме 6 км? Чи встигнуть загони за 2 год дістатися до запланованих місць облаштування таборів, якщо відстань між ними 8 км?

17.18 **Маркетинг.** Площа прямокутного ліфтборда (рекламного носія, розташованого в ліфті) дорівнює 2475 см^2, а його довжина більша за ширину на 10 см. Знайдіть розміри ліфтборда, позначивши його ширину за $(x-5)$ см. Визначте вартість рамки ліфтборда, закріпленої по його периметру, якщо ціна 1 м цієї рамки становить 100 г. о.

Завдання 17.19	→ Приклад 1
Завдання 17.20	→ Приклад 2
Завдання 17.21	→ Приклад 3
Завдання 17.22	→ Приклад 4
Завдання 17.23	→ Практикум, 17.1
Завдання 17.23–17.32	→ Практикум, 17.3–17.11
Завдання 17.33, 17.34	→ Інтелектуальний фітнес, 17.13, 17.14
Завдання 17.35	→ Math for life, 17.16

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

17.19 Складіть квадратне рівняння, якщо задані його коефіцієнт, другий коефіцієнт і вільний член. Запишіть складене рівняння у вигляді зведеного рівняння.

1) $a=5,\ b=1,\ c=0$;
2) $a=-1,\ b=0,\ c=6$;
3) $a=3,\ b=-4,\ c=5$;
4) $a=-5,\ b=6,\ c=-1$.

17.20 Розв'яжіть рівняння способом розкладання на множники:

1) $x^2-15x=0$; 2) $x^2=-16x$; 3) $-0{,}2x^2=-8x$.

17.21 Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2-98=0$; 2) $3x^2-21=0$; 3) $45+5x^2=0$.

17.22 Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x+1)^2=15^2$; 2) $(3x-2)^2-25=0$; 3) $(5+x)^2-20=0$.

17.23 Запишіть рівняння у вигляді $ax^2+bx+c=0$. Випишіть значення коефіцієнтів a, b, c квадратного рівняння.

1) $8+9x^2-2x=0$;
2) $2x+4x^2-5=0$;
3) $x^2+7x=x$;
4) $x^2+8x=x$;
5) $0{,}1x^2-25=5$;
6) $0{,}4x^2-32=3$.

17.24 Зведіть рівняння до вигляду $ax^2+bx+c=0$, де $a>0$:

1) $x(x+5)-2=0$;
2) $6x(x+1)=8x-3$;
3) $x(x^2-4)=x^2(x-1)+9$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Розв'яжіть задачу італійського математика Леонардо Пізанського (Фібоначчі) з «Книги абака».

Знайдіть число, $\frac{19}{20}$ якого дорівнюють квадрату самого числа.

Видавництво «Ранок»

17.25 Запишіть задане квадратне рівняння у вигляді зведеного квадратного рівняння:

1) $3x^2-18x+3=0$; 2) $2x^2+9x-4=0$; 3) $-0{,}1x^2+2x-3=0$.

17.26 Доведіть, що число:

1) 0 є коренем рівняння $x^2+9x=0$;

2) 5 не є коренем рівняння $2x^2-10=0$;

3) -1 є коренем рівняння $x^2-6x-7=0$.

17.27 Розв'яжіть рівняння способом розкладання на множники.

1) $4x^2-10x=0$; 2) $\frac{1}{3}x^2+7x=0$; 3) $0{,}06x^2=5{,}4x$.

17.28 Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2+6x-2=6x+7$; 3) $x(5-x)+7=7(1-x)$.

2) $4x^2-9=x-9$;

17.29 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2}{9}-\frac{25}{9}=0$; 2) $\frac{12-7x^2}{7}=1\frac{5}{7}$; 3) $\frac{24+6x^2}{144}=0$.

17.30 Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2-7x+4=x^2-8x+4$; 3) $(x-7)(x+7)=15$.

2) $(x-5)x+5x=0$;

17.31 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2+3x}{9}=\frac{x+12}{3}$; 2) $\frac{x^2-x}{5}=x$; 3) $\frac{x^2+15}{4}=3$.

17.32 Зведіть рівняння до вигляду $(x-n)^2=m$ і розв'яжіть його:

1) $81-(9-x)^2=0$; 2) $(y-0{,}7)^2+0{,}49=0$; 3) $4(x+3)^2-12=0$.

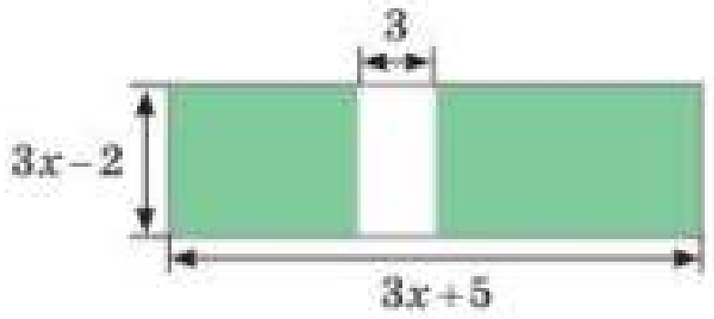
17.33 За яких значень n задане рівняння є неповним квадратним рівнянням? Запишіть одержане неповне рівняння.

1) $x^2+(n-6)x-2=0$; 2) $5x^2+nx+n(n-4)=0$.

17.34 За якого значення m задане рівняння має два корені, один із яких дорівнює 0, а інший відмінний від нуля?

1) $x^2+3x+m=0$; 2) $5x^2+mx-m(m-3)=0$.

17.35 Яблуневий сад прямокутної форми розділено доріжкою. Користуючись даними рисунка, знайдіть довжину цієї доріжки, якщо загальна площа саду (зафарбована частина схеми), дорівнює 896 кв. од.



 # BE SMART

В алгебраїчному трактаті аль-Хорезмі подана класифікація лінійних і квадратних рівнянь. Автор виокремив шість видів рівнянь, виразивши їх так:

1) квадрати дорівнюють кореням, тобто $ax^2=bx$;
2) квадрати дорівнюють числу, тобто $ax^2=c$;
3) корені дорівнюють числу, тобто $ax=c$;
4) квадрати й числа дорівнюють кореням, тобто $ax^2+c=bx$;
5) квадрати й корені дорівнюють числу, тобто $ax^2+bx=c$;
6) корені й числа дорівнюють квадратам, тобто $bx+c=ax^2$.

Дослідження аль-Хорезмі не втратили актуальності й сьогодні.

Видавництво «Ранок»

§18 ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

УЧОРА

Ви дізналися, які рівняння називають квадратними, навчилися розв'язувати неповні квадратні рівняння

СЬОГОДНІ

Ви познайомитеся з формулою для знаходження коренів квадратних рівнянь; дізнаєтеся, як визначати кількість коренів квадратного рівняння залежно від знака дискримінанта

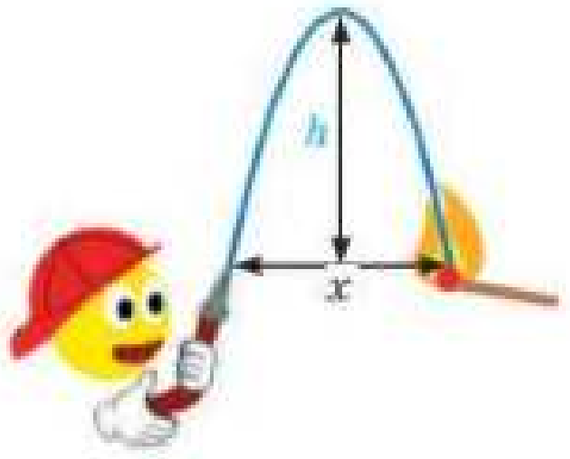
ЗАВЖДИ

Ви зможете розв'язувати безліч задач, зокрема, розраховувати довжину гальмівного шляху автомобіля та допомогати рятувальникам під час гасіння пожежі тощо

mk.com.ua/109757

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ СЛУЖБ ПОРЯТУНКУ 101 і 102

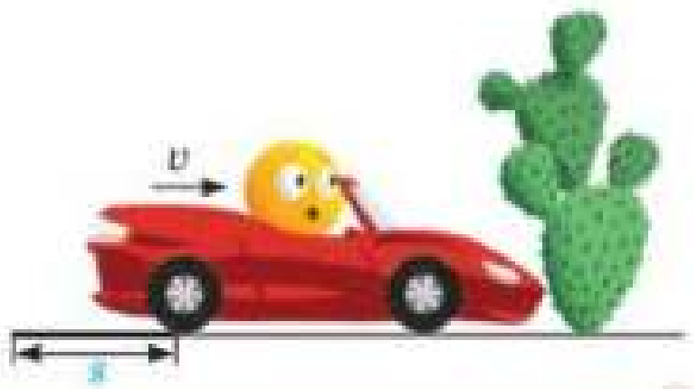


Гасіння пожежі

Відстань x у горизонтальному напрямку від пожежника, який тримає шланг, до місця гасіння вогню визначається з рівняння: $-0{,}15x^2 + x + h = 0$, де h — найбільша висота, на яку піднімається струмінь води (x і h вимірюються в однакових одиницях).

Знайдіть x, якщо h дорівнює 5 м.

Рівняння: $-0{,}15x^2 + x + 5 = 0$.



Гальмівний шлях автомобіля

Для обчислення гальмівного шляху автомобіля (за певних погодних умов) використовують формулу: $s = \dfrac{40v + v^2}{200}$, де s — довжина гальмівного шляху (у м), v — швидкість (у км/год), з якою автомобіль їхав до початку гальмування.

З якою швидкістю їхав автомобіль, якщо його гальмівний шлях дорівнює 70 м?

Рівняння: $\dfrac{40v + v^2}{200} = 70$.

Запишіть обидва рівняння у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, де $a > 0$.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- формула коренів квадратного рівняння (quadratic formula)
- дискримінант (discriminant)
- значення дискримінанту (value of the discriminant)
- кількість розв'язків (number of solutions)
- виділення повного квадрата (completing the square)

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Для розв'язування запропонованих задач необхідно вміти розв'язувати квадратні рівняння — знаходити їхні корені за спеціальною формулою. У цьому параграфі ви познайомитеся з двома формулами коренів квадратного рівняння.

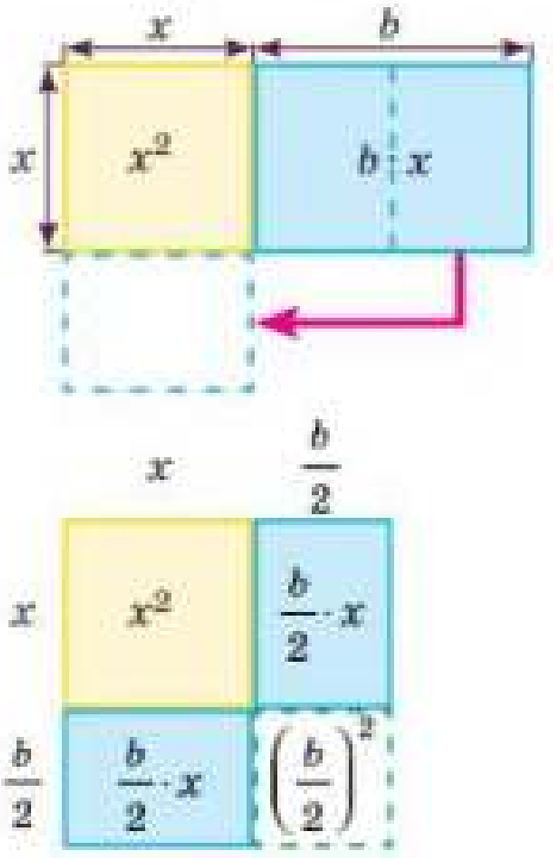
Видавництво «Ранок»

Розв'язування рівнянь методом виділення повного квадрата

Розглянемо на прикладі розв'язування квадратних рівнянь **методом виділення повного квадрата**. Цей метод застосовується для виведення формули коренів квадратного рівняння. У 9 класі ви будете використовувати цей метод для дослідження квадратичної функції та розв'язування квадратних нерівностей.

Геометрична ілюстрація

Виділення квадрата двочлена



$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$$

РОЗМИНКА 1

1 Піднесіть двочлен до квадрата:

1) $(x-3)^2$; 2) $(2y+1)^2$; 3) $\left(\frac{x}{3}-2\right)^2$; 4) $\left(5x-\frac{2}{5}\right)^2$.

2 Вставте пропущене число:

1) $12x=2\cdot\square\cdot x$; 2) $2y=2\cdot\square\cdot y$; 3) $x=2\cdot\square\cdot x$; 4) $3y=2\cdot\square\cdot y$.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть квадратні рівняння методом виділення повного квадрата:

1) $x^2-8x+7=0$; 2) $x^2+5x-14=0$.

Розв'язання

	1) $x^2-8x+7=0$	2) $x^2+5x-14=0$
Переносимо **вільний член** у праву частину рівняння	$x^2-8x=-7$	$x^2+5x=14$
Записуємо **другий коефіцієнт** у вигляді *подвоєного добутку*	$x^2-2\cdot 4x=-7$	$x^2+2\cdot\frac{5}{2}x=14$
Додаємо до обох частин рівняння квадрат другого множника	$x^2-2\cdot 4x+4^2=-7+4^2$	$x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=14+\left(\frac{5}{2}\right)^2$
Застосовуємо формулу квадрата двочлена	$(x-4)^2=9$	$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$
Розв'язуємо рівняння виду $x^2=m$. Якщо $m>0$, то рівняння має **два** корені $x_{1,2}=\pm\sqrt{m}$	$x-4=\pm\sqrt{9}=\pm 3$ 1) $x-4=-3$; $x_1=1$; 2) $x-4=3$; $x_2=7$	$x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{81}{4}}=\pm\frac{9}{2}$ 1) $x+\frac{5}{2}=-\frac{9}{2}$; $x_1=-7$; 2) $x+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$; $x_2=2$

Відповідь: 1) 1; 7; 2) −7; 2.

Видавництво «Ранок»

ПРИГАДАЙТЕ!

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

Із виведенням формули можна ознайомитися, звернувшися до інтерактивного електронного додатка.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

D — перша літера слова discriminant, що в перекладі означає «той, що розрізняє».

Читаємо правильно:

«дискримінáнт»

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Формули для розв'язування квадратних рівнянь за зразком Аль-Хорезмі в Європі були вперше викладені італійським математиком Леонардо Фібоначчі в «Книзі абака» (1202 р.).
- Загальне правило розв'язування квадратних рівнянь, зведених до вигляду $x^2+bx=c$, було сформульоване німецьким математиком Міхаелем Штіфелем лише в 1544 р.
- Лише в XVII ст., завдяки працям Жерара Дезарга, Рене Декарта, Ісаака Ньютона та інших учених, спосіб розв'язування квадратних рівнянь набув сучасного вигляду.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Розв'яжіть квадратні рівняння методом виділення повного квадрата:

1) $x^2+6x-7=0$; 3) $y^2+3y-4=0$; 5) $9x^2-6x-8=0$;

2) $x^2+12x+11=0$; 4) $y^2-3y-18=0$; 6) $25x^2+10x-3=0$.

Формула коренів квадратного рівняння

Розв'язання квадратного рівняння способом виділення квадрата двочлена містить громіздкі перетворення. Для спрощення розв'язання було створено спеціальну формулу. Її виведення базується на методі виділення квадрата двочлена.

Формула для знаходження коренів квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, де $a\neq 0$, має вигляд:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D=b^2-4ac.$$

- Вираз $D=b^2-4ac$ називають **дискримінантом** квадратного рівняння.
- **Кількість коренів** квадратного рівняння залежить від **знака дискримінанта**.

ДОСЛІДЖУЄМО

1) Проаналізуйте подані в таблиці висновки щодо кількості коренів квадратного рівняння залежно від знака дискримінанта.

2) Визначте, скільки коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант:

1) $D=9$; 2) $D=-16$; 3) $D=0$; 4) $D=1$; 5) $D=-1$.

Кількість коренів квадратного рівняння

$ax^2+bx+c=0$, **де** $a\neq 0$

$D=b^2-4ac$		
$D>0$	$D=0$	$D<0$
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$		
$\sqrt{D}$ — має зміст	$\sqrt{D}=0$ — має зміст	$\sqrt{D}$ — не має змісту
Рівняння має два корені	Рівняння має **один корінь**	Рівняння не має коренів
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$	$x=-\frac{b}{2a}$	$\varnothing$

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 2

Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння:

1) $x^2-9x+14=0$; **2)** $-2y^2+4y-2=0$; **3)** $3x^2+x+5=0$.

Розв'язання

1) $x^2-9x+14=0$	2) $-2y^2+4y-2=0$	3) $3x^2+x+5=0$
$a=1;\ b=-9;\ c=14$	$a=-2;\ b=4;\ c=-2$	$a=3;\ b=1;\ c=5$
$D=(-9)^2-4\cdot1\cdot14$	$D=4^2-4\cdot(-2)\cdot(-2)$	$D=1^2-4\cdot3\cdot5$
$D=81-56=25$	$D=16-16=0$	$D=1-60=-59$
$D>0$	$D=0$	$D<0$
два корені	**один** корінь	коренів немає

Відповідь: 1) 25, два корені; 2) 0, один корінь; 3) −59, немає коренів.

Стратегія

1) Записуємо коефіцієнти квадратного рівняння.

2) Підставляємо значення коефіцієнтів у формулу дискримінанта $D=b^2-4ac$.

3) Обчислюємо значення дискримінанта і порівнюємо його з нулем.

4) Робимо висновки. Якщо:
$D>0$ — два корені;
$D=0$ — **один** корінь;
$D<0$ — немає коренів.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння:

1) $2x^2+13x-7=0$; **2)** $3x^2-16x+5=0$; **3)** $-2x^2+12x-18=0$; **4)** $-3x^2-6x-3=0$; **5)** $5x^2-x+4=0$; **6)** $6x^2-2x+1=0$.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть квадратне рівняння за формулою коренів:

1) $-3x^2+11x-10=0$; **2)** $x^2-x=5$; **3)** $3x^2+2x+\frac{1}{3}=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

Розв'язання

1) $-3x^2+11x-10=0 \mid\cdot(-1)$

$3x^2-11x+10=0$

$a=3;\ b=-11;\ c=10$

$D=(-11)^2-4\cdot3\cdot10$

$D=121-120=1$

$D>0$ — два корені

$$x_{1,2}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{1}}{2\cdot3}=\frac{11\pm1}{6}$$

$$x_1=\frac{11+1}{6}=\frac{12}{6}=2$$

$$x_2=\frac{11-1}{6}=\frac{10}{6}=1\frac{2}{3}$$

2) $x^2-x=5$

$x^2-x-5=0$

$a=1;\ b=-1;\ c=-5$

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-5)$

$D=1+20=21$

$D>0$ — два корені

$$x_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{21}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$$

$$x_1=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

$$x_2=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$$

3) $3x^2+2x+\frac{1}{3}=0 \mid\cdot3$

$9x^2+6x+1=0$

$a=9;\ b=6;\ c=1$

$D=6^2-4\cdot9\cdot1$

$D=36-36=0$

$D=0$ — один корінь

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2\cdot9}$$

$$x=-\frac{6}{18}$$

$$x=-\frac{1}{3}$$

Відповідь: 1) $1\frac{2}{3}$; 2; 2) $\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$; 3) $-\frac{1}{3}$.

Видавництво «Ранок»

Стратегія

1) Зводимо рівняння до виду $ax^2+bx+c=0$.

2) Знаходимо дискримінант $D=b^2-4ac$. Визначаємо кількість коренів квадратного рівняння.

3) Знаходимо корені рівняння за формулою

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розв'яжіть квадратне рівняння:

1) $2x^2+3x=2$;
2) $3x^2+2x=1$;
3) $11x-3=-4x^2$;
4) $14x+5=3x^2$;
5) $13x+7=2x^2$;
6) $2x+9=x^2$;
7) $4x+7=x^2$;
8) $x^2=-6x+8$;
9) $x^2-10=2x$;
10) $x^2=2(1-x)$;
11) $2x^2+\frac{9}{2}=6x$;
12) $3x^2+\frac{25}{3}=10x$;
13) $2x(1-2x)=\frac{1}{4}$;
14) $x(5x+2)=-\frac{1}{5}$;
15) $-2x(1-3x)=-\frac{1}{6}$.

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть рівняння $2x^2+\sqrt{x^2}-6=0$.

Розв'язання

Застосовуємо тотожність $\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$	$2x^2+\sqrt{x^2}-6=0$, $2x^2+\lvert x\rvert-6=0$	
Розглядаємо два випадки: 1) якщо $x\geqslant 0$, то $\lvert x\rvert=x$; 2) якщо $x<0$, то $\lvert x\rvert=-x$	1) $\begin{cases}2x^2+x-6=0,\\ x\geqslant 0\end{cases}$	2) $\begin{cases}2x^2-x-6=0,\\ x<0\end{cases}$
Розв'язуємо окремо два рівняння за формулою $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$	$D=1^2-4\cdot 2\cdot(-6)$; $D=49$ $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-1\pm 7}{4}$ $x_1=1\frac{1}{2}$; $x_2=-2$	$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-6)$; $D=49$ $x_{3,4}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{1\pm 7}{4}$ $x_3=2$; $x_4=-1\frac{1}{2}$
Перевіряємо, які зі знайдених коренів не задовольняють умови: 1) $x\geqslant 0$; 2) $x<0$	$x_2=-2$ не задовольняє умову $x\geqslant 0$	$x_3=2$ не задовольняє умову $x<0$
Записуємо у відповідь корені, які задовольняють відповідні умови	$x_1=1\frac{1}{2}$	$x_4=-1\frac{1}{2}$

Відповідь: $-1\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{2}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-\lvert x\rvert-20=0$; 3) $2x^2-5\sqrt{x^2}-7=0$; 5) $3\left(x^2+2\sqrt{x^2}\right)=24$;
2) $x^2-\lvert x\rvert-12=0$; 4) $2x^2+\sqrt{x^2}-15=0$; 6) $3\left(x^2-2\sqrt{x^2}\right)=9$.

Видавництво «Ранок»

ПРАКТИКУМ

18.1 Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння:

1) $\frac{x^2}{3}=x+2$;
2) $\frac{x^2}{5}=x+1$;
3) $x^2+\frac{1}{9}=\frac{2x}{3}$;
4) $x^2+\frac{1}{25}=\frac{2x}{5}$;
5) $x(1-x)=\frac{5}{6}$;
6) $x(1-x)=\frac{3}{8}$.

18.2 Визначте кількість коренів квадратного рівняння:

1) $0{,}1x^2-x-3=0$;
2) $0{,}1x^2-x-4=0$;
3) $20x^2-0{,}1x+1=0$;
4) $10x^2-0{,}2x+1=0$;
5) $x^2+0{,}4x+0{,}04=0$;
6) $x^2+0{,}6x+0{,}09=0$.

18.3 Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^2-20x+25=0$;
2) $4x^2-28x+49=0$;
3) $8x^2-10x+7=0$;
4) $5x^2-9x+6=0$;
5) $-3x^2-5x-7=0$;
6) $-2x^2-7x-9=0$.

18.4 Чи існує значення змінної, за якого є правильною подана рівність? Якщо так, запишіть його у відповідь.

1) $(x-1)^2=5x+19$;
2) $(x-2)^2=3x+12$;
3) $(x-6)(x+6)=9x$;
4) $(x-7)(x+7)=9x+3$;
5) $(2x+1)^2=(x-1)(x+1)$;
6) $(3x+1)^2=(x-1)(x+1)$.

18.5 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2+x}{2}=\frac{x+1}{5}$;
2) $\frac{x^2-x}{3}=\frac{x-1}{4}$;
3) $\frac{x^2-1}{11}+\frac{x+1}{4}=\frac{5}{22}$;
4) $\frac{x^2+1}{9}+\frac{x-1}{5}=-\frac{2}{45}$.

18.6 За яких значень x значення:

1) многочлена $x^2-19x-19$ дорівнює 1;
2) многочлена $x^2-14x-15$ дорівнює 0;
3) многочленів x^2-x і $2x+54$ рівні між собою;
4) многочленів x^2-2x і $3x+24$ рівні між собою;
5) тричлена $2x^2+3x-6$ дорівнює значенню двочлена x^2-2x;
6) тричлена $2x^2+x-7$ дорівнює значенню двочлена x^2-5x?

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$$3x^2-5=x$$

$$D=(-5)^2-4\cdot3\cdot(-1)=$$
$$=25+12=37;$$

$$D=(-1)^2-4\cdot3\cdot(-5)=$$
$$=1-60=-59.$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Інший спосіб розв'язування рівняння

$$4x^2-20x+25=0.$$

У лівій частині рівняння — квадрат різниці, одержуємо рівняння:

$$(2x-5)^2=0$$
$$2x=5$$
$$x=2{,}5$$ —

один корінь

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

1) Не розв'язуючи останнє рівняння, знайдіть його корені:

$x^2-7x+12=0$ →
→ $x_1=3$, $x_2=4$

$12x^2-7x+1=0$ →
→ $x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{1}{3}$

$3x^2-5x-2=0$ →
→ $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=2$

$-2x^2-5x+3=0$ →
$x_1=?$, $x_2=?$

2) Зробіть припущення щодо співвідношення коренів рівнянь $ax^2+bx+c=0$ і $cx^2+bx+a=0$.

3) Розв'яжіть подані рівняння за формулою коренів:

$3x^2+5x+2=0$ і $2x^2+5x+3=0$.

Перевірте правильність своїх висновків.

Видавництво «Ранок»

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = x + 6$; 2) $x^2 = -x + 2$.

Розподіліть завдання:

одне рівняння розв'яжіть за формулою, інше — графічно так, щоб способи розв'язування в парі були різними.

Обміняйтеся записами. Порівняйте результати.

Яким способом вам було зручніше виконувати завдання?

СЛІД ЗНАТИ!

Формула коренів квадратного рівняння з парним другим коефіцієнтом

Якщо другий коефіцієнт квадратного рівняння — парне число, тобто $b = 2k$, і рівняння має вигляд

$$ax^2 + 2kx + c = 0,$$

то формулу коренів квадратного рівняння можна записати так:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

де $D_1 = k^2 - ac$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Перевірте, чи задовольняють знайдені корені рівняння умову $x \geqslant 0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0$$

має один корінь, якщо $a = 0$ або $D = b^2 - 4ac = 0$.

18.7 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = 0$; 3) $5x^2 + 1 = 2\sqrt{5}x$; 5) $\sqrt{2}\left(1 + x^2\right) = \sqrt{5}x$;

2) $x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0$; 4) $3x^2 + 1 = 2\sqrt{3}x$; 6) $\sqrt{3}\left(1 + x^2\right) = \sqrt{7}x$.

18.8 Розв'яжіть задачу за допомогою рівняння.

1) Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює 45 см^2, а одна сторона на 12 см більша за іншу.

2) Добуток двох послідовних натуральних чисел на 55 більший за їх суму. Визначте ці числа.

3) Сума двох послідовних натуральних чисел на 89 менша від їх добутку. Визначте ці числа.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

18.9 Розв'яжіть квадратні рівняння методом виділення повного квадрата:

1) $x^2 + 10x + 16 = 0$; 3) $y^2 + 5y + 6 = 0$; 5) $49x^2 - 14x - 24 = 0$;

2) $x^2 - 2x - 3 = 0$; 4) $y^2 - 11y + 24 = 0$; 6) $4x^2 + 4x - 63 = 0$.

18.10 Розв'яжіть рівняння 1–7 з парним другим коефіцієнтом.

Аналізуємо

1) $x^2 + 10x + 16 = 0$;

$a = 1$; $b = 10$; $c = 16$.

Знаходимо $k = \frac{b}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

$D_1 = k^2 - ac = 5^2 - 1 \cdot 16 = 25 - 16 = 9$.

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{1} = \frac{-5 \pm 3}{1};$$

$$x_1 = \frac{-5+3}{1} = -2; \; x_2 = \frac{-5-3}{1} = -8.$$

Відповідь: -8; -2.

Виконуємо

2) $4x^2 + 4x = 15$;

3) $4x^2 - 4x = 3$;

4) $1{,}5x^2 - 4x + 3 = 0{,}5$;

5) $2{,}5x^2 + 2x - 0{,}5 = 4$;

6) $\sqrt{3}x^2 + 6x - \sqrt{3} = 0$;

7) $\sqrt{5}x^2 + 10x + 4\sqrt{5} = 0$.

18.11 Застосуйте тотожність $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, де $x \geqslant 0$, і розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4\left(\sqrt{x}\right)^2 + 3 = 0$; 3) $2x^2 + 3\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = 0$.

2) $3x^2 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 - 8 = 0$;

18.12 Знайдіть значення m, за яких рівняння має один корінь:

1) $x^2 + mx + 9 = 0$; 2) $3x^2 - mx + 12 = 0$; 3) $5x^2 + mx - 2m = 0$.

Видавництво «Ранок»

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 11

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Укажіть старший коефіцієнт квадратного рівняння $-3x^2+5x+9=0$.

А	Б	В	Г
9	5	−3	3

2 Розв'яжіть рівняння $5x^2-5=0$.

А	Б	В	Г
1	±1	5	±5

3 Розв'яжіть рівняння $x^2-6x=0$.

А	Б	В	Г
−6	−6; 0	6	0; 6

4 Знайдіть корені рівняння $x^2-3x-4=0$.

А	Б	В	Г
−1; 3	−4; 1	−1; 4	−3; 1

5 Укажіть формулу, за якою обчислюється дискримінант D квадратного рівняння $2x^2+bx-5=0$.

А	Б	В	Г
$D=b^2+40$	$D=b^2-40$	$D=b^2+10$	$D=b^2-10$

6 Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їхніх коренів (А–Г).

1	$x^2+2x+1=0$	А	Жодного
		Б	Три
2	$2x+x^2=0$	В	Два
3	$x^2+x+2=0$	Г	Один

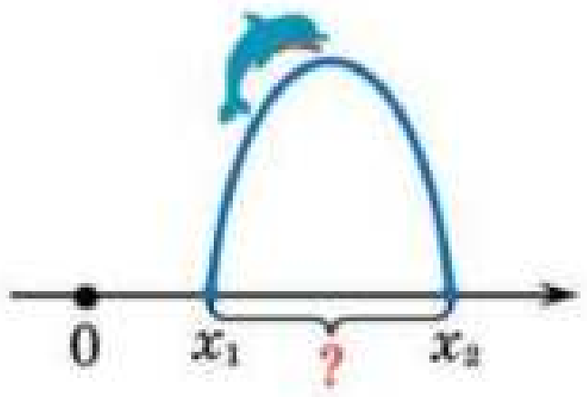
7 Траєкторія польоту каменю, випущеного з катапульти, має форму параболи. Координати місця запуску й падіння каменю x_1 та x_2 відповідно визначаються з рівняння $-x^2+7{,}5x-6{,}5=0$. Знайдіть x_1 і x_2. На якій відстані (у м) від місця запуску опинився камінь після падіння, якщо всі координати задано в метрах?

8 Розв'яжіть рівняння $(3x+1)^2=(x-2)(x+2)$.

MATH FOR LIFE

18.13 На рисунку зображено траєкторію польоту дельфіна, який виринає з води і знов занурюється у воду. Координати місця виринання й занурення x_1 та x_2 відповідно визначаються з рівняння $-0{,}5x^2+2{,}5x-2=0$.

1) Знайдіть x_1 та x_2.
2) Визначте відстань (у м) між місцем виринання дельфіна й місцем занурення, якщо всі координати задано в метрах.



18.14 **Гасіння пожежі.** Завершіть розв'язування Актуальної задачі: знайдіть x, якщо $h=5$ м, а відстань x визначається з рівняння $-0{,}15x^2+x+h=0$.

18.15 **Гальмівний шлях автомобіля.** З якою швидкістю їхав автомобіль, якщо його гальмівний шлях s дорівнює 48 м і визначається з рівняння $s=\dfrac{40v+v^2}{200}$?

Видавництво «Ранок»

Завдання 18.16	→ Приклад 1
Завдання 18.17	→ Приклад 2
Завдання 18.18	→ Приклад 3
Завдання 18.19	→ Приклад 4
Завдання 18.20–18.27	→ Практикум, 18.1–18.8
Завдання 18.28–18.30	→ Інтелектуальний фітнес, 18.9–18.11
Завдання 18.31, 18.32	→ Math for life, 18.13, 18.15
Завдання 18.33	→ Інтелектуальний фітнес, 18.12

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

За допомогою пакетів прикладних програм ви можете знайти корені будь-яких квадратних рівнянь. Використаємо для цього програму Microsoft Excel. Розв'яжіть рівняння

$x^2+5x-6=0$.

1) Позначте літерами A, B і C перші три стовпці — вони міститимуть коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$. Стовпці D, E, F позначте як D, X1 та X2 — вони міститимуть значення дискримінанта і розв'язки рівняння відповідно.

2) Заповніть клітинки другого рядка коефіцієнтами рівняння.

3) У клітинку D2 введіть формулу =POWER(B2,2)-4*A2*C2 та натисніть Enter.

4) У клітинку E2 введіть формулу =(-B2-SQRT(D2))/(2*A2).

5) У клітинку F2 введіть формулу =(-B2+SQRT(D2))/(2*A2).

Відповідь: $x_1=-6$, $x_2=1$.

Перевірте правильність розв'язання рівняння.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

18.16 Розв'яжіть квадратні рівняння методом виділення повного квадрата:

1) $x^2-4x-32=0$; 2) $y^2-7y+10=0$; 3) $4x^2+12x-7=0$.

18.17 Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння:

1) $3x^2-13x+4=0$; 2) $-2x^2+20x-50=0$; 3) $4x^2-x+3=0$.

18.18 Розв'яжіть квадратне рівняння:

1) $2x^2+5x=3$;
2) $3x^2+5x=2$;
3) $21x-5=4x^2$;
4) $20x+7=3x^2$;
5) $3-7x=-2x^2$;
6) $2x+7=x^2$;
7) $4x+3=x^2$;
8) $x^2=10-4x$;
9) $x^2-9=6x$;
10) $x^2=4(1-x)$;
11) $2x^2+\frac{25}{2}=10x$;
12) $3x^2+\frac{4}{3}=4x$;
13) $2x(1-4x)=\frac{1}{8}$;
14) $x(3x+2)=-\frac{1}{3}$;
15) $-x(2-7x)=-\frac{1}{7}$.

18.19 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-|x|-30=0$; 2) $2x^2+5\sqrt{x^2}=12$; 3) $3\left(x^2+3\sqrt{x^2}\right)=30$.

18.20 Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння:

1) $\frac{x^2}{4}=x+1$; 2) $x^2+\frac{1}{49}=\frac{2x}{7}$; 3) $x(1-x)=\frac{5}{8}$.

18.21 Визначте кількість коренів квадратного рівняння:

1) $0{,}1x^2-x=5$; 2) $10x^2=0{,}3x-1$; 3) $x^2+0{,}8x+0{,}16=0$.

18.22 Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^2-12x+9=0$; 2) $3x^2-10x+9=0$; 3) $-2x^2-3x-8=0$.

18.23 Чи існує значення змінної, за якого є правильною подана рівність? Якщо так, запишіть його у відповідь.

1) $(x-1)^2=x+19$;
2) $(x-5)(x+5)=8+8x$;
3) $(4x+1)^2=(x-1)(x+1)$.

18.24 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-x}{3}=\frac{x-1}{5}$; 2) $\frac{x^2+2}{7}+\frac{1-x}{2}=\frac{3}{7}$.

Видавництво «Ранок»

18.25 За яких значень x значення:

1) многочлена x^2-9x-5 дорівнює 5;

2) многочленів x^2-4x і $x+14$ дорівнюють одне одному;

3) тричлена $2x^2+x-8$ дорівнює значенню двочлена x^2-6x?

18.26 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-\sqrt{5}x-10=0$; 2) $2x^2+1=2\sqrt{2}x$; 3) $\sqrt{2}\left(1+x^2\right)=\sqrt{3}x$.

18.27 Розв'яжіть задачу за допомогою рівняння.

1) Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює 32 см^2, а одна сторона на 14 см більша за іншу.

2) Сума двох послідовних натуральних чисел на 71 менша від їх добутку. Визначте ці числа.

18.28 Розв'яжіть квадратні рівняння методом виділення повного квадрата:

1) $x^2-4x-12=0$; 2) $y^2+3y-10=0$; 3) $9x^2-12x-5=0$.

18.29 Розв'яжіть рівняння з парним другим коефіцієнтом:

1) $4x^2-8x=21$; 2) $0{,}6x^2-2x+2=0{,}6$; 3) $\sqrt{2}x^2+4x+\sqrt{2}=0$.

18.30 Застосуйте тотожність $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, де $x\geqslant 0$, і розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-3\left(\sqrt{x}\right)^2=-2$; 2) $2x^2+5\left(\sqrt{x}\right)^2=7$; 3) $x^2+6\left(\sqrt{x}\right)^2+5=0$.

18.31 **Футбол.** На рисунку зображено траєкторію польоту футбольного м'яча. Координати місця удару по м'ячу й місця падіння м'яча на землю x_1 та x_2 відповідно визначаються з рівняння $-0{,}01x^2+0{,}51x-0{,}5=0$.

1) Знайдіть x_1 та x_2.

2) На якій відстані (у м) від місця удару опиниться м'яч після падіння, якщо всі координати задано в метрах? Вважайте, що після приземлення м'яч більше не рухався.

18.32 **Гальмівний шлях автомобіля.** Завершіть розв'язування Актуальної задачі: з якою швидкістю їхав автомобіль, якщо його гальмівний шлях дорівнює 70 м і визначається з рівняння $s=\dfrac{40v+v^2}{200}$?

Бонусне завдання

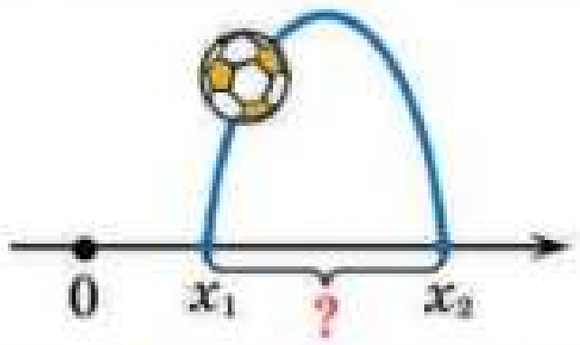
18.33 Знайдіть значення m, за яких рівняння має один корінь:

1) $x^2-mx+16=0$; 2) $2x^2+mx+32=0$; 3) $3x^2-mx-m=0$.

IQ

BE SMART

Валерій Васильович Лобановський (1939–2002) — видатний радянський та український футболіст і тренер. Багаторічний наставник футбольної команди «Динамо» (Київ), яка під його керівництвом двічі вигравала турнір Кубок володарів кубків. На тренуваннях відпрацьовував удари типу «сухий лист», використовуючи фізичний ефект Магнуса та власні математичні розрахунки.



ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Футбольний м'яч летить по параболічній траєкторії, форма якої залежить від того, з якою швидкістю і під яким кутом до горизонту вдарено по м'ячу. Саме у виборі цих параметрів і полягає мистецтво футболіста.

Видавництво «Ранок»

§19 ТЕОРЕМА ВІЄТА

УЧОРА

СЬОГОДНІ

ЗАВЖДИ

Ви навчилися розв'язувати квадратні рівняння за допомогою формули коренів рівняння

Ви дізнаєтеся про інший спосіб знаходження коренів квадратного рівняння; навчитеся усно підбирати корені, досліджуючи коефіцієнти квадратних рівнянь

Ви зможете усно розв'язувати квадратні рівняння, використовуючи цікаві властивості їхніх коефіцієнтів

mk.com.ua/109758

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

МАТЕМАТИЧНА МАГІЯ КОЕФІЦІЄНТІВ

Коефіцієнти квадратного рівняння мають декілька цікавих властивостей. Знаючи їх, ви завжди легко знайдете принаймні один корінь рівняння.

Властивість коефіцієнтів	Наприклад
1) Якщо в рівнянні $ax^2+bx+c=0$ виконується рівність $a+b+c=0$, то $x_1=1;\ x_2=\frac{c}{a}$.	$2025x^2-2026x+1=0$. $2025-2026+1=0$, тоді $x_1=1;\ x_2=\frac{1}{2025}$.
2) Якщо в рівнянні $ax^2+bx+c=0$ виконується рівність $a+c=b$, то $x_1=-1;\ x_2=-\frac{c}{a}$.	$2026x^2+2030x+4=0$. $2026+4=2030$, тоді $x_1=-1;\ x_2=-\frac{4}{2026}=-\frac{2}{1013}$.
3) Якщо в рівнянні $ax^2+bx+c=0$ коефіцієнт $b=a^2+1$, а коефіцієнт $c=a$, то $x_1=-a;\ x_2=-\frac{1}{a}$.	$5x^2+26x+5=0$. $26=5^2+1;\ 5=5$, тоді $x_1=-5;\ x_2=-\frac{1}{5}$.
4) Якщо в рівнянні $ax^2+bx+c=0$ коефіцієнт $-b=a^2+1$, а коефіцієнт $c=a$, то $x_1=a;\ x_2=\frac{1}{a}$.	$7x^2-50x+7=0$. $-(-50)=7^2+1;\ 7=7$, тоді $x_1=7;\ x_2=\frac{1}{7}$.

Як бачите, не завжди є потреба розв'язувати рівняння за формулою коренів квадратного рівняння.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Перевірити свої знання та кмітливість допоможе вам участь у Міжнародному математичному конкурсі «Кенгуру». Цей конкурс уперше був проведений в Австралії, пізніше він став міжнародним. У 1997 р. до участі в ньому приєдналась Україна.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- сума коренів квадратного рівняння (sum of the roots of the equation)
- добуток коренів квадратного рівняння (product of the roots of the equation)
- теорема Вієта (Vieta's theorem)

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У цьому параграфі ви дізнаєтеся про співвідношення між коренями і коефіцієнтами квадратного рівняння, що названі на честь відомого французького математика Франсуа Вієта.

Теорема Вієта

ДОСЛІДЖУЄМО

Проаналізуйте подані зведені квадратні рівняння. Спробуйте знайти зв'язок між сумою їх коренів, добутком коренів і коефіцієнтами рівняння.

- Якому числу дорівнює сума коренів квадратного рівняння?
- Якому числу дорівнює добуток коренів?

Якщо ви знайшли правильну відповідь, то ви вже знаєте теорему Вієта.

$x^2+px+q=0$	p	q	x_1	x_2	$x_1+x_2=?$	$x_1\cdot x_2=?$
$x^2+5x+6=0$	5	6	-2	-3	$-2+(-3)=-5$	$(-2)\cdot(-3)=6$
$x^2-6x+8=0$	-6	8	2	4	$2+4=6$	$2\cdot4=8$
$x^2+8x-9=0$	8	-9	-9	1	$-9+1=-8$	$(-9)\cdot1=-9$
$x^2-x-12=0$	-1	-12	-3	4	$-3+4=1$	$(-3)\cdot4=-12$

Теорема Вієта для зведеного квадратного рівняння

Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює **другому коефіцієнту**, взятому *з протилежним знаком*, а **добуток коренів** дорівнює **вільному члену**.

Якщо x_1 і x_2 — корені рівняння

$$x^2+px+q=0,$$

то справедливі формули:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$$

Наприклад:

$x^2+14x+15=0$, $p=14$, $q=15$.

Якщо x_1 і x_2 — корені рівняння, то

$$\begin{cases} x_1+x_2=-14, \\ x_1\cdot x_2=15. \end{cases}$$

$x^2-6x-16=0$, $p=-6$, $q=-16$.

Якщо x_1 і x_2 — корені рівняння, то

$$\begin{cases} x_1+x_2=6, \\ x_1\cdot x_2=-16. \end{cases}$$

З доведенням теореми Вієта можна ознайомитися, звернувшись до інтерактивного електронного додатка.

СЛІД ЗНАТИ!

- Обов'язковою умовою застосування теореми Вієта є те, що рівняння має корені, тобто $D\geqslant 0$.
- Формули, що відображують зв'язок між коренями і коефіцієнтами квадратного рівняння, називають формулами Вієта:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$$

Застосування теореми Вієта

За допомогою теореми Вієта можна:

- виразити суму і добуток коренів квадратного рівняння через коефіцієнти рівняння, не розв'язуючи його;
- знайти другий корінь рівняння, якщо відомий перший корінь;
- за коефіцієнтами квадратного рівняння визначити знаки коренів рівняння.

Видавництво «Ранок»

Спираючись на теорему Вієта, можна вивести відповідні формули для будь-якого квадратного рівняння.

Квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ можна перетворити на зведене, поділивши обидві його частини на $a\neq 0$.

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ — зведене квадратне рівняння.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Теорема Вієта справедлива і для тих рівнянь, які мають **два однакові** корені (так звані кратні корені).

Наприклад:

$x^2+8x+16=0$

$(x+4)^2=0$

$(x+4)(x+4)=0$

$x_1=x_2=-4$

$\begin{cases}x_1+x_2=-8,\\ x_1\cdot x_2=16\end{cases}$

Теорема Вієта для повного квадратного рівняння

Якщо x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2+bx+c=0$, то справедливі формули:

$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-b}{a},\\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.\end{cases}$

Наприклад:

$5x^2+12x+7=0$, $a=5$, $b=12$, $c=7$.

$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{12}{5}=-2\frac{2}{5},\\ x_1\cdot x_2=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}.\end{cases}$

$2x^2-9x-10=0$, $a=2$, $b=-9$, $c=-10$.

$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2},\\ x_1\cdot x_2=\frac{10}{2}=5.\end{cases}$

Якщо x_1 і x_2 — корені рівняння, то

Наприклад

1) $x^2+6x-7=0$,

$\begin{cases}x_1+x_2=-6,\\ x_1\cdot x_2=-7;\end{cases}$

2) $x^2+3x+2=0$, $x_1=-1$,

$x_1+x_2=-3$,

$-1+x_2=-3$,

$x_2=-2$.

Перевіряємо другу умову:

$x_1\cdot x_2=2$

$(-1)\cdot(-2)=2$

РОЗМИНКА 1

1 Усі подані рівняння мають корені. Скористайтеся теоремою Вієта і запишіть суму та добуток коренів рівняння:

1) $x^2+6x-7=0$; 3) $x^2-9x+14=0$; 5) $6x^2-7x+2=0$;

2) $x^2+11x+18=0$; 4) $3x^2-x-1=0$; 6) $2x^2+9x+8=0$.

2 Знайдіть другий корінь заданого рівняння.

1) $x^2+3x-4=0$, якщо $x_1=1$; 2) $x^2-5x-6=0$, якщо $x_1=-1$.

ПРИКЛАД 1

Дано один із коренів зведеного квадратного рівняння. Знайдіть другий корінь x_2:

1) і коефіцієнт q рівняння $x^2-10x+q=0$, якщо $x_1=2$;

2) і коефіцієнт p рівняння $x^2+px-15=0$, якщо $x_1=-5$.

Розв'язання

Рівняння	1) $x^2-10x+q=0$, $x_1=2$	2) $x^2+px-15=0$, $x_1=-5$
Записуємо теорему Вієта	$x_1+x_2=10$ і $x_1\cdot x_2=q$	$x_1+x_2=-p$ і $x_1\cdot x_2=-15$
Підставляємо значення x_1 у перше / друге рівняння системи. Знаходимо x_2	$2+x_2=10$ $x_2=8$	$(-5)\cdot x_2=-15$ $x_2=3$
Підставляємо x_1 і x_2 у друге / перше рівняння. Знаходимо q/p	$x_1\cdot x_2=2\cdot 8=16=q$ $q=16$	$x_1+x_2=-5+3=-2=-p$ $p=2$

Відповідь: 1) $x_2=8$, $q=16$; 2) $x_2=3$, $p=2$.

Видавництво «Ранок»

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Знайдіть другий корінь і невідомий коефіцієнт зведеного квадратного рівняння, якщо відомий перший корінь рівняння.

1) $x^2-7x+q=0$, $x_1=2$;
2) $x^2-9x+q=0$, $x_1=7$;
3) $x^2+2x+q=0$, $x_1=-5$;
4) $x^2+4x+q=0$, $x_1=-6$;
5) $x^2+px-18=0$, $x_1=9$;
6) $x^2+px-21=0$, $x_1=7$;
7) $x^2+px+9=0$, $x_1=-9$;
8) $x^2+px+10=0$, $x_1=-2$.

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо x_1 і x_2 — корені рівняння

$$x^2+px+q=0,$$

то справедливі формули:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$$

Теорема, обернена до теореми Вієта

Існує також твердження, обернене до теореми Вієта.

Якщо числа m і n такі, що

$$\begin{cases} m+n=-p, \\ m\cdot n=q, \end{cases}$$

то вони є коренями квадратного рівняння

$$x^2+px+q=0$$

Наприклад.

Дано $m=-10$, $n=7$, тоді

$$\begin{cases} -10+7=-3, \\ (-10)\cdot 7=-70. \end{cases}$$

Якщо прийняти, що $p=3$, $q=-70$, то m і n — корені рівняння

$$x^2+3x-70=0$$

З доведенням теореми, оберненої до теореми Вієта, можна ознайомитися, звернувшися до інтерактивного електронного додатка.

Застосування теореми, оберненої до теореми Вієта

За допомогою оберненої теореми можна:

- скласти зведене квадратне рівняння, якщо відомі його корені;
- перевірити правильність розв'язання квадратного рівняння;
- усно підібрати корені квадратного рівняння, не використовуючи формулу коренів.

РОЗМИНКА 2

1 Запишіть коефіцієнти p і q квадратного рівняння $x^2+px+q=0$, якщо сума і добуток його коренів відповідно дорівнюють:

1) $x_1+x_2=-7$ і $x_1\cdot x_2=10$;
2) $x_1+x_2=-9$ і $x_1\cdot x_2=-10$;
3) $x_1+x_2=9$ і $x_1\cdot x_2=18$;
4) $x_1+x_2=3$ і $x_1\cdot x_2=-28$.

Якщо $x_1+x_2=3$ і $x_1\cdot x_2=-28$, то $p=-3$, $q=-28$

2 Не розв'язуючи рівняння, перевірте, чи є наведені числа коренями квадратного рівняння.

1) $x_1=-2$, $x_2=-4$, $x^2+6x+8=0$;
2) $x_1=1$, $x_2=6$, $x^2-5x+6=0$;
3) $x_1=-2$, $x_2=8$, $x^2-6x-16=0$;
4) $x_1=-4$, $x_2=-5$, $x^2+9x-10=0$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Якщо для x_1 і x_2 виконуються умови

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q, \end{cases}$$

то x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння

$$x^2+px+q=0$$

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 2

Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, коренями якого є числа:

1) -7 і 3; 2) $-1\frac{3}{4}$ і 4; 3) $-\sqrt{5}$ і $\sqrt{5}$.

Розв'язання

Шукане зведене квадратне рівняння має вигляд

$$x^2+px+q=0.$$

	1) $x_1=-7$, $x_2=3$	2) $x_1=-1\frac{3}{4}$, $x_2=4$	3) $x_1=-\sqrt{5}$, $x_2=\sqrt{5}$
Знаходимо p: $-p=x_1+x_2$; $p=-(x_1+x_2)$	$-p=-7+3=-4$; $p=4$	$-p=\left(-1\frac{3}{4}\right)+4=2\frac{1}{4}$; $p=-2\frac{1}{4}$	$-p=\left(-\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}=0$; $p=0$
Знаходимо q: $q=x_1\cdot x_2$	$q=(-7)\cdot 3=-21$	$q=\left(-1\frac{3}{4}\right)\cdot 4=-\frac{7}{4}\cdot 4=-7$	$q=\left(-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}=-5$
Підставляємо значення p і q в рівняння $x^2+px+q=0$	$x^2+4x-21=0$	$x^2-2\frac{1}{4}x-7=0 \mid \cdot 4$; $4x^2-9x-28=0$	$x^2+0x-5=0$; $x^2-5=0$

Відповідь: 1) $x^2+4x-21=0$; 2) $4x^2-9x-28=0$; 3) $x^2-5=0$.

СЛІД ЗНАТИ!

Щоб у другому випадку отримати рівняння із цілими коефіцієнтами, множимо обидві частини рівняння на 4:

$$x^2-2\frac{1}{4}x-7=0 \mid \cdot 4$$

$$4\cdot x^2-\frac{9}{4}\cdot 4x-7\cdot 4=0$$

$$4x^2-9x-28=0$$

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, коренями якого є числа:

1) -8 і 5; 3) -4 і -7; 5) $-1\frac{2}{5}$ і 3; 7) $-\sqrt{7}$ і $\sqrt{7}$;

2) -6 і 9; 4) -8 і -2; 6) -4 і $1\frac{5}{6}$; 8) $-\sqrt{11}$ і $\sqrt{11}$.

Знаходження коренів квадратного рівняння

Для знаходження знаків коренів зведеного квадратного рівняння $x^2+px+q=0$ (якщо $D\geqslant 0$) спочатку визначають знак добутку коренів, а потім аналізують знак суми коренів.

Розглянемо два випадки.

1) Якщо добуток коренів рівняння є додатним числом ($q>0$), то корені мають **однакові знаки.**

2) Якщо добуток коренів рівняння є від'ємним числом ($q<0$), то корені мають **різні знаки.**

Видавництво «Ранок»

Знаки коренів рівняння легко визначити, скориставшись такою таблицею.

Добуток коренів $x_1 \cdot x_2$	
додатне число $(q > 0)$	від'ємне число $(q < 0)$
$+$	$-$
корені мають **однакові знаки**	корені мають **різні знаки**

Сума коренів $x_1 + x_2$			
додатне число $(-p > 0)$	від'ємне число $(-p < 0)$	додатне число $(-p > 0)$	від'ємне число $(-p < 0)$
$+$	$-$	$+$	$-$
Обидва корені — додатні числа	Обидва корені — від'ємні числа	Більший за модулем корінь — додатне число	Більший за модулем корінь — від'ємне число
Наприклад:			
$x^2 - 7x + 12 = 0;$ $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 12 > 0, \\ x_1 + x_2 = 7 > 0; \end{cases}$ обидва корені — додатні числа	$x^2 + 7x + 12 = 0;$ $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 12 > 0, \\ x_1 + x_2 = -7 < 0; \end{cases}$ обидва корені — від'ємні числа	$x^2 - 3x - 28 = 0;$ $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 28 < 0, \\ x_1 + x_2 = 3 > 0; \end{cases}$ $x_1 = -4,\ x_2 = 7$ корені мають різні знаки, $\lvert 7 \rvert > \lvert -4 \rvert$	$x^2 + 3x - 28 = 0;$ $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -28 < 0, \\ x_1 + x_2 = -3 < 0; \end{cases}$ $x_1 = -7,\ x_2 = 4$ корені мають різні знаки, $\lvert -7 \rvert > \lvert 4 \rvert$

РОЗМИНКА 3

1 Для всіх наведених рівнянь існують корені. Поясніть, чому корені кожного рівняння мають однакові знаки і визначте ці знаки.

1) $x^2 - 8x + 9 = 0$;
2) $x^2 + 8x + 9 = 0$;
3) $x^2 - 3x + 2 = 0$;
4) $x^2 + 3x + 2 = 0$;
5) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
6) $x^2 + 7x + 12 = 0$.

Якщо $x_1 \cdot x_2 > 0$
- і $x_1 + x_2 > 0$, то обидва корені додатні;
- і $x_1 + x_2 < 0$, то обидва корені від'ємні

2 Визначте знак другого кореня рівняння, якщо відомий знак його першого кореня.

Рівняння	Знак x_1	Знак x_2
$x^2 - 10x + 7 = 0$	$+$	
$x^2 - \sqrt{13}x + 1 = 0$	$+$	

Рівняння	Знак x_1	Знак x_2
$x^2 + 10x + 7 = 0$	$-$	
$x^2 + \sqrt{13}x + 1 = 0$	$-$	

3 Запишіть число у вигляді всіх можливих добутків двох цілих множників. Знайдіть суми відповідних множників.

1) 2; 2) 7; 3) 11; 4) 10; 5) 16; 6) 20.

$15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5 = (-1) \cdot (-15) = (-3) \cdot (-5)$

Видавництво «Ранок»

Стратегія

1) Визначаємо, чи має рівняння корені.

2) Визначаємо знак **добутку** коренів $x_1 \cdot x_2 = q$.

3) Робимо висновок: якщо $x_1 \cdot x_2 > 0$, то корені x_1 і x_2 мають **однакові знаки**.

4) Визначаємо знак **суми** коренів $x_1 + x_2 = -p$.

5) Записуємо множники вільного члена.

6) Знаходимо суми множників.

7) Добираємо серед множників числа, які задовольняють умову $x_1 + x_2 = -p$.

8) Виконуємо перевірку:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

$-21 = 1 \cdot (-21) = (-1) \cdot 21 = (-3) \cdot 7 = 3 \cdot (-7)$

ПРИКЛАД 3

Доберіть корені зведеного квадратного рівняння, якщо його вільний член є *додатним* числом.

1) $x^2 + 6x + 8 = 0$; 2) $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Розв'язання

Перш ніж знаходити корені рівняння, обов'язково треба переконатися, що ці корені існують, тобто що $D \geqslant 0$.

1) $x^2 + 6x + 8 = 0$	2) $x^2 - 5x + 6 = 0$
$D = 6^2 - 4 \cdot 8 = 4 > 0$	$D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0$
$q = 8$; $x_1 \cdot x_2 = 8$	$q = 6$; $x_1 \cdot x_2 = 6$
Якщо $x_1 \cdot x_2 > 0$, корені мають **однакові знаки**	
$p = 6$, $-p = -6$ $x_1 + x_2 = -6 < 0$	$p = -5$, $-p = 5$ $x_1 + x_2 = 5 > 0$
Якщо $x_1 + x_2 < 0$, обидва корені — від'ємні	Якщо $x_1 + x_2 > 0$, обидва корені — додатні

8	−1; −8	−2; −4
Сума	−9	−6

6	1; 6	2; 3
Сума	7	5

$x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot (-4) = 8$, $x_1 + x_2 = (-2) + (-4) = -6$	$x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6$, $x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$

Відповідь: 1) −4; −2; 2) 2; 3.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Доберіть корені зведеного квадратного рівняння, якщо його вільний член є *додатним* числом.

1) $x^2 + 5x + 4 = 0$; 3) $x^2 - 8x + 15 = 0$; 5) $x^2 + 15x + 26 = 0$;
2) $x^2 + 9x + 14 = 0$; 4) $x^2 - 10x + 9 = 0$; 6) $x^2 + 15x + 14 = 0$.

РОЗМИНКА 4

1 Для всіх наведених рівнянь існують корені. Визначте їхні знаки. З'ясуйте, який із коренів є більшим за модулем — додатний чи від'ємний.

1) $x^2 - x - 6 = 0$; 3) $x^2 - 15x - 16 = 0$; 5) $x^2 + 4x - 21 = 0$;
2) $x^2 - 4x - 21 = 0$; 4) $x^2 + x - 6 = 0$; 6) $x^2 + 15x - 16 = 0$.

2 Запишіть число у вигляді всіх можливих добутків двох цілих множників.

1) −5; 2) −13; 3) −17; 4) −9; 5) −22; 6) −24.

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 4

Знайдіть корені зведеного квадратного рівняння, якщо його вільний член є *від'ємним* числом:

1) $x^2-8x-9=0$; 2) $x^2+x-6=0$.

Розв'язання

Перш ніж знаходити корені рівняння, обов'язково треба переконатися, що ці корені існують, тобто що $D\geqslant 0$.

1) $x^2-8x-9=0$	2) $x^2+x-6=0$
$D=(-8)^2-4\cdot(-9)=100>0$	$D=1^2-4\cdot(-6)=25>0$
$q=-9$ $x_1\cdot x_2=-9$	$q=-6$ $x_1\cdot x_2=-6$
Якщо $x_1\cdot x_2<0$, то корені x_1 і x_2 мають **різні знаки**	
$p=-8$, $-p=8$ $x_1+x_2=8>0$	$p=1$, $-p=-1$ $x_1+x_2=-1<0$
Якщо $x_1+x_2>0$, то корінь, що має більший модуль, — додатне число	Якщо $x_1+x_2<0$, то корінь, що має більший модуль, — від'ємне число

−9	−1; 9	1; −9	−3; 3
Сума	8	−8	0

−6	−1; 6	1; −6	−2; 3	2; −3
Сума	5	−5	1	−1

$x_1\cdot x_2=(-1)\cdot 9=-9$ $x_1+x_2=(-1)+9=8$	$x_1\cdot x_2=2\cdot(-3)=-6$ $x_1+x_2=2+(-3)=-1$

Стратегія

1) Визначаємо, чи має рівняння корені.

2) Визначаємо знак **добутку** коренів $x_1\cdot x_2=q$.

3) Робимо висновок: якщо $x_1\cdot x_2<0$, то корені x_1 і x_2 мають **різні знаки**.

4) Визначаємо знак **суми** коренів $x_1+x_2=-p$

5) Записуємо множники вільного члена q.

6) Знаходимо суми множників.

7) Добираємо серед множників числа, що задовольняють умову $x_1+x_2=-p$.

8) Якщо $x_1+x_2>0$, то корінь, що має більший модуль, є додатним числом.
Якщо $x_1+x_2<0$, то корінь, що має більший модуль, є від'ємним числом.

9) Виконуємо перевірку:
$$\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\ x_1\cdot x_2=q.\end{cases}$$

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Знайдіть корені зведеного квадратного рівняння, якщо його вільний член є *від'ємним* числом:

1) $x^2+14x-15=0$; 3) $x^2-x-12=0$; 5) $x^2-19x-20=0$;
2) $x^2+16x-17=0$; 4) $x^2-x-30=0$; 6) $x^2-29x-30=0$.

ПРАКТИКУМ

19.1 Визначте, чи має задане рівняння корені. Якщо має, знайдіть їхню суму та добуток.

1) $x^2-3x-20=0$; 5) $x^2-2x+6=0$; 9) $4x^2-6x+1=0$;
2) $x^2+4x-19=0$; 6) $x^2+3x+5=0$; 10) $5x^2+10x+2=0$;
3) $x^2+9x+7=0$; 7) $3x^2+2x-8=0$; 11) $6x^2+5x+2=0$;
4) $x^2-8x+4=0$; 8) $2x^2-3x-5=0$; 12) $7x^2-2x+2=0$.

Видавництво «Ранок»

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $x^2-13x+36=0$;
$\begin{cases} x_1+x_2=-13, \\ x_1\cdot x_2=36; \end{cases}$

2) $x^2+2x=15$;
$\begin{cases} x_1+x_2=-2, \\ x_1\cdot x_2=15; \end{cases}$

3) $x^2-5x+14=0$;
$\begin{cases} x_1+x_2=-5, \\ x_1\cdot x_2=14. \end{cases}$

19.2 Не розв'язуючи рівняння, визначте його другий корінь, якщо відомий перший.

1) $x^2-11x+24=0$, $x_1=8$;
2) $x^2-13x+36=0$, $x_1=4$;
3) $x^2-8x-48=0$, $x_1=-4$;
4) $x^2-8x-65=0$, $x_1=-5$.

19.3 Визначте другий корінь та невідомий коефіцієнт (p або q) рівняння, якщо відомий його перший корінь.

1) $x^2+px-24=0$, $x_1=-4$;
2) $x^2+px-21=0$, $x_1=3$;
3) $x^2-20x+q=0$, $x_1=6$;
4) $x^2+20x+q=0$, $x_1=-13$.

19.4 Не розв'язуючи квадратне рівняння, перевірте, чи є задані числа його коренями.

1) $x^2-8x+12=0$, числа 2 і 6;
2) $x^2+2x-15=0$, числа 3 і -5;
3) $x^2-12x+11=0$, числа -1 і -11;
4) $x^2+15x-36=0$, числа -3 і -12.

19.5 Знайдіть корені квадратного рівняння за формулою коренів та виконайте перевірку за формулами Вієта.

1) $3x^2+18x-48=0$; 2) $2x^2-11x-6=0$; 3) $5x^2+7x+2=0$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Розгляньте **другий спосіб** складання рівняння за відомими коренями.

Якщо -5 і 7 — корені рівняння, то можна:

- скласти добуток $(x+5)(x-7)=0$;
- розкрити дужки й отримати рівняння: $x^2-2x-35=0$.

Складіть двома способами квадратне рівняння, коренями якого є числа:

1) 2 і 5; 2) 4 і -6; 3) -1 і -10.

Обміняйтеся записами і перевірте результати одне одного.

Який зі способів складання рівняння здається вам зручнішим?

19.6 Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, коренями якого є числа:

1) 3,5 і 2; 2) $-2{,}5$ і 4; 3) $5-\sqrt{3}$ і $5+\sqrt{3}$; 4) $2-\sqrt{7}$ і $2+\sqrt{7}$.

19.7 Не розв'язуючи рівняння, визначте знак його другого кореня, якщо відомий знак першого.

Рівняння	Знак x_1	Знак x_2
1) $x^2-9x+11=0$	+	
2) $x^2-3x-7=0$	+	
3) $x^2-7x+8=0$	+	

Рівняння	Знак x_1	Знак x_2
4) $x^2+5x+1=0$	−	
5) $x^2+7x-9=0$	−	
6) $x^2+9x+2=0$	−	

19.8 Визначте корені рівняння за теоремою, оберненою до теореми Вієта.

1) $x^2-11x+10=0$; 5) $x^2+16x+48=0$; 9) $x^2-2x-48=0$;
2) $x^2-13x+12=0$; 6) $x^2+20x+75=0$; 10) $x^2+5x-36=0$;
3) $x^2-9x+14=0$; 7) $x^2-11x-12=0$; 11) $x^2+6x-91=0$;
4) $x^2-8x+15=0$; 8) $x^2+13x-14=0$; 12) $x^2-9x-70=0$.

Видавництво «Ранок»

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

19.9 Відомо, що x_1 і x_2 — корені квадратних рівнянь 1–6. Не обчислюючи значення коренів, знайдіть значення виразу:

а) $x_1+x_2+3x_1x_2$; б) $x_1^2+x_2^2$; в) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; г) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$.

Аналізуємо

1) $x^2-8x+15=0$; $x_1+x_2=8$; $x_1\cdot x_2=15$.

а) $x_1+x_2+3x_1x_2=8+3\cdot 15=53$;

б) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=8^2-2\cdot 15=34$;

в) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{8}{15}$;

г) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{34}{15^2}=\frac{34}{225}$.

Виконуємо

2) $x^2-9x+3=0$;

3) $x^2-3x-8=0$;

4) $x^2+5x-12=0$;

5) $3x^2+12x-4=0$;

6) $2x^2-6x+3=0$.

СЛІД ЗНАТИ!

$a^2+b^2=\underbrace{a^2+2ab+b^2}-2ab=$

$=(a+b)^2-2ab$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

1) Знаходимо всі пари чисел, добуток яких дорівнює вільному члену.
2) Знаходимо їхню суму і визначаємо коефіцієнт $p=-(x_1+x_2)$.

19.10 Знайдіть усі цілі значення коефіцієнта p, за яких рівняння має цілі корені:

1) $x^2+px+7=0$; 3) $x^2+px+8=0$; 5) $x^2+px+12=0$;

2) $x^2+px-7=0$; 4) $x^2+px-8=0$; 6) $x^2+px-12=0$.

19.11 Знайдіть корені квадратного рівняння та значення m, якщо один з коренів квадратного рівняння:

1) $x^2-4x+2m=0$ на 2 більший за інший;

2) $x^2+5x-10m=0$ на 3 менший від іншого.

1) Знаходимо x_1 і x_2 із системи рівнянь

$\begin{cases}x_2-x_1=2,\\x_2+x_1=4.\end{cases}$

2) Підставляємо значення x_1 і x_2 в рівняння $x_1\cdot x_2=-10m$.

MATH FOR LIFE

19.12 На співбесіді при прийомі на роботу вам запропонували усно розв'язати чотири квадратні рівняння за 30 секунд. Спробуйте виконати завдання (без гаджетів 🤣).

1) $x^2-2027x+2026=0$; 3) $x^2-2025x-2026=0$;

2) $x^2+2027x+2026=0$; 4) $x^2+2025x-2026=0$.

19.13 ШІ припустив, що розміри футбольних полів (у м) можна знайти, розв'язавши квадратні рівняння:

1) $x^2-167x+6700=0$ — для звичайного футбольного поля;

2) $x^2-64x+924=0$ — для поля з міні-футболу.

Не розв'язуючи рівняння, знайдіть площу і периметр цих футбольних полів. Розв'яжіть рівняння і знайдіть довжину і ширину кожного футбольного поля.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть закономірність і визначте невідомі числа.

1	7	87
9	3	1227
4	2	?
6	8	?

Видавництво «Ранок»

Інший варіант роботи в електронному додатку

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 12

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Квадратне рівняння $x^2-8x-3=0$ має корені. Знайдіть їхню суму.

А	Б	В	Г
8	−8	−3	3

2 Квадратне рівняння $x^2-2x-7=0$ має корені. Знайдіть їхній добуток.

А	Б	В	Г
2	−2	−7	7

3 Визначте другий корінь квадратного рівняння $x^2-x-12=0$, якщо перший дорівнює -3.

А	Б	В	Г
−2	2	−4	4

4 Квадратне рівняння $x^2+4{,}5x+q=0$ має два від'ємні корені. Укажіть можливе значення q.

А	Б	В	Г
−0,5	2	0	−4,5

5 Квадратне рівняння $x^2+px+3=0$ має два додатні корені. Укажіть можливе значення p.

А	Б	В	Г
−6,5	0	0,5	3

6 Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та їхніми коренями (А–Г).

1	$x^2+x-2=0$	А	1; 2
2	$x^2-x-2=0$	Б	−2; 1
		В	−1; 2
3	$x^2+3x+2=0$	Г	−2; −1

7 За якого значення m сума коренів квадратного рівняння $3x^2+mx-7=0$ дорівнює 15?

8 Квадратне рівняння $x^2-3x-8=0$ має корені x_1 і x_2. Не розв'язуючи рівняння, обчисліть значення виразів:

1) $x_1+x_2-6x_1x_2$; 2) $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Завдання 19.14 → Приклад 1
Завдання 19.15 → Приклад 2
Завдання 19.16 → Приклади 3, 4
Завдання 19.22 → Практикум 19.8
Завдання 19.23–19.24 → Інтелектуальний фітнес, 19.9–19.10
Завдання 19.25 → Math for life, 19.13
Завдання 19.26 → Інтелектуальний фітнес, 19.11

19.14 Знайдіть другий корінь і невідомий коефіцієнт квадратного рівняння, якщо відомий перший корінь рівняння.

1) $x^2-8x+q=0$, $x_1=5$;
2) $x^2+4x+q=0$, $x_1=-7$;
3) $x^2+px-10=0$, $x_1=7$;
4) $x^2+px+5=0$, $x_1=-1$.

19.15 Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, коренями якого є числа:

1) −10 і 2; 3) -5 і $1\frac{2}{3}$; 5) 1,5 і 6; 7) $1-\sqrt{2}$ і $1+\sqrt{2}$;
2) −3 і −7; 4) $-\sqrt{3}$ і $\sqrt{3}$; 6) −2,5 і 2; 8) $3-\sqrt{5}$ і $3+\sqrt{5}$.

19.16 Підберіть корені зведеного квадратного рівняння.

1) $x^2+7x+10=0$; 3) $x^2+10x+21=0$; 5) $x^2-x-6=0$;
2) $x^2-9x+8=0$; 4) $x^2+17x-18=0$; 6) $x^2-39x-40=0$.

Видавництво «Ранок»

19.17 Визначте, чи має задане рівняння корені. Якщо має, знайдіть їхню суму та добуток.

1) $x^2+2x-15=0$; 3) $x^2+4x+8=0$; 5) $4x^2+8x+3=0$;

2) $x^2-7x+5=0$; 4) $3x^2-5x-2=0$; 6) $5x^2-3x+2=0$.

19.18 Не розв'язуючи рівняння, визначте його другий корінь, якщо відомий перший.

1) $x^2-12x+27=0$, $x_1=3$; 2) $x^2-2x-48=0$, $x_1=-6$.

19.19 Визначте другий корінь та невідомий коефіцієнт (p або q) рівняння, якщо відомий його перший корінь.

1) $x^2+px-28=0$, $x_1=7$; 2) $x^2+17x+q=0$, $x_1=-9$.

19.20 Не розв'язуючи квадратне рівняння, перевірте, чи є задані числа його коренями.

1) $x^2-10x+9=0$, числа 1 і 9;

2) $x^2-12x+32=0$, числа -4 і -8.

19.21 Знайдіть корені квадратного рівняння за формулою коренів та виконайте перевірку за формулами Вієта.

1) $2x^2+8x-42=0$; 2) $3x^2-14x-5=0$; 3) $4x^2+11x+6=0$.

19.22 Підберіть корені рівняння за формулами Вієта.

1) $x^2-14x+13=0$; 3) $x^2+10x+24=0$; 5) $x^2-4x-45=0$;

2) $x^2-10x+21=0$; 4) $x^2+14x-15=0$; 6) $x^2+15x-54=0$.

19.23 Відомо, що x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $x^2+14x+7=0$. Не обчислюючи значення коренів, знайдіть значення виразу:

1) $x_1+x_2+4x_1x_2$; 2) $x_1^2+x_2^2$; 3) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; 4) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$.

19.24 Знайдіть усі цілі значення коефіцієнта p, за яких рівняння має цілі корені:

1) $x^2+px+3=0$; 2) $x^2+px-6=0$; 3) $x^2+px+16=0$.

19.25 Розміри баскетбольного поля (у м) є коренями квадратного рівняння $x^2-43x+420=0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть площу і периметр баскетбольного поля. Розв'яжіть рівняння і зайдіть довжину і ширину цього поля.

Бонусне завдання

19.26 Знайдіть корені квадратного рівняння та значення m, якщо один із коренів квадратного рівняння:

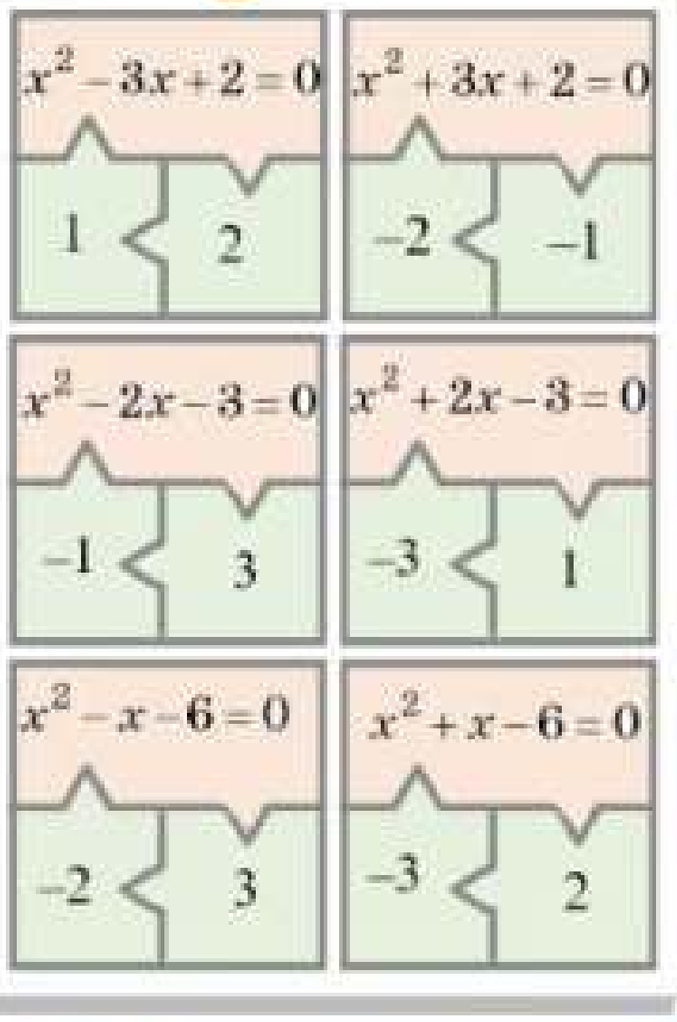
1) $x^2-6x-5m=0$ на 8 більший за інший;

2) $x^2+12x+18m=0$ на 6 менший від іншого.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Пазли для бліцопитування

1. Запишіть числа — 6 пар коренів рівнянь.
2. Складіть відповідні рівняння.
3. Зробіть із цупкого паперу пазли, як показано на рисунку. Розріжте елементи.
4. Якщо рідні чи близькі поцікавляться вашим домашнім завданням, запропонуйте їм скласти пазли і перевірте, чи знають вони формули Вієта.



BE SMART

Під час франко-іспанської війни видатний французький математик **Франсуа Вієт** знайшов ключ до шифру, яким користувалися іспанці для таємного листування, унаслідок чого був звинувачений у чаклунстві, адже іспанці вважали, що розкрити їхній шифр не під силу людському розуму.

Видавництво «Ранок»

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 17–19

1 Ви дізналися, що таке квадратний тричлен і квадратне рівняння, неповне квадратне рівняння, зведене квадратне рівняння.

Схема розв'язування неповних квадратних рівнянь

$ax^2+c=0 \ \ (b=0)$	$ax^2+bx=0 \ \ (c=0)$	$ax^2=0 \ \ (b=c=0)$
Якщо $-\frac{c}{a}>0$, то $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.	$x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}$	$x=0$
Якщо $-\frac{c}{a}<0$, то коренів немає		

2 Ви навчилися розв'язувати квадратні рівняння за допомогою формули коренів квадратного рівняння.

Квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0 \ \ (a\neq 0)$ має корені $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, де $D=b^2-4ac$ — дискримінант квадратного рівняння.

- Якщо $D<0$, рівняння не має коренів.
- Якщо $D=0$, рівняння має один корінь: $x=-\frac{b}{2a}$.
- Якщо $D>0$, рівняння має два корені: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

3 Ви познайомилися з теоремою Вієта і теоремою, оберненою до теореми Вієта, навчилися визначати знаки коренів квадратного рівняння.

Теорема Вієта для зведеного квадратного рівняння

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $x^2+px+q=0$, то $\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\ x_1\cdot x_2=q.\end{cases}$

Теорема, обернена до теореми Вієта, для зведеного квадратного рівняння

Якщо числа x_1 і x_2 такі, що $\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\ x_1\cdot x_2=q,\end{cases}$ то вони є коренями рівняння $x^2+px+q=0$.

Добуток коренів $x_1\cdot x_2$	Знаки коренів x_1 і x_2	Сума коренів x_1+x_2	Знаки коренів x_1 і x_2
$+$	корені мають **однакові знаки**	$+$	Обидва корені — додатні числа
		$-$	Обидва корені — від'ємні числа
$-$	корені мають **різні знаки**	$+$	Більший за модулем корінь — додатний
		$-$	Більший за модулем корінь — від'ємний

Видавництво «Ранок»

Інший варіант роботи в електронному додатку

ПІДСУМКОВА РОБОТА № 6

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Розв'яжіть рівняння $x^2+8x=0$.

А	Б	В	Г
8	-8	$-8;\ 0$	$0;\ 8$

2 Розв'яжіть рівняння $x^2-14=0$.

А	Б	В	Г
$\pm\sqrt{14}$	± 7	$\sqrt{14}$	7

3 Визначте дискримінант квадратного рівняння $x^2-8x+12=0$.

А	Б	В	Г
4	16	8	64

4 Розв'яжіть рівняння $x^2-2x+1=0$.

А	Б	В	Г
-1	1	± 1	Коренів немає

5 Один із коренів квадратного рівняння $x^2+px-30=0$ дорівнює 10. Визначте p.

А	Б	В	Г
7	-7	-3	3

6 Укажіть рівняння, добуток коренів якого дорівнює 3.

А	Б
$x^2-3x+5=0$	$x^2+3x+5=0$
В	**Г**
$x^2+5x-3=0$	$x^2+5x+3=0$

7 Розв'яжіть рівняння $3x^2-x-5=0$.

8 Розв'яжіть рівняння $x(2-x)=4(x-12)$.

9 Відомо, що x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $x^2+5x-10=0$. Не обчислюючи значення коренів, знайдіть значення виразу:

1) $x_1+x_2-\dfrac{x_1x_2}{2}$; 2) $\dfrac{3}{x_1}+\dfrac{3}{x_2}$.

10 З якою швидкістю v (км/год) їхав автомобіль, якщо його гальмівний шлях s дорівнює 96 м і визначається з рівняння $s=\dfrac{40v+v^2}{200}$? Складіть рівняння для визначення v, зведіть його до квадратного і скористайтеся тим, що один із коренів цього рівняння дорівнює -160.

Бонусне завдання

Знайдіть усі значення a, за яких рівняння $x^2+ax-3a=0$ має лише один корінь.

> «Тут немає проблеми, яку не можна вирішити.»
>
> Франсуа Вієт

Видавництво «Ранок»

§20 КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН. РОЗКЛАДАННЯ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА НА МНОЖНИКИ

УЧОРА

Ви навчилися визначати кількість коренів квадратного рівняння та розв'язувати квадратні рівняння різними способами

СЬОГОДНІ

Ви познайомитеся з поняттям квадратного тричлена, дізнаєтеся, як знайти його корені, навчитеся розкладати квадратний тричлен на множники

ЗАВЖДИ

Ви зможете створювати архітектурні проєкти, моделі присадибних ділянок, знаходити раціональні шляхи розв'язування математичних завдань

mk.com.ua/109759

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

АРХІТЕКТУРНИЙ ПРОЄКТ

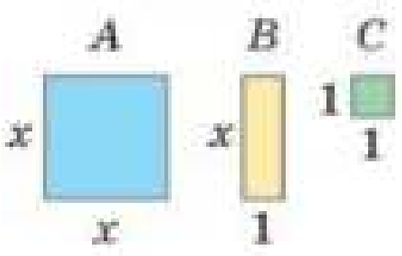
Уявіть, що вам доручили розробити проєкт прямокутного спортивного майданчика, який складається з 3 модулів A, 4 модулів B і 1 модуля C. Накресліть план майданчика і запишіть вирази для знаходження його площі двома способами:

- визначивши площі модулів, із яких складається майданчик;
- визначивши довжини сторін одержаного прямокутника.

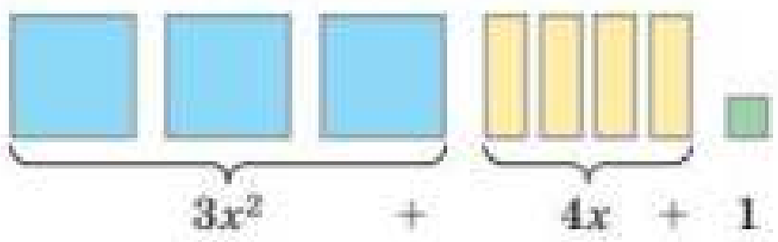
Розв'язання

1) Запишемо вираз для знаходження площі майданчика, що складається із 3 модулів A, 4 модулів B і 1 модуля C:

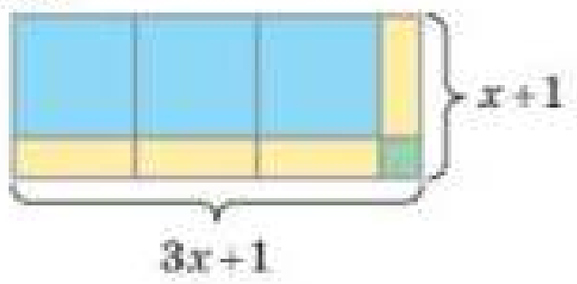
$$S = 3x^2 + 4x + 1.$$



$$S_A = x \cdot x = x^2$$
$$S_B = x \cdot 1 = x$$
$$S_C = 1 \cdot 1 = 1$$



2) Накреслимо план майданчика у вигляді прямокутника з указаної кількості модулів. Запишемо вирази для довжин сторін прямокутника.



3) Запишемо вирази для знаходження площі прямокутного майданчика:

$$S = 3x^2 + 4x + 1; \quad S = (3x+1)(x+1).$$

Ми отримали рівність $3x^2 + 4x + 1 = (3x+1)(x+1)$ — тричлен, розкладений на множники.

У цьому параграфі ви ознайомитесь із формулою розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- квадратний тричлен (quadratic trinomial)
- лінійні множники (linear factors)
- способи розкладання на множники (methods of factoring)
- розкладання квадратного тричлена на множники (factoring a quadratic trinomial)

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Многочлен виду ax^2+bx+c, де x — змінна, a, b, c — числа, причому $a\neq 0$, називають **квадратним тричленом**.

Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, за якого значення цього тричлена дорівнює нулю.

Для знаходження коренів квадратного тричлена треба розв'язати рівняння $ax^2+bx+c=0$.

Наприклад:

Квадратні тричлени ax^2+bx+c			Не є квадратними тричленами
$7x^2-2x+3$ $a=7;\ b=-2;\ c=3$	$8x^2-5$ $a=8;\ b=0;\ c=-5$	$-x^2+8x$ $a=-1;\ b=8;\ c=0$	$2x^2-\frac{3}{x}+1;\ 6x^2-5y+7;$ $-x^3+4x=0$

Розглянемо розкладання квадратного тричлена на лінійні множники за спеціальною формулою.

ДОСЛІДЖУЄМО

1) Знайдіть взаємозв'язок між значеннями коренів квадратного тричлена і розкладом квадратного тричлена на множники.

2) Прийнявши, що x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, спробуйте записати формулу розкладання квадратного тричлена на множники:

$$ax^2+bx+c=\square(x-\square)(x-\square).$$

Квадратний тричлен	Корені квадратного тричлена	Розклад квадратного тричлена на множники
$x^2-10x+24$	$x_1=4,\ x_2=6$	$(x-4)(x-6)$
y^2+3y+2	$y_1=-2,\ y_2=-1$	$(y+2)(y+1)$
$2x^2-4x-30$	$x_1=-3,\ x_2=5$	$2(x+3)(x-5)$
$3y^2-24y+21$	$y_1=1,\ y_2=7$	$3(y-1)(y-7)$

ПРИГАДАЙТЕ!

Способи розкладання многочлена на множники:

- винесення спільного множника за дужки;
- спосіб групування;
- застосування формул скороченого множення.

Алгоритм розкладання квадратного тричлена ax^2+bx+c, $a\neq 0$ на лінійні множники

1. Знайти корені квадратного тричлена, тобто розв'язати відповідне квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$.
2. Якщо рівняння має корені x_1 і x_2, то:
   - у випадку $x_1\neq x_2$ маємо $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$;
   - у випадку $x_1=x_2$ маємо $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.
3. Якщо рівняння не має коренів, то квадратний тричлен неможливо розкласти на лінійні множники.

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c $(a\neq 0)$, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

Квадратний тричлен може мати **два** корені, **один** (кратний) корінь або **не мати** коренів.

Видавництво «Ранок»

Якщо квадратний тричлен має корені, то його можна розкласти на лінійні множники. Кількість коренів квадратного тричлена залежить від значення дискримінанта $D=b^2-4ac$.

$D>0$	$D=0$	$D<0$
Два різні корені: $x_1\neq x_2$	**Один** *кратний* корінь: $x_1=x_2$	Коренів немає
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$	Розкладу не існує
Наприклад		
$3x^2+4x+1$ $D=4^2-4\cdot3\cdot1=4,\ D>0$ $x_{1,2}=\frac{-4\pm2}{6},\ x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{3}$ $3x^2+4x+1=3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)$	$5x^2-10x+5$ $D=(-10)^2-4\cdot5\cdot5,\ D=0$ $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}=\frac{10}{2\cdot5}=1,\ x_1=x_2=1$ $5x^2-10x+5=5(x-1)(x-1)=5(x-1)^2$	$10x^2+2x+1$ $D=2^2-4\cdot10\cdot1=-36,\ D<0$ Коренів немає. Квадратний тричлен не можна розкласти на множники

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Якщо квадратний тричлен можна подати у вигляді повного квадрата, то його можна розкласти на множники за допомогою формул скороченого множення:

$$5x^2-10x+5=$$
$$=5\left(x^2-2x+1\right)=5(x-1)^2$$

РОЗМИНКА 1

1. Визначте, чи можна розкласти квадратний тричлен на лінійні множники:
1) x^2+5x+7; 2) y^2+y-6; 3) $a^2+14a+49$.

2. Розкладіть на множники квадратний тричлен x^2+px+q, якщо відомі його корені x_1 і x_2:
1) 1 і 3; 2) -2 і 9; 3) -6 і -11; 4) $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{3}$; 5) 7 і 7.

ПРИКЛАД 1

Розкладіть на множники квадратний тричлен:
1) $x^2-9x+18$; 2) x^2-6x-7; 3) x^2+5x+6.

Розв'язання

	1) $x^2-9x+18$	2) x^2-6x-7	3) x^2+5x+6
Визначаємо коефіцієнти квадратного тричлена	$a=1,\ b=-9,\ c=18$	$a=1,\ b=-6,\ c=-7$	$a=1,\ b=5,\ c=6$
З'ясовуємо, чи має корені квадратний тричлен	$D=(-9)^2-4\cdot18,$ $D=9,\ D>0$	$D=(-6)^2-4\cdot(-7),$ $D=64,\ D>0$	$D=5^2-4\cdot6,$ $D=1,\ D>0$
Знаходимо корені за формулами Вієта	$\begin{cases}x_1+x_2=9,\\x_1\cdot x_2=18;\end{cases}$ $x_1=3,\ x_2=6$	$\begin{cases}x_1+x_2=6,\\x_1\cdot x_2=-7;\end{cases}$ $x_1=-1,\ x=7$	$\begin{cases}x_1+x_2=-5,\\x_1\cdot x_2=6;\end{cases}$ $x_1=-2,\ x=-3$
Розкладаємо: якщо $a=1$, то $x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$	$x^2-9x+18=$ $=(x-3)(x-6)$	$x^2-6x-7=$ $=(x+1)(x-7)$	$x^2+5x+6=$ $=(x+2)(x+3)$

Відповідь: 1) $(x-3)(x-6)$; 2) $(x-7)(x+1)$; 3) $(x+2)(x+3)$.

Видавництво «Ранок»

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Знайдіть корені квадратного тричлена та розкладіть його на множники.

1) x^2-6x+5; 3) $x^2-6x-16$; 5) $9+10x+x^2$;

2) x^2+4x-5; 4) $x^2+10x+16$; 6) $-9-8x+x^2$.

Слідкуйте за знаками! Не забувайте про коефіцієнт a!

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$2x^2-4x-30=2(x-(-3))(x-5)=2(x+3)(x-5)$$

ПРИГАДАЙТЕ!

- Якщо $\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\ x_1\cdot x_2=q,\end{cases}$ то x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2+px+q=0$.
- Якщо $a=1$, то $x^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)$.

РОЗМИНКА 2

У якому випадку квадратний тричлен $5x^2+3x-2$ правильно розкладений на множники, якщо його корені $x_1=-1$, $x_2=\frac{2}{5}$?

А) $5(x-1)\left(x+\frac{2}{5}\right)$; Б) $(x+1)\left(x-\frac{2}{5}\right)$; В) $5(x+1)\left(x-\frac{2}{5}\right)$.

Перевірте правильність виконання завдання за схемою:

$$2\cdot 3=6$$

$$(2x-3)(3x-1)=6x^2-11x+3$$

$$(-3)\cdot(-1)=3$$

$$-11=2\cdot(-1)+(-3)\cdot 3$$

ПРИКЛАД 2

Подайте квадратний тричлен у вигляді добутку лінійних множників із цілими коефіцієнтами:

1) $-x^2+5x+24$; 2) $3x^2-x-2$; 3) $6x^2-5x+1$.

Розв'язання

Квадратний тричлен	1) $-x^2+5x+24$	2) $3x^2-x-2$	3) $6x^2-5x+1$
Визначаємо коефіцієнти квадратного тричлена	$a=-1$, $b=5$, $c=24$	$a=3$, $b=-1$, $c=-2$	$a=6$, $b=-5$, $c=1$
Знаходимо корені $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, де $D=b^2-4ac$	$D=5^2-4\cdot(-1)\cdot 24$, $D=121$, $\sqrt{D}=11$; $x_{1,2}=\frac{-5\pm 11}{-2}$, $x_1=-3$, $x_2=8$	$D=(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-2)$, $D=25$, $\sqrt{D}=5$, $x_{1,2}=\frac{1\pm 5}{6}$, $x_1=-\frac{2}{3}$, $x_2=1$	$D=(-5)^2-4\cdot 6\cdot 1$, $D=1$, $\sqrt{D}=1$, $x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{12}$, $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$
Розкладаємо на множники: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, $a\neq 0$. Спрощуємо вираз	$-x^2+5x+24=-(x+3)(x-8)=(x+3)(8-x)$	$3x^2-x-2=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)=(3x+2)(x-1)$	$6x^2-5x+1=3\cdot 2\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(3x-1)(2x-1)$

Відповідь: 1) $(x+3)(8-x)$; 2) $(3x+2)(x-1)$; 3) $(3x-1)(2x-1)$.

Видавництво «Ранок»

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Розв'язуючи рівняння $-x^2+5x+24=0$, можна:

1) спочатку винести (−1) за дужки $-\left(x^2-5x-24\right)=0$;

2) розв'язати рівняння $x^2-5x-24=0$;

3) записати відповідь, урахувавши знак перед дужками:

$$-\left(x^2-5x-24\right)=$$
$$=-(x+3)(x-8)=$$
$$=(x+3)(8-x).$$

ПРИГАДАЙТЕ!

- Допустимими значеннями змінних, що входять до дробового виразу, є всі значення, за яких знаменник виразу відмінний від нуля.
- ОДЗ виразу зручно шукати після того, як знаменник буде розкладений на множники.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Знайдіть корені квадратного тричлена та розкладіть його на множники.

1) $-x^2+5x+14$;
2) $-x^2-5x+14$;
3) $-x^2+10x-16$;
4) $-x^2+10x-21$;
5) $3x^2+11x-4$;
6) $3x^2-11x-4$;
7) $2x^2+5x+3$;
8) $2x^2-5x+3$;
9) $6x^2+7x+2$;
10) $6x^2-7x+2$;
11) $7x+6x^2-3$;
12) $-3+6x^2-7x$.

РОЗМИНКА 3

1 Розкладіть на множники вираз:

1) $3x-6$; 2) x^3+x^2; 3) $5y^2-5$; 4) $9y^2-16$; 5) $x^2+14x+49$.

2 Укажіть область допустимих значень виразу:

1) $\frac{2}{x}$; 2) $\frac{y}{y-1}$; 3) $\frac{3a}{(a-3)(a+3)}$; 4) $\frac{b-2}{b(b+2)}$; 5) $\frac{c^2-4}{c^2+4}$.

ПРИКЛАД 3

Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу, запишіть ОДЗ і скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-16}{x^2+2x-8}$; 2) $\frac{3x^2-x-2}{9x^2+9x+2}$.

Розв'язання

	1) $\frac{x^2-16}{x^2+2x-8}$	2) $\frac{3x^2-x-2}{9x^2+9x+2}$
Розкладаємо чисельник і знаменник дробу на множники	$\frac{x^2-16}{x^2+2x-8}=\frac{(x-4)(x+4)}{(x-2)(x+4)}$	$\frac{3x^2-x-2}{9x^2+9x+2}=\frac{3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{9\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}$
Знаходимо ОДЗ виразу	$(x-2)(x+4)\neq 0$, $x\neq 2$, $x\neq -4$	$9\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\neq 0$, $x\neq -\frac{1}{3}$, $x\neq -\frac{2}{3}$
Скорочуємо дріб. Записуємо відповідь з урахуванням ОДЗ	$\frac{(x-4)(x+4)}{(x-2)(x+4)}=\frac{x-4}{x-2}$	$\frac{3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{9\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\frac{(x-1)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\frac{x-1}{3x+1}$

Відповідь: 1) $\frac{x-4}{x-2}$, $x\neq -4$, $x\neq 2$; 2) $\frac{x-1}{3x+1}$, $x\neq -\frac{1}{3}$, $x\neq -\frac{2}{3}$.

Видавництво «Ранок»

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу, запишіть ОДЗ і скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$; 3) $\frac{2x^2+7x-4}{x^2-x-20}$; 5) $\frac{9x^2+18x+5}{3x^2-11x-4}$;

2) $\frac{x^2+2x-3}{x^2-9}$; 4) $\frac{2x^2-9x-5}{x^2+x-30}$; 6) $\frac{9x^2-3x-2}{3x^2+13x-10}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, $a\neq 0$

ПРАКТИКУМ

20.1 Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2-5x-14$; 2) $x^2+2x-15$; 3) $4x^2+23x-6$; 4) $3x^2-11x-4$.

20.2 Визначте, чи можна розкласти на множники квадратний тричлен:

1) x^2+x-2; 3) $4x^2+4x+1$; 5) $2x^2-3x+5$;

2) x^2-3x+1; 4) $9x^2-6x+1$; 6) $3x^2-2x+1$.

20.3 Розкладіть на множники квадратний тричлен, якщо це можливо.

1) $8x-20+x^2$; 3) $-9x-22+x^2$; 5) $7x-14-x^2$;

2) $6x-27+x^2$; 4) $-3x-40+x^2$; 6) $5x-10-x^2$.

20.4 Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2-1{,}5x-1$; 3) $x^2-\frac{17}{3}x-2$; 5) $x^2-x+\frac{1}{4}$;

2) $x^2+3{,}5x-2$; 4) $x^2+\frac{8}{3}x-1$; 6) $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$.

20.5 Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $4x+45-x^2$; 3) $2-11x-6x^2$; 5) $7{,}5x+4-x^2$;

2) $24+5x-x^2$; 4) $11x-2-5x^2$; 6) $6{,}5x-3-x^2$.

20.6 Подайте квадратний тричлен у вигляді добутку лінійних множників із цілими коефіцієнтами.

1) $2x^2-7x-15$; 3) $-5x^2-x+4$; 5) $19x-6x^2-3$;

2) $2x^2+9x-18$; 4) $-6x^2+11x-5$; 6) $21x-5x^2-4$.

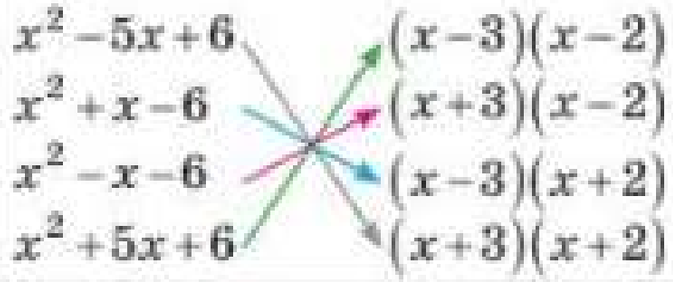
20.7 Скоротіть дріб, урахувавши ОДЗ.

1) $\frac{x^2+2x-35}{3x+21}$; 3) $\frac{x^2-4x}{x^2+4x-32}$; 5) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-12x+11}$;

2) $\frac{2x-10}{x^2+x-30}$; 4) $\frac{x^2-5x-14}{x^2-7x}$; 6) $\frac{x^2+12x+20}{x^2+4x+4}$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

Визначте, чи правильно встановлена відповідність. Якщо ні, виправте помилки.



ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

1. Покажіть, що квадратні тричлени мають однакові корені:
   1) x^2+3x-4;
   2) $4x^2+12x-16$;
   3) $-5x^2-15x+20$.
2. Розкладіть задані тричлени на множники.
3. Запишіть два нові тричлени, що мають однакові корені із тричленом $x^2-7x+10$, і розкладіть ці тричлени на множники.
4. Обміняйтеся записами. Перевірте правильність розв'язання одне одного.

Видавництво «Ранок»

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Запишіть вирази замість знаків питання.

21	$1\cdot3\cdot7$
x^3-x	$x(x-1)(x+1)$
$x^2-6x-27$	?
$(x^2+3x-10)\times$ $\times(x^2-9x+14)$	?

20.8 Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу, запишіть ОДЗ і скоротіть дріб:

1) $\dfrac{20+4a}{a^2+10a+25}$; 3) $\dfrac{13+a^2+14a}{26+15a+a^2}$; 5) $\dfrac{3-20a-7a^2}{3-5a-2a^2}$;

2) $\dfrac{a^2+12a+36}{30+5a}$; 4) $\dfrac{28-16a+a^2}{14+a^2-15a}$; 6) $\dfrac{2-5a-3a^2}{2-7a-4a^2}$.

20.9 Скоротіть дріб та знайдіть його значення за заданих значень змінної:

1) $\dfrac{a^2-121}{2a+22}$, якщо $a=13$; 3) $\dfrac{6a^2-15a}{2a^2-5-3a}$, якщо $a=-0{,}9$;

2) $\dfrac{a^2-144}{3a+36}$, якщо $a=18$; 4) $\dfrac{12a^2-8a}{3a^2-4+4a}$, якщо $a=-2{,}1$.

20.10 Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1}{a^2-11a+30}+\dfrac{1}{a-5}$; 3) $\dfrac{4a-3}{a^2-12a+11}\cdot\dfrac{a^2-2a+1}{4a^2-3a}$;

2) $\dfrac{5}{3a^2+a-2}-\dfrac{3}{3a-2}$; 4) $\dfrac{5a+2}{a^2-10a+16}:\dfrac{5a^2+2a}{a^2-4a+4}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

20.11 Розкладіть на множники многочлен:

1) x^3-x^2-6x; 3) $a^2(a-7)+7a(a-7)+12(a-7)$;

2) $y^4-12y^3+32y^2$; 4) $2b^2(b^2-4)+b(b^2-4)-3(b^2-4)$.

20.12 Побудуйте графік функції

1) $y=\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$; 2) $y=\dfrac{-x^2+3x+10}{x+2}$; 3) $y=\dfrac{x^2+2x-3}{-4x^2-8x+12}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

1. Знаходимо ОДЗ дробу.
2. Скорочуємо дріб.
3. Будуємо графік функції.
4. Вилучаємо на графіку точки, абсциси яких не входять в ОДЗ.

20.13 Розкладіть многочлени 1–5 на множники.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $x^2-2mx-24m^2$. Розв'яжемо рівняння $x^2-2mx-24m^2$ відносно x — підберемо корені за формулами Вієта: $x_1+x_2=2m$; $x_1\cdot x_2=-24m^2$. $-24m^2<0$, отже, корені мають різні знаки. $-24m^2=(-4m)\cdot 6m$; $2m=(-4m)+6m$; $x_1=-4m$, $x_2=6m$. $x^2-2mx-24m^2=(x-6m)(x+4m)$.	2) $x^2-12mx+11m^2$; 3) $x^2+12mx+20m^2$; 4) $x^2-2mx-35m^2$; 5) $x^2+5mx-14m^2$.

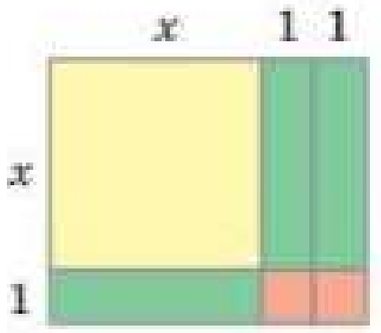
Видавництво «Ранок»

MATH FOR LIFE

20.14 **Планування городу.** Прямокутну ділянку розпланували під посадку перцю, томатів та селери (див. рисунок).

1) Запишіть вирази для знаходження площі всієї ділянки, її довжини і ширини.

2) Площу іншої ділянки, розпланованої аналогічно заданій для посадки таких саме овочевих культур, можна виразити тричленом $2x^2+7x+3$. Розкладіть тричлен на множники і побудуйте схему городу.



$S_{\text{майданчика}} = __ \cdot __$

$S_{\text{загальна}} = S_{\text{майданчика}} + 99$

$S_{\text{загальна}} = (x+10)(x+20)$

20.15 **Стоянка для велосипедів.** Навчальний заклад планує облаштувати стоянку для велосипедів з двох сторін шкільного майданчика, довжина і ширина якого 20 м і 10 м відповідно (див. рисунок). Для стоянки замовлено 99 м^2 спеціального покриття. Якою має бути ширина стоянки x (у м)?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

20.16 Розкладіть на множники квадратний тричлен.

1) x^2-7x+6; 3) $x^2-5x-14$; 5) $8+9x+x^2$;

2) x^2+5x-6; 4) $x^2+9x+14$; 6) $-8-7x+x^2$.

20.17 Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $-x^2+3x+18$; 3) $3x^2+5x-2$; 5) $6x^2+5x+1$;

2) $-x^2+11x-24$; 4) $2x^2-7x+6$; 6) $-2+6x^2-x$.

20.18 Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу, запишіть ОДЗ і скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$; 2) $\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-2x-15}$; 3) $\dfrac{3x^2-16x-12}{9x^2+3x-2}$.

20.19 Визначте, чи можна розкласти на множники квадратний тричлен:

1) x^2-x-3; 2) $4x^2-4x+1$; 3) $2x^2-x+1$.

20.20 Розкладіть на множники квадратний тричлен, якщо це можливо.

1) $7x-30+x^2$; 2) $-7x-18+x^2$; 3) $6x-12-x^2$.

20.21 Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2-3{,}5x-2$; 2) $x^2-\dfrac{8}{3}x-1$; 3) $x^2+x+\dfrac{1}{4}$.

Завдання 20.16–20.18 → Приклади 1–3

Завдання 20.19–20.27 → Практикум, 20.2–20.10

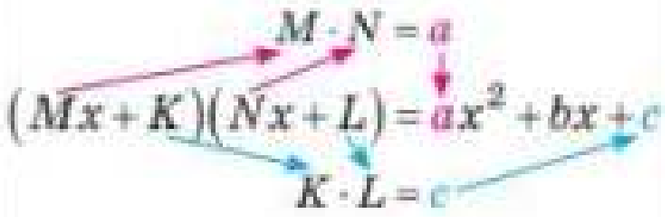
Завдання 20.28–20.29, 20.31 → Інтелектуальний фітнес, 20.11–20.13

Завдання 20.30 → Math for life, 20.15

IQ

 # BE SMART

Ви завжди можете перевірити, чи правильно розкладено на множники квадратний тричлен, обчисливши значення коефіцієнтів. Скористайтесь наведеною схемою.



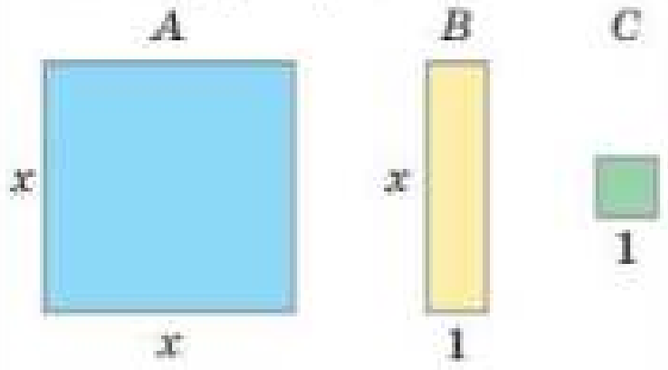
$b = M \cdot L + K \cdot N$

Видавництво «Ранок»

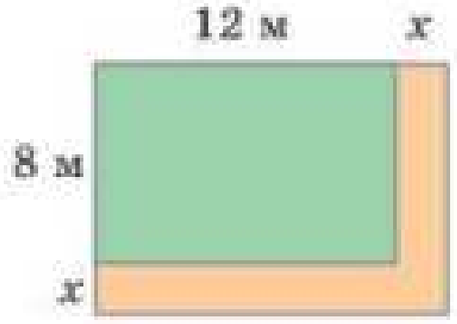
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Пригадайте Актуальну задачу і виконайте завдання.

1. Виріжте із цупкого паперу модулі трьох різних видів, показаних на рисунку: Модуль A — 4 шт., модуль B — 10 шт., модуль C — 20 шт. Можете скористатися також елементами конструктора.



2. Розкладіть на множники тричлени:
   1) $x^2+7x+10$;
   2) $3x^2+10x+8$.
   Складіть прямокутники з відповідної кількості потрібних модулів.
3. Складіть різні прямокутники — варіанти планів спортивного майданчика, використовуючи різну кількість модулів, і сфотографуйте їх. Запишіть у вигляді тричлена вирази для знаходження площ планів спортивних майданчиків. Розкладіть отримані вирази на множники і запишіть результати розкладу.



20.22 Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $45-4x-x^2$; 2) $13x-2-6x^2$; 3) $5{,}5x+3-x^2$.

20.23 Подайте квадратний тричлен у вигляді добутку лінійних множників із цілими коефіцієнтами.

1) $2x^2-9x-18$; 2) $-5x^2+9x-4$; 3) $2-6x^2-11x$.

20.24 Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x^2+8x-9}{2x+18}$; 2) $\dfrac{x^2-5x}{x^2-2x-15}$; 3) $\dfrac{x^2+5x-24}{x^2-6x+9}$.

20.25 Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу, запишіть ОДЗ і скоротіть дріб:

1) $\dfrac{7a-42}{a^2-12a+36}$; 2) $\dfrac{12-13a+a^2}{24+a^2-14a}$; 3) $\dfrac{1-5a-6a^2}{1-4a-5a^2}$.

20.26 Скоротіть дріб та знайдіть його значення за заданих значень змінної:

1) $\dfrac{a^2-169}{2a+26}$, якщо $a=17$; 2) $\dfrac{10a^2-25a}{2a^2-15+a}$, якщо $a=-3{,}1$.

20.27 Спростіть вираз:

1) $\dfrac{1}{a^2-5a+6}+\dfrac{1}{a-2}$; 3) $\dfrac{3-10a}{a^2+6a+5}\cdot\dfrac{a^2+10a+25}{3a-10a^2}$;

2) $\dfrac{11}{9a^2+7a-2}-\dfrac{9}{9a-2}$; 4) $\dfrac{7a+1}{a^2-9a+18}:\dfrac{7a^2+a}{a^2-6a+9}$.

20.28 Розкладіть на множники многочлен:

1) x^3-6x^2-27x; 3) $a^2(a+2)-4a(a+2)+3(a+2)$;

2) $y^4+5y^3-24y^2$; 4) $3b^2\left(b^2-9\right)-b\left(b^2-9\right)-2\left(b^2-9\right)$.

20.29 Побудуйте графік функції

1) $y=\dfrac{x^2+4x-12}{x-2}$; 2) $y=\dfrac{-x^2-x+2}{x-1}$; 3) $y=\dfrac{-2x^2-4x+16}{x^2+2x-8}$.

20.30 Навчальний заклад планує облаштувати бордюр із квітів з двох сторін шкільного майданчика, довжина і ширина якого становить 12 м і 8 м відповідно (див. рисунок). Якою має бути ширина бордюра x (у м), якщо його загальна площа має становити 44 м^2?

Бонусне завдання

20.31 Розкладіть многочлен на множники:

1) $x^2-14mx+24m^2$; 2) $x^2+12mx+35m^2$; 3) $x^2-mx-20m^2$.

Видавництво «Ранок»

§21 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

УЧОРА — Ви розв'язували різними способами квадратні рівняння та раціональні рівняння, які зводяться до лінійних рівнянь

СЬОГОДНІ — Ви зможете розв'язувати раціональні рівняння, які зводяться до квадратних, дізнаєтеся про біквадратні рівняння та застосовуватимете для розв'язування рівнянь спосіб заміни змінної

ЗАВЖДИ — Ви зможете будувати математичні моделі прикладних задач у вигляді рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь

mk.com.ua/109760

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

МАТЕМАТИЧНИЙ ТУРНІР

На виконання завдань математичного турніру Алісі треба на 10 хв менше, ніж Тимофію. Працюючи разом, діти виконали завдання за 12 хв. За який час вони виконали б завдання поодинці?

Розв'язання

Зауважимо, що всю виконану роботу зазвичай приймають за одиницю.

Складемо математичну модель задачі у вигляді таблиці.

	Час на виконання завдання **поодинці** (хв)	Продуктивність роботи **поодинці**	Час на виконання завдання **разом** (хв)	Продуктивність роботи **разом**
Аліса	x	$\frac{1}{x}$	12 хв	$\frac{1}{12}$
Тимофій	$x+10$	$\frac{1}{x+10}$		

За умовою задачі складаємо рівняння: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}$.

Після перетворень отримуємо рівняння: $\frac{x^2-14x-120}{12x(x+10)}=0$.

Ми одержали дробово-раціональне рівняння.

Ви вже вмієте розв'язувати раціональні рівняння (цілі й дробові), які зводяться до лінійних рівнянь. Знаєте, що більшість дробово-раціональних рівнянь зводяться до рівнянь певного виду; знайомі зі способами їх розв'язання (якщо вивчили § 7 😉).

У цьому параграфі ми розглянемо раціональні рівняння, які зводяться до квадратних рівнянь, та їх розв'язування із застосуванням відомих вам властивостей рівнянь, способів і методів розв'язання.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

В Україні й у світі проводиться багато різноманітних математичних змагань, у яких ви можете взяти участь. Це, зокрема, Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М. Й. Ядренка (ТЮМ), Всеукраїнський турнір математичних боїв ім. академіка І. І. Ляшка, Всеукраїнська заочна математична олімпіада «5–12», Міжнародний чемпіонат з розв'язування логічних математичних задач, Європейська математична олімпіада для дівчат тощо.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- область значень (range)
- раціональне рівняння (rational equation)
- способи розв'язання рівнянь (methods of solving equations)
- біквадратне рівняння (biquadratic equation)

Видавництво «Ранок»

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Розкладання на множники, умова рівності добутку нулю

РОЗМИНКА 1

ПРИГАДАЙТЕ!

$ab=0$,

якщо

$a=0$ або $b=0$

1 Розкладіть на множники многочлен:

1) $2a-8$; 2) b^3+3b^2; 3) $5c^3-10c^2+15c$; 4) x^2-6x+9.

2 Назвіть корені рівняння:

1) $x(x-7)=0$;

2) $(x-1)(x+9)=0$;

3) $(x+1)(x^2+3)=0$;

4) $(x-4)^2=0$.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть рівняння, скориставшись *умовою рівності добутку нулю*:

1) $2x^3-7x^2+6x=0$; 2) $3x^3+12x^2+12x=0$.

Розв'язання

Стратегія

1) Виносимо за дужки спільний множник.

2) Застосовуємо умову рівності добутку нулю.

3) Розв'язуємо рівняння.

4) Записуємо відповідь.

1) $2x^3-7x^2+6x=0$	2) $3x^3+12x^2+12x=0$
$x(2x^2-7x+6)=0$	$3x(x^2+4x+4)=0$
$x_1=0$ або $2x^2-7x+6=0$	$3x=0$; $x_1=0$ або $x^2+4x+4=0$
$2x^2-7x+6=0$ $D=(-7)^2-4\cdot2\cdot6=1$ $x_{2,3}=\frac{7\pm1}{4}$ $x_2=1{,}5$; $x_3=2$	$x^2+4x+4=0$ $(x+2)^2=0$ $(x+2)(x+2)=0$ $x_2=x_3=-2$ один кратний корінь
$\{0;\ 1{,}5;\ 2\}$	$\{-2;\ 0\}$

Відповідь: 1) 0; 1,5; 2; 2) −2; 0.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Розв'яжіть рівняння, скориставшись умовою рівності добутку нулю.

1) $x^3-9x^2+14x=0$;
2) $x^3-8x^2+15x=0$;
3) $2x^3+5x^2-3x=0$;
4) $2x^3-3x^2-2x=0$;
5) $x^3-10x^2+25x=0$;
6) $x^3+6x^2+9x=0$;
7) $x^3-x^2+4x=0$;
8) $x^3+2x^2+5x=0$.

Видавництво «Ранок»

Умова рівності дробу нулю

РОЗМИНКА 2

1 Знайдіть область допустимих значень змінної рівняння:

1) $\frac{x^2-3}{x-3}=0$; 2) $\frac{a^2+2a-3}{(a-1)(a+7)}=0$; 3) $\frac{y^2+2y}{(y+2)^2}=0$; 4) $\frac{b^2-2b}{b^2+5}=0$.

2 За яких значень змінної дріб дорівнює нулю?

1) $\frac{x(x+4)}{x}$; 2) $\frac{y^2-25}{y+5}$; 3) $\frac{(a-2)(a+5)}{a^2+25}$; 4) $\frac{b^2+6}{b-6}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$\frac{A(x)}{B(x)}=0$, якщо $\begin{cases}A(x)=0,\\B(x)\neq 0\end{cases}$

Корінь рівняння, який не задовольняє ОДЗ змінної рівняння, називають **стороннім коренем**.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть рівняння, застосовуючи *умову рівності дробу нулю:*

1) $\frac{x^2-5x+4}{16-x^2}=0$; 2) $\frac{y^2+8y}{y+5}+\frac{15}{y+5}=0$.

Розв'язання

1) $\frac{x^2-5x+4}{16-x^2}=0$	2) $\frac{y^2+8y}{y+5}+\frac{15}{y+5}=0$
$\frac{x^2-5x+4}{(4-x)(4+x)}=0$	$\frac{y^2+8y+15}{y+5}=0$
$\begin{cases}x^2-5x+4=0,\\(4-x)(4+x)\neq 0\end{cases}$	$\begin{cases}y^2+8y+15=0,\\y+5\neq 0\end{cases}$
$(4-x)(4+x)\neq 0$ $x\neq 4$ або $x\neq -4$	$y+5\neq 0$ $y\neq -5$
$x^2-5x+4=0$ $x_1=1;\ x_2=4$	$y^2+8y+15=0$ $y_1=-5;\ y_2=-3$
$x_1=1$ — задовольняє вихідне рівняння; $x_2=4$ — не задовольняє, сторонній корінь	$y_1=-5$ — не задовольняє вихідне рівняння, сторонній корінь; $y_2=-3$ — задовольняє

Відповідь: 1) 1; 2) −3.

Стратегія

1) Розкладаємо на множники знаменник дробу або зводимо дроби до спільного знаменника.

2) Застосовуємо умову рівності дробу нулю.

3) Знаходимо ОДЗ рівняння.

4) Розв'язуємо перше рівняння системи.

5) Перевіряємо, чи задовольняють корені ОДЗ рівняння.

6) Записуємо відповідь.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-x-2}{x-2}=0$; 3) $\frac{x^2-7x-30}{9-x^2}=0$; 5) $\frac{x^2+2x}{x-4}-\frac{24}{x-4}=0$;

2) $\frac{x^2-2x-3}{x+1}=0$; 4) $\frac{x^2-2x-35}{25-x^2}=0$; 6) $\frac{x^2+4x}{x-3}-\frac{21}{x-3}=0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Умова рівності дробу нулю

$\frac{A(x)}{B(x)}=0$, якщо $\begin{cases}A(x)=0,\\B(x)\neq 0\end{cases}$

Видавництво «Ранок»

Множення обох частин рівняння на спільний знаменник

РОЗМИНКА 3

Укажіть спільний знаменник дробів, що входять до виразу. Назвіть доповняльні множники для кожного дробу.

1) $\frac{2}{3}+\frac{x^2}{x+3}$; 2) $\frac{1}{y}+\frac{y^2}{y-4}-\frac{4y}{y+4}$; 3) $\frac{4}{a^2-2a}-\frac{a}{a^2+2a}-\frac{2a}{a^2-4}$.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння *способом множення обох частин рівняння на спільний знаменник:* $\frac{2}{x^2-3x}-\frac{x+2}{x^2+3x}=\frac{4}{x^2-9}$.

Розв'язання

Розкладаємо знаменники всіх дробів на множники	$\frac{2}{x(x-3)}-\frac{x+2}{x(x+3)}=\frac{4}{(x-3)(x+3)}$
Знаходимо ОДЗ змінної рівняння	$x\neq 0$ $\quad x-3\neq 0$ $\quad x+3\neq 0$ $x\neq 0$ $\quad x\neq 3$ $\quad x\neq -3$
Знаходимо спільний знаменник дробів	$x(x-3)(x+3)$
Множимо обидві частини рівняння на спільний знаменник	$\frac{2^{\backslash(x+3)}}{x(x-3)}-\frac{x+2^{\backslash(x-3)}}{x(x+3)}=\frac{4^{\backslash x}}{(x-3)(x+3)}\ \Big\vert\ \cdot x(x-3)(x+3)$
Розв'язуємо рівняння: • розкриваємо дужки; • зводимо подібні доданки; • знаходимо корені	$2(x+3)-(x+2)(x-3)=4x$ $-x^2-x+12=0;$ $x^2+x-12=0$ $x_1=-4;\ x_2=3$
Вилучаємо сторонні корені	$x_2=3$ — не задовольняє ОДЗ, сторонній корінь

Відповідь: -4.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{5}{6}$;
2) $\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x}=-2$;
3) $\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{1}{3}$;
4) $\frac{2}{x-5}+\frac{6}{x+5}=\frac{1}{2}$;
5) $\frac{6}{x^2-16}=\frac{3}{x^2-4x}-\frac{x-2}{x^2+4x}$;
6) $\frac{6}{x^2+6x}+\frac{2}{x^2-6x}=\frac{10-x}{x^2-36}$.

Метод заміни змінної (метод введення нової змінної)

Для спрощення розв'язування рівнянь, зокрема тих, що містять ті самі вирази, що повторюються, застосовують спеціальний метод — введення нової змінної, або метод заміни змінної.

Видавництво «Ранок»

ДОСЛІДЖУЄМО

Розгляньте початкові рівняння. Чи містять рівняння вирази, що повторюються?
Спробуйте пояснити, з яких міркувань було обрано нову змінну t.

Початкове рівняння	Нова змінна	Рівняння з новою змінною
$(x+7)^2-(x+7)+20=0$	$t=x+7$	$t^2-t+20=0$
$(x^2-2)^2-8(x^2-2)-9=0$	$t=x^2-2$	$t^2-8t-9=0$
$(x^2+x)^2-7(x^2+x+1)=0$	$t=x^2+x$	$t^2-7(t+1)=0$

РОЗМИНКА 4

Введіть нову змінну і запишіть рівняння з новою змінною:

1) $(x+1)^2+3(x+1)-4=0$; 2) $2(x^2-2x)^2-7(x^2-2x-3)+3=0$.

Алгоритм розв'язування рівнянь методом заміни змінної

1. Ввести нову змінну.
2. Скласти нове рівняння з новою змінною.
3. Розв'язати рівняння відносно нової змінної.
4. Повернутися до початкової змінної.
5. Розв'язати рівняння відносно початкової змінної.
6. Зробити висновок про кількість коренів рівняння.
7. Записати відповідь.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

У рівнянні $(x^2-3x+1)(x^2-3x-4)=4$ заміну змінних можна зробити двома способами:

- $t=x^2-3x$, одержимо $(t+1)(t-4)=4$;
- $t=x^2-3x+1$, одержимо $t(t-5)=4$

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної.

1) $(x+1)^2-4(x+1)-5=0$; 2) $(2-x)^2+6(2-x)+9=0$.

Розв'язання

1) $(x+1)^2-4(x+1)-5=0$		2) $(2-x)^2+6(2-x)+9=0$
$t=x+1$, тоді $(x+1)^2=t^2$ $t^2-4t-5=0$		$t=2-x$, тоді $(2-x)^2=t^2$ $t^2+6t+9=0$; $(t+3)^2=0$
$t_1=-1$,	$t_2=5$	$t_1=t_2=-3$
$x+1=t_1$	$x+1=t_2$	$2-x=-3$
$x+1=-1$	$x+1=5$	$-x=-3-2$
$x_1=-2$	$x_2=4$	$x=5$

Відповідь: 1) -2; 4; 2) 5.

Стратегія

1) Вводимо нову змінну t. Записуємо нове рівняння.
2) Розв'язуємо рівняння відносно t.
3) Повертаємося до початкової змінної і розв'язуємо рівняння відносно змінної x.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Введіть нову змінну і розв'яжіть рівняння:

1) $(x+6)^2-2(x+6)-3=0$;
2) $(x-2)^2+3(x-2)-4=0$;
3) $(x-7)^2-2(x-7)+1=0$;
4) $(x+9)^2+4(x+9)+4=0$;
5) $2(x-1)^2+3(1-x)-2=0$;
6) $2(x-4)^2-5(4-x)-3=0$.

Видавництво «Ранок»

СЛІД ЗНАТИ!

Читаємо правильно: біквадра́тне рівня́ння (*латин. bi* — двічі і *латин. quadratus* — квадратний).

- Біквадратне рівняння є різновидом неповного квадратного рівняння четвертого степеня.
- Біквадратне рівняння може мати не більше чотирьох коренів.

ПРИГАДАЙТЕ!

- Якщо $x^2=a$ і $a>0$, то $x=\pm\sqrt{a}$;
- якщо $x^2=a$ і $a<0$, то коренів немає;
- $x^4=\left(x^2\right)^2$

Стратегія

1) Вводимо нову змінну t. Записуємо нове рівняння відносно нової змінної.

2) Розв'язуємо рівняння відносно t.

3) Повертаємось до початкової змінної і розв'язуємо два рівняння відносно змінної x.

4) Записуємо відповідь.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$t=x^2$, тоді $x^4=\left(x^2\right)^2=t^2$

Якщо новою змінною позначено **парний** степінь початкової змінної, то нова змінна **не може** набувати від'ємних значень.

Біквадратні рівняння

Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$, де x — змінна, a, b, c — числа, причому $a\neq 0$, називають **біквадратним**.

Наприклад:

1) $x^4-3x^2+2=0$; 2) $6y^4-11y^2-35=0$; 3) $4x^4-5x^2=6$.

Біквадратні рівняння розв'язують методом заміни змінної.

Вводимо нову змінну $t=x^2$ $(t\geqslant 0)$, тоді $x^4=\left(x^2\right)^2=t^2$.

Отримаємо квадратне рівняння відносно нової змінної t — $at^2+bt+c=0$.

РОЗМИНКА 5

1 Які з наведених рівнянь є біквадратними?

1) $x^3-9x+10=0$; 2) $3x^4-14x^2-15=0$; 3) $2x^6-x^3-3=0$.

2 Введіть нову змінну і запишіть квадратне рівняння з новою змінною:

1) $x^4-5x^2+6=0$; 2) $9x^4-9x^2+1=0$; 3) $3x^2+7=8x^4$.

ПРИКЛАД 5

Розв'яжіть біквадратне рівняння *методом заміни змінної*:

1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $2x^4-7x^2-4=0$.

Розв'язання

1) $x^4-10x^2+9=0$	2) $2x^4-7x^2-4=0$
$t=x^2$, тоді $x^4=\left(x^2\right)^2=t^2$ $t^2-10t+9=0$	$t=x^2$, тоді $x^4=\left(x^2\right)^2=t^2$ $2t^2-7t-4=0$
$D=(-10)^2-4\cdot 9=64>0$ $t_1=1$, $t_2=9$	$D=(-7)^2-4\cdot 2\cdot(-4)=81>0$ $t_1=-\frac{1}{2}$, $t_2=4$
$x^2=1$ або $x^2=9$ $x_{1,2}=\pm\sqrt{1}=\pm 1$ $x_{3,4}=\pm\sqrt{9}=\pm 3$	$x^2=-\frac{1}{2}$ або $x^2=4$ коренів немає $x_{1,2}=\pm\sqrt{4}=\pm 2$
$\{-3;-1;1;3\}$	$\{-2;2\}$

Відповідь: 1) -3; -1; 1; 3; 2) -2; 2.

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Розв'яжіть біквадратне рівняння методом заміни змінної:

1) $x^4-37x^2+36=0$; 3) $x^4+x^2-12=0$; 5) $x^4+5x^2+6=0$;

2) $x^4-26x^2+25=0$; 4) $x^4-5x^2-6=0$; 6) $x^4+6x^2+8=0$.

Видавництво «Ранок»

ПРАКТИКУМ

21.1 Скористайтесь умовою рівності добутку нулю й розв'яжіть рівняння:

1) $(2x+5)(x^2+4x-12)=0$;
2) $(2x-3)(x^2+2x-15)=0$;
3) $(x^2-9)(5x^2-x)=0$;
4) $(x^2-25)(4x^2+x)=0$.

21.2 Розкладіть ліву частину рівняння на множники і розв'яжіть рівняння:

1) $x^2(x+2)-5x(x+2)-36(2+x)=0$;
2) $x^2(x+1)+6x(1+x)-16(x+1)=0$;
3) $x^2(x-5)-7x(5-x)-8(x-5)=0$;
4) $x^2(x-6)+8x(x-6)+9(6-x)=0$.

21.3 Визначте, скільки коренів має рівняння.

1) $(x^2-5)(2x^2-3x+4)=0$;
2) $(x^2+7)(3x^2-2x+1)=0$;
3) $(x^2-x)(x^2-4x+4)=0$;
4) $(x^2+2x)(x^2+2x-1)=0$.

21.4 Розв'яжіть рівняння, використовуючи умову рівності дробу нулю.

1) $\frac{(x+3)^2(x-4)}{x+3}=0$;
2) $\frac{(x+5)(x-2)^2}{x-2}=0$;
3) $\frac{(7-x)(x+3,4)}{x^2-3x-28}=0$;
4) $\frac{(8+x)(x-2,1)}{x^2+5x-24}=0$;
5) $\frac{2x^2+11x-6}{x-2x^2}=0$;
6) $\frac{3x^2-5x-2}{x+3x^2}=0$.

21.5 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x^2-5x-7}{2x^2+x+7}=0$;
2) $\frac{2x^2+3x-5}{2x^2-3x+5}=0$;
3) $\frac{3x^2-2x+1}{x^2-2x+1}=0$;
4) $\frac{3x^2+4x+4}{x^2+4x+4}=0$;
5) $\frac{4x^2+4x+1}{2x+1}=0$;
6) $\frac{9x^2-6x+1}{3x-1}=0$.

21.6 Розв'яжіть рівняння, скориставшись умовою рівності двох дробів.

1) $\frac{5x}{x-5}=\frac{x^2}{x-5}$;
2) $\frac{x^2}{x-3}=\frac{3x}{x-3}$;
3) $\frac{x^2-8}{x+2}=\frac{2x}{2+x}$;
4) $\frac{x^2+4x}{x+6}=\frac{12}{6+x}$;
5) $\frac{x^2-10x}{x-1}=\frac{9}{1-x}$;
6) $\frac{x^2-9x}{x-2}=\frac{14}{2-x}$.

21.7 Знайдіть корені рівняння:

1) $x+6=\frac{6+x}{x}$;
2) $\frac{x+7}{x}=7+x$;
3) $\frac{24}{x-5}=x$;
4) $x=\frac{12}{x-4}$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $5x^3+20x=0$;
$5x(x^2+4)=0$;
$x_1=0$, $x_2=-2$, $x_3=2$;

2) $7x^2-7x=-1$;
$7x(x-1)=-1$;
$7x=-1$ або $(x-1)=-1$;
$x_1=-\frac{1}{7}$ $x_2=0$;

3) $\frac{x^2-3x-4}{x^2-1}=0$;
$\frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-1)}=0$;
$x+1=0$ або $x-4=0$;
$x_1=-1$ $x_2=4$;

4) $\frac{(x-5)(x-6)}{x-6}=1$;
$x-5=1$;
$x=6$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Яке з наведених рівнянь зайве?

$\frac{y^2-7y+10}{y-2}=0$

$\frac{y^2+7y+10}{y+5}=0$

$\frac{y^2+3y-10}{y-5}=0$

$\frac{y^2-3y-10}{y+2}=0$

ПРИГАДАЙТЕ!

$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{C(x)}{B(x)}$,

якщо $\begin{cases}A(x)=C(x),\\B(x)\neq 0\end{cases}$

Видавництво «Ранок»

ПРИГАДАЙТЕ!

Основна властивість пропорції

$$\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{C(x)}{D(x)};$$

$$A(x)\cdot D(x)=B(x)\cdot C(x),$$

де $B(x)\neq 0$, $D(x)\neq 0$

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Введіть нову змінну t. Розв'яжіть рівняння.

Заповніть у зошиті таблицю за зразком.

Обміняйтеся записами. Перевірте отримані результати.

Зробіть висновки щодо кількості коренів біквадратного рівняння.

1) $x^4-10x^2+9=0$;
2) $x^4+8x^2-9=0$;
3) $x^4+10x^2+9=0$;
4) $x^4-18x^2+81=0$;
5) $x^4+18x^2+81=0$;
6) $x^4+8x^2+25=0$.

Рівняння	1	2	3	4	5	6
Знак D	$D>0$					
Корені t_1 і t_2	$t_1=1$ $t_2=9$					
Знаки коренів t_1 і t_2	$t_1>0$ $t_2>0$					
Корені x_1 і x_2	$x_{1,2}=\pm 1$ $x_{3,4}=\pm 3$					
Кількість розв'язків	4					

21.8 Розв'яжіть рівняння, застосувавши основну властивість пропорції.

1) $\frac{3}{x^2-10}=\frac{1}{x}$;
2) $\frac{1}{x}=\frac{4}{x^2-21}$;
3) $\frac{x-5}{4x}=\frac{6}{x+5}$;
4) $\frac{x+4}{3x}=\frac{5}{x-4}$;
5) $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{3x-5}{x-5}$;
6) $\frac{2x+1}{3x-6}=\frac{x+1}{x-6}$.

21.9 Розв'яжіть рівняння способом множення обох частин на спільний знаменник.

1) $\frac{x+1}{x+5}+\frac{2-x}{x-5}=1$;
2) $\frac{3x+3}{x+2}+\frac{1-x}{x-2}=1$;
3) $\frac{x}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}=\frac{27}{x^2-9}$;
4) $\frac{x}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}=\frac{64}{x^2-16}$;
5) $\frac{1}{x}+\frac{x-3}{x-5}=\frac{10}{x^2-5x}$;
6) $\frac{3x}{x-1}-\frac{3}{x^2-x}=\frac{4}{x}$.

21.10 Знайдіть корені рівняння:

1) $1-\frac{5-y}{y}=\frac{2y+1}{y+1}$;
2) $1+\frac{y+1}{y}=\frac{2y-3}{y+2}$;
3) $\frac{y+1}{y-1}=2-\frac{y}{y+1}$;
4) $\frac{y}{y-2}=3-\frac{2y}{y+2}$;
5) $\frac{9}{y-6}+y=0$;
6) $y+\frac{4}{y+4}=0$.

21.11 Визначте всі значення змінної a, за яких значення:

1) дробів $\frac{5a-3}{a-3}$ і $\frac{2a-3}{a}$ рівні;
2) суми дробів $\frac{a}{a-3}$ і $\frac{a-8}{a}$ дорівнює 3;
3) дробу $\frac{1}{2a-3}$ на 2 більше, ніж значення дробу $\frac{1}{1-a}$;
4) дробу $\frac{3}{a-12}$ на 3 менше, ніж значення дробу $\frac{36}{a(a-12)}$.

21.12 Введіть нову змінну і розв'яжіть рівняння:

1) $(2x+1)^2-7(2x+1)-30=0$;
2) $(2x-3)^2-5(2x-3)-36=0$;
3) $2(7-0{,}5x)^2+11(7-0{,}5x)=6$;
4) $2(2+0{,}5x)^2-7(2+0{,}5x)=4$.

21.13 Розв'яжіть біквадратне рівняння:

1) $4x^4-5x^2+1=0$;
2) $9x^4-37x^2+4=0$;
3) $3x^4+11x^2-4=0$;
4) $2x^4+17x^2-9=0$;
5) $3x^4+14x^2+8=0$;
6) $5x^4+11x^2+2=0$;
7) $4x^4+20x^2+25=0$;
8) $9x^4+12x^2+4=0$;
9) $10x^2=25x^4+1$;
10) $12x^2=36x^4+1$;
11) $x^4+1=2x^2$;
12) $x^4+4=4x^2$.

Видавництво «Ранок»

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

21.14 Розв'яжіть рівняння з урахуванням області допустимих значень рівняння.

1) $x^2+10x+\dfrac{4}{x+8}=\dfrac{4}{x+8}-16$;

2) $y^2-2y-\dfrac{7}{y+3}=15-\dfrac{7}{y+3}$;

3) $2x^2-x+\dfrac{5}{x^2-1}=1+\dfrac{5}{x^2-1}$;

4) $3x^2+2x+\dfrac{10}{x^2-4}=16-\dfrac{10}{4-x^2}$.

- Від обох частин рівняння можна відняти той самий вираз.
- Обов'язково треба перевірити, чи задовольняють знайдені корені ОДЗ рівняння.

21.15 Скористайтеся методом заміни змінної й розв'яжіть рівняння:

1) $(x+6)^4-3(x+6)^2-4=0$;

2) $(x-4)^4-10(x-4)^2+9=0$;

3) $(2x-3)^4+1=2(3-2x)^2$;

4) $(2x-1)^4+16=8(1-2x)^2$.

21.16 Введіть нову змінну й розв'яжіть рівняння 1–7.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $x-2\sqrt{x}-3=0$. Вводимо нову змінну $t=\sqrt{x}$, тоді $x=\left(\sqrt{x}\right)^2=t^2$. Записуємо нове квадратне рівняння: $t^2-2t-3=0$. Знаходимо корені: $t_1=-1$; $t_2=3$. Повертаємося до початкової змінної: • $\sqrt{x}=-1$ — коренів немає, оскільки $\sqrt{x}>0$ • $\sqrt{x}=3$; $x=9$. *Відповідь*: 9.	2) $x-\sqrt{x}-30=0$; 3) $x-4\sqrt{x}+3=0$; 4) $x-9\sqrt{x}+20=0$; 5) $x+3\sqrt{x}-10=0$; 6) $x+16\sqrt{x}-17=0$; 7) $x+5\sqrt{x}+4=0$.

MATH FOR LIFE

21.17 **На пошті.** ІІІ запропонував поштовому оператору вирази, за якими можна обчислити об'єми коробок для пакування. Визначте, якими можуть бути вирази для обчислення вимірів коробок.

1) $V=3x^3+14x^2+8x$;

2) $V=6x^3+38x^2-28x$.

21.18 **Облаштування майданчика.** У дворі треба облаштувати майданчик для розваг із собаками шириною x м. Були зібрані кошти на 70 м огорожі майданчика з трьох сторін. Знайдіть довжину і ширину майданчика, якщо його площа має бути 600 м^2.

Видавництво «Ранок»

	Загальна кількість балів	Кількість завдань	Кількість балів за одне завдання
А	90	x	?
Г	80	$x-5$	?, на 2 б. >, ніж

21.19 **Тестування з математики.** У літній математичній школі діти проходять комп'ютерне тестування, що складається з двох частин — алгебри і геометрії. За всі правильно виконані завдання з алгебри можна набрати 90 балів, з геометрії — 80 балів. Кількість геометричних завдань на 5 менша, ніж алгебраїчних. Одне завдання з геометрії оцінюється на 2 бали вище, ніж одне завдання з алгебри.

Визначте кількість завдань у тесті з алгебри і з геометрії окремо, якщо всі завдання в межах кожної частини є рівноцінними.

Інший варіант роботи в електронному додатку

ЗНАЮ, УМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 13

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Розкладіть на множники квадратний тричлен x^2+x-2.

А	Б
$(x-1)(x+2)$	$(x+1)(x-2)$
В	**Г**
$(x-1)(x-2)$	$(x+1)(x+2)$

2 Розкладіть на множники квадратний тричлен $2x^2+x-3$.

А	Б
$2(x-1{,}5)(x+1)$	$(x-1{,}5)(x+1)$
В	**Г**
$2(x+1{,}5)(x-1)$	$(x+1{,}5)(x-1)$

3 Скоротіть дріб $\dfrac{x^2-6x+5}{x-1}$, якщо $x\neq 1$.

А	Б	В	Г
$x+5$	$x-5$	$x+6$	$x-6$

4 Розв'яжіть рівняння $x^3-2x^2+x=0$.

А	Б	В	Г
$-1;\ 1$	1	$0;\ 1$	$-1;\ 0;\ 1$

5 На виконання певного завдання перший дизайнер витрачає x хв, а другий — на 20 хв більше. Працюючи разом, два дизайнери виконують завдання за 24 хв. Укажіть рівняння для визначення x.

А	Б
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+20}=24$	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-20}=24$
В	**Г**
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+20}=\dfrac{1}{24}$	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-20}=\dfrac{1}{24}$

6 Установіть відповідність між рівнянням (1–3) та кількістю його коренів (А–Г).

1	$x\left(x^2-16\right)=0$	А	Один
2	$\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=0$	Б	Два
3	$x^4-3x^2-4=0$	В	Три
		Г	Чотири

7 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{36x^2-12x+1}{6x-1}=0$.

8 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{x^2+11x}{x-1}=\dfrac{12}{x-1}$.

Видавництво «Ранок»

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

21.20 Розв'яжіть рівняння, скориставшись умовою рівності добутку нулю.

1) $x^3-7x^2+10x=0$;
2) $2x^3-7x^2+3x=0$;
3) $x^3-8x^2+16x=0$;
4) $x^3+2x^2+3x=0$.

21.21 Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}=0$; 2) $\dfrac{x^2+3x-28}{49-x^2}=0$; 3) $\dfrac{x^2+2x}{x-3}-\dfrac{15}{x-3}=0$.

21.22 Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{3}{4}$;
2) $\dfrac{2}{x^2+5x}-\dfrac{1}{x^2-5x}=\dfrac{9+x}{x^2-25}$.

21.23 Введіть нову змінну і розв'яжіть рівняння:

1) $(x-5)^2-3(x-5)-4=0$;
2) $2(x-2)^2-5(2-x)+2=0$.

21.24 Розв'яжіть біквадратне рівняння методом заміни змінної:

1) $x^4-50x^2+49=0$; 2) $x^4+2x^2-8=0$; 3) $x^4+7x^2+12=0$.

21.25 Скористайтесь умовою рівності добутку нулю й розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-7)(x^2+3x-10)=0$;
2) $(x^2-4)(5x^2+x)=0$.

21.26 Розкладіть ліву частину рівняння на множники і розв'яжіть рівняння.

1) $x^2(4+x)+4x(x+4)-21(x+4)=0$;
2) $x^2(x-7)-5x(x-7)+6(7-x)=0$.

21.27 Розв'яжіть рівняння, використовуючи умову рівності дробу нулю.

1) $\dfrac{(x+1)^2(x-6)}{x+1}=0$; 2) $\dfrac{(9-x)(x+4,7)}{x^2-7x-18}=0$; 3) $\dfrac{2x^2-9x-5}{x+2x^2}=0$.

21.28 Розв'яжіть рівняння.

1) $\dfrac{2x^2+7x+6}{2x^2+6x+7}=0$; 2) $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+2x+1}=0$; 3) $\dfrac{25x^2-10x+1}{5x-1}=0$.

21.29 Знайдіть корені рівняння:

1) $x+9=\dfrac{9+x}{x}$;
2) $\dfrac{x+8}{x}=8+x$;
3) $x=\dfrac{20}{x-1}$;
4) $\dfrac{21}{x-4}=x$;
5) $\dfrac{x+3}{2x}=\dfrac{4}{x-3}$;
6) $\dfrac{2x+1}{3x-4}=\dfrac{x+1}{x-4}$.

Завдання 21.20–21.24	→ Приклади 1–5
Завдання 21.25–21.26	→ Практикум 21.1–21.2
Завдання 21.27–21.28	→ Практикум 21.4–21.5
Завдання 21.29	→ Практикум 21.7, 21.8
Завдання 21.30–21.34	→ Практикум 21.9–21.13
Завдання 21.35–21.36	→ Інтелектуальний фітнес 21.14–21.15
Завдання 21.37, 21.39	→ Math for life 21.17, 21.19
Завдання 21.40	→ Інтелектуальний фітнес 21.16

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Перенесіть таблицю в зошит, продовжте її заповнення. Зробіть потрібні позначки в другому стовпчику таблиці. Поясніть свої міркування.

Способи й методи розв'язування квадратних і раціональних рівнянь

Способи і методи	Завжди/іноді
За формулою коренів	Завжди
Графічно	Іноді
За теоремою Вієта	...
Розкладання на множники	...
...	...
...	...

Видавництво «Ранок»

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Проблема розв'язування рівнянь 4-го степеня виникає, наприклад, в алгоритмах комп'ютерної графіки, які використовуються для створення спецефектів у фільмах, мультиплікації чи телебаченні, у комп'ютерних іграх.

IQ

BE SMART

Ігри Нескорених — міжнародні спортивні змагання, в яких беруть участь військовослужбовці та ветерани, що отримали поранення під час виконання військових обов'язків.
За результатами ігор, що відбулися 8–16 лютого 2025 року і стали першими в історії зимовими гібридними іграми, українські спортсмени здобули 30 медалей: 12 золотих, 11 срібних та 7 бронзових.

	Ряди	Місця
Було	x	$\frac{760}{x}$
Стало	$x-1$	$\frac{760}{x-1}$, на 2 >, ніж

21.30 Розв'яжіть рівняння.

1) $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$; 2) $\frac{5x}{x+2}-\frac{4}{x}=\frac{20}{x^2+2x}$.

21.31 Знайдіть корені рівняння.

1) $1+\frac{3y+1}{y}=\frac{4y+1}{y+1}$; 2) $\frac{y}{y-3}=4-\frac{3y}{y+3}$; 3) $\frac{1}{y-2}+y=0$.

21.32 Визначте всі значення змінної a, за яких значення:

1) дробів $\frac{3a+2}{a}$ і $\frac{2a+3}{a+2}$ рівні;

2) дробу $\frac{a}{a+1}$ на 2 більше, ніж значення дробу $\frac{a+1}{1-a}$.

21.33 Введіть нову змінну і розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-1)^2-6(2x-1)-55=0$; 2) $2(3+0{,}5x)^2+13(3+0{,}5x)=7$.

21.34 Розв'яжіть біквадратне рівняння:

1) $4x^4-37x^2+9=0$; 3) $3x^4+16x^2+5=0$; 5) $14x^2=49x^4+1$;

2) $2x^4+7x^2-4=0$; 4) $25x^4+20x^2+4=0$; 6) $x^4+9=6x^2$.

21.35 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+8+\frac{1}{x^2-16}=6x-\frac{1}{16-x^2}$;

2) $3x^2+16+\frac{7}{x^2-4}=14x-\frac{7}{4-x^2}$.

21.36 Скористайтеся методом заміни змінної й розв'яжіть рівняння:

1) $(x-7)^4-5(x-7)^2+4=0$; 2) $(2x-5)^4+81=18(5-2x)^2$.

21.37 Об'єм коробки для пакування визначається за допомогою виразу $V=6x^3+19x^2+15x$. Запишіть вирази для визначення вимірів коробки.

21.38 Завершіть розв'язання Актуальної задачі.

21.39 Учасників урочистого закриття «Ігор Нескорених» планували розсадити в залі, розрахованому на 760 місць. Спочатку в залі було x рядів, але потім один ряд прибрали, додавши в кожному ряді 2 місця. Загальна кількість місць не змінилася. Скільки рядів було в залі спочатку?

Бонусне завдання

21.40 Знайдіть корені рівняння:

1) $x-10\sqrt{x}+9=0$; 2) $x+\sqrt{x}-6=0$; 3) $x+12\sqrt{x}+27=0$.

Видавництво «Ранок»

§22 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ. КВАДРАТНЕ РІВНЯННЯ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРИКЛАДНОЇ ЗАДАЧІ

УЧОРА Ви моделювали реальні ситуації за допомогою лінійних рівнянь та їх систем, навчилися розв'язувати квадратні рівняння та рівняння, що зводяться до квадратних

СЬОГОДНІ Ви моделюватимете реальні ситуації за допомогою квадратних та дробово-раціональних рівнянь

ЗАВЖДИ Ви зможете складати математичні моделі, здійснювати розрахунки, аналізувати отримані результати для успішної реалізації поставлених завдань

mk.com.ua/109761

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

СИЛИ СПЕЦІАЛЬНИХ ОПЕРАЦІЙ

Допоможіть нашим захисникам у підготовці й плануванні військових операції. Розв'яжіть задачі, склавши рівняння.

1) Загін бойових плавців подолав 2 км за течією річки, виконав завдання і повернувся назад, витративши на всю операцію 1 год 2 хв. Знайдіть швидкість плавців у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год, а на виконання завдання було витрачено 30 хв.

Рівняння: $\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}=\frac{32}{60}$.

2) Два підрозділи, працюючи разом, виконують завдання з підготовки й перевірки спецобладнання за 4 год. Підрозділ «А» може виконати це задання на 6 год швидше за підрозділ «О». За який час кожен підрозділ може виконати це завдання окремо?

Рівняння: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{4}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Сили спеціальних операцій — наймолодша та найсучасніша складова Збройних Сил України. Це — військова еліта держави. Гаслом Сил спеціальних операцій ЗСУ було обрано бойове гасло легендарного українського князя Святослава Хороброго — «Іду на ви!». На відзнаку важливої ролі Сил спеціальних операцій ЗСУ в забезпеченні обороноздатності держави та героїзму особового складу було встановлене державне свято — День ССО, яке відзначається 29 липня.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

За допомогою квадратних рівнянь та рівнянь, що зводяться до квадратних, можна розв'язувати велику кількість задач.

- Обирайте змінну так, щоб спосіб розв'язування рівняння був найраціональнішим.
- Ви маєте знайти не просто корені рівняння, складеного за умовою задачі, а розв'язок задачі. Тому важливо пам'ятати, що саме є шуканим у задачі.
- Значення коренів можуть задовольняти ОДЗ рівняння, але не задовольняти умову задачі.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- математична модель задачі (mathematical model of the problem)
- дослідження розв'язування задачі (exploring problem solving)
- стратегія розв'язування задачі (problem solving strategy)

Видавництво «Ранок»

Аналіз умови задачі
↓
Математична модель задачі
↓
Рівняння
↓
Розв'язування рівняння
↓
Аналіз отриманих результатів
↓
Відповідь

Можна виокремити кілька етапів розв'язування текстової задачі, серед яких ключовими є створення математичної моделі та складання рівняння.

Алгоритм розв'язання текстової задачі за допомогою рівняння

1. Проаналізувати умову задачі (основні величини, зв'язок між ними, вимоги задачі).
2. Створити математичну модель (відтворити умову задачі у вигляді таблиці, рисунка, схеми тощо, скласти рівняння до задачі).
3. Розв'язати отримане рівняння.
4. Проаналізувати одержані результати з огляду на умову задачі.
5. Записати відповідь.

Задачі на арифметичне співвідношення між об'єктами

ПРИКЛАД 1

У рамках проведення фестивалю, присвяченого Європейському дню мов, видавництво підготувало однакові подарунки кожному учаснику — певну кількість книжок, усього разом 150 книжок. Якби учасників було на 5 більше, то кожний отримав би на 1 книжку менше. Скільки було учасників фестивалю?

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Нехай фактична кількість учасників — x осіб. Якби їх було на 5 більше, то стало би $(x+5)$ осіб. Загальна кількість книжок незмінна в обох випадках і становить 150 шт.

2 Створюємо математичну модель задачі

	Загальна кількість книжок	Кількість учасників	Кількість книжок у кожного	Зв'язок між величинами
I випадок (фактичний)	150	x	$\frac{150}{x}$	на 1 <
II випадок	150	$x+5$	$\frac{150}{x+5}$	

Складаємо рівняння за умовою задачі: $\frac{150}{x}-\frac{150}{x+5}=1$.

3 Розв'язуємо рівняння

Множимо обидві частини рівняння на спільний знаменник дробів $x(x+5)$. $\frac{150}{x}-\frac{150}{x+5}=1 \mid \cdot x(x+5)$

Спрощуємо рівняння. $x^2+5x-750=0$

Знаходимо корені рівняння. $x_1=25,\ x_2=-30$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Щороку 26 вересня відзначають Європейський день мов, запроваджений Радою Європи у 2001 р. на підтримку лінгвістичного розмаїття та розвитку викладання мов у світі.

- Кількість книжок, що одержав кожний учасник = $\frac{\text{загальна кількість книжок}}{\text{кількість учасників}}$.
- За умовою задачі $\frac{150}{x+5} < \frac{150}{x}$ на 1

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Пам'ятаємо:

ОДЗ: $x\neq 0$, $x\neq -5$;

$D=25-4\cdot(-750)=3025>0$,

отже, рівняння має розв'язки

Видавництво «Ранок»

4 Аналізуємо отримані розв'язки рівняння з огляду на умову задачі

Оскільки x — кількість учасників фестивалю, то від'ємний корінь $x_2 = -30$ не задовольняє умову задачі. Шукана кількість учасників $x_1 = 25$.

Відповідь: 25 учасників.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Користуючись наведеними підказками, створіть математичні моделі та розв'яжіть задачі.

1) Певна кількість художників мала створити сто двадцять ескізів костюмів для фільму, розподіливши роботу порівну. Якби художників було на 2 особи більше, то кожен мав би створити на 2 ескізи менше. Знайдіть фактичну кількість художників, склавши відповідне рівняння.

	Загальна кількість ескізів	Кількість художників	Кількість ескізів у кожного
I розподіл (фактичний)	120	x	$\frac{120}{x}$
II розподіл	120	$x+2$	$\frac{120}{x+2}$ на 2 <

2) Працівниця автосервісу мала провести діагностику 60 автівок. Перевіряючи щодня на 2 автівки більше, ніж планувалося, майстриня закінчила роботу на 8 днів раніше строку. Яку кількість автівок щодня діагностувала працівниця?

	Загальна кількість автівок	Кількість автівок у день	Кількість днів
I розподіл	60	x	$\frac{60}{x}$
II розподіл			на 8 <

3) Було заплановано, що розв'язування завдань підсумкової роботи триватиме 40 хв. Однак складність завдань було підвищено, тому виконання кожного з них вимагало на 2 хв більше. Знайдіть початкову кількість завдань, якщо після ускладнення їхню кількість зменшили на 1, а запланований час на виконання роботи не змінився.

	Час виконання всієї роботи (хв)	Час виконання одного завдання (хв)	Кількість завдань
До ускладнення	40	x	
Після ускладнення			на _ завдання <

4) Екскурсія в музеї мала тривати 90 хв. Але виявилося, що три із запланованих для ознайомлення залів закрито для відвідувачів. Тому на огляд кожного з решти залів прийшлося на 5 хв більше, ніж планувалося. Яку кількість залів відвідали екскурсанти, якщо загальна тривалість екскурсії не змінилася?

	Загальний час екскурсії (хв)	Кількість відвіданих залів	Час на огляд одного залу (хв)
За планом			
Фактично			на _ хв >

Видавництво «Ранок»

ПРИКЛАД 2

О 10:15 туристична група вирушила від турбази до водоспаду на байдарці вниз за течією річки. Пройшовши річкою 10 км, туристи й туристки зупинилися біля водоспаду для відпочинку, який тривав 5 год. Потім вони попливли назад і прибули на турбазу о 19:00. Визначте власну швидкість байдарки, якщо швидкість течії 2 км/год.

1 Аналізуємо умову задачі

Загальний час перебування в поході:

$$19 \text{ год } 00 \text{ хв} - 10 \text{ год } 15 \text{ хв} = 8 \text{ год } 45 \text{ хв}.$$

Час руху байдарками —

$$8 \text{ год } 45 \text{ хв} - 5 \text{ год} = 3 \text{ год } 45 \text{ хв} = 3\frac{3}{4} \text{ год}.$$

Нехай власна швидкість байдарки x км/год, тоді:

- швидкість байдарки за течією $(x+2)$ км/год;
- швидкість байдарки проти течії $(x-2)$ км/год.

Відстань, пройдена за течією і проти течії, однакова — 10 км.

2 Створюємо математичну модель задачі

	Швидкість v (км/год)	Відстань s (км)	Час t (год)	Зв'язок між величинами
За течією	$x+2$	10	$\frac{10}{x+2}$	$3\frac{3}{4}$
Проти течії	$x-2$	10	$\frac{10}{x-2}$	

Складемо рівняння по часу руху на байдарках:

$$\frac{10}{x+2}+\frac{10}{x-2}=3\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$$

3 Розв'язуємо рівняння

Знаходимо ОДЗ рівняння. ОДЗ: $\begin{cases} x+2\neq 0, \\ x-2\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq -2, \\ x\neq 2 \end{cases}$

Ділимо обидві частини рівняння на 5. $\frac{10}{x+2}+\frac{10}{x-2}=\frac{15}{4} \mid :5$

Множимо обидві частини рівняння на спільний знаменник дробів $4(x+2)(x-2)$. $\frac{2}{x+2}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{4} \mid \cdot 4(x+2)(x-2)$

Спрощуємо рівняння. $3x^2-16x-12=0$

Знаходимо корені рівняння. $x_1=6,\ x_2=-\frac{2}{3}$

$t_{\text{руху загальна}} = 3 \text{ год } 45 \text{ хв} = 3\frac{3}{4} \text{ год}$

$v_{\text{власна}} = x \text{ км/год}$

$v_{\text{течії}} = 2 \text{ км/год}$

$v_{\text{за течією}} = (x+2) \text{ км/год}$

$v_{\text{проти течії}} = (x-2) \text{ км/год}$

$s_{\text{за течією}} = s_{\text{проти течії}} = 10 \text{ км}$

$t = \frac{s}{v}$

$t_{\text{за течією}} + t_{\text{проти течії}} = t_{\text{руху загальна}}$

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

Патрульний на гідроциклі пройшов 54 км за течією річки і 40 км — проти течії, витративши на патрулювання 45 хв. Знайдіть власну швидкість гідроцикла (у км/год), якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/ год.

Для розв'язання задачі були складені такі рівняння:

1) $\frac{54}{x-2}+\frac{40}{x+2}=\frac{3}{4}$;

2) $\frac{54}{x+2}-\frac{40}{x-2}=\frac{3}{4}$;

3) $\frac{54}{x+2}+\frac{40}{x-2}=45$.

Визначте, чи є в них помилки. Якщо є, то які.

Видавництво «Ранок»

4 Аналізуємо отримані розв'язки рівняння з огляду на умову задачі

Оскільки x — власна швидкість байдарки, то від'ємний корінь $x_2 = -\frac{2}{3}$ не задовольняє умову задачі.

Щоб байдарка могла рухатися проти течії річки, її власна швидкість має бути **більшою** за швидкість течії. Перевіряємо додатний корінь рівняння: $6 > 2$. Отже, власна швидкість байдарки 6 км/год.

Відповідь: 6 км/год.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Має бути $v_{\text{власна}} > v_{\text{течії}}$!

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Користуючись наведеними підказками, створіть математичні моделі та розв'яжіть задачі.

1) Екскурсійний катер пройшов за течією річки 12 км і повернувся назад, витративши на подорож $1\frac{7}{20}$ год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

	v (км/год)	s (км)	t (год)	
За течією	$x+2$	12	$\frac{12}{x+2}$	$1\frac{7}{20}$
Проти течії	$x-2$	12	$\frac{12}{x-2}$	

2) Микола проїхав на квадроциклі 20 км зі швидкістю x км/год і 15 км зі швидкістю, на 10 км/год меншою. На всю подорож Микола витратив 1 год. Знайдіть x.

	v (км/год)	s (км)	t (год)	
I етап	x	20	$\frac{20}{x}$	1
II етап		15		

3) Літак виконує рейси між Римом і Парижем, відстань між якими 1440 км. Рейс із Риму до Парижу тривав на 1 год більше, ніж зворотний рейс, оскільки літак рухався зі швидкістю, на 72 км/год меншою.

а) Знайдіть швидкість літака під час зворотного рейсу. Вважайте погоду спокійною, знехтуйте швидкістю вітру.

б) Олена вилетіла рейсом із Риму о 10:30. З'ясуйте, чи встигне вона на екскурсію в Лувр, заплановану на 17:00, якщо поїздка від аеропорту до Лувру триває 1 год?

	v (км/год)	s (км)	t (год)
Рим — Париж			
Париж — Рим	x	1440	на _ год >

4) Турист проплив 10 км проти течії річки на моторному човні, власна швидкість якого становить 15 км/год. Назад турист повернувся на плоту. Відомо, що плотом він плив на 1 год більше, ніж човном.

а) Знайдіть швидкість течії річки.

б) Визначте, скільки часу витратив би турист на зворотний шлях, якби повернувся на човні.

	v (км/год)	s (км)	t (год)
Проти течії (човном)	$15-x$		
За течією (плотом)			на _ год >

Видавництво «Ранок»

Задачі на сумісну роботу

ПРИКЛАД 3

Софійка та Ярослав прикрашали листівки до Днів пам'яті та примирення. Софійка самостійно може прикрасити всі листівки на 6 хв швидше, ніж Ярослав. За який час може самостійно прикрасити всі листівки Ярослав, якщо разом діти можуть прикрасити всі листівки за 7,2 хв?

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Нехай час, протягом якого Софійка прикрасить усі листівки, — x хв.

Тоді час, протягом якого цю роботу виконає Ярослав, — $(x+6)$ хв.

Час, протягом якого діти разом можуть прикрасити листівки, — 7,2 хв.

Загальну кількість листівок (загальний обсяг роботи) V приймемо за одиницю.

Швидкість прикрашання всіх листівок (продуктивність праці) p обчислюємо за формулою $p=\frac{V}{t}$.

2 Створюємо математичну модель задачі

	Час роботи самостійно (хв)	Продуктивність самостійної роботи	Час роботи разом (хв)	Спільна продуктивність роботи
Софійка	x	$\frac{1}{x}$	7,2	$\frac{1}{7,2}$
Ярослав	$x+6$	$\frac{1}{x+6}$		

Спільна продуктивність роботи (швидкість прикрашання листівок за одиницю часу) обома дітьми складає $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}\right)$.

За умовою задачі вона дорівнює $\frac{1}{7,2}$.

Складаємо рівняння: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{5}{36}$.

3 Розв'язуємо рівняння

Множимо обидві частини рівняння на спільний знаменник $36x(x+6)$. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{5}{36} \mid \cdot 36x(x+6)$

Спрощуємо рівняння. $5x^2-42x-216=0$

Знаходимо корені квадратного рівняння. $x_1=12,\ x_2=-\frac{8}{5}$

СЛІД ЗНАТИ!

- p — продуктивність праці (обсяг роботи, яку виконано за одиницю часу);
- V — загальний обсяг роботи;
- t — час, протягом якого кожний виконує весь обсяг роботи, працюючи самостійно;

$$V=p\cdot t$$

Якщо не зазначено, який саме обсяг роботи виконується, і це не впливає на розв'язок задачі, то вважають, що $V=1$.

$$p=\frac{V}{t}$$

$$p_{\text{Софійки}}+p_{\text{Ярослава}}=p_{\text{спільна}}$$

$$p_{\text{спільна}}=\frac{1}{t_{\text{спільний}}}$$

Продуктивність праці = $\frac{\text{загальний обсяг роботи}}{\text{час виконання роботи}}$

Перетворимо дріб $\frac{1}{7,2}$, маємо: $\frac{1}{7,2}=\frac{1}{7\frac{1}{5}}=\frac{1}{\frac{36}{5}}=\frac{5}{36}$.

Видавництво «Ранок»

4 **Аналізуємо отримані розв'язки рівняння з огляду на умову задачі**

Оскільки x — проміжок часу, то $x > 0$. Тому від'ємний корінь $x_2 = -\frac{8}{5}$ не задовольняє умову задачі.

Отже, Софійка може прикрасити всі листівки за 12 хв, а Ярослав — за $12+6=18$ (хв).

Відповідь: 18 хв.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розв'яжіть задачі.

1) На випробуваннях два різні марсоходи A і B, працюючи разом, виконали завдання за 12 год. За скільки годин виконає це завдання кожний марсохід, працюючи самостійно, якщо марсохід A може зробити це на 7 год швидше?

	t окремо (год)	p окремо	t разом (год)	p разом
A	x	$\frac{1}{x}$	12	$\frac{1}{12}$
B	$x+7$	$\frac{1}{x+7}$		

2) Художнику A для створення муралу потрібно на 4 год більше, ніж художниці B. Якщо художник A буде працювати над муралом 3 год, а потім його замінить художниця B, то вона закінчить роботу за 6 год. Скільки годин витратить на створення муралу художниця B, працюючи самостійно?

	t окремо (год)	p окремо	t фактично (год)	Загальний обсяг роботи
A	$x+4$			
B	x	$\frac{1}{x}$	6	$\frac{6}{x}$

3) Бот A виконує завдання на 4 хв швидше, ніж бот B. Бот A виконував завдання протягом 2 хв, а потім його замінив бот B. Після того як B попрацював 3 хв, виявилося, що виконано половину завдання.

а) За який час виконає все завдання бот B?

б) За який час виконає 25 % всього завдання бот A?

	Бот A	Бот B
t окремо (хв)	x	
p окремо	$\frac{1}{x}$	
t фактично (хв)	2	
Обсяг роботи окремо	$\frac{2}{x}$	
Фактичний обсяг роботи		

4) Майстер A може виконати все замовлення на 12 год швидше, ніж майстер B. Протягом перших 4 год працював майстер B, потім 10 год — майстри A і B разом. У результаті за 14 год було виконано лише $\frac{2}{3}$ усього замовлення.

а) За скільки годин може виконати все замовлення майстер A?

б) Скільки годин потрібно майстру B, щоб самостійно закінчити виконання всього замовлення після 10 год сумісної роботи з майстром A?

	Майстер A	Майстер B
t окремо (год)	x	
p окремо		
t фактично (год)		$4 + 10$
Обсяг роботи окремо		$_ + _$
Фактичний обсяг роботи		

Видавництво «Ранок»

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

1. Площа прямокутника дорівнює 96 см^2, його ширина x см, а довжина на 6 см більша за ширину. Яке рівняння відповідає цій умові?

1) $2x+2(x-6)=96$;
2) $2x+2(x+6)=96$;
3) $x(x-6)=96$;
4) $x(x+6)=96$.

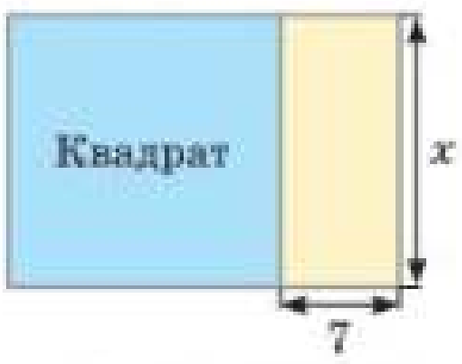
Обміняйтеся записами і перевірте результати одне одного.

2. Площа прямокутника дорівнює 48 см^2, одна сторона менша від іншої на 8 см. Знайдіть сторони прямокутника.

Виберіть, хто з пари позначить через змінну x більшу сторону прямокутника, хто — меншу. Розв'яжіть задачу, склавши рівняння, і порівняйте результати.

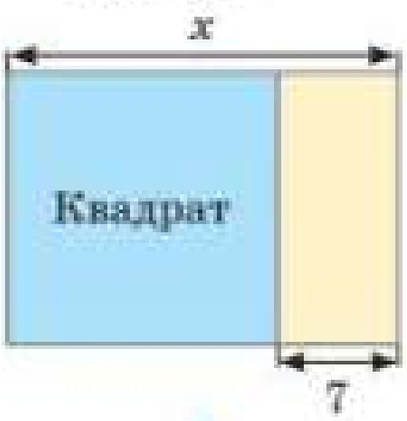
ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

$S_{\text{загальна}}=330$



$x^2+7x-330=0$

$S_{\text{загальна}}=330$



?

ПРАКТИКУМ

22.1 Волонтеркам замовили сплести за певний час 180 маскувальних костюмів «кікімора». Українські патріотки виконали цю роботу на 5 тижнів раніше, оскільки щотижня плели на 3 «кікімори» більше, ніж планувалося. Скільки «кікімор» плели волонтерки щотижня?

22.2 Перша автівка за кілька рейсів мала перевезти 96 т піску, але весь пісок довелося перевозити другою автівкою, вантажопідйомність якої була на 4 т більшою. Через це було зроблено на 4 рейси менше, ніж планувалося. Знайдіть вантажопідйомність другої машини.

22.3 Олена відправила 200 повідомлень до обіду, розсилаючи щогодини x повідомлень, та 90 повідомлень — після обіду, розсилаючи щогодини на 20 повідомлень менше, ніж до обіду. На всю роботу дівчина витратила 7 год. Визначте x.

22.4 Перший застосунок із вбудованим ШІ генерує 90 зображень на 1 хвилину швидше, ніж другий застосунок генерує 100 зображень. Щохвилини другий застосунок генерує на 5 зображень менше, ніж перший.

1) Скільки зображень щохвилини генерує перший застосунок?
2) Скільки всього зображень згенерують обидва застосунки за 10 хв?

22.5 Патрульний катер пройшов 72 км за течією річки та повернувся назад, витративши на весь шлях 7 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

22.6 З бухти A до бухти B, відстань між якими становить 60 км, яхта йшла із середньою швидкістю x км/год. На зворотному шляху середня швидкість яхти збільшилася на 3 км/год завдяки сприятливому напрямку вітру. Тому на зворотний шлях було витрачено на 1 год менше. Знайдіть x.

22.7 Під час змагань зі спортивного орієнтування Дмитро подолав 7 км по шосе і 5 км путівцем. По шосе Дмитро рухався зі швидкістю, на 4 км/год більшою, ніж путівцем. Визначте швидкість його руху по шосе, якщо на весь шлях Дмитро витратив 1 год.

22.8 Потяг вирушив від станції A до станції B, відстань між якими 160 км, із запізненням на 20 хв. Щоб прибути на станцію B вчасно, машиніст збільшив заплановану за розкладом швидкість на 16 км/год.

1) Знайдіть заплановану швидкість потяга.
2) Якою мала би бути швидкість потяга, щоб прибути на станцію B вчасно, якби він вийшов зі станції A із запізненням на 1 год?
3) Чи є в Україні потяги, що розвивають таку швидкість?

Видавництво «Ранок»

22.9 Ірина та Ольга, влаштовуючись на роботу в супермаркет, виконували тестове завдання з розміщення продукції у відділі. Ірина, працюючи самостійно, виконала завдання на 2 год швидше, ніж Ольга. За який час Ірина впоралася із завданням, якщо обидві дівчини, працюючи разом, виконали б запропоноване завдання за $3\frac{3}{7}$ год?

22.10 Дві робітниці висаджували квіти на клумбі до Дня Києва. Спочатку перша робітниця працювала самостійно, а через 1 год до неї приєдналася друга, і разом вони закінчили роботу за 36 хв. За який час може висадити квіти кожна робітниця, працюючи самостійно, якщо друга робітниця витратить на цю роботу на 1 год більше, ніж перша?

22.11 Працівник метрополітену піднімався нерухомим ескалатором. Через 10 с після початку підйому ескалатор увімкнули. Продовжуючи рух за ходом ескалатора, працівник ще через 50 с завершив підйом (тобто весь підйом тривав 1 хв). За скільки секунд t працівник підніметься вгору нерухомим ескалатором, якщо відомо, що ескалатор піднімає вгору працівника, який нерухомо стоїть на ньому, на 1 хв довше за t. Швидкості руху працівника та ескалатора вважайте постійними.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

Марія і Дмитро разом склали пазл із мапою України за 4 год. За скільки годин (позначимо за x) може скласти цей пазл Дмитро, працюючи окремо, якщо Марії для цього знадобилось би на 6 год менше? Для розв'язання задачі були складені такі рівняння:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}=4$;

2) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{4}$;

3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$.

Яке рівняння відповідає умові задачі? Які помилки в інших рівняннях?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

22.12 Усередину судна через тріщину надходила вода зі швидкістю 6 л/с. Коли об'єм води всередині судна становив 840 л, увімкнули дві помпи з однаковою продуктивністю (у л/с), які почали відкачувати воду. Коли об'єм води знизився наполовину, одну помпу вимкнули. Поки всередині судна була вода, тріщину не латали, тобто вода продовжувала надходити з тією самою швидкістю. Усю воду, що була всередині судна, відкачали за 135 с, після чого тріщину залатали. З якою швидкістю (у л/с) кожна помпа відкачувала воду?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

22.13 Із 45 дітьми з особливими потребами працювали x аніматорів, кожний із яких займався з однаковою кількістю дітей. Якби аніматорів було на 2 особи більше, то в групі кожного аніматора було б на 6 дітей менше. Знайдіть x, склавши відповідне рівняння.

22.14 На прийом до лікаря-кардіолога записалися 24 пацієнти. Приймаючи щогодини на 1 особу більше, ніж планувалося, лікар закінчив прийом на 2 год раніше запланованого часу. Скільки пацієнтів приймав лікар щогодини?

Завдання 22.13–22.16	→	Приклад 1
Завдання 22.17	→	Практикум 22.3
Завдання 22.18–22.21	→	Приклад 2
Завдання 22.22	→	Практикум 22.6
Завдання 22.23–22.26	→	Приклад 3
Завдання 22.27, 22.28	→	Практикум 22.10, 22.11

Видавництво «Ранок»

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Як не спізнитися на зустріч

- Виберіть будь-який піший маршрут, наприклад, від свого дому до місця зустрічі з кимось.
- Визначте довжину маршруту (у м або в км).
- Пройдіть по цьому маршруту зі звичною для себе швидкістю та виміряйте час (у хв або в год), який ви витратили на дорогу.
- Обчисліть швидкість свого руху (у м/хв або в км/год).
- Визначте, на скільки ви маєте збільшити свою швидкість, щоб прийти на місце зустрічі вчасно, якщо почали рух із запізненням на 10 хв.
- Складіть відповідну задачу та розв'яжіть її разом зі своїми однокласниками й однокласницями.

22.15 На подолання маршруту зі штучними перешкодами на квадроциклах відводилося 60 хв. Складність перешкод було підвищено, тому час на подолання кожної з них збільшився на 2 хв. Знайдіть початкову кількість штучних перешкод, якщо після ускладнення їхню кількість зменшили на 1, а час проходження маршруту не змінився.

22.16 На квест «У пошуках київських котиків» було виділено 80 хв. Але виявилося, що три із запланованих локацій закрито для відвідувачів. Тому на проходження кожної з решти локацій було відведено на 6 хв більше. Скільки локацій відвідали учасники, якщо тривалість квесту не змінилася?

22.17 Два роботи працювали у відділі технічного контролю. Кожний робот мав перевірити якість 2400 деталей. Перший перевіряв x деталей щогодини, а другий — на 50 деталей більше. Другий робот закінчив перевірку на 4 год швидше, ніж перший. Визначте x.

22.18 Вероніка проїхала на автомобілі 20 км зі швидкістю x км/год і 25 км зі швидкістю, на 10 км/год більшою. На весь шлях Вероніка витратила 1 год. Знайдіть x.

22.19 Сторожовий корабель пройшов за течією річки 10 км і повернувся назад, витративши на подорож $3\frac{3}{7}$ год. Знайдіть власну швидкість корабля, якщо швидкість течії річки дорівнює 1 км/год.

22.20 Літак виконує рейс між містами A і B, відстань між якими дорівнює 1200 км. Рейс із A в B тривав на 30 хв довше, ніж зворотний рейс, оскільки літак рухався зі швидкістю, на 200 км/год меншою. Знайдіть швидкість літака під час рейсу із B в A.

22.21 Спортсмени пройшли 6 км проти течії річки на байдарці, а повернулися на плоту. На подорож плотом вони витратили на 1 год більше, ніж на подорож байдаркою. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість байдарки дорівнює 5 км/год.

22.22 Пішохід пройшов відстань 6 км з пункту A до пункту B, рухаючись із постійною швидкістю x км/год. Назад із пункту B до пункту A він повертався, збільшивши швидкість на 1 км/год, унаслідок чого витратив на зворотний шлях на 12 хв менше. Знайдіть x.

22.23 Два батискафи A і B різної потужності, працюючи разом, збирають зразки за 6 год. За скільки годин виконає це завдання батискаф A, працюючи самостійно, якщо він може зробити це на 5 год швидше за батискаф B?

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Десять 3D-принтерів друкують десять іграшок за десять хвилин. За скільки хвилин двісті 3D-принтерів надрукують двісті таких іграшок?

Видавництво «Ранок»

22.24 Тестувальнику A на перевірку програмного забезпечення потрібно на 6 год менше, ніж тестувальнику B. Якщо спочатку працюватиме тестувальник A протягом 2 год, а потім його замінить тестувальник B, то останній закінчить роботу через 15 год.

1) Скільки годин витрачає на самостійну перевірку програмного забезпечення тестувальник A?
2) Яку частину роботи з перевірки програмного забезпечення (у %) виконає тестувальник B за 9 год?

22.25 Роботу-хірургу A для проведення операції потрібно на 16 хв менше, ніж роботу-хірургу B. Робот A почав операцію, а через 3 хв його замінив робот B. Через 5 хв роботи робота B виявилося, що зроблено лише четверту частину операції.

1) За який час (у хв) проводить усю операцію робот-хірург B?
2) За який час (у хв) робот-хірург A виконає 50 % усієї операції?

22.26 Майстер B виконує певне замовлення на 15 год швидше, ніж майстер A. Над замовленням перші 7 год самостійно працював майстер B, потім ще 3 год — майстри A і B разом. За ці 10 год роботи було виконано $\frac{2}{5}$ усього замовлення.

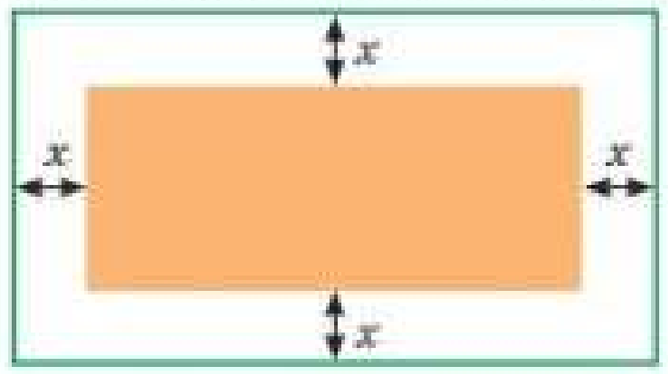
1) За який час (у год) виконує все замовлення майстер B?
2) Скільки годин потрібно майстру A, щоб самостійно закінчити виконання всього замовлення після 3 год сумісної роботи з майстром B?

22.27 Два робітники встановлювали каркасний басейн. Спочатку перший робітник почав установлювати басейн самостійно, а через 1 год до нього приєднався другий робітник. Після цього робітники разом закінчили роботу за 1 год 15 хв. За скільки годин може встановити басейн кожний робітник, працюючи самостійно, якщо другий робітник виконує цю роботу на 2 год довше, ніж перший?

22.28 Працівник метрополітену спускався вниз нерухомим ескалатором. Через 10 с після початку спуску ескалатор увімкнули. Продовжуючи рух за ходом ескалатора, працівник ще через 50 с завершив спуск (тобто весь спуск тривав 1 хв). За скільки секунд t працівник спуститься вниз нерухомим ескалатором, якщо відомо, що ескалатор спускає вниз працівника, який нерухомо стоїть на ньому, на 25 с довше за t. Швидкості руху працівника та ескалатора вважайте постійними.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Прямокутний розарій у ботанічному саду має розміри 25 м × 50 м. Розарій вирішили збільшити на однакову величину x м з кожного боку так, щоб площа розарію збільшилася на 400 м^2. Знайдіть розміри збільшеного розарію.



BE SMART

Видатний французький письменник XIX ст. **Фредерік Стендаль** в юності захоплювався математикою. Інтерес до неї розпочався зі знайомства із задачею, вміщеною в підручнику Леонарда Ейлера. В автобіографії Стендаль писав: «Я зрозумів, що означає користуватися знаряддям, яке називається алгеброю».

- Дізнайтеся справжнє ім'я письменника.
- Спробуйте знайти і розв'язати задачу, яка справила таке враження на нього.

Видавництво «Ранок»

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 20–22

1 Ви дізналися, як розкладати квадратний тричлен на лінійні множники.

Алгоритм розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

1. Знайти корені квадратного тричлена ax^2+bx+c, $a\neq 0$, тобто розв'язати відповідне квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$.
2. Якщо рівняння має корені x_1 і x_2, то:
   - у випадку $x_1\neq x_2$ маємо $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$;
   - у випадку $x_1=x_2$ маємо $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$.
3. Якщо рівняння не має коренів, то квадратний тричлен неможливо розкласти на лінійні множники.

2 Ви дізналися, як розв'язувати рівняння, що зводяться до квадратних.

Схеми розв'язування дробово-раціональних рівнянь

1) $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=0, \\ B(x)\neq 0 \end{cases}$

2) $\dfrac{A(x)}{B(x)}=\dfrac{C(x)}{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=C(x), \\ B(x)\neq 0 \end{cases}$

3) $\dfrac{A(x)}{B(x)}=\dfrac{C(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)D(x)=B(x)C(x), \\ B(x)\neq 0, \\ D(x)\neq 0 \end{cases}$

Алгоритм розв'язування рівнянь методом заміни змінної

1. Ввести нову змінну.
2. Скласти нове рівняння з новою змінною.
3. Розв'язати рівняння відносно нової змінної.
4. Повернутися до початкової змінної.
5. Розв'язати рівняння відносно початкової змінної.
6. Зробити висновок про кількість коренів рівняння.
7. Записати відповідь.

Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$, де x — змінна, a, b, c — числа, причому $a\neq 0$, називають **біквадратним.**

- Біквадратні рівняння розв'язують методом заміни змінної.
- Вводимо нову змінну $t=x^2$ $(t\geqslant 0)$, тоді $x^4=\left(x^2\right)^2=t^2$.
- Отримуємо квадратне рівняння відносно нової змінної t — $at^2+bt+c=0$.

3 Ви навчилися створювати математичні моделі задач та розв'язувати задачі за допомогою квадратних рівнянь.

Алгоритм розв'язування задач

1. Проаналізувати умову задачі (основні величини, зв'язки між ними, вимоги задачі).
2. Створити математичну модель (у вигляді таблиці, рисунка, тексту тощо).
3. Скласти рівняння до задачі.
4. Розв'язати отримане рівняння.
5. Проаналізувати отримані результати з огляду на умову задачі.
6. Записати відповідь.

Видавництво «Ранок»

Інший варіант роботи в електронному додатку

ПІДСУМКОВА РОБОТА № 7

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Розкладіть на множники квадратний тричлен x^2-2x-3.

А	Б	В	Г
$(x-1)(x+3)$	$(x+1)(x-3)$	$(x-1)(x-3)$	$(x+1)(x+3)$

2 Скоротіть дріб $\dfrac{x+5}{x^2+4x-5}$, де $x\neq 1$, $x\neq -5$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{1}{x+1}$	$x+1$	$x-1$	$\dfrac{1}{x-1}$

3 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{(x-6)(x+3)}{x-6}=0$.

А	Б	В	Г
-3	3	$-6;\ 3$	$-3;\ 6$

4 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x^2-10}$.

А	Б	В	Г
$-3;\ 10$	$-10;\ 3$	$-2;\ 5$	$-5;\ 2$

5 Скільки коренів має рівняння $\dfrac{3x}{x^2+x}=0$?

А	Б	В	Г
Жодного	Лише один	Лише два	Більше двох

6 На виконання замовлення перший бариста витрачає x хв, а другий — на 2 хв менше. Працюючи разом, вони виконують це замовлення за 3 хв. Укажіть рівняння для визначення x.

А	Б
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{3}$
В	**Г**
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}=3$	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+2}=3$

7 Розв'яжіть рівняння $x^3-9x^2+14x=0$.

8 Задано вираз $\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-7x+10}$.

1) Скоротіть заданий дріб та укажіть його область допустимих значень.

2) Знайдіть значення виразу, якщо $x=5{,}1$.

9 Розв'яжіть рівняння $x^4-2x^2-24=0$.

10 Спортсмен проплив за течією річки 1 км і повернувся назад, витративши на все тренування 1,2 год. Знайдіть власну швидкість спортсмена, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

Бонусне завдання

Розв'яжіть рівняння $x+\sqrt{x}=12$.

> «Успіх — це не підсумок мрій, а підсумок творчої праці.»
>
> Сергій Жадан

Видавництво «Ранок»

ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ЩО ВИВЧАВСЯ У 8 КЛАСІ

1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Областю допустимих значень змінної (скорочено — ОДЗ) виразу з однією змінною називають усі значення змінної, за яких цей вираз має зміст.

Дріб має зміст, коли його знаменник відмінний від нуля.

$$\frac{M}{N}=\frac{M\cdot P}{N\cdot P}=\frac{MP}{NP},$$
M, N, P — многочлени, $N\neq 0,\ P\neq 0$

$$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{D}=\frac{AD\pm BC}{CD}$$
де A, B, C, D — деякі многочлени, причому $C\neq 0,\ D\neq 0$.

Усі дії виконуються на області допустимих значень змінної кожного дробу. ОДЗ зручно шукати після того, як знаменники розкладені на множники.

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},$$
де B і D — многочлени, причому $B\neq 0, D\neq 0$.

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C},$$
причому $B\neq 0, D\neq 0, C\neq 0$.

1 Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

1) $\frac{a}{a-24}$; 3) $\frac{9a-3}{a+8}$; 5) $\frac{5a}{4a+4}-\frac{2}{a-6}$;

2) $\frac{a}{a+25}$; 4) $\frac{5a+2}{a-7}$; 6) $\frac{3a}{a+9}-\frac{2}{5a-5}$.

2 Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{5a-1}{a+3}$, якщо $a=2$; 3) $\frac{a-3b}{14+a}$, якщо $a=-4,\ b=1$;

2) $\frac{6-4a}{a+7}$, якщо $a=3$; 4) $\frac{a+2b}{16+a}$, якщо $a=-6,\ b=2$.

3 Скоротіть дріб:

1) $\frac{2a}{2a+8}$; 3) $\frac{3x-9}{5x-15}$; 5) $\frac{5a^2+20a}{a^2-16}$;

2) $\frac{4b}{4b-12}$; 4) $\frac{6y+24}{7y+28}$; 6) $\frac{n^2-36}{3n^2-18n}$.

4 Виконайте дії:

1) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{9a}$; 3) $\frac{x+2}{2x^2}+\frac{5}{6x}$; 5) $\frac{3c+2}{3c-2}-\frac{24c}{9c^2-4}$;

2) $\frac{7}{8n}-\frac{1}{4n}$; 4) $\frac{m-3}{3m^2}-\frac{1}{12m}$; 6) $\frac{2y-5}{2y+5}+\frac{40y}{4y^2-25}$.

5 Виконайте множення:

1) $\frac{5a}{3}\cdot\frac{3}{10a}$; 3) $\frac{x^2}{12y}\cdot\frac{9y^2}{x^3}$; 5) $\frac{a^2-3a}{b+4}\cdot\frac{2b+8}{a^3-9a}$;

2) $\frac{7}{2b}\cdot\frac{4b}{7}$; 4) $\frac{m}{15n^4}\cdot\frac{6n^5}{m^2}$; 6) $\frac{k-2}{p^3-25p}\cdot\frac{p^2+5p}{6k-12}$.

6 Виконайте ділення:

1) $\frac{6a}{b}:\frac{24a}{b}$; 3) $\frac{k^3}{14m}:\frac{k^2}{10m^3}$; 5) $\frac{x^2-9}{x^2-100}:\frac{4x+12}{x-10}$;

2) $\frac{x}{16y}:\frac{x}{2y}$; 4) $\frac{36n}{p^6}:\frac{30n^3}{p^7}$; 6) $\frac{y-2}{6y+48}:\frac{y^2-4}{y^2-64}$.

Видавництво «Ранок»

7 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x-1}+\frac{x-4}{x-1}=0$; 3) $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+5}{x+2}=0$; 5) $\frac{2}{x+4}+\frac{x}{x-4}=1$;

2) $\frac{2x+3}{x-4}-\frac{x}{x-4}=0$; 4) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-9}{x-3}=0$; 6) $\frac{3}{x-5}+\frac{2x}{x+5}=2$.

8 Знайдіть значення виразу:

1) $3^{10}\cdot 3^{-7}$; 3) $6^{-23}:6^{-21}$; 5) $8^{-3}:16^{-2}$; 7) $\frac{\left(2^{-6}\right)^2}{16^{-2}\cdot 4^{-3}}$;

2) $5^{-9}\cdot 5^{11}$; 4) $2^{-18}:2^{-14}$; 6) $27^{-2}:9^{-4}$; 8) $\frac{25^{-3}\cdot 125^{-4}}{\left(5^{10}\right)^{-2}}$.

9 Виконайте дії і запишіть результат у стандартному вигляді.

1) $300\cdot\left(2\cdot 10^{-14}\right)$; 4) $\left(1{,}6\cdot 10^{5}\right)\cdot\left(8\cdot 10^{-10}\right)$;

2) $4000\cdot\left(2\cdot 10^{-16}\right)$; 5) $4{,}5\cdot 10^{6}+4{,}7\cdot 10^{5}$;

3) $\left(4\cdot 10^{4}\right)\cdot\left(3{,}6\cdot 10^{-8}\right)$; 6) $1{,}3\cdot 10^{-2}-1{,}8\cdot 10^{-3}$.

10 Функцію задано формулою $y=\frac{16}{x}$. Знайдіть значення:

1) y, якщо $x=8;\ -4$; 2) x, якщо $y=2;\ -16$.

11 Функцію задано формулою $y=-\frac{20}{x}$. Знайдіть значення:

1) y, якщо $x=5;\ -2$; 2) x, якщо $y=4;\ -1$.

12 Побудуйте графік функції $y=\frac{6}{x}$. Визначте за графіком:

1) y, якщо $x=1;\ -3$; 2) x, якщо $y=2;\ -6$.

13 Побудуйте графік функції $y=-\frac{8}{x}$. Визначте за графіком:

1) y, якщо $x=2;\ -4$; 2) x, якщо $y=1;\ -8$.

2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

14 Знайдіть значення виразу:

1) $6\sqrt{49}$; 3) $2\sqrt{0{,}16}-\sqrt{9}$; 5) $\frac{1}{6}\sqrt{144}-\frac{2}{3}\sqrt{0{,}81}+5\sqrt{100}$;

2) $8\sqrt{25}$; 4) $\sqrt{4}-3\sqrt{0{,}36}$; 6) $4\sqrt{400}+\frac{1}{5}\sqrt{225}-\frac{3}{4}\sqrt{0{,}64}$.

! Рівняння $\frac{M(x)}{N(x)}=0$ зводиться до рівносильної системи $\begin{cases}M(x)=0,\\ N(x)\neq 0.\end{cases}$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}=\frac{b^n}{a^n}$;

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$;

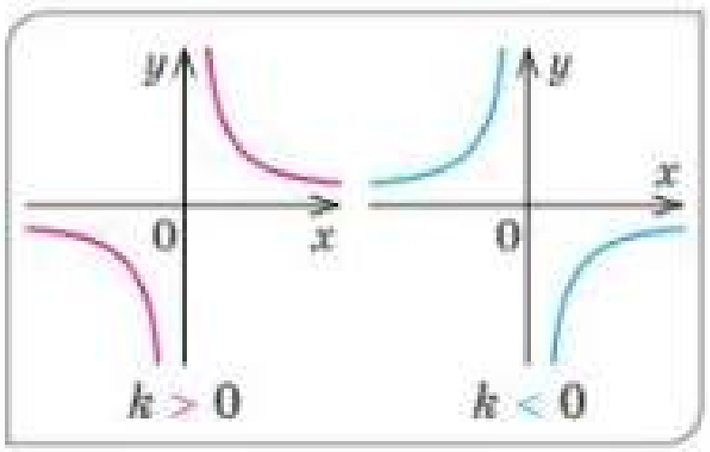
$\left(a^m\right)^n=a^{mn}=a^{nm}$;

$a^{mn}=\left(a^m\right)^n=\left(a^n\right)^m$

!
1) $\left(a\cdot 10^m\right)\left(b\cdot 10^n\right)=ab\cdot 10^{m+n}$;

2) $\frac{a\cdot 10^m}{b\cdot 10^n}=\frac{a}{b}\cdot 10^{m-n}$;

3) $\left(a\cdot 10^m\right)^n=a^n\cdot 10^{mn}$



Арифметичним квадратним коренем із числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a: якщо $\sqrt{a}=b$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, то $b^2=a$.

Видавництво «Ранок»

Властивості арифметичного квадратного кореня

$\sqrt{a^2}=|a|$, $\sqrt{a^{2n}}=|a^n|$

$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, якщо $a\geqslant 0$;

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$;

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, якщо $a\geqslant 0$, $b>0$

Винесення множника з-під знака кореня

$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$, якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$;

$\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$ для будь-яких a, $b\geqslant 0$

$a-b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$, $b\neq 0$, $c\neq 0$;

$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $a\geqslant 0$

15 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{8{,}9^2}$; 3) $\sqrt{(-4{,}7)^2}$; 5) $\frac{2}{7}\sqrt{(-1{,}4)^4}+\sqrt{3^6}$;

2) $\sqrt{6{,}3^2}$; 4) $\sqrt{(-5{,}1)^2}$; 6) $\sqrt{2^6}+\frac{3}{9}\sqrt{(-1{,}8)^4}$.

16 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{36\cdot 0{,}04}$; 3) $\sqrt{1{,}44\cdot 0{,}49}$; 5) $\sqrt{27\cdot 12}$; 7) $\sqrt{2:50}$;

2) $\sqrt{0{,}09\cdot 25}$; 4) $\sqrt{0{,}64\cdot 1{,}69}$; 6) $\sqrt{24\cdot 54}$; 8) $\sqrt{3:48}$.

17 Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{3}$; 4) $\left(\sqrt{27}-\sqrt{48}\right)\cdot\sqrt{3}$;

2) $\left(\sqrt{50}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}$; 5) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{27}-\sqrt{8}\right)+13\sqrt{6}$;

3) $\left(\sqrt{20}-\sqrt{80}\right)\cdot\sqrt{5}$; 6) $\left(\sqrt{20}+\sqrt{50}\right)\left(\sqrt{45}-\sqrt{20}\right)-5\sqrt{10}$.

18 Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2-5}{\sqrt{5}+a}$; 2) $\frac{\sqrt{7}-a}{7-a^2}$; 3) $\frac{a+3\sqrt{a}}{a-9}$; 4) $\frac{a-16}{a+4\sqrt{a}}$.

19 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{20}{\sqrt{4a}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$; 5) $\frac{7}{2\sqrt{2}-1}$;

2) $\frac{18}{\sqrt{9a}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; 6) $\frac{17}{3\sqrt{2}-1}$.

3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

20 Подайте заданий вираз у вигляді квадратного тричлена, укажіть його коефіцієнти:

1) $x(x+3)-11x+5-6x$; 3) $(3x+1)^2-(x-5)(x+5)$;

2) $x(x-12)+8-7x-4$; 4) $(6x-1)(6x+1)-(x-4)^2$.

21 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-12x=0$; 3) $7x^2-63=0$; 5) $(x-1)(2x+3)=x+3$;

2) $x^2+19x=0$; 4) $75-3x^2=0$; 6) $(x+4)(3x-1)=11x+2$.

22 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+4x-45=0$; 3) $3x^2-7x+4=0$; 5) $2x^2-x+5=0$;

2) $x^2-2x-48=0$; 4) $4x^2+5x+1=0$; 6) $2x^2-3x+7=0$.

$ax^2+bx+c=0$;

$D=b^2-4ac$;

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Видавництво «Ранок»

23 Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{x^2+9x-36}{x^2-9}$;

2) $\dfrac{x^2-16}{x^2-17x+52}$;

3) $\dfrac{6x^2+7x-3}{13x-3x^2-4}$;

4) $\dfrac{9x-2x^2-10}{8x^2-18x-5}$.

24 Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2-4x-12}{x+2}=0$;

2) $\dfrac{x^2-8x+15}{5-x}=0$;

3) $\dfrac{x^2-6x}{x-9}=\dfrac{27}{x-9}$;

4) $\dfrac{x^2+7x}{x+11}=\dfrac{44}{x+11}$.

25 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4+12x^2-13=0$;

2) $x^4+6x^2-40=0$;

3) $x^4-9x^2+18=0$;

4) $x^4-7x^2+10=0$.

26 Одне число на 6 менше за інше, а їх добуток дорівнює 135. Складіть рівняння, яке відповідає цій умові, якщо більше число позначено через x.

27 Одне число на 8 більше за інше, а їх добуток дорівнює 128. Складіть рівняння, яке відповідає цій умові, якщо менше число позначено через x.

28 Знайдіть два додатних числа, різниця яких дорівнює 4, а добуток 96.

29 Знайдіть два додатних числа, різниця яких дорівнює 8, а добуток 84.

30 Добуток двох послідовних парних натуральних чисел більший за їх середнє арифметичне на 19. Знайдіть ці числа.

31 Добуток двох послідовних парних натуральних чисел більший за їх середнє арифметичне на 109. Знайдіть ці числа.

32 Чисельник і знаменник правильного звичайного дробу — послідовні непарні числа. Якщо чисельник цього дробу збільшити на 4, а знаменник — на 3, то одержаний дріб буде на $\dfrac{1}{2}$ більший за початковий. Знайдіть початковий дріб.

33 Чисельник і знаменник правильного звичайного дробу — послідовні непарні числа. Якщо чисельник цього дробу зменшити на 5, а знаменник — на 6, то одержаний дріб буде на $\dfrac{1}{9}$ менший, ніж початковий. Знайдіть початковий дріб.

! Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$t=x^2$, тоді $x^4=\left(x^2\right)^2=t^2$

Якщо новою змінною позначено **парний** степінь початкової змінної, то нова змінна **не може** набувати від'ємних значень.

!

Михайло Йосипович Ядренко (1932–2004) — видатний український математик, член-кореспондент Національної академії наук України, один із засновників теорії випадкових полів. Понад 40 років він займався організацією шкільних математичних олімпіад різних рівнів, математичних гуртків для школярів і студентів, із 1970 р. очолював журі Всеукраїнських олімпіад для школярів.

“Я впевнений, що Україна подолає економічні труднощі, збереже державність і стане процвітаючою країною Європи. Вірю, що будуть збережені найкращі здобутки нашої освіти, буде ліквідована видавнича криза і наші учні матимуть найкращі підручники, науково-популярні книжки та журнали. Вірю в процвітання нашої освіти та науки.”

М. Й. Ядренко

Видавництво «Ранок»

Інший варіант роботи в електронному додатку

ПІДСУМКОВА РОБОТА № 8

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Скоротіть дріб $\frac{10a^3}{5a^6}$.

А	Б	В	Г
$\frac{2}{a^2}$	$\frac{5}{a^3}$	$\frac{5}{a^2}$	$\frac{2}{a^3}$

2 Обчисліть значення виразу $\left(3\sqrt{5}\right)^2$.

А	Б	В	Г
15	45	75	30

3 Виконайте дії: $\frac{5k-1}{2k-7}-\frac{3k+6}{2k-7}$.

А	Б	В	Г
0	1	$\frac{2k+5}{2k-7}$	$\frac{8k+5}{2k-7}$

4 Виконайте дії: $\frac{n^2-4}{2}\cdot\frac{2}{n+2}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{n+2}$	$n+2$	$n-2$	$\frac{1}{n-2}$

5 Спростіть вираз $\sqrt{32}+\sqrt{18}$.

А	Б	В	Г
25	$6\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$	$\sqrt{50}$

6 Розв'яжіть рівняння $2x^2-7x-15=0$.

А	Б	В	Г
$-1{,}5;\ 5$	$-5;\ 1{,}5$	$-2{,}5;\ 5$	$-5;\ 2{,}5$

7 Розв'яжіть графічним способом рівняння $x^2=x-5$.

8 Обчисліть $\frac{8^{-6}}{2^{-5}\cdot 16^{-3}}$.

9 Розв'яжіть рівняння $x^4+7x^2-18=0$.

10 Кожен із двох фотографів мав зробити для журналу 240 знімків дикої природи. Оскільки перший фотограф щодня робив на 10 знімків більше, ніж другий, то і свою роботу він закінчив на 2 дні раніше. Скільки знімків дикої природи робив щодня другий фотограф?

Бонусне завдання

Не обчислюючи коренів x_1 і x_2 рівняння $x^2-3x=11$, знайдіть значення виразу $\frac{33}{x_1}+\frac{33}{x_2}$.

> «Свобода — це вміння сказати «так» своїм мріям. Гідність — це вміння сказати «ні» своїм страхам.»
>
> С. Вакарчук

Видавництво «Ранок»

ВІДПОВІДІ

ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ЩО ВИВЧАВСЯ В 7 КЛАСІ

1. 1) $x=2$; 2) $x=-7$; 3) $x=-7$; 4) $x=0$; 5) коренів немає; 6) коренем є будь-яке число. **2.** 1) 9; 2) 9; 3) -3; 4) 6; 5) -16; 6) 26. **3.** 1) 16; 2) 36; 3) -1; 4) 1; 5) 19; 6) 0. **4.** 1) a^{11}; 2) a^{10}; 3) a^{21}; 4) a^{24}; 5) a^{20}; 6) a^{37}. **5.** 1) 5; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{25}$; 5) 9; 6) $\frac{1}{32}$. **6.** 1) $7m$; 2) $4x$; 3) $-4t$; 4) $-5m^2$; 5) $4a+4b$; 6) $-x$. **7.** 1) $4-4x$; 2) $18a+27$; 3) $-4y+8$; 4) $-2c-cx$; 5) $-6x^2+6x-6$; 6) $3x^2+4x-1$. **8.** 1) 18; 2) 35; 3) 0; 4) 0; 5) -24; 6) 45. **9.** 1) $16+8y+y^2$; 2) t^2-6t+9; 3) $a^2-12a+36$; 4) $25-10m+m^2$; 5) $16x^2-8xc+c^2$; 6) $b^2+4ab+4a^2$. **10.** 1) c^2-y^2; 2) m^2-a^2; 3) $4-c^2$; 4) $16-9m^2$; 5) $4b^2-16a^2$; 6) $9n^2-4a^4$. **11.** 1) $(c+5)^2$; 2) $(m-2)^2$; 3) $(x+3)^2$; 4) $(y-4)^2$; 5) $(4-a)^2$; 6) $(6+a)^2$. **12.** 1) 9; 2) 25; 3) 48; 4) 144; 5) 169; 6) 100. **13.** $\left(\frac{8}{6};0\right)$, $\left(\frac{10}{6};2\right)$, $(0;-8)$, $(4;16)$, $(1;-2)$, $(-26;-164)$. **14.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) ні; 6) так. **15.** 1–Г, 2–Б, 3–А. **16.** 1) $(4;6)$; 2) $(-2;2)$; 3) $(-3;4)$; 4) $(-4;-8)$; 5) $(1;-6)$; 6) $(7;-3)$. **17.** 1) $y=5-2x$; 2) $y=6x$; 3) $x=7-3y$; 4) $x=5y-2$; 5) $y=-4x-3$; 6) $x=5y+11$. **18.** 1) $x=17$; 2) $x=-\frac{8}{3}$; 3) $x=\frac{23}{4}$; 4) $x_1=0$, $x_2=-3$, $x_3=3$, $x_4=-\frac{13}{2}$. **19.** 1) $\left(5x-8a^2\right)\left(5x+8a^2\right)$; 2) $\left(0{,}6y-\frac{1}{2}\right)\left(0{,}6y+\frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(1-\frac{5}{4}c\right)\left(1+\frac{5}{4}c\right)$; 4) $(x-6y)^2$; 5) $(2a-6)^2$; 6) $-3(m-3)^2$. **20.** 1) $3x^2-2x+63$; 2) $3(5-x)(x+3)$; 3) 0; 4) $3(a+15)$. **21.** 1) $16a^{12}x^4$; 2) $-125x^{18}y^6$; 3) $16x^5y^7$; 4) $-m^{39}y^{26}$. **22.** 1) $(a+2)\left(a^2-2a+4\right)$; 2) $(x-3)\left(x^2+3x+9\right)$; 3) $(4b+1)\left(16b^2-4b+1\right)$; 4) $(5y-2)\left(25y^2+10y+4\right)$; 5) $(2a-5)\left(4a^2+10a+25\right)$; 6) $(3b+2y)\left(9b^2-6by+4y^2\right)$. **23.** 1) $y(y-5)(y+5)$; 2) $4(4x-3)$; 3) $(a+3)(b-4)$; 4) $(x-3-2y)(x-3+2y)$. **25.** 1) $(4;4)$; 2) $(-7;-37)$; 3) $(50;24)$; 4) $(0{,}2;0)$. **26.** 1) $(6;1)$; 2) $(9;-3)$; 3) $(4;3)$; 4) $(6;21)$.

РОЗДІЛ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

§ 1. Раціональні вирази. Раціональні дроби

Тренуємося 1 (дал Т.). 1) 6; 2) 9; 3) 0,45; 4) 0,7; 5) 1,1; 6) 0,4; 7) 0,6; 8) 1. **Т. 2.** 1) $x=0$; 2) $x=0$; 3) $x=12$; 4) $x=16$; 5) $x=-6$; 6) $x=-5$; 7) $x=\pm4$; 8) $x=\pm2$. **Т. 3.** 1) $x\neq0$, $x\neq8$; 2) $x\neq0$, $x\neq7$; 3) $x\neq0$, $x\neq-11$; 4) $x\neq0$, $x\neq-12$; 5) $x\neq-1$, $x\neq0{,}5$; 6) $x\neq-2$, $x\neq0{,}25$; 7) $x\neq-13$, $x\neq\pm5$; 8) $x\neq-15$, $x\neq\pm2$. **Т. 4.** 1) $x=0$; 2) $x=0$; 3) $x=7$; 4) $x=5$; 5) $x=-3$; 6) $x=-4$; 7) $x=9$; 8) $x=8$. **1.1.** а) 1) 2; 2) -5; 3) $-0{,}5$; 4) -1; 5) 0; 6) 0; 7) $-0{,}5$; 8) -8. б) 1) 1; 2) 5; 3) 0; 4) 0; 5) 0,5; 6) -1; 7) 0; 8) 0. **1.2.** 1) 0; неможливо; 2) неможливо; 0. **1.3.** 1) 8,6; 2) 1; 3) $-0{,}4$; 4) 18. **1.4.** 2); 3); 6). **1.5.** 1) $x\neq3$, $x\neq\pm4$; 2) $x\neq-5$, $x\neq\pm7$; 3) $x\neq2$, $x\neq\pm0{,}8$; 4) $x\neq-1$, $x\neq\pm0{,}6$; 5) $x\neq\pm3$; 6) $x\neq\pm3$. **1.6.** 1) 0; 2; 2) 0; -1; 3) 1; 4) -2; 5) 7; 6) -10. **1.7.** 1) $\frac{s}{t}$; 6,5 км/год; 2) $\frac{m}{n}$; 1,8 т; 3) $\frac{y}{4x}$; 3,5 кг. **1.8.** А. **1.11.** 2) $x\neq0$, $x\neq\pm2$; 3) $x\neq\pm9$; 4) $x\neq\pm5$. **1.12.** 1) 3; 2) 0,35; 3) 2,5; 4) 2. **1.13.** 1) $x=0$; 2) $x=14$; 3) $x=-9$; 4) $x=\pm1$. **1.14.** 1) $a=0$, $a=-1{,}2$; 2) $a=0$, $a=-0{,}6$; 3) $a=0$, $a=0{,}8$; 4) $a=\pm6$, $a=-1$; 5) $a=\pm7$, $a=2$; 6) $a=\pm5$, $a=4$. **1.15.** 1) $x\neq0$, $x\neq9$; 2) $x\neq0$, $x\neq-14$; 3) $x\neq-3$, $x\neq0{,}8$; 4) $x\neq-17$, $x\neq\pm4$. **1.16.** 1) $x=0$; 2) $x=9$; 3) $x=-5$; 4) $x=7$. **1.17.** а) 1) 1,25; 2) -9; 3) $-0{,}3$; 4) 0,5; 5) 0; 6) 0; 7) $-0{,}5$; 8) 3. б) 1) 1; 2) 18; 3) 0; 4) 0; 5) 0,5; 6) 1; 7) 0; 8) 0. **1.18.** 1) Неможливо; 0; 1,2; 2) 2; неможливо; 0. **1.19.** 1) 18,4; 2) 22. **1.20.** 3); 5); 6); 8). **1.21.** 1) $x\neq12$, $x\neq\pm5$; 2) $x\neq-1$, $x\neq\pm9$; 3) $x\neq-8$, $x\neq\pm0{,}7$; 4) $x\neq6$, $x\neq\pm0{,}3$; 5) $x\neq\pm4$; 6) $x\neq\pm3$. **1.22.** 1) 0; -3; 2) 4; 3) -6. **1.23.** 1) $\frac{s}{t}$; 40 км/год; 2) $\frac{x}{y}$; 120 кг; 3) $\frac{y}{2x}$; 12 кг. **1.24.** В.

§ 2. Основна властивість дробу

Т. 1. 1) 6; 2) 7; 3) 0,2; 4) 0,5; 5) $2b$; 6) $3a^2$; 7) $-\frac{2a^3b}{3}$; 8) $\frac{7c^2}{3b}$. **Т. 2.** 1) 4; 2) 6; 3) $\frac{a}{5}$; 4) $\frac{b}{8}$; 5) $\frac{b-1}{3b}$; 6) $\frac{1+a}{5a}$; 7) $\frac{2b}{b+3}$; 8) $\frac{2b}{3b-1}$. **Т. 3.** 1) $\frac{x+9}{x-9}$; 2) $\frac{x-8}{x+8}$; 3) $\frac{x+2}{x-2}$; 4) $\frac{x-3}{x+3}$; 5) $\frac{x+5}{x-5}$; 6) $\frac{x-6}{x+6}$; 7) $\frac{10x+1}{10x-1}$; 8) $\frac{9x-1}{9x+1}$. **Т. 4.** 1) $\frac{2m}{m^2}$; 2) $\frac{3n}{n^2}$; 3) $\frac{5mn^2}{n^3}$; 4) $\frac{4nm^3}{m^4}$; 5) $\frac{20nm^4}{5m^6}$; 6) $\frac{6mn^5}{2n^7}$; 7) $\frac{12m^2n^3}{8mn^8}$; 8) $\frac{36n^2m^4}{27nm^8}$. **Т. 5.** 1) $\frac{a+b}{(a+b)^2}$; 2) $\frac{a-b}{(a-b)^2}$; 3) $\frac{6(b+a)}{b^2-a^2}$; 4) $\frac{7(b-a)}{b^2-a^2}$;

Видавництво «Ранок»

5) $\frac{b(4a-b)}{16a^2-b^2}$; 6) $\frac{a(5a+b)}{25a^2-b^2}$; 7) $\frac{(a+2b)^2}{a^2-4b^2}$; 8) $\frac{(a-3b)^2}{a^2-9b^2}$.

2.1. 1) $\frac{y}{4}$; 2) $\frac{6}{y}$; 3) 3; 4) 0,5; 5) x; 6) $\frac{1}{y}$. **2.2.** 1) $\frac{a+8}{2}$; 2) $\frac{3}{a-9}$; 3) $\frac{4}{a-5}$; 4) $\frac{a+6}{2}$; 5) $\frac{a-2}{a^2}$; 6) $\frac{a^2}{a+3}$.

2.3. 1) -1; 2) -1; 3) -3; 4) $-0{,}2$; 5) $-y$; 6) $-\frac{1}{y}$. **2.4.** 1) 1; 2) -1; 3) $-\frac{1}{x+7y}$; 4) $-8x-y$; 5) $-\frac{2x+y}{3}$; 6) $-\frac{2}{x+3y}$.

2.5. 1) $-\frac{2}{b-2a}$; 2) $-\frac{5}{3b-a}$; 3) $-\frac{2a}{8b-2a}$; 4) $-\frac{3b}{3b-15a}$; 5) $-\frac{4a(a+b)}{b^2-a^2}$; 6) $-\frac{6b(b+3a)}{b^2-9a^2}$. **2.6.** 1) 4; 2) $\frac{1}{25}$; 3) $\frac{t+3}{9(t-3)}$; 4) $\frac{4(t+4)}{4-t}$; 5) $\frac{5a-1}{9(5a+1)}$; 6) 9. **2.7.** У n^2 разів. **2.8.** У b^3 разів. **2.9.** 1) 3; 2) 0,5; 3) 7,5; 4) 6. **2.10.** 1) $-0{,}2$; 2) -7; 3) 0,3; 4) 5; 5) 2,5. **2.11.** 1) 9; 2) 0,4; 3) $2a^2$; 4) $-\frac{7ac}{6}$. **2.12.** 1) 5; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a-1}{7a}$; 4) $\frac{3b}{5b+1}$.

2.13. 1) $\frac{x+7}{x-7}$; 2) $\frac{x-4}{x+4}$; 3) $\frac{x-8}{x+8}$; 4) $\frac{5x-1}{5x+1}$. **2.14.** 1) $\frac{4n}{n^2}$; 2) $\frac{6nm^2}{m^3}$; 3) $\frac{20mn^3}{4n^6}$; 4) $\frac{14n^2m^5}{8nm^{10}}$. **2.15.** 1) $\frac{b-a}{(b-a)^2}$; 2) $\frac{8(b-a)}{b^2-a^2}$; 3) $\frac{b(7a-b)}{49a^2-b^2}$; 4) $\frac{(a+5b)^2}{a^2-25b^2}$. **2.16.** 1) $\frac{a+9}{2}$; 2) $\frac{3}{a-7}$; 3) $\frac{a-1}{a^2}$. **2.17.** 1) -1; 2) $-0{,}25$; 3) $-x$.

2.18. 1) $-\frac{12}{b-6a}$; 2) $-\frac{5a}{15b-5a}$; 3) $-\frac{7a(a+4b)}{4b^2-a^2}$; 4) $-\frac{8b(9a+b)}{b^2-81a^2}$. **2.19.** 1) b^2; 2) $\frac{1}{b^3}$; 3) c; 4) $\frac{1}{c}$; 5) $-\frac{1}{b^2}$; 6) $-b$. **2.20.** У m разів. **2.21.** В a разів. **2.22.** 1) $-0{,}5$; 2) 1,6. **2.23.** 1) 2; 2) 81; 3) 0,45.

§ 3. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками

Т. 1. 1) $\frac{4}{a}$; 2) $\frac{1}{a}$; 3) 1; 4) 1; 5) $a+4$; 6) $a-5$; 7) $3a-1$; 8) $2a+1$. **Т. 2.** 1) $\frac{3}{x-9}$; 2) $\frac{4}{x-6}$; 3) 1; 4) 1; 5) $x-2$; 6) $x-1$; 7) $5x-1$; 8) $4x-1$. **Т. 3.** 1) $1+\frac{4}{x}$; 2) $1+\frac{9}{x}$; 3) $13-\frac{1}{x}$; 4) $17-\frac{1}{x}$; 5) $2+\frac{5}{x}$; 6) $3+\frac{10}{x}$; 7) $2-\frac{5}{x}$; 8) $5-\frac{3}{x}$. **Т. 4.** 1) $y=5$, $x\neq 0$; 2) $y=6$, $x\neq 0$; 3) $y=1$, $x\neq 3$; 4) $y=1$, $x\neq 2$; 5) $y=2x$, $x\neq -1$; 6) $y=3x$, $x\neq -2$; 7) $y=2-x$, $x\neq 0$; 8) $y=1-x$, $x\neq 0$. **3.1.** 1) $\frac{2a^2}{b}$; 2) $-\frac{3c}{ab}$; 3) $\frac{4}{a}$; 4) $\frac{4}{b}$. **3.2.** 1) $\frac{b}{2a}$; 2) $\frac{b}{3a}$; 3) $-\frac{4}{c}$; 4) $-\frac{1}{d^2}$; 5) $\frac{4a+c}{5a}$; 6) $\frac{b+2d}{3d}$. **3.3.** 1) 3; 2) 2; 3) 4; 4) 2; 5) $\frac{3}{2}$; 6) $\frac{4}{5}$. **3.4.** 1) $-\frac{3}{2a}$; 2) $-\frac{5}{3a}$; 3) $\frac{1}{a+5}$; 4) $\frac{1}{a-4}$. **3.5.** 1) 1, якщо $x\neq -7$; 2) 1, якщо $x\neq 3$; 3) 1, якщо $x\neq -4{,}5$; 4) 1, якщо $x\neq 0{,}8$; 5) -1, якщо $x\neq 3{,}5$; 6) -1, якщо $x\neq 2{,}25$. **3.6.** 1) 1; 2) -1; 3) 3; 4) -5; 5) $\frac{10}{a-3b}$; 6) $\frac{3}{4k-c}$. **3.7.** 1) $\frac{8}{(a-2)^2}$; 2) $\frac{1}{4-x}$; 3) 1; 4) $x-1$. **3.8.** 1) $-0{,}5$; 2) 0,4; 3) 2; 4) 4. **3.9.** 1) 5; 2) 10; 3) -10; 4) $-2{,}5$. **3.11.** 1) $6+\frac{5}{4a}$; 2) $7-\frac{8}{3a}$; 3) $14-\frac{9}{a-b}$; 4) $12+\frac{1}{a-b}$; 5) $3+\frac{2}{a+b}$; 6) $2-\frac{3}{a+b}$.

3.12. 2) $a+3+\frac{1}{a+3}$; 3) $b-1-\frac{4}{b-1}$. **3.15.** 1) 2; 2) 2; 3) 8; 4) 12. **3.16.** 1) Перший; 2) $\frac{8s}{t}$; 3) $\frac{2s}{t}$. **3.17.** 1) Перший; 2) $\frac{10a}{b+2}$. **3.18.** 1) $\frac{3}{a}$; 2) 1; 3) $a-2$; 4) $5a+1$. **3.19.** 1) $\frac{4}{x-8}$; 2) 1; 3) $x-3$; 4) $6x-1$. **3.20.** 1) $1+\frac{8}{x}$; 2) $19-\frac{1}{x}$; 3) $2+\frac{6}{x}$; 4) $3-\frac{7}{x}$. **3.21.** 1) $y=4$, $x\neq 0$; 2) $y=1$, $x\neq 5$; 3) $y=3x$, $x\neq -1$; 4) $y=3-x$, $x\neq 0$. **3.22.** 1) $\frac{b}{c^3}$; 2) $-\frac{a^3}{bc}$; 3) $\frac{2}{b}$; 4) $\frac{5}{a}$. **3.23.** 1) $-\frac{3}{4a}$; 2) $\frac{1}{a-3}$. **3.24.** 1) $\frac{9}{(b-1)^2}$; 2) $\frac{1}{y-5}$; 3) 1; 4) $y-2$. **3.25.** 1) 2,5; 2) -15. **3.29.** 1) Перший; 2) $\frac{11s}{t}$; 3) $\frac{5s}{t}$. **3.30.** 1) Перший; 2) $\frac{16a}{b+1}$.

§ 4. Додавання і віднімання дробів із різними знаменниками

Т. 1. 1. 1) $\frac{x+3}{3x}$; 2) $\frac{x+2}{2x}$; 3) $\frac{4y-x}{xy}$; 4) $\frac{3x-y}{xy}$; 5) $\frac{y+12x}{6xy}$; 6) $\frac{15y+x}{5xy}$; 7) $\frac{14y-5x^2}{10xy}$; 8) $\frac{16x-3y^2}{24xy}$.

Видавництво «Ранок»

2. 1) $\frac{2}{x(2-x)}$; 2) $\frac{3}{x(3-x)}$; 3) $\frac{1}{x(6x+1)}$; 4) $\frac{1}{x(5x+1)}$; 5) $\frac{14}{1-9x^2}$; 6) $\frac{18}{1-4x^2}$; 7) $\frac{16x}{x^2-16}$; 8) $-\frac{20x}{x^2-25}$.

Т. 2. 1. 1) $\frac{3}{2x}$; 2) $\frac{4}{3x}$; 3) $\frac{1}{8x}$; 4) $\frac{1}{10x}$; 5) $\frac{15x+1}{6x^2}$; 6) $\frac{1+21x}{12x^2}$; 7) $\frac{4-9x}{30x^3}$; 8) $\frac{9x-10}{42x^3}$. **2.** 1) $\frac{y-1}{y(y-5)}$; 2) $\frac{y-1}{y(y-4)}$; 3) $\frac{y}{(y+1)(y-3)}$; 4) $\frac{y}{(y+2)(y-6)}$; 5) $\frac{7y}{y^2-4}$; 6) $\frac{8y}{y^2-9}$; 7) $\frac{3+2y}{5(y^2-36)}$; 8) $\frac{5y-14}{3(y^2-16)}$. **Т. 3.** 1) $\frac{a}{a-3}$; 2) $\frac{a}{a-2}$; 3) $\frac{4a}{a+5}$; 4) $\frac{2a}{a+6}$; 5) $\frac{1}{a-7}$; 6) $\frac{1}{a-4}$; 7) $\frac{a}{3a-2}$; 8) $\frac{a}{5a-3}$. **4.1.** 1) $\frac{6x}{(x+y)(x-y)}$; 2) $\frac{40}{(y-4)(y+4)}$; 3) $\frac{24x^2}{(1+6x)(1-6x)}$; 4) $\frac{12y}{(2y-1)(2y+1)}$. **4.2.** 1) $\frac{11a}{4}$; 2) $\frac{x}{6}$; 3) $\frac{5}{2b}$, якщо $b\neq 0$; 4) $\frac{16}{5y}$, якщо $y\neq 0$; 5) $\frac{3x+y}{x^2}$, якщо $x\neq 0$; 6) $\frac{4-ma^2}{a^3}$, якщо $a\neq 0$; 7) $\frac{2a-x^2b}{6x^4}$, якщо $x\neq 0$; 8) $\frac{3xa^4+2y}{10a^6}$, якщо $a\neq 0$. **4.3.** 1) $\frac{3+m}{m^3}$; 2) $\frac{m+4}{m^4}$; 3) $\frac{6}{m^5}$; 4) $\frac{7}{m^4}$; 5) $\frac{11}{28}$; 6) $\frac{11}{24}$. **4.4.** 1) $\frac{3}{x-1}$, якщо $x\neq 1$, $x\neq 0$; 2) $\frac{2}{x+2}$, якщо $x\neq -2$, $x\neq 0$; 3) $\frac{a}{(a+4)(a-3)}$, якщо $a\neq 3$, $a\neq -4$; 4) $-\frac{1}{(a+6)(a-1)}$, якщо $a\neq 1$, $a\neq -6$; 5) $\frac{y-5}{y+5}$, якщо $y\neq \pm 5$; 6) $\frac{y+6}{y-6}$, якщо $y\neq \pm 6$. **4.5.** 1) $\frac{36}{a^2-36}$; 2) $\frac{49}{a^2-49}$; 3) $\frac{15}{25-4a^2}$; 4) $\frac{20}{16-9a^2}$. **4.6.** 1) $\frac{9}{(a-9)^2}$; 2) $\frac{8}{(a+8)^2}$; 3) $\frac{15}{(3-a)^2}$; 4) $\frac{20}{(4-a)^2}$. **4.7.** 1) $\frac{12}{m+3}$, якщо $m\neq \pm 3$; 2) $\frac{4}{5x-y}$, якщо $y\neq 5x$, $y\neq -5x$. **4.8.** 1) $\frac{7x}{4x-y}$; 2) $\frac{5y}{x-9y}$; 3) $\frac{12}{xy}$; 4) $\frac{15}{xy}$; 5) $-\frac{4}{xy}$; 6) $-\frac{1}{xy}$. **4.9.** 1) $\frac{6a}{6-a}$; 2) $\frac{4a}{4-a}$; 3) $\frac{a^2}{a+b}$; 4) $\frac{b^2}{a+b}$; 5) $\frac{a^2b}{a^2-5b}$; 6) $\frac{a^3}{a^2-6b}$. **4.10.** 1) $\frac{x^2+4}{x-2}$; 2) $\frac{x^2+9}{x-3}$; 3) $\frac{50x^2}{5x+y}$; 4) $\frac{2x^2}{x+4y}$. **4.12.** 2) 18; 3) 36; 4) 90. **4.13.** 1) $\left(\frac{1}{2v}+\frac{11}{8v}+\frac{6}{v+6}\right)$ год; 2) $1\frac{11}{16}$ год; 3) потрапив. **4.14.** 1) $\frac{10}{x}$; $\frac{25}{2x}$; 2) $\frac{10}{x}+\frac{25}{2x}=\frac{45}{2x}$; 3) 4,5 год; 4) так. **4.15.** 1) $\frac{x+4}{4x}$; 2) $\frac{10x-y}{xy}$; 3) $\frac{18y+x}{9xy}$; 4) $\frac{18x-5y^2}{15xy}$. **4.16.** 1) $\frac{8}{x(8-x)}$; 2) $\frac{1}{x(7x+1)}$; 3) $\frac{10}{1-4x^2}$; 4) $\frac{24x}{x^2-36}$. **4.17.** 1) $\frac{5}{4x}$; 2) $\frac{2}{9x}$; 3) $\frac{1+10x}{6x^2}$; 4) $\frac{25-4x}{70x^3}$. **4.18.** 1) $\frac{y-1}{y(y-8)}$; 2) $\frac{5y}{y^2-16}$; 3) $\frac{7y-29}{3(y^2-25)}$. **4.19.** 1) $\frac{a}{a-6}$; 2) $\frac{2a}{a+8}$; 3) $\frac{1}{a-5}$; 4) $\frac{a}{7a-4}$. **4.20.** 1) $\frac{8y}{3}$; 2) $\frac{11}{3a}$, якщо $a\neq 0$; 3) $\frac{x+6n}{n^2}$, якщо $n\neq 0$; 4) $\frac{2m-ny^3}{8y^6}$, якщо $y\neq 0$. **4.21.** 1) $\frac{2+m}{m^6}$; 2) $\frac{7}{m^7}$; 3) $\frac{11}{18}$. **4.22.** 1) $\frac{3}{a-2}$, якщо $a\neq 2$, $a\neq 0$; 2) $\frac{4}{a+3}$, якщо $a\neq -3$, $a\neq 0$; 3) $\frac{b}{(b+5)(b-2)}$, якщо $b\neq 2$, $b\neq -5$; 4) $\frac{3}{(b-3)(b+1)}$, якщо $b\neq 3$, $b\neq -1$; 5) $\frac{x-3}{x+3}$, якщо $x\neq \pm 3$; 6) $\frac{b+4}{b-4}$, якщо $b\neq \pm 4$. **4.23.** 1) $\frac{25}{a^2-25}$; 2) $\frac{21}{49-16a^2}$; 3) $\frac{6}{(a-6)^2}$; 4) $\frac{24}{(3-a)^2}$. **4.24.** 1) $\frac{16}{n-4}$, якщо $n\neq \pm 4$; 2) $\frac{6}{a+4b}$, якщо $a\neq \pm 4b$. **4.25.** 1) $\frac{8y}{x-5y}$; 2) $\frac{11}{xy}$; 3) $-\frac{6}{xy}$. **4.26.** 1) $\frac{11a}{11-a}$; 2) $\frac{b^2}{a+b}$; 3) $\frac{a^3}{a^2-8b}$. **4.27.** 1) $\frac{x^2+1}{x-1}$; 2) $\frac{18x^2}{3x+y}$. **4.28.** 1) $\frac{12}{v+5}$, $\frac{3}{v}$; 2) $\frac{15v+15}{v(v+5)}$; 3) 2,5 год. **4.29.** 1) $\frac{10v}{(v-3)(v+3)}$; 2) 3,125 год. **4.30.** 1) 12; 2) 4; 3) 60; 4) 36.

§ 5. Множення і ділення дробів із різними знаменниками

Т. 1. 1. 1) 2; 2) 0,5; 3) a; 4) a^2; 5) $\frac{3}{b^3}$; 6) $\frac{a^3}{3}$; 7) $\frac{7b^5}{2a^3}$; 8) $\frac{3a^3}{5b^2}$. **2.** 1) 2; 2) 0,5; 3) $\frac{3}{m}$; 4) $\frac{4}{n}$; 5) $\frac{5n}{8-m}$;

Видавництво «Ранок»

6) $\frac{7m}{n+9}$; 7) $\frac{m}{8}$; 8) $\frac{4}{m}$. **Т. 2. 1.** 1) $\frac{121}{y^2}$; 2) $\frac{100}{x^2}$; 3) $\frac{y^2}{49x^2}$; 4) $\frac{x^2}{64y^2}$; 5) $\frac{x^{12}a^4}{81y^4}$; 6) $\frac{a^4y^8}{16x^4}$; 7) $\frac{16y^8}{625x^4a^{12}}$; 8) $\frac{81x^{12}y^4}{256a^8}$. **2.** 1) $\frac{64}{a^3}$; 2) $\frac{125}{b^3}$; 3) $-\frac{a^3}{27b^3}$; 4) $-\frac{b^3}{8a^3}$; 5) $\frac{8x^3}{a^3y^9}$; 6) $\frac{27a^3}{x^{12}y^3}$; 7) $-\frac{125y^{15}}{8x^3a^6}$; 8) $-\frac{64x^6}{27y^3a^9}$. **Т.3.1.** 1) 3; 2) 2; 3) $\frac{1}{m^2}$; 4) $\frac{1}{m}$; 5) $\frac{m^5}{3}$; 6) $6m^4$; 7) $\frac{6m^5}{a^3}$; 8) $\frac{5a}{m^3}$. **2.** 1) m; 2) m^2; 3) $-\frac{1}{m^2}$; 4) $-\frac{1}{m^3}$; 5) $\frac{5}{m}$; 6) $\frac{m^2}{2}$; 7) $\frac{5-m}{8m^4}$; 8) $\frac{6m^6}{7-m}$. **5.1.** 1) $\frac{2y}{3}$; 2) $\frac{3}{2a}$; 3) $\frac{x}{2}$; 4) $\frac{3y}{2}$; 5) $\frac{24m}{n}$; 6) $\frac{y^2}{2x}$. **5.2.** 1) $-\frac{y}{x^2}$; 2) $2ab$; 3) $-\frac{b}{2}$; 4) $-\frac{y}{2x}$; 5) $-\frac{2}{9b}$; 6) $\frac{9}{4y}$. **5.3.** 1) $\frac{5x}{2}$; 2) $6x$; 3) $-\frac{3y}{4x}$; 4) $-8a$. **5.4.** 1) n; 2) $\frac{6ab}{5}$; 3) $-3ab$; 4) $-\frac{2x}{y^2}$. **5.5.** 1) $\frac{7(b-a)}{4}$; 2) $\frac{3(x+y)}{8}$; 3) 4; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{2b(a-b)}{3}$; 6) $\frac{10}{x+y}$. **5.6.** 1) $\frac{3}{a+b}$; 2) $\frac{x-y}{2}$; 3) $\frac{3}{2(b-a)}$. **5.7.** 1) $\frac{1}{b^3}$; 2) $\frac{3t}{y}$. **5.8.** 1) ab, -6; 2) $\frac{1}{cd}$, -10. **5.9.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{2a}{b}$; 4) $\frac{y}{2x}$; 5) $\frac{2c}{3t}$; 6) $\frac{20y}{x}$. **5.10.** 1) $\frac{m}{8}$; 2) $\frac{1}{6b}$; 3) $\frac{2xy(x-y)}{3}$; 4) $4xy-2y^2$. **5.11.** 1) $\frac{3x-2}{3(3x+2)}$; 2) $\frac{4a(6a+b)}{6a-b}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $3x$. **5.12.** 1) $\frac{x}{9}$; 2) $\frac{1}{14x}$; 3) $\frac{a-2}{18}$; 4) $\frac{4-b}{18}$; 5) $\frac{x-y}{2}$; 6) $\frac{a-b}{4}$. **5.13.** 1) $15x$; 2) $\frac{8}{x}$; 3) $\frac{18b}{a}$; 4) $\frac{y}{3x}$; 5) $\frac{4}{a+b}$; 6) $\frac{5}{x-y}$. **5.14.** 1) 40; 2) 80; 3) 0,01; 4) -1. **5.15.** 2) Графік функції $y=x-3$ з «виколотою» точкою з абсцисою $x=0$; 3) Графік функції $y=2x+1$ з «виколотою» точкою з абсцисою $x=0$; 4) Графік функції $y=x-2$ з «виколотими» точками з абсцисами $x=-2$, $x=1$. **15.16.** $\frac{mp}{50n}$ учасників. **15.17.** 8,4 км/год. **5.18.** 1) 5; 2) a^2; 3) $\frac{6}{b^4}$; 4) $\frac{8b^2}{3a}$. **5.19.** 1) 6; 2) $\frac{3}{m}$; 3) $\frac{4n}{7-m}$; 4) $\frac{m}{9}$. **5.20.** 1) $\frac{144}{y^2}$; 2) $\frac{216}{a^3}$; 3) $\frac{y^2}{36x^2}$; 4) $-\frac{x^3}{27y^3}$; 5) $\frac{x^{20}a^4}{16y^4}$; 6) $\frac{8a^3}{x^3y^6}$; 7) $\frac{81y^{12}}{625x^4a^{16}}$; 8) $-\frac{64x^{12}}{125y^3a^9}$. **5.21.** 1) m^2; 2) $-\frac{1}{m^3}$; 3) $3m^3$; 4) $\frac{8m^3}{a^8}$; 5) $\frac{9}{m^2}$; 6) $\frac{2-m}{7m^6}$. **5.22.** 1) $\frac{3b}{4}$; 2) $-\frac{4a}{7}$; 3) $3ab$; 4) $\frac{54y}{x}$. **5.23.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{2a}{7}$; 3) $-\frac{32b^6}{a}$; 4) $-\frac{15x}{4}$. **5.24.** 1) $\frac{3(x-y)}{2}$; 2) $\frac{4(x+y)}{7}$; 3) $24(a-b)$; 4) $3mn(m+n)$. **5.25.** 1) $3x(x-3)$; 2) $\frac{6(a+b)}{a}$; 3) $\frac{3}{m}$. **5.26.** 1) a^2b^2; 2) c; 3) a^2. **5.27.** 1) 2; 2) $\frac{3m^4}{2}$, 24. **5.28.** 1) $\frac{1}{12x}$; 2) $\frac{a^2}{4b}$; 3) $\frac{y}{3}$; 4) $4x^2$. **5.29.** 1) $\frac{1}{6x}$; 2) $\frac{4xy}{3}$; 3) $(m-n)m$. **5.30.** $\frac{xk}{25y}$. **5.31.** 1) Графік функції $y=3x+3$ з «виколотою» точкою з абсцисою $x=0$; 2) графік функції $y=x-1$ з «виколотими» точками з абсцисами $x=\pm3$, $x=-1$; 3) графік функції $y=2x$ з «виколотими» точками з абсцисами $x=-2$, $x=0$, $x=1$.

§ 6. Тотожні перетворення раціональних виразів

6.1. 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{y}{2}$; 4) $\frac{1}{5y}$; 5) $\frac{y}{2x}$; 6) $\frac{xy}{2}$. **6.2.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{x}{x-3}$; 4) $\frac{x}{x-4}$. **6.3.** 1) $\frac{9a}{a+9}$; 2) $\frac{7a}{a+7}$; 3) $\frac{a^2+5a}{a-1}$; 4) $\frac{a^2+3a}{a-2}$. **6.4.** 1) $\frac{6}{a}$; 2) $\frac{4}{a}$; 3) $\frac{2}{a-5}$; 4) $\frac{7}{a-7}$. **6.5.** 1) $2y(y-2)$; 2) $\frac{1}{3y(y-3)}$; 3) $\frac{y-5}{5y}$; 4) $\frac{y-7}{7y}$. **6.6.** 1) 17; 2) 61; 3) $-0{,}8$; 4) $-1{,}2$.

6.7. 1) $\frac{18}{x}$; 2) $\frac{20}{x}$; 3) $-\frac{15}{x}$; 4) $-\frac{6}{x}$. **6.8.** 1) $\frac{1}{4a^2}-1+a^2$; 2) $\frac{9}{a^2}+2+\frac{a^2}{9}$; 3) $\frac{a^4}{36}-2+\frac{36}{a^4}$; 4) $b^2+\frac{9}{b^2}$. **6.9.** 1) -40; 2) 28. **6.10.** 1) $\frac{x}{3}$; 2) $\frac{11}{x}$; 3) $\frac{x^2-49}{x^2+49}$; 2) $\frac{x^2-64}{x^2+64}$. **6.13.** 2) 0,1; 3) $-3{,}5$; 4) 0,2. **6.14.** 1) 7; 2) 27; 3) 47; 4) 140. **6.16.** $\frac{950}{(19+v)(19-v)}$. **6.17.** 1) $\frac{xy}{x+y}$ год; 2) $\frac{3xy}{x+y}$ год; 3) $\frac{nxy}{x+y}$; 60 год. **6.18.** 1) $\frac{3}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}$; 2) 4 км/год. **6.19.** 1) $\frac{1}{8}$, $x\neq0$; 2) $\frac{1}{6}$, $y\neq0$; 3) $\frac{y}{x}$,

Видавництво «Ранок»

$x \neq 0$, $y \neq 0$, $x^2 \neq -3y$; 4) $\frac{a^3}{b}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a^2 \neq 6b$; 5) $\frac{5(a-c)}{c}$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $a \neq -c$; 6) $\frac{7(m+k)}{m}$, $k \neq 0$, $m \neq 0$, $k \neq m$. **6.20.** 1) 5; 2) $\frac{a+3}{3-a}$. **6.21.** 1) $\frac{9b+1}{3}$, $b \neq 0$; 2) $\frac{5b+2}{18}$, $b \neq 0$; 3) m, $k \neq m$. **6.22.** 1) $\frac{7+x}{7-x}$; 2) $\frac{1}{4x}$. **6.23.** 1) $\frac{6}{x(x+1)}$; 2) $\frac{8}{y}$. **6.24.** 1) 32; 2) 10. **6.25.** 1) -32; 2) 18. **6.26.** 1) $1-c$, $c \neq 0$; 2) $\frac{y}{y-2}$, $y \neq 0$, $y \neq 2$; 3) $x-5$, $x \neq 0$, $x \neq -5$; 4) $\left(\frac{x-y}{2x+y}\right)^{2y-2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $2x \neq -y$. **6.27.** 1) 1; 2) $\frac{x}{2}$; 3) $\frac{y}{2x}$. **6.28.** 1) 1; 2) $\frac{x}{x-5}$. **6.29.** 1) $\frac{8a}{a+8}$; 2) $\frac{a^2+a}{a-3}$. **6.30.** 1) $\frac{5}{a}$; 2) $\frac{2}{a-6}$. **6.31.** 1) $8y(y-8)$; 2) $\frac{y-6}{6y}$. **6.32.** 1) 41; 2) 1. **6.33.** 1) $\frac{16}{x}$; 2) $-\frac{4}{x}$. **6.34.** 1) $\frac{1}{a^2}-2+a^2$; 2) $\frac{4}{a^2}+2+\frac{a^2}{4}$; 3) $\frac{a^4}{9}-2+\frac{9}{a^4}$; 4) $b^2+\frac{16}{b^2}$. **6.35.** 1) -20; 2) 44. **6.36.** 1) $\frac{x}{2}$; 2) $\frac{10}{x}$; 3) $\frac{x^2-16}{x^2+16}$; 4) $\frac{x^2+25y^2-1}{x^2-25y^2+1}$. **6.39.** 1) 38; 2) 62; 3) 3; 4) -26. **6.40.** 12 км/год. **6.41.** 6 уп. **6.42.** 1) $y=x-3$, $x \neq 1$; 2) $y=x+4$, $x \neq -1$; 3) $y=-x+5$, $x \neq 2$.

§ 7. Раціональні рівняння. Рівносильні рівняння

7.1. 1) $x \neq 0$; 3) $x \neq -2$. **7.2.** 1) -1; 2) 0; 3) 1. **7.3.** 1) 9; 2) -5; 3) -11; 4) 13; 5) -4; 6) 6. **7.4.** 1) 1; 2) -2; 3) -5; 4) 6; 3) коренів немає; 4) коренів немає. **7.5.** 1) 2; 2) 1; 3) 0; 4) безліч. **7.6.** 1) -2; 2; 2) -3; 3; 3) $-4{,}5$; 4) 3,5; 5) коренів немає; 6) коренів немає. **7.7.** 1) 6; 2) 7; 3) $-1{,}5$; 4) 2; 5) коренів немає; 6) коренів немає. **7.8.** 1–2) Один; 3–6) безліч. **7.9.** 1) 7; 2) 8; 3) 6; 4) 8; 5) 11,5; 6) 13,5. **7.10.** 1) -9; 2) -8; 3) 4; 4) 5; 5) 0; 6) 0. **7.11.** 1–6) Коренів немає. **7.12.** 1–2) Рівносильні; 3–4) не рівносильні. **7.13.** 1–2) Коренів немає; 3) 5; 4) -7. **7.14.** 1–2) Коренів немає; 3) 0,75; 4) 0,6; 5) 0; -18; 6) 0; -12. **7.15.** 1) 6; 2) -6; 3) -4; 4) -1. **7.16.** 1) 5; 2) 2; 3) -3; 4) -2. **7.17.** 1) 3; 2) -4; 3) -3; 4) 8; 5–6) коренів немає. **7.18.** 2) 6; 3) 5; 4) 3; 4. **7.19.** 36 хв; 50 м/хв. **7.20.** 1400 байків. **7.21.** За 30 хв. **7.22.** 1) 7; 2) -2; 3) -7; 4) 5. **7.23.** 1) -2; 2) -4; 3) 25; 4) $\frac{1}{2}$. **7.24.** 1) -11; 2) коренів немає; 3) -1; 1; 4) -3. **7.25.** 1) 7; 2) 14; 3) -5. **7.26.** 1) -1; 2) 5; 3) коренів немає. **7.27.** 1) 2; 2) 1; 3) 0; 4) безліч. **7.28.** 1) -8; 8; 2) 4,5; 3) коренів немає. **7.29.** 1) 1; 2) -1; 3) коренів немає. **7.30.** 1) 15; 2) $x \neq 4$; 3) будь-яке число. **7.31.** 1) 5; 2) 6; 3) 11,5. **7.32.** 1) -7; 2) 3; 3) 0. **7.33.** 1–3) Коренів немає. **7.34.** 1) Рівносильні; 2) не рівносильні. **7.35.** 1) Коренів немає; 2) 6. **7.36.** 1) Коренів немає; 2) 0,4; 3) 0; -3. **7.37.** 1) 5; 2) -3. **7.38.** 1) 1; 2) -1. **7.39.** 10 пісень. **7.40.** 15 км/год; 12 км/год. **7.41.** Патрон — 10 м/с, Фокстер — 6 м/с. **7.42.** 8-А клас — за 1,5 год; 8-Б — за 3 год. **7.43.** 1) 2; 2) 10; 3) коренів немає. **7.44.** 1) 7; 2) 3; 6; 3) 4; 6.

§ 8. Степінь із цілим показником. Стандартний вигляд числа

8.1. 1) 2^3; 2^0; 2^{-3}; 2^{-4}; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{1}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{2}$. **8.2.** а) 1) 10^0; 2) 10^1; 3) 10^3; 4) 10^{-2}; 5) 10^{-4}; 6) 10^{-6}; б) 1) $\left(\frac{1}{10}\right)^{0}$; 2) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$; 3) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3}$; 4) $\left(\frac{1}{10}\right)^{2}$; 5) $\left(\frac{1}{10}\right)^{4}$; 6) $\left(\frac{1}{10}\right)^{6}$. **8.3.** 1) 5^2; 2) 11^2; 3) 13^{-1}; 4) 19^{-1}; 5) 7^{-2}; 6) 13^{-2}; 7) 3^{-4}; 8) 2^{-5}. **8.4.** 1) $8(a+11)^{-1}$; 2) $7(a-12)^{-1}$; 3) $6a^5$; 4) $9a^2$; 5) $3ab^2$; 6) $5a^3b$. **8.5.** 1) $(a-3)^1$; 2) $\left(\frac{a+2}{3}\right)^{1}$; 3) $(a+4)^2$; 4) $\left(\frac{a-1}{5}\right)^{3}$. **8.6.** 1) -1; 2) -1; 3) 1; 4) 1; 1) -2; 2) -20; 7) $\frac{4}{49}$; 8) $\frac{25}{121}$. **8.7.** 1) 3; 2) 8; 3) 0,2; 4) 0,03; 5) 1001; 6) 99; 7) 0,5; 8) 2,5. **8.8.** 1) 2,2; 2) $-2{,}1$; 3) 2,55; 4) 5,45. **8.9.** 1) $-1<0$; 2) $1>0$; 3) $\frac{1}{16}>0$; 4) $-\frac{1}{64}<0$; 5) $-\frac{1}{49}<0$; 6) $\frac{1}{27}>0$. **8.10.** 1) 3^{-4}; 3^{-1}; 3^0; 3^3; 2) 7^{-3}; 7^{-2}; 7^0; 7^4; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{0}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$; 4) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2}$; $\left(\frac{1}{6}\right)^{0}$; $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$; $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$. **8.11.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 4; 5) -2; 6) -3. **8.12.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 6; 3) ± 3; 4) $\pm\frac{1}{5}$. **8.13.** 1) $\frac{x^2-a^2}{a^2x^2}$; 2) $\frac{b+a}{ab}$; 3) $\frac{25a^2\left(a^2+25\right)}{25a^2}=a^2+25$; 4) $\frac{49a^2\left(49-a^2\right)}{49a^2}=49-a^2$; 5) $\frac{1}{3a}$; 6) $\frac{1}{4a}$. **8.14.** 1) $1{,}8\cdot10^5>1{,}8\cdot10^{-5}$; 2) $2{,}1\cdot10^{-6}<2{,}1\cdot10^6$;

Видавництво «Ранок»

3) $6{,}9\cdot10^{11}<7{,}3\cdot10^{11}$; 4) $5{,}2\cdot10^{4}>4{,}8\cdot10^{4}$;
5) $3{,}1\cdot10^{-2}<3{,}2\cdot10^{-2}$; 6) $1{,}4\cdot10^{-3}>1{,}3\cdot10^{-3}$;
7) $4{,}3\cdot10^{-4}<3{,}2\cdot10^{-3}$; 8) $8{,}5\cdot10^{-6}<2{,}7\cdot10^{-5}$.

8.15. 1) $12^{-20}>0$; 2) $15^{-31}>0$; 3) $(-11)^{-14}>0$;
4) $(-19)^{-12}>0$; 5) $(-14)^{-17}<0$; 6) $(-18)^{-21}<0$;
7) $-(-3{,}7)^{-10}<0$; 8) $-(-1{,}5)^{-16}<0$. **8.16.** 1) $(-5)^{-2}$;
$(-5)^{0}$; $(-5)^{-3}$; 2) $(-2)^{-4}$; $(-2)^{0}$; $(-2)^{-5}$; 3) $(-0{,}1)^{-2}$;
$(-0{,}1)^{0}$; $(-0{,}1)^{-1}$; 4) $(-0{,}3)^{-4}$; $(-0{,}3)^{0}$; $(-0{,}3)^{-1}$.

8.17. 1) $(x-3)^2$; 2) $(x+4)^2$; 3) $\dfrac{(a+5)^2}{5a}$; 4) $\dfrac{(a-6)^2}{6a}$.

8.18. 2) 8; 3) -4; 4) -3; 5) $\dfrac{1}{7}$; 6) $-\dfrac{4}{5}$. **8.19.** 1) 91,7 млн кв. км; 76,2 млн кв. км; 14,8 млн кв. км; 180 млн кв. км; 20,3 млн кв. км; 2) Північний Льодовитий, Південний, Індійський, Атлантичний, Тихий.

8.20. 1) $1{,}5\cdot10^{5}$ кг; 5; 2) $6{,}25\cdot10^{6}$ разів; 6; 3) $5{,}17\cdot10^{9}$; 9; 4) $5{,}85\cdot10^{-7}$ м; $4{,}5\cdot10^{-7}$ м; -7; 5) $2\cdot10^{-6}$ м; -6; 6) $1{,}7\cdot10^{-3}$ кг; -3. **8.21.** 1) А — $2{,}2\cdot10^{-2}$ мг; B_1 — $4\cdot10^{-2}$ мг; B_2 — $1{,}5\cdot10^{-1}$ мг; С — 1,3 мг; РР — $8\cdot10^{-1}$ мг; 2) -2; -2; -1; 0; -1; 3) на 2 порядки.

8.22. 1) $\dfrac{1}{3a}$; $\dfrac{1}{-2b}$; $\dfrac{1}{(-8b)^{15}}$; 2) $\dfrac{5}{c}$; $\dfrac{11}{c^8}$; $-\dfrac{4}{d}$; $-\dfrac{1}{d^2}$;
3) $\dfrac{1}{5x^9}$; $\dfrac{5}{13y}$; $\dfrac{8}{5y^6}$; 4) $\dfrac{3}{a-7}$; $\dfrac{5}{7(a+b)^2}$. **8.23.** 1) 10^{-2}; 7^{-2}; $-15\cdot13^{-2}$; $-17\cdot14^{-2}$; 2) $(4a)^{-5}$; $(3a)^{-6}$; $8\cdot(ab)^{-1}$; $9\cdot(abc)^{-1}$; 3) $x^6\cdot y^{-10}$; $x^9\cdot y^{-4}$; $5x\cdot(-y)^{-17}$; $8x^3\cdot(-y)^{-19}$; 4) $x\cdot y^{-20}$; $x^{30}\cdot y^{-1}$; $7x\cdot(-y)^{-11}$; $3x\cdot(-y)^{-13}$. **8.24.** 1) 1; $\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{1}{64}$; $\dfrac{1}{81}$; 2) 21; 8; -1000; 3) $5\dfrac{4}{9}$; $\dfrac{9}{32}$; $-\dfrac{2}{11}$; 4) 1 000 000; $-\dfrac{5}{8}$; $-\dfrac{125}{343}$.

8.25. 1) $3{,}1\cdot10^{4}$, 4; 2) $5{,}7\cdot10^{5}$, 5; 3) $4{,}2\cdot10$, 1; 4) $2{,}7\cdot10^{3}$, 3; 5) $2{,}5\cdot10^{-1}$, -1; 6) $5{,}8\cdot10^{-2}$, -2; 7) $1\cdot10^{-3}$, -3; 8) $3\cdot10^{-5}$, -5. **8.26.** 1) 203; 2) 7120; 3) 0,38; 4) 0,051; 5) 0,901; 6) 0,42; 7) 0,0013; 8) 0,008 76. **8.27.** 1) 3^1; 3^2; 3^0; 3^{-1}; 3^{-2}; 2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{0}$; $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$; $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}$; $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1}$; $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3}$. **8.28.** а) 1) 10^0; 2) 10^2; 3) 10^4; 4) 10^{-1}; 5) 10^{-3}; 6) 10^{-5}; б) 1) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{0}$; 2) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-2}$; 3) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-4}$; 4) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{1}$; 5) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{3}$; 6) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{5}$.

8.30. 1) $1-a$; 2) $\dfrac{4+a}{3}$; 3) $(a+3)^4$; 4) $\left(\dfrac{a-2}{4}\right)^5$.

8.31. 1) 6; 2) 0,4; 3) 999; 4) 2. **8.32.** 1) 1,6; 2) 11,85.

8.33. 1) 5^{-3}; 5^{-2}; 5^{0}; 5^{4}; 2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$.

8.34. 1) 0; 2) 1; 3) 3; 4) 2; 5) -2; 6) -4.

8.35. 1) $\dfrac{1}{4}$; 2) 3; 3) ±8; 4) $\pm\dfrac{1}{7}$. **8.36.** 1) $\dfrac{x+a}{ax}$;
2) $\dfrac{36a^2\left(36-a^2\right)}{36a^2}=36-a^2$; 3) $\dfrac{1}{5a}$. **8.37.** 1) $1{,}3\cdot10^{-7}<1{,}3\cdot10^{7}$; 2) $6{,}4\cdot10^{6}>5{,}9\cdot10^{6}$; 3) $2{,}1\cdot10^{-3}<2{,}5\cdot10^{-3}$; 4) $5{,}9\cdot10^{23}<1{,}4\cdot10^{25}$; 5) $5{,}2\cdot10^{-3}>8{,}3\cdot10^{-6}$; 6) $7{,}01\cdot10^{-8}<7{,}1\cdot10^{-8}$. **8.38.** 1) $11^{-35}>0$; 2) $(-16)^{-15}<0$; 3) $(-13)^{-20}>0$; 4) $-(-2{,}4)^{-14}<0$. **8.39.** 1) $(-7)^{-2}$; $(-7)^{0}$; $(-7)^{-1}$; 2) $(-0{,}2)^{-4}$; $(-0{,}2)^{0}$; $(-0{,}2)^{-3}$.

8.40. 1) $(x-5)^2$; 2) $\dfrac{(a+3)^2}{3a}$. **8.41.** 1) $2{,}5\cdot10^{6}$; 6; 2) $3\cdot10^{9}$ способів; 9; 3) $2\cdot10^{-6}$; -6; 4) $7{,}53\cdot10^{-7}$ г; -7; 5) $4\cdot10^{-7}$ м; -7. **8.43.** 1) А — $5\cdot10^{-3}$ мг; B_1 — 1,84 мг; B_2 — $1{,}8\cdot10^{-1}$ мг; Е — $3{,}12\cdot10$ мг; РР — $1{,}57\cdot10$ мг; 2) -3; 0; -1; 1; 1; 3) на 1 порядок.

8.44. 1) 9; 2) $\dfrac{1}{4}$; 3) $\dfrac{2}{7}$.

§ 9. Властивості степеня із цілим показником

9.1. 1) 16; 2) 9; 3) 1; 4) 1; 5) 1,6; 6) 1,8. **9.2.** 1) $3^{-4}\cdot3^{-4}$; 2) $5^{-1}\cdot5^{-1}$; 3) $(-7)^{-3}\cdot(-7)^{-3}$; 4) $a^{-5}\cdot a^{-5}$; 5) $b^{-1}\cdot b^{-1}$; 6) $(-c)^{-25}\cdot(-c)^{-25}$. **9.3.** 1) $a^{-4}\cdot a^{-6}$; 2) $a^{-5}\cdot a^{-5}$; 3) $a^{5}\cdot a^{-15}$; 4) $a^{2}\cdot a^{-12}$; 5) $a^{1}\cdot a^{-11}$; 6) $a^{-1}\cdot a^{-9}$; 7) $a^{0}\cdot a^{-10}$; 8) $a^{-10}\cdot a^{0}$. **9.4.** 1) 1; 2) x^2; 3) 3; 4) $2x^2y$; 5) 1; 6) $\dfrac{1}{2x}$. **9.5.** 1) 10^{-2}; 2) 10; 3) 10^{-5}. **9.6.** а) $\left(2^{6}\right)^{-2}$; 2) $\left(a^{4}\right)^{-2}$; 3) $\left(3^{-8}\right)^{-2}$; 4) $\left(b^{-10}\right)^{-2}$; 5) $\left(5^{-2}\right)^{-2}$; 6) $\left(c^{-2}\right)^{-2}$; б) 1) $\left(2^{3}\right)^{-4}$; 2) $\left(a^{2}\right)^{-4}$; 3) $\left(3^{-4}\right)^{-4}$; 4) $\left(b^{-5}\right)^{-4}$; 5) $\left(5^{-1}\right)^{-4}$; 6) $\left(c^{-1}\right)^{-4}$. **9.7.** 1) 7^3; 2) 11^{-6}; 3) 5^2; 4) 4^7. **9.8.** 1) b^{-2}; 2) b^{-4}; 3) $-b^{-5}$; 4) $-b^{-3}$; 5) b^{-12}; 6) b^{-10}; 7) $-b^{-30}$; 8) $-b^{-12}$. **9.9.** 1) ab; 2) ab; 3) $\dfrac{a}{b}$; 4) $\dfrac{b}{a}$. **9.10.** 1) 1; 2) 1; 3) -1; 4) -1; 5) 1; 6) 1. **9.11.** 1) $(11x)^{-3}$; 2) $(13x)^{-3}$; 3) $\left((17x)^{2}\right)^{-3}$; 4) $\left((15x)^{2}\right)^{-3}$; 5) $\left(\dfrac{1}{2}x^{5}\right)^{-3}$; 6) $\left(\dfrac{1}{3}x^{4}\right)^{-3}$; 7) $\left(10x^{7}\right)^{-3}$; 8) $\left(4x^{8}\right)^{-3}$. **9.12.** 1) $7{,}6\cdot10^{3}$;

Видавництво «Ранок»

2) $4\cdot10^{-6}$; 3) $4{,}8\cdot10^{-4}$; 4) $9\cdot10^{-8}$; 5) $1{,}04\cdot10^{7}$; 6) $1{,}25\cdot10^{-16}$; 7) $2{,}16\cdot10^{-3}$; 8) $2{,}16\cdot10^{-25}$.

9.13. 2) $x^4(3+x^5)$; 3) $x^2(2+x^4)$; 4) $x^{-9}(3x^5+1)$; 5) $x^{-6}(1+2x^4)$; 6) $x^{-3}(3x^6-2x+1)$; 7) $x^{-4}(1+5x^6-6x^3)$. **9.14.** 1) -8; 2) 7; 3) -4; 4) 17. **9.15.** 1) 25; 2) 2; 3) 2; 4) 4. **9.16.** 1) У $2\cdot10^4$; 2) у 6. **9.17.** 1) $1{,}35\cdot10^8$ км; 2) $2{,}64\cdot10^{10}$ т; 3) за $5\cdot10^2$ с. **9.18.** 1) У $2\cdot10^4$; 2) у 5; 3) $700=7\cdot10^2$ г; 4) $10\,000=10^4$ г. **9.19.** 1) 36; 2) 1; 3) 1,4. **9.20.** 1) $a^{-3}\cdot a^{-9}$; 2) $a^{-6}\cdot a^{-6}$; 3) $a^{7}\cdot a^{-19}$; 4) $a^{6}\cdot a^{-18}$; 5) $a^{1}\cdot a^{-13}$; 6) $a^{-1}\cdot a^{-11}$; 7) $a^{0}\cdot a^{-12}$; 8) $a^{-12}\cdot a^{0}$. **9.21.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{b}{4}$; 3) $\frac{7}{a^4}$; 4) $\frac{3b^2}{a}$. **9.22.** 1) 1; 2) x^2; 3) 2; 4) $5x$; 5) 1; 6) $\frac{1}{3y}$.

9.23. 1) 10^{-1}; 2) 10^{3}; 3) 10^{-7}. **9.24.** 1) 5^7; 2) 13^{-8}; 3) 2^6. **9.25.** 1) 9^{-1}; 2) 5^{-7}; 3) 49; 4) 3. **9.26.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{a^7}$; 3) 1; 4) a^5; 5) b. **9.27.** 1) b^{-6}; 2) $-b^{-7}$; 3) b^{-6}; 4) $-b^{-10}$.

9.28. 1) $(17x)^{-2}$; 2) $\left((15x)^3\right)^{-2}$; 3) $\left(\frac{1}{4}x^7\right)^{-2}$; 4) $\left(10x^9\right)^{-2}$.

9.29. 1) 0,25; 2) $\frac{8}{13}$; 3) 4,5. **9.30.** 1) а) $16x^{-6}$; б) $1000x^{-15}$; в) $6{,}25x^{-12}y^2$; г) $125x^3y^{18}$; 2) а) $\left(10x^{-1}\right)^2$; $\left(9x^{-3}\right)^2$; б) $\left(4x^{-3}y^{-2}\right)^3$; $\left(3x^{-4}y^{-8}\right)^3$. **9.31.** 1) 1; 2) -1; 3) 1. **9.32.** 1) $4{,}2\cdot10^5$; 2) $6{,}3\cdot10^{-5}$; 3) $2{,}48\cdot10^9$; 4) $1{,}92\cdot10^{-6}$. **9.33.** 1) $4\cdot10^{-9}$; 2) 3; 3) $5\cdot10^4$.

9.34. 1) $x^5(1+7x^3)$; 2) $x^{-8}(x^3+7)$; 3) $x^{-4}(4x-6+x^8)$.

9.35. 1) $1{,}35\cdot10^{31}$ Дж; 2) за $3{,}6\cdot10^2$ с. **9.36.** 1) У $5\cdot10^3$; 2) $50\,000=5\cdot10^4$ г. **9.37.** 1) -9; 2) -13.

§ 10. Функція $y=\frac{k}{x}$, її графік і властивості

10.1. 1) $b=\frac{26}{a}$; 2) $v=\frac{35}{t}$; 3) $p=\frac{12}{S}$. **10.2.** Проходить через A, B, D. **10.3.** 1) $y=-\frac{5}{x}$; 2) $y=-\frac{6}{x}$; 3) $y=\frac{3}{x}$; 4) $y=\frac{4}{x}$. **10.4.** Проходить через C, D. **10.5.** 1) -2; 3) ±4; 4) ±5. **10.6.** 1) 4; -2; 2) 3; -1; 3–4) коренів немає. **10.7.** 1) $(-3;1)$; 2) $(-5;-1)$; 3) $(-1;-2)$, $(2;1)$; 4) $(-4;-1)$, $(2;2)$. **10.8.** 2) $y=\frac{1}{x}$, $x\neq-1$; 3) $y=\frac{1}{x}$, $x\neq-2$; 4) $y=-\frac{2}{x}$, $x\neq2$; 5) $y=-\frac{3}{x}$, $x\neq3$; 6) $y=\frac{5}{x}$, $x\neq-1$. **10.9.** 1) $k=3$, $b=-8$; 2) $k=-4$, $b=-6$; 3) $k=-8$, $b=12$; 4) таких значень не існує. **10.11.** $y=\frac{480}{x}$; 1) 30 шт., 24 шт.; 2) 96 г, 48 г. **10.12.** $p=\frac{70}{V}$; 1) 1,4 л, 0,1 л; 2) 25 атм; 70 атм. **10.13.** 1) 2 год; 2) 12 км/год; 3) наприклад, 5 год, 6 год; $v=\frac{36}{t}$; $k=36$ — довжина маршруту. **10.14.** 1) 7; -2; 28; 2) 1; -14; -140. **10.15.** 1) A належить, B не належить; 2) A не належить, B належить. **10.16.** 1) -2; 1; 2) $-0{,}25$; 2; 3) A не належить, B належить. **10.17.** 1) $a=\frac{21}{b}$; 2) $t=\frac{40}{v}$; 3) $S=\frac{18}{p}$. **10.18.** Проходить через A, C. **10.19.** 1) $y=-\frac{3}{x}$; 2) $y=-\frac{10}{x}$; 3) $y=\frac{6}{x}$; 4) $y=\frac{7}{x}$. **10.20.** Проходить через B, C. **10.21.** 1) -1; 2) ±1; 3) -1; 2; 4) коренів немає. **10.22.** 1) $y=\frac{1}{3x}$, $x\neq1$; 2) $y=-\frac{5}{x}$, $x\neq4$; 2) $y=\frac{3}{x}$, $x\neq-1$. **10.23.** $y=\frac{400}{x}$; 1) $y=25$ г. о., 20 г. о.; 2) $x=40$; 8. **10.24.** 1) $k=2$, $b=-3$; 2) $k=-1$, $b=0$; 3) $k=-18$, $b=42$; 4) таких значень не існує.

РОЗДІЛ 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

§ 11. Функція $y=x^2$, її графік та властивості. Графічний спосіб розв'язування рівнянь

Т. 1. 1) 100; 169; 0,25; 2,89; 100; 576; 2) A, D, E, N належать, B, C, F, M не належать. **Т. 2.** 1) -2; 2; 2) коренів немає; 3) -3; 0; 4) 0; 2; 5) -2; 1; 6) коренів немає; 7) -2; 8) -1. **11.1.** 1) $\frac{4}{49}$; 2) $\frac{25}{9}$; 3) 0,36; 4) 0,81; 5) $\frac{1}{121}$; 6) $\frac{1}{169}$. **11.2.** B, D належать; A, C не належать. **11.3.** 1) $y(0)<y(2)$; 2) $y(-3)>y(0)$; 3) $y(-3)=y(3)$; 4) $y(1)=y(-1)$; 5) $y(1)<y(-3)$; 6) $y(-2)>y(1)$. **11.4.** 1) $-3\leqslant x\leqslant3$, $0\leqslant y\leqslant9$; 2) $-2\leqslant x\leqslant2$, $0\leqslant y\leqslant4$; 3) $-3\leqslant x\leqslant1$, $0\leqslant y\leqslant9$; 4) $-1\leqslant x\leqslant2$, $0\leqslant y\leqslant4$. **11.5.** 1) Дві, $(0;0)$, $(2;4)$; 2) жодної; 3) одна, $(-1;1)$. **11.6.** 1) ±1; 2) ±2; 3) 0; 4; 4) 0; -3; 5) -1; 3; 6) -1; 2. **11.7.** 1) Два; 2) два; 3) жодного; 4) жодного; 5) два; 6) два; 7) один; 8) один. **11.8.** 1) $A(7;49)$, $B(-7;49)$, $y=49$; 2) $A(-11;121)$, $B(11;121)$, $y=121$; 3) $A(2{,}5;6{,}25)$, $B(-2{,}5;6{,}25)$, $y=6{,}25$; 4) $A(-1{,}6;2{,}56)$, $B(1{,}6;2{,}56)$, $y=2{,}56$. **11.9.** 1) $(0;0)$; 3) $(-2;-4)$; $(2;-4)$; 5) $(-0{,}2;-0{,}04)$; $(0{,}2;-0{,}04)$; 2) і 4) — не перетинає. **11.10.** 1) $y=x^2$, $x\neq0$; 2) $y=x^2$, $x\neq1$; 3) $y=x^2$, $x\neq\pm1$; 4) $y=-x^2$, $x\neq\pm3$. **11.12.** Наприклад: 1) $x^2=16$;

Видавництво «Ранок»

2) $x^2=-x$; 3) $\frac{2}{x}=2$; 4) $\frac{6}{x}=-2$; 5) $x^2=x-1$. **11.13.** $y=x^2$.

1) Так $15^2=225$; 2) ні, число 76 не є квадратом натурального числа. **11.14.** 1) 4 м; 2) 1 м; 3) 9 м. **11.15.** 1) $\frac{16}{81}$; 2) $\frac{49}{9}$; 3) 0,49; 4) 0,64; 5) $\frac{1}{144}$; 6) $\frac{1}{225}$; 7) так; 8) ні; 9) так; 10) ні. **11.16.** 1) Дві, $(0;0)$, $(-2;4)$; 2) жодної; 3) одна, $(1;1)$. **11.17.** 1) ±3; 2) 0; 3; 3) -2; 1; 4) -1. **11.18.** 1) Два; 2) жодного; 3) два; 4) один. **11.19.** 1) $y=x^2$, $x\neq0$; 2) $y=x^2$, $x\neq-1$; 3) $y=-x^2$, $x\neq\pm4$. **11.20.** Наприклад: 1) $x^2=1$; 2) $x^2=2x$; 3) $\frac{2}{x}=1$; 4) $x^2=3x-5$.

§ 12. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь

Т. 1. 1) 50; 2) 160; 3) $-4,2$; 4) $-4,7$; 5) 18; 6) 27; 7) $-33,5$; 8) $-15,5$. **Т. 2.** 1) 3; 2) 8; 3) 12; 4) 8; 5) 0; 6) 0; 7) 13; 8) 15. **Т. 3.** 1) 18; 2) 19; 3) 3; 4) 11; 5) 90; 6) 278; 7) -30; 8) -42. **Т. 4.** 1) 36; 2) 49; 3) 25; 4) 81; 5) 72; 6) 75; 7) 21; 8) 12. **Т. 5.** 1) ±6; 2) ±4; 3) ±3; 4) ±7; 5) -14; 8; 6) -10; 14; 7) -3; 4; 8) -5; 4. **12.1.** 1) $\frac{11}{7}$; 2) $\frac{8}{15}$; 3) $\frac{5}{2}$; 4) $\frac{8}{5}$; 5) 0,01; 6) 0,03. **12.2.** 1) 16; 2) 18; 3) 21; 4) 23; 5) 32; 6) 34. **12.3.** 1) 2,7; 2) 3,4; 3) 3,8; 4) 0,41; 5) 0,44. **12.5.** 1) 15; 2) 20; 3) 0,9; 4) 1,2; 5) $\frac{1}{8}$; 6) 7; 7) 1; 8) 2,7. **12.6.** 1) -22; 2) -24; 3) 0; 4) 0. **12.7.** 1) 9; 2) 11; 3) 4; 4) 6; 5) 6,3; 6) 6,1; 7) -12; 8) -21. **12.8.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні; 5) так; 6) ні. **12.9.** 1) 3; 21; 55; 210; 2) 0; 10; 102; 290; 3) 0; 4; 6; 10; 4) 1; 4; 7; 10. **12.10.** 1) 4,7; 2) 2,4; 3) 90; 4) 280; 5) 75; 6) 72; 7) 5; 8) 5. **12.11.** 1) 0,01; 2) коренів немає; 3) 50; 4) коренів немає; 5) 540; 6) 630. **12.12.** 1) $\pm0,2$; 2) коренів немає; 3) ±6; 4) коренів немає; 5) -50; -30; 6) 20; 40. **12.13.** 1) $x\geqslant0$; 2) x — будь-яке число; 3) $x\leqslant0$; 4) $x=0$; 5) $x>0$; 6) $x<0$. **12.14.** 2) 0; 3) 169; 4) розв'язків немає. **12.15.** 1) 14 см; 2) 30 м; 3) 0,1 км; 4) 11 111 мм. **12.16.** 1) 60 см; 2) так. **12.17.** 10 с. **12.18.** 1) $\frac{5}{12}$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) 0,2; 4) 0,06. **12.19.** 1) 17; 2) 20; 3) 22; 4) 36; 5) 2,8; 6) 3,5; 7) 0,42; 8) 0,47. **12.21.** 1) 14; 2) -42; 3) 0,5; 4) 0; 5) 6; 6) 0; 7) 6,4; 8) 0. **12.22.** 1) 10; 2) 4; 3) 30,2; 4) -36. **12.23.** 1) 101; 2) $-2,1$; 3) 22; 4) $-6,5$. **12.24.** 1) 0; 14; 200; 310; 2) 1; 3; 5; 8. **12.25.** 1) 4; 2) 17; 3) 0; 4) 11. **12.26.** 1) 3,8; 2) 180; 3) 72; 4) 10. **12.27.** 1) 22; 2) 9; 3) 354; 4) -70. **12.28.** 1) 64; 2) 100; 3) 48; 4) 14. **12.29.** 1) ±5; 2) ±8; 3) -10; 16; 4) -6; 5. **12.30.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. **12.31.** 1) 0,04; 2) коренів немає; 3) 18; 4) 400. **12.32.** 1) $\pm0,3$; 2) ±12; 3) 10; 30. **12.33.** 20 с. **12.34.** 1) 196; 2) 4; 3) розв'язків немає.

§ 13. Множина. Підмножина. Числові множини. Раціональні числа. Ірраціональні числа. Дійсні числа

Т. 1. 1) Раціональні: $\frac{2}{7}$; $\frac{9}{4}$; $-\frac{15}{3}$; $-\frac{18}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\sqrt{0,09}$; $\sqrt{0,64}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{225}$; 2) ірраціональні: $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; 2,121121112...; 0,343443444.... **Т. 2.** 1) $0,(6)$; 2) $0,(2)$; 3) $0,(36)$; 4) $0,(45)$; 5) $0,4(6)$; 6) $0,5(3)$. **Т. 3.** 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{2}{11}$; 4) $\frac{7}{11}$; 5) $\frac{4}{15}$; 6) $\frac{11}{15}$. **Т. 4.** 1) $0,(2)=\frac{2}{9}$; 2) $\frac{8}{9}=0,(8)$; 3) $\sqrt{6}<2,45$; 4) $\sqrt{7}>2,64$; 5) $\frac{5}{8}<0,(63)$; 6) $\frac{7}{8}>0,(86)$. **13.2.** 3), 4), 5). **13.3.** 1), 3), 4). **13.4.** $\frac{\sqrt{9}}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{4}}$; $-2,9$; $-5,6$; $15,(3)$; $72,(1)$. **13.6.** 1) $1,(6)$; 2) $2,(3)$; 3) $1,0(6)$; 4) $1,1(3)$; 5) $3,(18)$; 6) $4,(63)$. **13.7.** 1) $3,01>\sqrt{9}$; 2) $3,99<\sqrt{16}$; 4) $7\frac{5}{9}=7,(5)$; 4) $8\frac{4}{9}=8,(4)$; 5) $11,(32)>11,(23)$; 6) $12,(51)<12,(53)$. **13.8.** 1) π; $3,(15)$; 3,18; 2) 3,11; $3,(12)$; π; 3) $0,(49)$; 0,5; $\frac{5}{9}$; 4) 0,2; $\frac{2}{9}$; $0,(23)$. **13.11.** 2) 1,5; $0,(151)$; $0,(15)$; $0,1(5)$; 3) $0,(272)$; $0,(27)$; 0,276; $0,2(7)$; 4) $0,5(4)$; $0,(54)$; $0,(545)$; $\sqrt{0,3}$. **13.12.** 113,04 м. **13.13.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **13.15.** 1) Раціональні: $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{2}$; $-\frac{24}{3}$; $-\frac{16}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{12}$; $\sqrt{0,01}$; $\sqrt{0,81}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{256}$; 2) ірраціональні: $\sqrt{8}$; $\sqrt{3}$; 5,020220222...; 0,565565556.... **13.16.** 1) $0,(3)$; 2) $0,(4)$; 3) $0,(18)$; 4) $0,(63)$; 5) $0,2(6)$; 6) $0,7(3)$. **13.17.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{9}$; 3) $\frac{4}{11}$; 4) $\frac{5}{11}$; 5) $\frac{7}{15}$; 6) $\frac{8}{15}$. **13.18.** 1) $0,(7)=\frac{7}{9}$; 2) $0,(5)=\frac{5}{9}$; 3) $\sqrt{3}<1,73$; 4) $\sqrt{2}>1,41$; 5) $\frac{1}{8}>0,(12)$; 6) $\frac{3}{8}<0,(38)$. **13.19.** $\frac{\sqrt{16}}{3}$; $\frac{2}{\sqrt{25}}$; $-3,2$; $-8,3$; $62,(5)$; $19,(4)$. **13.22.** 1) $3,(3)$; 2) $3,(6)$; 3) $1,2(6)$; 4) $1,4(6)$; 5) $3,(72)$; 6) $6,(09)$. **13.23.** 1) $5,02>\sqrt{25}$; 2) $6\frac{2}{9}=6,(2)$; 3) $10,(17)<10,(71)$. **13.24.** 1) $3,(08)$; 3,13; π; 2) 0,7; $\frac{7}{9}$; $0,(78)$.

Видавництво «Ранок»

§ 14. Властивості арифметичного квадратного кореня

Т. 1. 1) 57; 2) 34; 3) 60; 4) 30; 5) 36; 6) 48; 7) 29; 8) 51. Т. 2. 1) 5; 2) 12; 3) 39; 4) 45; 5) 4; 6) 8. Т. 3. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{80}{33}$; 4) $\frac{13}{30}$; 5) $\frac{5}{8}$; 6) $\frac{2}{5}$; 7) $2\frac{4}{7}$; 8) $3\frac{3}{32}$. Т. 4. 1) 6; 2) 10; 3) 26; 4) 18; 5) 9; 6) 5; 7) 0,7; 8) 0,8. Т. 5. 1. 1) 31; 2) 34; 3) 16; 4) 11; 5) -2; 6) -3. 2. 1) 27; 2) 8; 3) 1; 4) 10 000; 5) 24; 6) 31. Т. 6. 1) 35; 2) 24; 3) 18; 4) 48; 5) $2a$; 6) $3a$; 7) $-7a$; 8) $-8a$.

14.1. 1) 0,06; 2) 0,1; 3) 231; 4) 192. 14.2. 1) 500; 2) 600; 3) 200; 4) 210. 14.3. 1) 5; 2) 13; 3) 1; 4) 17. 14.4. 1) 12; 2) 35; 3) 10; 4) 12; 5) 240; 6) 180. 14.5. 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{7}{12}$; 3) $\frac{44}{15}$; 4) $\frac{27}{5}$. 14.6. 1) 6; 2) 6; 3) 2,1; 4) 3,6; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{4}$; 8) $\frac{7}{30}$. 14.7. 1) 0,6; 2) 1,5; 3) 2; 4) $\frac{4}{3}$. 14.9. 1) 144; 2) 125; 3) 44; 4) 135.

14.10. 1) 800; 2) 700; 3) 0,009; 4) 0,016. 14.11. 1) $15a^2$; 2) $17a^2$; 3) $-4a^6$; 4) $-3a^8$; 5) $\frac{a}{10}$; 6) $\frac{a}{20}$; 7) $-0{,}1a^3$; 8) $-0{,}3a^5$. 14.12. 1) 0,5; 2) 3; 3) 4,5; 4) $\frac{5}{3}$. 14.13. 2) $a^2 \cdot b^6$; 3) $-x^4 \cdot y^7$; 4) $m^9 \cdot n^{11}$. 14.14. 1) 42; 2) 48; 3) 56; 4) 72. 14.15. 1) $\frac{13}{17}$; 2) 10; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{9}{17}$. 14.16. 1) 3; 2) $\frac{1}{2}$. 14.17. 1) 124 м/с; 2) 2,5 хв. 14.18. 1) 26; 2) 42; 3) 45; 4) 34. 14.19. 1) 7; 2) 9; 3) 2; 4) 5. 14.20. 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{72}{77}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $1\frac{17}{18}$. 14.21. 1) 10; 2) 22; 3) 4; 4) 0,6. 14.22. 1) 28; 2) 17; 3) -5. 14.23. 1) 125; 2) 100; 3) 80. 14.24. 1) 20; 2) 42. 14.25. 1) $6a$; 2) $-5a$. 14.26. 1) 0,15; 2) 0,06; 3) 198; 4) 252. 14.27. 1) 700; 2) 800; 3) 180; 4) 240. 14.28. 1) 10; 2) 25; 3) 1,3; 4) 29. 14.29. 1) 21; 2) 14; 3) 120. 14.30. 1) $\frac{9}{10}$; 2) $\frac{8}{21}$; 3) $\frac{13}{4}$; 4) $\frac{49}{15}$. 14.31. 1) 15; 2) 1,8; 3) $\frac{1}{7}$; 4) $\frac{4}{15}$. 14.32. 1) 3,5; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 2; 4) 1,25.

14.33. 1) 121; 2) 216; 3) 99; 4) 56. 14.34. 1) 900; 2) 600; 3) 0,025; 4) 0,081. 14.35. 1) $13a^2$; 2) $-5a^6$; 3) $\frac{a}{30}$; 4) $-0{,}2a^3$. 14.36. 1) 62; 2) 66; 3) 95. 14.37. 1) 17,05 м/с; 2) 5,115 км. 14.38. 1) $-a \cdot b^{15}$; 2) $-x^5 \cdot y^{20}$.

§ 15. Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені

Т. 1. 1) $11\sqrt{3}$; 2) $8\sqrt{6}$; 3) $-6\sqrt{5}$; 4) $-3\sqrt{7}$; 5) $5\sqrt{x}$; 6) $12\sqrt{y}$; 7) $-2\sqrt{x}-4\sqrt{y}$; 8) $-4\sqrt{x}-4\sqrt{y}$. Т. 2. 1) $2\sqrt{5}$; $2\sqrt{6}$; $10\sqrt{7}$; $10\sqrt{6}$; $5\sqrt{2}$; $5\sqrt{5}$; 2) $3\sqrt{10x}$; $2\sqrt{10x}$; $6\sqrt{2x}$; $6\sqrt{3x}$; $5\sqrt{6x}$; $5\sqrt{7x}$; 3) $5y\sqrt{y}$; $4y\sqrt{y}$; $3y^2\sqrt{y}$; $2y^2\sqrt{y}$; $8y^3\sqrt{y}$; $9y^3\sqrt{y}$. Т. 3. 1) $3\sqrt{7}$; 2) $4\sqrt{6}$; 3) $-15\sqrt{2}$; 4) $-13\sqrt{3}$; 5) $9\sqrt{b}$; 6) $11\sqrt{b}$; 7) $-6\sqrt{5b}$; 8) $13\sqrt{2b}$. Т. 4. 1) 30; 2) 42; 3) $-18\sqrt{10}$; 4) $-14\sqrt{15}$; 5) -7; 6) 6. Т. 5. 1) 22; 2) 29; 3) -11; 4) -12; 5) $15-10\sqrt{2}$; 6) $9-6\sqrt{2}$.

Т. 6. 1) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$; 2) $\sqrt{3}\left(1+\sqrt{7}\right)$; 3) $\sqrt{5}\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$; 4) $\sqrt{11}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$; 5) $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)$; 6) $\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$; 7) $\left(a-\sqrt{13}\right)\left(a+\sqrt{13}\right)$; 8) $\left(\sqrt{15}-a\right)\left(\sqrt{15}+a\right)$; 9) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{b}\right)$; 10) $\left(\sqrt{b}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{5}\right)$; 11) $\left(\sqrt{c}+\sqrt{3}\right)^2$; 12) $\left(\sqrt{c}-\sqrt{2}\right)^2$. Т. 7. 1) $\sqrt{45}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{200}$; $-\sqrt{300}$; $-\sqrt{75}$; $-\sqrt{28}$; 2) $\sqrt{6x^2}$; $\sqrt{7x^2}$; $\sqrt{10x^2}$; $-\sqrt{8x^2}$; $-\sqrt{5x^2}$; $-\sqrt{15x^2}$; 3) $\sqrt{2y^4}$; $\sqrt{3y^{10}}$; $-\sqrt{6y^8}$; $-\sqrt{8y^{14}}$. Т. 8. 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt{5}$; 4) $3\sqrt{6}$; 5) $\frac{2\sqrt{7x}}{x}$; 6) $\frac{8\sqrt{2x}}{x}$; 7) $\frac{\sqrt{6}}{14}$; 8) $\frac{\sqrt{6}}{15}$. Т. 9. 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+1$; 3) $6\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$; 4) $4\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)$; 5) $\sqrt{3a}-\sqrt{a}$; 6) $\sqrt{5a}-\sqrt{a}$. 15.1. 1) $7\sqrt{a}$; 2) $6\sqrt{3}$; 3) $-2\sqrt{b}$; 4) $\sqrt{a}$.

15.2. 1) $0{,}2\sqrt{21}$; 2) $0{,}3\sqrt{23}$; 3) $\frac{8\sqrt{7}}{11}$; 4) $\frac{9\sqrt{5}}{13}$; 5) $a\sqrt{5a}$; 6) $a\sqrt{2a}$; 7) $2a^4\sqrt{11a}$; 8) $a^4\sqrt{6a}$. 15.3. 1) $6\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{3}$; 3) 0; 4) 0; 5) $10{,}4\sqrt{a}$; 6) $14{,}6\sqrt{a}$; 7) $2\sqrt{a}$; 8) $2\sqrt{a}$. 15.4. 1) 6; 2) 10; 3) 70; 4) 30. 15.5. 1) 33; 2) 14; 3) -19; 4) -33; 5) -7; 6) -6. 15.6. 1) $x-1$; 2) $x-4$; 3) $x-9y$; 4) $x-16y$; 5) $x+10\sqrt{xy}+25y$; 6) $x+12\sqrt{xy}+36y$.

15.7. 1) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-2\right)$; 2) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-3\right)$; 3) $\sqrt{a}\left(\sqrt{5}+\sqrt{a}\right)$; 4) $\sqrt{a}\left(\sqrt{6}+\sqrt{a}\right)$; 5) $\left(\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)$; 6) $\left(5\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(5\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$; 7) $\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)^2$; 8) $\left(\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)^2$. 15.8. 1) $\sqrt{10}+1$; 2) $\sqrt{13}+1$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{5a}$; 6) $\sqrt{2a}$. 15.9. 1) $\sqrt{47}$; 2) $\sqrt{53}$; 3) $\sqrt{7{,}2}$; 4) $\sqrt{8}$; 5) $-\sqrt{15}$; 6) $-\sqrt{35}$; 7) $-\sqrt{2a}$; 8) $-\sqrt{6a}$.

15.10. 1) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; 3) $9\sqrt{x}$; 4) $8\sqrt{x}$; 5) $\frac{12\sqrt{x}-6}{x-6}$; 6) $\frac{14\sqrt{x}+7}{x+7}$; 7) $(x-5)\sqrt{x+5}$; 8) $(x+4)\sqrt{x-4}$.

15.11. 1) $\frac{9\left(\sqrt{a}+6\right)}{a-36}$; 2) $\frac{20\left(\sqrt{a}+5\right)}{a-25}$; 3) $\sqrt{a+3}+\sqrt{a}$; 4) $\sqrt{a+4}+\sqrt{a}$; 5) $\sqrt{a}-1$; 6) $\sqrt{a}-2$. 15.12. 1) 2; 2) 5.

Видавництво «Ранок»

15.13. 1) $-a\sqrt{b}$; 2) $-4b\sqrt{a}$; 3) $x^2\sqrt{2xy}$; 4) $-y^3\sqrt{3xy}$; 5) $-cd^2\sqrt{cd}$; 6) $-c^4d^5\sqrt{cd}$. 15.14. 1) $-\sqrt{5a^2}$; 2) $-\sqrt{18b^2}$; 3) $-\sqrt{7c^6}$; 4) $-\sqrt{150d^{10}}$; 5) $\sqrt{x^3}$; 6) $-\sqrt{-y^3}$. 15.15. 1) $4\sqrt{234}$ см; 2) 225 см². Сторона 15 см. 5.16. 1) $8\sqrt{5}$; 2) $-6\sqrt{3}$; 3) $8\sqrt{y}$; 4) $-\sqrt{x}-7\sqrt{y}$. 15.17. 1) $3\sqrt{a}$; 2) $-4\sqrt{b}$. 15.18. 1) $3\sqrt{5}$; $10\sqrt{2}$; $5\sqrt{6}$; $5\sqrt{2x}$; $7\sqrt{2x}$; $3\sqrt{11x}$; 2) $3y\sqrt{y}$; $2y\sqrt{y}$; $5y^2\sqrt{y}$; $4y^2\sqrt{y}$; $6y^3\sqrt{y}$; $7y^3\sqrt{y}$. 15.19. 1) $0{,}1\sqrt{29}$; 2) $\frac{7\sqrt{3}}{15}$; 3) $2a\sqrt{5a}$; 4) $a^4\sqrt{7a}$. 15.20. 1) $3\sqrt{11}$; 2) $-2\sqrt{3}$; 3) $11\sqrt{b}$; 4) $-3\sqrt{3b}$. 15.21. 1) $6\sqrt{5}$; 2) 0; 3) $11{,}2\sqrt{a}$. 15.22. 1) 34; 2) $-35\sqrt{6}$; 3) -3. 15.23. 1) 21; 2) 66; 3) 105. 15.24. 1) 7; 2) -8. 15.25. 1) 43; 2) -3; 3) $18-6\sqrt{5}$. 15.26. 1) $x-9$; 2) $x-25y$; 3) $x+8\sqrt{xy}+16y$. 15.27. 1) $\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+1\right)$; 2) $\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)$; 3) $\sqrt{11}\left(1+\sqrt{11}\right)$; 4) $\left(\sqrt{17}-a\right)\left(\sqrt{17}+a\right)$; 5) $\left(\sqrt{b}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{2}\right)$; 6) $\left(\sqrt{c}+\sqrt{5}\right)^2$. 15.28. 1) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-4\right)$; 2) $\sqrt{a}\left(\sqrt{7}+\sqrt{a}\right)$; 3) $\left(3\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(3\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$; 4) $\left(\sqrt{a}+5\sqrt{b}\right)^2$. 15.29. 1) $\sqrt{11}+1$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{6a}$. 15.30. 1) $\sqrt{20}$; $\sqrt{54}$; $-\sqrt{50}$; $\sqrt{3x^2}$; $-\sqrt{17x^2}$; $-\sqrt{20x^2}$; 2) $\sqrt{4y^4}$; $\sqrt{5y^6}$; $\sqrt{7y^8}$; $-\sqrt{2y^4}$; $-\sqrt{3y^6}$; $-\sqrt{9y^8}$. 15.31. 1) $\sqrt{61}$; 2) $\sqrt{7{,}5}$; 3) $-\sqrt{42}$; 4) $-\sqrt{7a}$. 15.32. 1) $\sqrt{5}$; 2) $2\sqrt{6}$; 3) $\frac{8\sqrt{3x}}{x}$; 4) $\frac{\sqrt{14}}{10}$. 15.33. 1) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; 2) $7\sqrt{x}$; 3) $\frac{10\sqrt{x-5}}{x-5}$; 4) $(x-6)\sqrt{x+6}$. 15.34. 1) $\sqrt{5}+1$; 2) $3\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$; 3) $3\left(\sqrt{a+6}+\sqrt{a}\right)$; 4) $\sqrt{7a}-\sqrt{a}$. 15.35. 1) $\frac{8\left(\sqrt{a}+4\right)}{a-16}$; 2) $\sqrt{a+2}+\sqrt{a}$; 3) $\sqrt{a}-3$.

§ 16. Функція $y=\sqrt{x}$, її графік і властивості

Т. 1. 1) 3; 5; 11; 13; 0,2; 0,7; 2) 4; 64; 196; 225; 0,01; 0,25; 3) A, B, E, F належать, C, D не належать. Т. 2. 1) $\sqrt{83}>\sqrt{82}$; 2) $\sqrt{47}<\sqrt{51}$; 3) $9=\sqrt{81}$; 4) $\sqrt{49}=7$; 5) $\sqrt{15{,}9}<4$; 6) $5>\sqrt{24{,}7}$; 7) $3\sqrt{7}<7\sqrt{3}$; 8) $2\sqrt{5}<5\sqrt{2}$. Т. 3. 1) Одна; 2) одна; 3) жодної; 4) жодної; 5) 4; 6) 4; 7) 0; 9; 8) 0; 16. 16.1. 0,7; 1,7; 12,25; $5\frac{4}{9}$; $1\frac{1}{10}$; $1\frac{1}{6}$. 16.2. Через A, B, E проходить; через C, D, F ні. 16.4. 1) $0\leqslant y\leqslant 2$; 2) $1\leqslant y\leqslant 3$; 3) $0{,}5\leqslant y\leqslant 6$; 4) $0{,}4\leqslant y\leqslant 8$. 16.5. 1) $\sqrt{0{,}3}>0$; 2) $0<\sqrt{0{,}1}$; 3) $-0{,}7<\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{3}>-0{,}4$; 5) $11>\sqrt{119}$; 6) $\sqrt{143}<12$; 7) $\frac{1}{2}\sqrt{124}=\sqrt{31}$; 8) $\sqrt{17}=\frac{1}{3}\sqrt{153}$. 16.6. 1) $-5, 0, \sqrt{2}$; 2) $-1, 0, \sqrt{7}$; 3) $\sqrt{49}, \sqrt{51}, 8$; 4) $\sqrt{23}, 5, \sqrt{36}$. 16.7. 1) 2 і 3; 2) 3 і 4; 3) 6 і 7; 4) 9 і 10; 5) 10 і 11; 6) 12 і 13; 7) 19 і 20; 8) 29 і 30. 16.8. 1) 3, 4; 2) 4, 5, 6, 7; 3) 3, 4, 5, 6; 4) 5; 5) 8, 9; 6) 5, 6, 7, 8, 9. 16.9. 1) $(4;2)$; 2) $(25;5)$; 3) $(0{,}36;0{,}6)$; 4) $(0{,}16;0{,}4)$; 5) $(225;15)$; 6) $(169;13)$; 7) $(900;30)$; 8) $(1600;40)$. 16.10. 1) 1; 2) 4; 3) 0; 4) 0; 5) коренів немає; 6) коренів немає. 16.11. $I=\sqrt{\frac{P}{R}}$. 16.12. $d=2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. 16.13. $v=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}$. 16.14. 1) $3+\sqrt{5}$; 2) $4-\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{11}-2$; 4) $6-\sqrt{2}$. 16.15. 2) $1+\sqrt{3}$; 3) $1+\sqrt{7}$; 4) $\sqrt{5}-2$. 16.16. 1) 500; 2) 16 °C; 3) $n=\sqrt{t}$; 4) 600. Має рацію. 16.17. 1) 1; 4; 12; 15; 0,3; 0,5; 2) 0; 25; 121; 169; 0,04; 0,49; 3) A, B, E, F належать, C, D не належать. 16.18. 1) $\sqrt{101}<\sqrt{103}$; 2) $8=\sqrt{64}$; 3) $6>\sqrt{35{,}9}$; 4) $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$. 16.19. 1) Одна; 2) одна; 3) жодної; 4) жодної; 5) 0; 6) 1; 7) 0; 1; 8) 0; 16. 16.20. 1) $0\leqslant y\leqslant 1$; 2) $2\leqslant y\leqslant 5$; 3) $0{,}3\leqslant y\leqslant 4$; 4) $0{,}2\leqslant y\leqslant 9$. 16.21. 1) $\sqrt{3}, 0, -1$; 2) $\sqrt{2}, 0, -2$; 3) $\sqrt{81}, \sqrt{66}, 7$; 4) $\sqrt{25}, 4, \sqrt{14}$. 16.22. 1) 3 і 4; 2) 7 і 8; 3) 13 і 14; 4) 19 і 20. 16.23. 1) 4, 5; 2) 4, 5, 6; 3) 6, 7, 8. 16.24. 1) $(49;7)$; 2) $(0{,}25;0{,}5)$; 3) $(196;14)$; 4) $(400;20)$. 16.25. 1) 4; 2) 0; 3) коренів немає. 16.26. 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}-1$; 3) $2+\sqrt{5}$.

РОЗДІЛ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

§ 17. Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь

Т. 1. 1) $2x^2+x=0$, $x^2+\frac{1}{2}x=0$; 2) $3x^2+2x=0$, $x^2+\frac{2}{3}x=0$; 3) $-x^2+5=0$, $x^2-5=0$; 4) $-x^2+7=0$, $x^2-7=0$, 5) $5x^2-3x+4=0$, $x^2-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}=0$; 6) $3x^2-2x+1=0$, $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=0$; 7) $-2x^2+7x-5=0$, $x^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}=0$; 8) $-3x^2+8x-2=0$, $x^2-\frac{8}{3}x+\frac{2}{3}=0$. Т. 2. 1) 0; 12; 2) 0; 13; 3) 0; -17; 4) 0; -19; 5) 0; 20; 6) 0; 80. Т. 3. 1) ± 3; 2) ± 5; 3) $\pm\sqrt{2}$; 4) $\pm\sqrt{6}$; 5) коренів немає; 6) коренів немає. Т. 4. 1) -7; 6; 2) -10; 7;

Видавництво «Ранок»

3) $-\frac{8}{3}$; 4; 4) $-\frac{4}{3}$; 4; 5) $-6-2\sqrt{3}$; $-6+2\sqrt{3}$; 6) $-3-3\sqrt{2}$; $-3+3\sqrt{2}$. **17.1.** 1) $a=2$, $b=-3$, $c=5$; 2) $a=3$, $b=6$, $c=-7$; 3) $a=1$, $b=5$, $c=0$; 4) $a=1$, $b=4$, $c=0$; 5) $a=0{,}1$, $b=0$, $c=-40$; 6) $a=0{,}5$, $b=0$, $c=-50$. **17.2.** 1) $3x^2-0{,}6x-1=0$; 2) $-7x^2+0{,}4x-2=0$; 3) $5x^2-0{,}8=0$; 4) $-6x^2-0{,}7=0$; 5) $-x^2+16x=0$; 6) $x^2-25x=0$. **17.3.** 1) $x^2+2x-6=0$; 2) $x^2-3x+1=0$; 3) $4x^2-2x+5=0$; 4) $3x^2-10x+2=0$; 5) $4x^2-8x-9=0$; 6) $3x^2-2x-7=0$. **17.4.** 1) $x^2-4x+2=0$; 2) $x^2-5x+3=0$; 3) $x^2+3{,}5x-4=0$; 4) $x^2+2{,}5x-3=0$; 5) $x^2-30x+10=0$; 6) $x^2-25x+20=0$. **17.6.** 1) 0; 1,5; 2) 0; 1,8; 3) −16; 0; 4) −18; 0; 5) 0; 40; 6) 0; 50. **17.7.** 1) ±1; 2) ±2; 3) 0; 0,5; 4) 0; 0,2; 5) 0; 11; 6) 0; 8. **17.8.** 1) ±3; 2) ±7; 3) 0; 4) 0; 5) коренів немає; 6) коренів немає. **17.9.** 1) −0,5; 0; 2) 0; 0,5; 3) 0; 4) 0; 5) ±6; 6) ±7. **17.10.** 1) ±6; 2) ±10; 3) 0; 7; 4) 0; 8; 5) коренів немає; 6) коренів немає. **17.11.** 1) 0; 8; 2) 0; 14; 3) −0,6; 0; 4) коренів немає; 5) $-2\pm\sqrt{7}$; 6) $1\pm\sqrt{5}$. **17.12.** 1) 0; 7; 2) 0; 6. **17.13.** 1) $n=-1$, $x^2+4=0$; 2) $n=2$, $3x^2+5x=0$; 3) $n=-1$, $7x^2+x=0$; $n=0$, $7x^2=0$. **17.14.** 1) $m=0$; 2) $m=3$; 3) $m=-2$. **17.15.** 2) 0; 3) −5; 0; 5; 4) 0; 2; 5) −5; 0; 6) 4; 7) 3. **17.16.** 17 од. **17.17.** 1 год 12 хв; встигнуть. **17.18.** 45 см, 55 см, 200 г. о.

17.19. 1) $5x^2+x=0$, $x^2+\frac{1}{5}x=0$; 2) $-x^2+6=0$, $x^2-6=0$; 3) $3x^2-4x+5=0$, $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}=0$; 4) $-5x^2+6x-1=0$, $x^2-\frac{6}{5}x+\frac{1}{5}=0$. **17.20.** 1) 0; 15; 2) −16; 0; 3) 0; 40. **17.21.** 1) ±7; 2) $\pm\sqrt{7}$; 3) коренів немає. **17.22.** 1) −8; 7; 2) −1; $\frac{7}{3}$; 3) $-5-2\sqrt{5}$; $-5+2\sqrt{5}$. **17.23.** 1) $a=9$, $b=-2$, $c=8$; 2) $a=4$, $b=2$, $c=-5$; 3) $a=1$, $b=6$, $c=0$; 4) $a=1$, $b=7$, $c=0$; 5) $a=0{,}1$, $b=0$, $c=-30$; 6) $a=0{,}4$, $b=0$, $c=-35$. **17.24.** 1) $x^2+5x-2=0$; 2) $6x^2-2x+3=0$; 3) $x^2-4x-9=0$. **17.25.** 1) $x^2-6x+1=0$; 2) $x^2+4{,}5x-2=0$; 3) $x^2-20x+30=0$. **17.27.** 1) 0; 2,5; 2) −21; 0; 3) 0; 90. **17.28.** 1) ±3; 2) 0; 0,25; 3) 0; 12. **17.29.** 1) ±5; 2) 0; 3) коренів немає. **17.30.** 1) −0,5; 0; 2) 0; 3) ±8. **17.31.** 1) ±6; 2) 0; 6; 3) коренів немає. **17.32.** 1) 0; 18; 2) коренів немає; 3) $-3\pm\sqrt{3}$. **17.33.** 1) $n=6$, $x^2-2=0$; 2) $n=4$, $5x^2+4x=0$; $n=0$, $5x^2=0$. **17.34.** 1) $m=0$; 2) $m=3$. **17.35.** 28 од.

§ 18. Формула коренів квадратного рівняння

Т. 1. 1) −7; 1; 2) −11; −1; 3) −4; 1; 4) −3; 6; 5) $-\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{3}$; 6) $-\frac{3}{5}$; $\frac{1}{5}$. **Т. 2.** 1) 225, два корені; 2) 196, два корені; 3) 0, один корінь; 4) 0, один корінь; 5) −79, коренів немає; 6) −20, коренів немає. **Т. 3.** 1) −2; 0,5; 2) −1; $\frac{1}{3}$; 3) −3; $\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{1}{3}$; 5; 5) $-\frac{1}{2}$; 7; 6) $1\pm\sqrt{10}$; 7) $2\pm\sqrt{11}$; 8) $-3\pm\sqrt{17}$; 9) $1\pm\sqrt{11}$; 10) $-1\pm\sqrt{3}$; 11) 1,5; 12) $\frac{5}{3}$; 13) 0,25; 14) −0,2; 15) $\frac{1}{6}$. **Т. 4.** 1) −5; 5; 2) −4; 4; 3) −3,5; 3,5; 4) −2,5; 2,5; 5) −2; 2; 6) −3; 3. **18.1.** 1) $\frac{11}{3}$, два корені; 2) $\frac{9}{5}$, два корені; 3) 0, один корінь; 4) 0, один корінь; 5) $-\frac{7}{3}$, коренів немає; 6) $-\frac{1}{2}$, коренів немає. **18.2.** 1) Два; 2) два; 3) коренів немає; 4) коренів немає; 5) один; 6) один. **18.3.** 1) 2,5; 2) 3,5; 3) коренів немає; 4) коренів немає; 5) коренів немає; 6) коренів немає. **18.4.** 1) Так, −2; 9; 2) так, −1; 8; 3) так, −3; 12; 4) так, −4; 13; 5) ні; 6) ні. **18.5.** 1) −1; 0,4; 2) 0,75; 1; 3) −3; 0,25; 4) −2; 0,2. **18.6.** 1) −1; 20; 2) −1; 15; 3) −6; 9; 4) −3; 8; 5) −6; 1; 6) −7; 1. **18.7.** 1) $-\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; 2) $-2\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 3) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) коренів немає; 6) коренів немає. **18.8.** 1) 36; 2) 8 і 9; 3) 10 і 11. **18.9.** 1) −8; −2; 2) −1; 3; 3) −3; −2; 4) 3; 8; 5) $-\frac{4}{7}$; $\frac{6}{7}$; 6) $-4\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$. **18.10.** 2) −2,5; 1,5; 3) −0,5; 1,5; 4) 1; $\frac{5}{3}$; 5) $-\frac{9}{5}$; 1; 6) $-2\pm\sqrt{3}$; 7) $-\sqrt{5}\pm1$. **18.11.** 1) 1; 3; 2) 2; 3) коренів немає. **18.12.** 1) ±6; 2) ±12; 3) −40; 0. **18.13.** 1) 1; 4; 2) 3 м. **18.14.** 10 м. **18.15.** 80 км/год. **18.16.** 1) −4; 8; 2) 2; 5; 3) −3,5, 0,5. **18.17.** 1) 121, два корені; 2) 0, один корінь; 3) −47, коренів немає. **18.18.** 1) −3; 0,5; 2) −2; $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{4}$; 5; 4) $-\frac{1}{3}$; 7; 5) $\frac{1}{2}$; 3; 6) $1\pm2\sqrt{2}$; 7) $2\pm\sqrt{7}$; 8) $-2\pm\sqrt{14}$; 9) $3\pm3\sqrt{2}$; 10) $-2\pm2\sqrt{2}$; 11) 2,5; 12) $\frac{2}{3}$; 13) $\frac{1}{8}$; 14) $-\frac{1}{3}$; 15) $\frac{1}{7}$. **18.19.** 1) ±6; 2) ±1,5; 3) ±2. **18.20.** 1) 2, два корені; 2) 0, один корінь; 3) $-\frac{3}{2}$, коренів немає. **18.21.** 1) Два; 2) коренів немає;

Видавництво «Ранок»

3) один. 18.22. 1) 1,5; 2) коренів немає; 3) коренів немає. 18.23. 1) Так, −3; 6; 2) так, −3; 11; 3) ні. 18.24. 1) 0,6; 1; 2) 1; 2,5. 18.25. 1) −1; 10; 2) −2; 7; 3) −8; 1. 18.26. 1) $-\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) коренів немає. 18.27. 1) 36; 2) 9 і 10. 18.28. 1) −2; 6; 2) −5; 2; 3) $-\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$. 18.29. 1) −1,5; 3,5; 2) 1; $\frac{7}{3}$; 3) $-\sqrt{2}$ ±1. 18.30. 1) 1; 2; 2) 1; 3) коренів немає. 18.31. 1) 1; 50; 2) 49 м. 18.32. 100 км/год. 18.33. 1) ±8; 2) ±16; 3) −12; 0.

§ 19. Теорема Вієта

Т. 1. 1) $x_2=5$, $q=10$; 2) $x_2=2$, $q=14$; 3) $x_2=3$, $q=-15$; 4) $x_2=2$, $q=-12$; 5) $x_2=-2$, $p=-7$; 6) $x_2=-3$, $p=-4$; 7) $x_2=-1$, $p=10$; 8) $x_2=-5$, $p=7$. Т. 2. 1) $x^2+3x-40=0$; 2) $x^2-3x-54=0$; 3) $x^2+11x+28=0$; 4) $x^2+10x+16=0$; 5) $5x^2-8x-21=0$; 6) $6x^2+13x-44=0$; 7) $x^2-7=0$; 8) $x^2-11=0$. Т. 3. 1) −4 і −1; 2) −7 і −2; 3) 3 і 5; 4) 1 і 9; 5) −13 і −2; 6) −14 і −1. Т. 4. 1) −15 і 1; 2) −17 і 1; 3) −3 і 4; 4) −5 і 6; 5) −1 і 20; 6) −1 і 30. 19.1. 1) $x_1+x_2=3$, $x_1\cdot x_2=-20$; 2) $x_1+x_2=-4$, $x_1\cdot x_2=-19$; 3) $x_1+x_2=-9$, $x_1\cdot x_2=7$; 4) $x_1+x_2=8$, $x_1\cdot x_2=4$; 5) коренів немає; 6) коренів немає; 7) $x_1+x_2=-\frac{2}{3}$, $x_1\cdot x_2=-\frac{8}{3}$; 8) $x_1+x_2=\frac{3}{2}$, $x_1\cdot x_2=-\frac{5}{2}$; 9) $x_1+x_2=\frac{3}{2}$, $x_1\cdot x_2=\frac{1}{4}$; 10) $x_1+x_2=-2$, $x_1\cdot x_2=\frac{2}{5}$; 11) коренів немає; 12) коренів немає. 19.2. 1) $x_2=3$; 2) $x_2=9$; 3) $x_2=12$; 4) $x_2=13$. 19.3. 1) $x_2=6$, $p=-2$; 2) $x_2=-7$, $p=4$; 3) $x_2=14$, $q=84$; 4) $x_2=-7$, $q=91$. 19.4. 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. 19.5. 1) −8; 2; 2) −0,5; 6; 3) −1; −0,4. 19.6. 1) $2x^2-11x+14=0$; 2) $2x^2-3x-20=0$; 3) $x^2-10x+22=0$; 4) $x^2-4x-3=0$. 19.7. 1) +; 2) −; 3) +; 4) −; 5) +; 6) −. 19.8. 1) $x_1=1$, $x_2=10$; 2) $x_1=1$, $x_2=12$; 3) $x_1=2$, $x_2=7$; 4) $x_1=3$, $x_2=5$; 5) $x_1=-4$, $x_2=-12$; 6) $x_1=-5$, $x_2=-15$; 7) $x_1=-1$, $x_2=12$; 8) $x_1=-14$, $x_2=1$; 9) $x_1=-6$, $x_2=8$; 10) $x_1=-9$, $x_2=4$; 11) $x_1=-13$, $x_2=7$; 12) $x_1=-5$, $x_2=14$. 19.9. 2) а) 18; б) 75; в) 3; г) $8\frac{1}{3}$; 3) а) −21; б) 25; в) $-\frac{3}{18}$; г) $\frac{25}{64}$; 4) а) −41; б) 49; в) $\frac{5}{12}$; г) $\frac{49}{144}$; 5) а) −8; б) $18\frac{2}{3}$; в) 3; г) $10\frac{1}{2}$; 6) а) 7,5; б) 6; в) 2; г) $2\frac{2}{3}$. 19.10. 1) −8; 8; 2) −6; 6; 3) −9; −6; 6; 9; 4) −7; −2; 2; 7; 5) −13; −8; −7; 7; 8; 13; 6) −11; −4; −1; 1; 4; 11. 19.11. $x_1=3$, $x_2=1$, $m=1{,}5$; 2) $x_1=-4$, $x_2=-1$, $m=-0{,}4$. 19.12. 1) 1; 2026; 2) −1; −2026; 3) −1; 2026; 4) −2026; 1. 19.13. 1) 6700 м², 334 м, 100 м і 67 м; 2) 924 м², 128 м, 42 і 22 м. 19.14. 1) $x_2=3$, $q=15$; 2) $x_2=3$, $q=-21$; 3) $x_2=-\frac{10}{7}$, $p=-5\frac{4}{7}$; 4) $x_2=-5$, $p=6$.

19.15. 1) $x^2+8x-20=0$; 2) $x^2+10x+21=0$; 3) $3x^2+10x-25=0$; 4) $x^2-3=0$; 5) $2x^2-15x+18=0$; 6) $2x^2+x-10=0$; 7) $x^2-2x-1=0$; 8) $x^2-6x+4=0$. 19.16. 1) −5 і −2; 2) 1 і 8; 3) −7 і −3; 4) −18 і 1; 5) −2 і 3; 6) −1 і 40. 19.17. 1) $x_1+x_2=-2$, $x_1\cdot x_2=-15$; 2) $x_1+x_2=7$, $x_1\cdot x_2=-5$; 3) коренів немає; 4) $x_1+x_2=\frac{5}{3}$, $x_1\cdot x_2=-\frac{2}{3}$; 5) $x_1+x_2=-2$, $x_1\cdot x_2=\frac{3}{4}$; 6) коренів немає. 19.18. 1) $x_2=9$; 2) $x_2=8$. 19.19. 1) $x_2=-4$, $p=-3$; 2) $x_2=-8$, $q=72$. 19.20. 1) Так; 2) ні. 19.21. 1) −7; 3; 2) $-\frac{1}{3}$; 5; 3) −2; $-\frac{3}{4}$. 19.22. 1) $x_1=1$, $x_2=13$; 2) $x_1=3$, $x_2=7$; 3) $x_1=-4$, $x_2=-6$; 4) $x_1=-15$, $x_2=1$; 5) $x_1=-5$, $x_2=9$; 6) $x_1=-18$, $x_2=3$. 19.23. 1) 14; 2) 182; 3) −2; 4) $3\frac{5}{7}$.

19.24. 1) −4; 4; 2) −5; −1; 1; 5; 3) −17; −10; −8; 8; 10; 17. 19.25. 420 м², 86 м, 28 м і 15 м. 19.32. 1) $x_1=7$, $x_2=-1$, $m=1{,}4$; 2) $x_1=-9$, $x_2=-3$, $m=1{,}5$.

§ 20. Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на множники

Т. 1. 1) $(x-1)(x-5)$; 2) $(x-1)(x+5)$; 3) $(x-8)(x+2)$; 4) $(x+8)(x+2)$; 5) $(x+1)(x+9)$; 6) $(x+1)(x-9)$. Т. 2. 1) $(x+2)(7-x)$; 2) $(x+7)(2-x)$; 3) $(8-x)(x-2)$; 4) $(3-x)(x-7)$; 5) $(3x-1)(x+4)$; 6) $(3x+1)(x-4)$; 7) $(2x+3)(x+1)$; 8) $(2x-3)(x-1)$; 9) $(3x+2)(2x+1)$; 10) $(3x-2)(2x-1)$; 11) $(3x-1)(2x+3)$; 12) $(3x+1)(2x-3)$. Т. 3. 1) $\frac{x+2}{x+1}$, $x\neq-1$, $x\neq2$; 2) $\frac{x-1}{x-3}$, $x\neq3$, $x\neq-3$; 3) $\frac{2x-1}{x-5}$, $x\neq5$, $x\neq-4$; 4) $\frac{2x+1}{x+6}$, $x\neq5$, $x\neq-6$; 5) $\frac{3x+5}{x-4}$, $x\neq4$, $x\neq-\frac{1}{3}$; 6) $\frac{3x+1}{x+5}$, $x\neq-5$, $x\neq\frac{2}{3}$. 20.1. 1) −2; 7; 2) −5; 3; 3) −6; $\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{1}{3}$; 4. 20.2. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так; 5) ні; 6) ні. 20.3. 1) $(x+10)(x-2)$; 2) $(x+9)(x-3)$; 3) $(x-11)(x+2)$; 4) $(x-8)(x+5)$; 5) неможливо розкласти; 6) неможливо розкласти.

Видавництво «Ранок»

20.4. 1) $(x-2)(x+0{,}5)$; 2) $(x+4)(x-0{,}5)$; 3) $\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-6)$; 4) $\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+3)$; 5) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; 6) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$. **20.5.** 1) $(9-x)(x+5)$; 2) $(8-x)(x+3)$; 3) $(1-6x)(x+2)$; 4) $(1-5x)(x-2)$; 5) $(8-x)(x+0{,}5)$; 6) $(6-x)(x-0{,}5)$. **20.6.** 1) $(2x+3)(x-5)$; 2) $(2x-3)(x+6)$; 3) $(4-5x)(x+1)$; 4) $(5-6x)(x-1)$; 5) $(1-6x)(x-3)$; 6) $(1-5x)(x-4)$.

20.7. 1) $\frac{x-5}{3}$, $x\neq-7$; 2) $\frac{2}{x+6}$, $x\neq-6$, $x\neq5$; 3) $\frac{x}{x+8}$, $x\neq-8$, $x\neq4$; 4) $\frac{x+2}{x}$, $x\neq0$, $x\neq7$; 5) $\frac{x-1}{x-11}$, $x\neq1$, $x\neq11$; 6) $\frac{x+10}{x+2}$, $x\neq-2$. **20.8.** 1) $\frac{4}{a+5}$, $a\neq-5$; 2) $\frac{a+6}{5}$, $a\neq-6$; 3) $\frac{a+1}{a+2}$, $a\neq-2$, $a\neq-13$; 4) $\frac{a-2}{a-1}$, $a\neq1$, $a\neq14$; 5) $\frac{7a-1}{2a-1}$, $a\neq\frac{1}{2}$, $a\neq-3$; 6) $\frac{3a-1}{4a-1}$, $a\neq\frac{1}{4}$, $a\neq-2$. **20.9.** 1) $\frac{a-11}{2}$, 1; 2) $\frac{a-12}{3}$, 2; 3) $\frac{3a}{a+1}$, -27; 4) $\frac{4a}{a+2}$, 84. **20.10.** 1) $\frac{1}{a-6}$; 2) $-\frac{1}{a+1}$; 3) $\frac{a-1}{a^2-11a}$; 4) $\frac{a-2}{a^2-8a}$. **20.11.** 1) $x(x-3)(x+2)$; 2) $y^2(y-8)(y-4)$; 3) $(a-7)(a+3)(a+4)$; 4) $(b-2)(b+2)(b-1)(2b+3)$. **20.12.** 1) $y=x-3$, $x\neq4$; 2) $y=-x+5$, $x\neq-2$; 3) $y=-\frac{1}{4}$, $x\neq-3$, $x\neq1$. **20.13.** 2) $(x-m)(x-11m)$; 3) $(x+2m)(x+10m)$; 4) $(x-7m)(x+5m)$; 5) $(x-2m)(x+7m)$. **20.14.** 1) x^2+3x+2, $x+2$, $x+1$; 2) $(2x+1)(x+3)$. **20.15.** 3 м. **20.16.** 1) $(x-1)(x-6)$; 2) $(x-1)(x+6)$; 3) $(x-7)(x+2)$; 4) $(x+7)(x+2)$; 5) $(x+1)(x+8)$; 6) $(x+1)(x-8)$.

20.17. 1) $(x+3)(6-x)$; 2) $(3-x)(x-8)$; 3) $(3x-1)(x+2)$; 4) $(2x-3)(x-2)$; 5) $(3x+1)(2x+1)$; 6) $(3x-2)(2x+1)$. **20.18.** 1) $\frac{x+5}{x+1}$, $x\neq-1$, $x\neq5$; 2) $\frac{2x-1}{x+3}$, $x\neq5$, $x\neq-3$; 3) $\frac{x-6}{3x-1}$, $x\neq\frac{1}{3}$, $x\neq-\frac{2}{3}$. **20.19.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **20.20.** 1) $(x+10)(x-3)$; 2) $(x-9)(x+2)$; 3) неможливо розкласти.

20.21. 1) $(x-4)(x+0{,}5)$; 2) $\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-3)$; 3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

20.22. 1) $(5-x)(x+9)$; 2) $(1-6x)(x-2)$; 3) $(6-x)(x+0{,}5)$. **20.23.** 1) $(2x+3)(x-6)$; 2) $(4-5x)(x-1)$; 3) $(1-6x)(x+2)$. **20.24.** 1) $\frac{x-1}{2}$, $x\neq-9$; 2) $\frac{x}{x+3}$, $x\neq-3$, $x\neq5$; 3) $\frac{x+8}{x-3}$, $x\neq3$.

20.25. 1) $\frac{7}{a-6}$, $a\neq6$; 2) $\frac{a-1}{a-2}$, $a\neq2$, $a\neq12$; 3) $\frac{6a-1}{5a-1}$, $a\neq\frac{1}{5}$, $a\neq-1$. **20.26.** 1) $\frac{a-13}{2}$, 2; 2) $\frac{5a}{a+3}$, 155.

20.27. 1) $\frac{1}{a-3}$; 2) $-\frac{1}{a+1}$; 3) $\frac{a+5}{a^2+a}$; 4) $\frac{a-3}{a^2-6a}$.

20.28. 1) $x(x-9)(x+3)$; 2) $y^2(y-3)(y+8)$; 3) $(a-3)(a-1)(a+2)$; 4) $(b-3)(b-1)(b+3)(3b+2)$. **20.29.** 1) $y=x+6$, $x\neq2$; 2) $y=-x-2$, $x\neq1$; 3) $y=-2$, $x\neq-4$, $x\neq2$. **20.30.** 2 м. **20.31.** 1) $(x-2m)(x-12m)$; 2) $(x+5m)(x+7m)$; 3) $(x-5m)(x+4m)$.

§ 21. Розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних

Т. 1. 1) 0; 2; 7; 2) 0; 3; 5; 3) -3; 0; 0,5; 4) $-0{,}5$; 0; 2; 5) 0; 5; 6) -3; 0; 7) 0; 8) 0. **Т. 2.** 1) -1; 2) 3; 3) 10; 4) 7; 5) -6; 6) -7. **Т. 3** 1) 0,4; 3; 2) $-1{,}5$; 1; 3) 1; 14; 4) 1; 15; 5) -1; 6) -4. **Т. 4.** 1) -7; -3; 2) -2; 3; 3) 8; 4) -11; 5) 0,5; 3; 6) 1; 4,5. **Т. 5.** 1) ±1; ±6; 2) ±1; ±5; 3) $\pm\sqrt{3}$; 4) $\pm\sqrt{6}$; 5) коренів немає; 6) коренів немає. **21.1.** 1) -6; $-2{,}5$; 2; 2) -5; 1,5; 3; 3) -3; 0; 0,2; 3; 4) -5; $-0{,}25$; 0; 5. **21.2.** 1) -4; -2; 9; 2) -8; -1; 2; 3) -8; 1; 5; 4) -9; 1; 6. **21.3.** 1) Два; 2) жодного; 3) три; 4) чотири. **21.4.** 1) 4; 2) -5; 3) $-3{,}4$; 4) 2,1; 5) -6; 6) 2. **21.5.** 1) -1; 3,5; 2) $-2{,}5$; 1; 3–6) коренів немає. **21.6.** 1) 0; 2) 0; 3) 4; 4) 2; 5) 9; 6) 7. **21.7.** 1) -6; 1; 2) -7; 1; 3) -3; 8; 4) -2; 6. **21.8.** 1) -2; 5; 2) -3; 7; 3) -1; 25; 4) -1; 16; 5) -7; 0; 6) -8; 0.

21.9. 1) -10; 3; 2) 0; 4; 3) -4; 4) $-\frac{20}{3}$; 5) -3; 6) $\frac{1}{3}$. **21.10.** 1) $-1{,}25$; 2) $-0{,}25$; 3) -3; 4) 6; 5) 3; 6) -2. **21.11.** 1) -3; 1; 2) -6; 4; 3) 1,25; 2; 4) -1. **21.12.** 1) -2; 4,5; 2) $-0{,}5$; 6; 3) 13; 26; 4) -5; 4. **21.13.** 1) ±1; $\pm\frac{1}{2}$; 2) ±2; $\pm\frac{1}{3}$; 3) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) коренів немає; 6) коренів немає; 7) коренів немає; 8) коренів немає; 9) $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$; 10) $\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$; 11) ±1; 12) $\pm\sqrt{2}$. **21.14.** 1) -2; 2) 5; 3) $-0{,}5$; 4) $-2\frac{2}{3}$. **21.15.** 1) -8; -4; 2) 1; 3; 5; 7; 3) 1; 2; 4) $-0{,}5$; 1,5. **21.16.** 2) 36; 3) 1; 9; 4) 16; 25; 5) 4; 6) 1; 7) коренів немає. **21.17.** 1) x; $x+4$; $3x+2$; 2) $2x$; $x+7$; $3x-2$. **21.18.** 20 м і 30 м або 15 м і 40 м. **21.19.** 15 завдань з алгебри, 10 — з геометрії. **21.20.** 1) 0; 2; 5; 2) 0; 0,5; 3; 3) 0; 4; 4) 0. **21.21.** 1) -1;

Видавництво «Ранок»

2) 4; 3) −5. **21.22** 1) −1; 5; 2) −3. **21.23.** 1) 4; 9; 2) 0; 1,5. **21.24.** 1) ±1; ±7; 2) $\pm\sqrt{2}$; 3) коренів немає. **21.25.** 1) −5; 2; 3,5; 2) −2; −0,2; 0; 2. **21.26.** 1) −7; −4; 3; 2) −1; 6; 7. **21.27.** 1) 6; 2) −4,7; 3) 5. **21.28.** 1) −2; −1,5; 2) коренів немає; 3) коренів немає. **21.29.** 1) −9; 1; 2) −8; 1; 3) −4; 5; 4) −3; 7; 5) −1; 9; 6) −6; 0. **21.30.** 1) −1,2; 2) 2,8. **21.31.** 1) −0,25; 2) 6; 3) 1. **21.32.** 1) −4; −1; 2) −3. **21.33.** 1) −2; 6; 2) −20; −5. **21.34.** 1) ±3; $\pm\frac{1}{2}$; 2) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) коренів немає; 4) коренів немає; 5) $\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$; 6) $\pm\sqrt{3}$. **21.35.** 1) 2; 2) $2\frac{2}{3}$. **21.36.** 1) 5; 6; 8; 9; 2) 1; 4. **21.37.** x, $2x+3$; $3x+5$. **21.38.** Аліса — 20 хв, Тимофій — 30 хв. **21.39.** 20 рядів. **21.40.** 1) 1; 81; 2) 4; 3) коренів немає.

§ 22. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь. Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі

Т. 1. 1) 10 художників; 2) 5 автівок; 3) 5 завдань; 4) 6 залів. **Т. 2.** 1) 18 км/год; 2) 40 км/год; 3) а) 360 км/год; б) встигне; 4) а) 5 км/год; б) 0,5 год. **Т. 3.** 1) A — 21 год, B — 28 год; 2) 8 год; 3) а) за 12 хв; б) за 2 хв; 4) а) 30 год; б) 14 год. **22.1.** 12 шт. **22.2.** 12 т. **22.3.** 50. **22.4.** 1) 30; 2) 550. **22.5.** 21 км/год. **22.6.** 12 км/год. **22.7.** 14 км/год. **22.8.** 1) 80 км/год; 2) 160 км/год; 3) так, Інтерсіті. **22.9.** За 6 год. **22.10.** I за 2 год, II за 3 год. **22.11.** За 90 с. **22.12.** 10 л/с. **22.13.** 3. **22.14.** 4 пацієнти. **22.15.** 6 шт. **22.16.** 5 локацій. **22.17.** 150 деталей. **22.18.** 40 км/год. **22.19.** 6 км/год. **22.20.** 800 км/год. **22.21.** 2 км/год. **22.22.** 5 км/год. **22.23.** За 10 год. **22.24.** 1) 12 год; 2) 50 %. **22.25.** 1) За 40 хв; 2) за 12 хв. **22.26.** 1) За 30 год; 2) 27 год. **22.27.** I за 3 год, II за 5 год. **22.28.** За 100 с.

ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ЩО ВИВЧАВСЯ У 8 КЛАСІ

1. 1) $a\neq 24$; 2) $a\neq -25$; 3) $a\neq -8$; 4) $a\neq 7$; 5) $a\neq -1$, $a\neq 6$; 6) $a\neq -9$, $a\neq 1$. **2.** 1) 1,8; 2) −0,6; 3) −0,7; 4) −0,2. **3.** 1) $\frac{a}{a+4}$; 2) $\frac{b}{b-3}$; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{6}{7}$; 5) $\frac{5a}{a-4}$; 6) $\frac{n+6}{3n}$. **4.** 1) $\frac{7}{9a}$; 2) $\frac{5}{8n}$; 3) $\frac{4x+3}{3x^2}$; 4) $\frac{m-4}{4m^2}$; 5) $\frac{3c-2}{3c+2}$; 6) $\frac{2y+5}{2y-5}$. **5.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{3y}{4x}$; 4) $\frac{2n}{5m}$; 5) $\frac{2}{a+3}$; 6) $\frac{1}{6p-30}$. **6.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{5km^2}{7}$; 4) $\frac{6p}{5n^2}$; 5) $\frac{x-3}{4(x+10)}$; 6) $\frac{y-8}{6(y+2)}$. **7.** 1) 2; 2) −3; 3) коренів немає; 4) коренів немає; 5) $-1\frac{1}{3}$; 6) $9\frac{2}{7}$. **8.** 1) 27; 2) 25; 3) $\frac{1}{36}$; 4) $\frac{1}{16}$; 5) 0,5; 6) 9; 7) 4; 8) 25. **9.** 1) $6\cdot 10^{-12}$; 2) $8\cdot 10^{-13}$; 3) $1{,}44\cdot 10^{-3}$; 4) $1{,}28\cdot 10^{-4}$; 5) $4{,}97\cdot 10^{6}$; 6) $1{,}12\cdot 10^{-2}$. **10.** 1) $y=2$; -4; 2) $x=8$; -1. **11.** 1) $y=-4$; 10; 2) $x=-5$; 20. **12.** 1) $y=6$; -2; 2) $x=3$; -1. **13.** 1) $y=-4$; 2; 2) $x=-8$; 1. **14.** 1) 42; 2) 40; 3) −2,2; 4) 0,2; 5) 51,4; 6) 82,4. **15.** 1) 8,9; 2) 6,3; 3) 4,7; 4) 5,1; 5) 27,56; 6) 9,08. **16.** 1) 1,2; 2) 1,5; 3) 0,84; 4) 1,04; 5) 18; 6) 36; 7) 0,2; 8) 0,25. **17.** 1) 9; 2) 12; 3) −10; 4) −3; 5) 30; 6) 10. **18.** 1) $a-\sqrt{5}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{7}-a}$; 3) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}$; 4) $\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}$. **19.** 1) $\frac{10\sqrt{a}}{a}$; 2) $\frac{6\sqrt{a}}{a}$; 3) $\sqrt{7}-\sqrt{6}$; 4) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 5) $2\sqrt{2}+1$; 6) $3\sqrt{2}+1$. **20.** 1) $x^2-14x+5$, $a=1$, $b=-14$, $c=5$; 2) $x^2-19x+4$, $a=1$, $b=-19$, $c=4$; 3) $8x^2+6x+26$, $a=8$, $b=6$, $c=26$; 4) $35x^2+8x-17$, $a=35$, $b=8$, $c=-17$. **21.** 1) 0; 12; 2) −19; 0; 3) ±3; 4) ±5; 5) $\pm\sqrt{3}$; 6) $\pm\sqrt{2}$. **22.** 1) −9; 5; 2) −6; 8; 3) 1; $1\frac{1}{3}$; 4) −1; $-\frac{1}{4}$; 5) коренів немає; 6) коренів немає. **23.** 1) $\frac{x+12}{x+3}$; 2) $\frac{x+4}{x-13}$; 3) $-\frac{2x+3}{x-4}$; 4) $-\frac{x-2}{4x+1}$. **24.** 1) 6; 2) 3; 3) −3; 4) 4. **25.** 1) ±1; 2) ±2; 3) $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{6}$; 4) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{5}$. **26.** $x(x-6)=135$. **27.** $x(x+8)=128$. **28.** 12; 8. **29.** 14; 6. **30.** 4; 6. **31.** 10; 12. **32.** $\frac{1}{3}$. **33.** $\frac{7}{9}$.

Видавництво «Ранок»

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Арифметичний квадратний корінь 131
Арифметичний квадратний корінь зі степеня 154
Арифметичний квадратний корінь із добутку 151
Арифметичний квадратний корінь із частки 152

Біквадратне рівняння 232
Винесення множника з-під знака кореня 163
Внесення множника під знак кореня 166

Гіпербола 111

Ділення раціональних дробів 53
Додавання / віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками 31
Додавання / віднімання раціональних дробів з різними знаменниками 43
Допустимі значення змінних 13

Зведення дробу до нового знаменника 24
Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу 166

Квадратне рівняння 185

Множення / ділення степенів з однаковими основами 99
Множення раціональних дробів 51

Основна властивість раціонального дробу 22

Парабола 123
Піднесення раціонального дробу до степеня 52
Піднесення степеня до степеня 100

Раціональні вирази 12
Рівносильні рівняння 74
Рівняння як математична модель 240
Розв'язування рівнянь графічним способом 125
Розкладання квадратного тричлена на множники 219

Стандартний вигляд числа 91
Степінь добутку двох множників 101
Степінь із цілим показником 87
Степінь частки 102

Теорема Вієта 205

Формула коренів квадратного рівняння 196
Функція $y=\frac{k}{x}$ 111
Функція $y=\sqrt{x}$ 173
Функція $y=x^2$ 123

Числові множини 142

Видавництво «Ранок»

Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти

АЛГЕБРА 8

Підручник відрізняє наявність таких матеріалів:

- тексти і задачі для мотивації навчальної діяльності
- приклади з докладним покроковим розв'язанням, алгоритми дій
- тренувальні вправи, різнорівневі завдання
- вправи на первинне закріплення вивченого матеріалу
- задачі практичного змісту
- логічні задачі
- домашні завдання з порадами щодо виконання
- тематичне узагальнення і систематизація матеріалу
- корисні пам'ятки та підказки, цікаві факти

Інтерактивний електронний додаток містить:

Для учнів і учениць:

- інтерактивні вправи з автоматичною перевіркою:
- усні завдання для актуалізації знань
- завдання для самоконтролю засвоєння теоретичного матеріалу
- вправи для повторення
- самостійні та підсумкові роботи

Для вчительства:

- навчальні презентації
- бланки для бліц-опитування
- аркуші для оцінювання за всіма групами результатів

Видавництво «Ранок»