

Аркадій Мерзляк, Михайло Якір

«Математика»

підручник інтегрованого курсу для 7 класу

закладів загальної середньої освіти

(у 2-х частинах)

Частина 2

Видавництво «Гімназія»

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Василюшин М. С., Милянник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Шкільний О. В.).

Аркадій
Мерзляк

Михайло
Яхір

МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА 2

7

Аркадій Мерзляк
Михайло Якір

МАТЕМАТИКА

Підручник інтегрованого курсу
для 7 класу закладів загальної
середньої освіти
(у 2-х частинах)

ЧАСТИНА 2

Харків
«Гімназія»
2024

УДК 373.167.1:51
М52

Підручник відповідає модельній навчальній програмі
«Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(автори Василюшин М. С., Мильник А. І., Працьовитий М. В.,
Простакова Ю. С., Школьний О. В.)

Мерзляк А. Г.

М52 Математика : підруч. інтегров. курсу для 7 кл. закладів заг. серед. освіти (у 2-х ч.) : Ч. 2 / А. Г. Мерзляк, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2024. — 336 с. : іл.

§ 4 СТАТИСТИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

(продовження)

31. Стовпчасті та кругові діаграми. Графіки

У попередньому пункті ви ознайомилися з табличним способом подання даних. Окрім таблиць, для цієї мети, як ви знаєте, широко використовують різноманітні діаграми.

Діаграма (у перекладі з давньогрец. — рисунок, креслення) — це графічний спосіб подання даних, який дає змогу швидко й наочно зіставити кілька величин.

Наведемо такий приклад.

Класний керівник веде облік відвідування занять учнями та ученицями. Наприкінці тижня його записи мали такий вигляд:

День тижня	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт
Кількість відсутніх	3	2	5	4	7

Ці дані можна подати графічно у вигляді стовпчастої діаграми (рис. 76). Для цього треба побудувати п'ять стовпців. Висота стовпця показує кількість відсутніх у відповідний день тижня.

Стовпчасту діаграму ще називають гістограмою (від грец. *хистос* — стовп, *грама* — написання).

На рисунку 77 подано гістограму, яка відображає кількість нових сторінок, створених в українськомовному розділі енциклопедії «Вікіпедія».

Інформацію, подану в такому вигляді, легко сприймати й аналізувати.

Крім стовпчастих діаграм, існують інші графічні способи подання даних, наприклад, кругові діаграми.

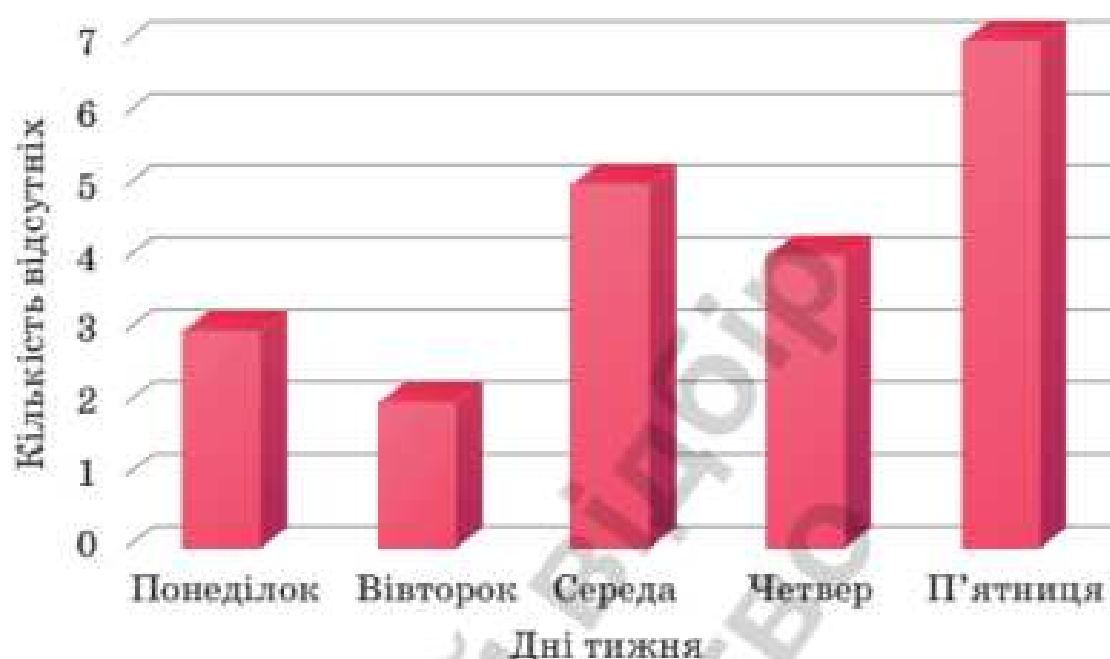


Рис. 76

На рисунку 78 подано кругову діаграму розподілу сімейного бюджету. Із діаграми на рисунку 79 видно, яку частину поверхні Землі займає суходіл, а яку — вода.

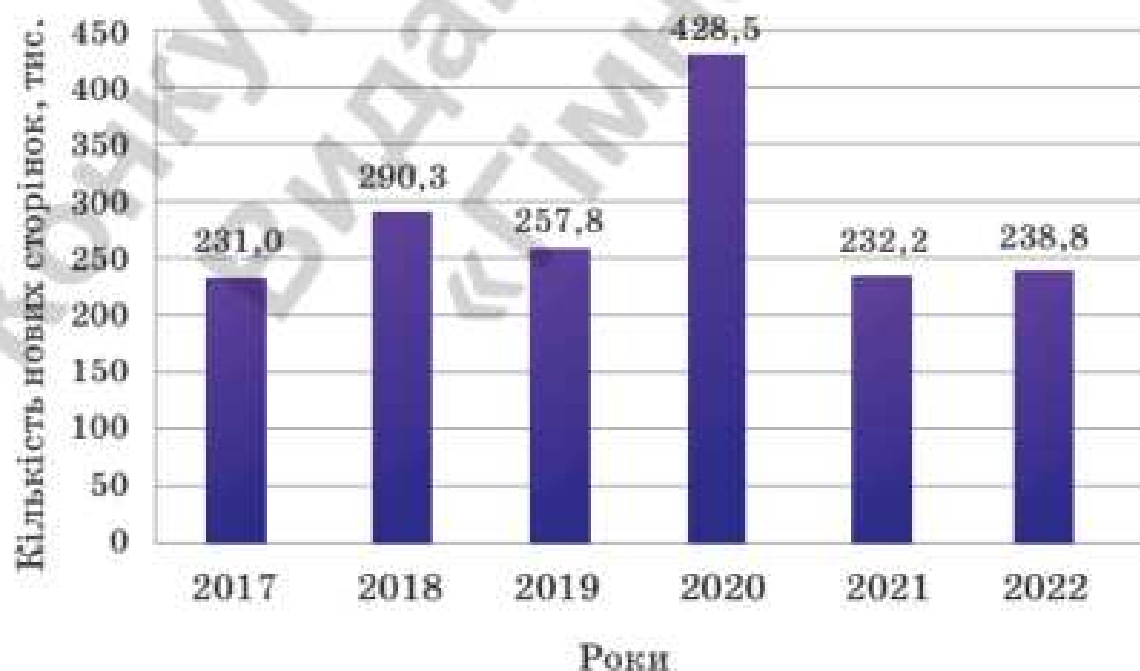


Рис. 77



Рис. 78

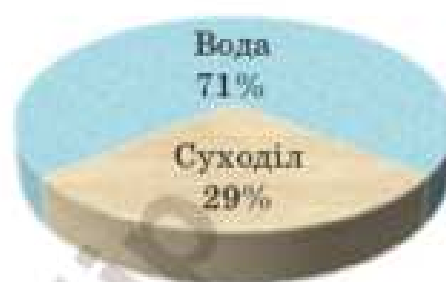


Рис. 79

Зауважимо, що на круговій діаграмі даним з більшими числовими значеннями відповідають сектори з пропорційно більшими центральними кутами. Наприклад, на діаграмі, зображеній на рисунку 78, кут сектора «Продукти харчування та одяг» удвічі більший за кут сектора «Накопичення та відпочинок», оскільки на продукти харчування й одяг сім'я витрачає вдвічі більше, ніж на накопичення та відпочинок.

Для побудови кругової діаграми треба знайти градусні міри кутів секторів, які правильно відображатимуть співвідношення між відповідними числовими значеннями. Наприклад, знайдемо градусну міру дуги сектора «Комунальні платежі». Для цього частку комунальних платежів ($15\% = 0,15$) помножимо на градусну міру кола, тобто на 360° . Отримуємо:

$$0,15 \cdot 360^\circ = 54^\circ.$$

Таким чином, градусна міра кута сектора «Комунальні платежі» становить 54° .

Звернемо увагу на різноманітне оформлення діаграм у задачах цього пункту. Наприклад, стовпці діаграми можна розташовувати не тільки вертикально, а й горизонтально (рис. 86). Для зображення кругових діаграм також використовують різне дизайнерські рішення (рис. 79, 87, 88).

Інформацію також можна подавати у вигляді графіків. Наприклад, на рисунку 80 зображено графік кількості користувачів інтернету в Україні з 2013 по 2022 рр.



Рис. 80

У яких випадках зручно подавати інформацію у вигляді стовпчастих діаграм і графіків, а в яких — у вигляді кругових? Якщо мета — продемонструвати, як із плином часу змінюється якась величина, то більш наочними є стовпчасті діаграми та графіки. Кругові діаграми частіше застосовують тоді, коли хочуть зіставити частини якоїсь величини.

Приклад 1. Хлопці, які навчаються у 7-х класах, відвідують різні спортивні секції. Використовуючи діаграму (рис. 81), дайте відповіді на запитання.

- 1) Яку секцію відвідують найбільше семикласників?
- 2) Які секції відвідує однакова кількість семикласників?
- 3) Яку частину від кількості футболістів становить кількість легкоатлетів?
- 4) У скільки разів висота стовпця, що відповідає секції легкої атлетики, більша за висоту стовп-

ця, що відповідає баскетбольній секції? Чи є правильним твердження, що секцію легкої атлетики відвідує вдвічі більше семикласників, ніж баскетбольну секцію?

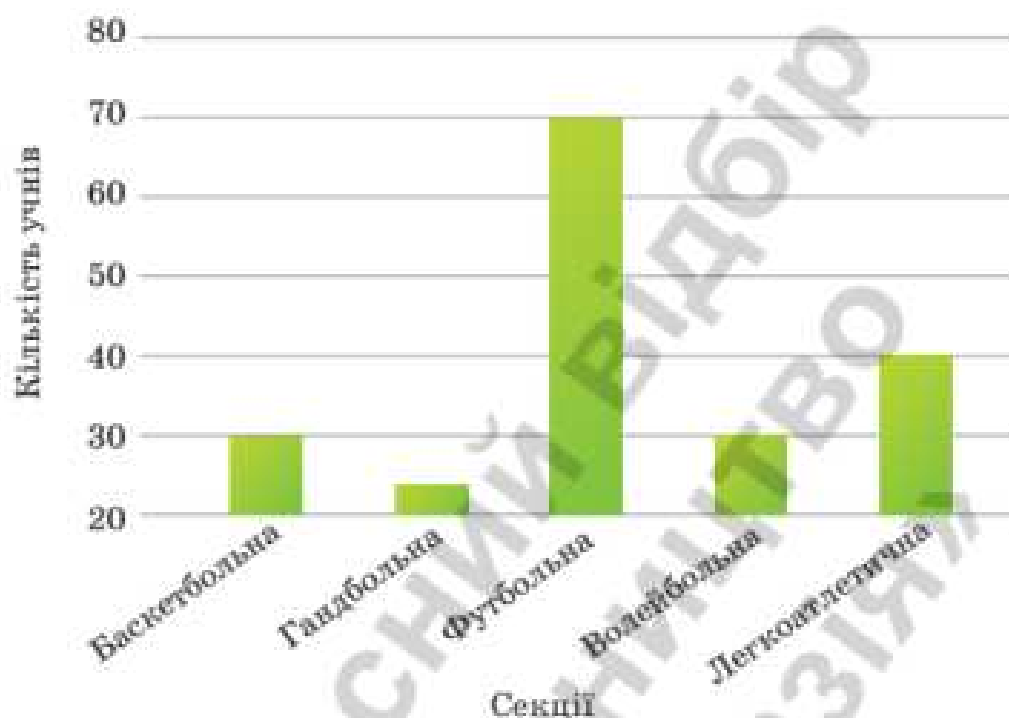


Рис. 81

Розв'язання. Оскільки найвищий стовпчик відповідає футбольній секції, то найбільше семикласників відвідують саме її.

Стовпці, що відповідають баскетбольній і волейбольній секціям, мають однакову висоту, тому ці секції відвідує однакова кількість семикласників.

Шкала кількості учнів (вертикальна шкала) показує, що секцію легкої атлетики відвідують 40 дітей, а футбольну секцію — 70. Тоді із відношення $40/70$ отримуємо відповідь $4/7$.

Стовпець, що відповідає секції легкої атлетики, удвічі вищий, ніж стовпець, що відповідає баскетбольній секції. Здавалося би, це означає, що легкоатлетів удвічі більше, ніж баскетболістів. Проте звернемо увагу на те, що перша позначка на вертикальній

шкалі — це число 20, а не число 0. Діаграма показує, що секцію легкої атлетики відвідують 40 учнів, а баскетбольну секцію — 30. Тому відповідь на друге поставлене запитання заперечна. ◀

Приклад 2. Бігунів на довгі дистанції називають стаєрами (від англ. *stayer* — витривалий кінь). Під час тренувань і змагань стаєри витрачають багато енергії, тому ці спортсмени дотримуються високовуглеводної дієти, до якої вуглеводи, білки та жири входять у відношенні 5 : 3 : 2. Побудуйте відповідну кругову діаграму.

Розв'язання. Розіб'ємо коло на три дуги, градусні міри яких відносяться як 5 : 3 : 2. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$5x + 3x + 2x = 360;$$

$$10x = 360;$$

$$x = 36.$$

Отже, кут сектора «Вуглеводи» дорівнює $5 \cdot 36^\circ = 180^\circ$, кут сектора «Білки» — $3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$, а кут сектора «Жири» — $2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$.

Отримані дані дають змогу побудувати шукану кругову діаграму (рис. 82). ◀

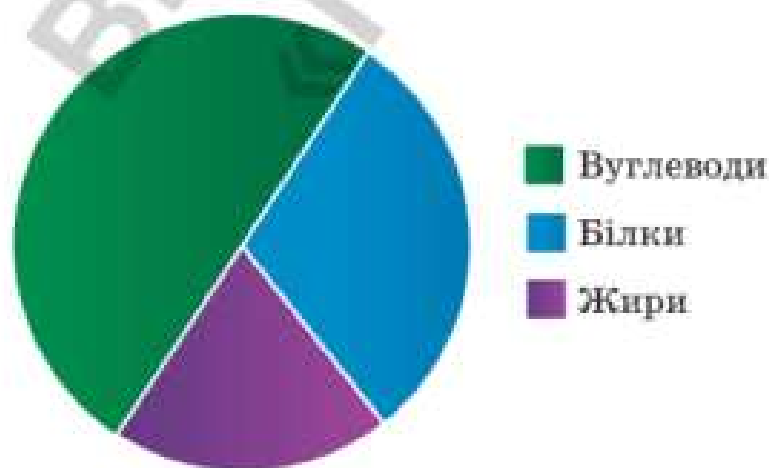


Рис. 82



1. Які графічні способи використовують для подання даних? 2. Які види діаграм ви знаєте?

ВПРАВИ

1100.° Запропонуйте назву для поданої на рисунку 83 стовпчастої діаграми. Обговоріть свою пропозицію в класі. Спитайте вчителя / вчительку географії, які зміни відбулися за останні роки в класифікації вод Світового океану.

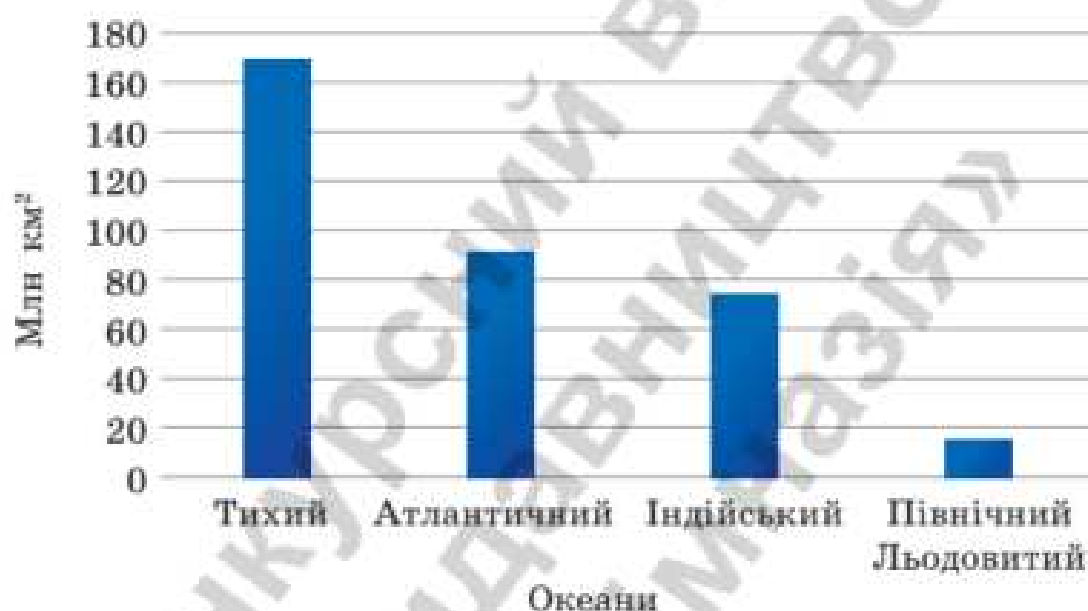


Рис. 83

1101.° За таблицею, яка містить інформацію про найбільшу глибину світових океанів, побудували стовпчасту діаграму (рис. 84). Установіть відповідність між стовпцями діаграми та максимальними глибинами океанів.

1102.° За таблицею, яка містить інформацію про калорійність продуктів, побудували стовпчасту діаграму (рис. 85). Установіть відповідність між стовпцями діаграми та продуктами.



Рис. 84

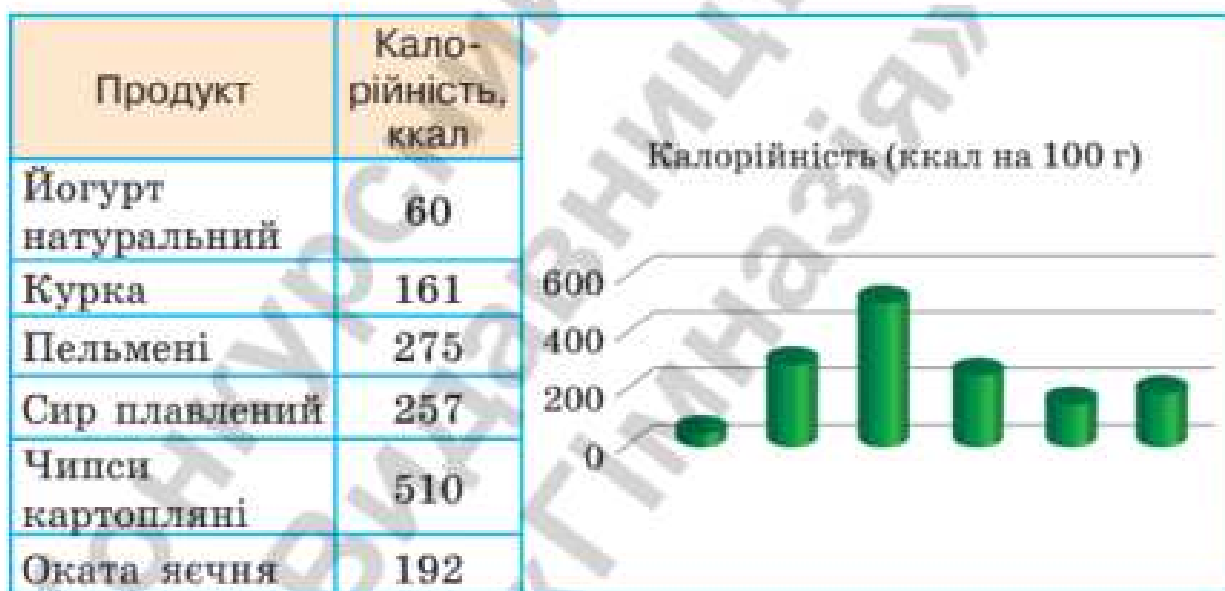


Рис. 85

1103.° Користуючись діаграмою, на якій наведено інформацію про площі найбільших водосховищ України (рис. 86), дайте відповіді на запитання.

- 1) Яка площа Канівського водосховища?
- 2) Яке із цих водосховищ має найменшу площу?
- 3) Чи є правильним твердження, що площа Кам'янського водосховища втричі більша за площу Дніпровського водосховища?



Рис. 86

1104.° Сніжана навчається в 7 класі. На круговій діаграмі (рис. 87) наведено розподіл використання Сніжаною вільного від навчання часу. Установіть:

- 1) який вид діяльності займає найбільше вільного часу Сніжани;



Рис. 87

- 2) скільки відсотків вільного часу Сніжана перебуває на свіжому повітрі;
- 3) у скільки разів більше часу дівчинка витрачає на перегляд роликів у ТікТок та ігри на комп'ютері, ніж на допомогу батькам.

Чи порадили б ви Сніжані щось змінити в розподілі вільного часу?

1105.° На круговій діаграмі (рис. 88) показано розподіл за групами учнів та учениць школи дизайну. Установіть:

- 1) у якій групі найбільша кількість дітей;
- 2) скільки відсотків учнів та учениць вивчають ландшафтний дизайн;
- 3) скільки відсотків дітей вивчають дизайн, призначений для оформлення сайтів;
- 4) у скільки разів більше дітей навчаються в групі ландшафтного дизайну, ніж у групі візажистів.

Якби ви вирішили вступити до цієї школи дизайну, то який напрям вибрали б?

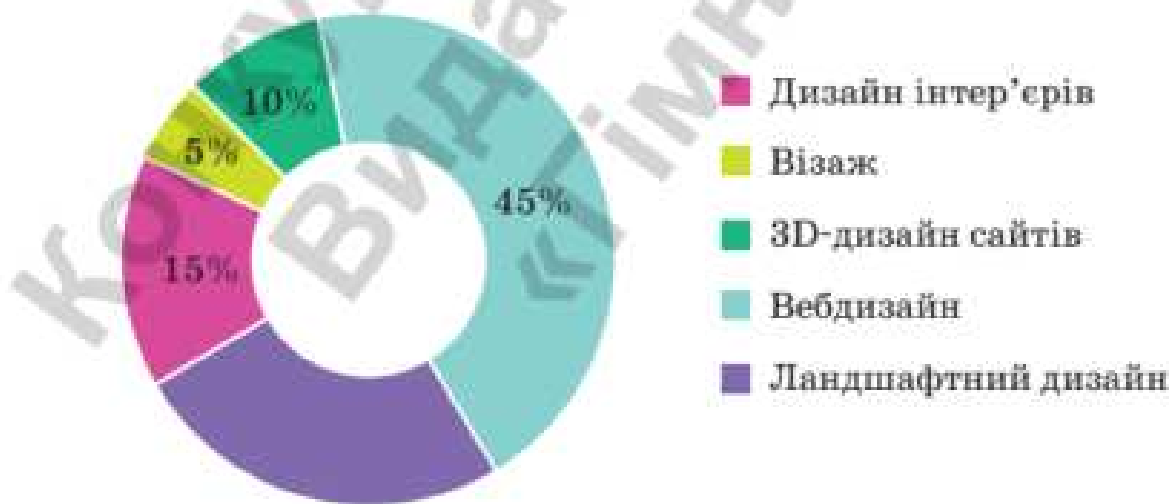


Рис. 88

1106.° На графіку (рис. 89) подано відомості про рівень інтересу українців до творчості співачки Джамали в першому півріччі 2023 р. за даними пошукової

системи Google. Найвищий рівень інтересу за цей період позначено 100 балами. Виберіть правильні твердження.

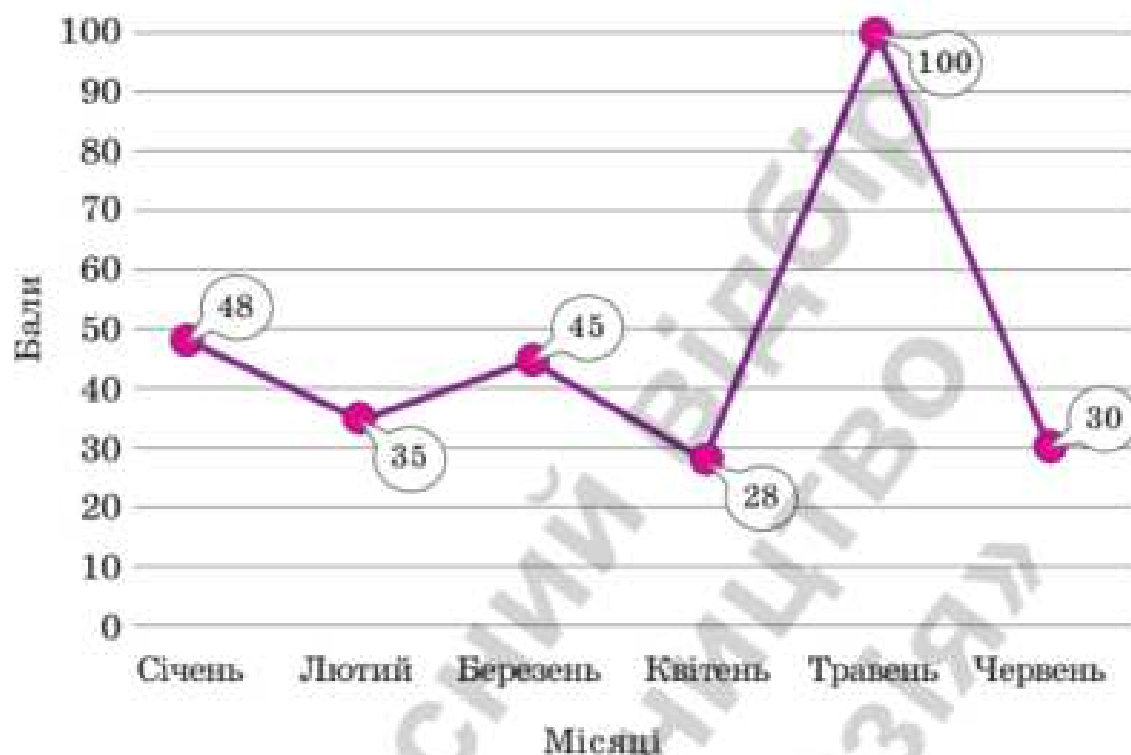


Рис. 89

- 1) У березні інтерес до Джамали був вищим, ніж у червні.
- 2) Популярність Джамали в лютому була вдвічі нижчою від її популярності в березні.
- 3) У період із січня по квітень кількість запитів зменшувалася.

1107.° На графіку (рис. 90) показано, які місця посідала національна збірна України з футболу в рейтингу збірних ФІФА на кінець року за період з 2017 по 2022 рр. Спираючись на наведений графік, виберіть правильні твердження.

- 1) У 2019 р. збірна України займала в рейтингу місце вище, ніж у 2017 р.
- 2) У період з 2017 до 2020 рр. позиція збірної України в рейтингу не погіршувалася.



Рис. 90

3) Позиція збірної України в рейтингу 2019 р. була на 2 пункти вищою, ніж у рейтингу 2022 р.

1108.° На графіку (рис. 91) подано дані про кількість днів з опадами в Житомирі в першому півріччі 2023 р.

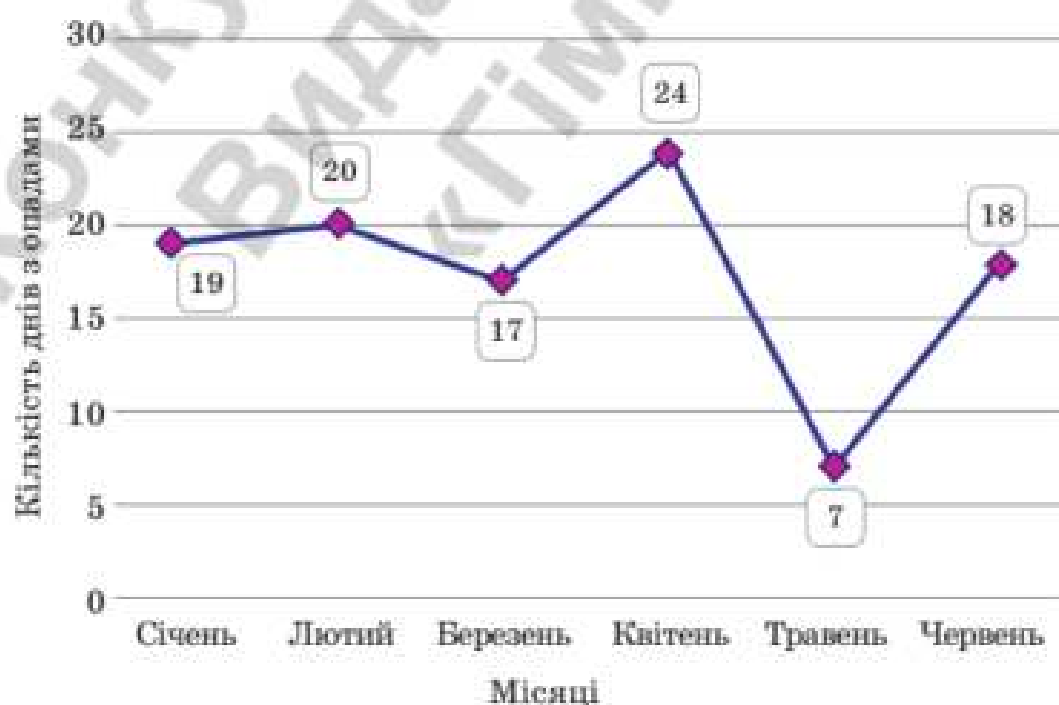


Рис. 91

- 1) Скільки дощових днів було в червні?
- 2) У якому місяці кількість днів з опадами була максимальною?
- 3) На скільки менше дощових днів було в травні, ніж у червні?
- 4) Чи можна стверджувати, що у квітні випала більша кількість опадів, ніж у лютому?

1109. У таблиці наведено найвищі вершини деяких гірських систем Європи. Округліть висоту кожної вершини до сотень метрів. Для зображення 100 м висоти візьміть відрізок завдовжки 1 мм і побудуйте стовпчасту діаграму висот наведених вершин гірських систем.

Гірська система	Найвища точка	Висота, м
Альпи	Монблан	4807
Апенніни	Корно-Гранде	2912
Кавказ	Ельбрус	5642
Кордильєра-Бетіка	Муласен	3479
Карпати	Герлаховски-Штіт	2655
Піренеї	Ането	3404

1110. Використовуючи таблицю середньорічних температур повітря в окремих містах України, побудуйте відповідну стовпчасту діаграму.

Місто	Температура, °С	Місто	Температура, °С
Полтава	7,6	Чернігів	6,7
Херсон	10,3	Рівне	7,7
Ужгород	10,5	Харків	8,7
Нікополь	9,3	Феодосія	12,8
Коломия	7,4	Луганськ	8,8

1111. Використовуючи таблицю розвитку метрополітену міста Києва, побудуйте відповідний графік.

Рік	Кількість станцій	Рік	Кількість станцій
1960	5	1995	37
1965	10	2000	40
1970	11	2005	44
1975	14	2010	49
1980	21	2015	52
1985	27	2020	52
1990	31		

1112. Використовуючи таблицю розвитку метрополітену міста Роттердама, побудуйте відповідний графік.

Рік	Кількість станцій	Рік	Кількість станцій
1970	8	2000	41
1975	12	2005	48
1980	12	2010	62
1985	35	2015	62
1990	37	2020	70
1995	40		

1113. На рисунку 92 зображено книжкову полицю кабінету математики. Побудуйте відповідну кругову діаграму.



Рис. 92

1114.™ У таблиці подано інформацію про розподіл балів учасників основної сесії НМТ¹-2023 з математики. Побудуйте кругову діаграму, що відображає цю інформацію.

Набрані бали	Кількість учасників
181–200	8475
161–180	12 604
141–160	74 849
121–140	104 763
100–120	48 935
менше від 100	10 755

1115.™ У таблиці подано інформацію про сумарну кількість медалей, здобутих українськими школярами та школярками на міжнародних предметних олімпіадах у 2022 р. Побудуйте кругову діаграму, що відображає цю інформацію.

Предмет	Кількість медалей
Інформатика	4
Астрономія та астрофізика	4
Фізика	4
Хімія	4
Математика	6

1116.™ Вивчаючи проблеми народжуваності, аспірант інституту демографії² розглянув вибірку з декількох сімей і з'ясував кількість дітей у кожній із них. Результати опитування він подав у формі стовпчастої діаграми (рис. 93). Побудуйте відповідну кругову діаграму.

¹ НМТ (національний мультипредметний тест) — комп'ютерний онлайн-тест, який складають абітурієнти для вступу у вищий навчальний заклад.

² Демографія — наука про народонаселення.

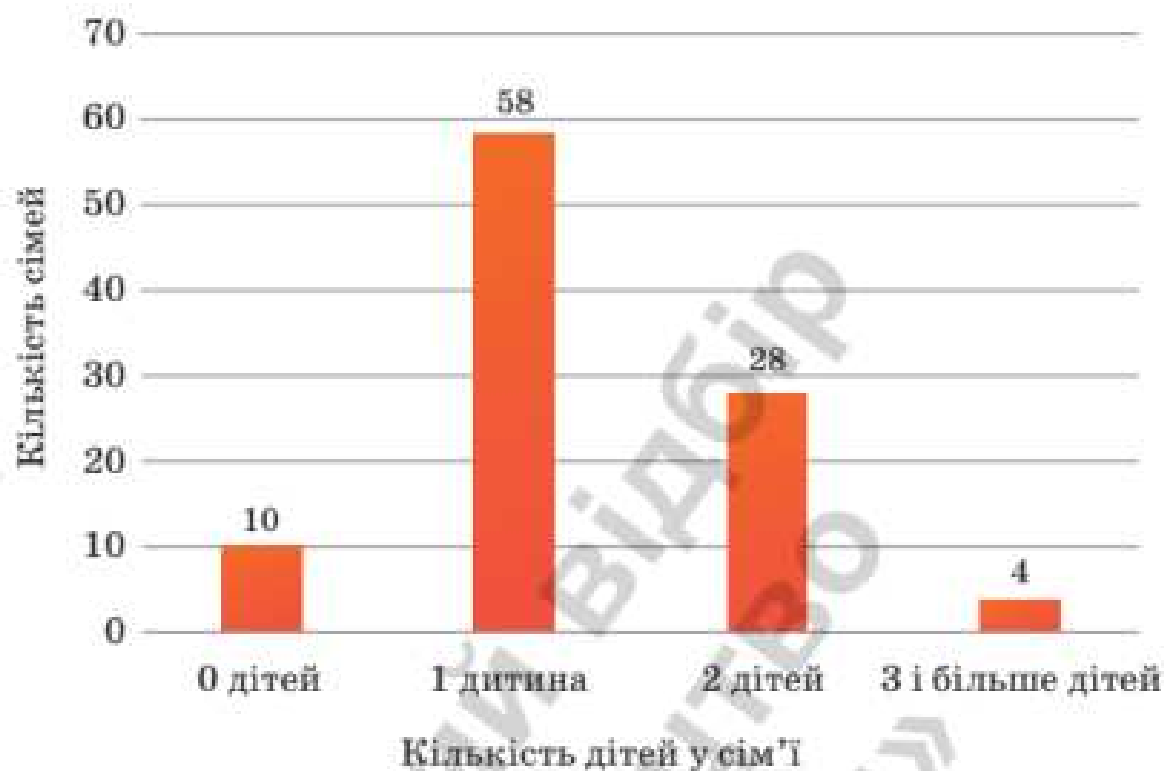


Рис. 93

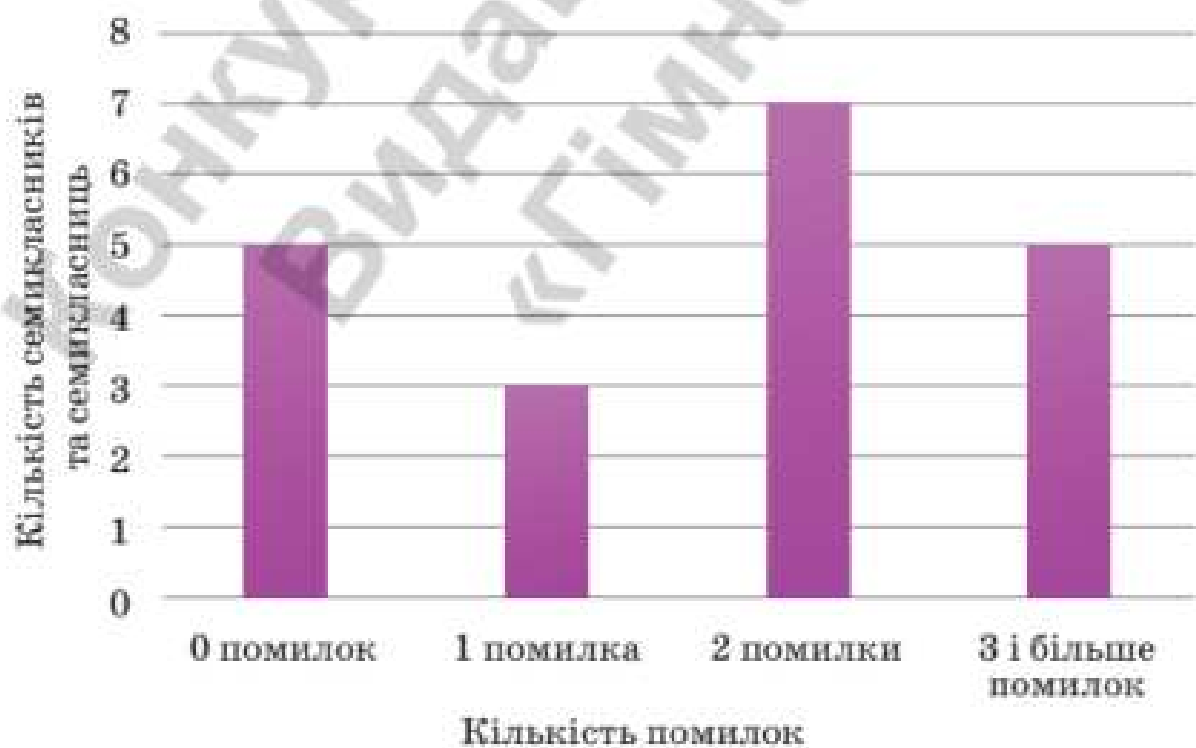


Рис. 94

1117.* У шкільній вікторині на знання української мови брали участь семикласники та семикласниці. Потрібно було записати кілька складних для правопису слів і словосполучень:

будь ласка, в цілому, шелест, Польща, п'ятнадцятиповерховий, жовто-блакитний, журі, по батькові, завзятістю, ллється.

Результати вікторини подано у формі стовпчастої діаграми (рис. 94). Побудуйте відповідну кругову діаграму.

1118.* (Домашня практична робота) Як правило, бюджет сім'ї складається з таких статей витрат:

1	Продукти харчування
2	Транспортні витрати
3	Побутова хімія
4	Комунальні платежі
5	Одяг
6	Велика побутова техніка, меблі
7	Медицина
8	Відпочинок і розваги
9	Освіта
10	Інтернет і мобільний зв'язок
11	Заощадження
12	Непередбачені витрати

Виберіть 4 найбільші статті витрат вашої сім'ї або сім'ї ваших знайомих і дізнайтеся про суми відповідних щомісячних витрат. Решту витрат віднесіть до розділу «Інші витрати». Побудуйте кругову діаграму місячних витрат.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1119. Петро піднявся на гору зі швидкістю 2,5 км/год, а потім спустився іншою дорогою зі швидкістю 4 км/год. Знайдіть загальний шлях, пройдений Петром, якщо дорога на гору на 3 км коротша від дороги з гори, а час, витрачений на весь шлях, становить 4 год.

1120. Розкладіть на множники вираз:

$$1) -\frac{9}{64}b^6 + 16m^2n^4;$$

$$2) 20z^2 + 3xy - 15xz - 4yz.$$

1121. Знайдіть таке найменше натуральне значення a , при якому вираз $x^2 - 4x + 2a$ набуває додатних значень за будь-якого значення x .

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

1122. Є 100 купок монет по 100 монет у кожній. Одна з купок складається з фальшивих монет, кожна з яких на 1 г легша від справжньої. Маса справжньої монети становить 10 г. Яку найменшу кількість зважувань на пружинних терезах зі стрілкою треба зробити, щоб знайти купку з фальшивих монет?

32. Початкові відомості про статистику

Яким накладом потрібно випустити підручник з математики для 7 класу?

Чи варто певному політику висувати свою кандидатуру на чергових виборах мера?

Скільки кілограмів риби та інших морепродуктів вживає в середньому один житель України за рік?

Чи вигідно для концерту даного артиста орендувати цілий стадіон?

На ці й багато інших запитань допомагає відповісти статистика.

Означення. Статистика (від лат. *status* — стан) — наука про збирання, оброблення й аналіз даних (інформації), які характеризують масові явища.

Статистичне дослідження зазвичай починається зі збирання даних і завершується висновками та рекомендаціями. У процесі збирання інформації можливі неточності й помилки, властиві окремим спостереженням і пов'язані з випадковими факторами. Статистичні методи дають змогу коректно обробляти такі випадковості й недоліки та сформулювати обґрунтований загальний висновок.

Наприклад, ви знаєте, що шкідливі звички, неправильне харчування, малорухомий спосіб життя призводять до серцево-судинних захворювань. Такого висновку лікарі дійшли, спостерігаючи за здоров'ям, звісно, далеко не всіх людей на планеті. Загальний висновок зроблено на підставі спостережень за вибіркою людей, тобто за групою людей, яких було відібрано (вибрано) для спостереження та дослідження.

Щоб дізнатися, як засвоєно пройдений матеріал, учитель часто на початку уроку проводить вибіркове усне опитування. У цьому випадку йдеться про вибірку кількох учнів та учениць, яких опитає вчитель.

У статистиці сукупність усіх об'єктів, з яких формується вибірка та відносно якої роблять спільний статистичний висновок, називають генеральною сукупністю. Наприклад, висновок про шкідливість куріння зроблено на основі вибірки людей з генеральної сукупності, що складається з усієї людської популяції. Висновок про те, як засвоєно пройдений матеріал, учитель робить відносно генеральної сукупності всіх учнів та учениць класу.

Як правило, генеральна сукупність значно більша за вибірку. У цьому полягає вся сутність статистики. Щоб досконально вивчити кожний елемент генеральної сукупності, зазвичай потрібні надто великі зусилля та витрати. Однак іноді, коли хочуть отримати

максимально достовірний висновок, вибірка може бути дуже великою та навіть збігатися зі всією генеральною сукупністю. Прикладами таких досліджень є національні волевиявлення чи зовнішнє незалежне оцінювання навчальних досягнень. Так, у 1991 р. було проведено загальнонаціональний референдум щодо проголошення незалежності України.

З іншого боку, статистичний висновок, що ґрунтується навіть на досить великій вибірці, може виявитися недостовірним. Наприклад, якщо ми, досліджуючи популярність артиста, опитаємо тисячі людей, які прийшли на його концерт, то отриманий висновок не буде об'єктивним, адже ці люди прийшли на концерт саме тому, що цей артист їм подобається.

Щоб уникнути таких помилок, намагаються розглядати не довільну, а **репрезентативну** вибірку (від франц. *représentatif* — показовий). Однією з умов формування репрезентативної вибірки є випадковий вибір її елементів. Таким чином забезпечують однакові шанси для всіх елементів генеральної сукупності потрапити до вибірки. Так, лікарі, вивчаючи фактори ризику тієї чи іншої хвороби, спостерігають за людьми різного віку, статі, професії, національності тощо.

Приклад. Визначте, у якому з опитувань сформована вибірка є репрезентативною:

1) щоб дізнатися, наскільки популярним є біатлон у світі, опитали випадковим чином вибраних жителів і жительок таких країн: Катар, Саудівська Аравія та Об'єднані Арабські Емірати (по 500 осіб із кожної країни);

2) для об'єктивної оцінки знань професор підготував 100 запитань за пройденим курсом. На іспиті студент випадковим чином вибирає із цього списку довільні 5 запитань.

Розв'язання. 1) Дана вибірка не є репрезентативною, оскільки в ній узяли участь жителі та жительки лише трьох країн, у кожній з яких біатлон не є традиційним видом спорту.

2) Оскільки студент вибирає 5 запитань випадковим чином, то всі запитання мають рівні шанси потрапити до вибірки. Тому дана вибірка є репрезентативною. ◀

Статистичні відомості надходять з різних галузей знань і діяльності людини: економіки, медицини, соціології, демографії, сільського господарства, метеорології, спорту тощо. Проте статистичні методи обробки (аналізу) даних багато в чому схожі. З ними ви ознайомитеся в курсі математики 8 і 9 класів.



1. Що вивчає наука статистика? 2. Що в статистиці називають вибіркою? 3. Що називають генеральною сукупністю? 4. Яка множина, вибірка або генеральна сукупність є частиною іншої? 5. Назвіть одну з умов формування репрезентативної вибірки.

ВПРАВИ

1123.° Потрібно з'ясувати, який відсоток студентів і студенток певного університету працює паралельно з навчанням. Що є генеральною сукупністю в цьому дослідженні? Як формували би вибірку ви, щоб відповісти на поставлене запитання? Обговоріть ваші ідеї в класі.

1124.° Районна адміністрація проводить опитування серед жителів і жительок мікрорайону про якість комунальних послуг. Що є генеральною сукупністю в цьому дослідженні? Як формували би вибірку ви, щоб відповісти на поставлене запитання? Обговоріть ваші ідеї з друзями.

1125.° На прем'єру спектаклю до театру прийшло 380 глядачів і глядачок. Після вистави опитали 20 осіб, чи сподобався їм спектакль. У результаті шістнадцятеро оцінили спектакль позитивно, трьом опитаним вистава не сподобалася, а одна людина відмовилася відповідати. Зі скількох осіб у цьому дослідженні складалася вибірка? генеральна сукупність?

1126.° За зміну завод виробив партію з 10 000 деталей. Співробітник відділу контролю якості з усієї партії навмання вибрав 10 деталей для перевірки. З'ясувалося, що 9 перевірених деталей задовольняють усі стандарти, а одна деталь виявилася бракованою. Зі скількох деталей у цьому дослідженні складалася вибірка? генеральна сукупність?

1127.° Вивчаючи проблеми народжуваності в Україні, аспірант інституту демографії розглянув вибірку з декількох сімей і з'ясував кількість дітей у кожній з них. Результати опитування він подав у формі стовпчастої діаграми (рис. 93). Скільки сімей містила вибірка? Що в даному випадку є генеральною сукупністю?

1128.° Для участі в шкільній вікторині на знання української мови відібрали декілька семикласників і семикласниць. Потрібно було записати кілька складних для правопису слів. Результати вікторини подано у формі стовпчастої діаграми (рис. 94). Скільки семикласників і семикласниць увійшло до вибірки? Що в даному випадку є генеральною сукупністю?

1129.° На рисунку 95 подано кругову діаграму розподілу дітей за чотирма сьомими класами. Адміністрація школи хоче з'ясувати, скільки часу діти витрачають на виконання домашніх завдань. Для цього було опитано 5 дітей із 7-А класу, 7 — із 7-Б, 9 — із 7-В і 9 дітей — із 7-Г. Зі скількох дітей у цьому дослідженні складалася вибірка? генеральна сукупність?

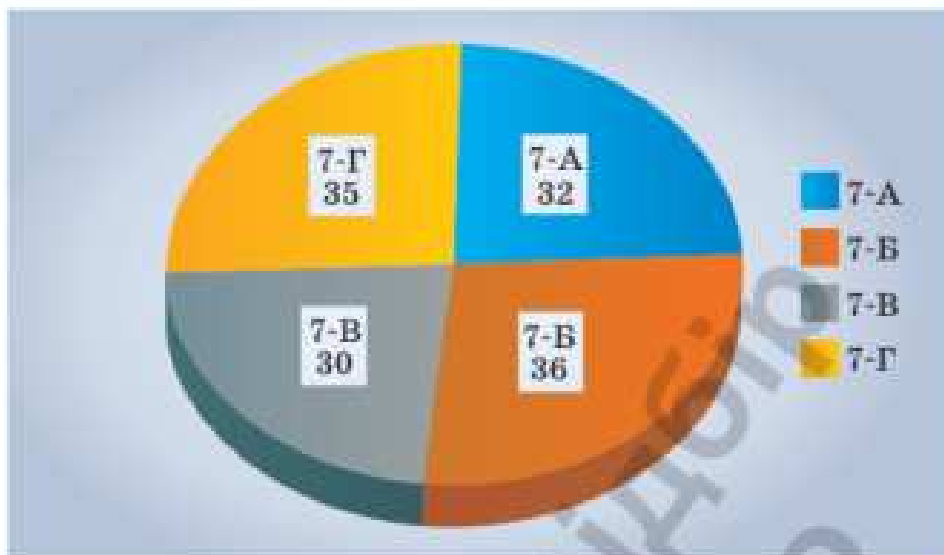


Рис. 95

1130.° На рисунку 96 подано кругову діаграму розподілу місць Рівненського академічного українського музично-драматичного театру. Адміністрація театру хоче з'ясувати, як впливає на сприйняття спектаклю місце глядача в залі. Для цього були опитані 20 глядачів і глядачок партеру, 11 — амфітеатру, один — бельєтажу, сім — балконів і чотири — лож. Зі скількох осіб у цьому дослідженні складалася вибірка? генеральна сукупність?

Розподіл місць у глядацькій залі

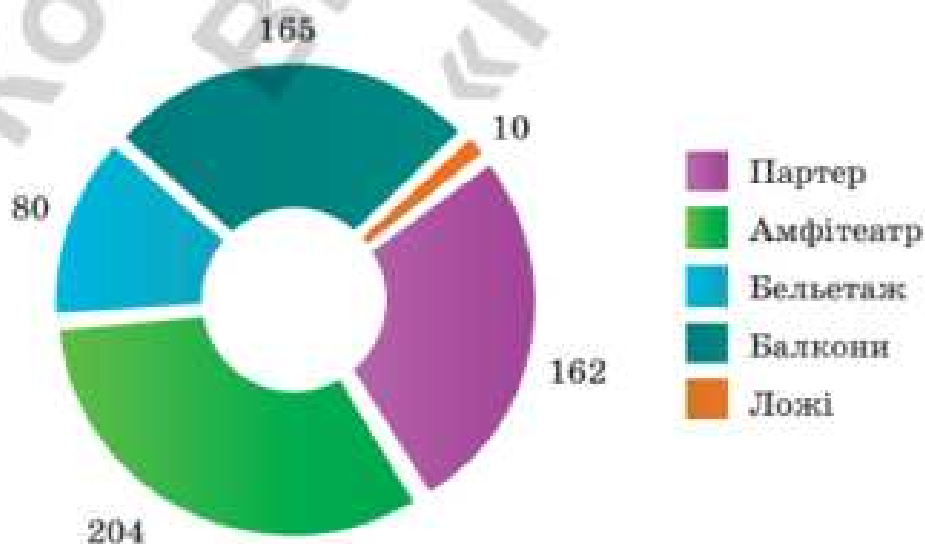


Рис. 96

1131.° Визначте, чи є репрезентативною подана вибірка.

- 1) Для визначення популярності певної моделі смартфона випадковим чином були опитані 2500 пенсіонерів і пенсіонерок у різних регіонах країни.
- 2) Для того щоб з'ясувати рівень знань семикласників і семикласниць творчості Всеволода Нестайка були випадковим чином вибрані й опитані 5000 семикласників і семикласниць із різних регіонів країни.
- 3) Для визначення відсотку користувачів інтернету в Україні були опитані вибрані випадковим чином 1000 жителів і жительок м. Запоріжжя і 1000 жителів і жительок м. Дніпра.
- 4) Для з'ясування рейтингу популярних соціальних мереж були випадковим чином вибрані та опитані 3000 дівчат віком від 15 до 20 років у різних регіонах країни.
- 5) Для обчислення середнього віку зір у Всесвіті сформували вибірку зі 100 зір, навімання вибраних з усіх видимих неозброєним оком на небі в темну ніч.

1132.° Визначте, чи є репрезентативною подана вибірка.

- 1) Щоб дізнатися, як часто жителі та жительки міста у вихідні дні бувають на природі, були опитані члени трьох садових кооперативів.
- 2) Щоб визначити відсоток семикласників і семикласниць, які роблять ранкову зарядку, опитали вибраних випадковим чином 4000 семикласників і семикласниць із різних регіонів країни.
- 3) Щоб оцінити, скільки морепродуктів вживає пересічний житель України, опитали вибраних випадковим чином 1500 жителів і жительок м. Одеси та 1500 жителів і жительок м. Львова.

- 4) Для визначення витрат середньостатистичної сім'ї на молочні продукти за допомогою дзвінків на стаціонарні домашні телефони опитали 2400 абонентів і абоненток із різних регіонів країни (номери телефонів вибирали випадковим чином).
- 5) Щоб дізнатися, яким накладом зазвичай видають шкільні підручники у світі, сформувавши вибірку з 200 шкільних підручників, навмання вибраних із каталогу найбільшої бібліотеки країни — Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського.

1133.° Для участі в політичному шоу серед 200 експертів-кандидатів комісія відібрала 5 найбільш кваліфікованих. Із скількох осіб складалася вибірка в цьому дослідженні?

1134.° Із 40 студентів, що складали іспит з математики, деканат відібрав 8 студентів, які «завалили» іспит, і рекомендував їм пройти курс повторно. Із скількох осіб складалася вибірка в цьому дослідженні?

1135.° (Домашня практична робота) Виберіть свій улюблений навчальний предмет. Із підручника з цього предмета підберіть завдання для річної підсумкової роботи. Подумайте, як запобігти нерепрезентативності вашої вибірки. Обговоріть отриману підсумкову роботу з учителем-предметником.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1136. Дано функції $g(x) = \frac{20}{x} - 3$ і $h(x) = 8 - 3x$. Порівняйте:

- 1) $g(1)$ і $h(1)$; 2) $g(5)$ і $h(2)$; 3) $g(-2)$ і $h(6)$.

1137. Спростіть вираз:

- 1) $(c + 2)(c - 3) - (c + 1)(c + 3)$;
- 2) $(p + 4)(p - 11) + (p + 6)^2$;

$$3) 3(x-5)^2 - (8x^2 - 10x);$$

$$4) 7(2y-5)^2 - 2(7y-1)^2.$$

1138. Доведіть, що при будь-якому значенні x значення виразу $|x| - x$ більше за відповідне значення виразу $2x - x^2 - 2$.

33. Частота та ймовірність випадкової події

Нам нерідко доводиться проводити спостереження, брати участь в експериментах або випробуваннях, вимірювати величини. Часто подібні дослідження завершуються деяким результатом, який заздалегідь передбачити неможливо.

Розглянемо кілька характерних прикладів таких експериментів.

Якщо відкрити книгу навмання, то неможливо знати заздалегідь, який номер сторінки ви побачите.

Неможливо до початку футбольного матчу визначити, з яким рахунком закінчиться гра.

Ви не можете бути абсолютно впевненими у тому, що коли натиснете на кнопку вимикача, то загориться настільна лампа.

Немає гарантії, що з курячого яйця, покладеного до інкубатора, виведеться курча.

Як правило, спостереження або експеримент визначається певним комплексом умов. Наприклад, футбольний матч повинен проходити за правилами; курячі яйця мають перебувати в інкубаторі не менше ніж 21 день із дотриманням визначеної методики зміни температури та вологості повітря.

Також важливою рисою розглянутих дослідів є те, що їх можна відтворювати багато разів. Наприклад, футбольні матчі проходять практично щодня.

Крім того, кожний експеримент характеризується своїми результатами. Наприклад, стріляючи по мі-

шені, можна з'ясовувати кількість вибитих очок або кількість влучань у мішень. Це два різних досліди.

Щоб визначити результати експерименту, необхідно максимально чітко описати, яку величину (явище, процес) вимірюють чи спостерігають у досліді, що вивчається.

Наприклад,

- кидають гральний кубик і записують, скільки очок випало на кубіку;

- із коробки з білими та чорними кулями навмання витягують одну кулю і фіксують її колір;

- на уроці фізкультури учень виконує стрибок у довжину, а вчитель вимірює, на якій відстані від лінії відштовхування приземлився учень.

Випадковою подією називають такий результат спостереження або експерименту, який при дотриманні даного комплексу умов може відбутися, а може й не відбутися.

Наприклад, якщо підкидати монету, то випадковою подією є випадіння герба. Виявлення листа під час перевірки поштової скриньки також є випадковою подією.

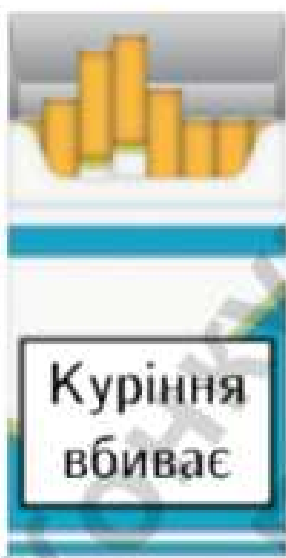
Уявимо, що випущено 1 000 000 лотерейних білетів і розігрується один автомобіль. Чи можна, придбавши один лотерейний білет, виграти цей приз? Звісно, можна, хоча ця подія *малоймовірна*. А якщо розіграватимуться 10 автомобілів? Зрозуміло, що **ймовірність** виграшу збільшиться. Якщо ж уявити, що розігруються 999 999 автомобілів, то ймовірність виграшу стає набагато більшою, а сама подія — *практично достовірною*.

Отже, ймовірності випадкових подій можна порівнювати. Однак для цього слід домовитися, яким чином кількісно оцінювати можливість появи тієї чи іншої події.

Підставою для такої числової оцінки можуть бути результати численних спостережень або експериментів. Так, люди давно помітили, що багато подій відбувається з тією чи іншою, на подив постійною, частотою.

Демографам добре відоме число 0,512. Статистичні дані, отримані в різні часи та в різних країнах, свідчать про те, що на 1000 новонароджених припадає в середньому 512 хлопчиків. Число 0,512 називають відносною частотою випадкової події «народження хлопчика». Воно визначається формулою

$$\text{відносна частота} = \frac{\text{кількість новонароджених хлопчиків}}{\text{кількість усіх новонароджених}}.$$



Наголосимо, що це число отримано в результаті аналізу багатьох спостережень. У таких випадках говорять, що ймовірність події «народження хлопчика» приблизно дорівнює 0,512.

Ви знаєте, що куріння шкідливе для здоров'я. За даними організацій охорони здоров'я курці складають приблизно 92 % від усіх хворих на рак легенів. Число 0,92 — це відносна частота випадкової події «той, хто захворів на рак легенів, — курив», яка визначається таким відношенням:

$$\text{відносна частота} = \frac{\text{кількість курців серед хворих на рак легенів}}{\text{кількість усіх людей, хворих на рак легенів}}.$$

У таких випадках говорять, що ймовірність натрапити на курця серед тих, хто захворів на рак легенів, приблизно дорівнює 0,92 (або 92 %).

Щоб детальніше ознайомитися з поняттям ймовірності випадкової події, звернемося до класичного прикладу з підкиданням монети.

Припустимо, що в результаті двох підкидань монети двічі випав герб. Тоді у даній серії, яка складається з двох випробувань, відносна частота випадіння герба дорівнює:

$$\text{відносна частота} = \frac{\text{кількість випадінь герба}}{\text{кількість підкидань}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Чи це означає, що ймовірність випадіння герба дорівнює 1 або незначно відрізняється від одиниці? Звісно, ні.

Для того щоб за відносною частотою випадкової події можна було коректно оцінювати її ймовірність, кількість випробувань має бути достатньо великою.

Починаючи з XVIII ст. багато дослідників проводили серії випробувань із підкиданням монети.

У таблиці наведено результати деяких таких випробувань.

Дослідник	Кількість підкидань монети	Кількість випадінь герба	Частота випадіння герба
Жорж-Луї де Бюффон (1707–1788)	4040	2048	0,5069
Аугустус де Морган (1806–1871)	4092	2048	0,5005
Вільям Джевонс (1835–1882)	20 480	10 379	0,5068
Карл Пірсон (1857–1936)	24 000	12 012	0,5005
Вільям Феллер (1906–1970)	10 000	4979	0,4979

За наведеними даними простежується закономірність: при багаторазовому підкиданні монети відносна частота появи герба незначно відхиляється від числа 0,5.

Отже, можна вважати, що ймовірність події «випадіння герба» приблизно дорівнює 0,5.

Звернемося знову до таблиці, наведеної вище. Чи можна на підставі її даних гарантовано стверджувати, що ймовірність випадкової події «випадіння герба» абсолютно точно дорівнює 0,5? Відповідь на це запитання заперечна. Справді, з огляду на ці дані можна сказати, що відносна частота появи герба незначно відхиляється, наприклад, від числа 0,502 або від числа 0,4997, тобто число 0,5 не має жодних переваг перед числом 0,502 або числом 0,4997.

Таким чином, відносна частота випадкової події дає змогу лише наближено оцінити ймовірність випадкової події.

Таку оцінку ймовірності випадкової події називають статистичною. Її використовують у різних галузях діяльності людини: фізиці, хімії, біології, страховому бізнесі, соціології, економіці, охороні здоров'я, спорті тощо.

Підіб'ємо підсумки. Статистична оцінка ймовірності випадкової події формується на підставі результатів серії однакових випробувань. Провівши таку серію, обчислюють відносну частоту випадкової події за формулою

$$\text{відносна частота} = \frac{\text{кількість появ досліджуваної події}}{\text{кількість випробувань (спостережень)}}$$

Знайдене число використовують як оцінку ймовірності випадкової події.

Ймовірність випадкової події позначають буквою P (першою буквою французького слова *probabilité* — ймовірність).

Якщо в першому прикладі подію «народження хлопчика» позначити буквою A , то отриманий результат записують так:

$$P(A) \approx 0,512.$$

Ураховуючи наближений характер статистичної оцінки, отримані дані можна округлити. Наприклад, коли частота випадкової події дорівнює 0,512, то можна написати, що $P(A) \approx 0,51$ або $P(A) \approx 0,5$.

Як ви знаєте, десятковий дріб 0,51 можна записати у вигляді відсотків: $0,51 = 51\%$. Ураховуючи це, можна записати: $P(A) = 51\%$.

Якщо в досліді з підкиданням монети подію «випадіння герба» позначити буквою B , то

$$P(B) \approx 50\%.$$

Інформація про ймовірності випадкових подій дає змогу певною мірою передбачати майбутнє. Наприклад, якщо сонячного ранку прогноз погоди на вашому смартфоні показує, що ймовірність дощу становить 70–90% (рис. 97), то, виходячи на вулицю в другій половині дня, варто взяти із собою парасольку. Шанси того, що вона вам знадобиться, дуже великі.

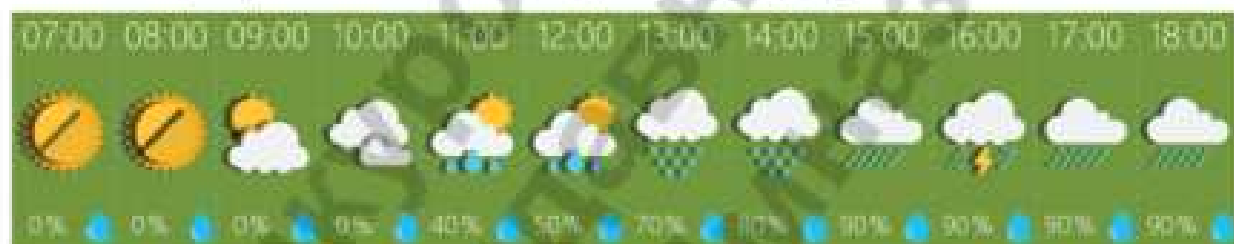


Рис. 97

Ще один приклад. Інструкція застосування будь-якого лікарського препарату містить список можливих побічних ефектів (свербіж, головний біль тощо). Щоб укласти такий список, розробники ліків на стадії тестування обчислюють частоту розвитку побічних ефектів і знаходять статистичну оцінку ймовірності їх виникнення:

Побічний ефект	Частота розвитку побічного ефекту (за даними ВООЗ)	Ймовірність
Свербіж	дуже рідко ($<1/10\ 000$)	менше від 0,01 %

Побічний ефект	Частота розвитку побічного ефекту (за даними ВООЗ)	Ймовірність
Головний біль	рідко ($\geq 1/10\,000$, $< 1/1000$)	від 0,01 % до 0,1 %
Безсоння	не часто ($\geq 1/1000$, $< 1/100$)	від 0,1 % до 1 %
Запаморочення	часто ($\geq 1/100$, $< 1/10$)	від 1 % до 10 %
Шум у вухах	дуже часто ($\geq 1/10$)	від 10 % і більше

Наприклад, популярний жарознижувальний препарат «Аспірин» може спровокувати геморагічний інсульт (крововилив у мозок). Проте відмовлятися із цієї причини від ліків було б зовсім нерозумно. Річ у тім, що ймовірність цього побічного ефекту вкрай мала — менша від 0,001 %.

Таким чином, знання законів теорії ймовірностей і статистики дає нам змогу ухвалювати виважені та раціональні рішення.

?

1. За якою формулою обчислюють відносну частоту випадкової події?
2. Чи можна вважати, що відносна частота випадкової події дорівнює її ймовірності?
3. Чи коректно оцінювати ймовірність випадкової події за її відотною частотою, провівши лише невелику кількість випробувань?
4. Як позначають ймовірність події A ?

ВПРАВИ

1139.° Укажіть випробування, у яких явно вказано, що є їхніми результатами.

- 1) Підкидають монету та фіксують, яким боком вона впаде.
- 2) Футболіст виконує штрафний удар.
- 3) Учителька перевіряє контрольні роботи й виставляє оцінки.

- 4) Друзі грають партію в шахи.
- 5) Кидають три гральних кубики та записують суму очок.

1140.° Укажіть випробування, у яких явно вказано, що є їхніми результатами.

- 1) Кидають гральний кубик.
- 2) Тренер записує, чи влучила баскетболістка в кошик.
- 3) Охоронець магазину слідкує за відвідувачами.
- 4) Щоб визначити, хто піде викидати сміття, брати Тарас та Іван кидають жереб.
- 5) Монету підкидають двічі та фіксують, яким боком вона впаде кожного разу.

1141.° Спираючись на свої знання та життєвий досвід, визначте, які з нижченаведених величин ви вважаєте випадковими, тобто величин, значення яких неможливо передбачити заздалегідь.

- 1) Кількість днів у четвертому місяці 2030 р.
- 2) Сума кутів навмання вибраного трикутника.
- 3) Кількість коренів навмання вибраного лінійного рівняння $ax = b$.
- 4) Кількість перемог у 10 іграх у «Хрестики-нулики» за професійної гри учасників.
- 5) Тривалість тенісного матчу.
- 6) Кількість волосин на голові довільної людини.

1142.° Спираючись на свої знання та життєвий досвід, визначте, які з нижченаведених величин ви вважаєте випадковими.

- 1) Кількість днів у другому тижні грудня 2031 р.
- 2) Відношення довжини навмання вибраного кола до його діаметра.
- 3) Кількість натуральних дільників навмання вибраного простого числа.

- 4) Кількість супутників планети Земля.
- 5) Об'єм холодної води, що споживається сім'єю за місяць.
- 6) Тривалість одного періоду гри в баскетболі.

1143.° Наведіть приклади експериментів, у яких може відбутися: 1) малоймовірна подія; 2) практично достовірна подія.

1144.° Які з наведених подій ви вважаєте малоймовірними? практично достовірними? Обговоріть ваші відповіді в класі.

- 1) У результаті підкидання монети 200 разів поспіль випаде герб.
- 2) Наступного тижня вас викличуть до дошки хоча б один раз.
- 3) Матч команд футбольних клубів «Динамо» (Київ) — «Шахтар» (Донецьк) завершиться з результатом 1 : 1.
- 4) Навмання вибраний українець ніколи не їв борщу.
- 5) У серпні в м. Одесі випаде сніг.
- 6) Вік навмання вибраної людини становить 100 років.
- 7) Якщо не дотримуватися правил гігієни зубів, то в майбутньому доведеться витратити значні кошти на їх лікування.



1145.° Які з наведених подій ви вважаєте малоймовірними? практично достовірними? Обговоріть ваші відповіді в класі.

- 1) Якщо кинути кубик 300 разів, то хоча б один раз випаде шість очок.
- 2) У наступній чверті вас викликать до дошки на кожному уроці.

- 3) Натискаючи навмання клавіші клавіатури комп'ютера, отримують слово «статистика».
- 4) В один із днів червня температура повітря в м. Херсоні перевищить 20°C .
- 5) Зловмисник зможе дібрати пін-код до банківської карти з першої спроби.
- 6) У навмання вибраній сім'ї є домашній улюбленець.
- 7) Якщо регулярно порушувати правила дорожнього руху, то потрапиш в аварію.

1146.° У довідковій службі працює один оператор, який протягом робочого дня (9:00–17:00) розмовляє по телефону в середньому 6 год. Оцініть ймовірність того, що коли зателефонувати до довідкової у цей період, телефон виявиться вільним.

1147.° Півострів Крим має значні перспективи для розвитку сонячної енергетики. Наприклад, у м. Феодосії погода є сонячною в середньому 2320 годин на рік. Оцініть ймовірність того, що встановлена у Феодосії сонячна батарея в навмання вибраний момент часу буде виробляти електроенергію.

1148.° Із великої партії лампочок вибрали 1000, серед яких виявилось 5 бракованих. Оцініть ймовірність купити браковану лампочку.

1149.° Під час епідемії грипу серед обстежених 40 000 жителів деякого міста виявили 7900 хворих. Оцініть ймовірність події «навмання вибраний мешканець міста хворий на грип».

1150.° Ймовірність купити браковану батарейку дорівнює 0,02. Чи можна стверджувати, що в будь-якій партії зі 100 батарейок є дві браковані?

1151.° Ймовірність улучити в мішень становить 85 %. Чи може бути так, що в серії зі 100 пострілів було 98 влучень у мішень?

1152. У таблиці наведено дані про народження гномів-хлопчиків і гномів-дівчаток у місті Еребор за 5813 р.

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень
Кількість народжених гномів-хлопчиків	1198	1053	1220	1151	1151	1279
Кількість народжених гномів-дівчаток	119	106	113	106	116	122
Місяць	Липень	Серпень	Вересень	Жовтень	Листопад	Грудень
Кількість народжених гномів-хлопчиків	1338	1347	1329	1287	1196	1243
Кількість народжених гномів-дівчаток	125	133	121	123	106	112

Обчисліть відносну частоту народжень гномів-дівчаток у квітні та жовтні та за весь 5813 р. Оцініть ймовірність народження гнома-дівчинки.

1153. У таблиці наведено дані про кількість результативних і нічийних партій у великих чоловічих шахових турнірах 2022 р.

Турнір	Chess.com Global Championship	Airthings Masters	Champions Showdown 9LX	Sinquefield Cup	Superbet Romania	FIDE Candidates	Saint Louis Rapid & Blitz
Кількість результативних партій	88	96	34	14	17	23	77
Кількість нічийних партій	65	53	11	27	31	33	58

Обчисліть відносну частоту того, що шахова партія закінчиться внічию в кожному турнірі та в усіх наведених турнірах у цілому. Оцініть ймовірність того, що шахова партія у великому турнірі завершиться внічию.

1154.* Відомий американський баскетболіст Рік Беррі виконував штрафний кидок «з-під спідниці» (двома руками знизу). В одному з матчів Рік Беррі виконав 9 штрафних кидків. Оцініть, скільки разів при цьому він улучив у кільце, якщо ймовірність попадання штрафного кидка Ріка Беррі складала 89 %.

1155.* Відомо, що деякий медичний препарат знімає алергічну реакцію з ймовірністю 70 %. Лікар призначив цей препарат 40 своїм пацієнтам. Оцініть, скільком із них допоможуть ці ліки.

1156.* Відомо, що холодильники, які випускають фірми-конкуренти «Сніг» і «Лід», мають однакові технічні характеристики та продаються за однаковою ціною. Із великих партій вибрали 500 холодильників фірми «Сніг» і 800 — фірми «Лід». У першій вибраній партії виявилось 3 бракованих холодильники, у другій — 5. Холодильник якої фірми ви б купили, спираючись на цю інформацію?

1157.* У таблиці наведено дані про кількість днів, у які на 12:00 було зафіксовано дану температуру та даний рівень вологості повітря в деякому місті.

Діапазон температури повітря, °C	Діапазон вологості повітря, %						Усього днів
	0–40	41–60	61–70	71–80	81–90	91–100	
менше від 11 °C	0	1	1	3	2	0	7
від –10 °C до –1 °C	0	0	11	15	13	5	44
від 0 °C до 10 °C	10	19	12	13	19	47	120

Діапазон температури повітря, °C	Діапазон вологості повітря, %						Усього днів
	0–40	41–60	61–70	71–80	81–90	91–100	
від 11 °C до 20 °C	23	27	15	6	10	2	83
від 21 °C до 30 °C	57	32	6	2	1	0	98
більше за 31 °C	9	4	0	0	0	0	13
Разом днів	99	83	45	39	45	54	365

Обчисліть відносну частоту спостереження:

- 1) температури повітря в діапазоні від 11 °C до 20 °C серед тих днів, коли зафіксована вологість не перевищувала 40 %;
- 2) вологості повітря в діапазоні від 71 % до 80 % серед тих днів, коли зафіксована температура була меншою від 0 °C;
- 3) температури повітря в діапазоні від 21 °C до 30 °C та одночасно вологості повітря в діапазоні від 41 % до 70 %.

1158.* У таблиці наведено дані про кількість моделей смартфонів, що продавалися в українських інтернет-магазинах електроніки в 2023 р., залежно від ціни та ємності акумуляторної батареї.

Ємність акумулятора, мА·год	Діапазон цін, грн					Разом
	до 5000	5000–10 000	10 000–20 000	20 000–30 000	від 30 000	
3999 і менша	130	121	131	184	176	742
4000–4999	181	130	318	173	170	972
5000–5999	389	869	388	81	108	1835
6000 і більша	60	211	60	18	20	369
Разом	760	1331	897	456	474	3918

Обчисліть відносну частоту того, що вибрана модель смартфона:

- 1) має ємність акумуляторної батареї від 3999 мА·год і меншу серед моделей смартфонів у ціновому діапазоні 20–30 тис. грн;
- 2) перебуває в ціновому діапазоні 5–10 тис. грн серед моделей смартфонів, які мають ємність акумуляторної батареї понад 4000 мА·год
- 3) має ємність акумуляторної батареї від 4000 до 5999 мА·год та одночасно перебуває в ціновому діапазоні від 5–30 тис. грн.

1159.* (Домашня практична робота) Експеримент полягає в підкиданні кнопки. Кнопка може впасти як вістрям донизу, так і на шлямку (рис. 98). Підкиньте кнопку: 1) 10 разів; 2) 20 разів; 3) 50 разів; 4) 100 разів; 5) 200 разів. Результати, отримані в п’яти серіях експериментів, внесіть у таблицю:

Номер серії	1	2	3	4	5
Кількість експериментів (підкидань) у серії	10	20	50	100	200
Кількість падінь кнопки вістрям донизу					
Кількість падінь кнопки вістрям догори					

У кожній із п’яти серій експериментів обчисліть відносну частоту падіння кнопки вістрям догори та оцініть ймовірність настання цієї події. Яка подія більш ймовірна: «кнопка впаде вістрям донизу» або «кнопка впаде вістрям догори»?



Рис. 98

1160.* (Домашня практична робота) Експеримент полягає в підкиданні двох монет. Проведіть цей експеримент: 1) 10 разів; 2) 20 разів; 3) 50 разів; 4) 150 разів. Результати, отримані в кожній із чотирьох серій експериментів, внесіть у таблицю:

Номер серії	1	2	3	4
Кількість експериментів (підкидань) у серії	10	20	50	150
Кількість експериментів, у яких випало два герби				
Кількість експериментів, у яких випав рівно один герб				
Кількість експериментів, у яких не випало жодного герба				

У кожній із чотирьох серій експериментів обчисліть відносну частоту випадкової події:

- 1) випадіння двох гербів;
- 2) випадіння тільки одного герба;
- 3) випадіння двох чисел.

Чи можна на підставі цих спостережень зробити припущення, що подія «випав рівно один герб» є більш ймовірною, ніж подія «не випало жодного герба»? На чому базується таке припущення? Чи можна з огляду на ці спостереження гарантувати, що перша з названих подій є більш ймовірною, ніж друга?

1161.* (Домашня практична робота) Виберіть на вмання одну сторінку з повісті Івана Франка «Захар Беркут». Полічіть, скільки разів на цій сторінці трапляються букви «н», «о», «р», «я», «ю», «є», а також скільки всього на ній букв. Оцініть ймовірність появи цих букв у вибраному тексті. Спробуйте знайти зв'язок між розташуванням цих букв на стандартній клавіатурі (рис. 99) та отриманими результатами.



Рис. 99

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1162. Доведіть, що значення виразу $2^{36} + 4^{100} - 2^{32} - 4^{98}$ кратне числу: 1) 15; 2) 240.

1163. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-8)^2 - (x-4)(x+4) = 0$;

2) $(4x-5)(4x+5) - (4x-1)^2 = 9 - 2x$.

1164. Розкладіть на множники:

1) $6x^3 - 8x^2 + 3xy - 4y$;

2) $x^4 - 6x^2y + 9y^2 - 16$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

1165. Знайдіть усі цілі числа x і y , при яких виконується рівність $x + y = xy$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4**Статистика**

Статистика — наука про збирання, обробку й аналіз даних (інформації), які характеризують масові явища.

Генеральна сукупність

Генеральною сукупністю називають сукупність усіх об'єктів, з якої формується вибірка і відносно якої роблять статистичний висновок.

Випадкова подія

Випадковою подією називають такий результат спостереження або експерименту, який за дотримання даного комплексу умов може відбутися, а може й не відбутися.

Відносна частота випадкової події

Відносна частота = $\frac{\text{кількість появ досліджуваної події}}{\text{кількість випробувань (спостережень)}}$

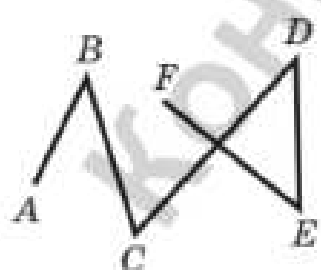
Розділ 2. ГЕОМЕТРІЯ

§5 НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

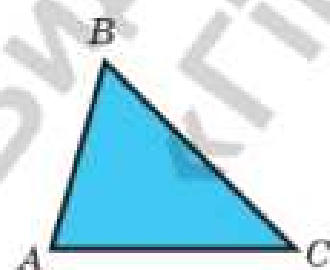
У цьому параграфі ви розглянете знайомі вам з попередніх класів геометричні фігури, а саме: точки, прямі, відрізки, промені й кути. Дізнаєтеся більше про властивості цих фігур. Деякі із цих властивостей навчитеся **доводити**. Слова **означення**, **теорема**, **аксіома** стануть для вас звичними, зрозумілими та часто вживаними.

34. Що вивчає геометрія?

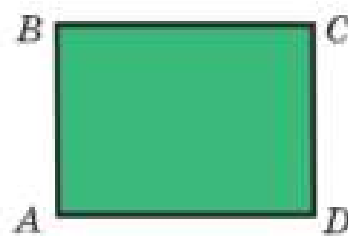
На уроках математики в попередніх класах ви вже ознайомилися з азами геометрії. Так, усі геометричні фігури, зображені на рисунках 100 і 101, вам добре відомі.



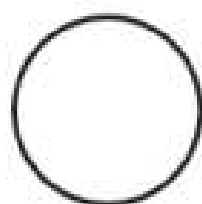
Ламана $ABCDEF$



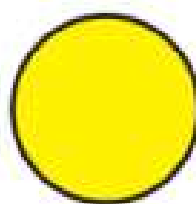
Трикутник ABC



Прямокутник $ABCD$



Коло



Круг

Рис. 100

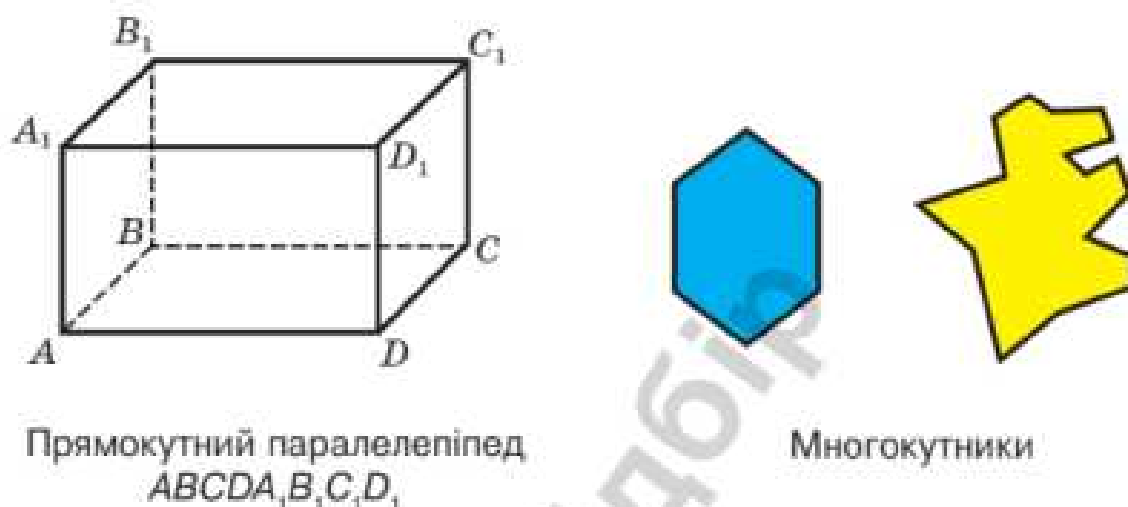


Рис. 101

Ви вмієте за допомогою лінійки сполучати дві точки відрізком (рис. 102), за допомогою циркуля будувати коло (рис. 103), за допомогою лінійки й косинця будувати перпендикулярні та паралельні прямі (рис. 104), вимірювати довжину відрізка й будувати відрізок заданої довжини за допомогою лінійки з міліметровими поділками (рис. 105), знаходити величину кута й будувати кут заданої величини за допомогою транспортира (рис. 106), класифікувати трикутники (див. форзац).

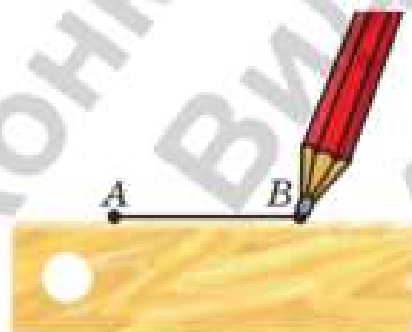


Рис. 102



Рис. 103

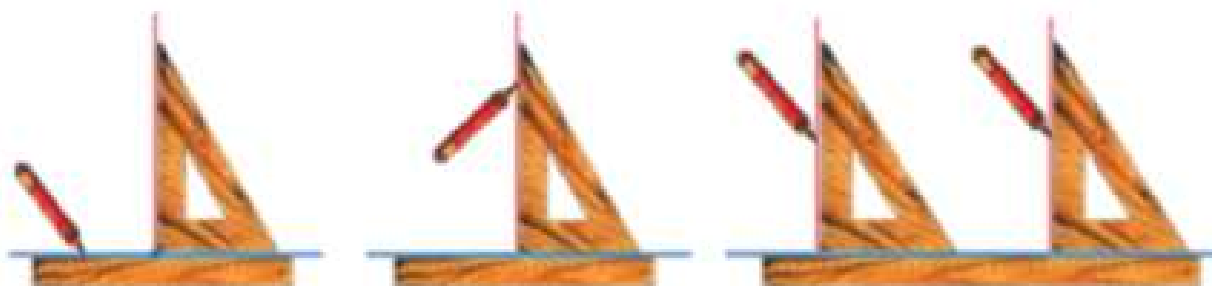


Рис. 104

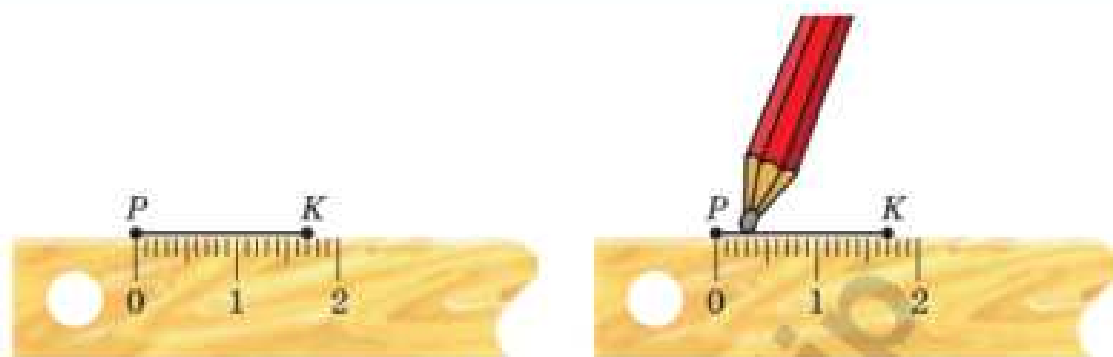


Рис. 105

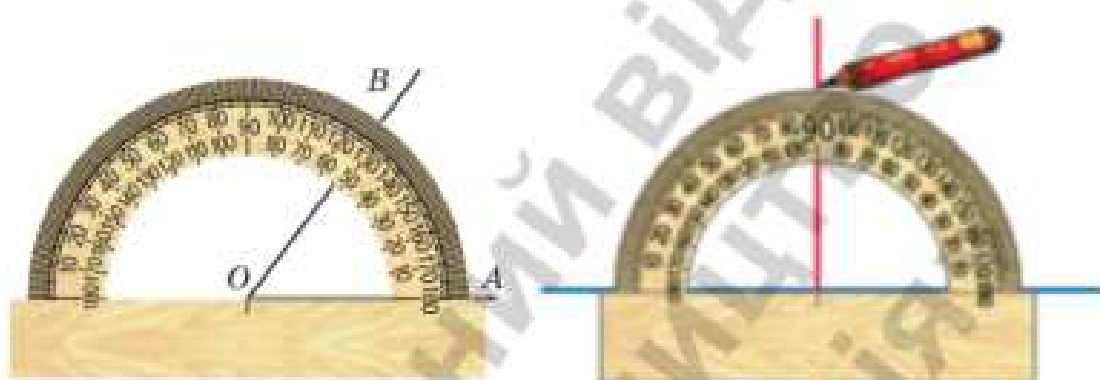


Рис. 106

Однак знати, який «вигляд» має фігура, або вміти виконувати прості побудови — це лише початкові знання *науки про властивості геометричних фігур, тобто геометрії*.

Під час вивчення *систематичного курсу* геометрії ви поступово, у певній послідовності вивчатимете властивості геометричних фігур, а отже, і самі фігури, як уже знайомі вам, так і нові. Це означає, що ви маєте навчитися за певними властивостями фігури встановлювати та, головне, доводити інші її властивості.

Шкільний курс геометрії традиційно поділяють на *планіметрію* та *стереометрію*. Планіметрія вивчає фігури на площині («планум» у перекладі з латинської — «площина»), стереометрія — фігури в просторі («стереос» у перекладі з грецької — «просторовий»).

Отже, ми приступаємо до вивчення планіметрії.

35. Точки та прямі

Точка — найпростіша геометрична фігура. Це єдина фігура, яку неможливо розбити на частини. Наприклад, кожна з фігур, зображених на рисунку 107, розбита на частини. І навіть про фігуру, зображену на рисунку 108, яка складається з двох точок, можна сказати, що вона складається з двох частин: точки A й точки B .

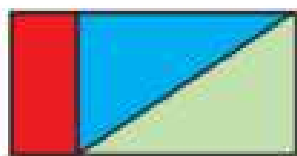


Рис. 107

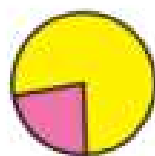


Рис. 108

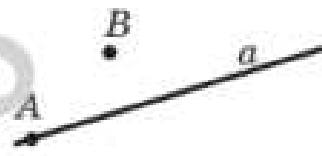


Рис. 109

На рисунку 109 зображено пряму a та дві точки A і B . Говорять, що *точка A належить прямій a* , або *точка A лежить на прямій a* , або *пряма a проходить через точку A* , і, відповідно, *точка B не належить прямій a* , або *точка B не лежить на прямій a* , або *пряма a не проходить через точку B* .

Пряма — це геометрична фігура, яка має певні властивості.

Основна властивість прямої. Через будь-які дві точки¹ можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Чому цю властивість прямої вважають основною?

Нехай про деяку лінію відомо лише те, що вона про-

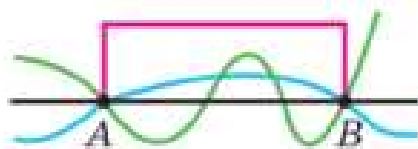


Рис. 110

ходить через точки A і B . Для того щоб скласти уявлення про цю фігуру, такої інформації явно бракує. Адже через точки A і B можна провести багато різних ліній (рис. 110).

¹ Тут і далі, говорячи «дві точки», «три точки», «дві прямі» тощо, вважатимемо, що це різні точки й різні прямі. Випадок їх суміщення будемо обумовлювати окремо.

Пряма ж задається цими точками однозначно. У цьому й полягає суть основної властивості прямої.

Ця властивість дозволяє позначати пряму, називаючи дві будь-які її точки. Так, пряму, проведену через точки M і N , називають «пряма MN » (або «пряма NM »).

Основну властивість геометричної фігури ще називають аксіомою (докладніше про аксіоми ви дізнаєтеся в п. 40).

Якщо треба пояснити зміст якогось поняття (терміна), то використовують **означення**. Наприклад:

1) годинником називають прилад для вимірювання часу;

2) геометрія — це розділ математики, який вивчає властивості фігур.

Означення є і в геометрії.

Означення. Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.

На рисунку 111 зображено прямі a і b , які перетинаються в точці O .

Часто справедливість (істинність) якого-небудь факту встановлюють за допомогою *логічних міркувань*.

Розглянемо таку задачу. Відомо, що всі мешканці Геометричної вулиці — математики та математикині. Євген живе за адресою вул. Геометрична, 5. Чи є Євген математиком?

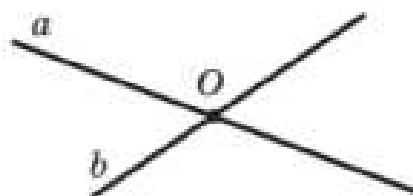


Рис. 111

За умовою задачі Євген живе на Геометричній вулиці. А оскільки всі мешканці цієї вулиці математики та математикині, то Євген — математик.

Наведені логічні міркування називають **доведенням** того факту, що Євген — математик.

У математиці твердження, істинність якого встановлюють за допомогою доведення, називають теоремою.

Теорема 35.1. *Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.*

Доведення. ☉ Нехай прямі a і b , що перетинаються, крім спільної точки A , мають ще одну спільну точку B (рис. 112). Тоді через дві точки A і B проходять дві прямі. А це суперечить основній властивості прямої. Отже, припущення про існування другої точки перетину прямих a і b неправильне. ●



Рис. 112

?

1. Яку фігуру не можна розбити на частини? 2. Сформулюйте основну властивість прямої. 3. Яка властивість прямої дозволяє позначити її, називаючи будь-які дві точки прямої? 4. Для чого використовують означення? 5. Які дві прямі називають такими, що перетинаються? 6. Як називають твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення? 7. Сформулюйте теорему про дві прямі, що перетинаються.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1166.° Проведіть пряму, позначте її буквою m . Позначте точки A і B , які лежать на цій прямій, і точки C , D , E , які не лежать на ній.

1167.° Позначте точки M і K та проведіть через них пряму. Позначте на цій прямій точку E . Запишіть усі можливі позначення отриманої прямої.

1168.° Проведіть прямі a і b так, щоб вони перетиналися. Позначте точку їхнього перетину буквою C . Чи належить точка C прямій a ? прямій b ?

1169.° Позначте три точки так, щоб вони не лежали на одній прямій, і через кожну пару точок проведіть пряму. Скільки утворилося прямих?

1170.° Позначте чотири точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій.

1171.* Проведіть три прямі так, щоб кожні дві з них перетиналися. Позначте точки перетину цих прямих. Скільки можна отримати точок перетину?

1172.* Позначте чотири точки так, щоб при проведенні прямої через кожні дві з них на рисунку:

- 1) утворилася одна пряма;
- 2) утворилися чотири прямі;
- 3) утворилися шість прямих.

Проведіть ці прямі.

ВПРАВИ

1173.° Користуючись рисунком 113:

- 1) визначте, чи перетинаються прямі a і $МК$;
- 2) укажіть усі позначені точки, які належать прямій a ; прямій $МК$;
- 3) укажіть усі позначені точки, які не належать прямій a ; прямій $МК$;
- 4) укажіть усі позначені точки, які належать прямій a , але не належать прямій $МК$.

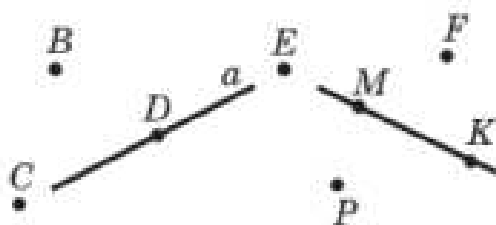


Рис. 113

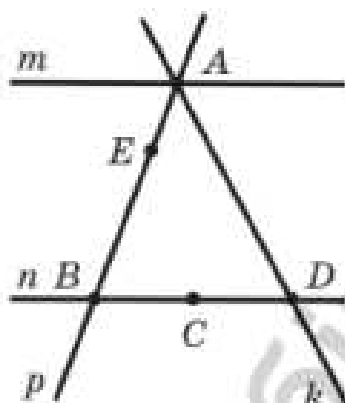


Рис. 114

1174.° Користуючись рисунком 114, укажіть:

- 1) які з позначених точок належать прямій p , а які не належать їй;
- 2) яким прямим належить точка A ; точка B ; точка C ; точка D ; точка E ;
- 3) які прямі проходять через точку C ; точку B ; точку A ;
- 4) у якій точці перетинаються прямі k і p ; прямі m і k ;
- 5) у якій точці перетинаються три із чотирьох зображених на рисунку прямих.

1175.* Точка C належить прямій AB . Чи є різними прямі AB і AC ? Відповідь обґрунтуйте.

1176.* Проведи чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються, причому через кожну точку перетину проходять тільки дві прямі. Скільки точок перетину при цьому утворилося?

1177.* Як треба розташувати шість точок, щоб вони визначали шість прямих?

1178.* Дану пряму перетинають чотири прямі. Скільки може утворитися точок перетину цих прямих з даною?

1179.* Проведи чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються. Скільки точок перетину може утворитися?

1180.* Провели п'ять прямих, кожні дві з яких перетинаються. Яка найменша можлива кількість точок перетину цих прямих? Яка найбільша кількість точок перетину може утворитися?

1181.* Чи можна провести шість прямих і позначити на них 11 точок так, щоб на кожній прямій було позначено рівно чотири точки?

1182.* На площині проведено три прямі. На першій прямій позначили п'ять точок, на другій — сім точок, а на третій — три точки. Яка найменша кількість точок може бути позначена?

1183.* Чи можна позначити кілька точок і провести кілька прямих так, щоб на кожній прямій лежало рівно три позначені точки й через кожен точку проходило рівно три з проведених прямих?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1184. Чи має корені рівняння:

1) $x^2 = 0$; 2) $x^2 = -1$; 3) $|x| = x$; 4) $|x| = -x$?

У разі ствердної відповіді вкажіть їх.

1185. Доведіть тотожність:

1) $(6x - 8) - 5x - (4 - 9x) = 10x - 12$;

2) $-0,2(4b - 9) + 1,4b = 0,6b + 1,8$.

1186. В одному мішку було 80 кг цукру, а в другому — 60 кг. З першого мішка взяли в 3 рази більше цукру, ніж із другого, після чого в другому мішку залишилося цукру у 2 рази більше, ніж у першому. Скільки кілограмів цукру взяли з кожного мішка?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

1187. Правильність виготовлення лінійки можна перевірити так. Через дві точки за допомогою лінійки провести лінію. Потім лінійку перевернути і через ті самі точки вздовж того самого краю лінійки знову провести ще одну лінію. Якщо лінії збігатимуться, то лінійку виготовлено правильно. Поясніть чому.

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

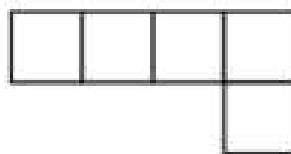


Рис. 115

1188. Складіть квадрат із кількох фігур, кожна з яких дорівнює фігурі, зображеній на рисунку 115.

36. Відрізок і його довжина

На рисунку 116 зображено пряму a , яка проходить через точки A і B . Ці точки обмежують частину прямої a , яку виділено червоним кольором. Таку частину прямої разом з точками A і B називають **відрізком**, а точки A і B — **кінцями** цього відрізка.

Для будь-яких двох точок існує *єдиний* відрізок, для якого ці точки є кінцями, тобто *відрізок своїми кінцями задається однозначно*. Тому відрізок позначають, називаючи його кінці. Наприклад, відрізок, зображений на рисунку 117, позначають так: MN або NM (читають: «відрізок MN » або «відрізок NM »).

На рисунку 118 зображено відрізок AB і точку X , яка належить цьому відрізку, проте не збігається із жодним його кінцем. Точку X називають **внутрішньою точкою** відрізка AB . У такому випадку також говорять, що точка X **лежить між точками A і B** .

Таким чином, відрізок AB складається з точок A і B , а також усіх точок прямої AB , які лежать між точками A і B .

Означення. Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 119 зображено рівні відрізки AB і CD . Записують: $AB = CD$.



Рис. 116



Рис. 117



Рис. 118

Ви знаєте, що кожний відрізок має певну довжину й для її вимірювання треба вибрати одиничний відрізок. За одиничний можна взяти будь-який відрізок.

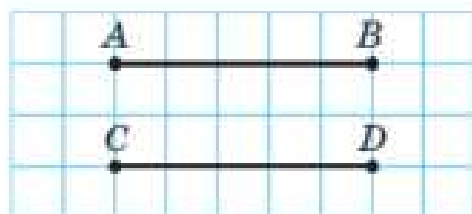


Рис. 119

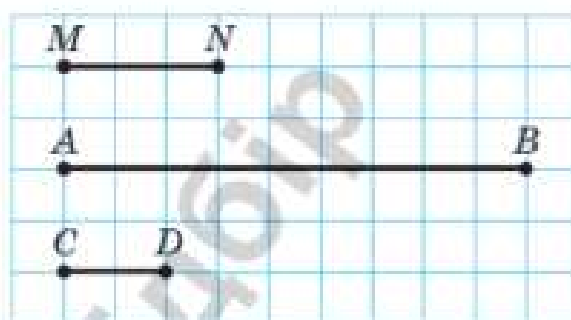


Рис. 120

Наприклад, вважатимемо відрізок MN на рисунку 120 одиничним. Цей факт записують так: $MN = 1$ од. Тоді вважають, що довжина відрізка AB дорівнює трьом одиницям довжини, і записують: $AB = 3$ од. Також вживають запис $AB = 3$, його читають: «відрізок AB дорівнює трьом».

Для відрізка CD маємо: $CD = \frac{2}{3}$.

На практиці найчастіше використовують такі одиничні відрізки: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Залежно від вибору одиниці довжини змінюється числове значення довжини відрізка.

Наприклад, на рисунку 121 маємо: $AB = 17$ мм, або $AB = 1,7$ см, або $AB = 0,17$ дм тощо.



Рис. 121

У виробництві та в побуті використовують різноманітні прилади та інструменти для вимірювання довжини відрізка (рис. 122): лінійку з поділками, рулетку, штангенциркуль, мікрометр, польовий циркуль.

Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.



Якщо довжина відрізка AB більша за довжину відрізка MN , як, наприклад, на рисунку 120, то говорять, що відрізок AB більший за відрізок MN , і записують: $AB > MN$. Також можна сказати, що відрізок MN менший від відрізка AB , і записати: $MN < AB$.

Надалі, говорячи «сума відрізків», матимемо на увазі суму довжин цих відрізків.

Основна властивість довжини відрізка.

Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB , то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB (рис. 123), тобто

$$AB = AC + CB.$$



Рис. 123

Означення. Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB . Якщо точки A і B збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю.

Означення. Серединою відрізка AB називають таку його точку C , що $AC = CB$.

На рисунку 124 точка C — середина відрізка AB .

Часто замість «Знайдіть довжину відрізка...» говорять «Знайдіть відрізок...».



Рис. 124



Рис. 125

Задача. Точки A , B і C належать одній прямій, $AB = 8$ см, відрізок AC на 2 см довший за відрізок BC . Знайдіть відрізки AC і BC .

Розв'язання. В умові не вказано, яким є взаємне розміщення даних точок на прямій. Тому розглянемо три можливих випадки.

1) Точка B — внутрішня точка відрізка AC (рис. 125). Тоді відрізок AC довший за відрізок BC на довжину відрізка AB , тобто на 8 см. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

2) Точка C — внутрішня точка відрізка AB (рис. 126). У цьому випадку $AB + BC = AC$. Нехай $BC = x$ см, тоді $AC = (x + 2)$ см. Маємо:

$$x + 2 + x = 8;$$

$$x = 3.$$

Отже, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см.



Рис. 126



Рис. 127

3) Точка A — внутрішня точка відрізка BC (рис. 127). У цьому випадку $AB + AC = BC$ і тоді $AC < BC$. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

Відповідь: $AC = 5$ см, $BC = 3$ см. ◀



1. Скільки існує відрізків, кінцями яких є дві дані точки? 2. Які два відрізки називають рівними? 3. Чи можна будь-який відрізок узяти за одиничний? 4. Що можна сказати про довжини рівних відрізків? 5. Що можна сказати про відрізки, які мають рівні довжини? 6. Сформулюйте основну властивість довжини відрізка. 7. Що називають відстанню між двома точками? 8. Яку точку називають серединою відрізка AB ?



У словах на означення довжини, складовою частиною яких є слово «метр», наголошуємо останній склад: *міліметр, сантиметр, дециметр*. А от у назвах вимірювальних приладів наголос падає на передостанній склад: *барометр, спідометр, термометр, мікрометр*.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1189.° Позначте дві точки A і B та проведіть через них пряму. Позначте точки C , D і E , які належать відрізку AB , і точки F , M і K , які не належать відрізку AB , але належать прямій AB .

1190.° Проведіть пряму та позначте на ній три точки. Скільки утворилося відрізків?

1191.° Позначте на прямій точки A , B , C і D так, щоб точка C лежала між точками A і B , а точка D — між точками B і C .

1192.° Позначте на прямій точки A , B і C так, щоб виконувалася рівність $AC = AB + BC$.

ВПРАВИ

1193.° Назвіть усі відрізки, які зображено на рисунку 128.

1194.° Запишіть усі відрізки, які зображено на рисунку 129.

1195.° Знайдіть довжину кожного з відрізків, зображених на рисунку 130, якщо одиничний відрізок дорівнює відрізку: 1) AB ; 2) MN .

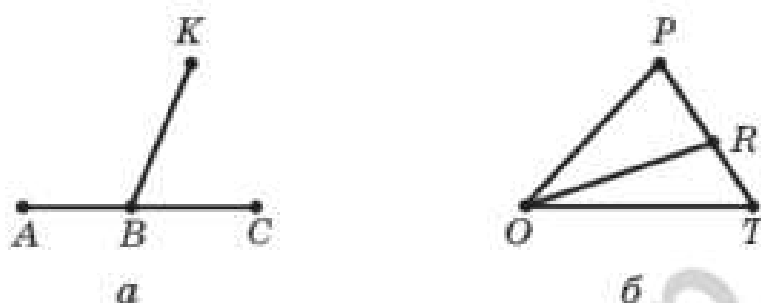


Рис. 128



Рис. 129

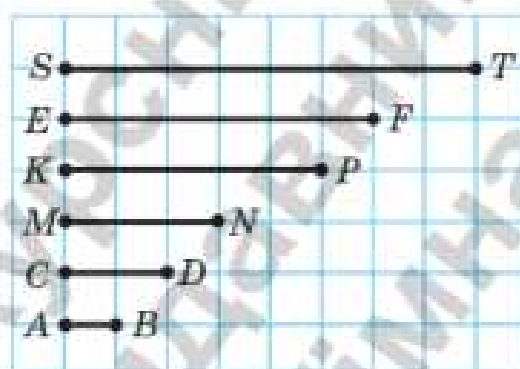


Рис. 130

1196.° Яка з точок, позначених на рисунку 131, лежить між двома іншими? Запишіть відповідну рівність, що випливає з основної властивості довжини відрізка.

1197.° Між якими точками лежить точка B (рис. 132)? Для кожного випадку запишіть відповідну рівність, яка випливає з основної властивості довжини відрізка.

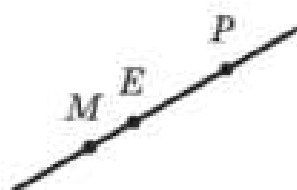


Рис. 131

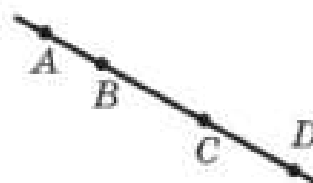


Рис. 132

1198.° Точка D — внутрішня точка відрізка ME . Знайдіть:

- 1) відстань між точками M і E , якщо $MD = 1,8$ дм, $DE = 2,6$ дм;
- 2) довжину відрізка MD , якщо $ME = 42$ мм, $DE = 1,5$ см.

1199.° Точки A , B і C лежать на одній прямій (рис. 133). Яке з наведених тверджень правильне:

- 1) $AB + BC = AC$;
- 2) $AC + AB = BC$?

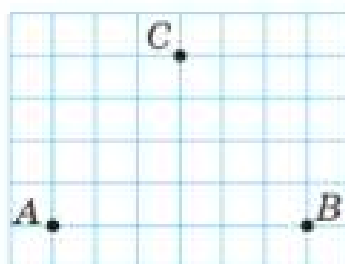


Рис. 133

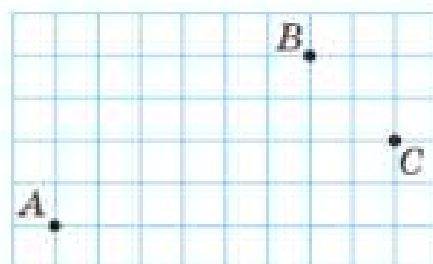
1200.° Точка K є серединою відрізка MN . Чи можна сумістити накладанням: 1) відрізки MK і KN ; 2) відрізки MK і MN ?

1201.° Точка K — середина відрізка MN , точка E — середина відрізка KN , $EN = 5$ см. Знайдіть відрізки MK , ME і MN .

1202.° На папері в клітинку позначено точки A , B і C (рис. 134). Знайдіть відстань від точки C до середини відрізка AB , якщо довжина сторони клітинки дорівнює 5 мм.



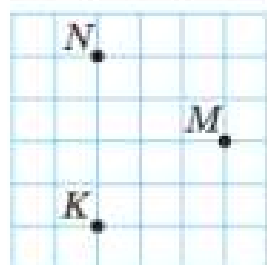
а



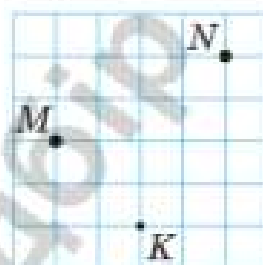
б

Рис. 134

1203.° На папері в клітинку позначено точки M , N і K (рис. 135). Знайдіть відстань від точки M до середини відрізка NK , якщо довжина сторони клітинки дорівнює 5 мм.



а



б

Рис. 135

1204.° Точка C — внутрішня точка відрізка AB , довжина якого дорівнює 20 см. Знайдіть відрізки AC і BC , якщо:

- 1) відрізок AC на 5 см більший за відрізок BC ;
- 2) відрізок AC у 4 рази менший від відрізка BC ;
- 3) $AC : BC = 9 : 11$.

1205.° Точка K належить відрізку CD , довжина якого дорівнює 28 см. Знайдіть відрізки CK і KD , якщо:

- 1) відрізок CK на 4 см менший від відрізка KD ;
- 2) відрізок CK у 6 разів більший за відрізок KD ;
- 3) $CK : KD = 3 : 4$.

1206.* Відрізки AB і CD рівні (рис. 136). Доведіть, що відрізки AC і BD теж рівні.



Рис. 136



Рис. 137

1207.* Відрізки ME і FN рівні (рис. 137). Доведіть, що $MF = EN$.

1208.* Точка C ділить відрізок AB , довжина якого дорівнює a , на два відрізки. Знайдіть відстань між серединами відрізків AC і BC .

1209.* Точки A , B і C лежать на одній прямій. Знайдіть відрізок BC , якщо $AB = 24$ см, $AC = 32$ см. Скільки розв'язків має задача?

1210.** На прямій позначено точки A , B і C так, що $AB = 15$ см, $AC = 9$ см. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і AC .

1211.** Відрізок EF дорівнює 12 см. Знайдіть на прямій EF усі точки, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка EF дорівнює: 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 10 см.

1212.** Через точки A і B проведено пряму. Де на цій прямій лежить точка C , відстань від якої до точки B у 2 рази більша, ніж відстань від неї до точки A ?

1213.** Відрізок, довжина якого дорівнює 32 см, поділили на три нерівних відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 18 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.

1214.** Скільки точок треба позначити на прямій AB між точками A і B , щоб разом з відрізком AB утворилося шість відрізків?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1215. Розв'яжіть рівняння:

1) $9(2x - 1) - 5(11 - x) = 3(x + 4)$;

2) $5x - 26 = 12x - 7(x - 4)$.

1216. Доведіть тотожність:

1) $\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{8}x + 6\right) - \frac{1}{6}\left(24 - 1\frac{1}{2}x\right) = 0$;

2) $\frac{1}{9}(3y - 27) - 2\left(\frac{1}{12}y - 1,5\right) = \frac{1}{6}y$.

1217. Цукерки за ціною 210 грн за 1 кг змішали із цукерками за ціною 285 грн за 1 кг і отримали суміш за ціною 240 грн за 1 кг. Яка маса цукерок кожного виду міститься в 1 кг суміші?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

1218. Порівняйте на око відрізки AB і CD (рис. 138). Перевірте свій висновок вимірюванням.

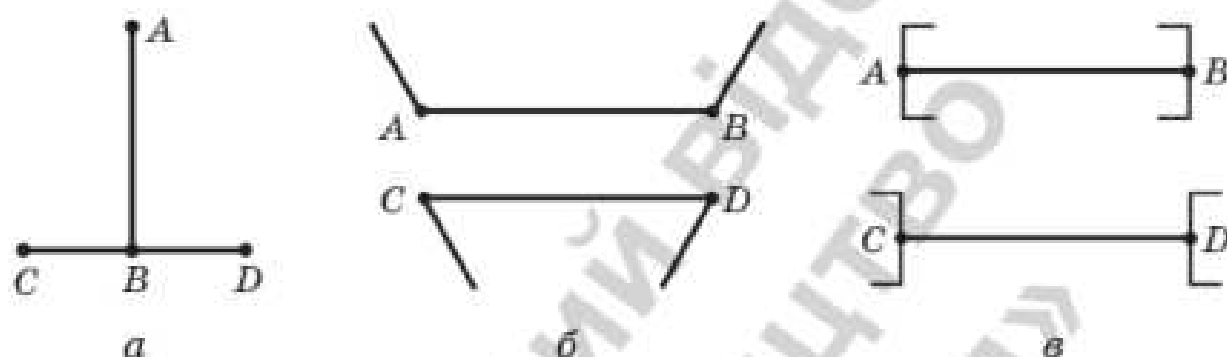


Рис. 138

1219. Порівняйте на око відрізки AB і BC (рис. 139). Перевірте свій висновок вимірюванням.

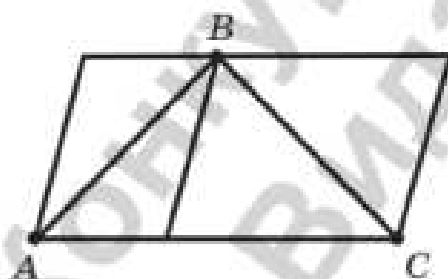


Рис. 139



Рис. 140

1220. На шкалі лінійки з часом стерлися деякі поділки й залишилися тільки поділки 0 см, 5 см і 13 см (рис. 140). Як, користуючись цією лінійкою, можна побудувати відрізок завдовжки: 1) 3 см; 2) 2 см; 3) 1 см?

1221. На шкалі лінійки з часом стерлися деякі поділки й залишилися тільки поділки 0 см, 7 см і 11 см. Як, користуючись цією лінійкою, можна побудувати відрізок завдовжки: 1) 8 см; 2) 5 см?

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

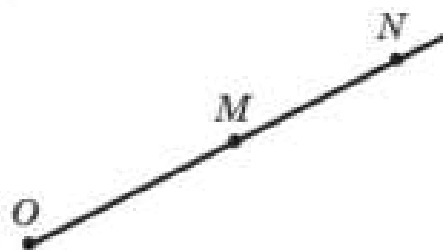
1222. Із прямокутників розмірами 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×13 складіть прямокутник, кожна сторона якого більша за 1.

**37. Промінь. Кут.
Вимірювання кутів**

Проведемо пряму AB і позначимо на ній довільну точку O . Ця точка розбиває пряму на дві частини, які виділено на рисунку 141 різними кольорами. Кожну із цих частин разом з точкою O називають променем або півпрямною. Точку O називають початком променя.

Кожний із променів, які зображено на рисунку 141, складається з точки O та всіх точок прямої AB , що лежать по один бік від точки O .

Це дає змогу позначати промінь, називаючи дві його точки: першою обов'язково вказують початок променя, другою — будь-яку іншу точку, яка належить променю. Так, промінь з початком у точці O (рис. 142) можна позначити OM або ON .

**Рис. 141****Рис. 142**

Промені OA та OB (рис. 141) доповнюють один одного до прямої. Також можна сказати, що об'єднанням цих променів є пряма.

Означення. Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.

Наприклад, промені BC і BA — доповняльні (рис. 143). Їхнім об'єднанням є пряма AC . Зауважимо, що, об'єднавши промені CA та AC , ми також отримаємо пряму AC . Проте ці промені не є доповняльними: у них немає спільного початку.



Рис. 143

На рисунку 144, а зображено фігуру, яка складається з двох променів OA та OB , що мають спільний початок. Ця фігура ділить площину на дві частини, які виділено різними кольорами. Кожну із цих частин разом із променями OA та OB називають кутом.

Промені OA та OB називають сторонами кута, а точку O — вершиною кута.



Рис. 144

Як бачимо, кути на рисунку 144, а зовні суттєво відрізняються. Ця відмінність визначена такою властивістю. На променях OA та OB виберемо довільні точки M і N (рис. 144, б). Відрізок MN належить «пурпуровому» куту, а «блакитному» куту належать лише кінці відрізка.

Надалі, говорячи «кут», матимемо на увазі лише той із них, який містить будь-який відрізок із кінцями на його сторонах. Ситуації, коли розглядатимуться кути, для яких ця умова не виконується, будуть спеціально обумовлені.

Існує кілька способів позначення кутів. Кут на рисунку 145 можна позначити так: $\angle MON$, або $\angle NOM$, або просто $\angle O$ (читають відповідно: «кут MON », «кут NOM », «кут O »).

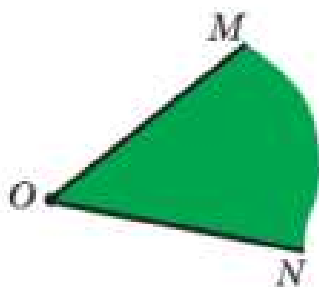


Рис. 145

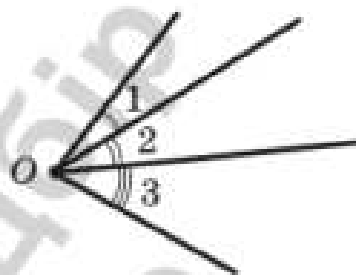


Рис. 146

На рисунку 146 зображено кілька кутів, які мають спільну вершину. Тут позначення кута однією буквою може призвести до плутанини. У таких випадках кути зручно позначати за допомогою цифр: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (читають відповідно: «кут один», «кут два», «кут три»).

Означення. Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.

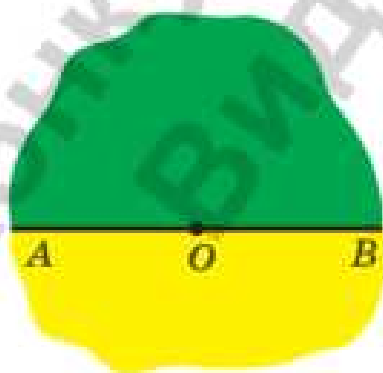


Рис. 147



Рис. 148

На рисунку 147 промені OA та OB є доповняльними, тому кути, виділені зеленим і жовтим кольорами, є розгорнутими.

Будь-яка пряма ділить площину на дві півплощини, для яких ця пряма є межею (рис. 148). Вважають,

що пряма належить кожній із двох півплощин, для яких вона є межею. А оскільки сторони розгорнутого кута утворюють пряму, то можна сказати, що розгорнутий кут — це півплощина, на межі якої позначено точку — вершину кута.

Означення. Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 149 зображено рівні кути ABC і MNK .

Записують: $\angle ABC = \angle MNK$.

Будь-які два розгорнутих кути суміщаються при накладанні, тому всі розгорнуті кути рівні.

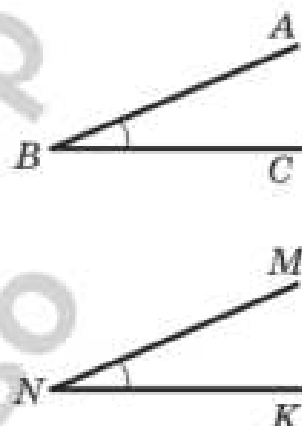


Рис. 149

Основна властивість відкладання кутів. Для даного кута ABC і даного променя B_1C_1 існує єдиний кут $A_1B_1C_1$, який дорівнює куту ABC , такий, що точка C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої B_1C_1 (рис. 150).

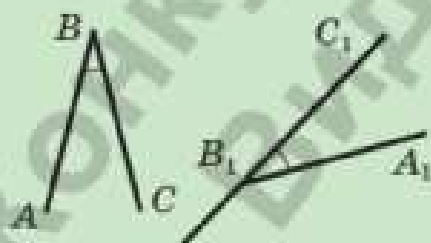


Рис. 150



Рис. 151

На рисунку 151 зображено кут AOB і промінь OC , який належить цьому куту, проте відмінний від його сторін. Говорять, що промінь OC *проходить між сторонами кута* AOB і ділить його на два кути AOC і COB .

Означення. Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

На рисунку 152 промінь OK — бісектриса кута AOB . Отже, $\angle AOK = \angle KOB$.

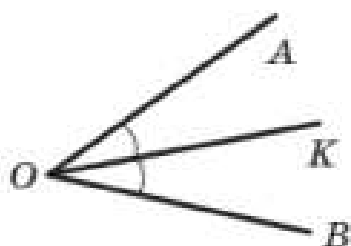


Рис. 152

Ви знаєте, що кожний кут має величину. Для її вимірювання треба вибрати одиницю виміру — **одиничний кут**. Вибрати його можна, наприклад, так. Розділимо розгорнутий кут на 180 рівних кутів (рис. 153). Кут, утворений двома сусідніми променями, беруть за одиничний. Його

величину називають **градусом** і записують: 1° .

Наприклад, градусна міра (величина) кута AOB (рис. 154) дорівнює 20° (цей факт легко встановити за допомогою транспортира). У цьому випадку говорять «кут AOB дорівнює 20° » і записують: $\angle AOB = 20^\circ$.

Із прийнятого означення градуса випливає, що *градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°* .



Рис. 153

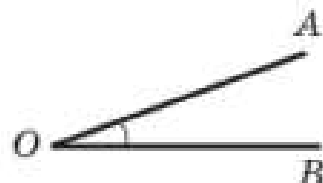


Рис. 154

На рисунку 155, а зображено старовинний кутомірний прилад астролябію (у перекладі з грецької — «та, що хапає зорі»). Багато століть саме такий прилад допомагав мореплавцям знаходити шлях, а астрономам — визначати положення зір. У наш час для вимірювання кутів на практиці використовують астролябію (рис. 155, б), а також інші прилади спеціального призначення: теодоліт (рис. 156) — для вимірювання

на місцевості, бусоль (рис. 157) — в артилерії, секстант (рис. 158) — у морській справі.

*а**б*

Рис. 155. Астролябія:
а — старовинна;
б — сучасна



Рис. 156. Теодоліт



Рис. 157. Бусоль



Рис. 158. Секстант

Для отримання більш точних результатів вимірювання кутів використовують частки градуса: $\frac{1}{60}$ градуса дорівнює одній хвилині ($1'$), тобто $1^\circ = 60'$; $\frac{1}{60}$ хвилини називають секундою ($1''$), тобто $1' = 60''$.

Наприклад, запис $23^\circ 15' 11''$ означає, що градусна міра кута становить 23 градуси 15 хвилин 11 секунд.

Існують також інші одиниці виміру кутів: наприклад, у морській справі користуються одиницею румб ($1 \text{ румб} = 11^\circ 15'$).

Означення. Кут, градусна міра якого дорівнює 90° , називають прямим. Кут, градусна міра якого менша від 90° , називають гострим. Кут, градусна міра якого більша за 90° , але менша від 180° , називають тупим.

На рисунку 159 зображено кути кожного з трьох указаних видів.



Рис. 159

Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.

Якщо величина кута ABC більша за величину кута MNP , то говорять, що кут ABC більший за кут MNP , і записують: $\angle ABC > \angle MNP$. Також говорять, що кут MNP менший від кута ABC , і записують:

$$\angle MNP < \angle ABC.$$

Надалі, говорячи «сума кутів», матимемо на увазі суму величин цих кутів.

Основна властивість величини кута. Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB , то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ (рис. 160).

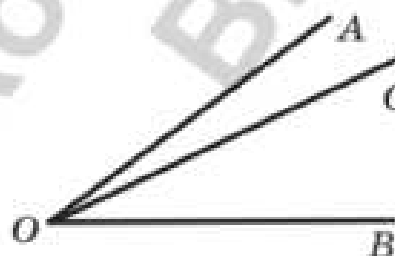


Рис. 160

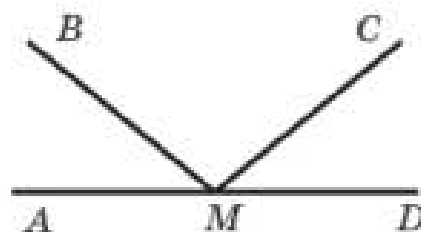


Рис. 161

Задача. На рисунку 161 кут AMD — розгорнутий, $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118^\circ$. Знайдіть кут¹ AMB .

¹ Часто замість «Знайдіть градусну міру кута...» говорять «Знайдіть кут...».

Розв'язання. Маємо: $\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$,
 $\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC$.

Оскільки $\angle AMC = \angle DMB$, то $\angle AMB = \angle DMC$.

Запишемо: $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180^\circ$.

Тоді $2\angle AMB + 118^\circ = 180^\circ$.

Звідси $\angle AMB = 31^\circ$.

Відповідь: 31° . ◀



1. Які два промені називають доповняльними? 2. Який кут називають розгорнутим? 3. Які два кути називають рівними? 4. Що називають бісектрисою кута? 5. У яких одиницях вимірюють кути? 6. Яка градусна міра розгорнутого кута? 7. Як називають кут, градусна міра якого дорівнює 90° ? 8. Який кут називають гострим? Який кут називають тупим? 9. Що можна сказати про величини рівних кутів? 10. Що можна сказати про кути, величини яких рівні? 11. Сформулюйте основну властивість величини кута.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1223.° Проведіть два промені AB і AC так, щоб вони не були доповняльними. Побудуйте до кожного із цих променів доповняльний промінь. Позначте й запишіть усі утворені промені.

1224.° Проведіть відрізок AB і два промені AB і BA . Чи є ці промені доповняльними? Відповідь обґрунтуйте.

1225.° Накресліть кут MNE і проведіть промені NA і NC між його сторонами. Запишіть усі кути, що утворилися.

1226.° Проведіть промені OA , OB , OC і OD так, щоби промінь OC проходив між сторонами кута AOB , а промінь OD — між сторонами кута BOC .

1227.* Накресліть два промені так, щоб їхня спільна частина була: 1) точкою; 2) відрізком; 3) променем.

ВПРАВИ

1228.° Пряма EF перетинає прямі AB і CD (рис. 162). Укажіть:

- 1) усі промені, що утворилися, з початком у точці M ;
- 2) усі пари доповняльних променів із початком у точці K .

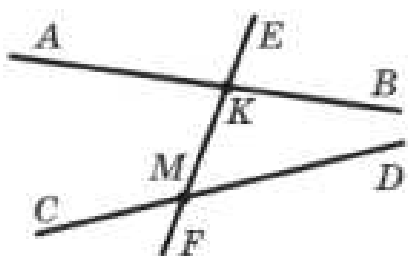


Рис. 162

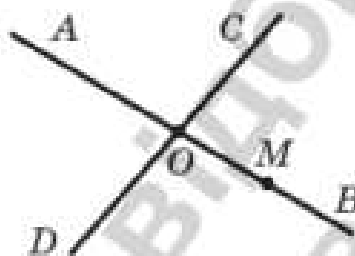


Рис. 163

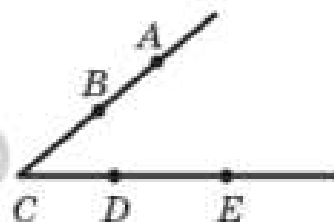


Рис. 164

1229.° Запишіть усі промені, які зображено на рисунку 163. Укажіть, які з них є доповняльними променями з початком у точці O .

1230.° Чи можна кут, який зображено на рисунку 164, позначити так:

- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) $\angle ABC$; | 3) $\angle ADC$; | 5) $\angle ACE$; | 7) $\angle BDE$; |
| 2) $\angle ACD$; | 4) $\angle DCA$; | 6) $\angle BCD$; | 8) $\angle ECD$? |

1231.° Запишіть усі кути, які зображено на рисунку 165.

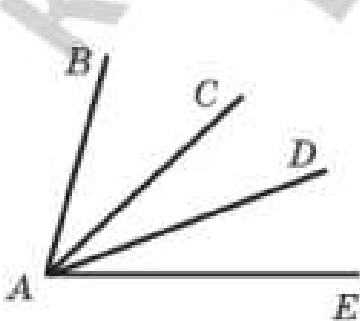


Рис. 165

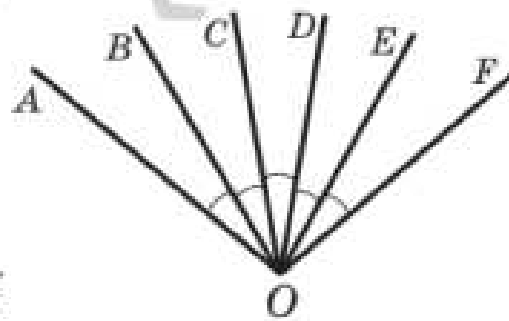


Рис. 166

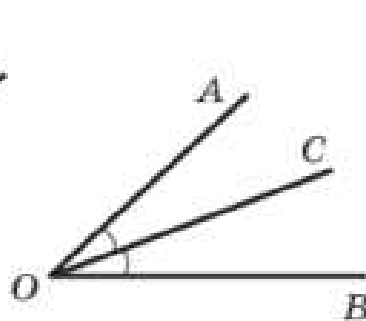


Рис. 167

1232.° На рисунку 166

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF.$$

- 1) Який промінь є бісектрисою кута AOC ? кута DOF ? кута BOF ?
- 2) Бісектрисою яких кутів є промінь OC ?

1233.° Промінь OC — бісектриса кута AOB (рис. 167). Чи можна сумістити накладанням: 1) кути AOC і BOC ; 2) кути AOC і AOB ?

1234.° Промінь BD ділить кут ABC на два кути. Знайдіть:

- 1) кут ABC , якщо $\angle ABD = 54^\circ$, $\angle CBD = 72^\circ$;
- 2) кут CBD , якщо $\angle ABC = 158^\circ$, $\angle ABD = 93^\circ$.

1235.° Промінь OP проходить між сторонами кута $МОК$. Знайдіть кут $МОР$, якщо $\angle МОК = 172^\circ$, $\angle РОК = 85^\circ$.

1236.° Величина кута дорівнює: 1) 28° ; 2) 162° . Яка величина кута, утвореного бісектрисою даного кута і його стороною?

1237.° Знайдіть кут, бісектриса якого утворює з однією з його сторін кут, який дорівнює: 1) 43° ; 2) 65° .

1238.° Чи є правильним твердження:

- 1) будь-який кут, менший від тупого, — гострий;
- 2) кут, менший від розгорнутого, — тупий;
- 3) кут, менший від тупого у 2 рази, — гострий;
- 4) сума двох гострих кутів більша за прямий кут;
- 5) кут, менший від розгорнутого кута у 2 рази, є більшим за будь-який гострий кут;
- 6) кут, більший за прямий, — тупий?

1239.° Кут CEF дорівнює 152° , промінь EM проходить між його сторонами, кут CEM на 18° більший за кут FEM . Знайдіть кути CEM і FEM .

1240.° Промінь AK належить куту BAD . Знайдіть кути BAK і DAK , якщо кут BAK у 7 разів менший від кута DAK і $\angle BAD = 72^\circ$.

1241.* На рисунку 168 рівні кути позначено дужками. Знайдіть кути ABC , MKE і STK , якщо за одиничний кут узято: 1) кут ABC ; 2) кут MKE .

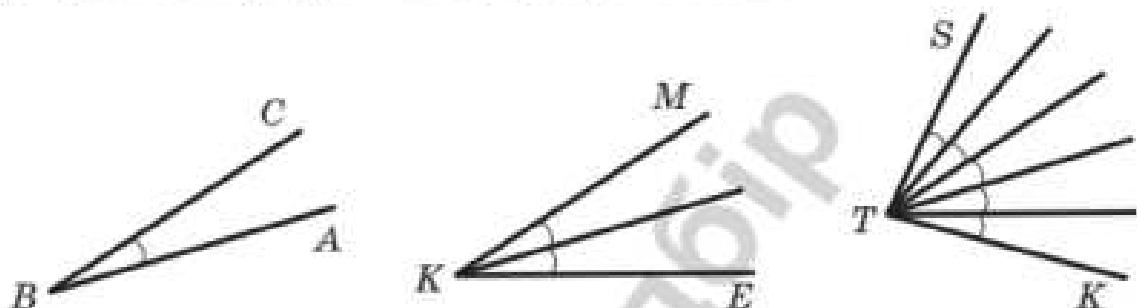


Рис. 168

1242.* Із вершини прямого кута BOM (рис. 169) проведено два промені OA та OC так, що $\angle BOC = 74^\circ$, $\angle AOM = 62^\circ$. Знайдіть кут AOC .

1243.* Із вершини розгорнутого кута ACP (рис. 170) проведено два промені CT і CF так, що $\angle ACF = 158^\circ$, $\angle TSP = 134^\circ$. Знайдіть кут TCF .

1244.* Точки A , B і C розміщено на прямій так, що $AB = 3,2$ см, $AC = 4,8$ см, $BC = 8$ см. Чи є промені AB і AC доповняльними?

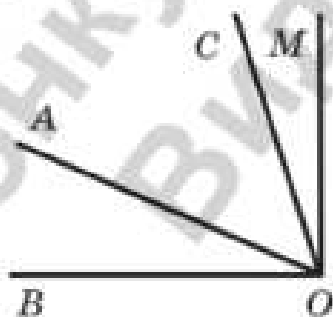


Рис. 169

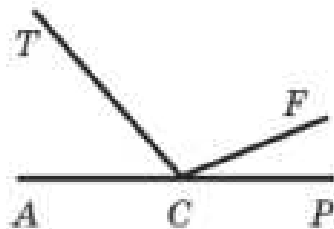


Рис. 170

1245.* На рисунку 171 кут ABC — прямий, $\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC$, промені BD і BK — бісектриси кутів ABE і FBC відповідно. Знайдіть кут DBK .

1246.* На рисунку 172 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$, промінь OB — бісектриса кута AOC , промінь OE — бісектриса кута DOF , $\angle BOE = 72^\circ$. Знайдіть кут AOF .

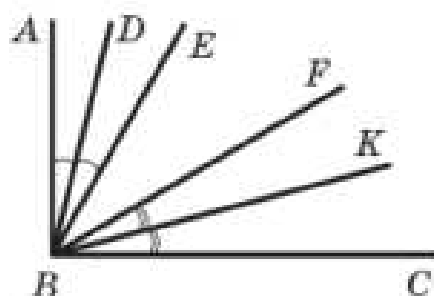


Рис. 171

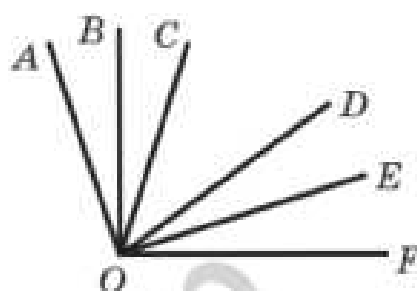


Рис. 172

1247.* На рисунку 173 $\angle AOB = \angle DOC$. Чи є ще на цьому рисунку рівні кути? Відповідь обґрунтуйте.

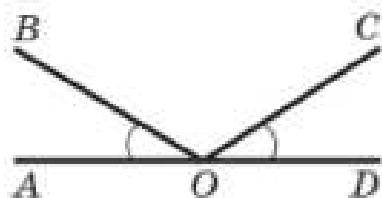


Рис. 173

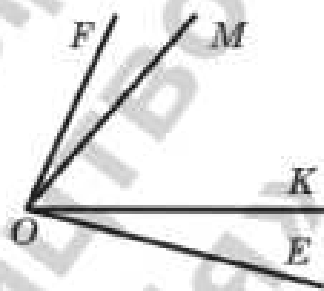


Рис. 174

1248.* Кути FOK і MOE рівні (рис. 174). Чи рівні кути FOM і KOE ?

1249.* Кут ABC — розгорнутий, промінь BK є бісектрисою кута CBD , $\angle ABK = 146^\circ$ (рис. 175). Знайдіть кут CBD .

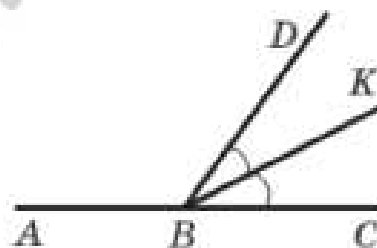


Рис. 175

1250.* Кут ABC — розгорнутий, промінь BK є бісектрисою кута CBD , $\angle CBD = 54^\circ$ (рис. 175). Знайдіть кут ABK .

1251.* На скільки градусів повертається за 1 хв: 1) хвилинна стрілка; 2) годинна стрілка?

1252.* Знайдіть кут між стрілками годинника, якщо вони показують: 1) 3 год; 2) 6 год; 3) 4 год; 4) 11 год; 5) 7 год.

1253.* Кут ABC дорівнює 30° , кут CBD — 80° . Знайдіть кут ABD . Скільки розв'язків має задача?

1254.* Знайдіть кут $\angle MOK$, якщо $\angle MON = 120^\circ$, $\angle KON = 43^\circ$. Скільки розв'язків має задача?

1255.* Промінь, проведений з вершини прямого кута, ділить його на два кути. Доведіть, що кут між бісектрисами кутів, що утворилися, дорівнює 45° .

1256.* Як, маючи шаблон кута, що дорівнює 70° , побудувати кут, який дорівнює 40° ?

1257.* Як, маючи шаблон кута, що дорівнює 40° , побудувати кут, який дорівнює: 1) 80° ; 2) 160° ; 3) 20° ?

1258.* Як, використовуючи шаблон кута, що дорівнює 13° , побудувати кут, який дорівнює 2° ?

1259.* Як побудувати кут, який дорівнює 1° , використовуючи шаблон кута, що дорівнює: 1) 19° ; 2) 7° ?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1260. Подайте у вигляді степеня вираз:

- | | | |
|----------------|--------------------|--------------------------|
| 1) $a^5 a^5$; | 3) $a^2 a^3 a^4$; | 5) $(a^4)^5 : a^7$; |
| 2) $(a^5)^5$; | 4) $(a^2)^3 a^4$; | 6) $(a^2)^9 : (a^6)^3$. |

1261. Із селища до станції вийшов пішохід зі швидкістю 4 км/год. Через годину із селища зі швидкістю 10 км/год виїхала велосипедистка, яка прибула на станцію на 0,5 год раніше за пішохода. Яка відстань від селища до станції?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

1262. Південний вітер змінився на: 1) західний; 2) південно-східний. Знайдіть кут, на який змінився напрямок вітру.

1263. Дув північний вітер. Потім його напрямок змінився на кут: 1) 90° ; 2) 45° . Яким після цього став вітер?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

1264. Не відриваючи олівця від паперу, проведіть через дев'ять точок (рис. 176) чотири відрізки (повертатися у вихідну точку не обов'язково).

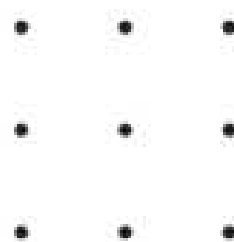


Рис. 176

38. Суміжні та вертикальні кути

Означення. Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.

На рисунку 177 кути MOE і EON суміжні.



Рис. 177



Рис. 178

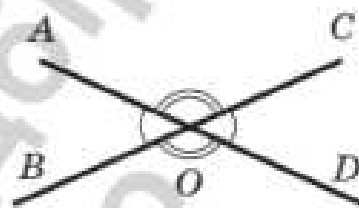


Рис. 179

Теорема 38.1. Сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Доведення. ☉ Нехай кути AOC і COB суміжні (рис. 178). Треба довести, що $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$.

Оскільки кути AOC і COB суміжні, то промені OA та OB є доповняльними. Тоді кут AOB розгорнутий. Отже, $\angle AOB = 180^\circ$. Промінь OC належить куту AOB . За основною властивістю величини кута маємо: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180^\circ$. ●

Означення. Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

На рисунку 179 кути AOB і COD вертикальні.

Очевидно, що при перетині двох прямих утворюються дві пари вертикальних кутів, відмінних від розгорнутого. На рисунку 179 кути AOC і BOD також вертикальні.

Теорема 38.2. Вертикальні кути рівні.

Доведення. ☉ Якщо вертикальні кути є розгорнутими, то вони рівні.

На рисунку 180 кути 1 і 2 — вертикальні та відмінні від розгорнутого. Треба довести, що $\angle 1 = \angle 2$.

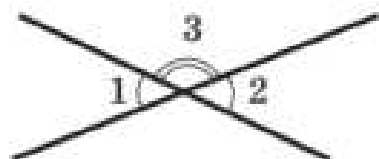


Рис. 180

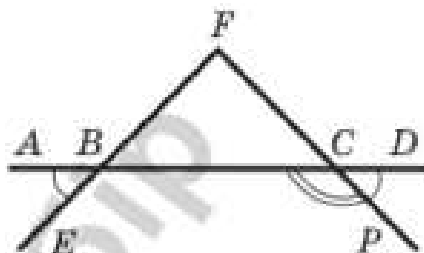


Рис. 181

Кожний із кутів 1 і 2 суміжний із кутом 3. Тоді $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ і $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Звідси $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3$ і $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3$. Отримуємо, що градусні міри кутів 1 і 2 рівні, а отже, рівні й самі кути. ●

Задача. На рисунку 181 $\angle ABE = \angle DCP$. Доведіть, що $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$.

Розв'язання. $\angle DCP + \angle BCP = 180^\circ$, оскільки кути DCP і BCP суміжні. Кути DCP і ABE рівні за умовою. Кути ABE і FBC рівні як вертикальні.

Отже, $\angle DCP = \angle FBC$.

Тоді $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$. ◀



1. Які два кути називають суміжними? 2. Чому дорівнює сума суміжних кутів? 3. Які два кути називають вертикальними? 4. Сформулюйте теорему про властивість вертикальних кутів.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1265.° Накресліть три кути: гострий, прямий і тупий. Для кожного з них побудуйте суміжний кут.

1266.° Накресліть два нерівних суміжних кути так, щоб їхня спільна сторона була вертикальною.

ВПРАВИ

1267.° Укажіть пари суміжних кутів (рис. 182).

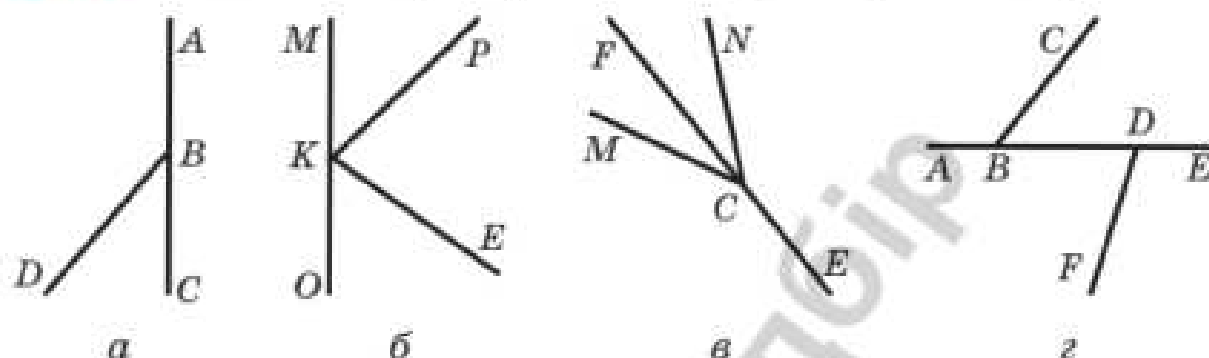


Рис. 182

1268.° Чи є кути ABC і DBE вертикальними (рис. 183)?

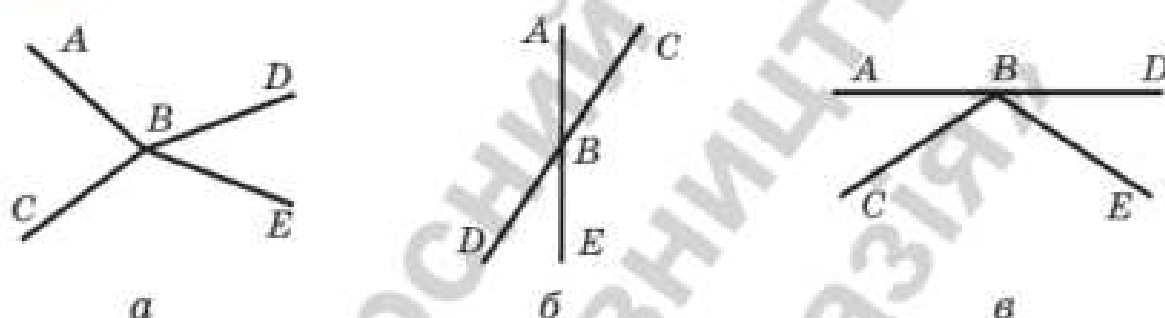


Рис. 183

1269.° Скільки пар суміжних кутів зображено на рисунку 184? Назвіть їх. Укажіть пари вертикальних кутів.

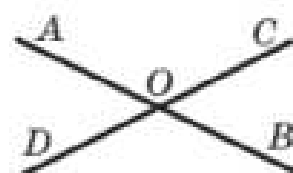


Рис. 184

1270.° Чи можуть два суміжних кути дорівнювати: 1) 24° і 156° ; 2) 63° і 107° ? Відповідь обґрунтуйте.

1271.° Знайдіть кут, суміжний із кутом: 1) 29° ; 2) 98° .

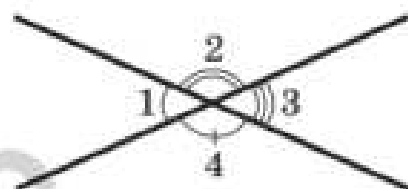
1272.° Чи може пара суміжних кутів складатися:

- 1) із двох гострих кутів;
- 2) із двох тупих кутів;
- 3) із прямого та тупого кутів;
- 4) із прямого та гострого кутів?

1273.° Один із суміжних кутів — прямий. Яким є другий кут?

1274.° Знайдіть кут, суміжний із кутом ABC , якщо $\angle ABC = 102^\circ$.

1275.° Знайдіть кути 2, 3 і 4 (рис. 185), якщо $\angle 1 = 42^\circ$.



1276.° Знайдіть суміжні кути, якщо:

- 1) один із них на 70° більший за другий;
- 2) один із них у 8 разів менший від другого;
- 3) їхні градусні міри відносяться як 3 : 2.

Рис. 185

1277.° Знайдіть суміжні кути, якщо:

- 1) один із них у 17 разів більший за другий;
- 2) їхні градусні міри відносяться як 19 : 26.

1278.° Чи є правильним твердження:

- 1) для кожного кута можна побудувати тільки один вертикальний кут;
- 2) для кожного кута можна побудувати тільки один суміжний кут;
- 3) якщо кути рівні, то вони вертикальні;
- 4) якщо кути не рівні, то вони не вертикальні;
- 5) якщо кути не вертикальні, то вони не рівні;
- 6) якщо два кути суміжні, то один з них гострий, а другий — тупий;
- 7) якщо два кути суміжні, то один з них більший за другий;
- 8) якщо сума двох кутів дорівнює 180° , то вони суміжні;
- 9) якщо сума двох кутів не дорівнює 180° , то вони не суміжні;
- 10) якщо суміжні кути рівні, то вони прямі;
- 11) якщо рівні кути мають спільну вершину, то вони вертикальні;
- 12) якщо два кути мають спільну сторону, то вони суміжні?

1279.* Доведіть, що коли два кути рівні, то й суміжні з ними кути рівні.

1280.* Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 140° . Доведіть, що ці кути вертикальні.

1281.* Знайдіть кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо:

- 1) сума двох із них дорівнює 106° ;
- 2) сума трьох із них дорівнює 305° .

1282.* Знайдіть кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо різниця двох із них дорівнює 64° .

1283.* Три прямі перетинаються в одній точці (рис. 186). Знайдіть суму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

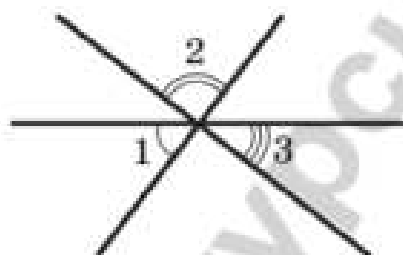


Рис. 186

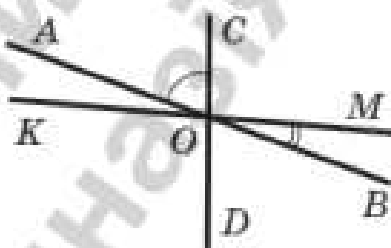


Рис. 187

1284.* Прямі AB , CD і MK перетинаються в точці O (рис. 187), $\angle AOC = 70^\circ$, $\angle MOB = 15^\circ$. Знайдіть кути $\angle DOK$, $\angle AOM$ і $\angle AOD$.

1285.* Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

1286.* Знайдіть кут між бісектрисами вертикальних кутів.

1287.* Кути $\angle ABF$ і $\angle FBC$ суміжні, $\angle ABF = 80^\circ$, промінь BD належить куту $\angle ABF$, $\angle ABD = 30^\circ$. Знайдіть кут між бісектрисами кутів $\angle DBF$ і $\angle FBC$.

1288.* Кути AOB і BOC суміжні, промінь OD — бісектриса кута AOB , кут BOD на 18° менший від кута BOC . Знайдіть кути AOB і BOC .

1289.* Знайдіть суміжні кути MKE і PKE , якщо кут FKE на 24° більший за кут PKE , де промінь KF — бісектриса кута MKE .

1290.* На рисунку 188 $\angle MAB + \angle ACB = 180^\circ$. Доведіть, що $\angle MAB = \angle KCB$.

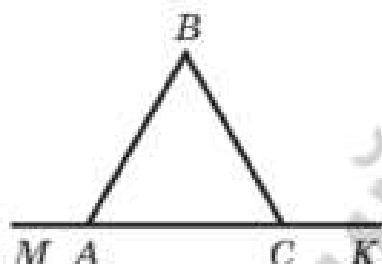


Рис. 188

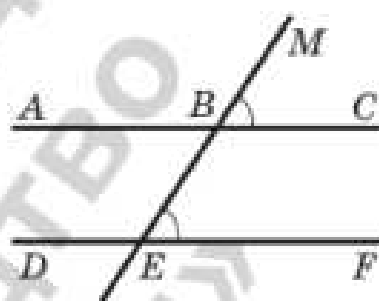


Рис. 189

1291.* На рисунку 189 $\angle MBC = \angle BEF$. Доведіть, що $\angle ABE + \angle BED = 180^\circ$.

1292.** Два кути мають спільну сторону, а їхня сума дорівнює 180° . Чи можна стверджувати, що ці кути суміжні?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1293. Які із чисел -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 є коренями рівняння:

1) $x^2 + x = 2$;

2) $x^3 + x^2 = 6x$?

1294. Велосипедист проїхав першу половину шляху за 3 год, а другу — за 2,5 год, оскільки збільшив швидкість на 3 км/год. Яку відстань проїхав велосипедист?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙОЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

1295. Розріжте фігуру, зображену на рисунку 190, на шість частин двома прямими.

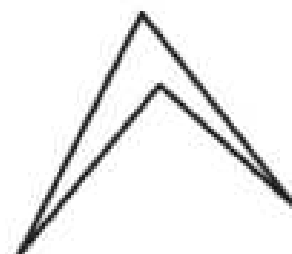


Рис. 190

39. Перпендикулярні прямі

На рисунку 191 позначено чотири кути, утворені при перетині прямих a і b . Легко показати (зробіть це самостійно), що коли один із кутів прямий (наприклад, кут 1), то й кути 2, 3 і 4 теж прямі.

Означення. Дві прямі називають перпендикулярними, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.

На рисунку 191 прямі a і b перпендикулярні. Записують: $a \perp b$ або $b \perp a$.



Рис. 191

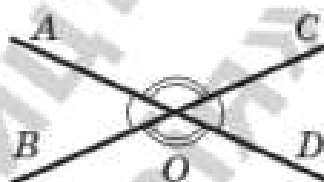


Рис. 192

На рисунку 192 прямі AD і BC не перпендикулярні. При їхньому перетині утворилися пара рівних гострих кутів і пара рівних тупих кутів. Величину гострого кута, що утворився, називають кутом між прямими AD і BC .

Якщо прямі перпендикулярні, то вважають, що кут між ними дорівнює 90° .

Зі сказаного випливає, що кут між двома прямими не перевищує 90° .

Означення. Два відрізки називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

На рисунку 193 відрізки AB і CD перпендикулярні. Записують: $AB \perp CD$.

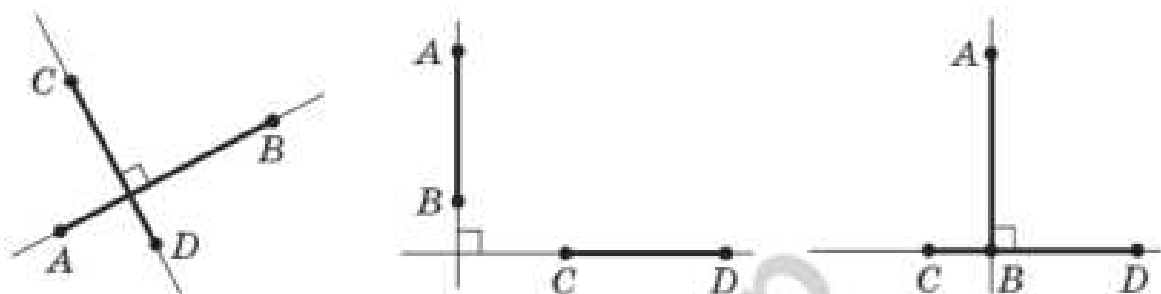


Рис. 193

Так само можна розглядати перпендикулярність двох променів, променя та відрізка, прямої та променя, відрізка та прямої. Наприклад, на рисунку 194 зображено перпендикулярні відрізок CD і промінь AB .

На рисунку 195 зображено пряму a та перпендикулярний до неї відрізок AB , кінець B якого належить прямій a . У такому випадку говорять, що з точки A на пряму a опущено перпендикуляр AB . Точку B називають основою перпендикуляра AB .

Довжину перпендикуляра AB називають відстанню від точки A до прямої a . Якщо точка A належить прямій a , то природно вважати, що відстань від точки A до прямої a дорівнює нулю.

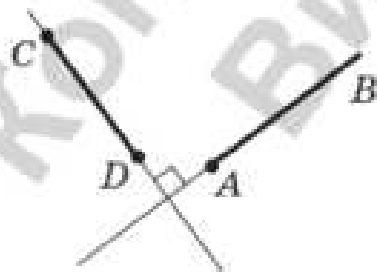


Рис. 194

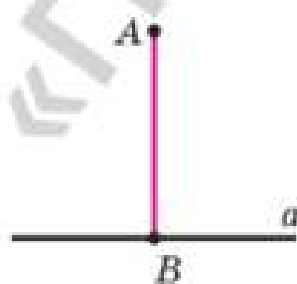


Рис. 195

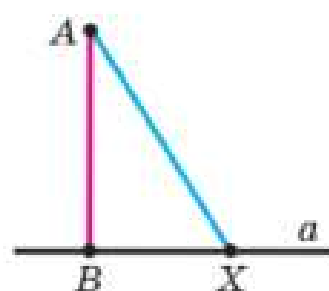


Рис. 196

Опустимо з точки A на пряму a перпендикуляр AB (рис. 196). Нехай X — довільна точка прямої a , відмінна від точки B . Відрізок AX називають похилою, проведеною з точки A до прямої a .

Теорема 39.1. *Через кожну точку прямої можна провести пряму, перпендикулярну до даної, і до того ж тільки одну.*

Доведення. ☉ Позначимо на прямій AB довільну точку M . Спочатку покажемо, що через точку M можна провести пряму, перпендикулярну до прямої AB . Відкладемо від променя MB (рис. 197) кут $СМВ$, який дорівнює прямому (це можна зробити за основною властивістю відкладання кутів). Тоді пряма $СМ$ перпендикулярна до даної прямої AB .

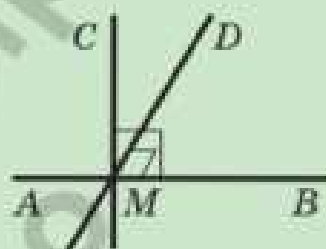


Рис. 197

Припустимо, що через точку M проходить ще одна пряма, відмінна від прямої $СМ$ і перпендикулярна до прямої AB . Нехай точка D цієї прямої лежить у тій самій півплощині відносно прямої AB , що й точка C (рис. 197). Тоді отримуємо, що від променя MB в одну півплощину відкладено два кути $СМВ$ і DMB , які дорівнюють прямому, що суперечить основній властивості відкладання кутів. ●



1. Які дві прямі називають перпендикулярними?
2. Яким символом позначають перпендикулярні прямі?
3. Що називають кутом між двома прямими, які перетинаються?
4. Які два відрізки називають перпендикулярними?
5. Що називають відстанню від точки до прямої?
6. Скільки через кожну точку прямої можна провести прямих, перпендикулярних до даної?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1296.° Перерисуйте в зошит рисунок 198. Користуючись косинцем, проведіть через точку M пряму, перпендикулярну до прямої a .

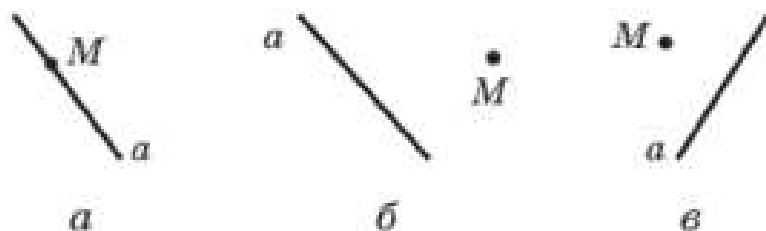


Рис. 198



Рис. 199

1297.° Перерисуйте в зошит рисунок 199. Користуючись косинцем, опустіть із точки M перпендикуляр на пряму a . Проведіть із точки M які-небудь дві похилі до прямої a .

1298.° Проведіть пряму c і позначте на ній точку K . Користуючись косинцем, проведіть через точку K пряму, перпендикулярну до прямої c .

1299.° Проведіть пряму d і позначте точку M , яка їй не належить. За допомогою косинця опустіть із точки M перпендикуляр на пряму d . Проведіть із точки M які-небудь дві похилі до прямої d .

1300.° Накресліть кут ABK , який дорівнює: 1) 73° ; 2) 146° . Позначте на промені BK точку C і проведіть через неї прямі, перпендикулярні до прямих AB і BK .

1301.° Накресліть два перпендикулярних відрізки так, щоб вони: 1) перетиналися та не мали спільного кінця; 2) не мали спільних точок; 3) мали спільний кінець.

1302.° Накресліть два перпендикулярних промені так, щоб вони: 1) перетиналися; 2) не мали спільних точок.

ВПРАВИ

1303.° На рисунку 200 прямі AC і DK перпендикулярні. Чи перпендикулярні:

- 1) відрізки AB і BK ;
- 2) відрізки BC і DF ;
- 3) промені BC і BK ;
- 4) відрізок AB і промінь FD ?

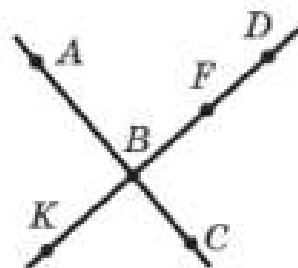


Рис. 200

1304.° Чи може кут між прямими дорівнювати: 1) 1° ; 2) 80° ; 3) 90° ; 4) 92° ?

1305.° Назар накреслив дві прямі, які перетинаються, за допомогою транспортира визначив, що один із кутів, утворених при перетині прямих, дорівнює 110° , і сказав, що кут між цими прямими становить 110° . Чи має рацію Назар? Відповідь обґрунтуйте.

1306.° Прямі EF і MK перетинаються в точці A , $\angle EAK = 142^\circ$ (рис. 201). Знайдіть кут між прямими EF і MK .

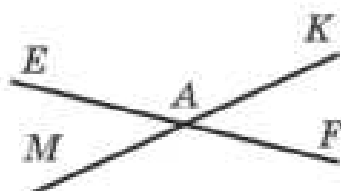
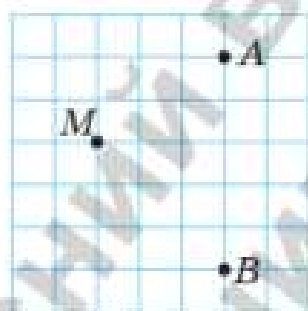
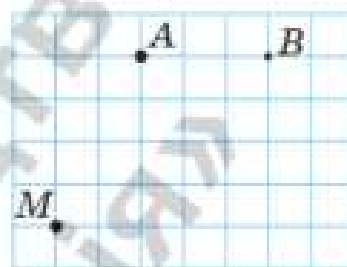


Рис. 201



а

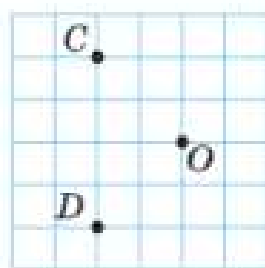


б

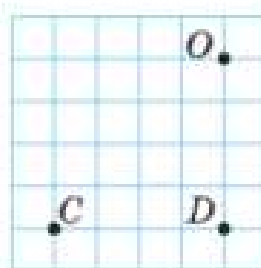
Рис. 202

1307.° Вважаючи, що довжина сторони клітинки дорівнює 0,5 см, знайдіть відстань від точки M до прямої AB (рис. 202).

1308.° Вважаючи, що довжина сторони клітинки дорівнює 0,5 см, знайдіть відстань від точки O до прямої CD (рис. 203).



а



б

Рис. 203

1309.° Доведіть, що коли бісектриси кутів AOB і BOC перпендикулярні, то точки A , O і C лежать на одній прямій.

1310.° На рисунку 204 $AB \perp CD$, $\angle COK = 42^\circ$, $\angle MOC + \angle BOK = 130^\circ$. Знайдіть: 1) кут MOK ; 2) кут MOD .

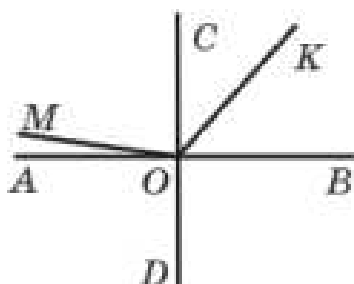


Рис. 204

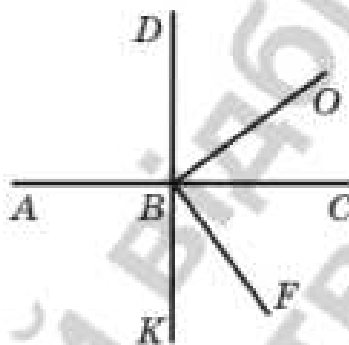


Рис. 205

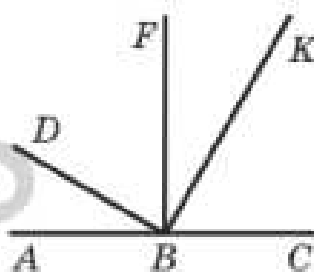


Рис. 206

1311.° На рисунку 205 $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54^\circ$. Знайдіть кут ABF .

1312.° Кут ABC дорівнює 160° , промені BK і BM проходять між сторонами цього кута й перпендикулярні до них. Знайдіть кут MBK .

1313.° На рисунку 206 $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Доведіть, що $\angle ABD = \angle FBK$.

1314.° На рисунку 206 $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Доведіть, що $BF \perp AC$.

1315.° Із вершини кута ABC , який дорівнює 70° , проведено промені BD і BF так, що $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, промені BD і BC належать куту ABF . Знайдіть кути DBF і ABF .

1316.° Із вершини кута ABC , який дорівнює 130° , проведено промені BD і BF так, що $BD \perp AB$, $BF \perp BC$, промінь BF належить куту ABC , промінь BA належить куту DBF . Знайдіть кут DBF .

1317.* Користуючись косинцем і шаблоном кута, який дорівнює 17° , побудуйте кут: 1) 5° ; 2) 12° .

1318.* Користуючись косинцем і шаблоном кута, який дорівнює 20° , побудуйте кут 10° .

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1319. Розв'яжіть рівняння:

1) $2,5 - 3x = 3(x - 2,5) - 2$;

2) $17(2 - 3x) - 5(x + 12) = 8(1 - 7x) - 34$.

1320. На одному складі було 184 т мінерального добрива, а на другому — 240 т. Перший склад відпускає щодня по 15 т добрива, а другий — по 18 т. Через скільки днів маса добрива, що залишиться на першому складі, становитиме $\frac{2}{3}$ маси добрива, що залишиться на другому складі?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

1321. Прикладаючи косинець то однією, то іншою стороною, Марія провела через точку A два перпендикуляри до прямої a (рис. 207). Що можна сказати про цей косинець?

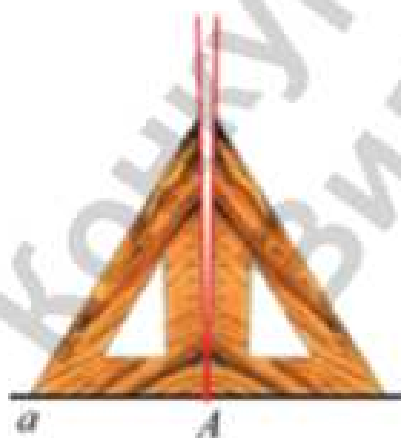


Рис. 207



Рис. 208

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙОЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

1322. На рисунку 208 пряма перетинає всі сторони восьмикутника. Чи може пряма перетинати всі сторони тринадцятикутника, не проходячи через жодну з його вершин?

40. Аксиоми

У попередніх пунктах було доведено чотири теореми. Щоразу, доводячи нову властивість фігури, ми спиралися на раніше відомі геометричні факти. Наприклад, під час доведення теореми про вертикальні кути була використана властивість суміжних кутів. Керуючись цим принципом, ми доведемо ще багато нових теорем. Проте вже зараз, на початковому етапі вивчення геометрії, виникає природне запитання: якщо властивості геометричних фігур вивчають за принципом «нове зі старого», то повинні існувати найперші, початкові факти, і тоді на чому базується обґрунтування їхньої справжності? Адже до них ніяких істинних тверджень не було. Розв'язати цю проблему можна в єдиний спосіб: прийняти перші властивості без доведення. Так і роблять математики й математикині. Ці властивості називають аксіомами.

За аксіоми вибирають твердження, які є простими, очевидними, такими, що не викликають сумнівів. Адже дарма слово «аксіома», що походить від грецького «аксіос», означає «гідне визнання».

Деякі аксіоми були сформульовані в попередніх пунктах. Вони називалися **основними властивостями**.

Частину аксіом ми не виділяли якимось спеціальним чином, а просто формулювали як наочні очевидні твердження. Зокрема, у пп. 35, 36 було сформульовано такі аксіоми:

для будь-яких двох точок існує єдиний відрізок,
для якого ці точки є кінцями;

кожний відрізок має певну довжину;

кожний кут має певну величину.

Ми спиралися й на деякі інші істинні твердження, прийняті без доведення, тобто по суті на аксіоми,

але сформульовані в неявному вигляді. Наприклад, у п. 35, описуючи рисунок 109, ми фактично використали таку аксіому:

якою б не була пряма, існують точки, які належать цій прямій, і точки, які не належать їй.

Аксиоми використовують не тільки в математиці. Нерідко в повсякденному житті будь-яке істинне твердження, що не потребує обґрунтування, називають аксіомою. Наприклад, кажуть: «Після березня настане квітень. Це — аксіома».

Аксиоми виникають не лише на основі практики або спостережень.

Для громадян і громадянок України Конституція — це перелік аксіом. Тому аксіому можна розглядати як закон або правило. Проте закони (правила гри) приймають, тобто вони виникають у результаті домовленості людей між собою. Отже, аксиоми геометрії можна також розглядати як затверджені правила, на підставі яких геометри, як муляри, зводять будівлю науки (рис. 209).



Рис. 209

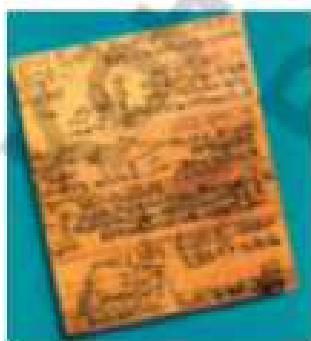
Тоді у вас може виникнути запитання: «Невже геометрію можна сприймати як гру, наприклад таку, як шахи?» Певною мірою — так. Проте при цьому слід розуміти, що шахові правила, а отже, і сама гра виникли завдяки людській фантазії. Разом з тим геометричні правила (аксіоми) виникли з практики та спостережень. Тому геометрію, на відміну від шахів, застосовують дуже широко.

Якщо ви пов'яжете свою професію з математикою, то зможете ознайомитися із зовсім іншими геометріями, які відрізняються від тієї, яку ви вивчаєте в школі, тим, що вони побудовані на інших аксіомах.

3 історії геометрії



Коли й де виникли перші геометричні відомості? Фахівці не відповідають на це запитання однозначно. Деякі вважають, що першовідкривачами були єгипетські та вавилонські землеміри, які жили за 4000 років до нової ери; інші припускають, що геометрія зародилася в Стародавньому Єгипті 5000 років тому.



**Стародавній
папірус**

Може здатися дивним, але питання, коли виникла наука геометрія, не викликає суперечок. Історики зійшлися на думці: у VI ст. до н. е. Така однастайність, на перший погляд, уражає, адже й до тих часів народи стародавнього світу накопичили величезний обсяг геометричних знань. Наприклад, цілком очевидно, що без геометричного досвіду єгиптяни не подарували б світові одне із «семи див світу» — піраміди. І все ж таки чому велика кількість накопичених геометричних фактів нерівносільна існуванню геометричної науки?

**Єгипетські піраміди**

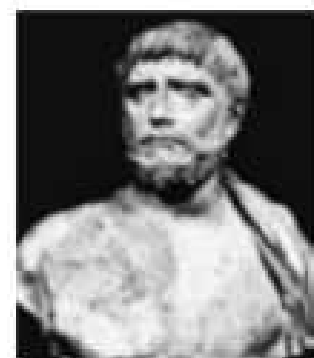
Геометрія стала наукою лише тоді, коли її істини почали встановлювати шляхом доведення.

Поява «доказової геометрії» пов'язана з іменем першого із «семи мудреців» — Фалеса Мілетського¹ (бл. 625–547 до н. е.) — філософа, ученого, купця й державного діяча.

Задовго до Фалеса було відомо, що вертикальні кути рівні, що діаметр ділить круг на дві рівні частини. Ніхто в істинності цих фактів не сумнівався. А Фалес довів їх, тим самим прославивши себе.

У VI–III ст. до н. е. завдяки вченим Стародавньої Греції, таким як Піфагор, Евдокс, Архіт, Теєтет, Евклід, Архімед, геометрія з прикладної науки перетворилася на математичну теорію.

Книгу, за якою вивчали геометрію понад 2000 років, без перебільшення можна назвати визначною. Вона має назву «Начала», її автором є

**Фалес
Мілетський**

¹ Мілет — порт у Малій Азії на узбережжі Егейського моря.

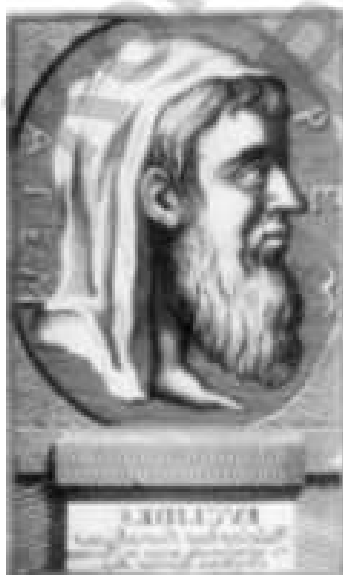
Евклід (бл. 365–300 до н. е.). На жаль, про самого Евкліда мало що відомо. У таких випадках постать обростає легендами, одна з яких дуже повчальна.

Цар Птолемей I запитав Евкліда, чи існує простіший шлях пізнання геометрії, ніж той, що викладений у «Началах». Евклід відповів: «У геометрії немає царських шляхів».

А який же шлях у геометрію обрав Евклід у своїх «Началах»? Аксиоматичний. У фундаменті його науки — перелік найпростіших фактів. Їх називають постулатами (від лат. *postulatum* — «вимога») й аксіомами. Потім, базуючись на них, шляхом логічних міркувань доводять усі інші властивості — теореми.

Постулатів у Евкліда п'ять. Наведемо перші чотири.

- I постулат. Потрібно, щоб від кожної точки до будь-якої іншої точки можна було провести пряму лінію.
- II постулат. І щоб кожну пряму можна було необмежено продовжити.
- III постулат. І щоб з будь-якого центра можна було описати коло будь-якого радіуса.
- IV постулат. І щоб усі прямі кути були рівні.

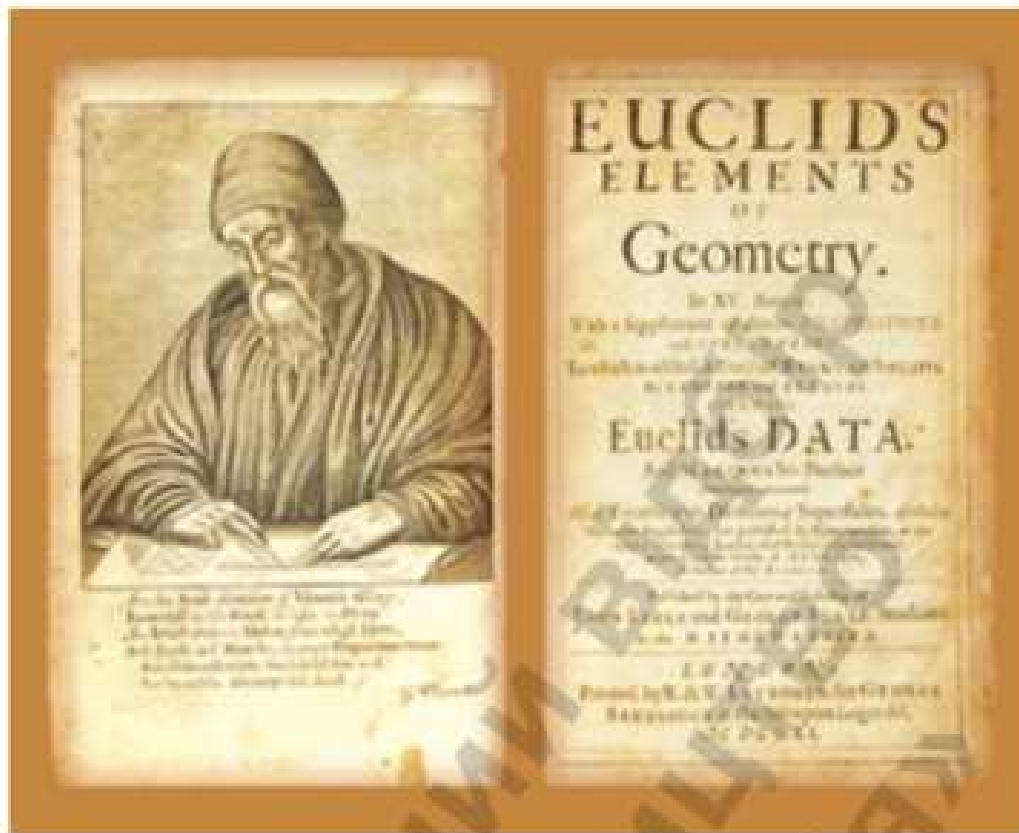


Евклід

Про п'ятий постулат ми розкажемо після п. 48.

Протягом багатьох століть за популярністю з «Началами» Евкліда могла зрівнятися хіба що Біблія. Так, ще наприкінці XIX ст. у ряді європейських країн геометрію викладали за спрощеними виданнями «Начал».

І зараз геометрія, яку вивчають у школі, багато в чому наслідує ідеї Евкліда.



«Начала» Евкліда

Більше дізнатися про історію розвитку геометрії ви зможете, узявши участь у проектних роботах «Евклід і його велика книга «Начала» і «Виникнення геометрії як науки та основні етапи її розвитку» (див. с. 316-317).

Заснована Евклідом Александрійська математична школа протягом 700 років об'єднувала вчених, що працювали в галузі математики, фізики, астрономії, механіки, інженерної справи. Серед всесвітньо відомих учених, діяльність яких пов'язана із цією школою, — Архімед (бл. 287–212 до н. е.), Ератосфен (бл. 276–194 до н. е.), Аполлоній Перзький (бл. 260–170 до н. е.), Конон Самоський (бл. 280 — бл. 220 до н. е.), Нікомед (III ст. до н. е.), засновник інженерних традицій в Александрії Ктесібій Александрійський (II–I ст. до н. е.), Герон Александрійський (бл. I ст.),

Папп Александрійський (кінець III ст.), Діофант Александрійський (бл. III ст.). Осередками ученості були Александрійський музей (від грец. «мусейон» — «храм муз») і Александрійська бібліотека.

Останньою в цій славній плеяді вчених була перша відома жінка-математик Гіпатія Александрійська, яка жила на зламі IV і V століть. Вона була донькою відомого астронома, математика та механіка, останнього управителя Александрійської бібліотеки Теона Александрійського, який дав доньці глибоку та всесторонню освіту. У 20-річному віці Гіпатія почала допомагати батькові, викладаючи в Мусейоні астрономію, математику, філософію, долучилася до його наукових доробків і, на думку сучасників, перевершила батька.

Після його смерті взяла на себе керівництво школою, яка стала називатися «Школою Теона та Гіпатії». Гіпатія виступала з лекціями не тільки в Мусейоні, але й перед багатолюдним натовпом, який збирався, щоб навчитися, біля воріт її будинку. Крім того, вона брала участь у політичному житті міста.

Історики науки вважають, що Гіпатія була співавторкою батька в таких наукових роботах, як «Астрономічний канон», коментарі до «Начал» та «Оптики»



Гіпатія.

*Картина Жуля
Моріса Гаспара, 1908*

Евкліда, до «Арифметики» Діофанта, до вчення Птолемея про тригонометрію хорд. Гіпатія займалася обчисленням астрономічних таблиць, брала участь у створенні інженерних приладів: астролябії, ареометра (приладу для вимірювання густини рідин). На жаль, усі твори Гіпатії загинули в добу раннього середньовіччя разом із працями багатьох інших античних учених.

У розквіті творчих сил жінка-вчена була жорстко вбита натовпом фанатиків-християн. Достеменно невідомо, що стало причиною — релігійні підстави, залученість Гіпатії до політики чи ставлення темного люду до вченої як до «відьми», але вона стала однією з перших історичних жертв християнства.

Інтерес до особистості Гіпатії відновився в епоху Просвіти, коли її почали вважати жертвою в ім'я науки. Про першу жінку-вчену створювали поеми, романи, фільми (у тому числі й повість українського письменника Олеса Бердника «Прометей»). На її честь названо кратер на Місяці, астероїд, планету в сузір'ї Дракона.



Афінська школа.
Фрагмент фрески
Рафаеля Санті

ЗАВДАННЯ № 8 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Скільки прямих визначають три точки, які не лежать на одній прямій?

- А) 2; Б) 4; В) 3; Г) 1.

2. Скільки можна провести відрізків, які містять дві задані точки?

- А) 1; Б) 2; В) 3; Г) безліч.

3. Точка M є внутрішньою точкою відрізка PQ . Яке з поданих тверджень є правильним?

- А) $PM + MQ = PQ$; В) $MQ = PQ + PM$;
Б) $PQ = PM - MQ$; Г) $PM = PQ + MQ$.

4. Точки A , B і C лежать на одній прямій, причому $BC = 8$ см, $AB - BC = 8$ см. Яке з поданих тверджень є правильним?

- А) Точка A — середина відрізка BC ;
Б) Точка B — середина відрізка AC ;
В) точка C — середина відрізка AB ;
Г) точки A і B збігаються.

5. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Скільки існує на прямій AB точок, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка AB дорівнює 14 см?

- А) Безліч; Б) 1; В) 2; Г) жодної.

6. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Скільки існує на прямій AB точок, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка AB дорівнює 12 см?

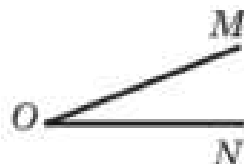
- А) Жодної; Б) 2; В) безліч; Г) 1.

7. Два промені є доповняльними, якщо:

- А) вони мають спільний початок;
Б) їхнім об'єднанням є пряма й вони мають спільний початок;
В) вони належать одній прямій;
Г) їхнім об'єднанням є пряма.

8. Яке позначення кута, зображеного на рисунку, є неправильним?

- А) $\angle O$; В) $\angle MON$;
Б) $\angle OMN$; Г) $\angle NOM$.



9. Яке з поданих тверджень є хибним?
- А) Суміжні кути мають спільну вершину;
 - Б) суміжні кути мають спільну сторону;
 - В) завжди один із суміжних кутів гострий, а другий — тупий;
 - Г) якщо кути $\angle AOC$ і $\angle COB$ суміжні, то промені OA і OB доповняльні.
10. Яке з поданих тверджень є хибним?
- А) Вертикальні кути рівні;
 - Б) якщо кути рівні, то вони вертикальні;
 - В) вертикальні кути мають спільну вершину;
 - Г) сторони вертикальних кутів утворюють дві пари доповняльних променів.
11. Яке з поданих тверджень є правильним?
- А) Перпендикулярні відрізки завжди мають спільну точку;
 - Б) перпендикулярні промені завжди мають спільну точку;
 - В) перпендикулярні прямі завжди мають спільну точку;
 - Г) перпендикулярні промінь і відрізок завжди мають спільну точку.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 5

Основна властивість прямої

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Прямі, що перетинаються

Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.

Теорема про дві прямі, що перетинаються

Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

Рівні відрізки

Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.

Основна властивість довжини відрізка

Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB , то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB , тобто $AB = AC + CB$.

Відстань між точками

Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB .

Доповняльні промені

Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.

Розгорнутий кут

Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.

Рівні кути

Два кути називають рівними, якщо їх можна су-містити накладанням.

Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.

Основна властивість відкладання кутів

Для даного кута ABC і даного променя B_1C_1 існує єдиний кут $A_1B_1C_1$, який дорівнює куту ABC , такий, що точка C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої B_1C_1 .

Бісектриса кута

Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

Гострий, прямий, тупий кути

Кут, градусна міра якого менша від 90° , називають гострим.

Кут, градусна міра якого дорівнює 90° , називають прямим.

Кут, градусна міра якого більша за 90° , але менша від 180° , називають тупим.

Основна властивість величини кута

Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB , то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Суміжні кути

Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.

Властивість суміжних кутів

Сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Вертикальні кути

Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

Властивість вертикальних кутів

Вертикальні кути рівні.

Перпендикулярні прямі

Дві прямі називають перпендикулярними, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.

Теорема про існування та єдиність прямої, перпендикулярної до даної

Через кожену точку прямої можна провести пряму, перпендикулярну до даної, і до того ж тільки одну.

§ 6 ТРИКУТНИКИ

Як, не накладаючи один трикутник на другий, дізнатися, чи є вони рівними? Які властивості притаманні рівнобедреному й рівносторонньому трикутникам? Яку «будову» має теорема? На ці й багато інших запитань ви знайдете відповіді в цьому параграфі.

41. Рівні трикутники.

Висота, медіана, бісектриса трикутника

Розглянемо три точки A , B , C , які не лежать на одній прямій. Сполучимо їх відрізками AB , BC , CA . Утворена фігура обмежує частину площини, виділену на рисунку 210 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками AB , BC і CA називають трикутником. Точки A , B , C називають вершинами трикутника, а відрізки AB , BC , CA — сторонами трикутника.

Трикутник називають і позначають за його вершинами. Трикутник, зображений на рисунку 210, позначають так: $\triangle ABC$ (читають: «трикутник ABC »), або $\triangle BCA$ (читають: «трикутник BCA »), або $\triangle ACB$ і т. д.

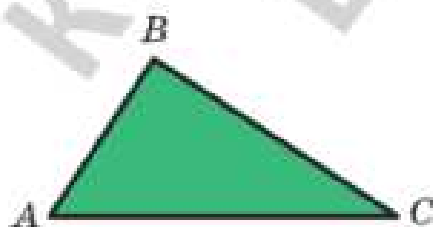


Рис. 210

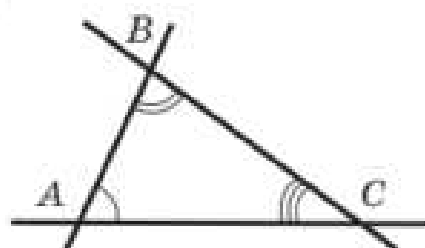


Рис. 211

Кути BAC , ABC , BCA (рис. 211) називають кутами трикутника ABC .

У трикутнику ABC (рис. 211), наприклад, кут B називають *кутом, протилежним стороні AC* , а кути A

і C — кутами, прилеглими до сторони AC , сторону AC — стороною, протилежною куту B , сторони AB і AC — сторонами, прилеглими до кута A .

Означення. Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін.

Периметр позначають буквою P . Наприклад, для периметра трикутника MNK використовують позначення P_{MNK} .

Означення. Трикутник називають гострокутним, якщо всі його кути гострі.

Трикутник називають прямокутним, якщо один із його кутів прямий.

Трикутник називають тупокутним, якщо один із його кутів тупий (рис. 212).



Рис. 212

Означення. Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 213 зображено рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Записують: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Ці трикутники можна сумістити так, що вершини A і A_1 , B і B_1 , C і C_1 збігатимуться. Тоді можна записати: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Ті сторони й ті кути, які суміщаються при накладанні рівних трикутників, називають відповідними

сторонами й відповідними кутами. Так, на рисунку 213 сторони AC і A_1C_1 , кути A та A_1 — відповідні.

Зазвичай на рисунках рівні сторони позначають однаковою кількістю рисочок, а рівні кути — однаковою кількістю дужок (рис. 213).

Зауважимо, що в рівних трикутниках проти відповідних кутів лежать відповідні сторони, і навпаки: проти відповідних сторін лежать відповідні кути.

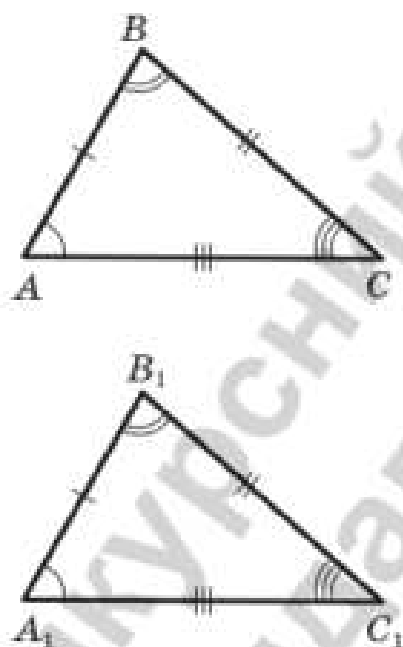


Рис. 213

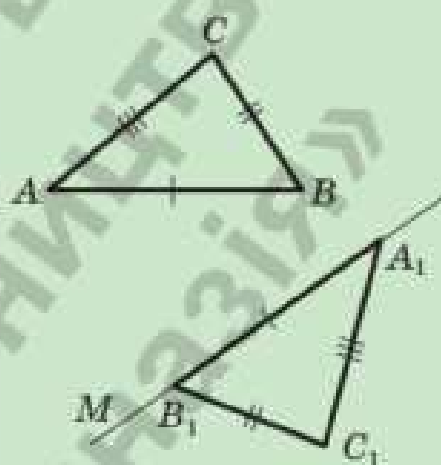


Рис. 214

Аксіома про існування трикутника, рівного даному. Для даного трикутника ABC і даного променя A_1M існує трикутник $A_1B_1C_1$, який дорівнює трикутнику ABC , такий, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ і сторона A_1B_1 належить променю A_1M , а вершина C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої A_1M (рис. 214).

Теорема 41.1. Через точку, яка не належить даній прямій, можна провести пряму, перпендикулярну до даної, і до того ж тільки одну.

Доведення. ☉ Розглянемо пряму MN і точку O , яка їй не належить.

Спочатку покажемо, що через точку O можна провести пряму, перпендикулярну до прямої MN .

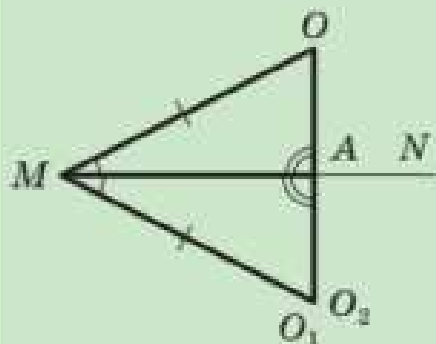


Рис. 215

Від променя MN відкладемо кут O_1MN , що дорівнює куту OMN . Нехай точка O_1 є такою, що $MO = MO_1$ (рис. 215). Точку перетину прямих OO_1 і MN позначимо буквою A .

Від променя MA відкладемо трикутник O_2MA , який дорівнює трикутнику OMA . Кожний із кутів AMO_1 і AMO_2 дорівнює куту AMO , тому кути AMO_1 і AMO_2 рівні. Отже, точка O_2 належить променю MO_1 . Крім того, кожен із відрізків MO_1 та MO_2 дорівнює відрізку MO . Отже, точки O_1 і O_2 збігаються. Таким чином, трикутники AMO_1 і AMO_2 збігаються. Із рівності трикутників AMO і AMO_1 випливає рівність кутів OAM і O_1AM . Оскільки ці кути суміжні, то кожен із них є прямим. Отже, пряма OO_1 перпендикулярна до прямої MN .

Припустимо, що через точку O проходять дві прямі OA і OB , перпендикулярні до прямої MN (рис. 216, а).

За аксіомою про існування трикутника, рівного даному, існує трикутник O_1AB , що дорівнює трикутнику OAB (рис. 216, б). Тоді $\angle OAB = \angle O_1AB = 90^\circ$. Звідси $\angle OAO_1 = 180^\circ$, а отже, точки O , A , O_1 лежать на одній прямій. Аналогічно можна довести, що точки O , B , O_1 також лежать на одній прямій. Але тоді прямі OA і OB мають дві точки перетину — точки O і O_1 , а це

суперечить теоремі 35.1. Отже, наше припущення є неправильним. Тоді через точку O проходить єдина пряма, перпендикулярна до прямої MN . ●

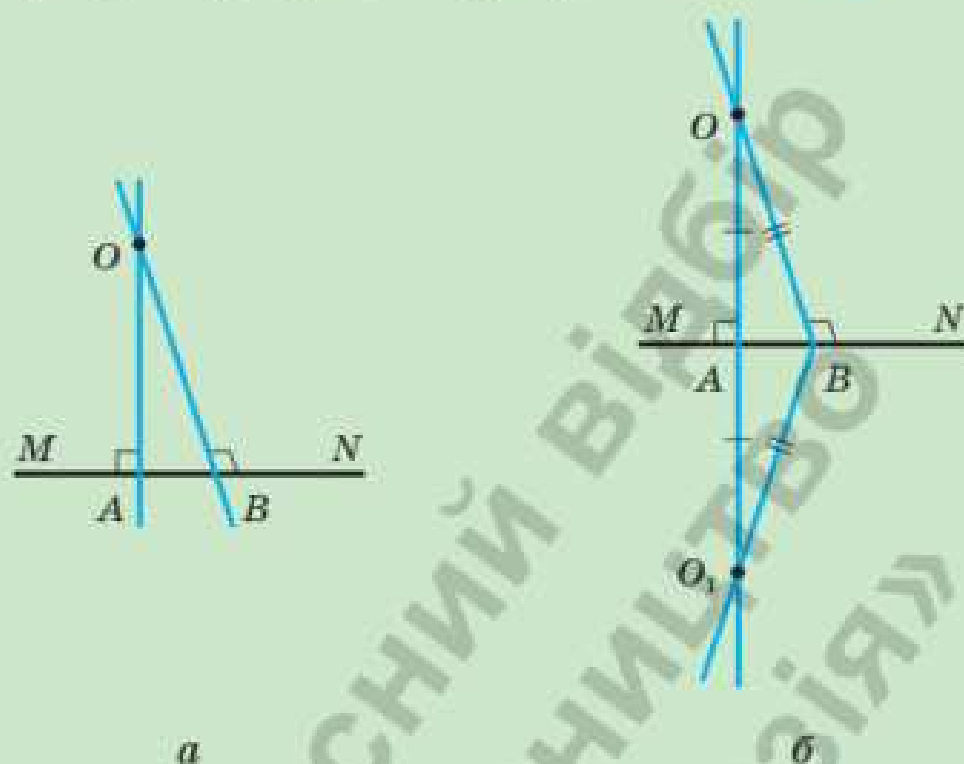


Рис. 216

Можливо, ви помітили, що означення рівних відрізків, рівних кутів і рівних трикутників дуже схожі. Тому доцільно прийняти таке означення рівних фігур.

Означення. Дві фігури називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 217 зображено рівні фігури Φ_1 і Φ_2 . Записують: $\Phi_1 = \Phi_2$.

Зрозуміло, що будь-які дві прямі (два промені, дві точки) рівні.

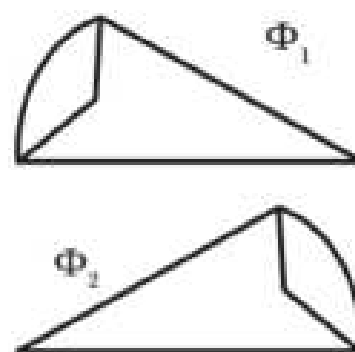


Рис. 217

Означення. Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.

На рисунку 218 відрізки BB_1 і CC_1 — висоти трикутника ABC .

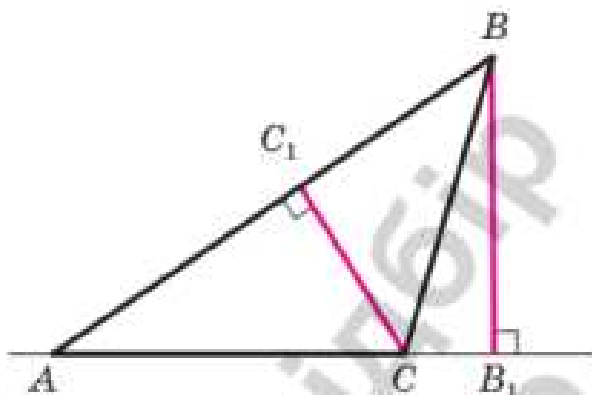


Рис. 218

Означення. Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.

На рисунку 219 відрізок AM — медіана трикутника ABC .

Означення. Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.

На рисунку 220 відрізок BL — бісектриса трикутника ABC . Кожний трикутник має три висоти, три медіани й три бісектриси.

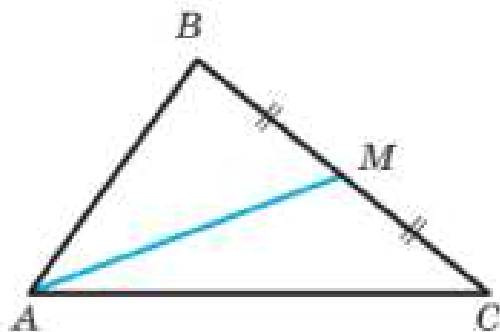


Рис. 219

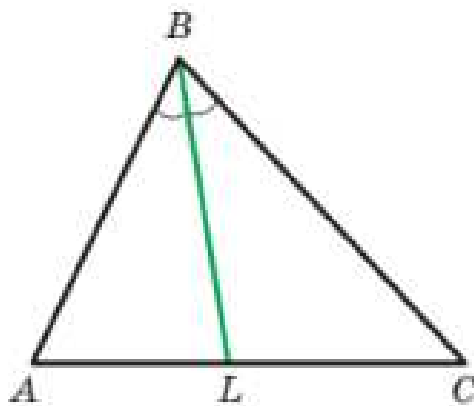


Рис. 220



1. Як називають і позначають трикутник? 2. Що називають периметром трикутника? 3. Які існують види трикутників залежно від виду їхніх кутів? 4. Який трикутник називають прямокутним? тупокутним? гострокутним? 5. Які два трикутники називають рівними? 6. Як називають ті пари сторін і пари кутів рівних трикутників, які суміщаються при накладанні? 7. Які дві фігури називають рівними? 8. Що називають висотою трикутника? 9. Що називають медіаною трикутника? 10. Що називають бісектрисою трикутника? 11. Скільки кожний трикутник має висот? медіан? бісектрис?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1323.° Накресліть трикутник:

- 1) гострокутний;
- 2) прямокутний;
- 3) тупокутний.

Проведіть із кожної вершини трикутника висоту.

1324.° Перерисуйте в зошит рисунок 221, проведіть висоту, спільну для всіх трьох зображених трикутників. У якого з них ця висота розміщена поза трикутником?

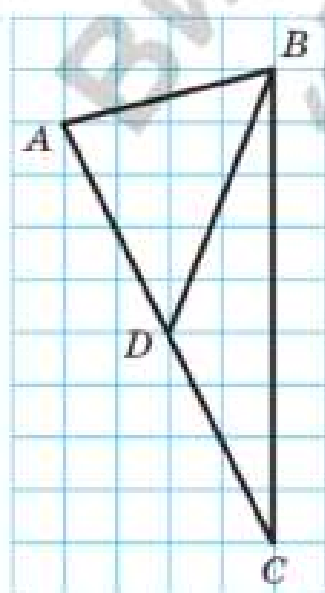


Рис. 221

1325.° Перерисуйте в зошит трикутники, зображені на рисунку 222, проведіть у кожному з них усі його висоти.

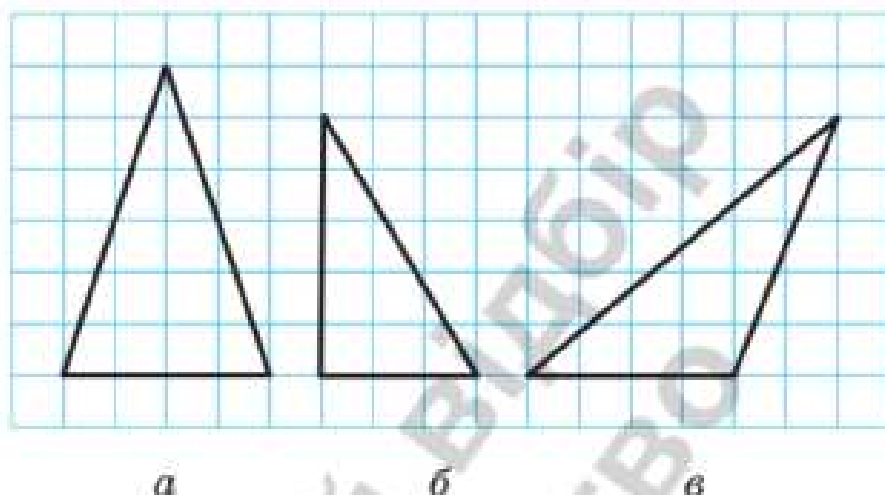


Рис. 222

1326.° Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його медіани.

1327.° Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його бісектриси.

ВПРАВИ

1328.° Накресліть довільний трикутник, позначте його вершини буквами M , K і E . Укажіть:

- 1) сторону, протилежну куту M ;
- 2) кут, протилежний стороні MK ;
- 3) сторони, прилеглі до кута K ;
- 4) кути, прилеглі до сторони KE .

1329.° Запишіть сторони, вершини та кути трикутника CEF (рис. 223). Укажіть:

- 1) кут, протилежний стороні CF ;
- 2) кути, прилеглі до сторони CE ;
- 3) сторону, протилежну куту E ;
- 4) сторони, прилеглі до кута F .

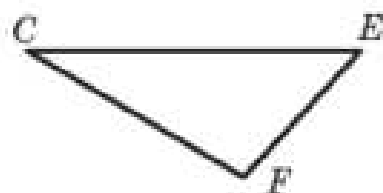


Рис. 223

1330.° Одна зі сторін трикутника в 5 разів менша від другої та на 25 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 74 см.

1331.° Сторони трикутника відносяться як $5 : 7 : 11$, а сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 80 см. Обчисліть периметр трикутника.

1332.° Периметр трикутника дорівнює 48 см, а його сторони відносяться як $7 : 9 : 8$. Знайдіть сторони трикутника.

1333.° Трикутники APK і MCE рівні, кути A і C відповідні, $PK = 10$ см. Знайдіть сторону ME .

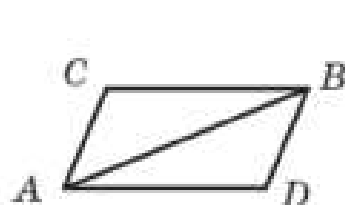
1334.° Трикутники ABC і DEF рівні, сторони AB і DE , BC і DF відповідні, $\angle B = 32^\circ$. Знайдіть кут D .

1335.° Трикутники ABC і KTM рівні, кути A і M , B і K відповідні, $\angle C = 40^\circ$, $MK = 5$ см. Знайдіть кут T і сторону AB .

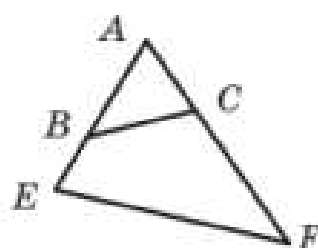
1336.° Чи є правильним твердження:

- 1) якщо трикутники рівні, то їхні периметри теж рівні;
- 2) якщо периметри двох трикутників рівні, то й самі трикутники рівні?

1337.° Укажіть спільний елемент трикутників, зображених на рисунку 224.



a



б



в

Рис. 224

1338.° Відрізок CH — висота трикутника ABC (рис. 225). Знайдіть градусні міри кутів AHC і BHC .

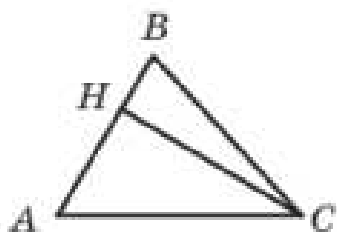


Рис. 225

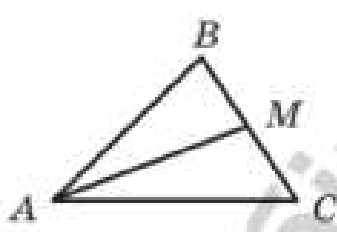


Рис. 226

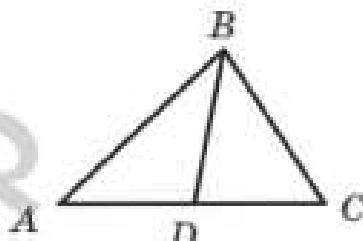


Рис. 227

1339.° Відрізок AM — медіана трикутника ABC (рис. 226), $BM = 8$ см. Знайдіть відрізки CM і BC .

1340.° Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC (рис. 227), $\angle ABD = 42^\circ$. Знайдіть градусні міри кутів CBD і ABC .

1341.° Які з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — завжди належать трикутнику?

1342.° Який з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — може збігатися з його стороною? Укажіть вид трикутника, для якого це можливо.

1343.° 1) Чи може одна висота трикутника належати йому, а дві інші — ні?

2) Чи може тільки одна висота трикутника збігатися з його стороною?

3) У якому трикутнику три висоти перетинаються в його вершині?

1344.* На стороні AC трикутника ABC позначили точку D . Відрізок BD розбиває трикутник ABC на два трикутники, периметри яких дорівнюють 32 см і 36 см. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $BD = 10$ см.

1345.* На стороні BC трикутника ABC позначили точку M . Периметри трикутників ABC , AMC і AMB дорівнюють відповідно 60 см, 36 см і 50 см. Знайдіть відрізок AM .

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1346. Спростіть вираз:

1) $0,42ac^3 \cdot 1\frac{3}{7}a^4c^2$;

3) $-2\frac{1}{3}m^2np^3 \cdot \left(\frac{3}{7}np^4\right)^2$;

2) $1,2xyz \cdot 2\frac{1}{6}x^5y^6$;

4) $\left(1\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3 \cdot \frac{16}{27}x^8y^2$.

1347. Розв'яжіть рівняння:

1) $4y^3 - (4y^3 - 8y) - (6y + 3) = 7$;

2) $(-4y - 17) - (-3y - 8) = 1 - y$;

3) $(3y - 8) - (5y + 7) = -2y - 15$.

1348. Спростіть вираз:

1) $5b^3(2b - 3) - 2,5b^3(4b - 6)$;

2) $x(5x^2 + 6x + 8) - 4x(2 + 2x + x^2)$.

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

1349. Розріжте кожну з фігур, зображених на рисунку 228, на дві рівні фігури (розрізати не обов'язково вздовж ліній сітки).

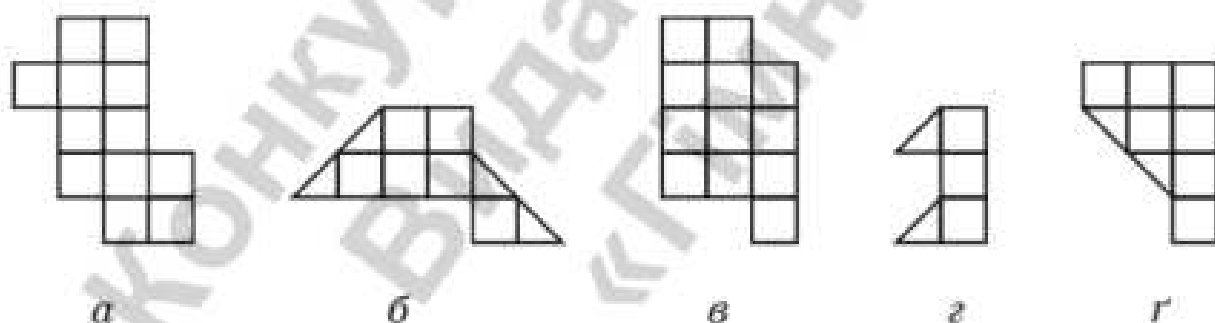


Рис. 228

42. Перша та друга ознаки рівності трикутників

Якщо для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ виконуються шість умов: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, то очевидно, що ці трикутники сумістяться при накладанні. Отже, вони рівні.

Спробуємо зменшити кількість умов. Наприклад, залишимо лише дві рівності: $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$. У цьому разі трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ можуть виявитися нерівними (рис. 229).

Як же скоротити список вимог до мінімуму, зберігаючи при цьому рівність трикутників? На це запитання відповідають теореми, які називають ознаками рівності трикутників.

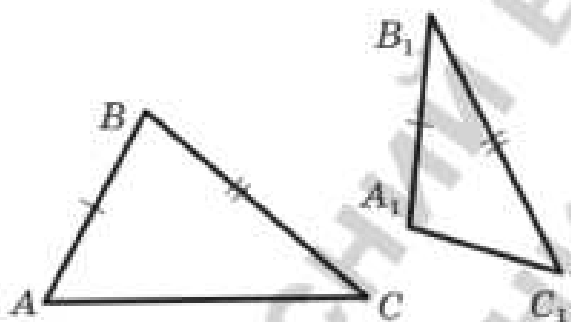


Рис. 229

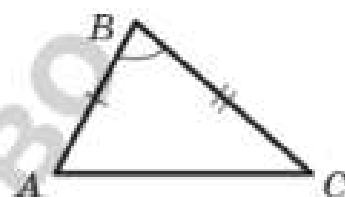
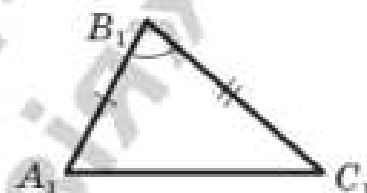


Рис. 230

Теорема 42.1 (перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними). Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. ☺ Розглянемо трикутники ABC та $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 230). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб промінь BA сумістився з променем B_1A_1 , а промінь BC сумістився з променем B_1C_1 . Це можна зробити, тому що за умовою $\angle B = \angle B_1$. Оскільки за умовою $BA = B_1A_1$ і $BC = B_1C_1$, то при такому накла-

данні сторона BA суміститься зі стороною B_1A_1 , а сторона BC — зі стороною B_1C_1 . Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, а тому вони рівні. ●

Означення. Пряму, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину, називають **серединним перпендикуляром** відрізка.

На рисунку 231 пряма a є серединним перпендикуляром відрізка AB . Зауважимо, що точки A і B рівновіддалені від прямої a .

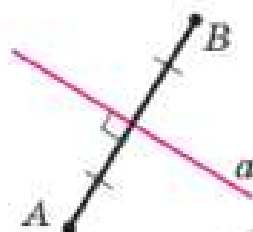


Рис. 231

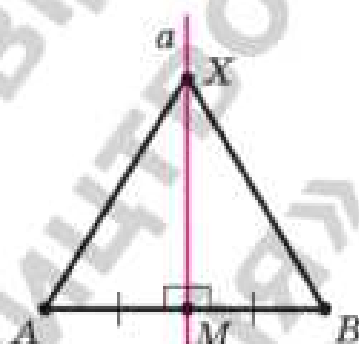


Рис. 232

Теорема 42.2. Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.

Доведення. ☹ Нехай X — довільна точка серединного перпендикуляра a відрізка AB . Треба довести, що $XA = XB$. Нехай точка M — середина відрізка AB . Якщо точка X збігається з точкою M (а це можливо, оскільки X — довільна точка прямої a), то $XA = XB$.

Якщо точки X і M не збігаються, то розглянемо трикутники AXM і BXM (рис. 232). У цих трикутниках $AM = MB$, оскільки точка M — середина відрізка AB , сторона XM — спільна, $\angle AMX = \angle BMX = 90^\circ$. Отже, трикутники AXM і BXM рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників. Тоді відрізки XA і XB рівні як відповідні сторони рівних трикутників. ●

Теорема 42.3 (друга ознака рівності трикутників: за стороною та двома прилеглими до неї кутами). Якщо сторона та два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. ☺ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 233). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

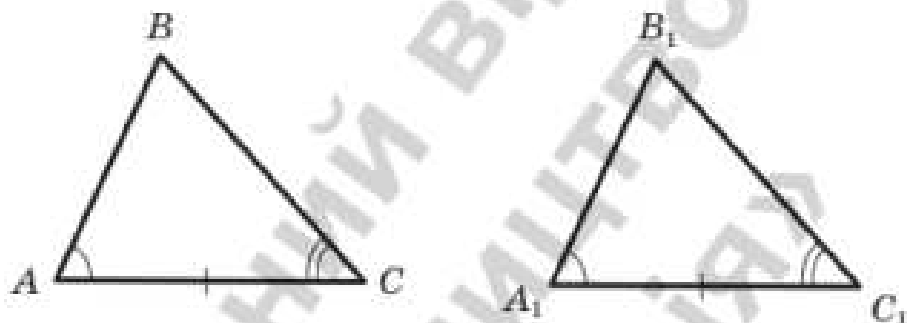


Рис. 233

Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб точка A сумістилася з точкою A_1 , відрізок AC — з відрізком A_1C_1 (це можливо, тому що $AC = A_1C_1$) і точки B і B_1 лежали в одній півплощині відносно прямої A_1C_1 . Оскільки $\angle A = \angle A_1$ і $\angle C = \angle C_1$, то промінь AB суміститься з променем A_1B_1 , а промінь CB — із променем C_1B_1 . Тоді точка B — спільна точка променів AB і CB — суміститься з точкою B_1 — спільною точкою променів A_1B_1 і C_1B_1 . Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, а тому вони рівні. ●

Задача. На рисунку 234 точка O — середина відрізка BD , $\angle ABO = \angle CDO$. Доведіть, що $BC = AD$.

Розв'язання. Розглянемо трикутники AOB і COD . Оскільки точка O — середина відрізка BD , то $BO = OD$.

За умовою $\angle ABO = \angle CDO$. Кути AOB і COD рівні як вертикальні. Отже, $\triangle AOB = \triangle COD$ за стороною та двома прилеглими кутами, тобто за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$ як відповідні сторони рівних трикутників. Зауважимо, що BD — спільна сторона трикутників ABD і CDB . Також за умовою $\angle ABD = \angle CDB$. Отже, трикутники ABD і CDB рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників. Тоді $BC = AD$. ◀

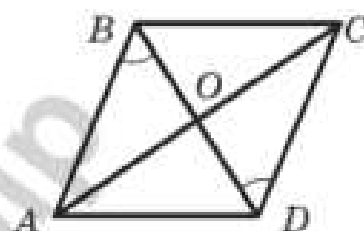


Рис. 234



1. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників.
2. Яку пряму називають серединним перпендикуляром відрізка?
3. Яку властивість мають точки серединного перпендикуляра відрізка?
4. Сформулюйте другу ознаку рівності трикутників.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1350.° За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, дві сторони якого дорівнюють 3 см і 6 см, а кут між ними — 40° .

1351.° За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, дві сторони якого дорівнюють 3 см і 4 см, а кут між ними — 90° . Укажіть вид цього трикутника.

1352.° За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, одна сторона якого дорівнює 3 см, а кути, що прилягають до цієї сторони, — 100° і 20° . Укажіть вид цього трикутника.

1353.° За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, одна сторона якого дорівнює 6 см, а кути, що прилягають до цієї сторони, — 90° і 45° .

1354.° Перерисуйте в зошит рисунок 235. За допомогою косинця та лінійки знайдіть на прямій l точку, рівновіддалену від кінців відрізка AB .

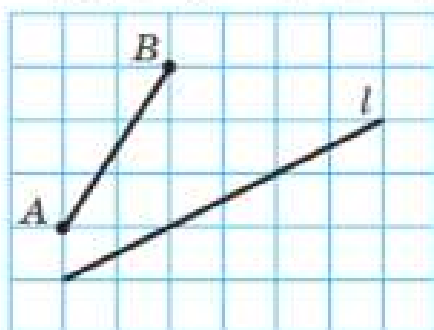


Рис. 235

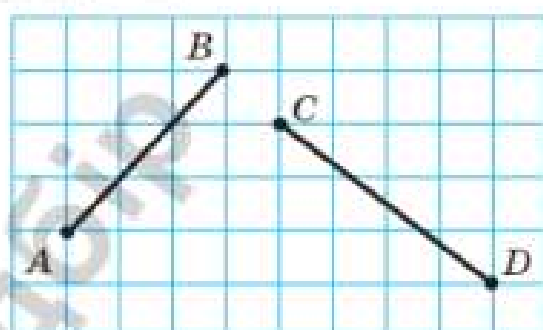
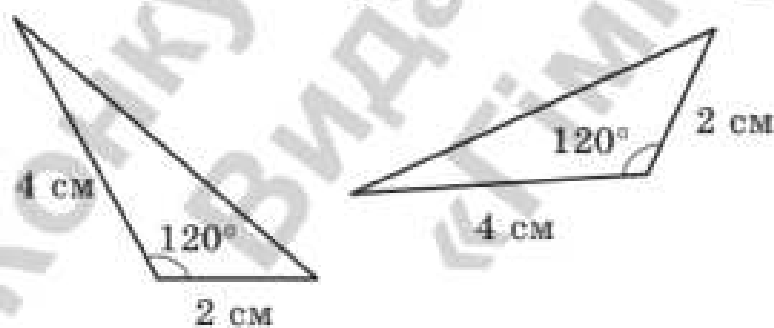


Рис. 236

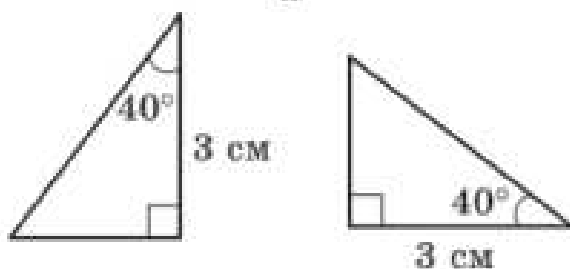
1355.° Перерисуйте в зошит рисунок 236. За допомогою косинця та лінійки знайдіть точку, яка рівновіддалена від точок A і B та водночас рівновіддалена від точок C і D .

ВПРАВИ

1356.° Чи є рівними трикутники, зображені на рисунку 237? У разі ствердної відповіді вкажіть, за якою ознакою рівності трикутників вони рівні.



а



б

Рис. 237

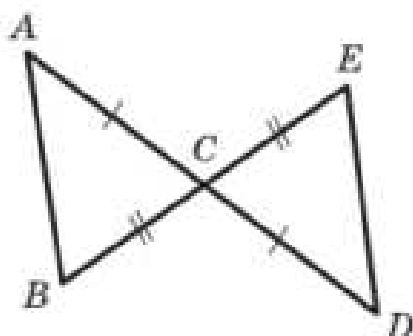


Рис. 238

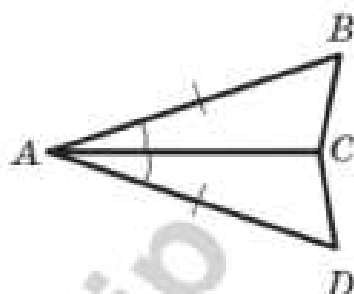


Рис. 239

1357.° На рисунку 238 $AC = DC$, $BC = EC$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEC$.

1358.° На рисунку 239 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle ADC$.

1359.° На рисунку 240 $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 7$ см, $\angle C = 34^\circ$. Знайдіть відрізок BC і кут A .

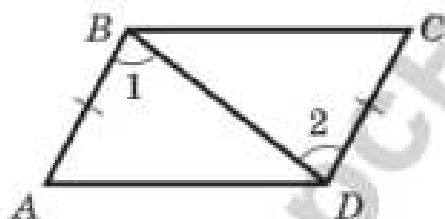


Рис. 240



Рис. 241

1360.° На рисунку 241 $AO = OD$, $BO = OC$. Знайдіть сторону CD і кут OCD трикутника OCD , якщо $AB = 8$ см, $\angle OBA = 43^\circ$.

1361.° Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (рис. 242). Доведіть, що $\angle OAD = \angle OCB$.

1362.° Дано: $AC = BD$, $\angle BAC = \angle ABD$ (рис. 243). Доведіть, що $AD = BC$.

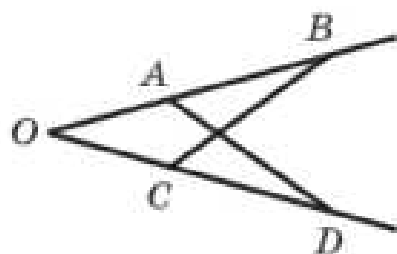


Рис. 242

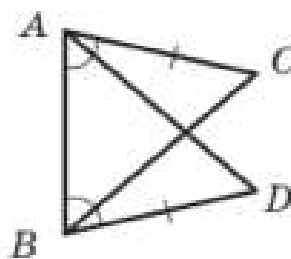


Рис. 243

1363.° Дано: $\angle ADC = \angle ADB$, $BD = CD$ (рис. 244). Доведіть, що $AB = AC$.

1364.° На рисунку 245 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, точка O — середина відрізка BD . Доведіть, що $\triangle ABO = \triangle CDO$.

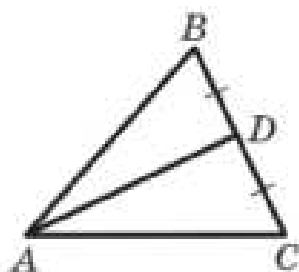


Рис. 244

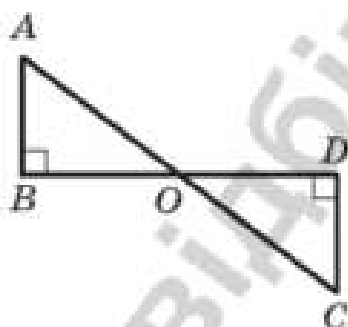


Рис. 245

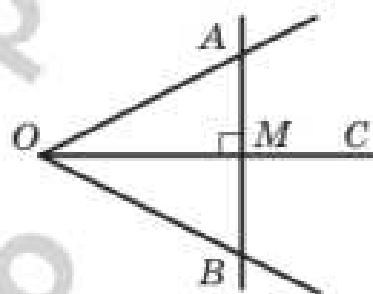


Рис. 246

1365.° На рисунку 246 промінь OC — бісектриса кута AOB , прямі AB і OC перпендикулярні. Доведіть, що $\triangle AMO = \triangle BMO$.

1366.° На рисунку 247 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть сторони AD і CD трикутника ADC .

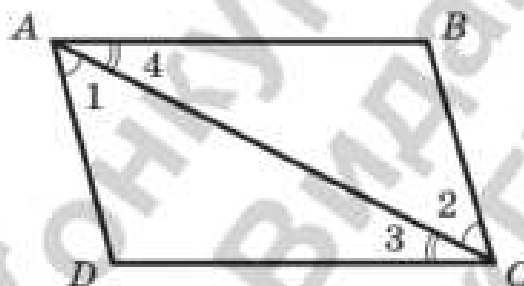


Рис. 247

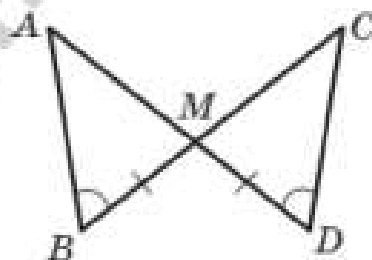


Рис. 248

1367.° На рисунку 248 $\angle B = \angle D$, $BM = DM$, $CD = 7$ см, $CM = 4$ см. Знайдіть сторони AB і AM трикутника ABM .

1368.° На рисунку 249 $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Доведіть, що $\triangle BCO = \triangle EFO$.

1369.° На рисунку 250 $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle BAC = \angle DCA$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$.

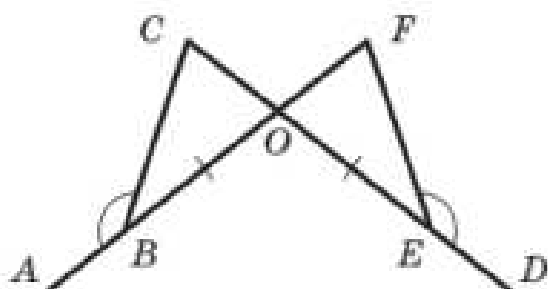


Рис. 249

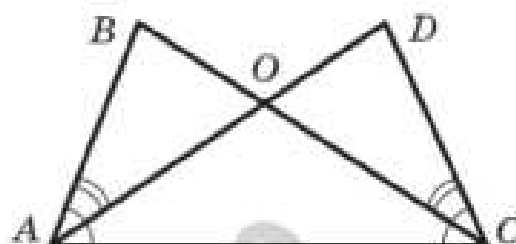


Рис. 250

1370.* Із точок A і B , які лежать в одній півплощині відносно прямої a на однаковій відстані від неї, опущено на цю пряму перпендикуляри AC і BD . Знайдіть кут ACB , якщо $\angle ADC = 25^\circ$.

1371.* Відрізки AD і BC перетинаються в точці O та діляться цією точкою навпіл. Знайдіть кут ACD , якщо $\angle ABC = 64^\circ$, $\angle ACO = 56^\circ$.

1372.* На сторонах кута з вершиною в точці B позначено точки A і C , а на його бісектрисі — точку D таку, що $\angle ADB = \angle CDB$. Доведіть, що $AB = BC$.

1373.* Через точку M , що належить бісектрисі кута з вершиною в точці O , проведено пряму, яка перпендикулярна до цієї бісектриси. Ця пряма перетинає сторони даного кута в точках A і B . Доведіть, що $AM = MB$.

1374.* На рисунку 251 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle DBC = \triangle D_1B_1C_1$.

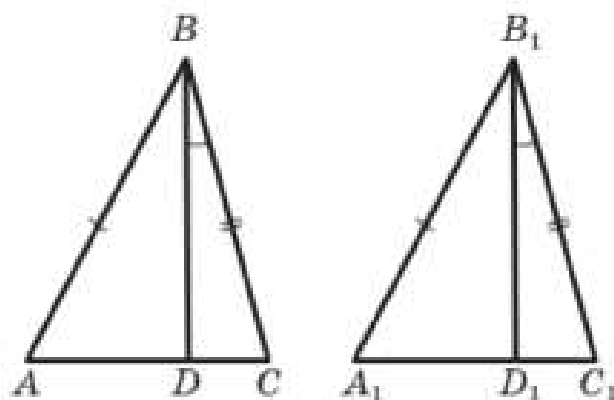


Рис. 251

1375.* На рисунку 252 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $AD = A_1D_1$. Доведіть, що $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$.

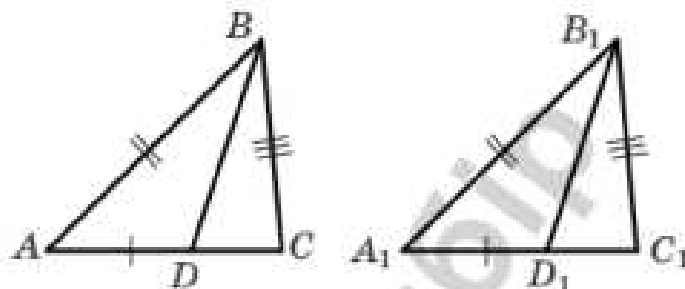


Рис. 252

1376.* На рисунку 253 $\triangle ABC = \triangle ADC$. Доведіть, що $\triangle ABK = \triangle ADK$.

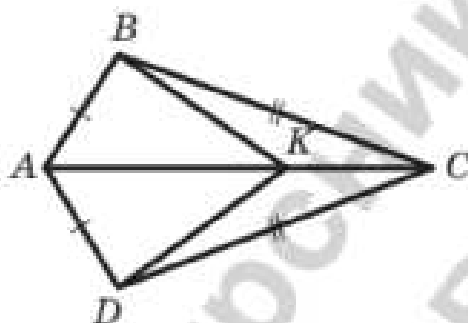


Рис. 253

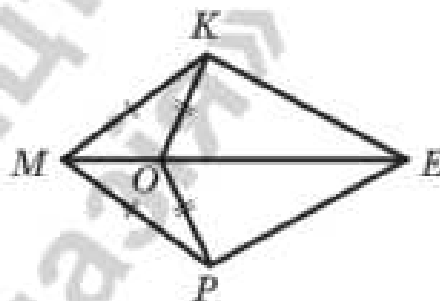


Рис. 254

1377.* На рисунку 254 $\triangle MKO = \triangle MPO$. Доведіть, що $\triangle KOE = \triangle POE$.

1378.* На продовженні медіани AM трикутника ABC за точку M відкладено відрізок MK , який дорівнює відрізку AM . Знайдіть відстань від точки K до вершини C , якщо $AB = 6$ см.

1379.* Відрізки AB і CD перетинаються в точці O та діляться точкою перетину навпіл. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle BAD$.

1380.* На рисунку 255 прямі m і n — серединні перпендикуляри сторін AB і AC трикутника ABC . Доведіть, що точка O рівновіддалена від усіх вершин даного трикутника.

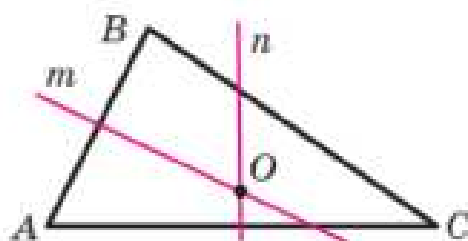


Рис. 255

1381.* Доведіть, що бісектриси рівних трикутників, проведені з відповідних кутів, рівні.

1382.* Доведіть, що в рівних трикутниках медіани, проведені до відповідних сторін, рівні.

1383.* Серединний перпендикуляр сторони BC трикутника ABC перетинає сторону AB у точці D . Знайдіть відрізок AD , якщо $CD = 4$ см, $AB = 7$ см.

1384.* Серединний перпендикуляр сторони AB трикутника ABC перетинає сторону BC у точці M . Знайдіть довжину сторони AC трикутника ABC , якщо $BC = 16$ см, а периметр трикутника AMC дорівнює 26 см.

1385.* На рисунку 256 $OA = OD$. Додайте ще одну умову таку, щоб трикутники AOC і DOB виявилися рівними:

- 1) за першою ознакою рівності трикутників;
- 2) за другою ознакою рівності трикутників.



Рис. 256

1386.* Відрізки AB і CD перетинаються в точці O та діляться цією точкою навпіл. На відрізку AC позначено точку M , а на відрізку BD — точку K так, що $AM = BK$. Доведіть, що: 1) $OM = OK$; 2) точки M , O і K лежать на одній прямій.

1387.* На одній стороні кута з вершиною в точці O (рис. 257) позначено точки A і B , а на другій — точки C і D так, що $OA = OC$, $AB = CD$. Доведіть, що промінь OM є бісектрисою кута BOD , де M — точка перетину відрізків AD і BC .

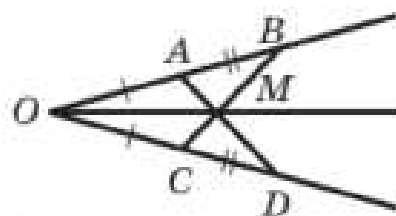


Рис. 257

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1388. Знайдіть значення виразу:

- 1) $(5a^3 - 20a^2) - (4a^3 - 18a^2)$, якщо $a = -3$;
- 2) $4b^2 - (7b^2 - 3bc) + (3b^2 - 7bc)$, якщо $b = -1,5$, $c = 4$.

1389. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $6x(7x - 8) - 2x(21x - 6) = 3 - 30x$;
- 2) $8(x^2 - 4) - 4x(3,5x - 7) = 20x - 6x^2$.

1390. Дві робітниці виготовили разом 108 деталей. Перша робітниця працювала 5 год, а друга — 3 год. Скільки деталей виготовляла щогодини кожна робітниця, якщо разом за 1 год вони виготовляють 26 деталей?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

1391. Для знаходження відстані від точки B до дзвіниці A , яка розташована на другому березі річки (рис. 258), за

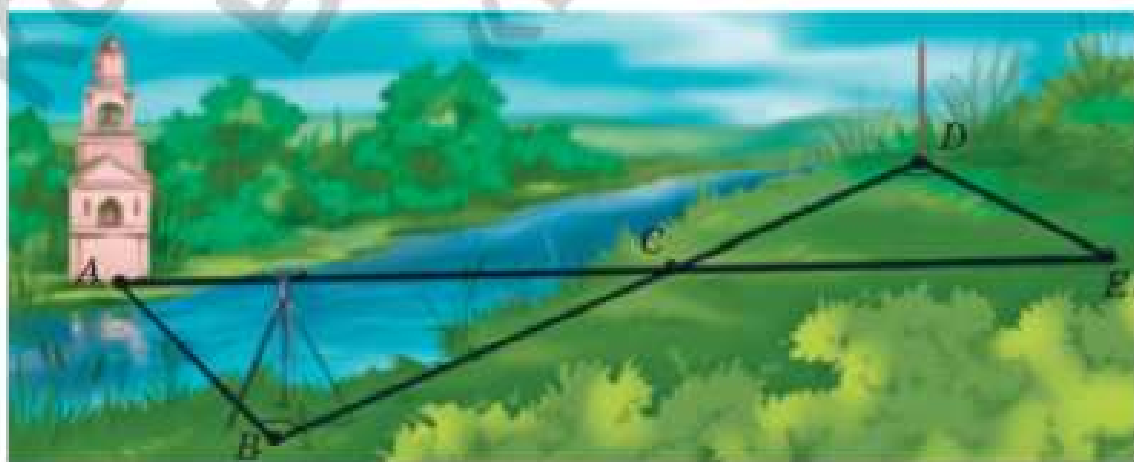


Рис. 258

допомогою віх, рулетки й астролябії позначили на місцевості точки C , D і E так, що точки B , C і D лежать на одній прямій, причому точка C є серединою відрізка BD . Потім намітили пряму AE , яка проходить через точку C , причому $\angle ABC = \angle CDE$. Потім, вимірявши одну зі сторін трикутника CDE , визначили відстань від точки B до точки A . Яку сторону виміряли? Відповідь обґрунтуйте.

1392. Для визначення ширини озера (рис. 259) на його березі позначили точки A і B , а потім ще точки C , D і O так, щоб точка O була спільною серединою відрізків AC і BD . Як можна визначити ширину озера? Відповідь обґрунтуйте.

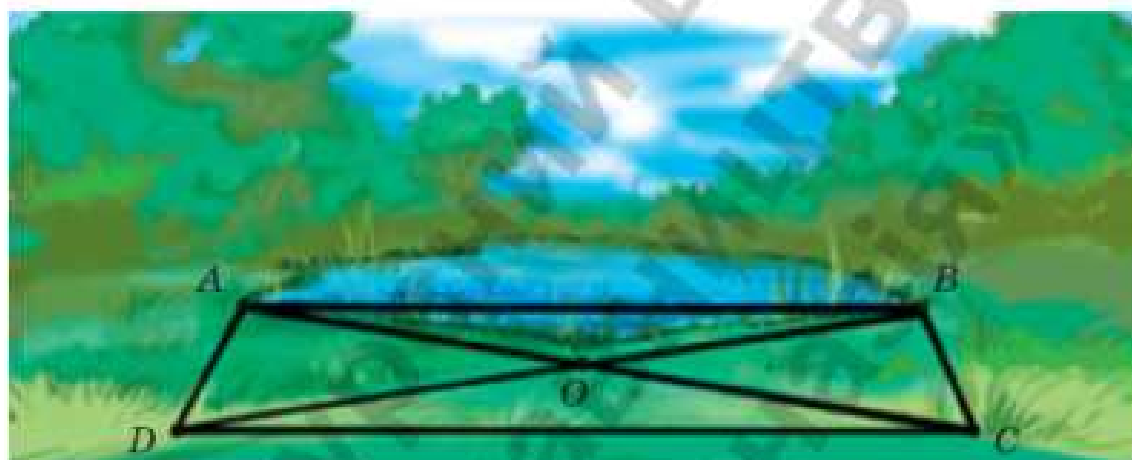


Рис. 259

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

1393. Розділіть кожну з фігур, що зображено на рисунку 260, уздовж ліній сітки на чотири рівні частини так, щоб у кожній частині було тільки одне коло.

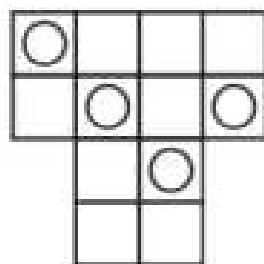
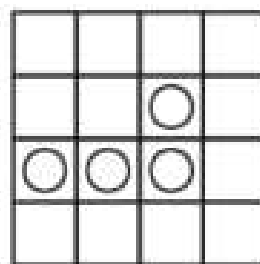


Рис. 260

43. Рівнобедрений трикутник та його властивості

Означення. Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають рівнобедреним.

На рисунку 261 зображено рівнобедрений трикутник ABC , у якого $AB = BC$.

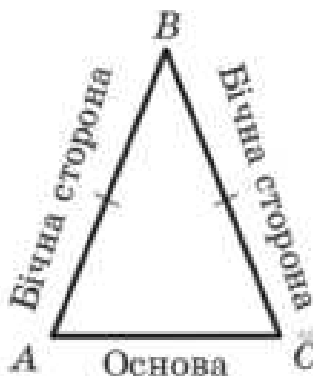


Рис. 261

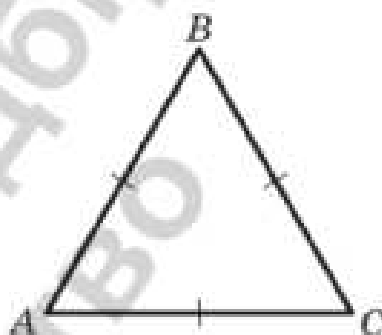


Рис. 262

Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають бічними сторонами, а третю сторону — основою рівнобедреного трикутника.

Вершиною рівнобедреного трикутника називають спільну точку його бічних сторін (точка B на рисунку 261). При цьому кут B називають кутом при вершині, а кути A і C — кутами при основі рівнобедреного трикутника.

Означення. Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім.

На рисунку 262 зображено рівносторонній трикутник ABC . Рівносторонній трикутник — окремий вид рівнобедреного трикутника.

Теорема 43.1 (властивості рівнобедреного трикутника). У рівнобедреному трикутнику: 1) кути при основі рівні; 2) бісектриса трикутника, проведена до його основи, є його медіаною та висотою.

Доведення. ☺ Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC , у якому $AB = BC$, відрізок BL — його бісектриса (рис. 263). Треба довести, що $\angle A = \angle C$, $AL = LC$, $BL \perp AC$.

У трикутниках ABL і CBL сторона BL — спільна, $\angle ABL = \angle CBL$, оскільки за умовою відрізок BL — бісектриса кута ABC , сторони AB і BC рівні як бічні сторони рівнобедреного трикутника. Отже, $\triangle ABL = \triangle CBL$ за першою ознакою трикутників. Звідси можна зробити такі висновки: 1) $\angle A = \angle C$; 2) $AL = LC$; 3) $\angle ALB = \angle CLB$.

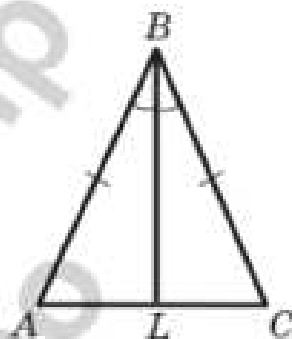


Рис. 263

Оскільки відрізки AL і LC рівні, то відрізок BL — медіана трикутника ABC .

Кути ALB і CLB суміжні, отже, $\angle ALB + \angle CLB = 180^\circ$. Ураховуючи, що $\angle ALB = \angle CLB$, отримуємо: $\angle ALB = \angle CLB = 90^\circ$. Отже, відрізок BL — висота трикутника ABC . ●

Із теореми 43.1 випливає, що:

1) у трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути;

2) у рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені до його основи, збігаються;

3) у рівносторонньому трикутнику всі кути рівні;

4) у рівносторонньому трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.

Означення. Якщо в трикутнику довжини всіх сторін різні, то такий трикутник називають різностороннім.

Задача. Відрізок AD — медіана рівнобедреного трикутника ABC , яка проведена до основи. На сторонах AB і AC позначено відповідно точки M і K так, що $BM = CK$. Доведіть рівність трикутників AMD і AKD .

Розв'язання. Точка M належить відрізку AB , а точка K — відрізку AC , отже, $AB = AM + BM$, $AC = AK + CK$ (рис. 264).

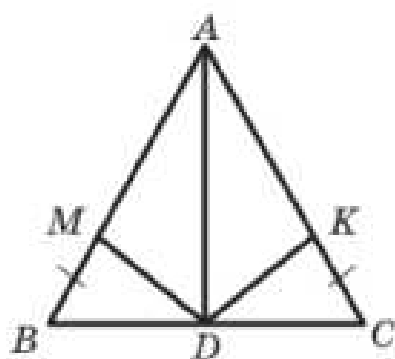


Рис. 264

Оскільки $AB = AC$ і $BM = CK$, то $AM = AK$.

Кути BAD і CAD рівні, оскільки медіана рівнобедреного трикутника, яка проведена до основи, є його бісектрисою.

Зауважимо, що відрізок AD — спільна сторона трикутників AMD і AKD .

Отже, трикутники AMD і AKD рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників. ◀



1. Які існують види трикутників залежно від кількості рівних сторін?
2. Який трикутник називають рівнобедреним? рівностороннім? різностороннім?
3. Які сторони рівнобедреного трикутника називають бічними?
4. Яку сторону рівнобедреного трикутника називають основою?
5. Сформулюйте властивість кутів рівнобедреного трикутника.
6. Сформулюйте властивість бісектриси рівнобедреного трикутника, проведеної до основи.
7. Яку властивість мають кути трикутника, що лежать проти його рівних сторін?
8. Сформулюйте властивість кутів рівностороннього трикутника.
9. Яку властивість мають бісектриса, висота й медіана рівностороннього трикутника, проведені з однієї вершини?



Якщо прикметник утворюється приєднанням суфікса $\hat{\text{н}}$ до іменника з основою на -н , то пишемо його з двома буквами **нн**: *сторона* + $\hat{\text{н}}$ = *односторонній*, *середина* + $\hat{\text{н}}$ = *серединний*.

Якщо прикметник утворюється приєднанням суфікса $\hat{\text{н}}$ до іменника з основою на будь-яку іншу букву, то пишемо його з однією буквою **н**: *паралель* + $\hat{\text{н}}$ = *паралельний*, *кут* + $\hat{\text{н}}$ = *прямокутний*.

Тому пишемо: *рівносторонній* і *різносторонній*, але *рівнобедрений трикутник*.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1394.° Накресліть:

- 1) різносторонній гострокутний трикутник;
- 2) рівнобедрений прямокутний трикутник;
- 3) рівнобедрений тупокутний трикутник.

1395.° Накресліть:

- 1) різносторонній прямокутний трикутник;
- 2) різносторонній тупокутний трикутник.

1396.° Накресліть рівнобедрений трикутник з бічною стороною завдовжки 3 см так, щоб його кут при вершині був: 1) гострим; 2) прямим; 3) тупим. У побудованих трикутниках проведіть висоти до бічних сторін.

ВПРАВИ

1397.° 1) Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 13 см, а бічна сторона — 8 см.

2) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 39 см, а основа — 15 см. Знайдіть бічні сторони трикутника.

1398.° Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 28 см, а бічна сторона — 10 см. Знайдіть основу трикутника.

1399.[°] Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 32 см, а основа на 5 см більша за бічну сторону.

1400.[°] Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 54 см, а основа в 4 рази менша від бічної сторони.

1401.[°] У рівнобедреному трикутнику ABC сторона AC — основа, $\angle BCA = 40^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$, відрізок BD — медіана. Знайдіть кути трикутника ABD .

1402.[°] На рисунку 265 $AB = BC$, відрізок BD — медіана трикутника ABC , $\angle ABD = 53^\circ$. Знайдіть кути ABC і ADE .

1403.[°] На рисунку 266 $MK = KE$, $OE = 6$ см, $\angle MKE = 48^\circ$, $\angle POE = 90^\circ$. Знайдіть сторону ME і кут MKO .

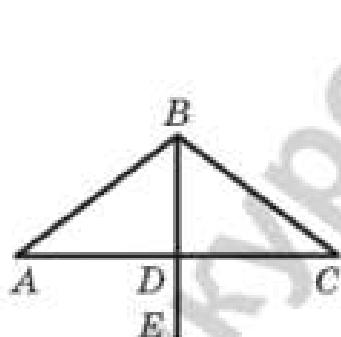


Рис. 265

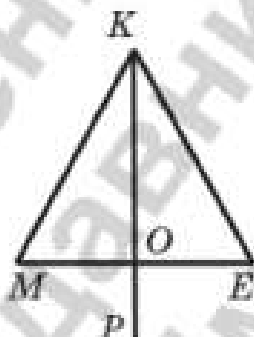


Рис. 266

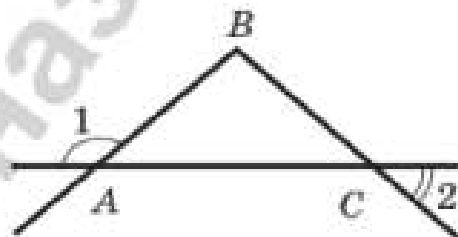


Рис. 267

1404.[°] На рисунку 267 $AB = BC$, $\angle 1 = 140^\circ$. Знайдіть кут 2.

1405.[°] Кут, вертикальний до кута при вершині рівнобедреного трикутника, дорівнює 68° . Знайдіть кут між бічною стороною трикутника та медіаною, проведеною до основи.

1406.[°] Кут, суміжний із кутом при вершині рівнобедреного трикутника, дорівнює 76° . Знайдіть кут між бічною стороною трикутника та висотою, опущеною на основу.

1407.° На рисунку 268 $AB = BC$, $DC = DE$. Доведіть, що $\angle A = \angle E$.

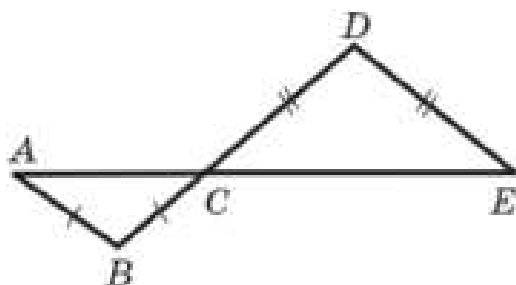


Рис. 268

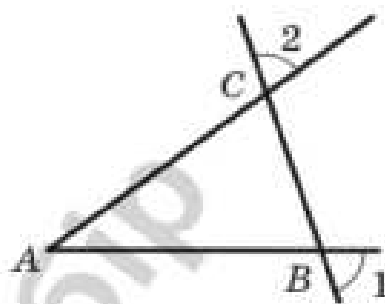


Рис. 269

1408.° Пряма перетинає сторони кута A в точках B і C так, що $AB = AC$ (рис. 269). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

1409.° На рисунку 270 $AO = CO$, $\angle AOB = \angle COB$. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

1410.* Трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC, BD — його бісектриса, DM — бісектриса трикутника BDC. Знайдіть кут ADM.

1411.* Учень стверджує, що деякий трикутник рівнобедрений, а учениця — що цей трикутник рівносторонній.

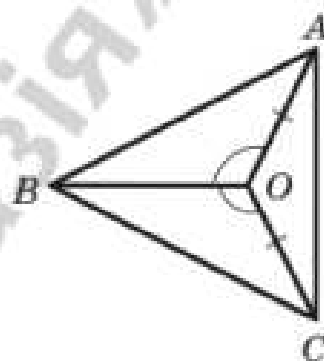


Рис. 270

1) Чи можуть обидві дитини мати рацію?

2) У якому випадку має рацію тільки одна дитина і хто саме?

1412.* Використовуючи ознаки рівності трикутників, доведіть ознаку рівності рівнобедрених трикутників за бічною стороною та кутом при вершині.

1413.* Використовуючи ознаки рівності трикутників, доведіть ознаку рівності рівнобедрених трикутників за основою та прилеглим до неї кутом.

1414.* У трикутнику MKE відомо, що $MK = ME$. На стороні KE позначено точки F і N так, що точка N

лежить між точками F і E , причому $\angle KMF = \angle EMN$. Доведіть, що $\angle MFN = \angle MNF$.

1415.* На основі AC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки M і K так, що точка M лежить між точками A і K , причому $AM = CK$. Доведіть, що трикутник MBK рівнобедрений.

1416.* На бічних сторонах CA і CB рівнобедреного трикутника ABC відкладено відповідно рівні відрізки CK і CM . Доведіть, що: 1) $\triangle AMC = \triangle BKC$; 2) $\triangle AMB = \triangle BKA$.

1417.* У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC на медіані BD позначили довільну точку M . Доведіть, що: 1) $\triangle AMB = \triangle CMB$; 2) $\triangle AMD = \triangle CMD$.

 **1418.*** Доведіть, що бісектриси рівнобедреного трикутника, проведені з вершин кутів при основі, рівні.

 **1419.*** Доведіть, що медіани рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні.

1420.* Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами рівнобедреного трикутника.

1421.* Знайдіть третю сторону рівнобедреного трикутника, якщо дві інші його сторони дорівнюють 7 см і 4 см. Скільки розв'язків має задача?

1422.* Одна зі сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см. Знайдіть дві інші сторони, якщо периметр трикутника дорівнює 14 см.

1423.* Чи є правильним твердження:

- 1) бісектриса рівнобедреного трикутника є його висотою та медіаною;
- 2) бісектриса рівностороннього трикутника є його висотою та медіаною;
- 3) якщо периметр трикутника в 3 рази більший за одну з його сторін, то цей трикутник рівносторонній?

1424." На продовженнях сторін AB , BC , AC рівностороннього трикутника ABC (рис. 271) за точки A , B і C відповідно відклали рівні відрізки AD , BK і CE . Доведіть, що трикутник DEK — рівносторонній.

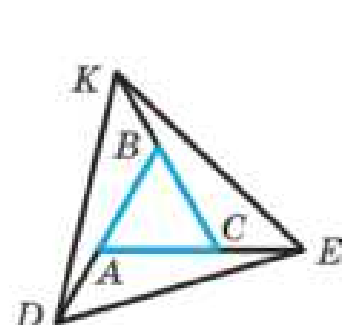


Рис. 271

1425." На сторонах рівностороннього трикутника ABC (рис. 272) позначили точки M , K і D так, що $AD = BM = CK$. Доведіть, що трикутник MKD рівносторонній.

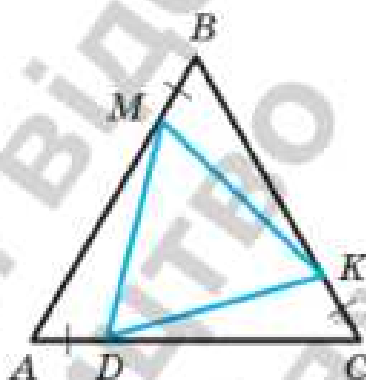


Рис. 272

1426." Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а його медіана ділить даний трикутник на два трикутники так, що периметр одного з них на 6 см менший від периметра другого. Знайдіть бічну сторону даного трикутника. Скільки розв'язків має задача?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1427. Доведіть, що значення різниці двочленів $13m + 20n$ і $7m + 2n$, де m і n — довільні натуральні числа, ділиться націло на 6.

1428. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{4x-1}{12} - \frac{3x+1}{8} = x+1; \quad 2) \frac{3x-2}{9} - \frac{2x+1}{6} = \frac{5-x}{3}.$$

1429. Для ремонту школи придбали фарбу. Першого дня витратили на 2 банки фарби більше за половину всієї фарби, а другого — $\frac{5}{8}$ кількості банок фарби, витраченої за перший день. Після цього залишилося 2 банки. Скільки банок фарби було придбано?

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

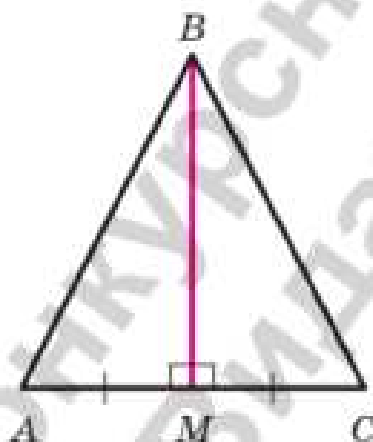
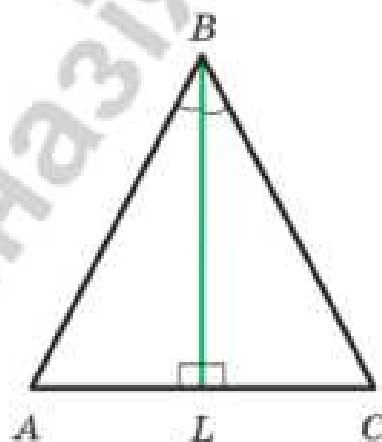
1430. Нарисуйте шестикутник, який можна одним розрізом поділити на два трикутники.

44. Ознаки рівнобедреного трикутника

У попередньому пункті ми розглянули властивості рівнобедреного трикутника. А як серед трикутників розпізнавати рівнобедрені? На це запитання відповідають такі теореми-ознаки.

Теорема 44.1. *Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.*

Доведення. ☉ Розглянемо трикутник ABC , у якому відрізок BM — медіана й висота. Треба довести, що $AB = BC$ (рис. 273).

**Рис. 273****Рис. 274**

З умови теореми випливає, що пряма BM — серединний перпендикуляр відрізка AC .

Тоді за властивістю серединного перпендикуляра $AB = BC$. ●

Теорема 44.2. *Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.*

Доведення. ☉ Розглянемо трикутник ABC , у якому відрізок BL — бісектриса й висота. Треба довести, що $AB = BC$ (рис. 274).

У трикутниках ABL і CBL сторона BL — спільна; $\angle ABL = \angle CBL$ (оскільки за умовою промінь BL — бісектриса кута ABC), $\angle ALB = \angle CLB = 90^\circ$ (оскільки за умовою відрізок BL — висота). Отже, трикутники ABL і CBL рівні за другою ознакою рівності трикутників. Тоді сторони AB і BC рівні як відповідні сторони рівних трикутників. ●

Теорема 44.3. Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.

Доведення. ⑤ Розглянемо трикутник ABC , у якому $\angle A = \angle C$. Треба довести, що $AB = BC$.

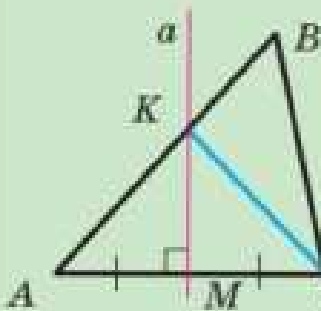


Рис. 275

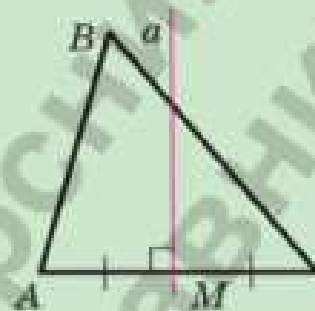


Рис. 276

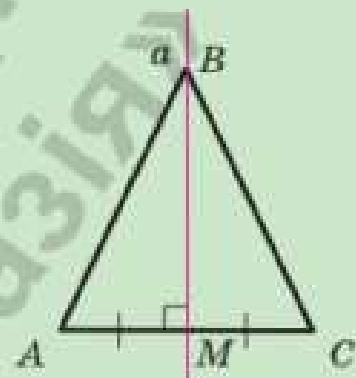


Рис. 277

Проведемо серединний перпендикуляр a сторони AC . Доведемо, що пряма a проходить через вершину B .

Припустимо, що це не так. Тоді пряма a перетинає у внутрішній точці або сторону AB (рис. 275), або сторону BC (рис. 276).

Розглянемо перший із цих випадків. Нехай K — точка перетину прямої a зі стороною AB . Тоді за властивістю серединного перпендикуляра (теорема 42.2) $AK = CK$. Отже, трикутник AKC — рівнобедрений, звідси $\angle A = \angle ACK$. Проте за умовою $\angle A = \angle ACB$. Тоді маємо: $\angle ACB = \angle ACK$, що суперечить основній властивості величини кута (п. 37).

Аналогічно отримуємо суперечність і для другого випадку (рис. 276).

Отже, наше припущення неправильне. Пряма a проходить через точку B (рис. 277). Тоді за властивістю серединного перпендикуляра $BA = BC$. ●

Із цієї теореми випливає, що:

1) у трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони;

2) якщо в трикутнику всі кути рівні, то цей трикутник рівносторонній.

Теорема 44.4. Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

Доведення. ☉ Розглянемо трикутник ABC , у якому відрізок BM — медіана й бісектриса. Треба довести, що $AB = BC$.

На промені BM відкладемо відрізок MD , який дорівнює відрізку BM (рис. 278).

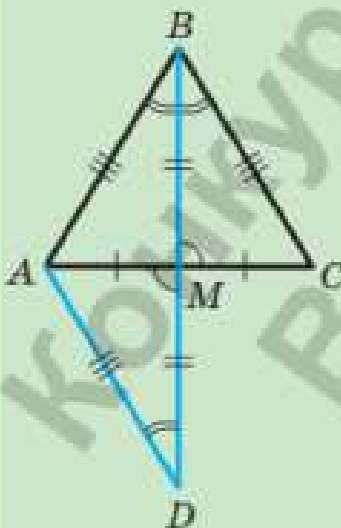


Рис. 278

У трикутниках AMD і CMB маємо: $AM = MC$ (оскільки за умовою відрізок BM — медіана); $BM = MD$ за побудовою; кути AMD і CMB рівні як вертикальні. Отже, трикутники AMD і CMB рівні за першою ознакою рівності трикутників. Тоді сторони AD і BC , кути ADM і CBM рівні як відповідні елементи рівних трикутників.

Оскільки промінь BD — бісектриса кута ABC , то $\angle ABM = \angle CBM$. Оскільки $\angle CBM = \angle ADM$, то маємо, що $\angle ABM = \angle ADM$. Тоді за ознакою рівнобедреного трикутника (теорема 44.3) отримуємо, що трикутник DAB рівнобедрений, звідки $AD = AB$. І вже доведено, що $AD = BC$. Отже, $AB = BC$. ●

Задача. У трикутнику ABC проведено бісектрису BM (рис. 279), $\angle BAK = 70^\circ$, $\angle AKC = 110^\circ$. Доведіть, що $BM \perp AK$.

Розв'язання. Оскільки кути BKA і AKC суміжні, то $\angle BKA = 180^\circ - \angle AKC$.

Тоді $\angle BKA = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Отже, у трикутнику ABK отримуємо, що $\angle BAK = \angle BKA = 70^\circ$.

Тому трикутник ABK рівнобедрений з основою AK , і його бісектриса BO (O — точка перетину відрізків AK і BM) є також висотою, тобто $BM \perp AK$. $\blacktriangleleft$

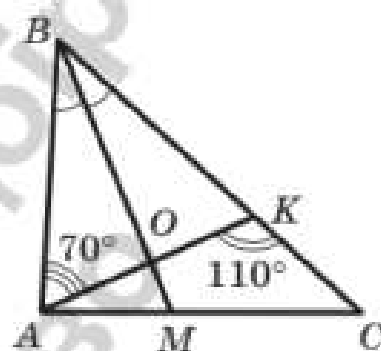


Рис. 279



1. Сформулюйте ознаки рівнобедреного трикутника.
2. Який зв'язок між рівними кутами та рівними сторонами трикутника?
3. Що можна сказати про трикутник, якщо всі його кути рівні?

ВПРАВИ

1431.° У трикутнику ABC медіана BK перпендикулярна до сторони AC . Знайдіть кут ABC , якщо $\angle ABK = 25^\circ$.

1432.° Серединний перпендикуляр сторони AC трикутника ABC проходить через вершину B . Знайдіть кут C , якщо $\angle A = 17^\circ$.

1433.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, відрізок CK — висота. Знайдіть сторону AB , якщо $CK = 7$ см.

1434.° На рисунку 280 $\angle AMK = \angle ACB$, $AK = MK$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

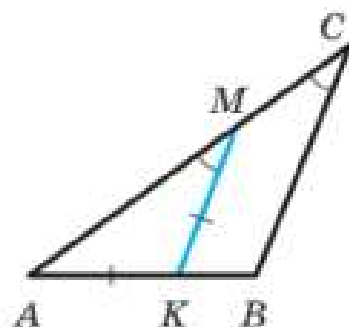


Рис. 280

1435.° На рисунку 281 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

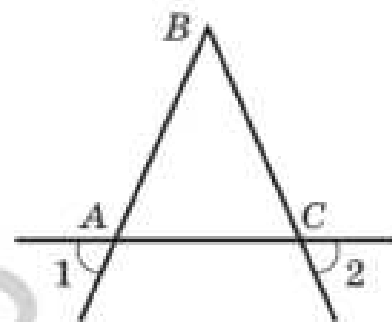


Рис. 281

1436.° Пряма, перпендикулярна до бісектриси кута A , перетинає його сторони в точках B і C . Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

1437.° Бісектриси AM і CK кутів при основі AC рівнобедреного трикутника ABC перетинаються в точці O . Доведіть, що трикутник AOC рівнобедрений.

1438.* У трикутнику ABC бісектриса BK є його висотою. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо периметр трикутника ABK дорівнює 16 см і $BK = 5$ см.

1439.* У трикутнику ABC медіана BM є його бісектрисою. Периметр трикутника ABC дорівнює 48 см, а периметр трикутника ABM — 30 см. Знайдіть відрізок BM .

1440.* Чи є правильним твердження:

- 1) якщо медіана й висота трикутника, проведені з однієї вершини, не збігаються, то цей трикутник не є рівнобедреним;
- 2) якщо бісектриса трикутника ділить протилежну сторону навпіл, то цей трикутник рівнобедрений?

1441.* Медіани AE і CF , проведені до бічних сторін BC і AB рівнобедреного трикутника ABC , перетинаються в точці M . Доведіть, що трикутник AMC рівнобедрений.

1442.* Точки M і K належать відповідно бічним сторонам AB і BC рівнобедреного трикутника ABC , $AM = CK$. Відрізки AK і CM перетинаються в точці O . Доведіть, що трикутник AOC рівнобедрений.

1443.** На сторонах AB і BC трикутника ABC позначили відповідно точки D і E так, що $\angle EAC = \angle DCA$.

Відрізки AE і CD перетинаються в точці F , $DF = EF$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

1444.* Через середину D сторони AB трикутника ABC проведено прямі, перпендикулярні до бісектрис кутів ABC і BAC . Ці прямі перетинають сторони AC і BC у точках M і K відповідно. Доведіть, що $AM = BK$.

1445.* Медіана AM трикутника ABC перпендикулярна до його бісектриси BK . Знайдіть сторону AB , якщо $BC = 16$ см.

1446.* Пряма, яка проходить через вершину A трикутника ABC перпендикулярно до його медіани BD , ділить цю медіану навпіл. Знайдіть відношення довжин сторін AB і AC трикутника ABC .

1447.* У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 67,5^\circ$, $\angle B = 22,5^\circ$, відрізок CK — бісектриса трикутника ABC , відрізок CM — бісектриса трикутника BCK (рис. 282). Доведіть, що точка M — середина відрізка AB .

1448.* Довжини сторін трикутника, виражені в сантиметрах, дорівнюють трьом послідовним натуральним числам. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо одна з його медіан перпендикулярна до однієї з його бісектрис.

1449.* У трикутнику ABC відомо, що $AB = 3$ см, $AC = 6$ см. На стороні BC позначено точку M таку, що $CM = 1$ см. Пряма, яка проходить через точку M перпендикулярно до бісектриси кута ACB , перетинає відрізок AC у точці K , а пряма, яка проходить через точку K перпендикулярно до бісектриси кута BAC , перетинає пряму AB у точці D . Знайдіть відрізок BD .

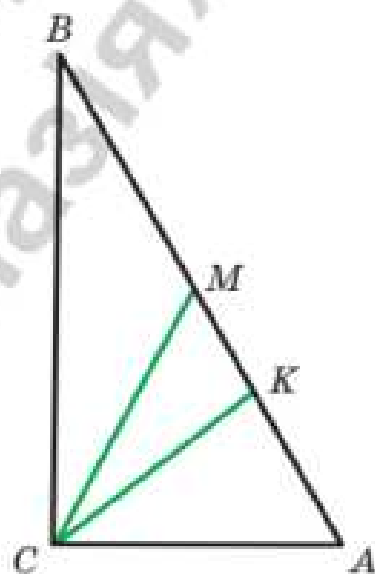


Рис. 282

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1450. Доведіть, що значення виразу

$$6x(x-3) - 9\left(\frac{2}{3}x^2 - 2x + 7\right)$$

не залежить від значення змінної.

1451. Розв'яжіть рівняння:

1) $\overline{1x+2x} = \overline{x6}$;

2) $\overline{x4+x8} = \overline{1x2}$.

1452. Від села до станції Василько може доїхати на велосипеді за 3 год, а дійти пішки — за 7 год. Швидкість руху пішки на 8 км/год менша від швидкості руху на велосипеді. З якою швидкістю їздить Василько на велосипеді? Яка відстань від села до станції?

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

1453. Розріжте прямокутник розміром 4×9 на дві рівні частини, з яких можна скласти квадрат.

45. Третя ознака рівності трикутників

Теорема 45.1 (третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами). Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. ⦿ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 283), у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (ці рівності вказують, які сторони трикутників відповідають одна одній). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1 , вершина B — з вершиною B_1 , а вершини C і C_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої AB (рис. 284). Проведе-

мо відрізок CC_1 . Оскільки $AC = A_1C_1$, то трикутник C_1A_1C рівнобедрений, а отже, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогічно можна довести, що $\angle 3 = \angle 4$. Отже, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$. Тоді трикутники $A_1C_1B_1$ і A_1CB_1 рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників.

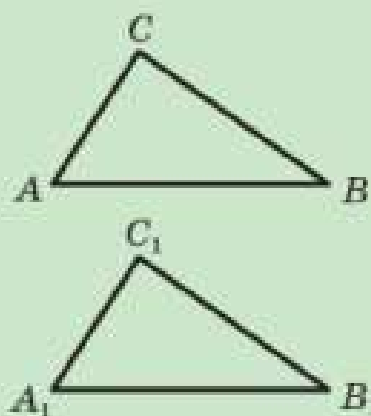


Рис. 283

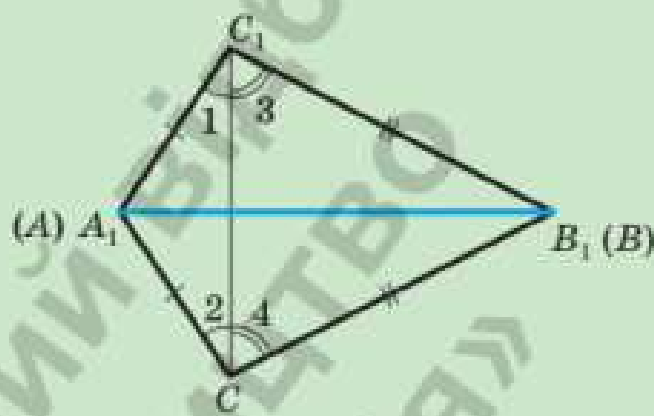


Рис. 284

Здавалося б, доведення завершено. Проте ми розглянули тільки випадок, коли відрізок CC_1 перетинає відрізок A_1B_1 у внутрішній точці. Насправді відрізок CC_1 може проходити через один із кінців відрізка A_1B_1 , наприклад через точку A_1 (рис. 285), або не мати спільних точок з відрізком A_1B_1 (рис. 286). У кожному із цих випадків доведення будуть аналогічними наведеному. Проведіть їх самостійно. ●

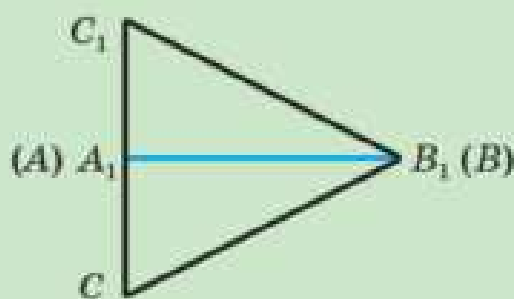


Рис. 285

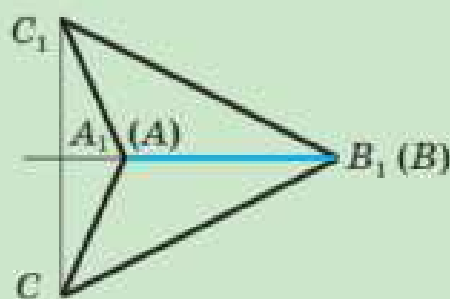


Рис. 286

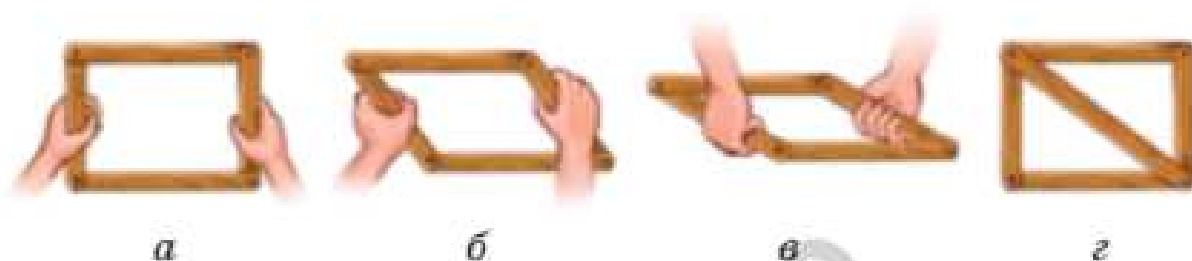


Рис. 287

Із третьої ознаки рівності трикутників випливає, що *трикутник — жорстка фігура*. Справді, якщо чотири рейки з'єднати так, як показано на рисунку 287, а, то така конструкція не буде жорсткою (рис. 287, б, в). Якщо ж додати ще одну рейку, утворивши два трикутники (рис. 287, г), то одержана конструкція стане жорсткою. Цей факт широко використовують на практиці (рис. 288).



Опори ліній електропередачі

Дарницький міст
через р. Дніпро

Рис. 288. Жорсткі конструкції

Теорема 45.2. *Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.*

Доведення. ☺ Нехай точка X рівновіддалена від кінців відрізка AB , тобто $XA = XB$ (рис. 289). Розглянемо трикутники AXM і BXM , де точка M — середина відрізка AB . Тоді $\triangle AXM = \triangle BXM$ за трьома сторонами, тобто за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle AMX = \angle BMX$. Сума цих кутів дорівнює 180° , тому кожний із них дорівнює 90° . Отже, пряма XM — серединний перпендикуляр відрізка AB .

Зауважимо, що ми розглянули випадок, коли точка X не належить прямій AB . Якщо точка X належить прямій AB , то вона збігається із серединою відрізка AB , а отже, належить його серединному перпендикуляру. ●

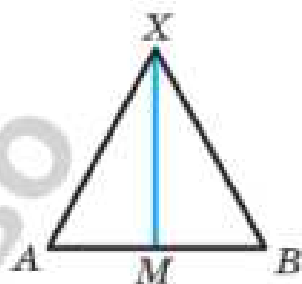


Рис. 289



1. Сформулюйте третю ознаку рівності трикутників. 2. Де знаходяться точки, які рівновіддалені від кінців відрізка?

ВПРАВИ

1454.° На рисунку 290 $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

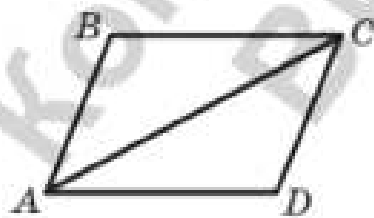


Рис. 290

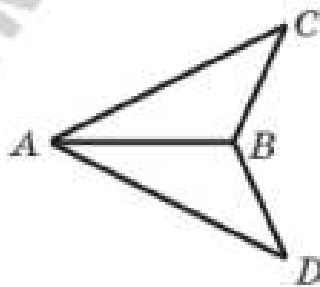


Рис. 291

1455.° На рисунку 291 $AC = AD$, $BC = BD$. Знайдіть кут BAC , якщо $\angle BAD = 25^\circ$.

1456.° Доведіть, що два рівнобедрених трикутники рівні, якщо бічна сторона та основа одного трикутника відповідно дорівнюють бічній стороні та основі другого трикутника.

1457.° Доведіть, що два рівносторонніх трикутники рівні, якщо сторона одного трикутника дорівнює стороні другого трикутника.

1458.* На рисунку 292 $\triangle ABC = \triangle DCB$, причому $AB = CD$. Доведіть, що $\triangle ABD = \triangle DCA$.

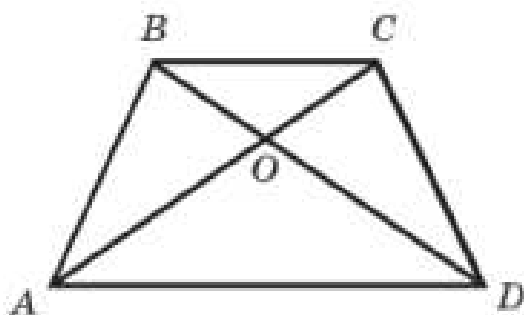


Рис. 292

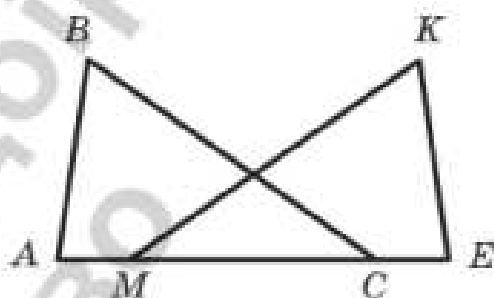


Рис. 293

1459.* На рисунку 292 $AB = CD$, $AC = BD$. Доведіть, що трикутник BOC рівнобедрений.

1460.* Кожна з точок M і N рівновіддалена від кінців відрізка AB . Доведіть, що пряма MN — серединний перпендикуляр відрізка AB .

1461.* Усередині рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) позначили точку D так, що $AD = CD$. Доведіть, що прямі BD і AC перпендикулярні.

1462.* На рисунку 293 $AB = KE$, $BC = KM$, $AM = EC$. Доведіть, що $\angle AMK = \angle BCE$.

1463.* На рисунку 294 $AB = CD$, $BC = AD$, промінь BM — бісектриса кута ABC , промінь DK — бісектриса кута ADC . Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle CDK$.

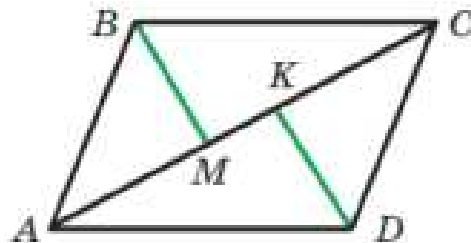


Рис. 294

1464.* Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $OA = OD$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DCB$.

1465.* Відрізки BD і B_1D_1 — бісектриси трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

1466* Відрізки AM і A_1M_1 — медіани трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно, $AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $AM = A_1M_1$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

1467.** Оксана стверджує, що їй вдалося зробити рисунок, на якому $AB = AC$ і $AM = AN$ (рис. 295). Чи має Оксана рацію?

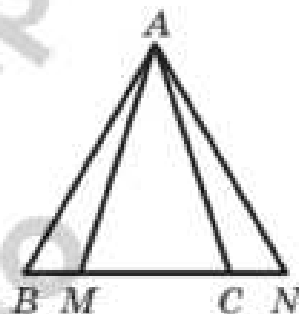


Рис. 295

1468.** Чи будуть два трикутники рівними, якщо кожній стороні одного трикутника дорівнює деяка сторона другого трикутника?

1469.* Доведіть рівність двох трикутників за двома сторонами та медіаною, яка проведена до третьої сторони.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1470. Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(-2m - 3)(5 - m)$;

3) $(x - 5)(x^2 + 4x - 3)$;

2) $(d + 13)(2d - 1)$;

4) $(5x - y)(2x^2 + xy - 3y^2)$.

1471. Розв'яжіть рівняння:

1) $8x^2 - 3(x - 4) = 12$;

2) $5x^3 - x(2x - 3) = 3x$.

1472. В одному мішку було 60 кг цукру, а в другому — 100 кг. Коли з другого мішка взяли в 4 рази більше цукру, ніж з першого, то в першому залишилося у 2 рази більше цукру, ніж у другому. Скільки кілограмів цукру взяли з кожного мішка?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

1473. Квадрат розрізали по діагоналях на чотири трикутники (рис. 296). Складіть із цих трикутників два квадрати.

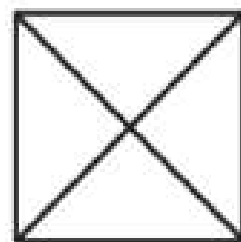


Рис. 296

46. Теорема

Ви бачите, що в підручнику з'являється все більше та більше теорем. І це не дивно: адже геометрія складається переважно з теорем та їхніх доведень.

Формулювання всіх теорем, які ми довели, складаються з двох частин. Першу частину теореми (те, що дано) називають умовою теореми, другу частину теореми (те, що потрібно довести) — висновком теореми.

Наприклад, у теоремі 42.1 (перша ознака рівності трикутників) умовою є те, що *дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам та куту між ними другого трикутника*, а висновком є *рівність трикутників*.

Усі відомі вам теореми можна умовно поділити на теореми-властивості й теореми-ознаки. Наприклад, теорема 35.1 установлює властивість прямих, що перетинаються, теорема 43.1 — властивість рівнобедреного трикутника.

Теореми-ознаки вказують на ознаки, за якими можна розпізнати фігуру, тобто віднести її до того чи іншого виду (класу).

Так, у теоремах-ознаках рівності трикутників зазначено вимоги, за якими два трикутники можна віднести до класу рівних. Наприклад, у теоремах 44.1–44.4 сформульовано властивості, за якими розпізнають рівнобедрений трикутник.

Теореми, які впливають *безпосередньо* з аксіом або теорем, називають **теоремами-наслідками**, або просто **наслідками**.

Наприклад, властивість кутів, протилежних рівним сторонам трикутника, є наслідком з теореми 43.1.

Якщо в теоремі 42.2 про властивість серединного перпендикуляра поміняти місцями умову й висновок, то отримаємо теорему 45.2. Дві теореми, кожену

з яких можна отримати з іншої, помінявши місцями умову й висновок, називають **взаємно оберненими**. Якщо яку-небудь із цих теорем назвати **прямою**, то другу теорему називатимемо **оберненою**.

Міняючи місцями умову й висновок теореми, треба бути дуже уважними: не завжди можна отримати істинне твердження. Наприклад, твердження, **обернене до теореми 38.1 про суму суміжних кутів**, хибне. Справді, якщо сума якихось двох кутів дорівнює 180° , то зовсім не обов'язково, щоб ці кути були суміжними.

Ви знаєте, що справедливність теореми встановлюють шляхом логічних міркувань, тобто доведенням.

Першу теорему цього підручника було доведено **методом від супротивного**. Назва цього методу фактично відображає його суть. Ми припустили, що висновок теореми 35.1 неправильний. На підставі цього припущення за допомогою логічних міркувань ми отримали факт, який суперечить основній властивості прямої.

Методом від супротивного було доведено також і ряд інших теорем, наприклад теореми 39.1, 44.3.

Дуже важливо, щоб доведення теореми було повним, тобто були розглянуті всі можливі випадки. Так, повне доведення теореми 45.1 (третя ознака рівності трикутників) потребувало розгляду трьох можливих випадків.

Уміння бачити всі тонкощі доведення — найважливіша якість, що формує математичну культуру. Якби, наприклад, під час доведення теореми 42.2 про властивість серединного перпендикуляра відрізка ми не розглянули б окремо випадок, коли точка X є серединою відрізка AB , то для цього випадку звернення до трикутників AXM і BXM було б неможливим.

Під час доведення теореми 44.4 (ознака рівнобедреного трикутника) ми використовували **прийом**

додаткової побудови: рисунок доповнили елементами, про які не йшлося в умові теореми. Цей метод є ключем до розв'язування багатьох задач і доведення ряду теорем. Тому дуже важливо навчитися бачити «вигідну» додаткову побудову — таку, яка допоможе отримати потрібний результат.

А як набути такого «геометричного зору»? Запитання непросте, і на нього важко відповісти, даючи конкретні рекомендації. Але все ж таки радимо: по-перше, не бути байдужими до геометрії, а полюбити цей красивий предмет; по-друге, розв'язувати більше задач, щоб розвинути інтуїцію та набути потрібного досвіду.



1. З яких двох частин складається формулювання теореми?
2. Як називають теорему, у якій перелічено властивості, за якими можна віднести фігуру до певного виду (класу)?
3. Як називають теорему, яка безпосередньо впливає з аксіоми чи іншої теореми?
4. Як називають пару теорем, у яких умову й висновок поміняно місцями?
5. У чому полягає метод доведення від супротивного?
6. Які з теорем 35.1, 38.2, 39.1, 42.3 доведено методом від супротивного?
7. У чому полягає прийом додаткової побудови?

ВПРАВИ

1474.° У теоремах 38.1, 42.2, 43.1, 44.3, 45.2 укажіть умову й висновок теореми.

1475.° Із теорем 38.1, 42.2, 43.1, 44.3, 45.2 виберіть:

- 1) теореми-властивості;
- 2) теореми-ознаки.

1476.* Сформулюйте твердження, що є оберненим до даного:

- 1) якщо трикутник рівносторонній, то його кути рівні;

- 2) якщо два кути вертикальні, то їхні бісектриси є доповняльними променями;
- 3) якщо кут між бісектрисами двох кутів прямий, то ці кути суміжні;
- 4) якщо сторона та протилежний їй кут одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та протилежному їй куту другого трикутника, то ці трикутники рівні.

Для яких із даних тверджень:

- 1) пряме й обернене твердження є правильними;
- 2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним;
- 3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?

1477.* Сформулюйте твердження, яке є оберненим до даного:

- 1) якщо два трикутники не рівні, то їхні периметри теж не рівні;
- 2) якщо градусна міра кута більша за 90° , то він є тупим.

Для яких із даних тверджень:

- 1) пряме й обернене твердження є правильними;
- 2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним;
- 3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?

1478.* Сформулюйте твердження, що заперечує дане:

- 1) відрізок AB перетинає пряму m ;
- 2) градусна міра кута ABC більша за 40° ;
- 3) із двох суміжних кутів хоча б один не більший за 90° ;
- 4) промені OA та OB не є доповняльними;
- 5) відрізок має тільки одну середину.

1479.* Сформулюйте твердження, що заперечує дане:

- 1) кут ABC не є прямим;
- 2) трикутник MKE є рівнобедреним;
- 3) через точку на прямій можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної;
- 4) промінь AC ділить кут BAK навпіл.

1480.* Доведіть, використовуючи метод від супротивного, що коли жодна з висот трикутника не збігається з бісектрисою, проведеною з тієї самої вершини, то трикутник не є рівнобедреним.

1481.* Доведіть, використовуючи метод від супротивного, що коли сторони AB і BC трикутника ABC не рівні, то його медіана BD не є його висотою.

1482.* Доведіть методом від супротивного, що коли різниця двох кутів дорівнює 1° , то вони не можуть бути вертикальними.

1483.* Доведіть методом від супротивного, що з двох суміжних кутів хоча б один не менший від 90° .

1484.* Сформулюйте й доведіть ознаку рівності рівнобедрених трикутників за бічною стороною та медіаною, проведеною до бічної сторони.

1485.* Сформулюйте й доведіть ознаку рівності трикутників за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і кутом між медіаною та цією стороною.

1486.** Доведіть ознаку рівності трикутників за медіаною та кутами, на які вона розбиває кут трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1487. Доведіть, що значення суми двочленів $16a - 6b$ і $27b - 2a$, де a і b — довільні натуральні числа, ділиться націло на 7.

1488. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(2x - 6)(8x + 5) + (3 - 4x)(3 + 4x) = 55$;
- 2) $(14x - 1)(2 + x) = (2x - 8)(7x + 1)$.

1489. В одному бідоні було в 4 рази більше молока, ніж у другому. Коли з першого бідона перелили 10 л молока в другий, то об'єм молока в другому бідоні склав $\frac{2}{3}$ об'єму молока, що залишилося в першому бідоні. Скільки літрів молока було в кожному бідоні спочатку?

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

1490. Сторони прямокутника $ABCD$ дорівнюють 4 см і 3 см. Знайдіть суму довжин усіх відрізків, що містяться всередині прямокутника (рис. 297).

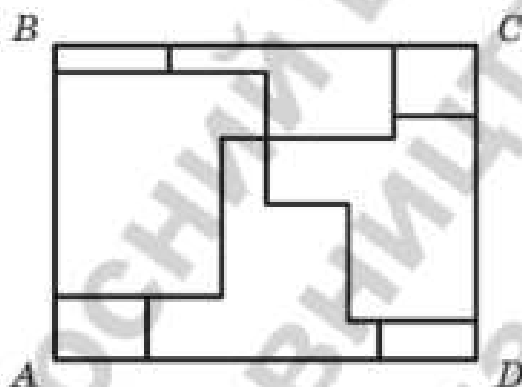


Рис. 297

Українська геометрична школа



Згадаємо українських геометрів, учених і педагогів, завдяки яким сьогоднішня українська математична школа посідає гідні позиції в науковому світі. Відомі передусім своїми науковими відкриттями, вони водночас значну увагу приділяли математичній освіті.

Феофан Прокопович (1681–1736) — учений, державний діяч, письменник, видатна постать культури та просвіти. Закінчив Києво-Могилянську академію, продовжував освіту в польських навчальних закладах і Римському колегіумі. Викладав у Києво-Могилян-

ській академії, у 1711–1716 рр. був її ректором. До свого курсу філософії включив лекції з математики. Геометрична частина курсу містила планіметрію за Евклідом з певними доповненнями, питання практичної геометрії, опис геометричних інструментів, правила вимірювань. Теоретичні відомості з геометрії в такому обсязі були викладені вперше.

Віддамо належне Михайлу Васильовичу Остроградському (1801–1862). Він народився в с. Пашенівка (Полтавська обл.), починав навчатися в Харківському університеті. М. В. Остроградський був чудовим педагогом і організатором, напрацював струнку систему поглядів на викладання математики та використовував її у своїй викладацькій роботі, ініціював створення низки методичних посібників для впровадження прогресивних методів викладання.

Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко (1825–1912) народився в с. Маліївка (Черкаська обл.). Випускник, потім викладач і професор Київського університету, він своїми науковими доробками та педагогічною діяльністю справив значний вплив на розвиток математичної культури, зокрема переклав «Начала»



М. В. Остроградський
(1801–1862)



М. Є. Ващенко-Захарченко
(1825–1912)

Евкліда з поясненнями та примітками. Надрукував низку керівництв із математики, зокрема з елементарної геометрії в обсязі гімназичного курсу.

Олександр Матвійович Астряб (1879–1962) народився в Лубнах (Полтавська обл.). Випускник Київського університету. Завідував кафедрою методики математики Київського педагогічного інституту, брав активну участь у створенні відділу методики математики Українського науково-дослідного інституту педагогіки. Автор понад 70 науково-методичних робіт, серед яких «Наочна геометрія», «Теорія і методика розв'язування задач на побудову», «Методика стереометрії».

Антоній Мар'ян Ломницький (1881–1941) народився у Львові, закінчив Львівський університет, працював у Львівському політехнічному інституті. Багато уваги приділяв викладанню математики в школі, створив підручник з геометрії.

Борис Якович Букреєв (1859–1962) — випускник Київського університету, а з 1885 року — його викладач, продовжував наукову та педагогічну діяльність майже до 100-річного віку. Працював у галузі геометрії, у тому числі неевклідової.

Костянтин Мойсейович Щербина (1864–1946) народився в Прилуках (Чернігівська обл.), випускник Київського університету. Був організатором учительського інституту в м. Києві (1909) та протягом 10 років його директором, з 1920 р. працював в Одеському інституті народної освіти.

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) народився в с. Човниця (Волинська обл.), випускник Київського університету. Крім значних наукових здобутків

у різних галузях математики, створив навчальні програми для вищої та середньої школи, підручники для вищих навчальних закладів, зробив значний внесок у створення української математичної термінології. Був організатором першої в Україні математичної олімпіади школярів (1935 р.).

Олександр Степанович Смогоржевський (1896–1969) народився в с. Лісові Бирлинці (Вінницька обл.), випускник Київського університету народної освіти. Створив підручник з основ геометрії для університетів і педагогічних інститутів, низку науково-популярних книг з математики.

Іван Федорович Тесленко (1908–1994) народився в с. Домоткань (Дніпропетровська обл.), викладав у Харківському педагогічному інституті, завідував кафедрою математики у Львівському університеті, працював у науково-дослідному інституті педагогіки. Основними його здобутками є праці з методики викладання геометрії, у тому числі підручники й навчальні посібники для середньої школи, учителів і студентів педагогічних вишів; докторська дисертація «Педагогічні основи викладання геометрії».



З. І. Слєпкань
(1931–2008)

Зінаїда Іванівна Слєпкань (1931–2008) — українська науковиця в галузі методики навчання математики, одна з фундаторів української наукової школи з теорії та методики навчання математики в середніх і вищих закладах освіти, доктор педагогічних наук, професор.

Багато років завідувала кафедрою елементарної математики та методики математики Київського

державного педагогічного інституту. Зінаїда Іванівна — перша в Україні жінка, яка захистила докторську дисертацію з методики навчання математики.

Ісаак Мойсейович Яглом (1921–1988) народився в м. Харкові, є автором низки посібників для учнів середньої школи: «Опуклі фігури», двотомник «Геометричні перетворення», «Елементарна геометрія раніше й тепер» тощо.

Геометричні дослідження в Київському університеті були започатковані на межі XIX і XX ст. у роботах Б. Я. Букреева. У 1934 р. на механіко-математичному факультеті було створено кафедру геометрії.

Микола Іванович Кованцов майже 30 років очолював кафедру геометрії Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Його перу належать понад 200 наукових і науково-популярних праць. Микола Іванович виховав десятки вчених, наукові здобутки яких визнані в усьому світі, докладав значних зусиль до заохочення молоді до математики. У своїй книзі «Математика й романтика» він писав: «Любі друзі! Беріться за розв'язування складних математичних задач! І тих, які щойно поставлені, і тих, які вже багато десятиліть або століть не піддаються розв'язуванню. Вас спіткають страждання й розчарування, коли здаватиметься, що ви марно витратили роки на пошуки примари, яка від вас ухиляється. Усе може бути. Але ви будете сторицею винагороджені, коли одного чудового дня опинитеся перед тією завітною ціллю, до



М. І. Кованцов
(1924–1988)

якої так довго й складно йшли. Не будьте байдужими, інакше на вас чекає духовна смерть».

Вілен Ілліч Михайловський, працюючи все трудове життя на кафедрі геометрії, водночас зробив вагомий внесок у розвиток шкільної математичної освіти та олімпіадного руху в Україні. Він був членом редколегій журналів «Український геометричний збірник», «У світі математики», «Математика в школі»; брав ак-



В. І. Михайловський
(1932–2017)

тивну участь у підготовці та проведенні математичних олімпіад для школярів і студентів. Серед його друкованих праць — чотири випуски посібника «Збірник задач республіканських математичних олімпіад», «Збірник задач Київських математичних олімпіад», «Практикум з розв'язування задач з математики», «Українські математичні олімпіади», «Київські математичні олімпіади», «Збірник конкурсних задач з математики».

Коли йдеться про шкільну геометрію, мабуть, усі, кому «за 50 років», насамперед згадають підручник за авторством Олексія Васильовича Погорелова.

У 1937 р. харківський десятикласник Олексій Погорелов став переможцем Київської математичної олімпіади, і його запросили навчатися в Харківському університеті. У віці 29 років він захистив докторську дисертацію. О. В. Погорелов спрямовував свою наукову творчість одразу за двома напрямками: класична геометрія та інженерно-конструкторська робота.

Із 1947 р. вся наукова та педагогічна діяльність ученого була пов'язана із Харковом. З того року він

викладав математику в Харківському університеті, у 1960 р. очолив відділ геометрії в новоствореному Фізико-технічному інституті низьких температур. У 1950–1960 рр. очолював кафедру геометрії в Харківському університеті, відділи геометрії НДІ математики Харківського університету та Інституту математики Академії наук України.

Основним напрямом математичних досліджень О. В. Погорелова були питання геометрії в цілому. Він працював у різноманітних галузях геометрії. Зокрема, йому вдалося вирішити проблеми сучасної геометрії, що їх поставили видатні математики XIX і XX ст. Давид Гільберт, Огюстен Луї Коші, Герман Мінковський та ін. Підсумки своїх наукових досліджень він виклав мало не в 40 монографіях, майже всі з яких були опубліковані в багатьох країнах. Заслуговує на увагу такий факт: у 80-х рр. XX ст. в серії книг Американського математичного товариства «Видатні математики XX століття» окремий том містив монографію О. В. Погорелова, в анотації до якої його було названо «найбільшим геометром XX століття».

О. В. Погорелов створив підручники для вищих навчальних закладів за всіма основними розділами геометрії.

Паралельно з напруженою роботою над математичними проблемами світового рівня О. В. Погорелов уже в зрілому віці створив підручник з геометрії для середньої школи. Він вважав, що «у школі [є] два головних предмети — рідна мова й геометрія. Одна вчить людину грамотно викладати думки, друга — дедуктивного мислення».



О. В. Погорелов
(1919–2002)

Відповідно до цього науковець поклав в основу свого підручника «строгу й прозору систему аксіом».

У 1972 р. вийшло друком перше видання підручника, а в 1982 р. після експериментальної перевірки підручник запровадили в масову школу. Від того часу здійснено понад 20 видань цього підручника багатомільйонними тиражами. Ще й після здобуття Україною незалежності підручник О. В. Погорєлова використовували в школах України до 2007 р., доки не були розроблені нові навчальні програми та сучасні вимоги до викладання шкільної геометрії.

Під час створення цього підручника було використано багато наробок, ідей та задач Віталія Борисовича Полонського (1957–2019), видатного українського педагога, заслуженого вчителя України, кавалера ордена «За заслуги» III ступеня. Працюючи все життя шкільним учителем, він досяг вражаючих результатів.



В. Б. Полонський
(1957–2019)

Учні та учениці В. Б. Полонського 13 разів ставали призерами найпрестижнішого математичного змагання у світі серед школярів — Міжнародної математичної олімпіади, понад 100 разів — призерами Всеукраїнських математичних олімпіад і більше ніж 250 разів — призерами Київських міських олімпіад.

Віталій Борисович Полонський є автором понад 100 підручників та посібників зі шкільної математики. Його статті регулярно публікували в таких авторитетних математичних журналах для школярів і вчителів, як «Квант», «Математика в школі», «У світі математики». Сьогодні його ім'ям названо новостворений математичний гурток київських школярів з підготовки до міжнародних математичних олімпіад. Якщо ви станете призерами всеукраїнських математичних олімпіад (посядете 1-ше чи 2-ге місце), то отримаєте право взяти участь у роботі цього гуртка.

ЗАВДАННЯ № 9 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Трикутник є гострокутним, якщо:
А) серед його кутів немає тупого;
Б) кожний його кут менший від прямого;
В) серед його кутів немає прямого;
Г) кожний його кут менший від тупого.
2. Якщо висота трикутника йому не належить, то цей трикутник є:
А) прямокутним;
Б) тупокутним;
В) рівностороннім;
Г) гострокутним.
3. Два трикутники рівні, якщо:
А) дві сторони одного трикутника дорівнюють двом сторонам другого трикутника;
Б) сторона та два кути одного трикутника дорівнюють стороні та двом кутам другого трикутника;
В) дві сторони та кут одного трикутника дорівнюють двом сторонам та куту другого трикутника;
Г) дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам та куту між ними другого трикутника.
4. Скільки пар рівних трикутників зображено на рисунку?
А) 1; В) 3;
Б) 2; Г) 4.



5. Відомо, що точка M — середина сторони AC трикутника ABC . На промені BM поза трикутником відкладено відрізок ME , який дорівнює відрізку BM . Знайдіть довжину відрізка EC , якщо $AB = 4,2$ см.
А) 2,1 см; В) 4,8 см;
Б) 4,2 см; Г) 8,4 см.

А) Рівнобедрений трикутник — окремий вид різностороннього трикутника;

Б) рівносторонній трикутник — окремий вид різностороннього трикутника;

В) рівносторонній трикутник — окремий вид рівнобедреного трикутника;

Г) рівнобедрений трикутник — окремий вид рівностороннього трикутника.

- А) Якщо висота трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на рівні відрізки, то цей трикутник є рівнобедреним;
- Б) якщо медіана й бісектриса трикутника, проведені з однієї вершини, не збігаються, то цей трикутник не є рівнобедреним;
- В) якщо трикутник рівносторонній, то довжина будь-якої його висоти дорівнює довжині будь-якої його бісектриси;
- Г) якщо два кути трикутника рівні, то бісектриса протилежного кута ділить протилежну сторону трикутника на рівні відрізки.

А) його сторона в три рази менша від його периметра;
Б) кожна його сторона в три рази менша від його периметра;
В) дві його висоти рівні;
Г) дві його бісектриси рівні.

А) 4 см; Б) 6 см; В) 2 см; Г) 5 см.

А) $XY \perp AB$; В) $\angle AXB = \angle AYB$;
Б) $\angle XAY = \angle XBY$; Г) $\angle AXY = \angle BXY$.

11. Точка M — середина відрізка AB . Точка X не належить серединному перпендикуляру відрізка AB , якщо:

- А) $XA = XB$; В) $XM \perp AB$;
Б) $XM = XB$; Г) $\angle XAM = \angle XBM$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 6

Рівні фігури

Дві фігури називають рівними, якщо їх можна су-містити накладанням.

Аксіома про існування трикутника, рівного даному

Для даного трикутника ABC і даного променя A_1M існує трикутник $A_1B_1C_1$, який дорівнює трикутнику ABC , такий, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ та сторона A_1B_1 належить променю A_1M , а вершина C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої A_1M .

Теорема про існування та єдиність прямої, перпендикулярної до даної

Через точку, яка не належить даній прямій, можна провести пряму, перпендикулярну до даної, і до того ж тільки одну.

Висота трикутника

Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.

Медіана трикутника

Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.

Бісектриса трикутника

Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.

Перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними

Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Друга ознака рівності трикутників: за стороною та двома прилеглими до неї кутами

Якщо сторона та два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами

Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Серединний перпендикуляр відрізка

Пряму, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка.

Рівнобедрений трикутник

Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають рівнобедреним.

Рівносторонній трикутник

Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім.

Властивості рівнобедреного трикутника

У рівнобедреному трикутнику: 1) кути при основі рівні; 2) бісектриса трикутника, проведена до його основи, є медіаною та висотою трикутника.

Ознаки рівнобедреного трикутника

- Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

Властивості трикутників, які випливають із властивостей та ознак рівнобедреного трикутника

- У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.
- У трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони.
- У рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені до його основи, збігаються.
- У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.
- У рівносторонньому трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.
- Якщо в трикутнику всі кути рівні, то цей трикутник рівносторонній.

§7 ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

Як установити паралельність двох прямих? Які властивості мають паралельні прямі? Чому дорівнює сума кутів будь-якого трикутника? Які властивості має прямокутний трикутник? Опанувавши матеріал цього параграфа, ви отримаєте відповіді на поставлені запитання.

47. Паралельні прямі

Означення. Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.

На рисунку 298 зображено паралельні прямі a і b . Записують: $a \parallel b$ (читають: «прямі a і b паралельні» або «пряма a паралельна прямій b »).



Рис. 298



Рис. 299

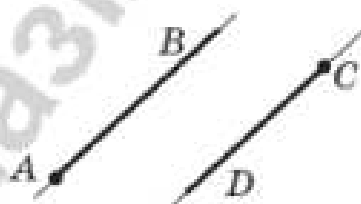


Рис. 300

Якщо два відрізки лежать на паралельних прямих, то їх називають паралельними. На рисунку 299 відрізки AB і CD паралельні. Записують: $AB \parallel CD$.

Також можна говорити про паралельність двох променів, променя та відрізка, прямої та променя, відрізка та прямої. Наприклад, на рисунку 300 зображено паралельні промені AB і CD .

Теорема 47.1 (ознака паралельності прямих). Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Доведення. ☉ На рисунку 301 $a \perp c$ і $b \perp c$. Треба довести, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b перетинаються в деякій точці M (рис. 302). Тоді через точку M , яка не належить прямій c , проходять дві прямі a і b , перпендикулярні до прямої c . Це суперечить тому, що через точку можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної (теорема 41.1).

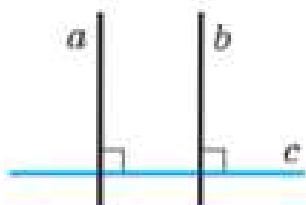


Рис. 301

Таким чином, наше припущення є неправильним; отже, $a \parallel b$. ●

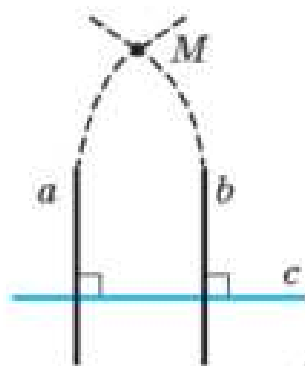


Рис. 302



Рис. 303

Доведена теорема пояснює, чому за допомогою лінійки та косинця можна будувати паралельні прямі так, як показано на рисунку 303.

Наслідок. Через дану точку M , яка не належить прямій a , можна провести пряму b , паралельну прямій a .

Доведення. ☉ Нехай точка M не належить прямій a (рис. 304).

Проведемо через точку M пряму c , перпендикулярну до прямої a . Тепер через точку M проведемо пряму b , перпендикулярну до прямої c . За ознакою паралельності прямих (теорема 47.1) отримуємо, що $a \parallel b$. ●

Чи можна через точку M (рис. 304) провести ще одну пряму, паралельну

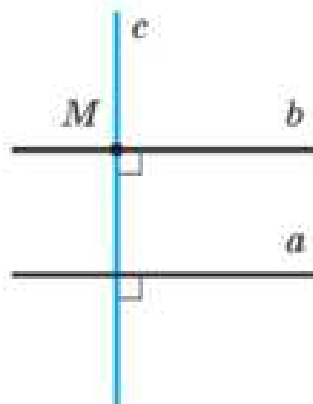


Рис. 304

прямій a ? Відповідь на це запитання дає аксіома паралельності прямих.

Аксіома паралельності прямих. Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Теорема 47.2. Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.

Доведення. ☉ Нехай $b \parallel a$ і $c \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel c$.

Припустимо, що прямі b і c не паралельні, а перетинаються в деякій точці M (рис. 305). Тоді маємо, що через точку M проходять дві прямі, паралельні прямій a , а це суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення є неправильним; отже, $b \parallel c$. ●

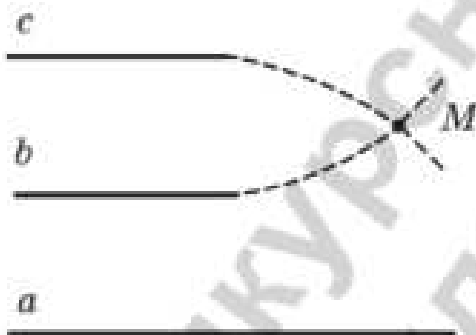


Рис. 305

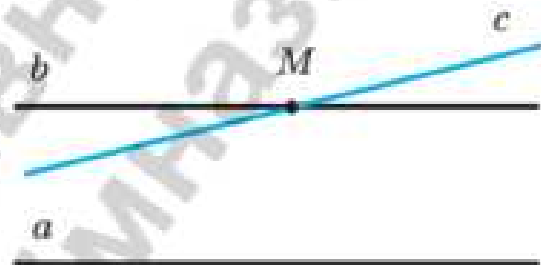


Рис. 306

🔑 **Задача.** Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу.

Розв'язання. Нехай прямі a і b паралельні, пряма c перетинає пряму b у точці M (рис. 306). Припустимо, що пряма c не перетинає пряму a , тоді $c \parallel a$. Але в цьому випадку через точку M проходять дві прямі b і c , які паралельні прямій a , що суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення неправильне, отже, пряма c перетинає пряму a . ◀



1. Які дві прямі називають паралельними? 2. Як читають запис $m \parallel n$? 3. Які відрізки називають паралельними? 4. Яке взаємне розміщення двох прямих, що перпендикулярні до третьої прямої? 5. Сформулюйте аксіому паралельності прямих. 6. Яке взаємне розміщення двох прямих, що паралельні третій прямій?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1491.^o Перерисуйте в зошит рисунок 307. Проведіть через кожну з точок A і B пряму, паралельну прямій t .

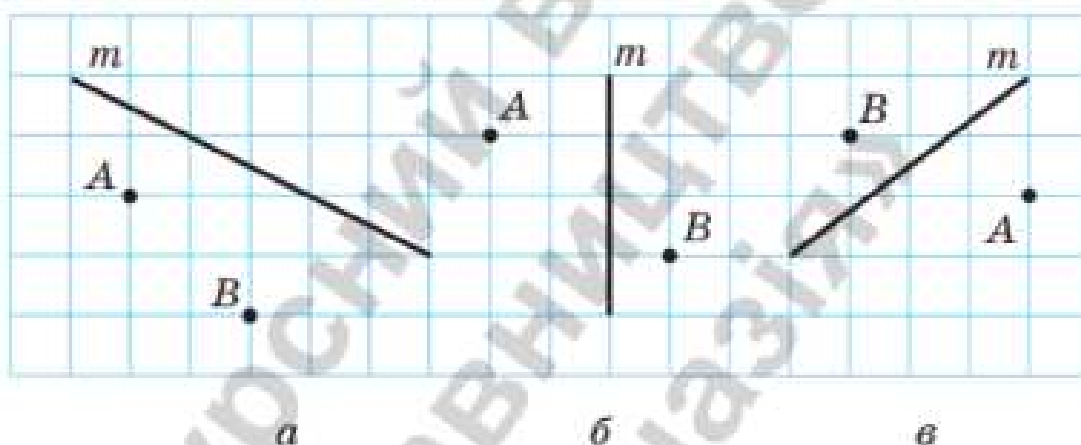


Рис. 307

1492.^o Накресліть трикутник і проведіть через кожну його вершину пряму, паралельну протилежній стороні.

1493.^o Перерисуйте в зошит рисунок 308. Проведіть через точку B пряму m , паралельну прямій AC , а через точку D — пряму n , паралельну прямій AC . Яке взаємне розміщення прямих m і n ?

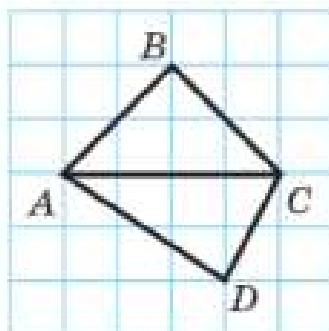


Рис. 308

ВПРАВИ

1494.° Чи можна провести пряму, яка була б паралельною кожній із прямих a і b , що перетинаються?

1495.° Пряма a паралельна стороні AB трикутника ABC . Чи може пряма a бути паралельною стороні AC ? стороні BC ?

1496.° Чи можна стверджувати, що два відрізки є паралельними, якщо вони не мають спільних точок?

1497.° Чи можна стверджувати, що існує тільки один промінь, паралельний даній прямій, початком якого є дана точка?

1498.° Скільки можна провести відрізків, які паралельні даній прямій, через точку, що не належить цій прямій?

1499.* Прямі a і b перетинаються. Чи можна провести таку пряму c , яка була б паралельною прямій a та перетинала пряму b ?

1500.* Прямі a і b перпендикулярні до прямої c , пряма d перетинає пряму a . Чи перетинає пряма d пряму b ?

1501.* Відрізок BD — медіана рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). Через точку B проведено пряму m , перпендикулярну до прямої BD . Яким є взаємне розташування прямих m і AC ? Відповідь обґрунтуйте.

1502.* Прямі a і b перетинаються. Пряма c паралельна прямій a . Доведіть, що прямі b і c перетинаються.

1503.* Дано три прямі a , b і c . Відомо, що прямі a і b паралельні, а пряма c не перетинає пряму a . Доведіть, що пряма c не перетинає пряму b .

1504.** Доведіть, що коли будь-яка пряма, яка перетинає пряму a , перетинає і пряму b , то прямі a і b паралельні.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1505. Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(a - 2)(* + 6) = a^2 + * - *$;

2) $(2a + 7)(a - *) = * + * - 14$;

3) $(x + 3)(* + 5) = 3x^2 + * + *$;

4) $(x - 4)(x + *) = * + * + 24$.

1506. Якого найменшого значення та при якому значенні змінної набуває вираз:

1) x^2 ;

2) $x^2 - 16$;

3) $(x + 4)^2 + 20$?

1507. Остача при діленні деякого натурального числа на 9 дорівнює 5. Чому дорівнює остача при діленні на 9 квадрата цього числа?

1508. Човен рухався 2,4 год за течією річки та 3,6 год проти течії. Відстань, яку пройшов човен за течією, на 5,4 км більша за відстань, пройдену проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії становить 2,5 км/год.

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

1509. Катруся та Євген підійшли до квадратного ставка, у середині якого знаходиться квадратний острів (рис. 309). На березі вони знайшли дві дошки, трохи коротші від ширини протоки між берегом ставка й островом. Як їм потрапити на острів, використовуючи ці дошки?



Рис. 309

48. Ознаки паралельності двох прямих

Якщо дві прямі a і b перетнуті третьою прямою c , то утвориться вісім кутів (рис. 310). Прямую c називають січною прямих a і b .

Кути 3 і 6, 4 і 5 називають **односторонніми**.

Кути 3 і 5, 4 і 6 називають **різносторонніми**.

Кути 6 і 2, 5 і 1, 3 і 7, 4 і 8 називають **відповідними**.

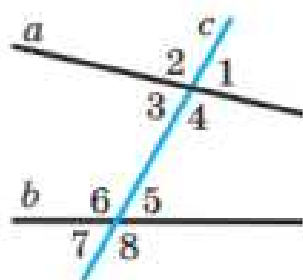


Рис. 310

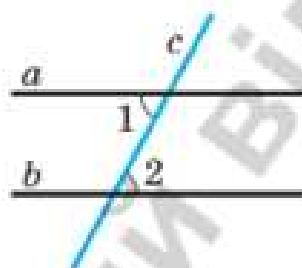


Рис. 311

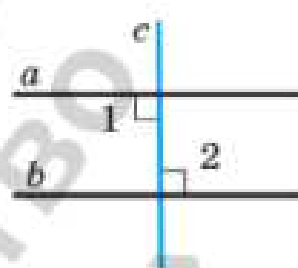


Рис. 312

Теорема 48.1. Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Доведення. ☺ На рисунку 311 пряма c є січною прямих a і b , $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Якщо $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ (рис. 312), то паралельність прямих a і b випливає з ознаки паралельності прямих (теорема 47.1).

Нехай тепер пряма c не перпендикулярна до жодної з прямих a і b . Позначимо буквами A і B точки перетину прямої c із прямими a і b відповідно. Позначимо точку M — середину відрізка AB (рис. 313). Із точки M опустимо перпендикуляр ME на пряму a . Нехай пряма ME перетинає пряму b у точці F . Маємо: кути 1 і 2 рівні за умовою; кути 3 і 4 рівні як вертикальні.

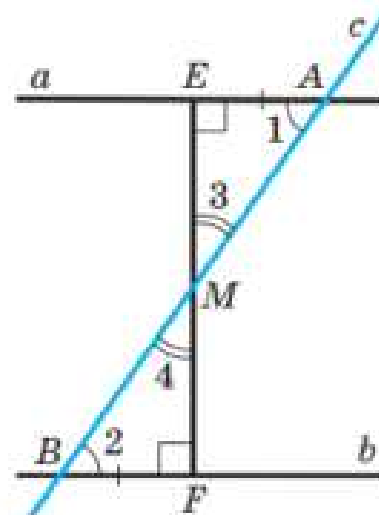


Рис. 313

Отже, трикутники AME і BMF рівні за стороною та двома прилеглими до неї кутами, тобто за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle AEM = \angle MFB = 90^\circ$. Ми показали, що прямі a і b перпендикулярні до прямої EF ; отже, вони паралельні. ●

Теорема 48.2. Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180° , то прямі паралельні.

Доведення. ☉ На рисунку 314 пряма c є січною прямих a і b , $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Кути 1 і 3 суміжні, отже, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Оскільки $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, то $\angle 2 = \angle 3$. А кути 2 і 3 є різносторонніми, тому за теоремою 48.1 $a \parallel b$. ●

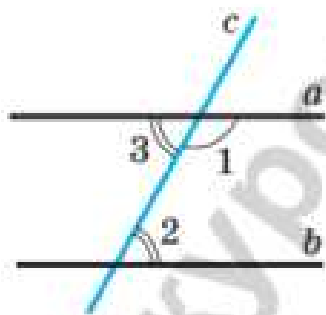


Рис. 314

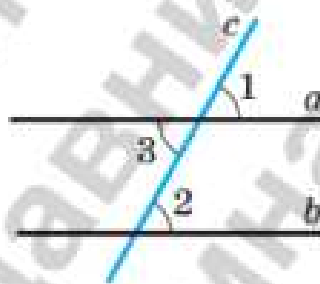


Рис. 315

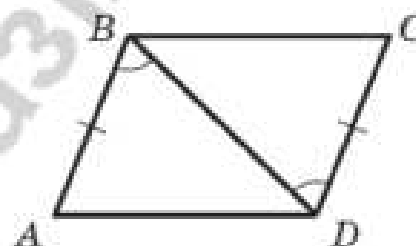


Рис. 316

Теорема 48.3. Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Доведення. ☉ На рисунку 315 пряма c є січною прямих a і b , $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Кути 1 і 3 рівні як вертикальні. Оскільки $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 2 = \angle 3$. Але кути 2 і 3 є різносторонніми. Тому за ознакою паралельності двох прямих (теорема 48.1) $a \parallel b$. ●

Задача. На рисунку 316 $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

Розв'язання. Для трикутників ABD і CDB маємо: $AB = CD$ і $\angle ABD = \angle CDB$ за умовою, відрізок BD — спільна сторона. Отже, трикутники ABD і CDB рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників.

Тоді $\angle BDA = \angle DBC$. Оскільки кути BDA і DBC — різносторонні при прямих BC і AD та січній BD і ці кути рівні, то $BC \parallel AD$. ◀



1. Якими мають бути різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними? 2. Якими мають бути односторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними? 3. Якими мають бути відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1510.° Проведіть прямі AB і CD . Проведіть пряму MK , яка перетинає кожную з прямих AB і CD . Позначте точку перетину прямих AB і MK буквою O , а прямих CD і MK — буквою E . Заповніть прогалини в тексті:

- 1) кути AOM і ... — відповідні;
- 2) кути AOE і ... — відповідні;
- 3) кути AOE і ... — різносторонні;
- 4) кути AOE і ... — односторонні.

Укажіть, якими кутами (відповідними, різносторонніми чи односторонніми) є:

- 1) $\angle BOM$ і $\angle DEM$;
- 2) $\angle BOE$ і $\angle DEM$;
- 3) $\angle BOE$ і $\angle OEC$.

1511.° Накресліть дві прямі та проведіть їхню січну. Пронумеруйте кути, утворені при перетині даних прямих січною. Укажіть серед цих кутів усі пари:

- 1) відповідних кутів;
- 2) односторонніх кутів;
- 3) різносторонніх кутів.

ВПРАВИ

1512.° Як називають кути 1 і 2, зображені на рисунку 317?

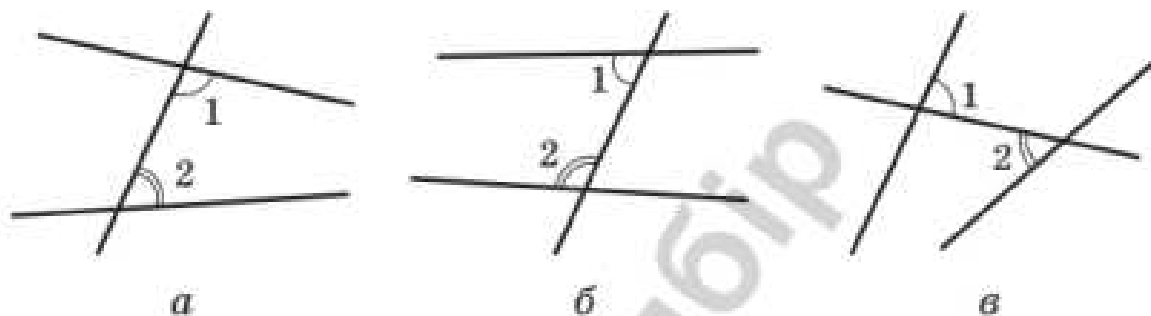


Рис. 317

1513.° На рисунку 318 укажіть усі пари різносторонніх, односторонніх і відповідних кутів.



Рис. 318

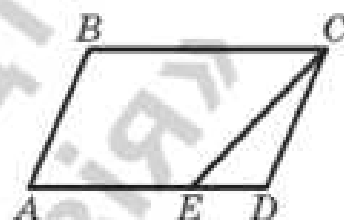


Рис. 319

1514.° Запишіть, які кути на рисунку 319 є:

- 1) односторонніми при прямих BC і AD та січній AB ;
- 2) односторонніми при прямих CE і CD та січній AD ;
- 3) різносторонніми при прямих BC і AD та січній CE ;
- 4) відповідними при прямих CE і CD та січній AD ;
- 5) односторонніми при прямих BC і AD та січній CE .

1515.° На яких із рисунків 320, a – $г$ прямі a і b паралельні?

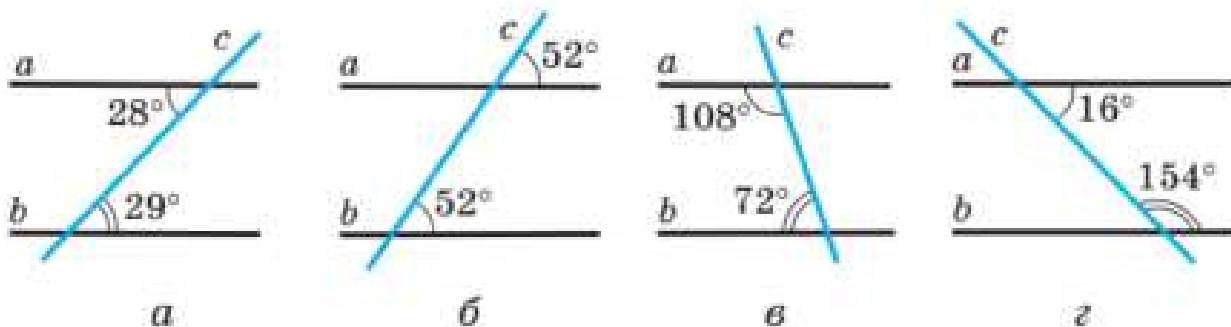


Рис. 320

1516.° Чи паралельні зображені на рисунку 321 прямі a і b , якщо:

- 1) $\angle 3 = \angle 6$;
- 2) $\angle 2 = \angle 6$;
- 3) $\angle 4 = 125^\circ$, $\angle 6 = 55^\circ$;
- 4) $\angle 2 = 35^\circ$, $\angle 5 = 146^\circ$;
- 5) $\angle 1 = 98^\circ$, $\angle 6 = 82^\circ$;
- 6) $\angle 1 = 143^\circ$, $\angle 7 = 37^\circ$?

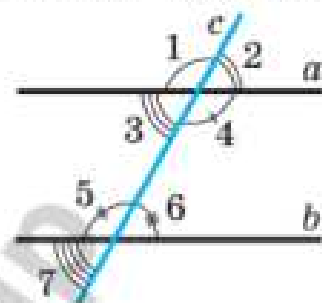


Рис. 321

1517.° На яких із рисунків 322, a – $г$ прямі m і n паралельні?

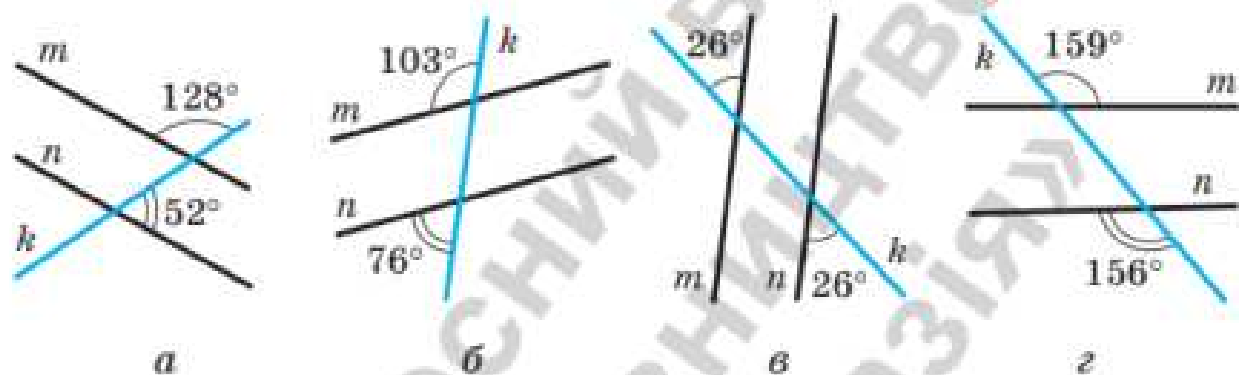


Рис. 322

1518.° На рисунку 323 укажіть усі пари паралельних прямих.

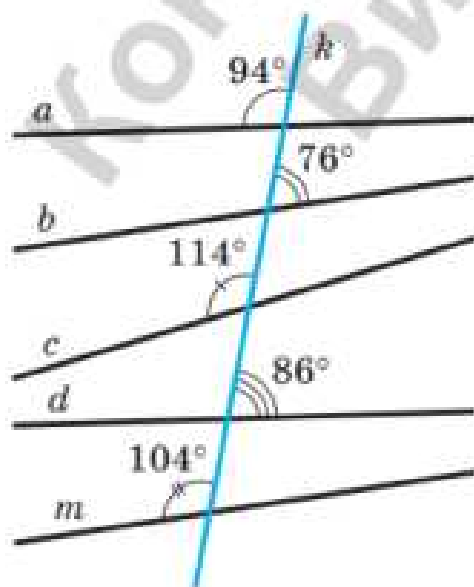


Рис. 323

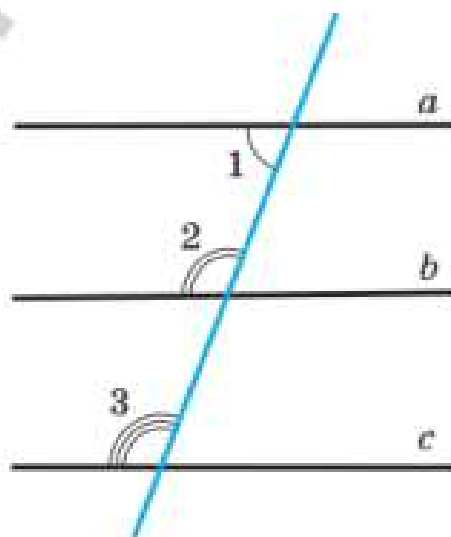


Рис. 324

1519.° Запишіть, які прямі на рисунку 324 є паралельними, якщо $\angle 1 = 53^\circ$, $\angle 2 = 128^\circ$, $\angle 3 = 127^\circ$.

1520.° На рисунку 325 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Доведіть, що прямі a і b паралельні.

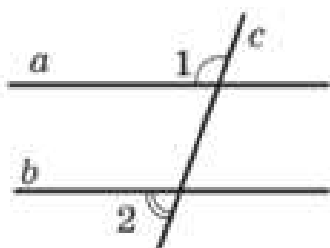


Рис. 325

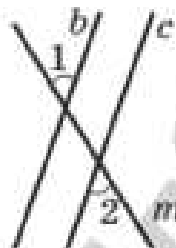


Рис. 326

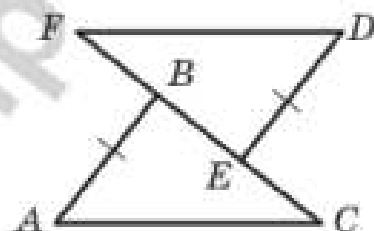


Рис. 327

1521.° На рисунку 326 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що прямі b і c паралельні.

1522.° На рисунку 327 $\triangle ABC = \triangle DEF$, $AB = DE$. Доведіть, що $AC \parallel DF$.

1523.° На рисунку 328 $\triangle ABC = \triangle DCE$, $AC = DE$. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

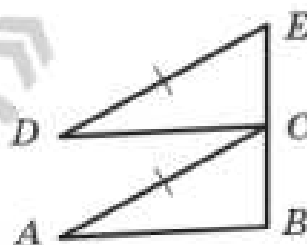


Рис. 328

1524.* На рисунку 329 $AB = BC$, $CD = DK$. Доведіть, що $AB \parallel DK$.

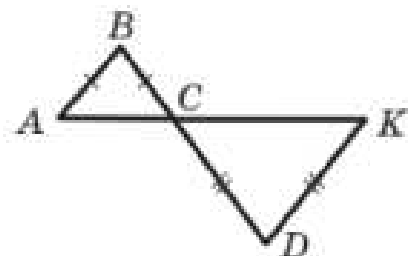


Рис. 329

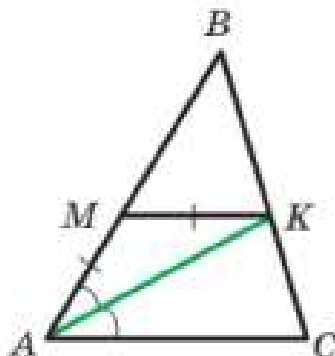


Рис. 330

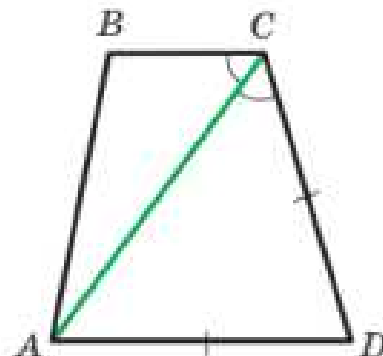


Рис. 331

1527.* У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle A = 60^\circ$. Кут BCD суміжний із кутом ACB , промінь CM — бісектриса кута BCD . Доведіть, що $AB \parallel CM$.

1528.* Відрізки AB і CD перетинаються в точці O та діляться цією точкою навпіл. Доведіть, що $AC \parallel BD$.

1529.* На рисунку 332 $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

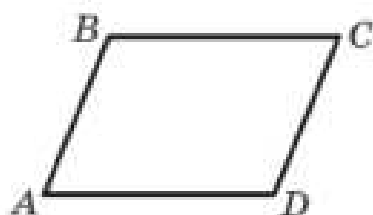


Рис. 332

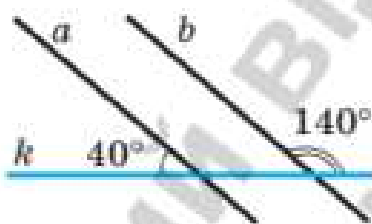


Рис. 333

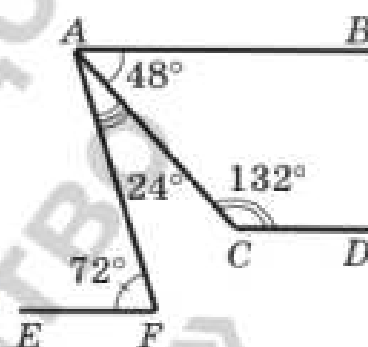


Рис. 334

1530.* На рисунку 333 зображено прямі a , b і k . Відомо, що деяка пряма m перетинає пряму a . Чи перетинає пряма m пряму b ?

1531.* Яке взаємне розміщення прямих CD і EF на рисунку 334?

1532.* Кут ABC дорівнює 60° , а кут BCD — 120° . Чи можна стверджувати, що прямі AB і CD паралельні?

1533.* Кут між прямими a і c дорівнює куту між прямими b і c . Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

1534.* Із восьми кутів, утворених при перетині прямих a і b прямою c , чотири кути дорівнюють по 40° , а решта чотири кути — по 140° . Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

1535.* Пряма перетинає бісектрису BM трикутника ABC у точці O , яка є серединою відрізка BM , а сторону BC — у точці K . Доведіть, що коли $OK \perp BM$, то $MK \parallel AB$.

1536.* Відрізки AM і CK — медіани трикутника ABC . На продовженні відрізка AM за точку M відкладено відрізок MF , на продовженні відрізка CK за точку K — відрізок KD так, що $MF = AM$, $KD = CK$. Доведіть, що точки B , D і F лежать на одній прямій.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1537. Подайте у вигляді многочлена вираз:

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $(5a - 2b)(5a + 2b)$; | 3) $(4x^2 - 9y^3)(4x^2 + 9y^3)$; |
| 2) $(6a^3 - 7b)(6a^3 + 7b)$; | 4) $(8m + 3n)(3n - 8m)$. |

1538. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $4x - 0,2x(x + 20) = x^3$;
- 2) $9x(x - 3) + (x - 4)(x - 5) = 20$.

1539. Чи належить графіку функції $y = -2x^2 - 1$ точка:

- | | |
|--|------------------|
| 1) $A\left(\frac{1}{2}; -1,5\right)$; | 2) $B(-3; 17)$? |
|--|------------------|

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

1540. Наведіть приклад, коли спільною частиною (перерізом) трикутника й чотирикутника є восьмикутник.

П'ятий постулат Евкліда



У п. 40 ви дізналися, що за аксіоми приймають очевидні твердження. Тоді чому б, наприклад, теореми 35.1 і 39.1 не включити до списку аксіом, адже вони також очевидні? Відповідь на це запитання цілком природна: якщо якесь твердження можна довести за допомогою аксіом або вже доведених теорем, то це твердження — теорема, а не аксіома.

Із цих позицій дуже повчальною є історія, пов'язана з п'ятим постулатом Евкліда (нагадаємо, що в оповіданні «З історії геометрії» ми сформулювали чотири перших постулати).

V постулат. І щоб кожного разу, коли пряма при перетині з двома іншими прямими утворює з ними односторонні кути, сума яких менша від двох прямих кутів, ці прямі перетиналися по той бік від січної, по який ця сума менша від двох прямих кутів (рис. 335).

Можна показати, що п'ятий постулат і сформульована нами в п. 47 аксіома паралельності прямих рівносильні, тобто з постулату випливає аксіома, і навпаки, з аксіоми випливає постулат.

Понад двадцять століть багато вчених намагалися довести п'ятий постулат, тобто вивести його з інших аксіом Евкліда. Лише на початку XIX ст. кілька математиків незалежно один від одного дійшли висновку: твердження, що *через дану точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній*, є аксіомою.

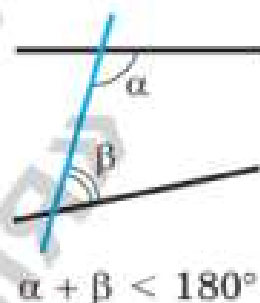


Рис. 335

Вам може здаватися, що в цьому висновку нічого особливого немає: приєднуємо аксіому паралельності до вже існуючого списку аксіом-правил, а далі доводимо теореми.

Однак якщо у футболі додати хоча б одне правило, наприклад, дозволити польовим гравцям грати й руками, то ми отримаємо зовсім іншу гру.

Якщо п'ятий постулат — це правило, яке ми приймаємо, а не теорема, то його можна замінити іншим правилом — твердженням, протилежним йому: *через точку, яка не лежить на даній прямій, проходять щонайменше дві прямі, які не перетинають дану*. Нова аксіома дає змогу побудувати нову геометрію — неевклідову.

49. Властивості паралельних прямих

Теорема 49.1 (обернена до теореми 48.1). Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні.

Доведення. ☉ На рисунку 336 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 = \angle 2$.

Нехай $\angle 1 \neq \angle 2$. Тоді через точку K проведемо пряму a_1 так, щоб $\angle 3 = \angle 2$ (рис. 336). Кути 3 і 2 є різносторонніми при прямих a_1 і b та січній c . Тоді за ознакою паралельності двох прямих (теорема 48.1) $a_1 \parallel b$. Отримали, що через точку K проходять дві прямі, паралельні прямій b . Це суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення є неправильним; отже, $\angle 1 = \angle 2$. ●

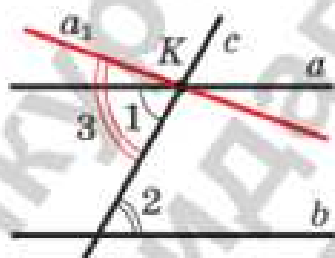


Рис. 336

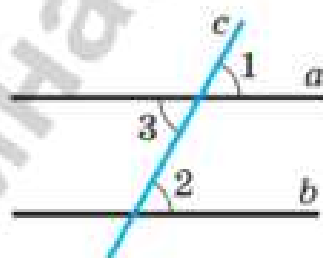


Рис. 337

Теорема 49.2 (обернена до теореми 48.3). Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні.

Доведення. ☉ На рисунку 337 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 = \angle 2$.

За властивістю паралельних прямих (теорема 49.1) кути 3 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих a і b та січній c . Але кути 3 й 1 рівні як вертикальні. Отже, $\angle 1 = \angle 2$. ●

Теорема 49.3 (обернена до теореми 48.2). Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180° .

Доведення. ☉ На рисунку 338 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

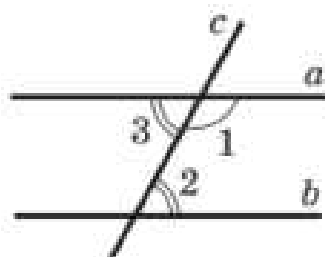


Рис. 338

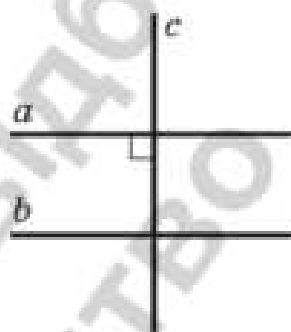


Рис. 339

За властивістю паралельних прямих (теорема 49.1) кути 3 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих a і b та січній c . Але кути 3 й 1 суміжні, тому $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Отже, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. ●

Наслідок. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої (рис. 339).

Доведіть цей наслідок самостійно.

🔑 **Задача 1.** Доведіть, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої.

Розв'язання. Нехай прямі a і b паралельні (рис. 340), M і N — дві довільні точки прямої a . Опустимо з них перпендикуляри MK і NP на пряму b . Доведемо, що $MK = NP$.

Розглянемо трикутники MKN та PNK . Відрізок KN — їхня спільна

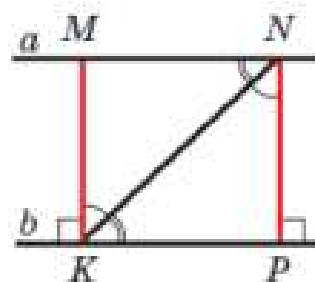


Рис. 340

сторона. Оскільки $MK \perp b$ і $NP \perp b$, то $MK \parallel NP$, а кути MKN і PNK рівні як різносторонні при паралельних прямих MK і NP та січній KN .

Аналогічно кути MNK і PKN рівні як різносторонні при паралельних прямих MN і KP та січній KN .

Отже, трикутники MKN і PNK рівні за стороною та двома прилеглими кутами, тобто за другою ознакою рівності трикутників. Тоді $MK = NP$. ◀

Означення. Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

Наприклад, на рисунку 340 довжина відрізка MK — це відстань між паралельними прямими a і b .

Задача 2. На рисунку 341 відрізок AK — бісектриса трикутника ABC , $MK \parallel AC$. Доведіть, що трикутник AMK рівнобедрений.

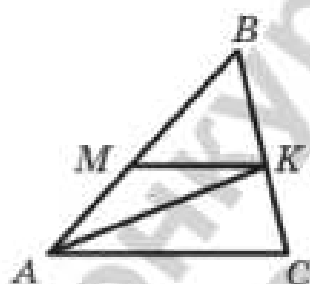


Рис. 341

Розв'язання. Оскільки відрізок AK — бісектриса трикутника ABC , то $\angle MAK = \angle KAC$. Кути KAC і MKA рівні як різносторонні при паралельних прямих MK і AC та січній AK . Отже, $\angle MAK = \angle MKA$. Тоді трикутник AMK рівнобедрений. ◀



1. Яку властивість мають різносторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною?
2. Яку властивість мають відповідні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною?
3. Яку властивість мають односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною?
4. Відомо, що пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих. Чи обов'язково вона перпендикулярна до другої прямої?
5. Що називають відстанню між двома паралельними прямими?



В іменниках жіночого роду однини в орудному відмінку перед закінченням м'які приголосні та шиплячі звуки [ж], [ч], [ш] подовжуються. На письмі подовження приголосного звука передаємо двома однаковими буквами, а закінчення — буквою *ю*: *відстань* — *відстанню*, *грань* — *гранню*, *вісь* — *віссю*, *діагональ* — *діагоналлю*.

ВПРАВИ

1541.° На рисунку 342 прямі a і b паралельні.

1) Чи є рівними кути 1 і 5? кути 4 і 6? кути 2 і 8?

2) Чому дорівнює сума кутів 3 і 5?

Відповідь обґрунтуйте.

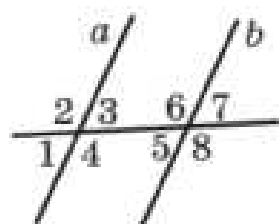


Рис. 342

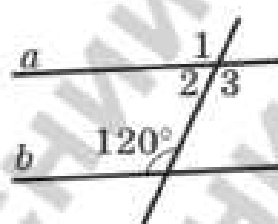


Рис. 343

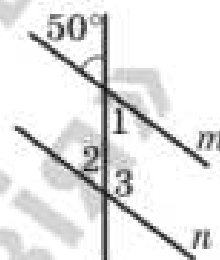


Рис. 344

1542.° На рисунку 343 прямі a і b паралельні. Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$ і $\angle 3$.

1543.° На рисунку 344 прямі m і n паралельні. Знайдіть $\angle 1$, $\angle 2$ і $\angle 3$.

1544.° Один із кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих третьою, дорівнює 28° . Чи може який-небудь із утворених кутів дорівнювати: 1) 142° ; 2) 152° ?

1545.° Сума двох різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих третьою, дорівнює 290° . Знайдіть ці кути.

1546.° Сума двох відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих третьою, дорівнює 56° . Знайдіть ці кути.

1547.° На рисунку 345 знайдіть кут 1.

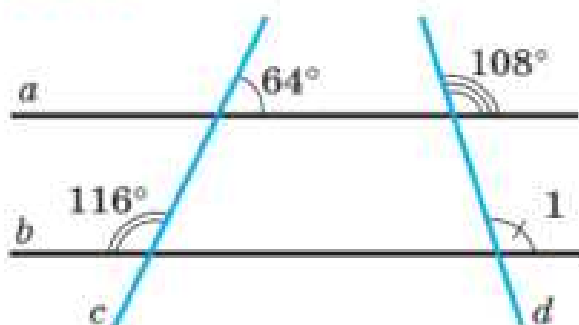


Рис. 345

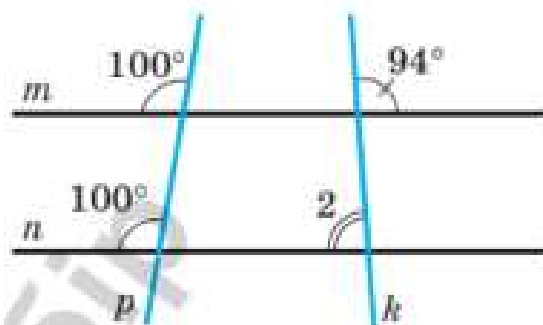


Рис. 346

1548.° На рисунку 346 знайдіть кут 2.

1549.° На рисунку 347 $\angle 1 = \angle 2$, $a \perp n$. Доведіть, що $b \perp n$.

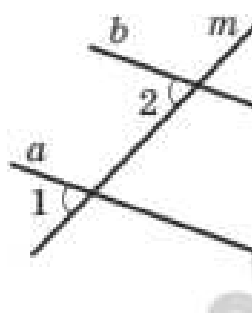


Рис. 347

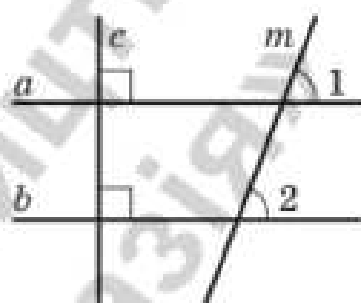


Рис. 348

1550.° На рисунку 348 $a \perp c$, $b \perp c$. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

1551.° Різниця односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50° . Знайдіть ці кути.

1552.° Один з односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, у 4 рази більший за другий. Знайдіть ці кути.

1553.° На рисунку 349 $m \parallel n$, $p \parallel k$, $\angle 1 = 50^\circ$. Знайдіть кути 2, 3 і 4.

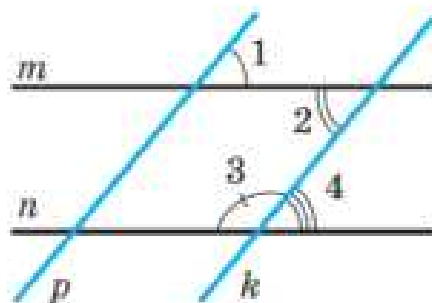


Рис. 349

1554.* Пряма, паралельна основі AC рівнобедреного трикутника ABC , перетинає його бічні сторони AB і BC у точках D і F відповідно. Доведіть, що трикутник DBF рівнобедрений.

1555.* На продовженнях сторін AC і BC рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) за точки A і B позначили відповідно точки P і K так, що $PK \parallel AB$. Доведіть, що трикутник KPC рівнобедрений.

1556.* Відрізки AB і CD перетинаються в точці O , $AO = BO$, $AC \parallel BD$. Доведіть, що $CO = DO$.

1557.* Відрізки MK і DE перетинаються в точці F , $DK \parallel ME$, $DK = ME$. Доведіть, що $\triangle MEF = \triangle KDF$.

1558.* Дайте відповідь на запитання.

- 1) Чи можуть обидва односторонніх кути при двох паралельних прямих і січній бути тупими?
- 2) Чи може сума різносторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнювати 180° ?
- 3) Чи можуть бути рівними односторонні кути при двох паралельних прямих і січній?

1559.* На рисунку 350 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Доведіть, що $BC = AD$.

1560.* На рисунку 350 $BC = AD$, $BC \parallel AD$. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

1561.* На рисунку 351 $MK \parallel EF$, $ME = EF$, $\angle KMF = 70^\circ$. Знайдіть кут MEF .

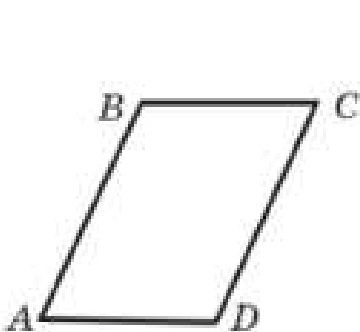


Рис. 350

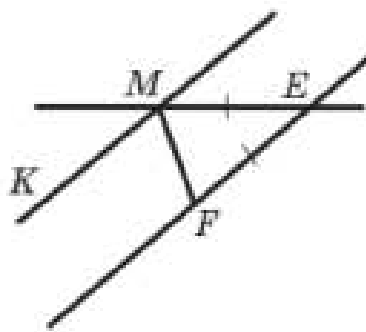


Рис. 351

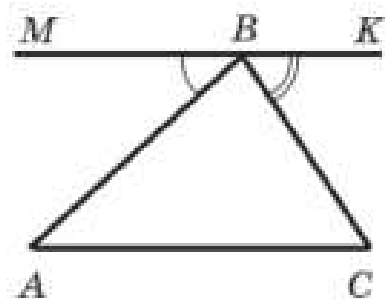


Рис. 352

1562.* Через вершину B трикутника ABC (рис. 352) провели пряму MK , паралельну прямій AC , $\angle MBA = 42^\circ$, $\angle CBK = 56^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC .

1563.* Пряма, проведена через вершину A трикутника ABC паралельно його протилежній стороні, утворює зі стороною AC кут, який дорівнює куту BAC . Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

1564.* Доведіть, що бісектриси пари різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

1565.* Доведіть, що бісектриси пари відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

1566.** На рисунку 353 $\angle MAB = 50^\circ$, $\angle ABK = 130^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$, промінь CE — бісектриса кута ACD . Знайдіть кути трикутника ACE .

1567.** На рисунку 354 $BE \perp AK$, $CF \perp AK$, CK — бісектриса кута FCD , $\angle ABE = 62^\circ$. Знайдіть кут ACK .

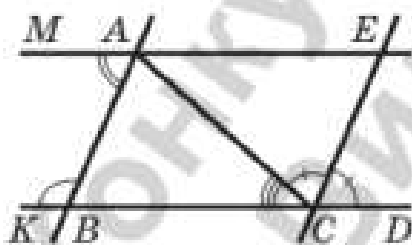


Рис. 353

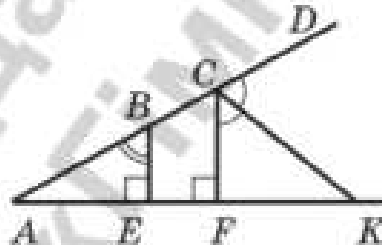


Рис. 354

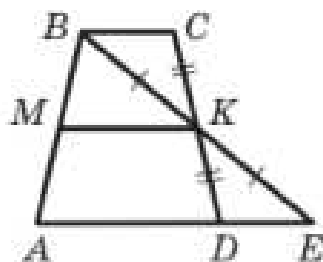


Рис. 355

1568.** На рисунку 355 $BC \parallel MK$, $BK = KE$, $CK = KD$. Доведіть, що $AD \parallel MK$.

1569.** На рисунку 356 $AB = AC$, $AF = FE$, $AB \parallel EF$. Доведіть, що $AE \perp BC$.

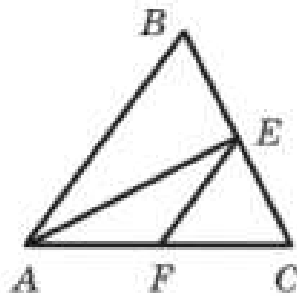


Рис. 356

1570.* Трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC . Через довільну точку M його бісектриси BD проведено прямі, які паралельні його сторонам AB і BC та перетинають відрізок AC у точках E та F відповідно. Доведіть, що $DE = DF$.

1571.* На рисунку 357 $AB \parallel DE$. Доведіть, що $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$.

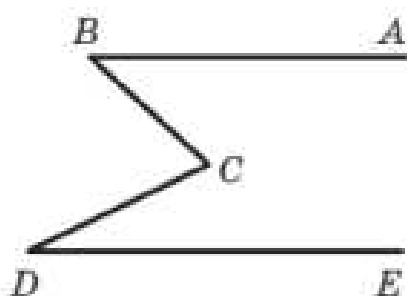


Рис. 357

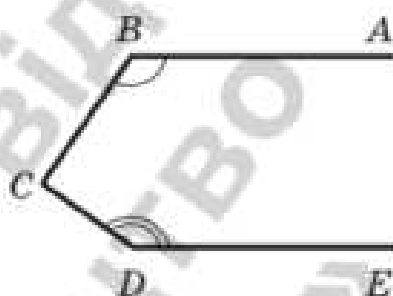


Рис. 358

1572.* На рисунку 358 $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle CDE = 150^\circ$. Доведіть, що $BC \perp CD$.

1573.* Через вершину B трикутника ABC провели пряму, паралельну його бісектрисі AM . Ця пряма перетинає пряму AC у точці K . Доведіть, що трикутник BAK рівнобедрений.

1574.* Через точку O перетину бісектрис AE і CF трикутника ABC провели пряму, паралельну прямій AC . Ця пряма перетинає сторону AB у точці M , а сторону BC — у точці K . Доведіть, що $MK = AM + CK$.

1575.* Бісектриси кутів BAC і BCA трикутника ABC перетинаються в точці O . Через цю точку проведено прямі, які паралельні прямим AB і BC та перетинають сторону AC у точках M і K відповідно. Доведіть, що периметр трикутника $МОК$ дорівнює довжині сторони AC .

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1576. Розкладіть на множники многочлен:

1) $27x^3 - 36x^2 + 6x - 8$;

3) $3x^3 - x^2 - 6x + 2$;

2) $x^2y^2 + xy + axy + a$;

4) $24x^6 - 20x^4y - 6x^2y^3 + 5y^4$.

1577. Якого найбільшого значення та при якому значенні змінної набуває вираз:

1) $-x^2$;

2) $-x^2 + 4$;

3) $12 - (x-1)^2$?

1578. Графіки функцій $y = 0,5x - 3$, $y = -4x + 6$ і $y = kx$ перетинаються в одній точці. Знайдіть значення k . Побудуйте в одній системі координат графіки цих функцій.

1579. До магазину завезли 740 кг апельсинів і бананів у 80 ящиках. У кожному ящику було 10 кг апельсинів або 8 кг бананів. Скільки кілограмів апельсинів завезли до магазину?

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

1580. На рисунку 359 зображено дуже складну замкнену ламану. Вона обмежує певну частину площини (многокутник). На рисунку позначають довільну точку. Як найшвидше визначити, належить ця точка многокутнику чи ні?

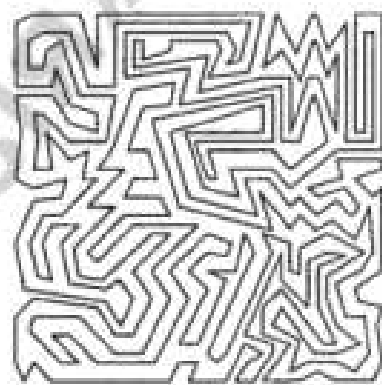


Рис. 359

50. Сума кутів трикутника

Трикутник — ключова фігура планіметрії. Світ трикутників різноманітний. Проте всім їм притаманна властивість, яку розкриває така теорема.

Теорема 50.1. *Сума кутів трикутника дорівнює 180° .*

Доведення. ☉ Розглянемо довільний трикутник ABC . Треба довести, що $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Через вершину B проведемо пряму a , паралельну прямій AC (рис. 360). Маємо: $\angle A$ і $\angle 1$ рівні як різносторонні при паралельних прямих a й AC та січній AB . Аналогічно можна довести, що $\angle C = \angle 3$. Але кути $1, 2, 3$ складають розгорнутий кут з вершиною B . Отже, $\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. ●

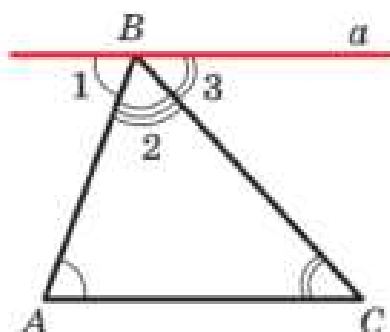


Рис. 360

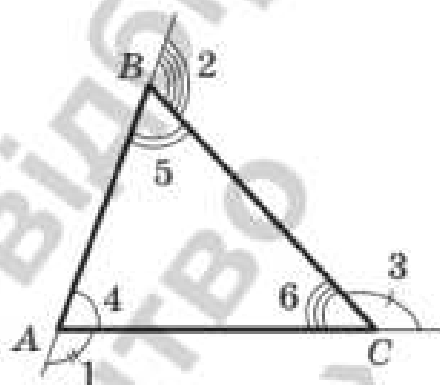


Рис. 361

Наслідок. Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.

Доведіть цей наслідок самостійно.

Із цього наслідку випливає, що кут при основі рівнобедреного трикутника завжди є гострим.

Означення. Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.

На рисунку 361 кути $1, 2, 3$ є зовнішніми кутами трикутника ABC .

Теорема 50.2. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Доведення. ☉ На рисунку 361 кути $1, 2$ і 3 — зовнішні кути трикутника ABC . Треба довести, що $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$, $\angle 2 = \angle 4 + \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5$.

Доведемо, наприклад, першу із цих трьох рівностей (решту рівностей доводять аналогічно).

За властивістю суміжних кутів $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$. За теоремою про суму кутів трикутника $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$. Тоді $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, звідки $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$. ●

Наслідок. Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.

Доведіть цей наслідок самостійно.

Задача. Медіана CM трикутника ABC дорівнює половині сторони AB . Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

Розв'язання. За умовою $AM = CM$ (рис. 362). Тоді в трикутнику AMC кути A та ACM рівні.

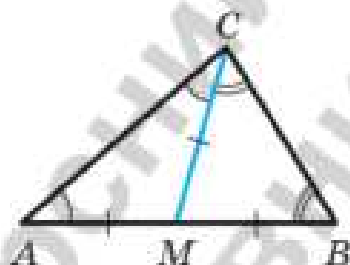


Рис. 362

За умовою $BM = CM$, звідси випливає, що в трикутнику BMC кути B і BCM рівні.

У трикутнику ACB маємо: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$. Ураховуючи, що $\angle A = \angle ACM$ і $\angle B = \angle BCM$, отримуємо: $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180^\circ$.

Оскільки $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, то $2\angle ACB = 180^\circ$. Тоді $\angle ACB = 90^\circ$.

Отже, трикутник ABC прямокутний. ◀



1. Чому дорівнює сума кутів трикутника?
2. Яку найменшу кількість гострих кутів має будь-який трикутник?
3. Який кут називають зовнішнім кутом трикутника?
4. Який зв'язок між зовнішнім кутом трикутника та двома кутами трикутника, не суміжними з ним?
5. Порівняйте зовнішній кут трикутника з кутом трикутника, який не суміжний з ним.



В іменниках жіночого роду однини, основа яких закінчується двома приголосними звуками, в орудному відмінку перед закінченням *-у(-ю)* подовження звуків не відбувається: *властивість* — *властивістю*, *рівність* — *рівністю*, *нерівність* — *нерівністю*, *паралельність* — *паралельністю*.

ВПРАВИ

1581.° Чи існує трикутник, кути якого дорівнюють:

- 1) 20° , 60° і 80° ; 2) 10° , 40° і 120° ?

1582.° Знайдіть кут трикутника, якщо два інших його кути дорівнюють 35° і 96° .

1583.° Знайдіть невідомі кути трикутника ABC , зображеного на рисунку 363.

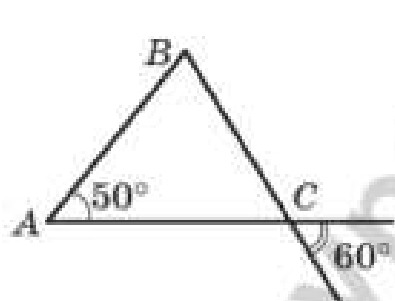


Рис. 363

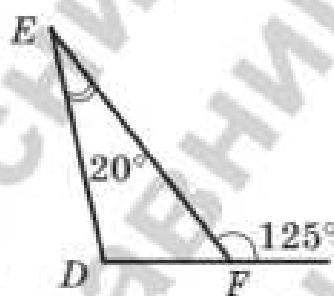


Рис. 364

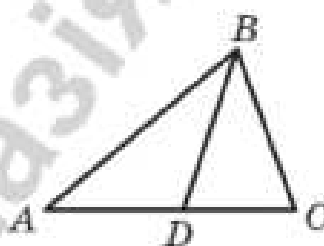


Рис. 365

1584.° Знайдіть невідомі кути трикутника DEF , зображеного на рисунку 364.

1585.° Відрізок BD є бісектрисою трикутника ABC (рис. 365), $\angle A = 40^\circ$, $\angle C = 70^\circ$. Знайдіть кут ABD .

1586.° Відрізок FK — бісектриса трикутника DEF (рис. 366), $\angle EFK = 64^\circ$, $\angle D = 44^\circ$. Знайдіть кут E .

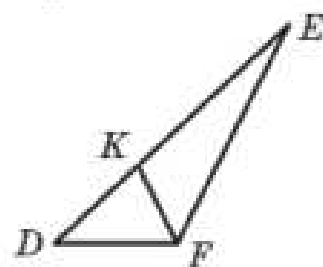


Рис. 366

1587.° Один із кутів трикутника в 3 рази менший від другого кута та на 35° менший від третього. Знайдіть кути трикутника.

1588.° Знайдіть кути трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як $2 : 3 : 7$.

 **1589.**° Знайдіть кути рівностороннього трикутника.

 **1590.**° Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.

1591.° Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 63° . Знайдіть кут при вершині цього трикутника.

1592.° Знайдіть кути при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 104° .

1593.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині в 4 рази більший за кут при основі.

1594.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі на 48° менший від кута при вершині.

1595.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них дорівнює: 1) 110° ; 2) 50° . Скільки розв'язків має задача?

1596.° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них дорівнює: 1) 42° ; 2) 94° . Скільки розв'язків має задача?

1597.° У трикутнику ABC відомо, що відрізок AK — бісектриса, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAK = 18^\circ$. Знайдіть кути AKC і ABC .

1598.° У трикутнику ABC відомо, що відрізок CK — бісектриса, $AB = BC$, $\angle A = 66^\circ$. Знайдіть кут AKC .

1599.° Бісектриси AK і CM трикутника ABC перетинаються в точці O , $\angle BAC = 116^\circ$, $\angle BCA = 34^\circ$. Знайдіть кут AOC .

1600.° У рівнобедреному трикутнику ABC з кутом при вершині B , який дорівнює 36° , провели бісектрису AD . Доведіть, що трикутники ADB і CAD рівнобедрені.

1601.° У трикутнику ABC провели бісектрису BF . Знайдіть кут C , якщо $\angle A = 39^\circ$, $\angle AFB = 78^\circ$.

1602.° Доведіть, що коли один із кутів трикутника дорівнює сумі двох інших кутів, то цей трикутник прямокутний.

1603.° На рисунку 367 укажіть зовнішні кути:

- 1) при вершинах E та F трикутника MEF ;
- 2) при вершині E трикутника MKE .

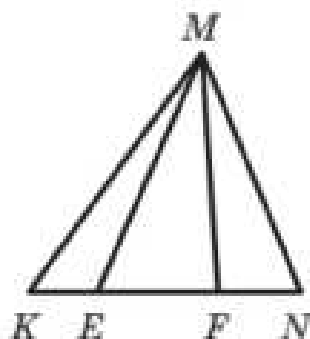


Рис. 367

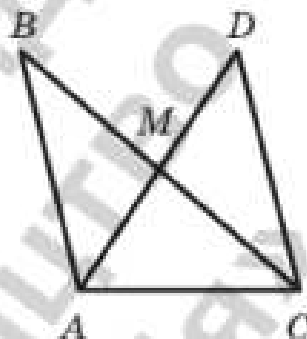


Рис. 368

1604.° На рисунку 368 укажіть трикутники, для яких зовнішнім кутом є: 1) кут AMB ; 2) кут BMD .

1605.° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 75° . Чому дорівнює:

- 1) кут трикутника при цій вершині;
- 2) сума двох кутів трикутника, не суміжних з ним?

1606.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 58^\circ$, $\angle B = 72^\circ$. Знайдіть зовнішній кут трикутника при вершині C .

1607.° Чи може зовнішній кут трикутника бути меншим від суміжного з ним кута трикутника? У разі ствердної відповіді вкажіть вид трикутника.

1608.° Визначте вид трикутника, якщо один із його зовнішніх кутів дорівнює куту трикутника, суміжному з ним.

1609.° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 136° , а один із кутів трикутника — 61° . Знайдіть

невідомий кут трикутника, не суміжний з даним зовнішнім.

1610. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 154° . Знайдіть кути трикутника, не суміжні з ним, якщо один із цих кутів на 28° більший за другий.

1611. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 98° . Знайдіть кути трикутника, не суміжні з ним, якщо один із цих кутів у 6 разів менший від другого.

1612. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо зовнішній кут при його вершині дорівнює 38° .

1613. Відомо, що трикутник ABC є рівнобедреним з основою AC . Знайдіть кути цього трикутника, якщо його зовнішній кут при вершині A дорівнює 115° .

1614. Доведіть, що коли два кути одного трикутника дорівнюють відповідно двом кутам другого трикутника, то й треті кути цих трикутників рівні.

1615. На сторонах трикутника ABC (рис. 369) позначено точки E та F так, що $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.

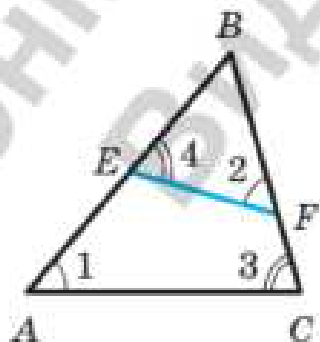


Рис. 369

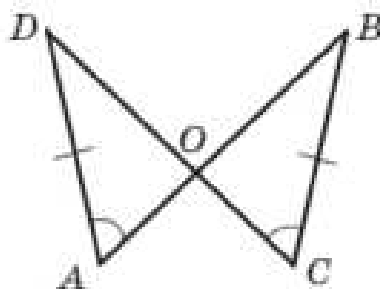


Рис. 370

1616. На рисунку 370 $AD = BC$, $\angle A = \angle C$. Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle COB$.

1617. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із його зовнішніх кутів дорівнює: 1) 54° ; 2) 112° . Скільки розв'язків має задача?

1618.* Зовнішній кут рівнобедреного трикутника дорівнює 130° . Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

1619.* Бісектриси кутів при основі AC рівнобедреного трикутника ABC перетинаються в точці O . Доведіть, що кут AOC дорівнює зовнішньому куту трикутника ABC при вершині A .

1620.* На рисунку 371 $BC \parallel AD$, $\angle A = 25^\circ$, $\angle B = 55^\circ$. Знайдіть кут CMD .

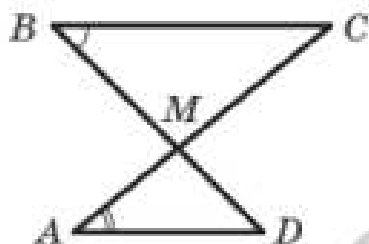


Рис. 371

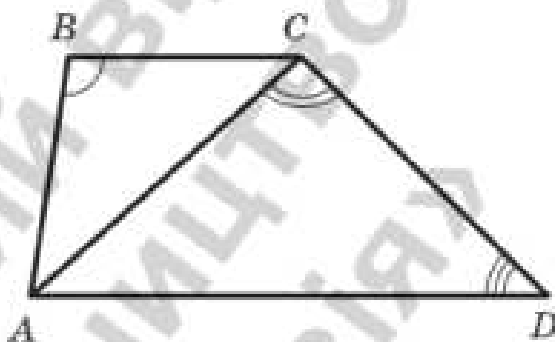


Рис. 372

1621.* Відрізок BK — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC з основою BC , $\angle KVB = 105^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC .

1622.* На стороні AB трикутника ABC позначили точку D так, що $BD = BC$, $\angle ACD = 15^\circ$, $\angle DCB = 40^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC .

1623.* Через вершину C трикутника ABC проведено пряму, яка паралельна бісектрисі AM трикутника й перетинає пряму AB у точці K . Знайдіть кути трикутника AKC , якщо $\angle BAC = 70^\circ$.

1624.* На рисунку 372 $BC \parallel AD$, $\angle B = 100^\circ$, $\angle ACD = 95^\circ$, $\angle D = 45^\circ$. Доведіть, що $AB = BC$.

1625.* У трикутнику ABC бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O . Знайдіть кут AOC , якщо $\angle B = 100^\circ$.

1626.* Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.

1627.* Доведіть, що коли бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то цей трикутник рівнобедрений.

1628.* Кут при основі AC рівнобедреного трикутника ABC у 2 рази більший за кут при його вершині, відрізок AM — бісектриса трикутника. Доведіть, що $BM = AC$.

1629.* Трикутник ABC рівнобедрений з основою AC . На стороні BC позначено точку M так, що $BM = AM = AC$. Знайдіть кути трикутника ABC .

 **1630.*** Доведіть, що в будь-якому трикутнику є кут: 1) не менший від 60° ; 2) не більший за 60° .

1631.** Визначте вид трикутника, якщо:

- 1) один із його кутів більший за суму двох інших;
- 2) будь-який із його кутів менший від суми двох інших.

1632.** Визначте вид трикутника, якщо сума будь-яких двох його кутів більша за 90° .

1633.** Чи існує трикутник, дві бісектриси якого перпендикулярні?

1634.** Чи існує трикутник, у якому одна бісектриса ділить навпіл другу бісектрису?

1635.** Знайдіть кути трикутника ABC , якщо бісектриса кута B розбиває його на два рівнобедрених трикутники.

1636.* У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \alpha$, бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C перетинаються в точці O . Знайдіть кут BOC .

1637.* На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначили відповідно точки E та F так, що $AC = AF = EF = BE$. Знайдіть кути трикутника ABC .

1638.* У трикутнику ABC відомо, що $AB = 2$ см, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. На стороні AC позначили точку D так, що $AD = 1$ см. Знайдіть кути трикутника BDC .

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1639. Спростіть вираз:

1) $4x(3x - 10y) - (4x + y)(4x - y)$;

2) $(x + 1)(x - 1) - (x + 5)(x - 5) + (x + 1)(x - 5)$.

1640. Функцію задано формулою $y = 6 - kx$. При якому значенні k графік функції проходить через точку $A(4; -2)$?

1641. Яке з даних рівнянь: а) має один корінь; б) має два корені; в) має безліч коренів; г) не має жодного кореня:

1) $3,4(1 + 3x) - 1,2 = 2(1,1 + 5,1x)$;

2) $|2x - 1| = 17,3$;

3) $3(|x - 1| - 6) + 21 = 0$;

4) $0,2(7 - 2x) = 2,3 - 0,3(x - 6)$?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

1642. Чи існує шестикутник, жодні дві діагоналі якого не мають спільних точок, відмінних від вершин?

51. Нерівності, пов'язані з елементами трикутника

Нехай сторони трикутника ABC зображають дороги (рис. 373). Вам потрібно дістатися з пункту A в пункт C . Який маршрут ви оберете: підете через пункт B чи



Рис. 373

виберете дорогу AC ? Досвід підказує, що другий варіант коротший. Вашу здогадку підтверджує така теорема.

Теорема 51.1 (нерівність трикутника). *Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.*

Доведення. ☉ Розглянемо трикутник ABC . Треба довести, що: 1) $AB < AC + CB$; 2) $AC < AB + BC$; 3) $BC < BA + AC$.

Доведемо першу з цих нерівностей (дві інші доводять аналогічно).

Нехай нерівність, яку треба довести, є неправильною. Тоді $AB > AC + CB$ або $AB = AC + CB$.

1) Нехай $AB > AC + CB$. Тоді на стороні AB можна позначити точки C_1 і C_2 такі, що $AC = AC_1$ і $BC = BC_2$ (рис. 374). Оскільки ми припустили, що $AB > AC + CB$, то $AB > AC_1 + BC_2$. Отже, відрізки AC_1 і BC_2 не мають спільних точок.

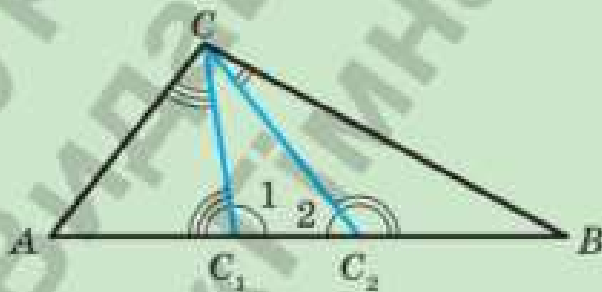


Рис. 374

Кути AC_1C і BC_2C є гострими як кути при основі рівнобедрених трикутників AC_1C і BC_2C відповідно. Тоді кути 1 і 2 є тупими як кути, суміжні з гострими. Отримали суперечність: у трикутнику C_1CC_2 два тупих кути.

2) Міркуючи аналогічно, можна показати (зробіть це самостійно), що рівність $AB = AC + CB$ також приводить до суперечності. ●

З доведеної теореми випливає, що коли довжина одного з трьох даних відрізків не менша від суми довжин двох інших відрізків, то ці відрізки не можуть слугувати сторонами трикутника (рис. 375).



Рис. 375

У п. 59 ви дізнаєтеся, що коли кожний із трьох даних відрізків менший від суми двох інших, то ці відрізки можуть слугувати сторонами трикутника.

Ви вже знаєте, що в трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути, і навпаки, проти рівних кутів лежать рівні сторони (п. 43, 44). Ці властивості доповнює така теорема.

Теорема 51.2. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

Доведення. 1) Розглянемо трикутник ABC , у якому $AB > BC$. Треба довести, що $\angle ACB > \angle A$ (рис. 376).

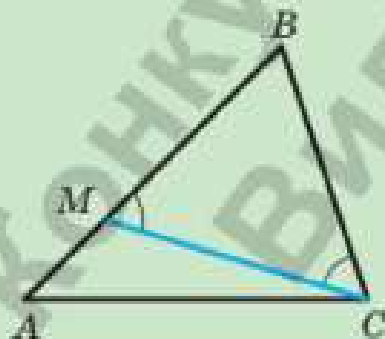


Рис. 376

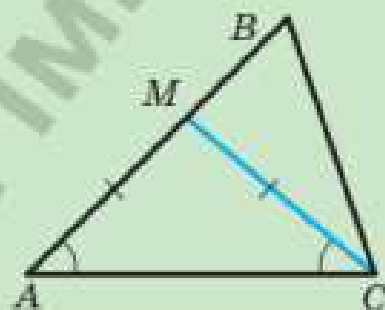


Рис. 377

Оскільки $AB > BC$, то на стороні AB знайдеться така точка M , що $BM = BC$. Отримали рівнобедрений трикутник MBC , у якому $\angle BMC = \angle BCM$.

Оскільки кут BMC — зовнішній кут трикутника AMC , то $\angle BMC > \angle A$. Наведений нижче «ланцюжок» нерівностей доводить першу частину теореми:

$$\angle ACB > \angle MCB = \angle BMC > \angle A.$$

2) Розглянемо трикутник ABC , у якому $\angle C > \angle A$. Треба довести, що $AB > BC$.

Оскільки $\angle ACB > \angle A$, то кут ACB можна поділити на два кути ACM і MCB так, що $\angle ACM = \angle A$ (рис. 377). Тоді трикутник AMC рівнобедрений з рівними сторонами MA і MC .

Для сторони BC запишемо нерівність трикутника: $MC + MB > BC$.

Маємо: $AB = AM + MB = MC + MB > BC$. ●

Зауважимо, що другу частину теореми 51.2 можна довести методом від супротивного: припустити, що $BC \geq AB$, а далі скористатися вже доведеною першою частиною теореми. Проведіть це доведення самостійно.

Задача. Відрізок BM — медіана трикутника ABC . Доведіть, що $2BM < AB + BC$.

Розв'язання. На промені BM позначимо точку K так, що $MK = BM$ (рис. 378).

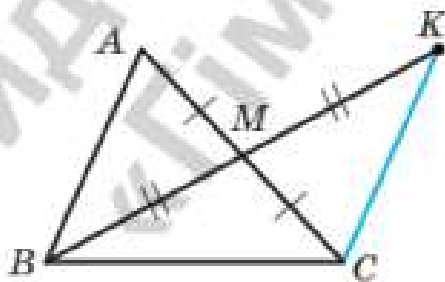


Рис. 378

У трикутниках ABM і KCM маємо: $AM = MC$, $BM = MK$, $\angle AMB = \angle CMK$.

Отже, $\triangle ABM = \triangle KCM$ за першою ознакою рівності трикутників. Тоді $AB = KC$.

Для сторони BK трикутника BKC запишемо нерівність трикутника: $BK < BC + CK$. Ураховуючи, що $BK = 2BM$ і $CK = AB$, отримуємо: $2BM < AB + BC$. ◀



1. Сформулюйте теорему про нерівність трикутника.
2. Сформулюйте теорему про співвідношення між сторонами та кутами трикутника.

ВПРАВИ

1643.° Чи можуть сторони трикутника дорівнювати:

- 1) 6 см, 5 см, 12 см;
- 2) 6 см, 5 см, 11 см?

1644.° Порівняйте кути трикутника ABC , якщо:

- 1) $AB > AC > BC$;
- 2) $AB = BC$, $BC > AC$.

1645.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 34^\circ$, $\angle B = 28^\circ$. Порівняйте сторони AB , BC і AC .

1646.° Порівняйте сторони трикутника ABC , якщо:

- 1) $\angle C > \angle A > \angle B$;
- 2) $\angle B > \angle C$, $\angle A = \angle B$.

1647.* Периметр трикутника дорівнює 30 см. Чи може одна з його сторін дорівнювати: 1) 20 см; 2) 15 см?

1648.* Довжини двох сторін трикутника дорівнюють 7 см і 9 см. Чи може периметр цього трикутника дорівнювати: 1) 20 см; 2) 32 см; 3) 18 см?

1649.* Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 7 см і 15 см. Знайдіть периметр трикутника.

1650.* Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см. Чи може довжина його бічної сторони дорівнювати 5 см?

1651.* Дві сторони трикутника дорівнюють 3,4 см і 6,1 см. Яку найменшу довжину, виражену цілим числом сантиметрів, може мати третя сторона?

1652.* Дві сторони трикутника дорівнюють 4,8 см і 7,6 см. Яку найбільшу довжину, виражену цілим числом сантиметрів, може мати третя сторона?

1653.* Чи існує трикутник, одна зі сторін якого на 2 см менша від другої та на 6 см менша від третьої, а периметр дорівнює 20 см?

1654.* Чи існує трикутник, одна зі сторін якого на 1 см менша від другої і на 3 см менша від третьої, а периметр дорівнює 22 см?

1655.* У трикутнику ABC кут B тупий. На продовженні сторони AB за точку A позначили довільну точку D . Доведіть, що $CD > AC$.

1656.* У трикутнику ABC відомо, що $\angle C > 90^\circ$. На стороні BC позначили довільну точку D . Доведіть, що $AD > AC$.

🔑 1657.* Три точки A , B і C такі, що виконується рівність $AB = AC + CB$. Доведіть, що точка C є внутрішньою точкою відрізка AB .

1658.* На прямій m (рис. 379) знайдіть таку точку C , щоб сума відстаней від неї до точок A і B була найменшою. Відповідь обґрунтуйте.



Рис. 379

1659.* Одна сторона трикутника дорівнює 2,8 см, а друга — 0,6 см. Знайдіть третю сторону цього трикутника, якщо її довжина, виражена в сантиметрах, дорівнює цілому числу.

1660.* Відрізок AM — медіана трикутника ABC , $\angle CAM > \angle BAM$. Доведіть, що $AB > AC$.

1661.* Доведіть, що сума довжин двох сторін трикутника більша за подвоєну довжину медіани, проведеної до третьої сторони.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1662. Розкладіть на множники:

1) $(m - 10)^2 - (n - 6)^2$;

2) $(-3x^3 + y)^2 - 16x^6$.

1663. Розв'яжіть рівняння:

1) $(1 - 3x)^2 - x(9x - 2) = 5$;

2) $(x - 12)(x + 12) = 2(x - 6)^2 - x^2$.

1664. Графікам яких із даних функцій належить точка $A(1; 2)$:

1) $y = 1 - 2x$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = 0,3x + 0,7$?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

1665. Довжини відрізків прямого коридору між входами у будь-які дві сусідні лікарняні палати однакові. У якому місці коридору треба встановити пост медсестер, щоб сума відстаней від нього до входів у палати була найменшою, якщо в коридорі: 1) дві палати; 2) три палати; 3) чотири палати?

1666. Два равлики одночасно почали повзти прямолінійно від однієї точки по рівній поверхні в різних напрямках (не обов'язково протилежних). Через деякий час виявилося, що один равлик проповз 2 м, а другий — 3 м. Якою може бути відстань між ними в цей момент?

52. Прямокутний трикутник

На рисунку 380 зображено прямокутний трикутник ABC , у якому $\angle C = 90^\circ$.

Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають гіпотенузою, а сторони, прилеглі до прямого кута, — катетами (рис. 380).

Для доведення рівності двох трикутників знаходять їхні рівні елементи. У будь-яких двох прямокутних трикутників такі елементи є завжди — це прямі кути. Тому для прямокутних трикутників можна сформулювати «персональні» ознаки рівності.

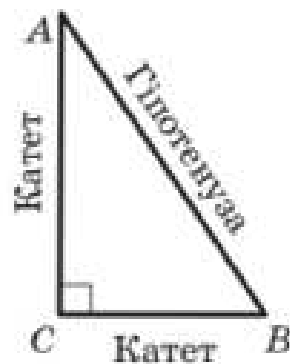


Рис. 380

Теорема 52.1 (ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та катетом). Якщо гіпотенуза та катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та катету другого, то такі трикутники рівні.

Доведення. ☉ Розглянемо трикутники ABC та $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 381). Треба довести, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

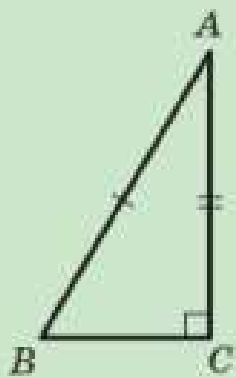


Рис. 381



Рис. 382

Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1 , вершина C — з вершиною C_1 , а точки B і B_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої A_1C_1 (рис. 382).

Маємо: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Отже, кут BC_1B_1 — розгорнутий, і тому точки B , C_1 , B_1 лежать на одній прямій. Отримали рівнобедрений трикутник BA_1B_1 з бічними сторонами A_1B і A_1B_1 та висотою A_1C_1 (рис. 382). Тоді відрізок A_1C_1 — медіана цього трикутника, тобто $C_1B = C_1B_1$. Отже, трикутники A_1BC_1 і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. ●

Під час розв'язування задач зручно користуватися й іншими ознаками рівності прямокутних трикутників.

ків, які безпосередньо впливають з ознак рівності трикутників.

Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами. Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом. Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Очевидно, що коли гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то рівні й два інших гострих кути. Скориставшись цим твердженням, перелік ознак рівності прямокутних трикутників можна доповнити ще двома.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом. Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом. Якщо гіпотенуза та гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Задача. Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

Розв'язання. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 383) $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, відрізки AD і A_1D_1 — бісектриси, $AD = A_1D_1$.

$$\text{Маємо: } \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1.$$

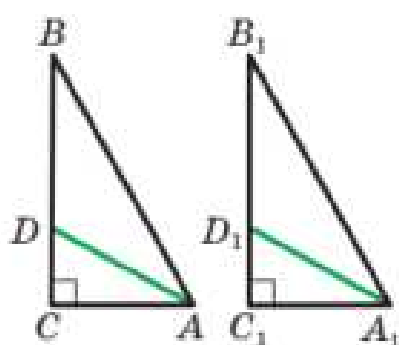


Рис. 383

Оскільки $AD = A_1D_1$, то прямокутні трикутники ACD й $A_1C_1D_1$ рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $AC = A_1C_1$, і оскільки $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то прямокутні трикутники ABC й $A_1B_1C_1$ рівні за катетом і прилеглим гострим кутом. ◀



1. Який трикутник називають прямокутним? 2. Яку сторону прямокутного трикутника називають гіпотенузою? 3. Яку сторону прямокутного трикутника називають катетом? 4. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та катетом. 5. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за двома катетами. 6. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом. 7. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом. 8. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом. 9. Чому дорівнює сума гострих кутів прямокутного трикутника?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1667.° За допомогою транспортира та лінійки побудуйте прямокутний трикутник:

- 1) катети якого дорівнюють 3 см і 4 см;
- 2) один із катетів якого дорівнює 2,5 см, а прилеглий до нього кут — 40° ;

3) гіпотенуза якого дорівнює 6 см, а один із гострих кутів — 70° .

Позначте побудовані трикутники, укажіть у кожному з них катети та гіпотенузу.

1668.° За допомогою транспортира та лінійки побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник:

- 1) з катетом, що дорівнює 5 см;
- 2) з гіпотенузою, що дорівнює 4 см.

ВПРАВИ

1669.° На рисунку 384 зображено трикутник MKE з прямим кутом при вершині K . Укажіть:

- 1) катети та гіпотенузу трикутника;
- 2) катет, прилеглий до кута E ;
- 3) катет, протилежний куту M .

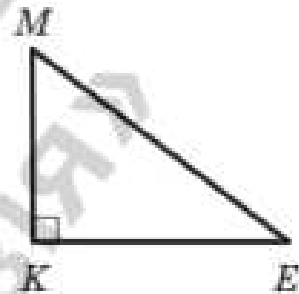


Рис. 384

1670.° На рисунку 385 відрізок AD — висота трикутника ABC . Знайдіть на цьому рисунку прямокутні трикутники, укажіть у кожному з них катети та гіпотенузу.

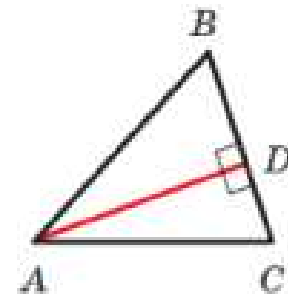


Рис. 385

1671.° Один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 43° . Знайдіть другий гострий кут.

1672.° Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як 7 : 8.

1673.° Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо один із них на 32° більший за другий.

1674.° Кут між висотою прямокутного трикутника, проведеною до гіпотенузи, і одним із катетів дорівнює 76° . Знайдіть гострі кути трикутника.

1675.° Знайдіть менший із кутів, утворених бісектрисою прямого кута трикутника з гіпотенузою, якщо один із гострих кутів трикутника дорівнює 54° .

1676.° У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено висоту AH . Знайдіть кут CAH , якщо $\angle B = 76^\circ$.

1677.° Кут між основою рівнобедреного трикутника та висотою, проведеною до бічної сторони, дорівнює 19° . Знайдіть кути даного трикутника.

1678.° На рисунку 386 $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $AC = BD$. Доведіть, що $AB = CD$.

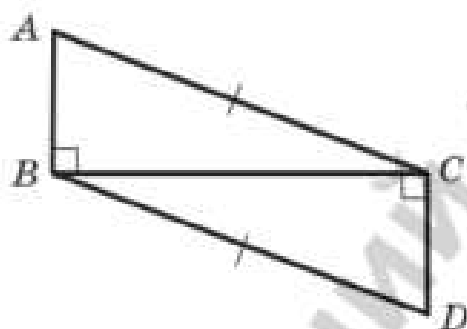


Рис. 386

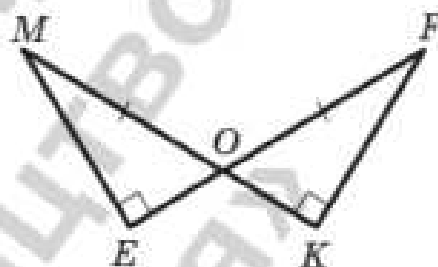


Рис. 387

1679.° На рисунку 387 $MO = FO$, $\angle MEO = \angle FKO = 90^\circ$. Доведіть, що $\triangle MEO = \triangle FKO$.

1680.° Із точок A і B , які лежать в одній півплощині відносно прямої a , опущено перпендикуляри AM і BK на цю пряму, $AM = BK$. Доведіть, що $AK = BM$.

1681.° На рисунку 388 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $BM \perp AC$, $DK \perp AC$. Доведіть, що $BM = DK$.

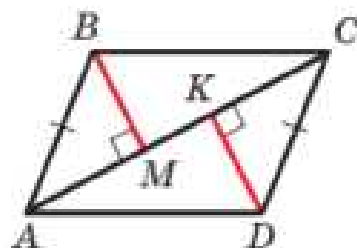


Рис. 388

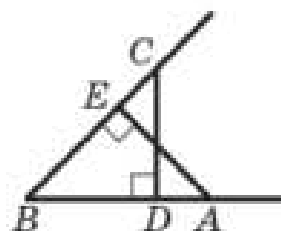


Рис. 389

1682.° На рисунку 389 $AB = BC$, $CD \perp AB$, $AE \perp BC$. Доведіть, що $BE = BD$.

 **1683.**° На бісектрисі кута з вершиною в точці B позначили точку M , з якої опустили перпендикуляри MD і MC на сторони кута. Доведіть, що $MD = MC$.

1684.° На сторонах кута з вершиною в точці B позначили точки A і C так, що $AB = BC$. Через точки A і C провели прямі, які перпендикулярні до сторін BA і BC відповідно та перетинаються в точці O . Доведіть, що промінь BO — бісектриса кута ABC .

 **1685.*** Доведіть, що висоти рівнобедреного трикутника, проведені до його бічних сторін, є рівними.

 **1686.*** Доведіть, що коли дві висоти трикутника рівні, то цей трикутник є рівнобедреним.

1687.* Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і бісектрисою, проведеною з вершини прямого кута.

1688.* Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і висотою, проведеною з вершини прямого кута.

1689.* Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і бісектрисою, проведеною з вершини прилеглого до цього катета гострого кута.

1690.* Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до другого катета.

 **1691.*** Доведіть, що в рівних трикутниках висоти, опущені на відповідні сторони, є рівними.

1692.** Пряма перетинає сторони AB і BC трикутника ABC відповідно в точках M і K , які є серединами цих сторін. Доведіть, що вершини даного трикутника рівновіддалені від прямої MK .

1693.** Пряма перетинає сторони AB і BC трикутника ABC у точках M і K відповідно. Вершини даного три-

кутника рівновіддалені від прямої MK . Доведіть, що точки M і K є серединами сторін AB і BC відповідно.

1694.* Доведіть рівність гострокутних трикутників за стороною та двома висотами, проведеними з кінців цієї сторони.

1695.* Доведіть рівність трикутників за стороною та проведеними до неї медіаною та висотою.

1696.* Висоти AM і CK трикутника ABC перетинаються в точці H , $HK = HM$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

1697.* Висоти ME і NF трикутника MKN перетинаються в точці O , $OM = ON$, $MF = KE$. Доведіть, що трикутник MKN рівносторонній.

1698.* Чи можна стверджувати, що коли дві сторони й висота, проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і висоті, проведеним до третьої сторони, другого трикутника, то ці трикутники рівні?

1699.* Доведіть рівність трикутників за двома кутами й висотою, проведеною з вершини третього кута.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1700. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)^2 + (4x + 2)^2 = (5x - 1)(5x + 1)$;

2) $(3x + 2)^2 + (4x - 1)(4x + 1) = (5x - 1)^2$.

1701. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної (змінних):

1) $(x - 9)(x + 9) - (x + 19)(x - 19)$;

2) $(2a - b)(2a + b) + (b - c)(b + c) + (c - 2a)(c + 2a)$.

1702. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(9n + 10)^2 - (9n + 8)^2$ ділиться націло на 36.

1703. Чи може набувати додатних значень вираз:

1) $-x^2 + 20x - 100$;

2) $-x^2 - 10 - 4x$?

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

1704. Чи можна замостити площину фігурами, кожна з яких дорівнює фігурі, зображеній на рисунку 390?

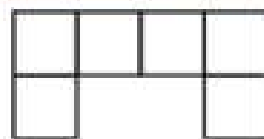


Рис. 390

53. Властивості прямокутного трикутника

Теорема 53.1. У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.

Доведення. ☉ Будь-який із катетів лежить проти гострого кута, а гіпотенуза лежить проти прямого кута. Прямий кут більший за гострий кут, а в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона (теорема 51.2). Тому гіпотенуза більша за будь-який із катетів. ●

Наслідок. Якщо з однієї точки, яка не лежить на прямій, до цієї прямої проведено перпендикуляр і похилу, то перпендикуляр менший від похилої.

На рисунку 391 відрізок AB — перпендикуляр, відрізок AX — похила, $AB < AX$.

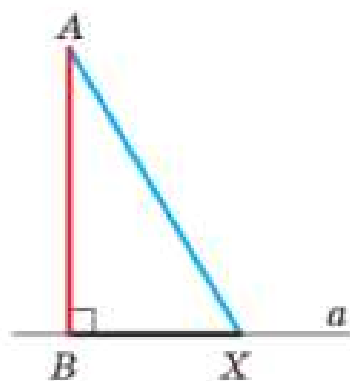


Рис. 391

🔑 **Задача 1.** Доведіть, що катет, який лежить проти кута величиною 30° , дорівнює половині гіпотенузи.

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC , у якому $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$. Треба довести, що

$$BC = \frac{1}{2} AB.$$

На промені BC відкладемо відрізок CD , який дорівнює відрізку BC (рис. 392). Проведемо відрізок AD . Тоді в трикутниках ABC і ADC маємо: $\angle ACB = \angle ACD = 90^\circ$, сторони BC і CD рівні за побудовою, відрізок

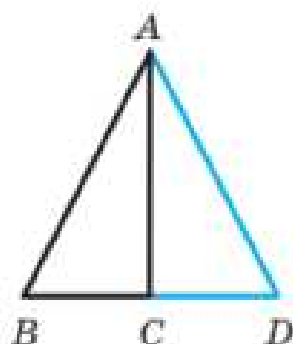


Рис. 392

AC — спільна сторона цих трикутників. Отже, ці трикутники рівні за двома катетами. Тоді $\angle DAC = 30^\circ$, звідси $\angle BAD = \angle ABD = 60^\circ$. Отже, $\angle ADB = 60^\circ$ і трикутник ABD рівносторонній.

$$\text{Тоді } BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB. \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2. Доведіть, що коли катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить проти цього катета, дорівнює 30° .

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC , у якому $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = \frac{1}{2}AB$. Треба довести, що $\angle BAC = 30^\circ$.

На промені BC відкладемо відрізок CD , який дорівнює відрізку BC (рис. 392). Тоді $AB = BD$. Крім того, відрізок AC є медіаною та висотою трикутника BAD , отже, за ознакою рівнобедреного трикутника $AB = AD$. Отримуємо, що $AB = BD = AD$, тому трикутник BAD рівносторонній, отже, $\angle BAD = 60^\circ$.

Оскільки відрізок AC — бісектриса трикутника BAD , то $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = 30^\circ. \quad \blacktriangleleft$



1. Яка зі сторін прямокутного трикутника є найбільшою?
2. Яку властивість має катет, який лежить проти кута, що дорівнює 30° ?
3. Яку градусну міру має кут, який лежить проти катета, що дорівнює половині гіпотенузи?

ВПРАВИ

1705.° Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 24 см, 10 см і 26 см. Чому дорівнює найбільший катет даного трикутника?

1706.° Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 15 см, 17 см і 8 см. Укажіть довжину гіпотенузи та довжину меншого катета.

1707.° У прямокутному трикутнику DEF гіпотенуза DE дорівнює 18 см, $\angle D = 30^\circ$. Знайдіть катет FE .

1708.° У прямокутному трикутнику MKS відомо, що $\angle M = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $CM = 7$ см. Знайдіть гіпотенузу SK .

1709.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, CK — висота, $AC = 10$ см. Знайдіть відрізок BK .

1710.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, CD — висота, $BD = 7$ см. Знайдіть гіпотенузу AB .

1711.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, відрізок CK — висота, $CK = 7$ см, $AC = 14$ см. Знайдіть $\angle B$.

1712.* У рівносторонньому трикутнику ABC точка D — середина сторони AB . Із цієї точки опущено перпендикуляр DE на сторону AC . Знайдіть відрізки, на які точка E розбиває відрізок AC , якщо сторона даного трикутника дорівнює 16 см.

1713.* Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 30° , а різниця гіпотенузи й меншого катета — 5 см. Знайдіть ці сторони трикутника.

1714.* На рисунку 393 відрізок AB — перпендикуляр, відрізок AC — похила, $AC = 2$ см. Знайдіть кут ACB і довжину перпендикуляра AB , якщо ця довжина, виражена в сантиметрах, дорівнює цілому числу.

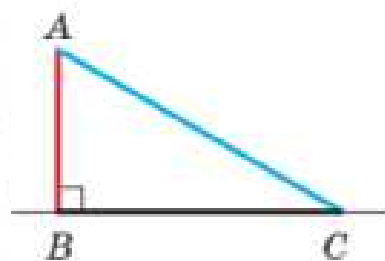


Рис. 393

1715.* На катеті AC трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) позначили точку K так, що $AK = BK$. Знайдіть кут A , якщо $AK = 6$ см, $KC = 3$ см.

1716.* Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а один із кутів — 120° . Знайдіть висоту трикутника, проведену з вершини кута при його основі.

1717.* У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено висоту BM завдовжки 7,5 см, $\angle MBC = 15^\circ$. Знайдіть бічну сторону трикутника.

1718.* Бісектриси AM і BK рівностороннього трикутника ABC перетинаються в точці O . Доведіть, що $AO : OM = 2 : 1$.

1719.** У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Серединний перпендикуляр відрізка AB перетинає його в точці M , а відрізок BC — у точці K . Доведіть, що $MK = \frac{1}{3}BC$.

1720.** У трикутнику MKE відомо, що $\angle K = 90^\circ$, $\angle E = 30^\circ$, $KE = 12$ см. Знайдіть бісектрису MC трикутника.

1721.** У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, відрізок AD — бісектриса, відрізок CD на 3 см менший від відрізка BD . Знайдіть бісектрису AD .

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1722. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{2x-1}{8} - \frac{x+2}{4} = x;$$

$$2) 3(2x+3) - 2(3x+5) = -1.$$

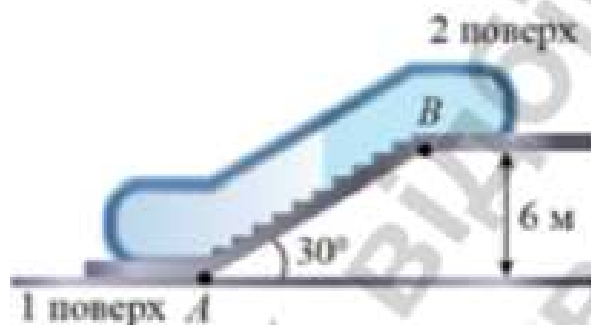
1723. Побудуйте графік функції

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x < -1, \\ 1, & \text{якщо } x = -1, \\ x+3, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$$

1724. Відомо, що $x+y = \frac{a^2}{4}$, $y+z = -a$, $x+z = 1$. Доведіть, що вираз $x+y+z$ набуває тільки невід'ємних значень.

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

1725. Ескалатор піднімає пасажирів і пасажирок аеропорту з першого на другий поверх. Висота першого поверху становить 6 м (рис. 394). Кут нахилу ескалатора AB до площини підлоги першого поверху дорівнює 30° . Визначте довжину ескалатора AB .

**Рис. 394****СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

1726. Розріжте трикутник на чотири частини так, щоб, перегорнувши три з них, можна було б знову скласти трикутник, який дорівнює даному.

ЗАВДАННЯ № 10 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яке з поданих тверджень є правильним?

- А) Якщо два відрізки не мають спільних точок, то вони паралельні.
- Б) Якщо два промені не мають спільних точок, то вони паралельні.
- В) Якщо промінь і відрізок не мають спільних точок, то вони паралельні.
- Г) Якщо дві прямі не мають спільних точок, то вони паралельні.

2. Яке з поданих тверджень є правильним?

- А) Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки один відрізок, паралельний цій прямій.
- Б) Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки один промінь, паралельний цій прямій.

В) Через точку, яка не належить даній прямій, проходить безліч прямих, непаралельних цій прямій.

Г) Через точку, яка не належить даній прямій, проходять тільки дві прямі, паралельні цій прямій.

3. Яке з поданих тверджень є неправильним?

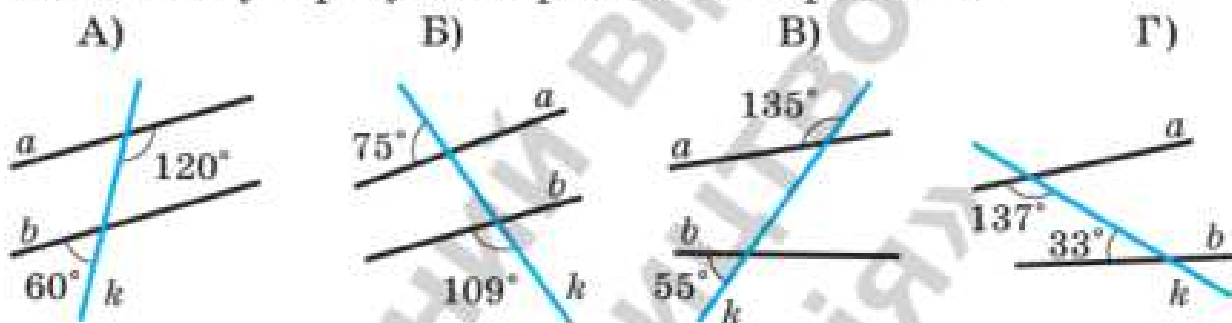
А) Якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Б) Якщо $a \perp b$ і $b \perp c$, то $a \parallel c$.

В) Якщо $a \perp b$ і $b \perp c$, то $a \perp c$.

Г) Якщо $a \parallel b$ і $c \perp b$, то $c \perp a$.

4. На якому з рисунків прямі a і b паралельні?



5. Яке з поданих тверджень є неправильним?

А) Якщо сума кутів однієї пари різносторонніх кутів дорівнює сумі кутів другої пари, то прямі не паралельні.

Б) Якщо різносторонні кути не рівні, то прямі не паралельні.

В) Якщо сума односторонніх кутів не дорівнює 180° , то прямі не паралельні.

Г) Якщо відповідні кути не рівні, то прямі не паралельні.

6. Скільки зовнішніх кутів має трикутник?

А) 3; Б) 6; В) 4; Г) 9.

7. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів трикутника, узятих по одному при кожній вершині?

А) 180° ; Б) 300° ; В) 360° ; Г) 100° .

8. У трикутнику ABC бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O , $\angle ABC = 84^\circ$. Укажіть правильну рівність.

А) $\angle AOC = 48^\circ$; В) $\angle AOC = 132^\circ$;

Б) $\angle AOC = 138^\circ$; Г) $\angle AOC = 174^\circ$.

9. У трикутнику ABC висоти, проведені із вершин A і C , перетинаються в точці O , $\angle ABC = 62^\circ$. Яка з поданих рівностей є правильною?

А) $\angle AOC = 28^\circ$;

В) $\angle AOC = 152^\circ$;

Б) $\angle AOC = 118^\circ$;

Г) $\angle AOC = 149^\circ$.

10. Якому значенню серед наведених може дорівнювати довжина сторони AB трикутника ABC , якщо $AC = 3$ см, $BC = 10$ см?

А) 3 см;

Б) 7 см;

В) 11 см;

Г) 15 см.

11. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Яке з поданих тверджень є правильним?

А) $CB = \frac{1}{2} AB$;

В) $CB = \frac{1}{2} AC$;

Б) $AC = \frac{1}{2} AB$;

Г) $AC = \frac{1}{2} CB$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 7

Паралельні прямі

Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.

Аксіома паралельності прямих

Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Ознаки паралельності двох прямих

- Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.
- Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.
- Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
- Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180° , то прямі паралельні.
- Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Властивості паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то:

- кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні;
- кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні;
- сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180° .

Відстань між паралельними прямими

Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

Сума кутів трикутника

Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

Зовнішній кут трикутника

Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.

Нерівність трикутника

Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Порівняння сторін і кутів трикутника

У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

Гіпотенуза та катет

Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають гіпотенузою, а сторони, прилеглі до прямого кута, — катетами.

Ознаки рівності прямокутних трикутників

- *За гіпотенузою та катетом:* якщо гіпотенуза та катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та катету другого, то такі трикутники рівні.
- *За двома катетами:* якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.
- *За катетом і прилеглим гострим кутом:* якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного

прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

- *За катетом і протилежним гострим кутом:* якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
- *За гіпотенузою та гострим кутом:* якщо гіпотенуза та гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Властивості прямокутного трикутника

- Гіпотенуза більша за катет.
- Катет, що лежить проти кута величиною в 30° , дорівнює половині гіпотенузи.
- Якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30° .

§8 КОЛО ТА КРУГ

У цьому параграфі ви ознайомитеся з властивостями кола. Вивчите взаємне розміщення кола та прямої, кола та трикутника. Дізнаєтеся про особливі фігури, усі точки яких мають одну й ту саму властивість.

54. Геометричне місце точок. Коло та круг

Будь-яка множина точок — це геометрична фігура. Зобразити довільну фігуру легко: усе, що намалюєте, — це геометрична фігура (рис. 395).

Однак вивчати фігури, які складаються з хаотично розміщених точок, навряд чи доцільно. Тому розумно виокремити той клас фігур, усі точки яких мають певну характерну властивість. Кожну з таких фігур називають геометричним місцем точок.



Рис. 395

Означення. Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.

Образно ГМТ можна подати так: задають певну властивість, а потім на білій площині *усі точки*, які мають цю властивість, фарбують у червоний колір. Та «червона фігура», яку при цьому отримують, і є ГМТ.

Наприклад, позначимо дві точки A і B . Для всіх точок задамо властивість: одночасно належати променям AB і BA . Зрозуміло, що цю властивість мають усі точки відрізка AB , і тільки вони (рис. 396). Тому відрізок AB є ГМТ, які мають указану властивість.



Рис. 396

Розглянемо перпендикулярні прямі a і b . Для всіх точок задамо властивість: належати прямій b і знаходитися на відстані 1 см від прямої a . Очевидно, що точки A і B (рис. 397) задовольняють ці вимоги. Також зрозуміло, що жодна точка, відмінна від точок A і B , цієї властивості не має. Отже, шукане ГМТ є фігурою, яка складається з двох точок A і B (рис. 397).

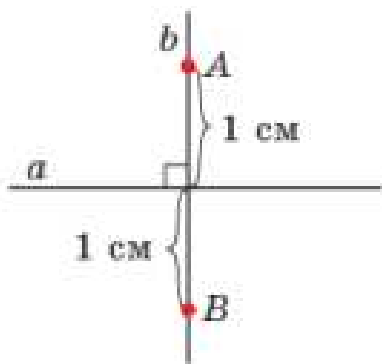


Рис. 397

Щоб якусь множину точок можна було називати ГМТ, які мають певну властивість, треба довести дві взаємно обернені теореми:

1) **пряма теорема:** *кожна точка даної множини має задану властивість;*

2) **обернена теорема:** *якщо точка має задану властивість, то вона належить даній множині.*

Теорема 54.1. *Серединний перпендикуляр відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.*

Пряма теорема. *Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від його кінців.*

Доведення. ☉ Згідно з теоремою 42.2 кожна точка серединного перпендикуляра має цю властивість.

Обернена теорема. *Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.*

Доведення. ☉ Згідно з теоремою 45.2, якщо точка має цю властивість, то вона належить серединному перпендикуляру. ●

Теорема 54.2. *Бісектриса кута є геометричним місцем точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін.*

Пряма теорема. *Кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.*

Доведення. ☉ Очевидно, що вершина кута має цю властивість.

Розглянемо довільну точку X , яка не збігається з вершиною кута ABC і належить його бісектрисі. Опустимо перпендикуляри XM і XN відповідно на сторони BA і BC (рис. 398). Доведемо, що $XM = XN$.

У прямокутних трикутниках BXM і BXN гіпотенуза BX — спільна, $\angle MBX = \angle NBX$, оскільки промінь BX — бісектриса кута ABC . Отже, трикутники BXM і BXN рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $XM = XN$. ●

Обернена теорема. Якщо точка, що належить куту, рівновіддалена від його сторін, то вона лежить на бісектрисі цього кута.

Доведення. ☺ Очевидно, що вершина кута має цю властивість.

Розглянемо довільну точку X , яка належить куту ABC , не збігається з його вершиною та рівновіддалена від його сторін (рис. 398). Опустимо перпендикуляри XM і XN відповідно на сторони BA і BC . Треба довести, що $\angle MBX = \angle NBX$.

У прямокутних трикутниках BXM і BXN гіпотенуза BX — спільна, відрізки XM і XN рівні за умовою. Отже, трикутники BXM і BXN рівні за гіпотенузою та катетом. Звідси $\angle MBX = \angle NBX$. ●

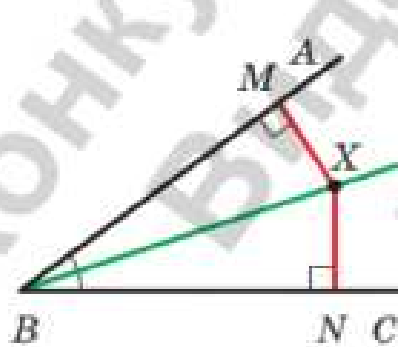


Рис. 398

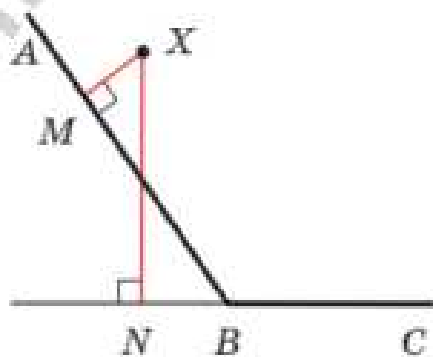


Рис. 399

Зауважимо, що доведення теореми буде повним, якщо показати, що рівновіддаленість точки кута від його сторін виключає можливість, коли одна з точок M або N належить продовженню сторони кута (рис. 399). Дослідити цю ситуацію ви можете на занятті математичного гуртка.

Зазначимо також, що доведена теорема справедлива й для розгорнутого кута.

Означення. Колом називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки дорівнюють даному додатному числу.

Задану точку називають центром кола. На рисунку 400 точка O — центр кола.

Будь-який відрізок, який сполучає точку кола з його центром, називають радіусом кола. Довжину цього відрізка також прийнято називати радіусом. На рисунку 400 відрізок OX — радіус. З означення випливає, що всі радіуси одного кола рівні.

Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають хордою кола. На рисунку 400 відрізки AB і BD — хорди. Хорду, яка проходить через центр кола, називають діаметром. На рисунку 400 відрізок BD — діаметр кола. Очевидно, що $BD = 2OX$, тобто діаметр кола вдвічі більший за його радіус.

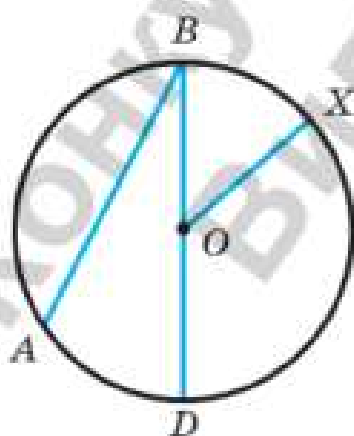


Рис. 400

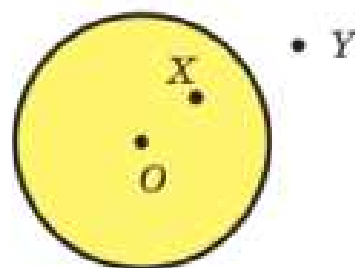


Рис. 401

З курсу математики 6 класу ви знаєте, що фігуру, обмежену колом, називають кругом (рис. 401). Тепер означення круга можна сформулювати за допомогою поняття ГМТ.

Означення. Кругом називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки не більші за дане додатне число.

Задану точку називають центром круга. Радіус кола, яке обмежує круг, називають радіусом круга.

Якщо X — довільна точка круга із центром O та радіусом R , то $OX \leq R$ (рис. 401). Якщо $OX < R$, то говорять, що точка X лежить усередині кола, яке обмежує даний круг. Точка Y не належить кругу (рис. 401). Маємо: $OY > R$. У цьому разі говорять, що точка Y лежить поза колом, яке обмежує круг.

З означення круга випливає, що коло, яке обмежує круг, йому належить.

Хорда й діаметр круга — це хорда й діаметр кола, яке обмежує круг.

На рисунку 402 радіуси OA і OB ділять круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну із цих частин разом із радіусами OA і OB називають круговим сектором або просто сектором.

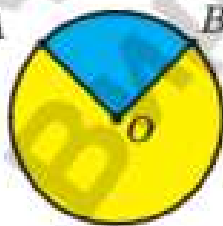


Рис. 402

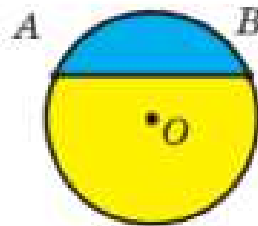


Рис. 403

На рисунку 403 хорда AB ділить круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну із цих частин разом з хордою AB називають круговим сегментом або просто сегментом. Хорду AB називають основою сегмента.

Якщо хорда AB є діаметром круга, то вона ділить круг на два сегменти, які називають півкругами.

Задача. На продовженні хорди CD кола із центром O за точку D позначено точку E таку, що відрізок DE дорівнює радіусу кола. Пряма OE перетинає дане коло в точках A і B (рис. 404). Доведіть, що $\angle AOC = 3\angle CEO$.

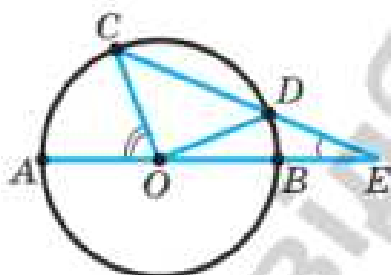


Рис. 404

Розв'язання. Нехай $\angle CEO = \alpha$.

Оскільки трикутник ODE рівнобедрений, то

$$\angle DOE = \angle CEO = \alpha.$$

Кут ODC — зовнішній кут трикутника ODE . Тоді $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.

Оскільки трикутник COD рівнобедрений, то маємо: $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.

Кут AOC — зовнішній кут трикутника COE . Тоді $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, тобто

$$\angle AOC = 3\angle CEO. \blacktriangleleft$$



1. Яку множину точок називають геометричним місцем точок?
2. Які дві теореми треба довести, щоб деяку множину точок можна було назвати ГМТ, які мають певну властивість?
3. Яка фігура є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка?
4. Яка фігура є геометричним місцем точок, що належать куту й рівновіддалені від його сторін?
5. Що називають колом?
6. Що називають радіусом кола?
7. Що називають хордою кола?
8. Що називають діаметром кола?
9. Як пов'язані між собою діаметр і радіус кола?
10. Що називають кругом?
11. Чи належить колу його центр?
12. Чи належить кругу його центр?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1727.^о Накресліть коло із центром O та радіусом 3,5 см. Позначте на цьому рисунку які-небудь:

- 1) точки A і B такі, що $OA < 3,5$ см, $OB < 3,5$ см;
- 2) точки C і D такі, що $OC = 3,5$ см, $OD = 3,5$ см;
- 3) точки E і F такі, що $OE > 3,5$ см, $OF > 3,5$ см.

1728.^о Накресліть відрізок AB завдовжки 3 см. Знайдіть точку, віддалену від кожного з кінців відрізка AB на 2 см. Скільки існує таких точок?

1729.^о Накресліть відрізок CD завдовжки 4 см. Знайдіть точку, віддалену від точки C на 2,5 см, а від точки D — на 3,5 см. Скільки існує таких точок?

1730.^о Накресліть круг, проведіть у ньому два радіуси, які не лежать на одній прямій. Зафарбуйте в різний колір сектори, які при цьому утворилися.

1731.^о Накресліть круг, проведіть у ньому хорду, відмінну від діаметра. Зафарбуйте в різний колір сегменти, які при цьому утворилися.

1732.^о Накресліть коло, діаметр якого дорівнює 7 см. Позначте на колі точку A . Знайдіть на колі точки, віддалені від точки A на 4 см.

ВПРАВИ

1733.^о На рисунку 405 зображено коло з центром B . Укажіть радіус, хорду й діаметр кола. Скільки зображено на рисунку радіусів? хорд?

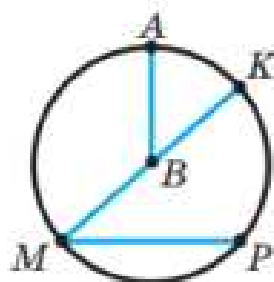


Рис. 405

1734.° Усередині кола позначили довільну точку, відмінну від її центра. Скільки через цю точку можна провести: 1) хорд; 2) діаметрів?

1735.° Чи може сектор круга бути його сегментом?

1736.° На рисунку 406 точка O — центр кола. Знайдіть:

1) кут O , якщо $\angle A = 42^\circ$;

2) кут B , якщо $\angle O = 76^\circ$.

1737.° Хорди AB і CD кола із центром O рівні. Доведіть, що $\angle AOB = \angle COD$.

1738.° На рисунку 407 точка O — центр кола, $\angle COD = \angle MOK$. Доведіть, що хорди CD і MK рівні.

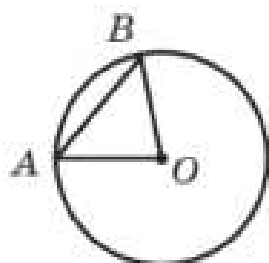


Рис. 406

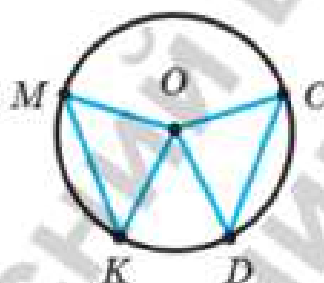


Рис. 407

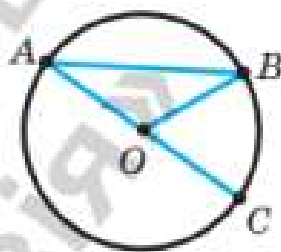


Рис. 408

1739.° Відрізки AB і CD — діаметри кола. Доведіть, що $\angle BAC = \angle CDB$.

1740.° Відрізки MK і EF — діаметри кола із центром O , $MK = 12$ см, $ME = 10$ см. Знайдіть периметр трикутника FOK .

1741.° Відрізки AC і AB — відповідно діаметр і хорда кола із центром O , $\angle BAC = 26^\circ$ (рис. 408). Знайдіть кут BOC .

1742.° Відрізки MP і MK — відповідно хорда й діаметр кола із центром O , $\angle POK = 84^\circ$ (рис. 409). Знайдіть кут MPO .

1743.° Відрізки AB і AC — відповідно діаметр і хорда кола, хорда AC дорівнює радіусу цього кола. Знайдіть кут BAC .

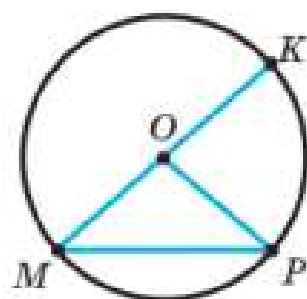


Рис. 409

1744.° Відрізки AB і BC — відповідно діаметр і хорда кола із центром O , $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 12$ см. Знайдіть хорду BC .

1745.° Відрізок CD — діаметр кола із центром O . На колі позначено точку E так, що $\angle COE = 90^\circ$. Доведіть, що $CE = DE$.

1746.° Відрізок MK — діаметр кола із центром O . На колі позначили точку C так, що $MC = CK$. Доведіть, що $\angle MCO = \angle KCO$.

1747.° Чому дорівнює діаметр кола, якщо відомо, що він на 4 см більший за радіус даного кола?

1748.* Через кінці діаметра AB кола із центром O проведено хорди AC і BD такі, що $AC \parallel BD$. Доведіть, що $AC = BD$.

1749.* Відрізки AB і CD — діаметри кола. Доведіть, що $AC \parallel BD$.

1750.* Хорда перетинає діаметр кола під кутом 30° і ділить його на відрізки завдовжки 4 см і 10 см. Знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди.

1751.* Відрізки AB і CD — діаметри кола. Кут між прямими AB і CD дорівнює 30° . Знайдіть відстань від точки C до прямої AB , якщо діаметр кола дорівнює 10 см.

1752.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл даного радіуса, які проходять через дану точку.

1753.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які проходять через дві дані точки.

1754.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддальних від двох даних прямих, які перетинаються.

1755.** Знайдіть геометричне місце вершин рівнобедрених трикутників, які мають спільну основу.

1756.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддальних від двох паралельних прямих.

1757.* Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної прямої на задану відстань.

1758.* Відрізок AB — діаметр кола, M — довільна точка кола, відмінна від точок A і B . Доведіть, що $\angle AMB = 90^\circ$.

1759.* Дано точки A і B . Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $AX > BX$.

1760.* Дано точки A і B . Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $AX > AB$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1761. Розв'яжіть рівняння:

1) $(6x + 7)(6x - 7) + 12x = 12x(3x + 1) - 49$;

2) $(5x + 1)(2x - 3) = (10x - 9)(x + 2)$.

1762. Доведіть тотожність:

1) $(4a^2 + 3)^2 + (7 - 4a^2)^2 - 2(4a^2 + 3)(4a^2 - 7) = 100$;

2) $(a^2 - 6ab + 9b^2)(a^2 + 6ab + 9b^2) - (a^2 - 9b^2)^2 = 0$.

1763. Остача при діленні деякого натурального числа на 11 дорівнює 6. Чому дорівнює остача при діленні на 11 квадрата цього числа?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,

КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

1764. На рисунку 410 прямокутник $ABCD$ складено з квадратів. Знайдіть сторону найбільшого квадрата, якщо сторона найменшого квадрата дорівнює 1.

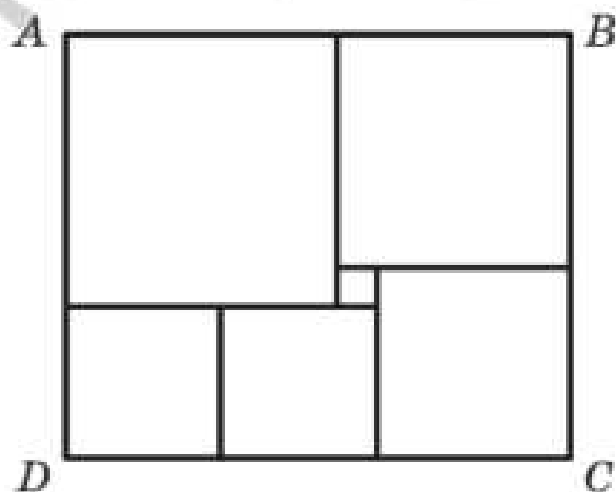


Рис. 410

55. Деякі властивості кола. Дотична до кола

Теорема 55.1. *Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.*

Доведення. ☉ Якщо хорда є діаметром, то висновок теореми є очевидним.

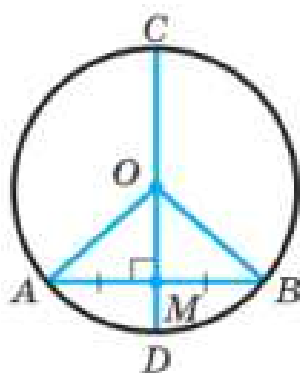


Рис. 411

На рисунку 411 зображено коло із центром O , M — точка перетину діаметра CD і хорди AB , відмінної від діаметра кола, $CD \perp AB$. Доведемо, що $AM = MB$.

Проведемо радіуси OA й OB . У рівнобедреному трикутнику AOB ($OA = OB$) відрізок OM — висота, а отже, і медіана, тобто $AM = MB$. ●

Теорема 55.2. *Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.*

Доведіть цю теорему самостійно. Подумайте, чи буде правильним це твердження, якщо хорда є діаметром кола.

На рисунку 412 зображено всі можливі випадки взаємного розміщення прямої та кола: вони не мають спільних точок (рис. 412, а), мають дві спільні точки (рис. 412, б), мають одну спільну точку (рис. 412, в).

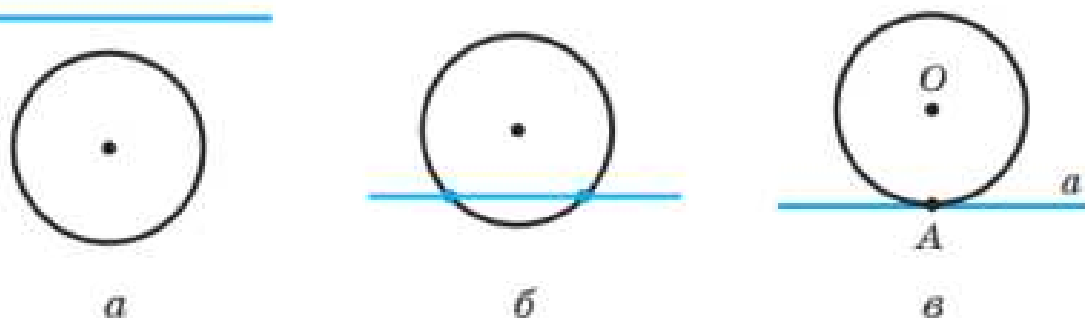


Рис. 412

Означення. Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.

На рисунку 412, l — пряма a — дотична до кола із центром у точці O , A — точка дотику.

Дотична до кола має тільки одну спільну точку з колом, обмеженим цим колом. Також говорять, що ця пряма є дотичною до круга, обмеженого даним колом. Так, на рисунку 413 пряма a — дотична до круга із центром у точці O .

Якщо відрізок (промінь) належить дотичній до кола та має із цим колом спільну точку, то говорять, що відрізок (промінь) *дотикається* до кола.

Наприклад, на рисунку 414 зображено відрізок AB , який дотикається до кола в точці C .

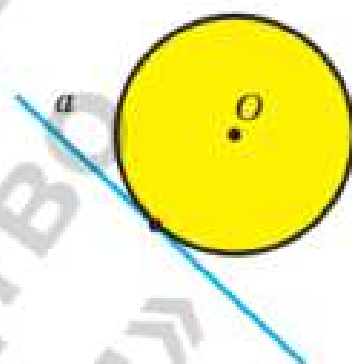


Рис. 413

Теорема 55.3 (властивість дотичної). Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Доведення. ☉ На рисунку 415 зображено коло із центром O , A — точка дотику прямої a та кола. Треба довести, що $OA \perp a$.

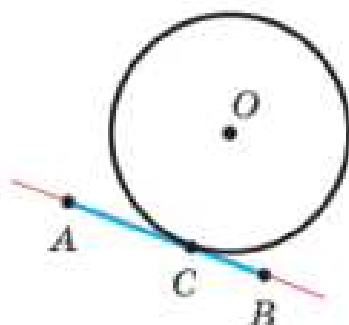


Рис. 414

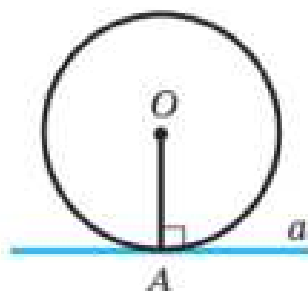


Рис. 415

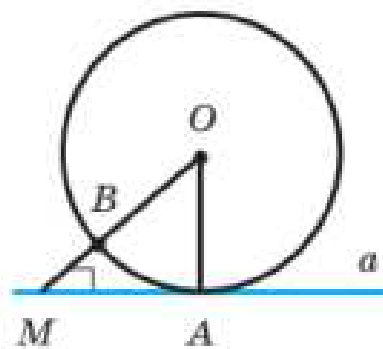


Рис. 416

Припустимо, що це не так, тобто відрізок OA — похила до прямої a . Тоді з точки O опустимо перпендикуляр OM на пряму a (рис. 416). Оскільки точка A — єдина спільна точка прямої a та круга із центром O , обмеженого цим колом, то точка M не належить цьому колу. Звідси $OM = MB + OV$, де V — точка перетину кола й перпендикуляра OM . Відрізки OA й OV рівні як радіуси кола. Таким чином, $OM > OA$. Отримали суперечність: перпендикуляр OM більший за похилу OA . Отже, $OA \perp a$. ●

Теорема 55.4 (ознака дотичної до кола). Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Доведення. ☉ На рисунку 415 зображено коло із центром у точці O , відрізок OA — його радіус, точка A належить прямій a , $OA \perp a$. Доведемо, що пряма a — дотична до кола.

Нехай пряма a не є дотичною, а має ще одну спільну точку B з колом (рис. 417). Тоді відрізки OA й OB рівні як радіуси, отже, трикутник AOB рівнобедрений. Звідси $\angle OBA = \angle OAB = 90^\circ$. Отримуємо суперечність: у трикутнику AOB є два прямих кути. Отже, пряма a є дотичною до кола. ●

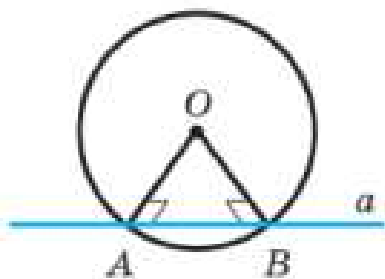


Рис. 417

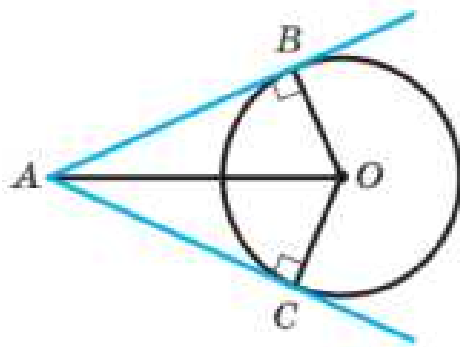


Рис. 418

Наслідок. Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Доведіть цей наслідок самостійно.

Задача. Доведіть, що коли через дану точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

Розв'язання. На рисунку 418 зображено коло із центром O . Прямі AB і AC — дотичні, B і C — точки дотику. Треба довести, що $AB = AC$.

Проведемо радіуси OB і OC у точки дотику. За властивістю дотичної $OB \perp AB$ і $OC \perp AC$. У прямокутних трикутниках AOB і AOC катети OB і OC рівні як радіуси одного кола, відрізок AO — спільна гіпотенуза. Отже, трикутники AOB і AOC рівні за гіпотенузою та катетом. Звідси $AB = AC$. ◀



1. Як ділить хорду діаметр, що перпендикулярний до неї?
2. Чому дорівнює кут між хордою, відмінною від діаметра, і діаметром, який ділить цю хорду навпіл?
3. Опишіть усі можливі випадки взаємного розміщення прямої та кола.
4. Яку пряму називають дотичною до кола?
5. Яку властивість має радіус, проведений у точку дотику прямої та кола?
6. Сформулюйте ознаку дотичної до кола.
7. Яку властивість мають дотичні, проведені до кола через одну точку?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1765.° Накресліть коло із центром O , проведіть хорду AB . Користуючись косинцем, поділіть цю хорду навпіл.

1766.° Накресліть коло із центром O , проведіть хорду CD . Користуючись лінійкою зі шкалою, проведіть діаметр, перпендикулярний до хорди CD .

1767.° Накресліть коло довільного радіуса, позначте на ньому точки A і B . Користуючись лінійкою та косинцем, проведіть прямі, які дотикаються до кола в точках A і B .

1768.° Проведіть пряму a та позначте на ній точку M . Користуючись косинцем, лінійкою та циркулем, побудуйте коло радіуса 3 см, яке дотикалося б до прямої a в точці M . Скільки таких кіл можна побудувати?

ВПРАВИ

1769.° На рисунку 419 точка O — центр кола, діаметр CD перпендикулярний до хорди AB . Доведіть, що $\angle AOD = \angle BOD$.

1770.° Чи можна стверджувати, що пряма, перпендикулярна до радіуса кола, дотикається до цього кола?

1771.° Пряма AB дотикається до кола із центром O у точці C (рис. 420). Знайдіть:

- 1) кут OCD , якщо $\angle BCD = 28^\circ$;
- 2) кут ACD , якщо $\angle OCD = 55^\circ$.

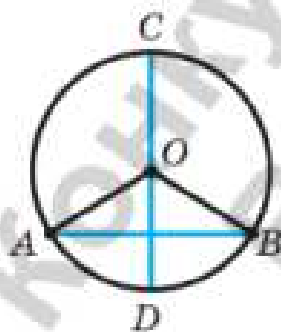


Рис. 419

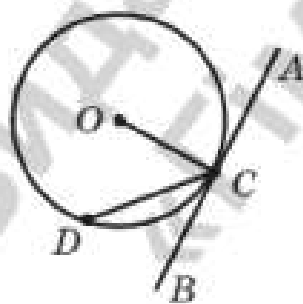


Рис. 420

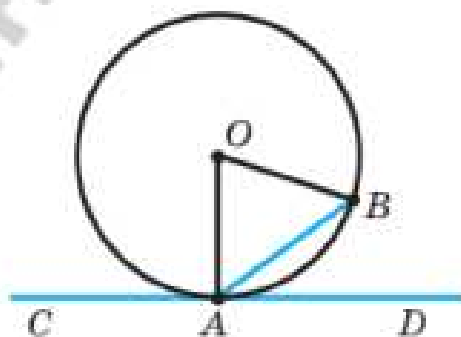


Рис. 421

1772.° Пряма CD дотикається до кола із центром O в точці A , відрізок AB — хорда кола, $\angle BAD = 35^\circ$ (рис. 421). Знайдіть кут AOB .

1773.° Пряма CD дотикається до кола із центром O в точці A , відрізок AB — хорда кола, $\angle AOB = 80^\circ$ (рис. 421). Знайдіть кут BAC .

1774.° Дано коло, діаметр якого дорівнює 6 см. Пряма a віддалена від його центра на: 1) 2 см; 2) 3 см; 3) 6 см. У якому випадку пряма a є дотичною до кола?

1775.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$. Доведіть, що:

- 1) пряма BC є дотичною до кола із центром A , яке проходить через точку C ;
- 2) пряма AB не є дотичною до кола із центром C , яке проходить через точку A .

1776.* Доведіть, що рівні хорди кола рівновіддалені від його центра.

1777.* Доведіть, що коли хорди кола рівновіддалені від його центра, то вони рівні.

1778.* Доведіть, що діаметр кола більший за будь-яку хорду, відмінну від діаметра.

1779.* Радіус кола дорівнює 7 см. Чи може довжина хорди цього кола дорівнювати: 1) 14 см; 2) 15 см?

1780.* У колі із центром O через середину радіуса проведено хорду AB , перпендикулярну до нього. Доведіть, що $\angle AOB = 120^\circ$.

1781.* Знайдіть кут між радіусами OA й OB кола, якщо відстань від центра O кола до хорди AB у 2 рази менша від: 1) довжини хорди AB ; 2) радіуса кола.

1782.* У колі проведено діаметр AB та хорди AC і CD так, що $AC = 12$ см, $\angle BAC = 30^\circ$, $AB \perp CD$. Знайдіть довжину хорди CD .

1783.* Прямі AB і AC дотикаються до кола із центром O в точках B і C . Доведіть, що промінь AO — бісектриса кута BAC .

1784.* Через точку M до кола із центром O проведено дотичні MA і MB , A і B — точки дотику, $\angle OAB = 20^\circ$. Знайдіть кут AMB .

1785.* Через кінці хорди AB , яка дорівнює радіусу кола, проведено дві дотичні, що перетинаються в точці C . Знайдіть кут ACB .

1786.* Через точку C кола із центром O проведено дотичну до цього кола, відрізок AB — діаметр кола. Із точки A на дотичну опущено перпендикуляр AD . Доведіть, що промінь AC — бісектриса кута BAD .

1787.* Пряма AC дотикається до кола із центром O в точці A (рис. 422). Доведіть, що кут BAC у 2 рази менший від кута AOB .

1788.* Відрізки AB і BC — відповідно хорда й діаметр кола, $\angle ABC = 30^\circ$. Через точку A проведено дотичну до кола, яка перетинає пряму BC у точці D . Доведіть, що трикутник ABD рівнобедрений.

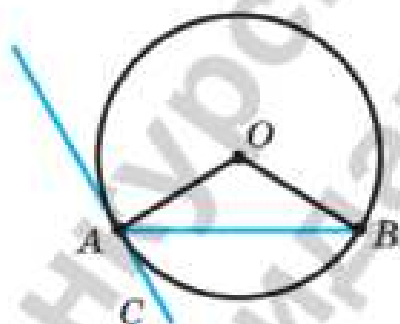


Рис. 422

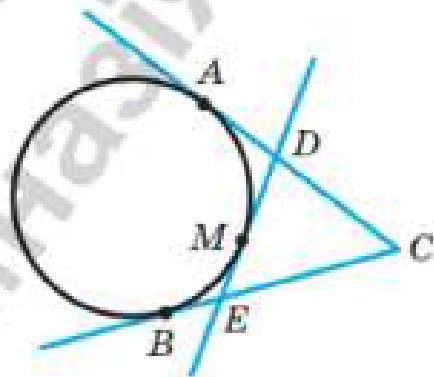


Рис. 423

1789.* Відомо, що діаметр AB ділить хорду CD навпіл, але не перпендикулярний до неї. Доведіть, що відрізок CD також є діаметром.

1790.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даної прямої в даній точці.

1791.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до обох сторін даного кута.

1792.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даної прямої.

1793." Прямі, які дотикаються до кола із центром O в точках A і B , перетинаються в точці K , $\angle AKB = 120^\circ$. Доведіть, що $AK + BK = OK$.

1794." Коло дотикається до сторони AB трикутника ABC у точці M і дотикається до продовжень двох інших сторін. Доведіть, що сума довжин відрізків BC і BM дорівнює половині периметра трикутника ABC .

1795." Через точку C проведено дотичні AC і BC до кола, A і B — точки дотику (рис. 423). На колі взято довільну точку M , що лежить в одній півплощині з точкою C відносно прямої AB , і через неї проведено дотичну до кола, яка перетинає прямі AC і BC у точках D і E відповідно. Доведіть, що периметр трикутника DEC не залежить від вибору точки M .

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1796. Знайдіть значення виразу $(2 + 3a)(5 - a) - (2 - 3a)(5 + a)$ при $a = -1,5$.

1797. Побудуйте графік рівняння:

1) $4x + y = 3$; 2) $0,2x + \frac{2}{3}y = 1$.

1798. Доведіть, що при будь-якому непарному значенні n значення виразу $(4n+1)^2 - (n+4)^2$ кратне 120.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

1799. Установіть закономірність форм фігур, зображених на рисунку 424. Яку фігуру треба поставити наступною?

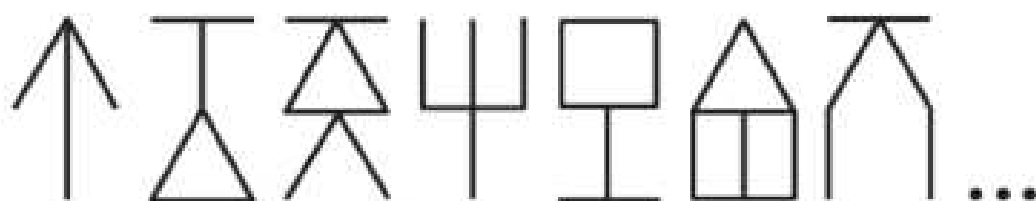


Рис. 424

56. Описане та вписане кола трикутника

Означення. Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

На рисунку 425 зображено коло, описане навколо трикутника. У цьому разі також говорять, що трикутник вписаний у коло.

На рисунку 425 точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC . Відрізки OA , OB і OC — радіуси цього кола, тому $OA = OB = OC$.

Отже, центр описаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його вершин.

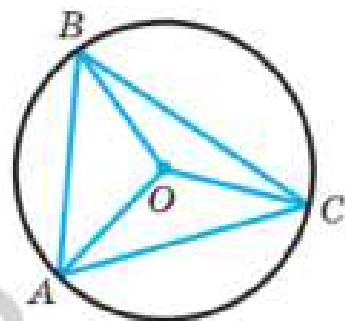


Рис. 425

Теорема 56.1. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Доведення. ☺ Для доведення достатньо показати, що для будь-якого трикутника ABC існує точка O , рівновіддалена від усіх його вершин. Тоді точка O буде центром описаного кола, а відрізки OA , OB і OC — його радіусами.

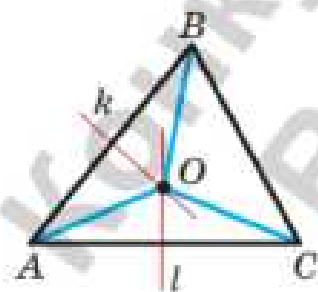


Рис. 426

На рисунку 426 зображено довільний трикутник ABC . Проведемо серединні перпендикуляри k і l сторін AB і AC відповідно. Нехай O — точка перетину цих прямих. Оскільки точка O належить серединному перпендикуляру k , то $OA = OB$. Оскільки точка O належить серединному перпендикуляру l , то $OA = OC$. Отже, $OA = OB = OC$, тобто точка O рівновіддалена від усіх вершин трикутника. ●

Зауважимо, що навколо трикутника можна описати тільки одне коло. Це випливає з того, що серединні перпендикуляри k і l (рис. 426) мають тільки одну

точку перетину. Отже, існує тільки одна точка, рівновіддалена від усіх вершин трикутника.

Наслідок 1. Три серединних перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Наслідок 2. Центр кола, описаного навколо трикутника, — це точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника.

Означення. Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

На рисунку 427 зображено коло, вписане в трикутник. У цьому разі також говорять, що трикутник описаний навколо кола.

На рисунку 427 точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC , відрізки OM , ON , OP — радіуси, проведені в точки дотику, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Оскільки $OM = ON = OP$, то центр вписаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його сторін.

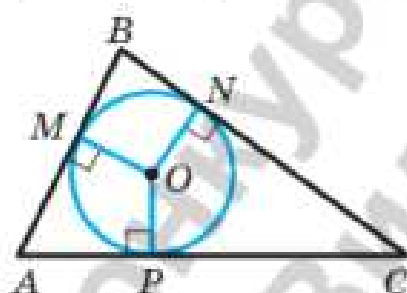


Рис. 427

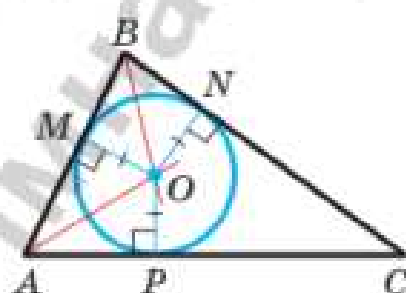


Рис. 428

Теорема 56.2. У будь-який трикутник можна вписати коло.

Доведення. ☺ На рисунку 428 зображено довільний трикутник ABC . Проведемо бісектриси кутів A і B , позначимо точку O їхнього перетину. З точки O опустимо перпендикуляри OM , ON і OP відповідно на сторони AB , BC і CA трикутника ABC . Оскільки точка O належить бісектрисі кута A , то за теоремою про бісектрису кута (теорема 54.2) отримуємо, що

$OM = OP$. Аналогічно, оскільки точка O належить бісектрисі кута B , то $OM = ON$. Нехай $OM = r$. Тоді $OM = ON = OP = r$. Таким чином, точка O віддалена від кожної сторони трикутника ABC на одну й ту саму відстань r . Тоді за наслідком з ознаки дотичної до кола (наслідок з теореми 55.4) точка O є центром кола радіуса r , яке дотикається до сторін AB , BC і CA . ●

Зауважимо, що в трикутник можна вписати тільки одне коло. Це випливає з того, що бісектриси кутів A і B (рис. 428) перетинаються тільки в одній точці. Отже, існує тільки одна точка, рівновіддалена від сторін трикутника.

Наслідок 1. Бісектриси кутів трикутника перетинаються в одній точці.

Наслідок 2. Центр кола, вписаного в трикутник, — це точка перетину бісектрис трикутника.

🔑 **Задача.** Доведіть, що радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, визначають за формулою $r = \frac{a+b-c}{2}$, де r — радіус вписаного кола, a і b — катети, c — гіпотенуза.

Розв'язання. У трикутнику ABC маємо: $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, точка O — центр вписаного кола, M , E і K — точки дотику вписаного кола до сторін BC , AC і AB відповідно (рис. 429).

Відрізок OM — радіус кола, проведений у точку дотику. Тоді $OM \perp BC$.

Оскільки точка O — центр вписаного кола, то промінь CO — бісектриса кута ACB , отже, $\angle OCM = 45^\circ$. Тоді трикутник CMO — рівнобедрений прямокутний.

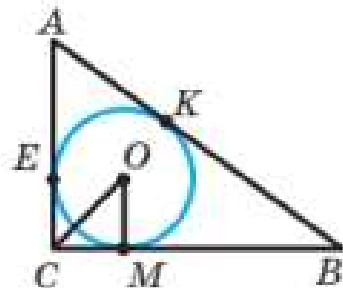


Рис. 429

Звідси $CM = OM = r$.

Використовуючи властивість відрізків дотичних, проведених до кола через одну точку, отримуємо: $CE = CM$. Оскільки $CM = r$, то $CE = r$.

Тоді $AK = AE = b - r$, $BK = BM = a - r$.

Оскільки $AK + BK = AB$, то $b - r + a - r = c$.

Звідси $2r = a + b - c$; $r = \frac{a + b - c}{2}$.

?

1. Яке коло називають описаним навколо трикутника?
2. Який трикутник називають вписаним у коло?
3. Навколо якого трикутника можна описати коло?
4. Яка точка є центром кола, описаного навколо трикутника?
5. Яке коло називають вписаним у трикутник?
6. Який трикутник називають описаним навколо кола?
7. У який трикутник можна вписати коло?
8. Яка точка є центром кола, вписаного в трикутник?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1800.° Накресліть різносторонній гострокутний трикутник.

- 1) Користуючись лінійкою зі шкалою та косинцем, знайдіть центр кола, описаного навколо даного трикутника.

- 2) Опишіть навколо трикутника коло.

Виконайте завдання 1 і 2 для різносторонніх прямокутного й тупокутного трикутників.

1801.° Накресліть:

- 1) рівнобедрений гострокутний трикутник;
- 2) рівнобедрений тупокутний трикутник.

Виконайте завдання 1 і 2 із вправи 1800.

1802.° Перерисуйте в зошит рисунок 430. Проведіть через точки A , B , C коло, користуючись лінійкою зі шкалою, косинцем і циркулем.

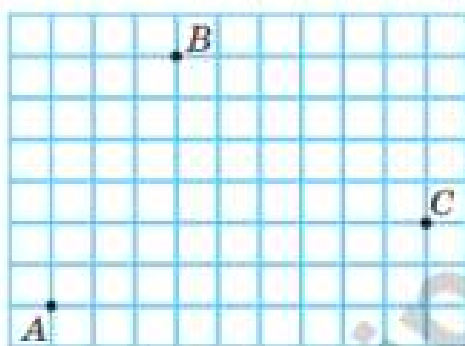


Рис. 430

1803.° Накресліть рівносторонній трикутник.

- 1) Користуючись лінійкою та транспортиром, знайдіть центр кола, вписаного в даний трикутник.
- 2) Користуючись косинцем, знайдіть точки дотику вписаного кола до сторін трикутника.
- 3) Впишіть у даний трикутник коло.

1804.° Накресліть рівнобедрений трикутник. Виконайте завдання 1, 2 і 3 із вправи 1803.

ВПРАВИ

1805.° На якому з рисунків 431, *а*, *б*, *в*, зображено коло, описане навколо трикутника?

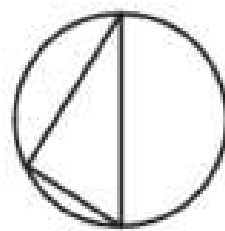
*а**б**в*

Рис. 431

1806.° На якому з рисунків 432, *а*, *б*, *в*, зображено коло, вписане в трикутник?

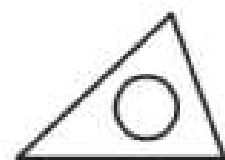
*а**б**в*

Рис. 432

1807.° Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC (рис. 433). Знайдіть кути цього трикутника, якщо $\angle ABO = 38^\circ$, $\angle BCO = 22^\circ$.

1808.° Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC (рис. 433). Знайдіть кут ABO , якщо $\angle BAC = 64^\circ$, $\angle ACB = 46^\circ$.

1809.° Доведіть, що центр описаного кола рівнобедреного трикутника належить прямій, яка містить медіану, проведену до його основи.

1810.° Доведіть, що центр вписаного кола рівнобедреного трикутника належить висоті, проведеної до його основи.

1811.° Коло, вписане в трикутник ABC , дотикається до його сторін AB і AC у точках M і N відповідно. Знайдіть кут A , якщо $\angle AMN = 35^\circ$.

1812.° Коло, вписане в трикутник ABC , дотикається до його сторін AB і BC у точках D і E відповідно. Знайдіть кут ADE , якщо $\angle B = 50^\circ$.

1813.° Доведіть, що центр описаного кола рівностороннього трикутника є точкою перетину його бісектрис.

1814.° Доведіть, що радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, у 2 рази більший за радіус кола, вписаного в цей трикутник.

1815.* Коло, вписане в трикутник ABC (рис. 434), дотикається до його сторін у точках M , K і E , $BK = 2$ см, $KC = 4$ см, $AM = 8$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC .

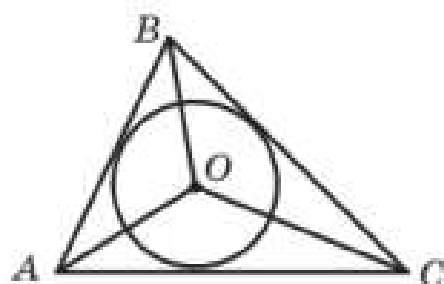


Рис. 433

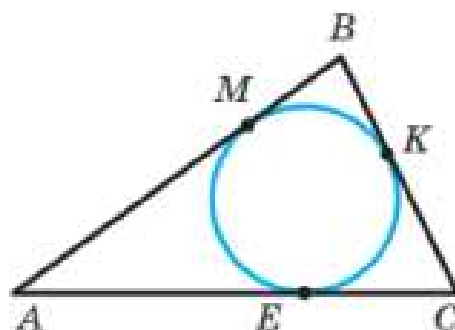


Рис. 434

1816.* Коло, вписане в трикутник ABC (рис. 434), дотикається до його сторін у точках M , K і E , $AB = 13$ см, $BC = 8$ см, $BK = 3$ см. Знайдіть сторону AC .

1817.* Через центр O кола, описаного навколо трикутника ABC , проведено пряму, яка перпендикулярна до сторони AC і перетинає сторону AB у точці M . Доведіть, що $AM = MC$.

1818.* Через центр O кола, вписаного в трикутник ABC , провели пряму AO , яка перетинає сторону BC у точці M . Доведіть, що точка M рівновіддалена від променів AB і AC .

1819.* Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його медіані, то цей трикутник рівнобедрений.

1820.* Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його висоті, то цей трикутник рівнобедрений.

1821.* Доведіть, що коли центр вписаного кола трикутника належить його висоті, то цей трикутник рівнобедрений.

1822.* Доведіть, що коли центр кола, вписаного в трикутник, належить його медіані, то цей трикутник рівнобедрений.

1823.* Доведіть, що коли центри вписаного й описаного кіл трикутника збігаються, то цей трикутник рівносторонній.

1824.* На рисунку 435 у трикутники ABD і CBD вписано кола із центрами O_1 і O_2 відповідно. Доведіть, що кут O_1DO_2 — прямий.

1825.* На рисунку 436 у трикутники ABD і CBD вписано кола із центрами O_1 і O_2 відповідно, $\angle ABC = 50^\circ$. Знайдіть кут O_1BO_2 .

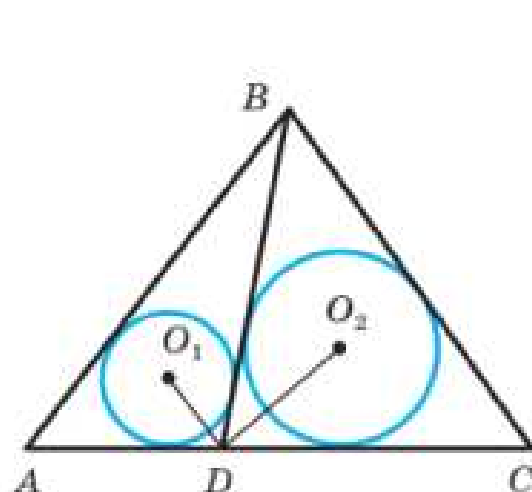


Рис. 435

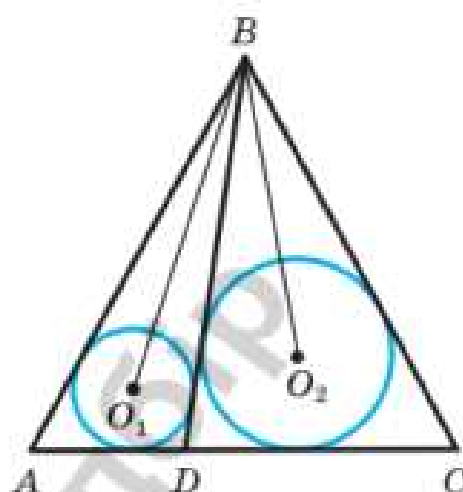


Рис. 436

1826.* Точка дотику вписаного кола рівнобедреного трикутника ділить його бічну сторону у відношенні $7 : 5$, рахуючи від вершини рівнобедреного трикутника. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 68 см.

1827.* Периметр трикутника ABC , описаного навколо кола, дорівнює 52 см. Точка дотику кола до сторони AB ділить цю сторону у відношенні $2 : 3$, рахуючи від вершини A . Точка дотику до сторони BC віддалена від вершини C на 6 см. Знайдіть сторони трикутника.

1828.* У трикутник з кутами 30° , 70° і 80° вписано коло. Знайдіть кути трикутника, вершини якого є точками дотику вписаного кола до сторін даного трикутника.

1829.* Коло, вписане в рівнобедрений трикутник ABC , дотикається до його бічних сторін AB і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що $MN \parallel AC$.

1830.* Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його стороні, то цей трикутник прямокутний.

1831.** У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається до сторони AB у точці M , $BC = a$. Доведіть, що $AM = p - a$, де p — півпериметр трикутника ABC .

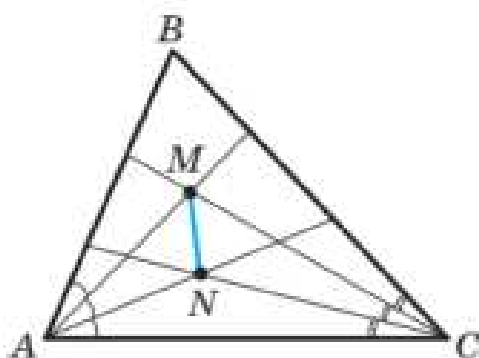


Рис. 437

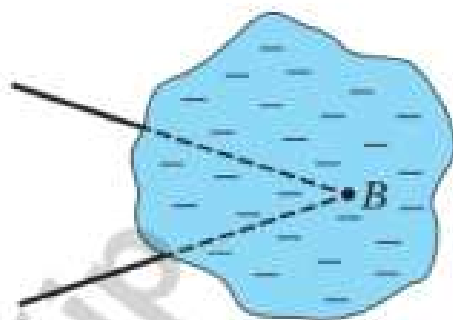


Рис. 438

1832.* До кола, вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною a , проведено дотичну, яка перетинає дві сторони трикутника. Знайдіть периметр трикутника, який ця дотична відтинає від даного.

1833.* У рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) з основою 10 см вписано коло. До цього кола проведено три дотичні, які відтинають від даного трикутника трикутники ADK , BEF і CMN . Сума периметрів утворених трикутників дорівнює 42 см. Чому дорівнює бічна сторона даного трикутника?

1834.* У трикутнику ABC відрізок BD — медіана, $AB = 7$ см, $BC = 8$ см. У трикутники ABD і BDC вписали кола. Знайдіть відстань між точками дотику цих кіл до відрізка BD .

1835.* Кожний із кутів BAC і ACB трикутника ABC поділено на три рівні частини (рис. 437). Доведіть, що $\angle AMN = \angle CMN$.

1836.* Нехай вершина кута B недоступна (рис. 438). За допомогою транспортира та лінійки без поділок побудуйте пряму, яка містить бісектрису кута B .

1837.* Точки F і O — центри вписаного й описаного кіл рівнобедреного трикутника ABC відповідно (рис. 439). Вони розташовані на

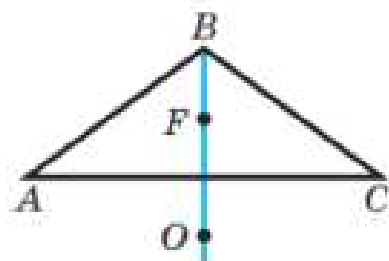


Рис. 439

однаковій відстані від його основи AC . Знайдіть кути трикутника ABC .

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1838. Доведіть, що коли $x + y = a - 1$, то $ax + x + ay + y + 1 = a^2$.

1839. Чи належить графіку рівняння $13x + 17y = -40$ хоча б одна точка, обидві координати якої — додатні числа?

1840. На математичній олімпіаді учасникам і учасницям було запропоновано розв'язати 12 задач. За кожну правильно розв'язану задачу нараховували 5 балів, а за нерозв'язану — знімали 3 бали. Скільки задач розв'язала правильно учениця, яка отримала в підсумку 36 балів?

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

1841. Відстань між двома вежами мобільного зв'язку становить 5 км. Зв'язок є стійким, якщо абонент знаходиться на відстані, не більшій за 3 км від вежі. Зобразіть, куди відносно веж може зайти туристка, щоб перебувати в зоні стійкого покриття: 1) найближчої вежі; 2) обох веж.

1842 Три селища зображені на карті точками, які не лежать на одній прямій. Де потрібно поставити вежу мобільного зв'язку, щоб вона була рівновіддалена від цих селищ?

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙОЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

1843. У квадраті $ABCD$ вирізали заштриховану фігуру (рис. 440). Розділіть частину квадрата, яка залишилася, на чотири рівні фігури.

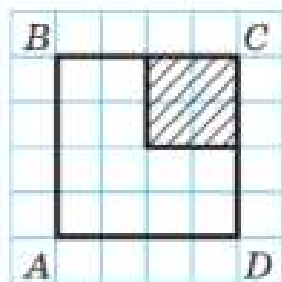


Рис. 440

57. Центральний кут. Довжина кола. Довжина дуги кола

Означення. Центральним кутом кола називають кут з вершиною в центрі кола.

На рисунку 441 кут AOB — центральний. Сторони цього кута перетинають коло в точках A і B . Ці точки ділять коло на дві дуги, які виділено на рисунку 441 різним кольором. Точки A і B називають кінцями дуги, вони належать кожній з виділених дуг. Кожну із цих дуг можна позначити так: $\cup AB$ (читають: «дуга AB »).

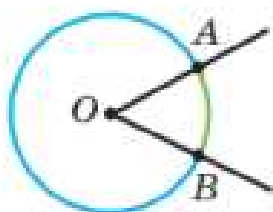


Рис. 441

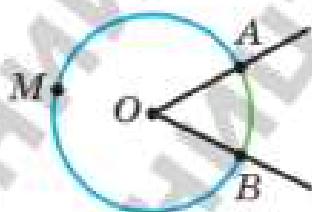


Рис. 442

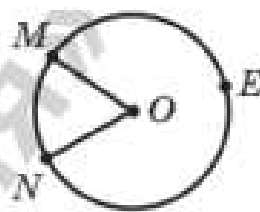


Рис. 443

Але за записом $\cup AB$ не можна розрізнити дуги на рисунку 441. Якщо на якійсь із двох дуг позначити точку (на рисунку 442 це точка M), то зрозуміло, що позначення $\cup AMB$ відноситься до «синьої» дуги. Якщо на одній із двох дуг AB відмічено точку, то домовимося, що позначення $\cup AB$ відноситься до дуги, якій ця точка не належить (на рисунку 442 це «зелена» дуга).

Дуга AB належить центральному куту AOB (рис. 442). У цьому випадку говорять, що центральний кут AOB спирається на дугу AB .

Кожна дуга кола, як і все коло, має градусну міру. Градусну міру всього кола вважають рівною 360° . Якщо центральний кут MON спирається на дугу MN (рис. 443), то градусну міру дуги MN вва-

жають рівною градусній мірі кута MON і записують: $\cup MN = \angle MON$ (читають: «градусна міра дуги MN дорівнює градусній мірі кута MON »). Градусну міру дуги MEN (рис. 443) вважають рівною $360^\circ - \angle MON$.

На рисунку 444 зображено коло, у якому проведено два перпендикулярних діаметри AB і CD . Тоді $\cup AMD = 90^\circ$, $\cup ACD = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$, $\cup ACB = \cup ADB = 180^\circ$. Кожну з дуг ACB і ADB називають півколом. На рисунку 444 півколами є також дуги CAD і CBD .

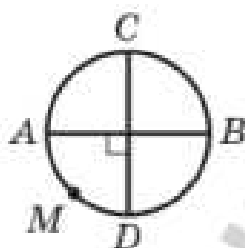


Рис. 444

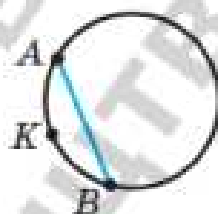


Рис. 445

Про хорду, яка сполучає кінці дуги, говорять, що хорда стягує дугу. На рисунку 445 хорда AB стягує кожен з дуг AB і AKB .

Будь-яка хорда стягує дві дуги, сума градусних мір яких дорівнює 360° .

Із курсу математики 6 класу ви знаєте, що для всіх кіл відношення довжини кола до діаметра є одним і тим самим числом, яке прийнято позначати грецькою буквою π (читають: «пі»):

$$\frac{C}{2R} = \pi,$$

де C — довжина кола, R — його радіус.

Звідси отримуємо формулу для обчислення довжини кола:

$$C = 2\pi R$$

Нагадаємо, що число π виражають нескінченним неперіодичним десятковим дробом. Зазвичай під час розв'язування задач за наближене значення π приймають число 3,14.

Знайдемо формулу для обчислення довжини дуги кола з градусною мірою n° . Оскільки градусна міра всього кола дорівнює 360° , то довжина дуги в 1° дорівнює $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тоді довжину l дуги в n° обчислюють за формулою

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

Задача. Довжина дуги кола, радіус якого 25 см, дорівнює π см. Знайдіть градусну міру дуги.

Розв'язання. Із формули $l = \frac{\pi R n}{180}$ отримуємо $n = \frac{180l}{\pi R}$.

Отже, шукана градусна міра $n^\circ = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25} \right)^\circ = 7,2^\circ$.

Відповідь: $7,2^\circ$. 



1. Який кут називають центральним кутом кола?
2. Як називають частини кола, на які ділять його дві точки?
3. Чому вважають рівною градусну міру кола?
4. Як пов'язані градусні міри центрального кута кола та дуги, на яку цей кут спирається?
5. Яке відношення позначають буквою π ?
6. Назвіть наближене значення числа π з точністю до сотих.
7. За якою формулою обчислюють довжину кола?
8. За якою формулою обчислюють довжину дуги кола?

ВПРАВИ

1844.° Чому дорівнює градусна міра центрального кута кола, який спирається на дугу, що становить:

- 1) $\frac{1}{6}$ кола; 2) $\frac{1}{10}$ кола; 3) $\frac{1}{2}$ кола; 4) $\frac{2}{9}$ кола?

1845.° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його ділять дві точки, якщо градусна міра однієї з дуг на 80° більша за градусну міру другої.

1846.° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його ділять дві точки, якщо градусні міри цих дуг відносяться як $7 : 11$.

1847.° Знайдіть довжину кола, діаметр якого дорівнює $3,5$ см.

1848.° Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює $1,4$ м.

1849.° Радіус кола дорівнює 8 см. Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої дорівнює:

- 1) 18° ; 2) 160° ; 3) 320° .

1850.° Радіус кола дорівнює 6 дм. Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої дорівнює: 1) 4° ; 2) 200° .

1851.* Радіус кола збільшили на 1 см. На скільки збільшилась при цьому довжина кола?

1852.* Довжина дуги кола дорівнює 12π см, а її градусна міра — 27° . Знайдіть радіус кола.

1853.* Довжина дуги кола радіуса 24 см дорівнює 3π см. Знайдіть градусну міру дуги.

1854.* Навколо рівностороннього трикутника ABC описали коло, радіус якого дорівнює 15 см. Знайдіть довжину дуги BAC .

1855.* У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle ABC = 150^\circ$, радіус кола, описаного навколо трикутника ABC , дорівнює 12 см. Знайдіть довжину дуг AB і AC .

1856.* У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle BAC = 70^\circ$, радіус кола, описаного навколо трикутника ABC , дорівнює 10 см. Знайдіть довжину дуги ABC .

1857.** Радіус кола збільшили на a . Доведіть, що довжина кола збільшилась на величину, яка не залежить від радіуса даного кола.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1858. Знайдіть розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 6 - 5(x - y) = 7x + 4y, \\ 3(x + 1) - (6x + 8y) = 69 + 3y. \end{cases}$$

1859. Доведіть, що значення виразу:

1) $17^3 + 17^2 - 17$ кратне 61;

2) $5 \cdot 2^{902} - 3 \cdot 2^{901} + 2^{900}$ кратне 60.

1860. Графіки функцій $y = ax + 12$ і $y = (3 - a)x + a$ перетинаються в точці з абсцисою 2. Знайдіть ординату точки їхнього перетину.

1861. Обчисліть значення виразу:

1) $1,66^2 + 1,66 \cdot 4,68 + 2,34^2$;

2) $1,04^2 - 1,04 \cdot 1,28 + 0,64^2$.

УЧИМОСЯ ЗАСТОСОВУВАТИ ГЕОМЕТРІЮ

1862. Обчисліть довжину дуги екватора Землі, градусна міра якої дорівнює 1° , якщо радіус екватора наближено дорівнює 6400 км.

1863. Знайдіть довжину дуги, яку описує годинна стрілка завдовжки 6 см за 1 год.

1864. Знайдіть довжину дуги, яку описує хвилинна стрілка завдовжки 24 см за 40 хв.

1865. Колеса автомобіля мають діаметр 65 см. Автомобіль їде з такою швидкістю, що колеса роблять 6 обертів щосекунди. Знайдіть швидкість автомобіля в кілометрах за годину. Відповідь округліть до десятих.

58. Задачі на побудову

За допомогою лінійки з поділками, циркуля, косинця, транспортира, лекал (рис. 446) вам неодноразово доводилося виконувати різні геометричні побудови.

А чи можна задовольнитися меншою кількістю креслярських інструментів? Виявляється, що в багатьох випадках достатньо використовувати тільки *циркуль і лінійку без поділок*. Наприклад, щоб провести

бісектрису кута, зовсім не обов'язково мати транспор- тир, а поділити відрізок навпіл можна й тоді, коли на лінійку не нанесено шкалу.

А чи варто в наш час, коли створено найточніші прилади й досконалі комп'ютерні програми, які дають можливість виконувати найскладніші вимірювання та побудови, задовольнятися такими мізерними засобами, як циркуль і лінійка? На практиці, звісно, ні. Тому, наприклад, фахівці й фахівчині в галузі конструювання, будівництва, архітектури, дизайну не обмежують себе у виборі інструментів.



Рис. 446

Однак у задачах на побудову фігур у шкільному курсі геометрії домовилися, наслідуючи античну традицію, дотримуватися таких правил:

1) усі побудови виконують тільки за допомогою циркуля та лінійки без поділок;

2) за допомогою лінійки можна через задану точку провести пряму, а також через задані дві точки A і B провести пряму AB ;

3) за допомогою циркуля можна побудувати коло з даним центром і радіусом, що дорівнює заданому відрізку.

Отже, домовимося, що коли в задачі потрібно побудувати якусь фігуру, то побудову виконують за описаними вище правилами.

Розв'язати задачу на побудову — це означає скласти план (*алгоритм*) побудови фігури; реалізувати план, виконавши побудову; довести, що отримана фігура є шуканою; визначити, скільки розв'язків має задача.

Розглянемо основні задачі на побудову.

Задача 1. Побудуйте кут, що дорівнює даному, одна зі сторін якого є даним променем.

Розв'язання. На рисунку 447 зображено кут A та промінь OK . Треба побудувати кут, що дорівнює куту A , однією із сторін якого є промінь OK .

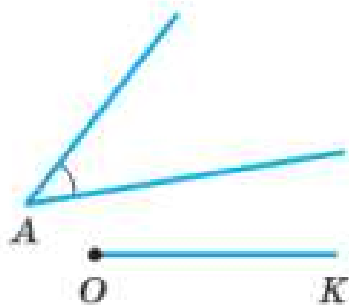


Рис. 447

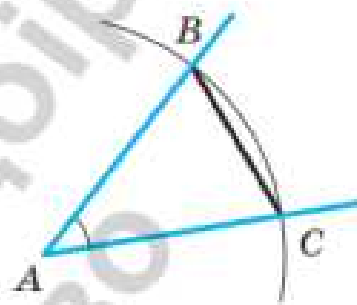


Рис. 448

Проведемо коло довільного радіуса r із центром у точці A . Точки перетину цього кола зі сторонами кута A позначимо B і C (рис. 448). Тоді $AB = AC = r$.

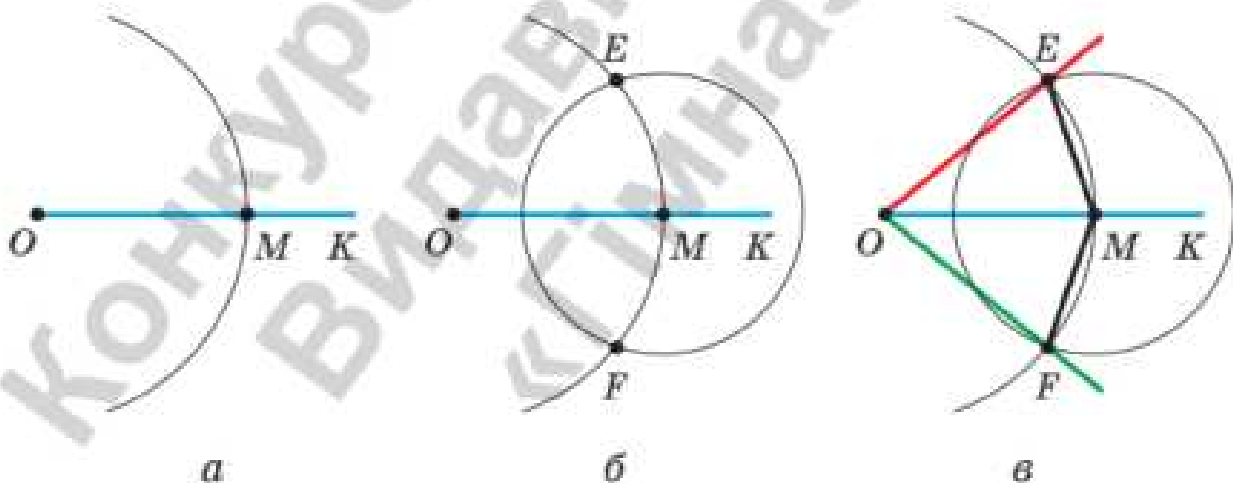


Рис. 449

Проведемо коло радіуса r із центром у точці O . Нехай це коло перетинає промінь OK у точці M (рис. 449, а). Потім проведемо коло радіуса BC із центром у точці M . Нехай кола із центрами O і M перетинаються в точках E і F (рис. 449, б). Проведемо промені OE та OF (рис. 449, в).

Покажемо, що кожний з кутів EOM і FOM — шуканий. Доведемо, наприклад, що $\angle EOM = \angle BAC$.

Розглянемо трикутники ABC (рис. 448) і OEM (рис. 449, в). Маємо: $AB = OE = r = AC = OM$. Крім того, за побудовою $EM = BC$. Отже, трикутники ABC і OEM рівні за трьома сторонами, тобто за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle EOM = \angle BAC$. Аналогічно можна показати, що $\angle BAC = \angle FOM$. ◀

Ми побудували два кути EOM і FOM , які задовольняють умову задачі. Ці кути рівні. У таких випадках вважають, що задача на побудову має один розв'язок.

🔑 Задача 2. Побудуйте серединний перпендикуляр даного відрізка.

Розв'язання. Нехай AB — даний відрізок (рис. 450, а). Проведемо два кола із центрами A і B та радіусом AB . Точки перетину цих кіл позначимо M і N (рис. 450, б). Проведемо пряму MN (рис. 450, в). Доведемо, що пряма MN є шуканою.

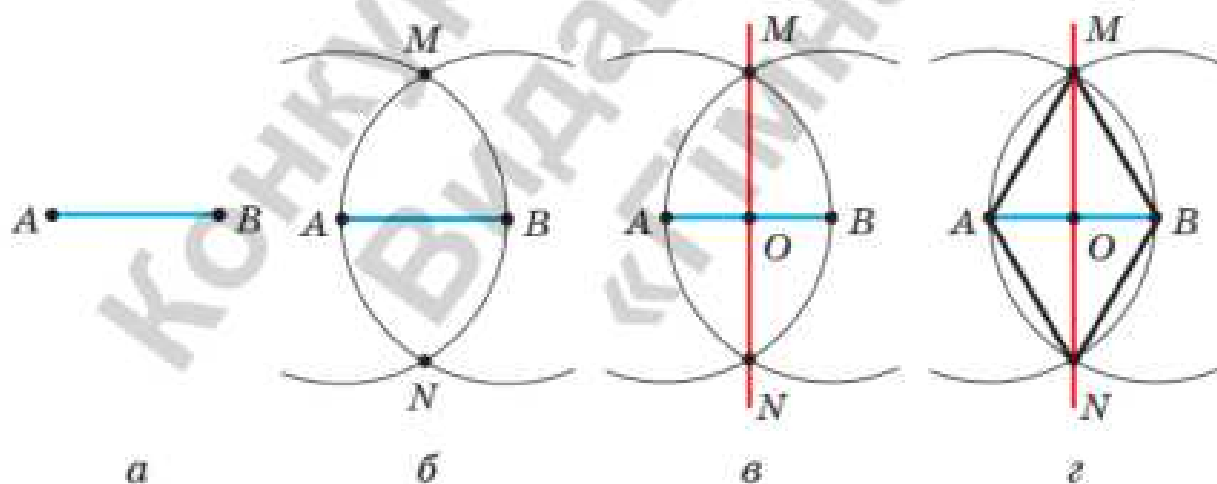


Рис. 450

З побудови випливає, що $MA = MB = AB$ і $NA = NB = AB$ (рис. 450, г). Отже, точки M і N належать серединному перпендикуляру відрізка AB . Тоді пряма MN є серединним перпендикуляром відрізка AB . ◀

Зауваження. Оскільки пряма MN перетинає відрізок AB у його середині, у точці O , то тим самим розв'язано таку задачу.

🔑 **Задача 3.** Поділіть даний відрізок навпіл.

🔑 **Задача 4.** Дано пряму та точку, яка їй не належить. Через цю точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної.

Розв'язання. Нехай m — дана пряма, A — точка, яка їй не належить. Проведемо коло із центром у точці A так, щоб воно перетинало пряму m у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 451).

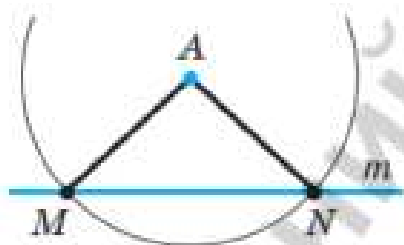


Рис. 451



Рис. 452

Оскільки $AM = AN$, то точка A належить серединному перпендикуляру відрізка MN . Побудувавши цей серединний перпендикуляр (див. задачу 2), ми тим самим розв'яжемо задачу. ◀

🔑 **Задача 5.** Дано пряму та точку, яка їй належить. Через цю точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної.

Розв'язання. Нехай m — дана пряма, A — точка, яка їй належить. Проведемо коло довільного радіуса із центром у точці A . Воно перетинає пряму m у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 452).

Оскільки $AM = AN$, то ми звели задачу до побудови серединного перпендикуляра відрізка MN . ◀

🔑 **Задача 6.** Побудуйте бісектрису даного кута.

Розв'язання. Нехай A — даний кут. Проведемо коло довільного радіуса із центром у точці A . Це коло

перетинає сторони кута у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 453, *а*). Побудуємо кола із центрами M і N з тим самим радіусом. Ці кола перетинаються в точці A і ще в деякій точці K (рис. 453, *б*). Проведемо промінь AK (рис. 453, *в*).

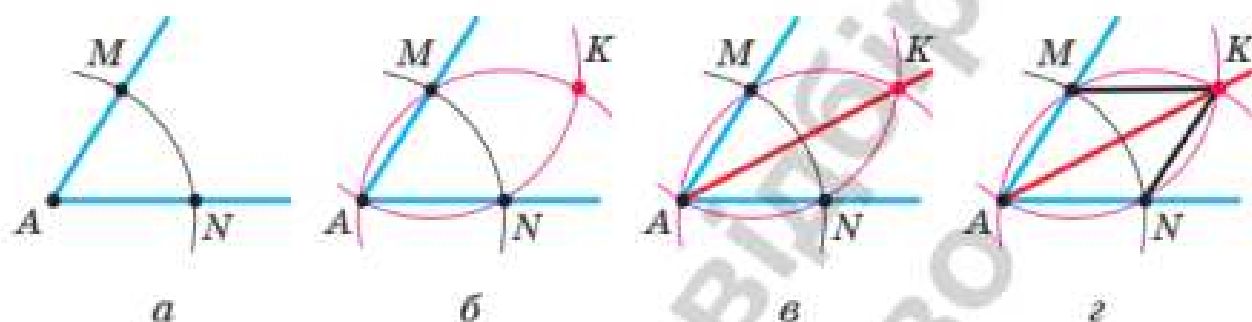


Рис. 453

Доведемо, що промінь AK — шукана бісектриса.

Дійсно, трикутники AMK і ANK (рис. 453, *г*) рівні за трьома сторонами, тобто за третьою ознакою рівності трикутників. Отже, $\angle MAK = \angle NAK$. ◀

Задача 7. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та катетом.

Розв'язання. Нехай дано два відрізки завдовжки c і b , причому $b < c$ (рис. 454, *а*). Оскільки гіпотенуза більша за катет, то гіпотенуза шуканого трикутника дорівнює більшому з даних відрізків, а катет — меншому. Отже, треба побудувати прямокутний трикутник ABC , у якому $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$, $AC = b$.

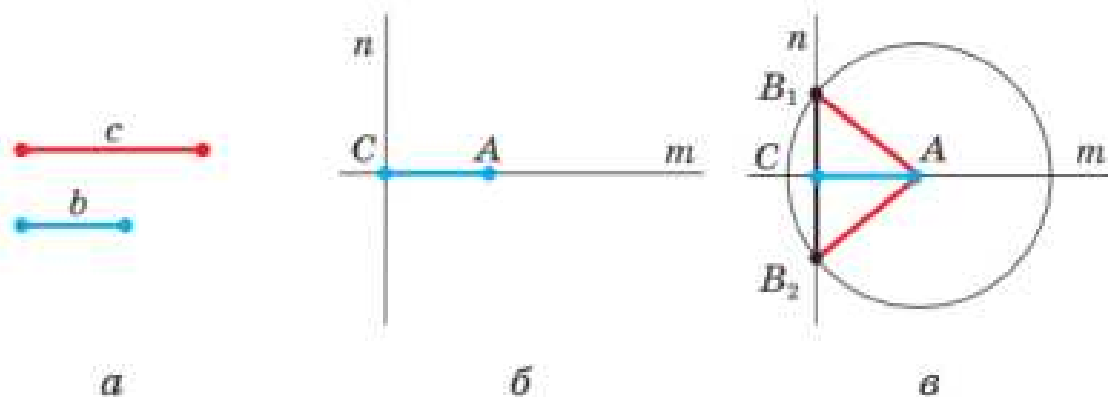


Рис. 454

Проведемо дві перпендикулярні прямі m і n . Нехай C — точка їхнього перетину. На прямій m відкладемо відрізок CA , що дорівнює даному катету b (рис. 454, б). Проведемо коло із центром у точці A радіусом, який дорівнює даній гіпотенузі c . Нехай це коло перетне пряму n у двох точках B_1 і B_2 (рис. 454, в). Кожний із трикутників ACB_1 і ACB_2 — шуканий.

Оскільки трикутники ACB_1 і ACB_2 рівні, то задача має єдиний розв'язок. ◀

Задача 8. Побудуйте трикутник за стороною та висотами, проведеними до двох інших сторін.

Розв'язання. На рисунку 455 зображено трикутник ABC , відрізки AA_1 і CC_1 — його висоти. Якщо відомо відрізки AC , AA_1 і CC_1 , то можна побудувати прямокутні трикутники AA_1C і CC_1A за гіпотенузою та катетом (див. задачу 7).

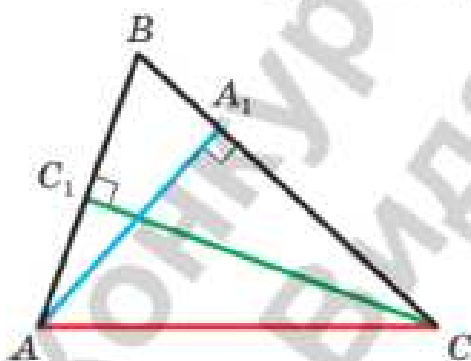


Рис. 455

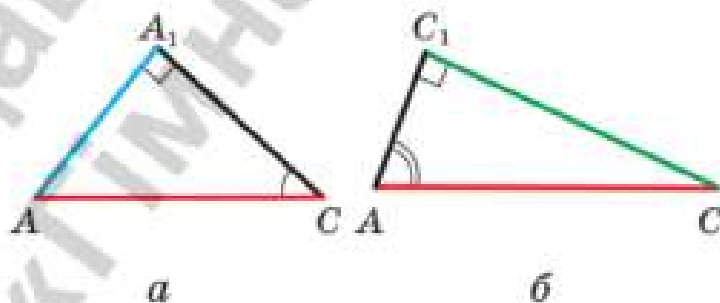


Рис. 456

Наведені міркування називають аналізом задачі на побудову. Він підказує план побудови.

Побудуємо прямокутний трикутник AA_1C , у якому гіпотенуза AC дорівнює даній стороні, а катет AA_1 — одній із даних висот (рис. 456, а). У побудованому трикутнику кут ACA_1 дорівнює одному з кутів, прилеглих до даної сторони шуканого трикутника. За до-

помогою аналогічної побудови можна отримати другий прилеглий до даної сторони кут. На рисунку 456, б це кут C_1AC .

Тепер залишилося побудувати трикутник ABC за стороною AC і двома прилеглими до неї кутами. Виконайте цю побудову самостійно. $\blacktriangleleft$

Задача 9. Побудуйте трикутник за кутом, висотою та бісектрисою, проведеними з вершини цього кута.

Розв'язання. Проведемо аналіз задачі на побудову. На рисунку 457 зображено трикутник ABC , у якому відрізок BD — висота, відрізок BK — бісектриса.

Якщо відомі довжини відрізків BD і BK , то прямокутний трикутник BDK можна побудувати за гіпотенузою та катетом. Також зауважимо, що коли відомо кут ABC , то можна побудувати кути ABK і KBC , кожний з яких дорівнює $\frac{1}{2}\angle ABC$. Звідси отримуємо план побудови.

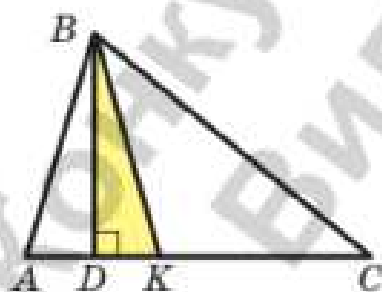


Рис. 457

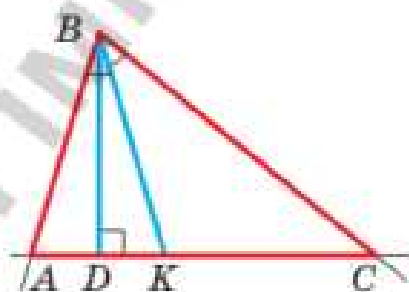


Рис. 458

Будуємо прямокутний трикутник BDK , у якому гіпотенуза BK дорівнює даній бісектрисі, а катет BD — даній висоті (рис. 458). Будуємо два кути, кожний з яких дорівнює половині даного, так, щоби промінь BK був їхньою спільною стороною. На рисунку 458 це кути ABK і KBC . Трикутник ABC — шуканий. $\blacktriangleleft$

- ?** 1. За допомогою яких інструментів виконують геометричні побудови? Які побудови можна ними виконувати? 2. Що означає розв'язати задачу на побудову?

ВПРАВИ

1866.[°] Накресліть: 1) гострий кут; 2) тупий кут. Побудуйте кут, що дорівнює накресленому.

1867.[°] Накресліть гострий кут ABC , проведіть промінь DK . Побудуйте кут MDK такий, що $\angle MDK = 2\angle ABC$.

1868.[°] Поділіть даний відрізок на чотири рівні частини.

1869.[°] Накресліть довільний кут. Поділіть його на чотири рівні частини.

1870.[°] Накресліть: 1) гострокутний трикутник; 2) тупокутний трикутник. Побудуйте всі висоти цього трикутника.

1871.[°] Накресліть трикутник ABC . Побудуйте його: 1) висоту AM ; 2) медіану BD ; 3) бісектрису CK .

1872.[°] Побудуйте трикутник:

- 1) за двома сторонами та кутом між ними;
- 2) за стороною та двома прилеглими кутами.

1873.[°] Побудуйте прямокутний трикутник:

- 1) за двома катетами;
- 2) за катетом і прилеглим гострим кутом.

1874.[°] Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за катетом.

1875.[°] Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною та кутом при вершині.

1876.[°] Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та кутом при основі.

1877.^{*} Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається до даної прямої в даній точці.

1878.* Побудуйте дотичну до кола, яка проходить через дану точку кола.

1879.* Побудуйте кут, який дорівнює: 1) 45° ; 2) 60° ; 3) 75° ; 4) 120° .

1880.* Побудуйте кут, який дорівнює: 1) 30° ; 2) $22^\circ 30'$; 3) 15° .

1881.* Через дану точку, яка не належить даній прямій, проведіть пряму, паралельну даній.

1882.* Через дану точку, що належить куту, проведіть пряму, яка відтинає на сторонах кута рівні відрізки.

1883.* Побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута.

1884.* Дано кут, який дорівнює 30° . Побудуйте коло заданого радіуса так, щоби центр кола належав одній зі сторін даного кута й коло дотикалося до другої сторони кута.

1885.* Побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута, причому до однієї з них — у даній точці.

1886.* Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та гострим кутом.

1887.* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і протилежним гострим кутом.

1888.* Побудуйте рівнобедрений трикутник:

- 1) за висотою, опущеною на основу, та кутом при вершині;
- 2) за основою та медіаною, проведеною до основи;
- 3) за основою та висотою, проведеною до бічної сторони.

1889.* Побудуйте рівнобедрений трикутник:

- 1) за бічною стороною та кутом при основі;
- 2) за бічною стороною та висотою, проведеною до основи.

1890.* Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за гіпотенузою.

1891.** Як поділити навпіл відрізок, довжина якого в кілька разів більша за найбільший розхил циркуля?

1892.** Побудуйте прямокутний трикутник:

- 1) за гострим кутом і бісектрисою цього кута;
- 2) за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.

1893.* Побудуйте прямокутний трикутник:

- 1) за катетом і медіаною, проведеною до другого катета;
- 2) за гострим кутом і висотою, проведеною з вершини прямого кута.

1894.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та радіусом вписаного кола.

1895.** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою трикутника, проведеною з вершини цього кута.

1896.* Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін, і кутом між даною стороною та медіаною.

1897.** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї гострим кутом і висотою, проведеною до даної сторони.

1898.** Побудуйте трикутник за стороною та медіаною і висотою, проведеними з одного й того самого кінця даної сторони. Скільки розв'язків може мати задача?

1899.* Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, проведеною до однієї із цих сторін. Скільки розв'язків може мати задача?

1900.** Побудуйте трикутник за висотою та двома кутами, які ця висота утворює зі сторонами трикутника, що мають з висотою спільну вершину. Скільки розв'язків може мати задача?

1901.* Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, проведеною до третьої сторони. Скільки розв'язків може мати задача?

1902.* Побудуйте трикутник за двома сторонами та кутом, протилежним до однієї із цих сторін. Скільки розв'язків може мати задача?

1903.* Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим кутом і медіаною, проведеною до даної сторони. Скільки розв'язків може мати задача?

1904.* Побудуйте трикутник за кутом і висотами, проведеними з вершин двох інших кутів.

1905.* Побудуйте трикутник за двома висотами та кутом, з вершини якого проведена одна з даних висот. Скільки розв'язків може мати задача?

1906.* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.

1907.* Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і радіусом вписаного кола.

1908.* Побудуйте трикутник за радіусом вписаного кола та відрізками, на які точка дотику вписаного кола ділить одну зі сторін.

1909.* Побудуйте трикутник за стороною та проведеними до цієї сторони висотою та медіаною.

1910.* Побудуйте трикутник, якщо дано три точки, у яких вписане коло дотикається до його сторін.

1911.* Як поділити на три рівні частини кут, який дорівнює 54° ?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1912. При якому значенні b графіки функцій $y = 1,5x - 3$, $y = 2,5x + 1$ і $y = 5x + b$ перетинаються в одній точці?

1913. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 5u - 7v = 24, \\ 7u + 6v = 2; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 0,2x + 1,5y = 10, \\ 0,4x - 0,3y = 0,2. \end{cases}$$

1914. Обчисліть значення добутку, використовуючи формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

1) $19 \cdot 21$;

3) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{3}$;

2) $98 \cdot 102$;

4) $7,9 \cdot 8,1$.

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

1915. На аркуші паперу накреслили рівносторонній трикутник і повністю накрили його двома іншими рівносторонніми трикутниками різних розмірів. Доведіть, що для покриття вистачило б одного із цих трикутників.

59. Метод геометричних місць точок у задачах на побудову

Відомо, що при змішуванні синього й жовтого кольорів отримаємо зелений.

Нехай на площині треба знайти точки, що мають якісь дві властивості одночасно. Якщо точки, які мають першу властивість, зафарбувати синім кольором, а точки, які мають другу властивість, — жовтим, то зрозуміло, що зелені точки, які при цьому утворюються, матимуть одразу дві властивості. У цьому й полягає ідея методу ГМТ. Розв'яжемо за допомогою цього методу кілька задач.

 **Задача 1.** Побудуйте трикутник за трьома даними його сторонами.

Розв'язання. Нехай дано три відрізки, довжини яких дорівнюють a , b , c (рис. 459). Треба побудувати трикутник ABC , у якому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Проведемо довільну пряму. За допомогою циркуля відкладемо на ній відрізок BC , який дорівнює a (рис. 460). Задача звелася до побудови третьої вершини трикутника, точки A .

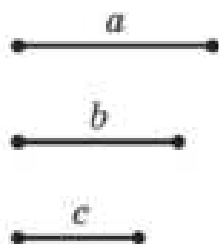


Рис. 459

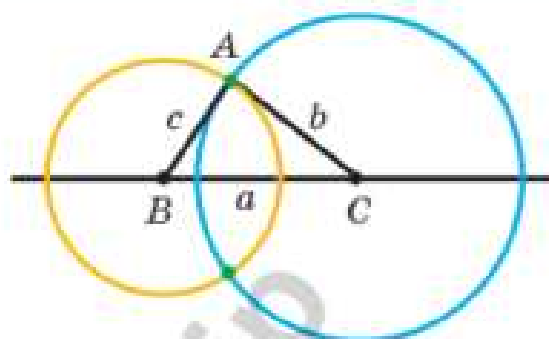


Рис. 460

Скористаємося тим, що точка A має одразу дві властивості:

1) належить геометричному місцю точок, віддалених від точки B на відстань c , тобто колу радіуса c із центром у точці B (на рисунку 460 це жовте коло);

2) належить геометричному місцю точок, віддалених від точки C на відстань b , тобто колу радіуса b із центром у точці C (на рисунку 460 це синє коло).

За точку A можна взяти будь-яку з двох зелених точок, що утворилися.

Отриманий трикутник ABC є шуканим, оскільки в ньому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. ◀

З описаної побудови випливає, що коли кожний із трьох даних відрізків менший від суми двох інших, то ці відрізки можуть слугувати сторонами трикутника.

Задача 2. Побудуйте фігуру, усі точки якої належать даному куту, рівновіддалені від його сторін і знаходяться на заданій відстані a від його вершини.

Розв'язання. Шукані точки належать одразу двом геометричним місцям точок: бісектрисі даного кута та колу із центром у вершині кута й радіусом, який дорівнює a .

Побудуємо бісектрису кута й указане коло (рис. 461). Їхнім перетином є шукана точка X . ◀

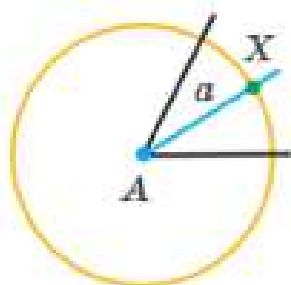


Рис. 461

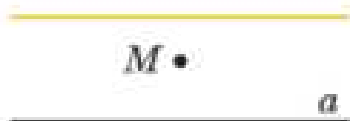


Рис. 462



Рис. 463

Задача 3. Побудуйте центр кола даного радіуса R , яке проходить через дану точку M і дотикається до даної прямої a .

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли точка M не належить прямій a . Оскільки коло дотикається до прямої a , то його центр знаходиться на відстані R від цієї прямої. Геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої на дану відстань, є дві паралельні прямі (див. вправу 1757). Отже, центр кола треба шукати на жовтих прямих (рис. 462).

Геометричним місцем точок, які є центрами кіл радіуса R , що проходять через точку M , є коло радіуса R із центром у точці M (на рисунку 463 це синє коло). Тому за центр шуканого кола можна взяти будь-яку з точок перетину синього кола з однією із жовтих прямих (рис. 463).

Побудову для випадку, коли дана точка належить даній прямій, розгляньте самостійно. ◀

Задача 4. Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола.

Розв'язання. Побудуємо коло даного радіуса та проведемо хорду AB , яка дорівнює стороні шуканого трикутника. Тоді кінці хорди є двома вершинами шуканого трикутника. Зрозуміло, що третя вершина належить одночасно побудованому колу (жовте коло) та колу із центром у точці O , яка є серединою хорди AB ,

і радіусом, який дорівнює даній медіані (синє коло). Кожний із трикутників ABC_1 і ABC_2 (рис. 464) є шуканим. Оскільки ці трикутники рівні, то задача має єдиний розв'язок. ◀

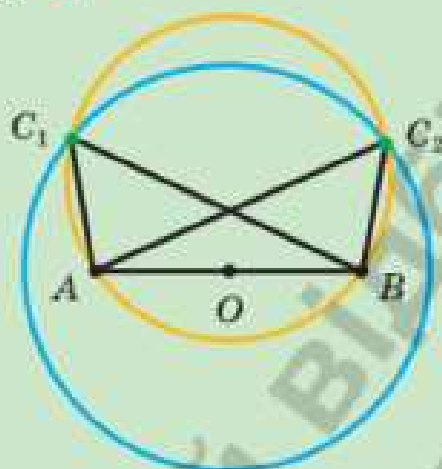


Рис. 464

ВПРАВИ

1916.° Дано пряму m і точки A та B поза нею (рис. 465). Побудуйте на прямій m точку, рівновіддалену від точок A і B .



Рис. 465

1917.° Точки A і B належать прямій m . Побудуйте точку, віддалену від прямої m на відстань a та рівновіддалену від точок A і B . Скільки розв'язків може мати задача?

1918.° Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та бічною стороною.

1919.* Точки B і C належать різним сторонам кута A , причому $AB \neq AC$. Побудуйте точку M , яка належить куту, рівновіддалена від його сторін і така, що $MB = MC$.

1920.* Точки B і C належать різним сторонам кута A . Побудуйте точку D , яка належить куту, рівновіддалена від його сторін і така, що $DC = BC$. Скільки розв'язків може мати задача?

1921.′ Для даного кола побудуйте точку, яка є його центром.

1922.′ Побудуйте коло даного радіуса, центр якого належить даній прямій, так, щоб це коло проходило через дану точку.

1923.′ Побудуйте коло даного радіуса, яке проходить через дві дані точки.

1924.′ Знайдіть усі точки, які належать даному колу та рівновіддалені від кінців даного відрізка. Скільки розв'язків може мати задача?

1925.′ Дано дві прямі m і n , які перетинаються, і відрізок AB . Побудуйте на прямій m точку, віддалену від прямої n на відстань AB . Скільки розв'язків має задача?

1926.′ У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$. На катеті AC побудуйте точку D , віддалену від прямої AB на відстань CD .

1927.′ Побудуйте трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з даних сторін.

1928.′ Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною та медіаною, проведеною до бічної сторони.

1929.″ Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?

1930.″ На даному колі побудуйте точку, яка знаходиться на даній відстані від даної прямої. Скільки розв'язків може мати задача?

1931.″ На даному колі побудуйте точку, яка рівновіддалена від двох даних прямих, що перетинаються. Скільки розв'язків може мати задача?

1932.″ Між двома паралельними прямими дано точку. Побудуйте коло, яке проходить через цю точку й дотикається до даних прямих. Скільки розв'язків має задача?

1933.* Побудуйте коло, яке проходить через дану точку A та дотикається до даної прямої m у даній точці B .

1934.* Дано дві паралельні прямі та січну. Побудуйте коло, яке дотикається до цих трьох прямих.

1935.* Побудуйте трикутник за двома сторонами та радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?

1936.* Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?

1937.* Побудуйте рівносторонній трикутник за радіусом описаного кола.

1938.* Три прямі попарно перетинаються та не проходять через одну точку. Побудуйте точку, рівновіддалену від усіх трьох прямих. Скільки розв'язків має задача?

1939.* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою гіпотенузи та другого катета.

1940.* Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та сумою катетів.

1941.* Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та різницею катетів.

1942.* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і різницею гіпотенузи та другого катета.

1943.* Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін.

1944.* Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і різницею двох інших сторін.

1945.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і різницею двох інших сторін.

1946.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і сумою двох інших сторін.

1947.* Побудуйте трикутник за периметром і двома кутами.

1948.* Побудуйте гострокутний трикутник за периметром, одним із кутів і висотою, проведеною з вершини іншого кута.

1949.* Побудуйте трикутник за висотою та медіаною, проведеними з однієї вершини, і радіусом описаного кола.

1950.* Побудуйте трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до третьої сторони.

1951.* Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1952. У рівності $4(0,5x - 3) = 3x + *$ замініть зірочку таким виразом, щоб утворилося рівняння, яке:

- 1) не має коренів;
- 2) має безліч коренів;
- 3) має один корінь.

1953. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x + 3 = 5x - 4(5y + 4), \\ 3(2x - 3y) - 6x = 8 - y. \end{cases}$$

1954. Побудуйте графік функції

$$y = \begin{cases} 2x + 7, & \text{якщо } x < -2, \\ -1,5x, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ x - 5, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Використовуючи побудований графік, визначте, при яких значеннях a пряма $y = a$ має із цим графіком рівно дві спільні точки.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

1955. Розріжте фігуру, зображену на рисунку 466, на три частини, які не є квадратами, так, щоб із цих частин можна було скласти квадрат.

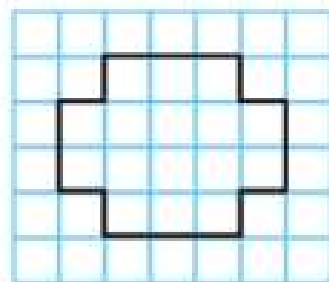


Рис. 466

З історії геометричних побудов



Уміння досягати результату, використовуючи мінімальні засоби, завжди вважалося ознакою найвищої майстерності. Мабуть, тому в Стародавній Греції значною мірою було розвинене мистецтво виконувати геометричні побудови за допомогою лише двох інструментів: дощечки з рівним краєм (лінійки) і двох загострених паличок, зв'язаних на одному кінці (циркуля). Таке обмеження у виборі інструментів історики пов'язують з давньогрецькою традицією, за якою пряму та коло вважали найгармонічнішими фігурами. Так, у своїй книзі «Начала» видатний учений Евклід описував побудови геометричних фігур, які було виконано лише циркулем і лінійкою.

Існує багато задач на побудову. З деякими з них ви вже ознайомилися. Проте є три задачі на побудову, які відіграли особливу роль у розвитку математики. Ці задачі стали знаменитими.

Задача про квадратуру круга. Побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга.

Задача про трисекцію кута (від лат. *tria* — «три» і *section* — «розрізання»). Поділити кут на три рівні частини.

Задача про подвоєння куба. Побудувати куб, об'єм якого у 2 рази більший за об'єм даного куба.

Ці задачі непокоїли людей протягом тисячоліть. Їх намагалися розв'язати й такі видатні вчені стародавніх часів, як Гіппократ Хіоський, Евдокс Кнідський, Евклід, Ератосфен, Аполлоній Перзький, Герон, Папп Александрійський, Платон, Архімед, і генії Нового часу — Рене Декарт, Франсуа Вієт, Ісаак Ньютон. І лише в середині XIX ст. було доведено, що їх розв'язати неможливо, тобто неможливо виконати

зазначені побудови з використанням лише циркуля та лінійки. Цей результат був отриманий засобами не геометрії, а алгебри, завдяки перекладу цих задач мовою рівнянь.

Коли ви розв'язували задачі на побудову, особливо ті, що позначені зірочкою, ви, мабуть, зазнали ускладнень, пов'язаних з обмеженістю арсеналу інструментів. Тому пропозиція ще більше звузити можливості застосовуваних приладів може здатися щонайменше несподіваною. Проте ще в X ст. перський математик Мохаммед Абу-ль-Вефа описав розв'язання низки задач на побудову за допомогою лінійки та циркуля, розхил якого не можна змінювати. Зовсім дивовижною є теорема, опублікована в 1797 р. італійським математиком Лоренцо Маскероні (1750–1800): *будь-яку побудову, що виконується циркулем і лінійкою, можна виконати одним лише циркулем*. При цьому Маскероні обумовив таке: оскільки самим лише циркулем провести пряму неможливо, то пряму вважають побудованою, якщо побудовано які-небудь дві її точки.

У XX ст. було знайдено книгу датського вченого Георга Мора (1640–1697), у якій він також описував побудови одним лише циркулем. Тому сформульовану вище теорему називають теоремою Мора — Маскероні.

ЗАВДАННЯ № 11 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Скільки точок містить геометричне місце точок, рівновіддалених від даних?

- А) безліч; Б) дві; В) одну; Г) жодної.

2. Дано три точки, що лежать на одній прямій. Скільки точок містить геометричне місце точок, рівновіддалених від даних?

- А) одну; Б) дві; В) безліч; Г) жодної.

3. Скільки точок містить геометричне місце точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін та вершини?

- А) одну; Б) дві; В) безліч; Г) жодної.

4. Точка X належить колу радіуса R із центром O . Яке з поданих тверджень є неправильним?

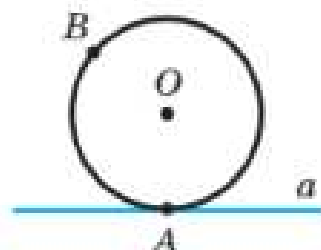
- А) $OX \leq R$; Б) $OX \geq R$; В) $OX < R$; Г) $OX = R$.

5. Пряма має дві спільні точки з колом радіуса R із центром O . Яку фігуру утворюють усі точки X даної прямої такі, що $OX \geq R$?

- А) відрізок; В) промінь;
Б) два промені; Г) пряму.

6. На рисунку зображено пряму a , яка дотикається до кола із центром O в точці A . На колі позначено точку B , X — довільна точка прямої a . Яке з поданих тверджень є неправильним?

- А) $OX > OB$; В) $OX \geq OB$;
Б) $OX \geq OA$; Г) $OA = OB$.



7. Яке твердження є правильним?

- А) Якщо дві хорди перпендикулярні, то одна з них є діаметром.
Б) Якщо дві хорди точкою перетину діляться навпіл, то вони перпендикулярні.
В) Якщо дотична, проведена через кінець хорди, перпендикулярна до неї, то ця хорда — діаметр.
Г) Якщо одна з хорд ділить другу навпіл, то ця хорда — діаметр.

8. Центр описаного кола трикутника — це точка перетину:
- А) висот трикутника;
 - Б) медіан трикутника;
 - В) серединних перпендикулярів сторін трикутника;
 - Г) бісектрис трикутника.
9. Центр вписаного кола трикутника — це точка перетину:
- А) висот трикутника;
 - Б) медіан трикутника;
 - В) серединних перпендикулярів сторін трикутника;
 - Г) бісектрис трикутника.
10. Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої 207° , якщо радіус кола дорівнює 4 см.
- А) 23 см; Б) 4,6л см; В) 23л см; Г) 4,6 см.
11. Розв'язуючи задачі на побудову, використовують інструменти:
- А) циркуль, транспортир, лінійку;
 - Б) лінійку, косинець;
 - В) лінійку, косинець, циркуль, транспортир;
 - Г) циркуль, лінійку.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 8

Геометричне місце точок (ГМТ)

Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.

Серединний перпендикуляр відрізка як ГМТ

Серединний перпендикуляр відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

Бісектриса кута як ГМТ

Бісектриса кута є геометричним місцем точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін.

Коло

Колом називають геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки.

Круг

Кругом називають геометричне місце точок, відстань від яких до заданої точки не більша за дане додатне число.

Хорда кола

Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають хордою кола.

Діаметр кола

Хорду, яка проходить через центр кола, називають діаметром.

Властивості кола

Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.

Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.

Дотична до кола

Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.

Властивість дотичної

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Ознака дотичної до кола

Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Властивість дотичних, проведених до кола через одну точку

Коли через дану точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

Коло, описане навколо трикутника

Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Центр кола, описаного навколо трикутника

Центр кола, описаного навколо трикутника, — це точка перетину серединних перпендикулярів його сторін.

Коло, вписане в трикутник

Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін. У будь-який трикутник можна вписати коло.

Центр кола, вписаного в трикутник

Центр кола, вписаного в трикутник, — це точка перетину бісектрис трикутника.

Довжина кола

$$C = 2\pi R$$

Довжина дуги кола в n°

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

§9 РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ МНОГОГРАННИКІВ

У цьому параграфі ви поновите свої знання про многогранники, їхні розгортки. Удосконаліть навички виготовлення за допомогою розгорток моделей прямокутного паралелепіпеда, куба, трикутної та чотирикутної піраміди.

60. Розгортки поверхонь многогранників

Як вам відомо з курсу математики 5 класу, такі предмети як цеглина, коробка сірників, пакувальний ящик, коробка цукерок (рис. 467) дають уявлення про прямокутний паралелепіпед.



Рис. 467

На рисунку 468 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Прямокутний паралелепіпед обмежений шістьма гранями. Кожна грань — це прямокутник, тобто поверхня прямокутного паралелепіпеда складається із шести прямокутників.

Сторони граней називають ребрами прямокутного паралелепіпеда, вершини граней —

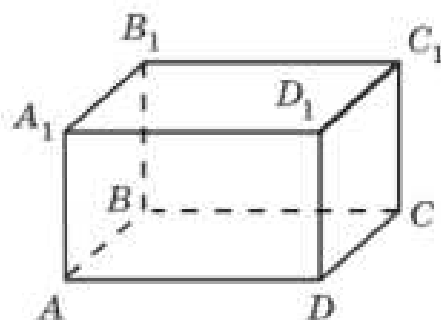


Рис. 468

вершинами прямокутного паралелепіпеда. Наприклад, відрізки AB , BC , A_1B_1 — ребра, а точки B , A_1 , C_1 — вершини паралелепіпеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (рис. 468). У прямокутного паралелепіпеда 8 вершин і 12 ребер.

Грані AA_1B_1B і DD_1C_1C не мають спільних вершин. Такі грані називають **протилежними**. У паралелепіпеді $ABCD A_1B_1C_1D_1$ є ще дві пари протилежних граней: прямокутники $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, а також прямокутники AA_1D_1D і BB_1C_1C .

Протилежні грані прямокутного паралелепіпеда рівні.

На рисунку 468 грань $ABCD$ називають **основою** прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$.

Площею поверхні прямокутного паралелепіпеда називають суму площ усіх його граней.

Щоб мати уявлення про розміри прямокутного паралелепіпеда, достатньо розглянути будь-які три ребра, що мають спільну вершину. Довжини цих ребер називають **вимірами** прямокутного паралелепіпеда. Щоб їх розрізнити, користуються назвами: **довжина**, **ширина**, **висота** (рис. 469).



Рис. 469

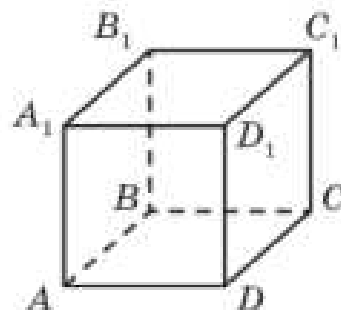


Рис. 470

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі виміри рівні, називають **кубом** (рис. 470). Поверхня куба складається із шести рівних квадратів.

Якщо коробку, яка має форму прямокутного паралелепіпеда, відкрити (рис. 471) і розрізати по чотирьох вертикальних ребрах (рис. 472), а потім розгорнути, то отримаємо фігуру, яка складається із шести прямокутників (рис. 473). Цю фігуру називають розгорткою прямокутного паралелепіпеда.

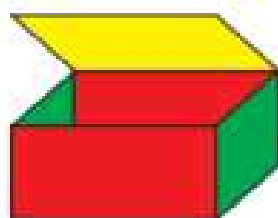


Рис. 471



Рис. 472

На рисунку 474 зображено фігуру, яка складається із шести рівних квадратів. Вона є розгорткою куба.

За допомогою розгортки можна виготовити модель прямокутного паралелепіпеда. Це можна зробити, наприклад, так. Накреслити на папері його розгортку. Вирізати її, зігнути по відрізках, що відповідають ребрам прямокутного паралелепіпеда (рис. 472), і склеїти.



Рис. 473

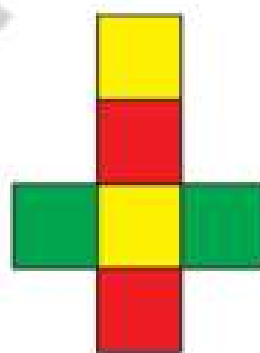


Рис. 474

Щоб полегшити процес виготовлення моделі прямокутного паралелепіпеда, на розгортці роблять спеціальні смужки, які використовують у процесі склеювання (рис. 475).

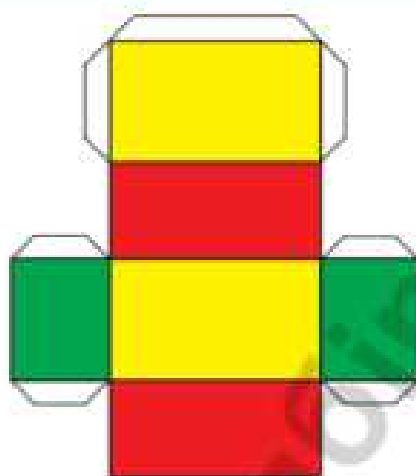


Рис. 475

Зауважимо, що кожна з фігур, зображених на рисунку 476, може слугувати розгорткою прямокутного паралелепіпеда (однаковим кольором пофарбовано протилежні грані прямокутного паралелепіпеда).

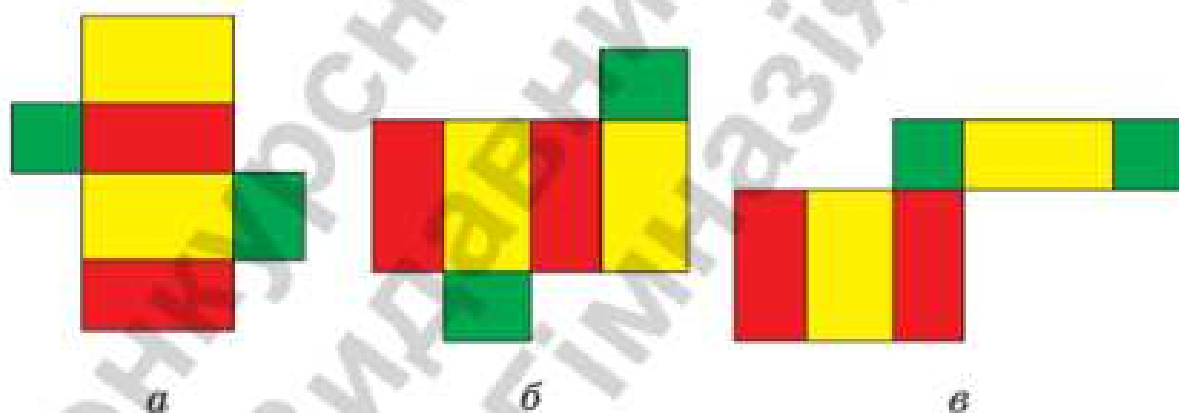


Рис. 476

Розгортка куба також може мати різні форми (рис. 477).

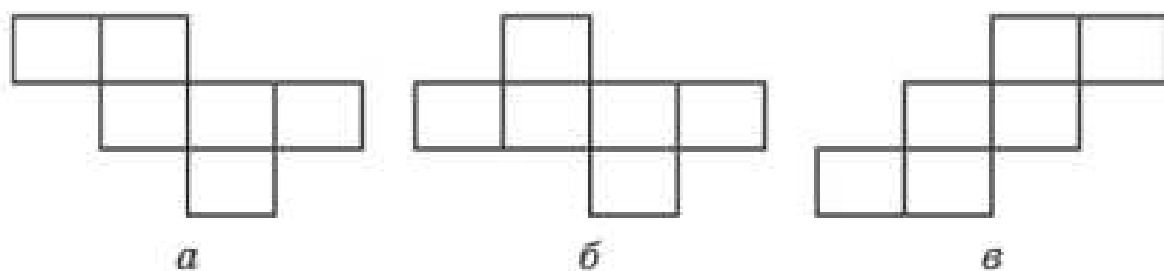


Рис. 477

Прямокутний паралелепіпед є видом многогранника — фігури, поверхня якої складається з многокутників. На рисунку 478 зображено многогранники.

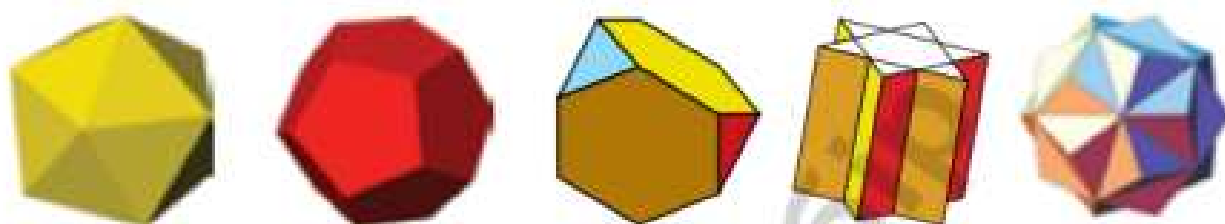
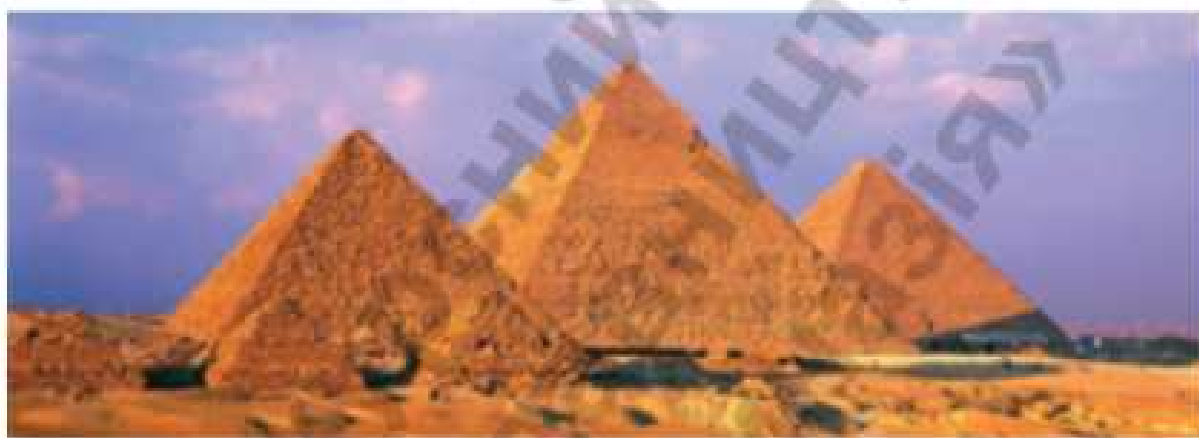


Рис. 478

Одним із видів многогранника є піраміда. Ця фігура для вас не є новою. Скоріш за все, ви чули про одне із семи чудес світу — єгипетські піраміди.



Єгипетські піраміди

На рисунку 479 зображено піраміди $MABC$, $MABCD$, $MABCDE$. Поверхня піраміди складається з бічних

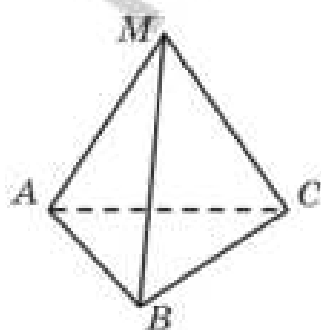
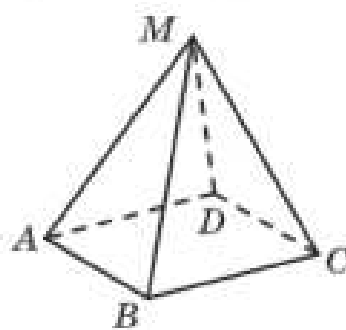
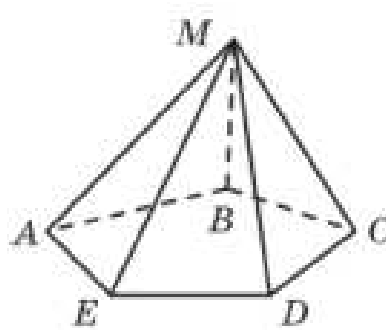
Трикутна
пірамідаЧотирикутна
пірамідаП'ятикутна
піраміда

Рис. 479

граней — трикутників, які мають спільну вершину, і основи, яка є многокутником (рис. 480).



Рис. 480

Спільну вершину бічних граней називають **вершиною піраміди**. Сторони основи піраміди називають **ребрами основи піраміди**, а сторони бічних граней, які не належать основі, — **бічними ребрами піраміди**.

Піраміди можна класифікувати за кількістю сторін основи (рис. 479): трикутна, чотирикутна, п'ятикутна тощо.

Поверхня трикутної піраміди складається із чотирьох трикутників. Будь-який із цих трикутників може слугувати основою піраміди. Це єдиний вид піраміди, будь-яку грань якої можна вважати її основою.

На рисунку 481 зображено чотирикутну піраміду $MABCD$, основа якої — квадрат $ABCD$, а бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники. Таку піраміду називають **правильною чотирикутною пірамідою**. Якщо цю фігуру розрізати по бічних ребрах MA , MB , MC і MD , а потім розгорнути, то отримаємо фігуру, яка складається із квадрата й чотирьох рівних рівнобедрених трикутників (рис. 482). Ця фігура є **розгорткою правильної чотирикутної піраміди**.

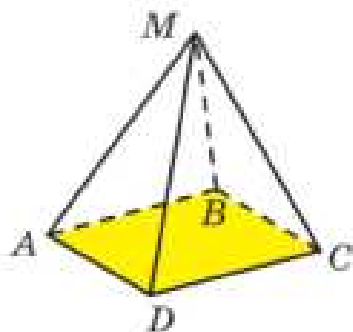


Рис. 481

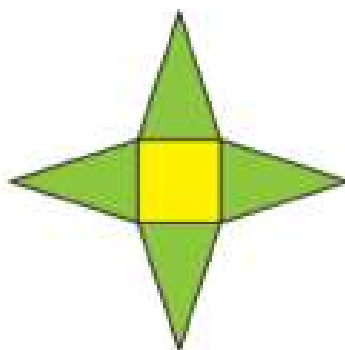


Рис. 482

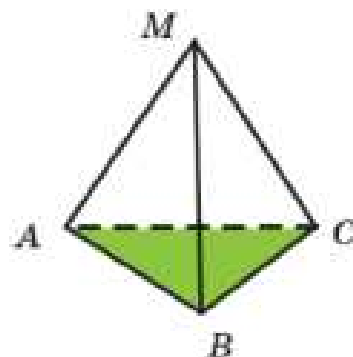


Рис. 483

На рисунку 483 зображено піраміду, основа якої — рівносторонній трикутник, а бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники. Таку піраміду називають **правильною трикутною пірамідою**.

Фігура, зображена на рисунку 484, складається з рівностороннього трикутника (пофарбованого у зелений колір) і трьох рівних рівнобедрених трикутників (пофарбованих у жовтий колір). Ця фігура є **розгорткою правильної трикутної піраміди**.

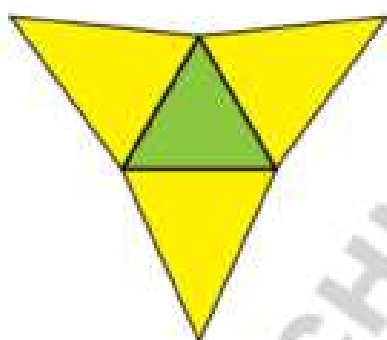


Рис. 484

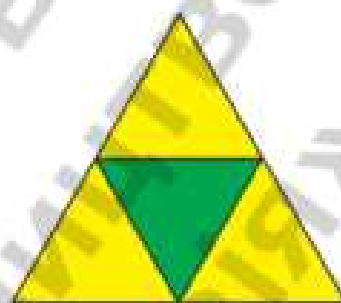


Рис. 485

На рисунку 485 зображено фігуру, що складається із чотирьох рівних рівносторонніх трикутників. За допомогою цієї фігури можна зробити модель **правильної трикутної піраміди**, у якої всі грані — рівносторонні трикутники.

Як і у випадку з прямокутним паралелепіпедом, щоб полегшити процес виготовлення моделі піраміди, на розгортці роблять смужки, які використовують у процесі склеювання (рис. 486).

Зауважимо, що кожна з фігур, зображених на рисунку 487, може слугувати розгорткою **правильної трикутної піраміди**, а кожна з фігур,

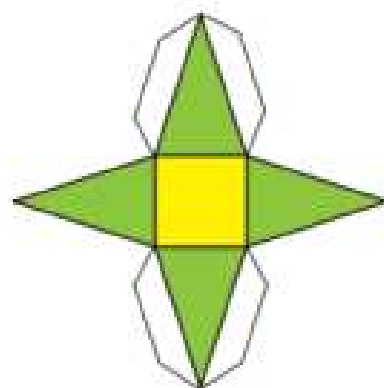


Рис. 486

зображених на рисунку 488, — розгорткою правильної чотирикутної піраміди.

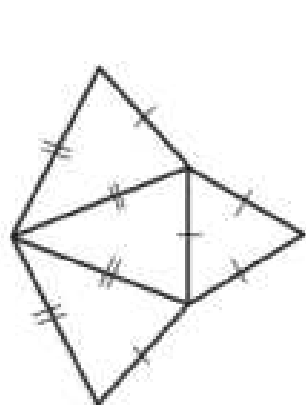


Рис. 487

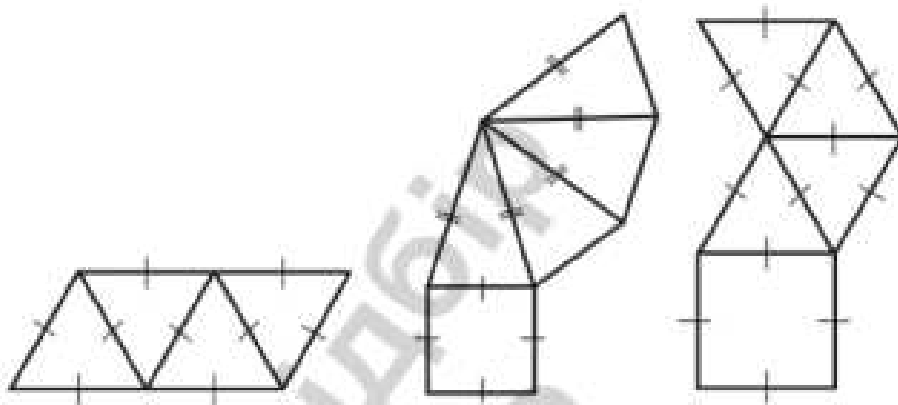


Рис. 488

?

1. Із яких фігур складається поверхня прямокутного паралелепіпеда? 2. Із яких фігур складається поверхня куба? 3. Із яких фігур складається поверхня піраміди? 4. Із яких фігур складається розгортка прямокутного паралелепіпеда? 5. Із яких фігур складається розгортка правильної трикутної піраміди? правильної чотирикутної піраміди?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1956.* Накресліть на аркуші цупкого паперу розгортку прямокутного паралелепіпеда, вид і розміри якої дано на рисунку 489. Виріжте її та виготовте модель прямокутного паралелепіпеда.

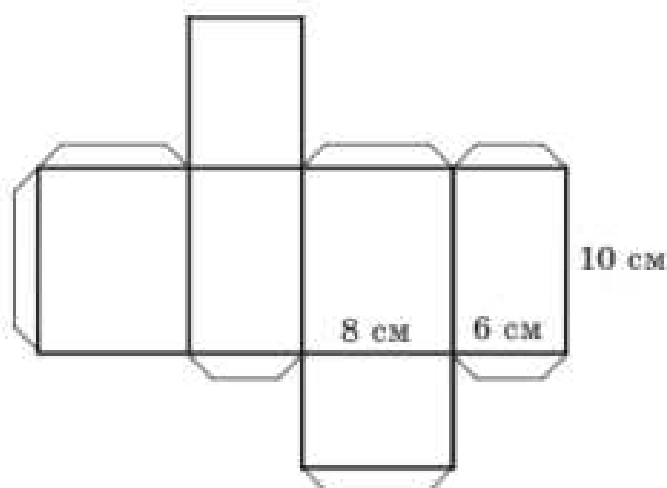


Рис. 489

1957.* Накресліть на аркуші цупкого паперу розгортку правильної чотирикутної піраміди, вид і розміри якої дано на рисунку 490. Виріжте її та виготовте модель піраміди.

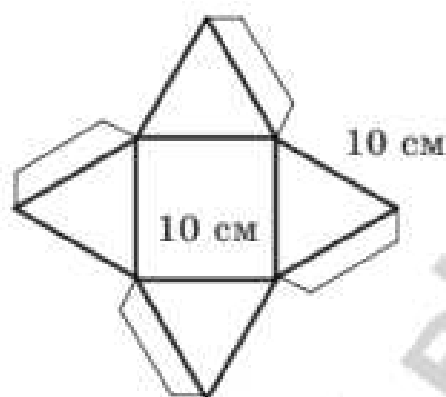


Рис. 490

1958.* Накресліть на аркуші цупкого паперу розгортку правильної трикутної піраміди, вид і розміри якої дано на рисунку 491. Виріжте її та виготовте модель піраміди.

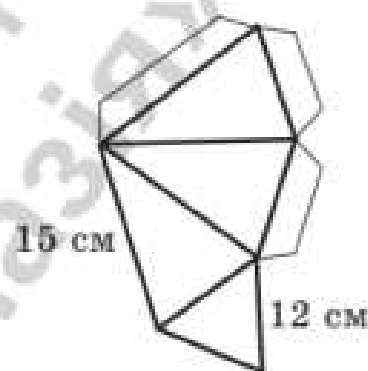


Рис. 491

1959.* Перерисуйте в зошит рисунки 477, а, б, на якому зображено розгортки куба. Зафарбуйте однаковим кольором квадрати, що відповідають протилежним граням куба.

1960.* Перерисуйте в зошит рисунок 477, в, на якому зображено розгортку куба. Зафарбуйте однаковим кольором квадрати, що відповідають протилежним граням куба.

ВПРАВИ

1961.° На рисунку 492 зображено розгортку прямокутного паралелепіпеда.

- 1) Зі скількох прямокутників складається розгортка?
- 2) Скільки пар рівних прямокутників містить розгортка?

- 3) Яка площа цієї розгортки, якщо виміри паралелепіпеда дорівнюють 10 см, 6 см і 4 см?

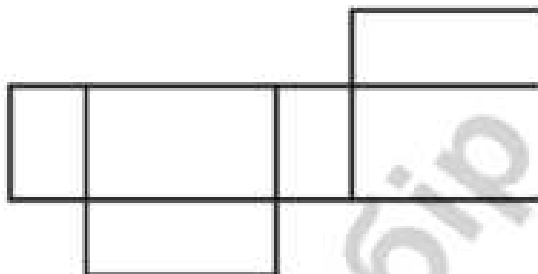


Рис. 492

- 1962.° Обчисліть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, розгортку якого зображено на рисунку 493.

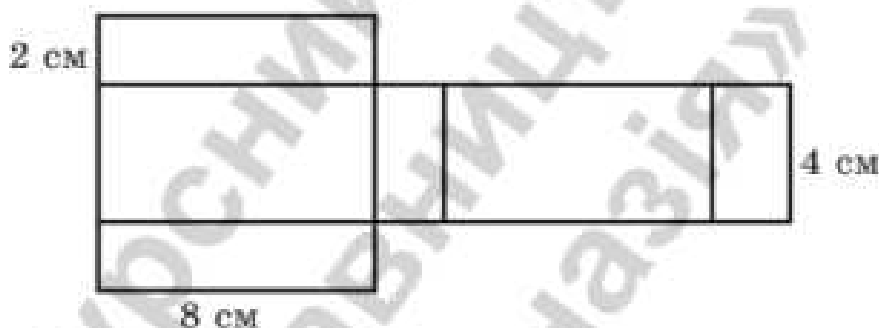


Рис. 493

- 1963.° Металевий брусок має форму прямокутного паралелепіпеда, довжина якого дорівнює 25 см, ширина — 20 см, а висота — 40 см. Скільки фарби потрібно, щоб одним шаром покрити нею всю поверхню цього бруска, якщо на 1 дм^2 витрачається 5 г фарби?

- 1964.° Дерев'яний брусок має форму куба, ребро якого дорівнює 15 см. Скільки лаку потрібно, щоб одним шаром покрити ним усю поверхню цього бруска, якщо на 1 дм^2 витрачається 4 г лаку?



1965.* На рисунку 494 зображено куб і його розгортку. Скільки точок на задній грані цього куба?

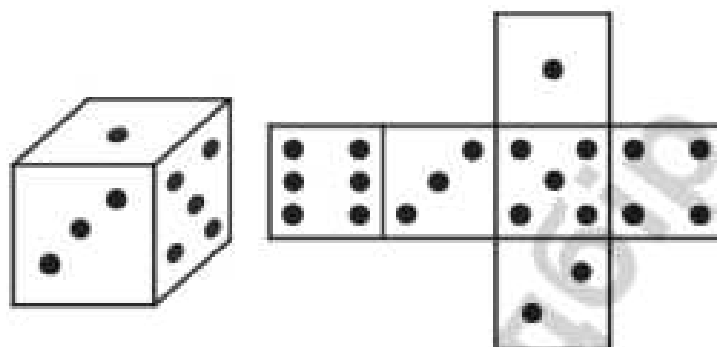


Рис. 494

1966.* На рисунку 495 зображено куб і його розгортку. Скільки точок на нижній грані цього куба?

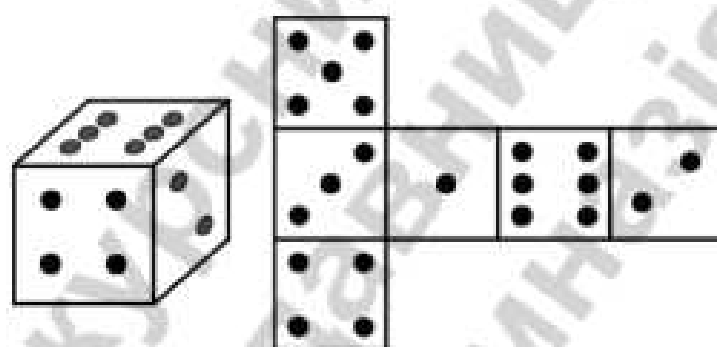


Рис. 495

1967.** Які точки сумістяться в результаті склеювання розгортки куба, зображеної на рисунку 496: 1) з точкою A ; 2) з точкою V ?

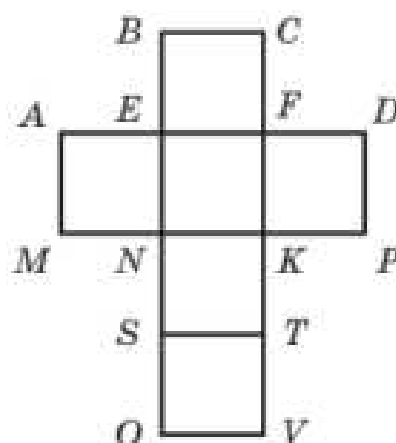


Рис. 496

1968.** Які точки сумістяться в результаті склеювання розгортки куба, зображеної на рисунку 497: 1) з точкою O ; 2) з точкою M ?

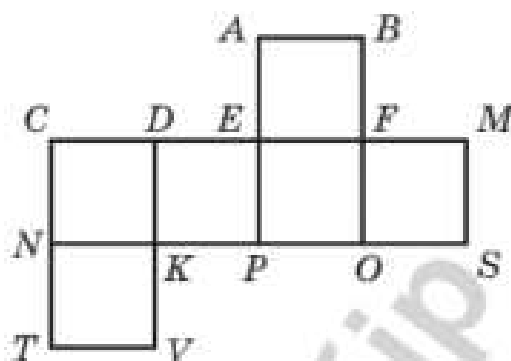


Рис. 497

1969. Які з фігур, зображених на рисунку 498, можуть бути розгортками куба?

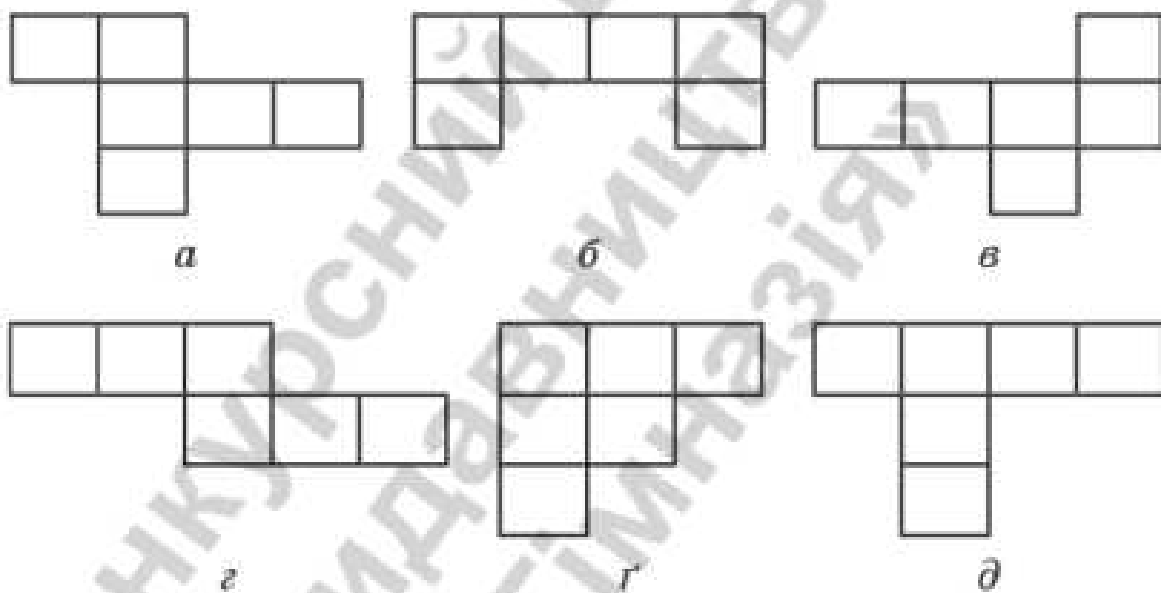


Рис. 498

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1970. Який многочлен треба додати до многочлена $a^4 - b^4 + a^3 - b^3 - 3ab$, щоб їхня сума тотожно дорівнювала многочлену $b^4 + 2ab$?

1971. Яке число треба підставити замість a , щоб рівність $(5x + a)(x - 2) = 5x^2 - 7x - 2a$ була тотожністю?

1972. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{9x-7}{4} - \frac{9x+13}{8} = \frac{3-x}{2};$$

$$2) \frac{6x+7}{6} + \frac{5x-8}{9} = 3.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ КУРСУ МАТЕМАТИКИ 7 КЛАСУ

Алгебраїчні вирази. Рівняння з однією змінною

1973. Заповніть таблицю:

a	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$a^3 - a^2$							
$a^4 + a^2$							

1974. Подайте у вигляді степеня вираз:

- 1) $(a^8)^4$; 3) $a^6 a^6 a^6$; 5) $(a^6)^6 a^6$;
 2) $a^8 a^4$; 4) $(a^6 a^6)^6$; 6) $(a^8 a^7) : a^{14}$.

1975. При якому значенні x є правильною рівність:

- 1) $5^x \cdot 5^6 = 5^{24}$; 3) $2^x \cdot 2^m = 2^{6m}$;
 2) $(3^m)^x = 3^{5m}$; 4) $(4^x)^{3m} = 4^{6m^2}$,

де m — натуральне число?

1976. Чи є тотожно рівними вирази:

- 1) $-a^2$ і $(-a)^2$; 4) $9a \cdot a^2$ і $(3a)^2 \cdot a$;
 2) $-a^3$ і $(-a)^3$; 5) $(a^4)^3$ і $(a^2)^6$;
 3) $(a^3)^2$ і a^5 ; 6) $(2a)^3 \cdot (0,5a)^2$ і $2a^4 a^2$

1977. Подайте у вигляді степеня вираз та обчисліть його значення:

- 1) $81 \cdot 3^2$; 2) $4^3 \cdot 8^2$; 3) $100^2 \cdot 1000^3$.

1978. Порівняйте значення виразів:

- 1) $15^5 \cdot 2^6$ і $2^5 \cdot 15^6$; 2) $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4$ і $2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^3$.

1979. Порівняйте значення виразів:

- 1) 10^{20} і 101^{10} ; 2) 10^{15} і 9990^5 .

1980. Спростіть вираз:

- 1) $4a \cdot (-3ab)$; 3) $-6x^3 y^6 \cdot 1,5xy$;
 2) $-2m^2 \cdot 0,1m^4 n \cdot (-5n^3)$; 4) $-14b^2 c^8 d^9 \cdot 1\frac{2}{7}b^6 d^3$;

5) $3x^6 \cdot (-4x^2y)^2$;

6) $(-xy)^3 \cdot (-2x^2y^2)^4$.

1981. Подайте даний одночлен A у вигляді B^n , де B — деякий одночлен, якщо:

1) $A = a^6b^9$, $n = 3$;

3) $A = 81a^2b^4c^8$, $n = 2$;

2) $A = 32a^{10}$, $n = 5$;

4) $A = -8a^{12}b^{18}$, $n = 3$.

1982. Спростіть вираз:

1) $4a^3ab - 6a^2b^3b^3 - 5ab \cdot 3a + 7a^3b \cdot 0,2b^4$;

2) $11m^2 \cdot 2mn - 9mn \cdot 6mn^3 + 10mnm$;

3) $8xx^4x \cdot \left(-\frac{1}{4}xy\right) + 18xy \cdot \frac{7}{9}yx^5$;

4) $9x^3xy^2 - 8xy^2y^8 + 12x^2y \cdot 4y - 0,4xy^3 \cdot 6x^3y^2$.

1983. Доведіть, що значення виразу

$$3x^2 - 9x - (8 - 5x^2 - (9x - 8x^2))$$

не залежить від значення змінної.

1984. Який многочлен треба відняти від многочлена $3c^5 - 2c^4 + 14c^3 - 4c^2 + c$, щоб їхня різниця тотожно дорівнювала многочлену $5c^3 + c^2 - 7c$?

1985. Який многочлен треба додати до многочлена $m^3 - m^2n + mn^2 - n^4$, щоб їхня сума тотожно дорівнювала 5?

1986. Чи існують такі значення x і y , при яких многочлени $-4x^2 - 12xy + 7y^2$ і $6x^2 + 12xy - 5y^2$ одночасно набувають від'ємних значень?

1987. Знайдіть значення виразу:

1) $2a(3a - 5) - 4a(4a - 5)$, якщо $a = -0,2$;

2) $7ab(2a - 3b) + 2a(3ab + 10b^2)$, якщо $a = -3$, $b = 5$;

3) $2a^4(3a^2 + a - 8) - 6a^6$, якщо $a = -1$.

1988. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x-1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{5-2x}{9}$;

3) $\frac{x+5}{8} - \frac{1+x}{2} = \frac{2x+1}{3}$;

2) $\frac{3x+1}{2} - \frac{5x}{4} = \frac{3-2x}{3}$;

4) $\frac{2x}{3} - \frac{2x+1}{6} = \frac{3x-9}{4}$.

1989. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3x(4x - 1) - 6x(1,5 + 2x) = 4,8$;
- 2) $0,2x(5x - 8) + 3,6 = x(x - 0,7)$;
- 3) $x(9x - 4) - 3x(3x - 1) = 8 - x$;
- 4) $18x^2 - 6x(3x + 2) = -12x$.

1990. Яке число треба підставити замість b , щоб рівність $(3x + b)(x + 3) = 3x^2 + 5x + 3b$ була тотожністю?

1991. Обчисліть, використовуючи винесення спільного множника за дужки, значення многочлена:

- 1) $a^2 + 4,72a - 32,8$, якщо $a = 5,28$;
- 2) $12,3x - 12,3y + 4,7$, якщо $x = 8,14$, $y = 8,04$.

1992. Обчисліть, використовуючи винесення спільного множника за дужки:

- 1) $2,49 \cdot 1,35 - 1,35 \cdot 1,84 + 1,35^2$;
- 2) $0,25^2 \cdot 1,6 + 0,25 \cdot 1,6^2 - 0,25 \cdot 1,6 \cdot 0,85$;
- 3) $3,24 \cdot 18,7 - 3,24 \cdot 16,4 + 2,3 \cdot 6,76$;
- 4) $5,12 \cdot 9,76 + 5,12 \cdot 5,36 - 5,12^2$.

1993. Доведіть, що значення виразу:

- 1) $25^4 - 125^2$ кратне 40;
- 2) $6^5 - 18^3$ кратне 42.

1994. Доведіть, що число:

- 1) $\overline{abba}$ ділиться націло на 11;
- 2) $\overline{aaabbb}$ ділиться націло на 37;
- 3) $\overline{ababab}$ ділиться націло на 7;
- 4) $\overline{abab} - \overline{baba}$ ділиться націло на 9 і на 101.

1995. При якому значенні a рівняння $(x + 2)(x - 4) - (x - 2)(x + 4) = ax$ має безліч коренів?

1996. При якому значенні a рівняння $(3x - 1)(x + a) = (3x - 2)(x + 1)$ не має коренів?

1997. Розкладіть на множники:

- 1) $xt - xp + yt - yp$;
- 2) $3a - 3b + ac - bc$;
- 3) $9a - ab - 9 + b$;
- 4) $a^5 + a^3 + 2a^2 + 2$;
- 5) $6ab^2 - 3b^2 + 2a^2b - ab$;
- 6) $2c^3 - 5c^2d - 4c + 10d$;
- 7) $x^3y^2 - x + x^2y^3 - y$.

1998.* При яких значеннях a , b , c і d виконується рівність $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{ad} \cdot \overline{cb}$?

1999. Спростіть вираз:

- 1) $6x^2 + (2y - 3x)(2y + 3x)$;
- 2) $(a + 2)(a - 3) - (4 - a)(a + 4)$;
- 3) $(5 - 2x)(5 + 2x) - (3 - 2x)(4 - 2x)$;
- 4) $(2ab + 1)(2ab - 1)(16a^4b^4 + 1)(4a^2b^2 + 1)$.

2000. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $4x(7 + 9x) - (6x + 5)(6x - 5) = 39$;
- 2) $(x - 8)(x + 10) - (x + 7)(x - 7) = 5x - 31$.

2001. Обчисліть:

- 1) $\frac{39^2 - 33^2}{24^2 - 12^2}$;
- 2) $\frac{5,3^2 - 1,7^2}{2,65^2 - 0,85^2}$.

2002. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $36x^2 - (3x - 27)^2 = 0$;
- 2) $(4x - 7)^2 - (2x + 17)^2 = 0$.

2003. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу:

- 1) $(4n + 19)^2 - (3n - 5)^2$ ділиться націло на 7;
- 2) $(2n + 5)^2 - (2n - 3)^2$ ділиться націло на 16.

2004. При якому значенні a рівняння

$$(a - 3)(a + 5)x = a^2 - 9:$$

- 1) має безліч коренів;
- 2) не має коренів;
- 3) має один корінь?

2005. Використовуючи формулу квадрата суми або формулу квадрата різниці, обчисліть:

- 1) 69^2 ;
- 2) 91^2 ;
- 3) 52^2 ;
- 4) 97^2 ;
- 5) 299^2 ;
- 6) $10,2^2$.

2006. На скільки значення виразу $(3a^2 - 2)^2 - (3a^2 - 1) \times (3a^2 + 1) + 12a^2$ більше за число 2?

2007. Доведіть, що не існує натурального значення n , при якому значення виразу $(8n + 5)(2n + 1) - (4n + 1)^2$ ділилося б націло на 5.

2008. Чи існує таке натуральне значення n , при якому значення виразу $(2n - 3)(2n + 3) - (n + 3)^2$ не ділилося б націло на 3?

2009. Розв'яжіть рівняння:

1) $3(x-7)^2 - 2(x+7)(x-2) = (x+11)(x-4) + 101$;

2) $2x(x+3)^2 - 3x(x-1)(x+8) = x^2(-x-9) + 21$;

3) $y(2y-5)(2y+5) - 4y(y+6)^2 = 13 - 48y^2$.

2010. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $(a+4)^2 - 2(a+4) + 1$;

2) $(3b+2)^2 + 4(3b+2) + 4$;

3) $(3y+8)^2 + (4y+6)^2 + 4y$;

4) $(x-5y)^2 + (x+12y)^2 - x(x-12y)$.

2011. Доведіть, що не має коренів рівняння:

1) $x^2 - 8x + 18 = 0$;

2) $x^2 + x + 1 = 0$.

2012. На скільки значення виразу

$$27a^3 + 4 - (9a^2 - 3a + 1)(3a + 1)$$

менше від числа 10?

2013. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3 + 24x$;

2) $(3-2x)(9+6x+4x^2) - 2x(5-2x)(5+2x) = 7$.

2014. Чи ділиться значення виразу $37^3 + 23^3$ націло на 60?

2015. Чи ділиться значення виразу $654^3 - 554^3$ націло на 200?

2016. Розкладіть на множники:

1) $(a-b)(a+b) - c(c-2b)$;

2) $(b-c)(b+c) - a(a+2c)$.

2017. З поданих чотирьох виразів лише три можна розкласти на множники. Знайдіть ці вирази та розкладіть їх на множники:

1) $9tx - 6nx + 6ty - 4ny$;

3) $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 5$;

2) $36x^2 - 24x + 4 - y^2$;

4) $4a + 3 + a^2 + 2b - b^2$.

2018. Подайте у вигляді добутку чотирьох множників вираз:

1) $a^5 - a^4 - 16a + 16$;

2) $a^{2n}b^{2n} - b^{2n} - a^{2n} + 1$, де n — натуральне число.

2019. Доведіть, що значення виразу

$$17^{10} - 3 \cdot 7^{24} + 3 \cdot 7^{25} + 17^9$$

ділиться націло: 1) на 18; 2) на 36.

2020. Доведіть, що різниця куба натурального числа та самого цього числа ділиться націло на 6.

2021. Доведіть, що сума добутку трьох послідовних натуральних чисел і середнього із цих чисел дорівнює кубу середнього числа.

2022. Нехай $x + y = a$, $xy = b$. Доведіть, що:

1) $x^2 + y^2 = a^2 - 2b$;

2) $x^3 + y^3 = a^3 - 3ab$;

3) $x^4 + y^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$.

Функції

2023. Дано функції $f(x) = x^2 - 2x$ і $g(x) = \frac{x-2}{x}$. Порівняйте:

1) $f(2)$ і $g(-1)$; 2) $f(0)$ і $g(2)$; 3) $f(1)$ і $g(1)$.

2024. Функцію задано таблично:

x	5	3	1	-1	-3
y	3	1	-1	-3	-5

Задайте цю функцію описом і формулою.

2025. При всіх додатних значеннях аргументу значення функції f дорівнює -1 , при всіх від'ємних — дорівнює 1 , а $f(0) = 0$. Побудуйте графік функції f .

2026. Знайдіть координати точки графіка функції $y = 6x - 5$:

- 1) абсциса й ордината якої рівні між собою;
- 2) сума координат якої дорівнює 30.

2027. При якому значенні a через точку $M(3; -2)$ проходить графік функції:

1) $y = ax - 8$; 2) $y = \frac{1}{3}x - a$?

2028. Чи є лінійною функція:

1) $f(x) = (x - 1)(x + 1) - x(x - 3)$;

2) $f(x) = (2x - 3)^2 - (x + 4)(x - 2)$;

3) $f(x) = (x + 3)^2 - x(x + 6)$?

У разі ствердної відповіді побудуйте її графік.

2029. Графіки функцій $y = (5 - a)x + a$ і $y = ax + 2$ перетинаються в точці, абсциса якої дорівнює -3 . Знайдіть ординату цієї точки.

2030. Побудуйте графік функції $y = 2x + 3$. Користуючись графіком, знайдіть значення аргументу, при яких значення функції:

1) дорівнюють 5;

2) більші за 5;

3) менші від 5;

4) більші за -3 , але менші від 7.

2031. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 12x - 6$, знайдіть координати:

1) точок перетину графіка з осями координат;

2) точки перетину графіка даної функції з графіком функції $y = 6x + 24$.

Системи лінійних рівнянь із двома змінними

2032. При якому значенні a пара чисел $(a; -a)$ є розв'язком рівняння:

1) $6x + 5y = 7$;

3) $x^2 - 3y = 0$;

2) $8x - 2y = 4$;

4) $x + |y| = -2$?

2033. Побудуйте графік рівняння $y + 1,5x = c$, якщо він проходить через точку $A(-2; 1)$.

2034. Складіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, розв'язком якої є пара чисел: 1) $(1; 1)$; 2) $(-3; 5)$.

2035. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 3x + 7y = 1, \\ 6y - 5x = 16; \end{cases} & 3) \begin{cases} 3(2a - 1) + 6(7 - b) = 51, \\ 2(a + 6) - 7(1 + 6b) = 49; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 3x - 5y = 19, \\ 2x + 3y = 0; \end{cases} & 4) \begin{cases} \frac{3x - 2y}{4} - \frac{4x + 5}{3} = -5, \\ \frac{6x - 5y}{2} + \frac{2x + y}{5} = 9. \end{cases} \end{array}$$

2036. Учні та учениці 7 класу зібралися на екскурсію. Якщо кожен з них здасть на екскурсію 12 грн 50 коп., то для її оплати не вистачить 100 грн; якщо кожний внесе 16 грн, то утвориться надлишок у розмірі 12 грн. Скільки учнів та учениць у цьому класі?

2037. По колу, довжина якого дорівнює 100 м, рухаються два тіла. Коли вони рухаються в одному напрямку, то зустрічаються кожні 20 с. Коли вони рухаються в протилежних напрямках, то зустрічаються кожні 4 с. З якою швидкістю рухаються тіла?

2038. Сплавили два злитки. Маса одного з них становила 105 г, і він містив 40 % міді. Маса другого злитка становила 75 г. Знайдіть відсотковий вміст міді в другому злитку, якщо отриманий сплав містить 50 % міді.

2039. Скільки грамів 4 %-го та скільки 10 %-го розчинів солі треба взяти, щоб одержати 180 г 6 %-го розчину?

2040. У першому бідоні було молоко жирністю 3 %, а в другому — вершки жирністю 18 %. Скільки літрів молока та скільки літрів вершків треба взяти, щоб одержати 10 л молока жирністю 6 %?

2041. З одного поля зібрали по 40 ц ячменю з гектара, а з другого — по 35 ц з гектара. Усього було зібрано 2600 ц. Наступного року врожайність першого поля збільшилася на 10 %, другого — на 20 %. У результаті з двох полів разом було зібрано ячменю на 400 ц більше, ніж попереднього року. Знайдіть площу кожного поля.

2042. З одного поля зібрали по 45 ц пшениці з гектара, а з другого — по 40 ц з гектара. Усього було зібрано 1900 ц. Наступного року внаслідок посухи врожайність першого поля зменшилася на 20 %, другого — на 15 %. У результаті з двох полів разом було зібрано пшениці менше на 330 ц, ніж попереднього року. Знайдіть площу кожного поля.

2043. Половину цукерок розфасували в мішечки по 500 г у кожний, а другу половину — у менші мішечки по 300 г у кожний. Усього вийшло 32 мішечки. Якою є маса всіх цукерок?

2044. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 11. Якщо до цього числа додати 63, то отримаємо число, записане тими самими цифрами у зворотному порядку. Знайдіть дане число.

2045. До деякого двоцифрового числа ліворуч і праворуч дописали цифру 1. У результаті отримали число, яке у 21 раз більше за дане. Знайдіть дане двоцифрове число.

2046. Сума двох чисел дорівнює 28, а різниця їхніх квадратів становить 112. Знайдіть ці числа.

Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості

2047. Відрізок, довжина якого дорівнює a , поділили на п'ять рівних відрізків. Знайдіть відстань між серединами крайніх відрізків.

2048. На прямій позначили 10 точок: $A, B, C, D, E, F, M, N, K, P$. Скільки при цьому утворилося відрізків, одним із кінців яких є точка A ? Скільки всього утворилося відрізків із кінцями в позначених точках? Чи залежить загальна кількість відрізків від того, лежать позначені точки на одній прямій або ні?

2049. На рисунку 499 $AN = 24$ см, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FK$, $KM = MN$, $DF = 6$ см. Знайдіть відрізок BM .



Рис. 499

2050. Накресліть кут MKE , який дорівнює 120° . Проведіть промінь KC так, щоб $\angle MKC = 60^\circ$. Знайдіть кут SKE та вкажіть його вид. Скільки розв'язків має задача?

2051. Два кути мають спільну сторону й не мають інших спільних точок. Чи є ці кути суміжними, якщо:

- 1) їхні величини відносяться як $11 : 19$ та один із кутів на 32° більший за другий;
- 2) їхні величини відносяться як $7 : 3$ та один із кутів на 72° менший від другого?

2052. На рисунку 500 $BD \perp BC$. Кут між бісектрисами кутів ABD і DBC дорівнює 55° . Знайдіть кут ABD .

Трикутники

2053. Периметр трикутника дорівнює 87 см, одна зі сторін — a см, друга — b см. Складіть вираз для знаходження третьої сторони. Обчисліть довжину третьої сторони, якщо $a = 27$, $b = 21$.

2054. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AB + BC = 27$ см, $AB + AC = 28$ см, $BC + AC = 29$ см.

2055. На рисунку 501 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AD = CF$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEF$.

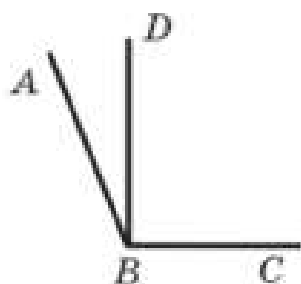


Рис. 500

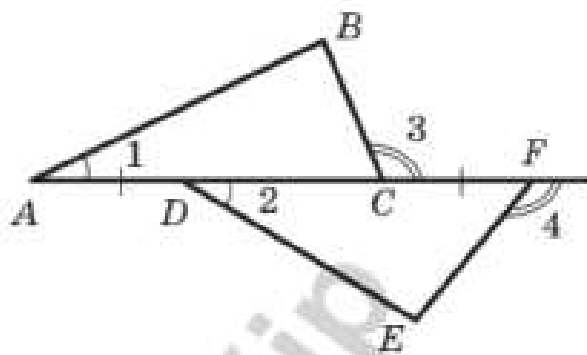


Рис. 501

2056. У трикутниках ABC і DEF проведено медіани BM і EK відповідно. Відомо, що $BC = EF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle C = \angle F$. Доведіть, що: 1) $\triangle BMC = \triangle EFK$; 2) $\triangle ABM = \triangle DEK$.

2057. У гострокутних трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ проведено висоти BD і B_1D_1 відповідно. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, якщо $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$, $CD = C_1D_1$.

2058. Одна зі сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см, а його периметр — 20 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника.

2059. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC провели бісектриси AM і CK . Доведіть, що $AK = CM$.

2060. На рисунку 502 $AB = BC$, $AD = FC$, $\angle ADE = \angle CFE$. Доведіть, що точка E — середина відрізка AC .

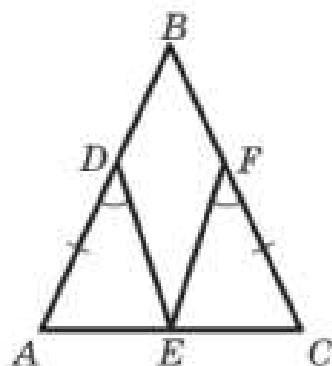


Рис. 502

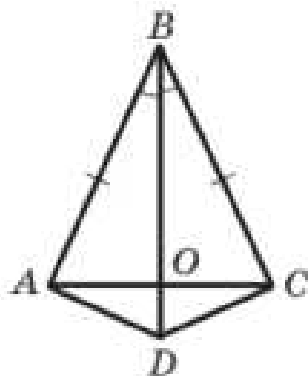


Рис. 503

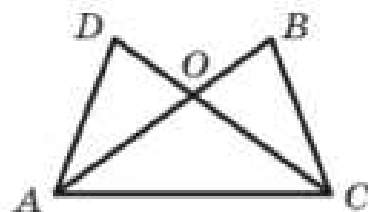


Рис. 504

2061. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC . Доведіть, що пряма BD — серединний перпендикуляр відрізка AC .

2062. На рисунку 503 $AB = BC$, $\angle ABO = \angle CBO$. Доведіть, що $\angle DAO = \angle DCO$.

2063. На рисунку 504 $OA = OC$, $OD = OB$. Доведіть, що $\angle DAC = \angle BCA$.

2064. Точка O — точка перетину серединних перпендикулярів сторін AC і BC трикутника ABC — належить його стороні AB . Доведіть, що: 1) точка O — середина відрізка AB ; 2) $\angle ACB = \angle A + \angle B$.

2065. Медіана трикутника ABC розбиває його на два трикутники, периметри яких рівні. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

2066. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, відрізок BD — медіана. Периметр трикутника ABC дорівнює 50 см, а трикутника ABD — 40 см. Знайдіть довжину медіани BD .

2067. На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено точки F і K відповідно. Доведіть, що коли трикутники AFB і AKB рівні, а сторони AK і BF відповідні, то трикутник ABC рівнобедрений.

2068. На рисунку 505 $AM = CN$, $AB = CD$, $BN = DM$. Доведіть, що $\angle ABN = \angle CDM$.

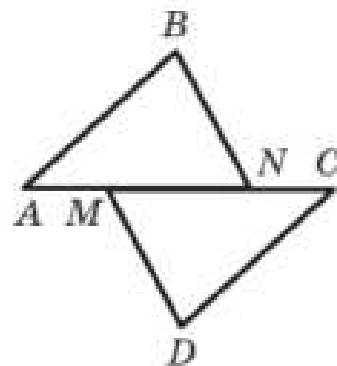


Рис. 505

2069. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ медіани AM і A_1M_1 рівні, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

2070. На сторонах AB і AC трикутника ABC позначили відповідно точки M і K так, що $\angle AMK = \angle ABC$. Доведіть, що $\angle AKM = \angle ACB$.

2071. Доведіть, що бісектриси односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, перпендикулярні.

2072. Пряма, проведена через вершину трикутника паралельно його протилежній стороні, утворює з двома іншими сторонами рівні кути. Доведіть, що даний трикутник рівнобедрений.

2073. Через вершину C трикутника ABC проведено пряму, яка паралельна бісектрисі AM трикутника й перетинає пряму AB у точці K . Знайдіть кут ACK , якщо $\angle BKC = 28^\circ$.

2074. На продовженні бічних сторін AC і BC рівнобедреного трикутника ABC за вершину C позначено точки E і D відповідно так, що $DE \parallel AB$. Доведіть, що трикутник CDE рівнобедрений.

2075. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, у 2 рази менша від цієї основи. Знайдіть кути даного трикутника.

2076. Бісектриси AK і CM трикутника ABC перетинаються в точці O . Відомо, що $\angle BAC = 64^\circ$, $\angle MOK = 132^\circ$. Знайдіть кут ACB .

2077. На стороні AC трикутника ABC позначили точку O так, що $AB = AO$. Відомо, що зовнішній кут трикутника ABC при вершині A дорівнює 160° і $\angle C = 40^\circ$. Доведіть, що $BO = CO$.

2078. Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC , перетинає його сторони AB і BC у точках M і K відповідно так, що $AM = MK$. Відомо, що $\angle B = 65^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Знайдіть кут KAC .

2079. У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. Знайдіть кут між висотою та бісектрисою трикутника, проведеними з вершини C .

2080. Висоти AD і BK рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) перетинаються в точці H , $\angle AHB = 128^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC .

2081. Висоти AD і CM рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) перетинаються в точці H , $\angle AHC = 140^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC .

2082. Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 42° . Знайдіть менший із кутів, утворених бісектрисою прямого кута й гіпотенузою.

2083. На рисунку 506 $AB = BC = CD = DE$, $BF \perp AC$, $DK \perp CE$. Доведіть, що $AF = EK$.

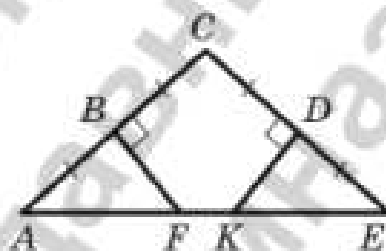


Рис. 506

2084. Висоти BM і CK трикутника ABC перетинаються в точці H , $\angle ABC = 35^\circ$, $\angle ACB = 83^\circ$. Знайдіть кут BHC .

2085. Кут між висотою та бісектрисою прямокутного трикутника, проведеними з вершини його прямого кута, дорівнює 12° . Знайдіть гострі кути даного трикутника.

2086. На гіпотенузі AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC позначили точки M і K так, що $AC = AM$ і $BC = BK$. Знайдіть кут $МК$.

2087. Із вершини прямого кута трикутника опустили висоту на гіпотенузу. Доведіть, що два трикутники, які при цьому утворилися, і даний трикутник мають відповідно рівні гострі кути.

2088. У трикутниках ABC і DEF відомо, що $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, висоти BM і EN рівні. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEF$.

2089. Висоти AM і CK трикутника ABC перетинаються в точці O , $OK = OM$, $\angle BAM = \angle ACK$. Доведіть, що трикутник ABC рівносторонній.

2090. Дві висоти рівнобедреного трикутника при перетині утворюють кут 100° . Знайдіть кути даного трикутника.

2091. У трикутнику ABC кут ACB прямий, відрізок CH — висота даного трикутника, відрізок CD — бісектриса трикутника BCH . Доведіть, що $AC = AD$.

2092. Кут між висотою та бісектрисою рівнобедреного трикутника, проведеними з однієї вершини, дорівнює 15° . Знайдіть кути даного трикутника. Скільки розв'язків має задача?

2093. На продовженнях гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC за точки A і B позначили відповідно точки D і E так, що $AC = AD$, $BC = BE$. Знайдіть кут DCE .

2094. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 60° , а сума гіпотенузи та меншого катета — 27 см. Знайдіть ці сторони трикутника.

2095. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 15^\circ$, $BC = 11$ см. На катеті AC позначили точку M так, що $\angle BMC = 30^\circ$. Знайдіть відрізок AM .

2096. На одній стороні кута B позначили точки D і A , а на другій — точки E і C (рис. 507) так, що $AC \perp BC$, $DE \perp BC$, $CD \perp AB$. Знайдіть відрізок DE , якщо $\angle B = 30^\circ$, $AC = 12$ см.

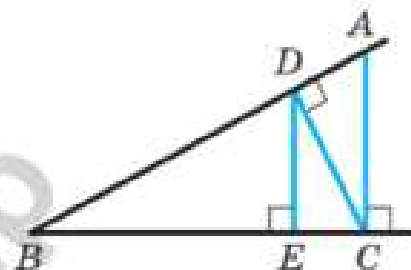


Рис. 507

2097. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать дві медіани рівностороннього трикутника.

Коло та круг

2098. У колі із центром O проведено діаметр AC та хорди AB і BC такі, що $AB = BC$. Знайдіть кут AOB .

2099. Діаметри AB і CD кола із центром O перпендикулярні. На діаметрі AB по різні боки від центра O позначено точки E і F так, що $CE = DF$. Доведіть, що $OE = OF$.

2100. У колі із центром O проведено непаралельні хорди MK і NP , $MK = NP$, точки A і B — середини хорд MK і NP відповідно. Доведіть, що $\angle OAB = \angle OBA$.

2101. У колі проведено хорди AB і BC , кожна з яких дорівнює радіусу кола. Знайдіть кут ABC .

2102. Доведіть, що дотичні до кола, проведені через кінці діаметра, паралельні.

2103. Діаметр AB ділить кожну із хорд MN і PK , відмінних від діаметра, навпіл. Доведіть, що $MN \parallel PK$.

2104. Доведіть, що центр кола рівновіддалений від будь-якої дотичної до кола.

2105. Через точку A до кола із центром O проведено дотичні AM і AK , M і K — точки дотику. Точка перетину відрізка OA з колом є серединою цього відрізка. Знайдіть кут MAK .

2106. Пряма, яка паралельна хорді AC кола, дотикається до цього кола в точці B . Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

2107. Радіус OC кола із центром O ділить навпіл хорду AB , яка не є діаметром. Через точку C проведено дотичну до кола. Доведіть, що ця дотична паралельна хорді AB .

2108. Коло, центр якого належить бісектрисі кута, перетинає кожну з його сторін у двох точках. Доведіть, що відрізки, які відтинає коло на сторонах кута, рівні.

2109. Через точку M проведено дотичні MK і ME до кола із центром в точці O , де K і E — точки дотику, $\angle OMK = 30^\circ$, $MK = 6$ см. Знайдіть довжину хорди KE .

2110. Доведіть, що хорда кола, яка перпендикулярна до іншої хорди цього кола та проходить через її середину, є діаметром даного кола.

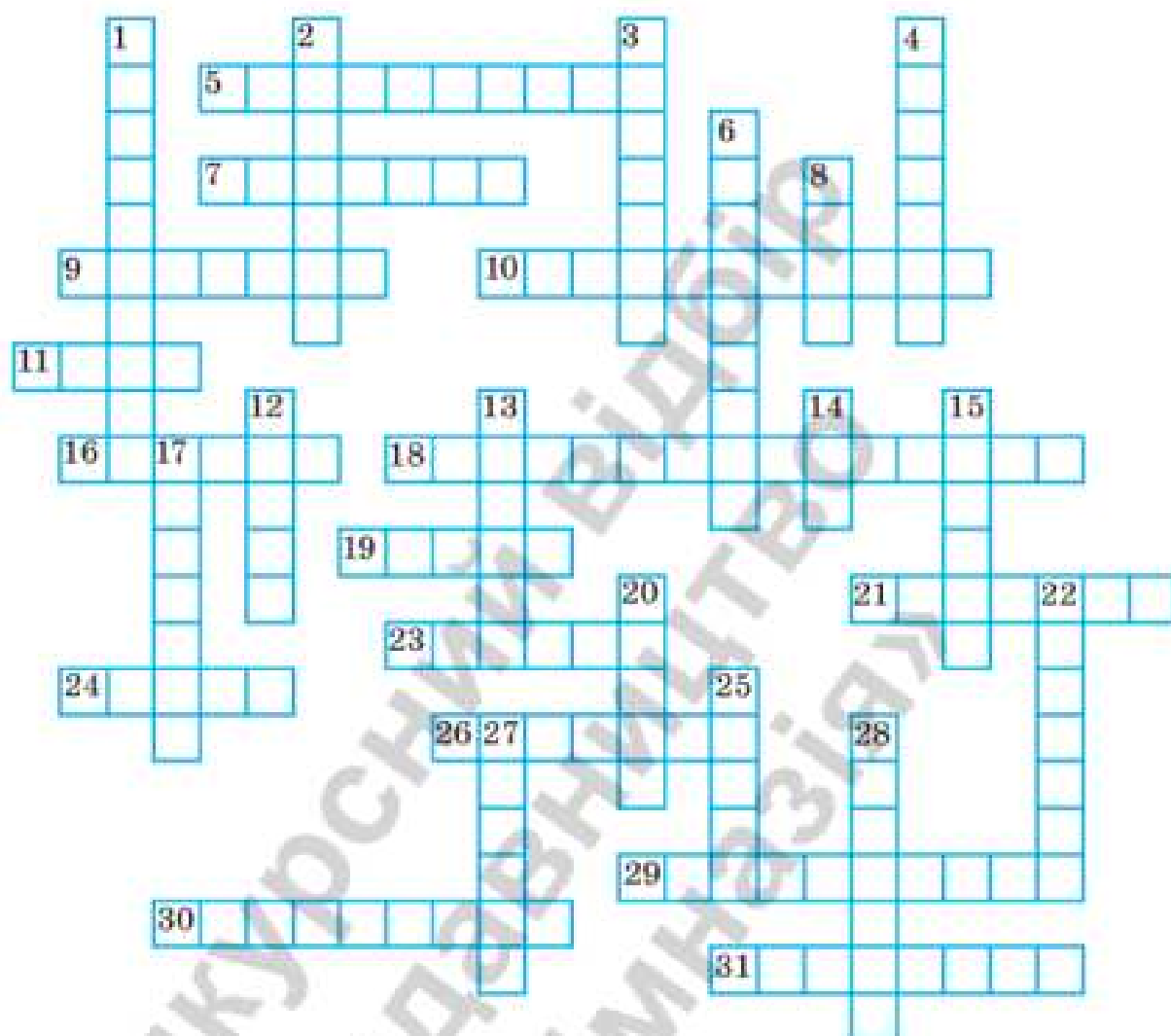
2111. У колі проведено діаметр AB і хорди AC та BD такі, що $AC \parallel BD$. Доведіть, що відрізок CD — діаметр кола.

2112. У рівнобедреному трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, точка O — центр вписаного кола, точки D і E — точки дотику вписаного кола до сторін AC і AB відповідно, $\angle ABC = 48^\circ$. Знайдіть кут DOE .

2113. Коло, вписане в трикутник ABC , дотикається до його сторін AB , BC і AC у точках K , M і E відповідно, $AK = BM = CE$. Доведіть, що трикутник ABC рівносторонній.

2114. Бісектриси AD і CE трикутника ABC перетинаються в точці O_1 , бісектриси EF і DK трикутника DEB перетинаються в точці O_2 . Доведіть, що точки B , O_1 і O_2 лежать на одній прямій.

2115. Розгадайте кросворд.



По горизонталі: 5. Прямі, які не перетинаються. 7. Два кути, одна сторона яких спільна, а дві інші — доповняльні промені. 9. Відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. 10. Два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями сторін другого. 11. Геометричне місце точок, відстань від яких до даної точки не більша за дане число. 16. Відрізок, який сполучає точку кола з його центром. 18. Прямі, при перетині яких утворюються прямі кути. 19. Відрізок, що сполучає дві точки кола. 21. Коло, яке проходить через усі вершини трикутника. 23. Перпендикуляр, проведений з верши-

ни трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону. 24. Точка, рівновіддалена від усіх точок кола. 26. Твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення. 29. Промінь з початком у вершині кута, який ділить кут на два рівних кути. 30. Кут, суміжний із кутом трикутника. 31. Сума довжин усіх сторін трикутника.

По вертикалі: 1. Сторона прямокутного трикутника, протилежна прямому куту. 2. Одна із частин, на які довільна точка розбиває пряму. 3. Хорда, яка проходить через центр кола. 4. Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника. 6. Геометрична фігура. 8. Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки. 12. Кут, градусна міра якого більша за 90° , але менша від 180° . 13. Одиниця виміру кутів. 14. Геометрична фігура. 15. Кут, градусна міра якого дорівнює 90° . 17. Пряма, яка має з колом одну спільну точку. 20. Сторона прямокутного трикутника, прилегла до прямого кута. 22. Твердження, правильність якого приймають без доведення. 25. Давньогрецький математик. 27. Автор книги «Начала». 28. Кут, градусна міра якого менша від 90° .

ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

Продовжимо працювати з комп'ютером. Наведені нижче завдання ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Більшість із них — завдання на побудову геометричних фігур, які ви будете виконувати за допомогою вибраного графічного редактора.

Точки та прямі

1. Ви знаєте, що в геометрії точка розмірів не має. Тому під час графічних побудов доводиться зображати точки умовно, маленькими кружечками (див. рисунки до пункту 35) або окремими пікселями на екрані. Так само пряма, зображена на екрані, матиме товщину (на відміну від прямих, які розглядають у геометрії). Освойте в графічному редакторі інструменти для зображення точок і прямих, навчіться проводити пряму через дві точки.
2. Освойте інструмент, який дає змогу підписувати точки та прямі великими й малими буквами латинського алфавіту.

Відрізок і його довжина

3. Зобразіть дві точки, побудуйте відрізок, кінцями якого є дві задані точки.
4. Знайдіть, яким чином графічний редактор указує довжину відрізка.
5. Побудуйте відрізок заданої довжини.
6. Знайдіть інструмент, за допомогою якого можна пересувати й повертати фігури.
7. Побудуйте два відрізки однакової довжини та сумістіть їх накладанням.

8. Побудуйте креслення, яке ілюструє основну властивість довжини відрізка. Перевірте, чи виконується ця властивість, визначивши довжини побудованих відрізків.
9. Чи є у вибраному вами графічному редакторі засоби для знаходження середини відрізка?

Промінь. Кут

10. Побудуйте кілька різних кутів. Знайдіть інструмент, за допомогою якого можна визначати величину кута й будувати кути заданої величини.
11. Побудуйте креслення, яке ілюструє основну властивість величини кута. Перевірте, чи виконується ця властивість, визначивши величини побудованих кутів.
12. Знайдіть інструмент, який дає змогу зображати дуги. Нарисуйте кілька кутів і позначте рівні кути однаковою кількістю дужок. Зверніть увагу на те, що на рисунках основні й допоміжні лінії мають різну товщину. Знайдіть інструмент, який дає змогу вибирати товщину лінії.
13. Зобразіть суміжні й вертикальні кути.

Перпендикулярні прямі

14. Знайдіть у графічному редакторі інструмент, призначений для побудови перпендикулярних прямих. Побудуйте за допомогою цього інструмента прямий кут.
15. Нарисуйте пряму й точку, яка лежить на даній прямій. Проведіть через цю точку пряму, перпендикулярну до даної.
16. Нарисуйте пряму й точку, яка не лежить на даній прямій. Проведіть через цю точку пряму, перпендикулярну до даної.

Трикутник. Висота, медіана, бісектриса трикутника

17. Щоб зобразити трикутник, зазвичай рисують три відрізки, які являють собою його сторони. Нарисуйте ці три відрізки. Знайдіть інструмент, який дає змогу «склеїти» ці три відрізки й надалі розглядати їх як єдину фігуру — трикутник.
18. Нарисуйте гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники.
19. Знайдіть інструмент, який дає змогу копіювати вже нарисовану фігуру, та інструмент, який дає змогу переміщати й повертати фігури. За допомогою цих інструментів зобразіть кілька рівних трикутників.
20. Побудуйте довільний трикутник і з кожної його вершини проведіть висоту, медіану, бісектрису. Які інструменти ви використовуєте для того, щоб побудова була точною? Виконайте таку побудову для гострокутного, прямокутного й тупокутного трикутників.

Рівнобедрений трикутник

21. Побудуйте рівнобедрений і рівносторонній трикутники. Які можливості графічного редактора спростять побудову?
22. Як можна використати теорему 44.3 для побудови рівнобедреного трикутника?

Ознаки рівності трикутників

23. Побудуйте два трикутники, у яких дві сторони та кут між ними відповідно рівні. Як продемонструвати, що побудовані трикутники рівні?
24. Нарисуйте відрізок і побудуйте його серединний перпендикуляр.
25. Побудуйте два трикутники, у яких сторона та два прилеглих до неї кути відповідно рівні. Як продемонструвати, що побудовані трикутники рівні?

26. Зробіть рисунок, який ілюструє властивість серединного перпендикуляра. Виберіть на серединному перпендикулярі кілька точок. За допомогою якого інструмента можна перевірити, чи є ці точки рівновіддаленими від кінців відрізка?

Паралельні прямі

27. Виконуючи попередні завдання, ви освоїли інструменти, які дають змогу копіювати й переміщати вже побудовані фігури. Як за допомогою цих інструментів побудувати паралельні прямі?
28. Придумайте, як будувати паралельні прямі, використовуючи теорему 47.1.
29. Нарисуйте пряму та точку, яка їй не належить. Проведіть через цю точку пряму, паралельну даній. Збільште отриманий рисунок. Чи може цей рисунок переконливо проілюструвати аксіому паралельності прямих? Чому?
- Цей приклад показує, що всі геометричні побудови, які ми можемо виконати або на папері, або за допомогою комп'ютера, є досить умовними. Тому, навіть зробивши чудовий рисунок, слід покладатися не на нього, а на математичні факти та доведення.
30. Використовуючи теореми 48.1–48.3, побудуйте кілька пар паралельних прямих. Як, використовуючи інструменти графічного редактора, показати, що ці прямі справді виявилися паралельними?
31. Зробіть кілька рисунків, що ілюструють властивості паралельних прямих. За допомогою інструментів графічного редактора покажіть, що ці властивості виконуються.
32. Нарисуйте дві паралельні прямі. Як визначити відстань між ними?

Сума кутів трикутника

33. Нарисуйте довільний трикутник. Побудуйте всі його зовнішні кути. Користуючись засобами графічного редактора, знайдіть величини всіх побудованих кутів.

Прямокутний трикутник

34. Нарисуйте прямокутний трикутник і позначте його прямий кут «куточком» з використанням тонких ліній (див. рис. 380).
35. Побудуйте пари трикутників, що ілюструють ознаки рівності прямокутних трикутників. Позначте на рисунку рівні сторони однаковою кількістю рисочок, а рівні кути — однаковою кількістю дужок.
36. Побудуйте прямокутний трикутник, гострий кут якого дорівнює 30° . Перевірте, чи виконуються для нього твердження теореми 53.1 і ключової задачі 1 пункту 53.

Коло та круг

37. Освойте інструмент для зображення кіл і кругів. Чим відрізняються зображення кола та круга? Який інструмент потрібен, щоб із зображення кола зробити зображення круга?
38. Нарисуйте коло, проведіть його хорду та діаметр. Який елемент зображення кола потрібен, щоб точно провести діаметр?
39. Нарисуйте коло й позначте на ньому точку. Які інструменти треба використати, щоб провести дотичну до кола в цій точці?

Описане та вписане кола трикутника

40. Нарисуйте довільний трикутник. Побудуйте його вписане й описане кола, не користуючись теоретичним матеріалом пункту 56. Тепер побудуйте ці

самі кола, користуючись наслідками з теорем 56.1 і 56.2. Чи вдалося виконати цю побудову швидше та точніше?

Задачі на побудову

41. У задачах на побудову використовують циркуль і лінійку. Якщо ви хочете виконати побудову за допомогою графічного редактора, то які його інструменти можна використати замість циркуля та лінійки?
42. Освойте інструмент, який дає змогу зображати різні геометричні фігури різними кольорами.
43. Чи є у вибраному вами графічному редакторі інструмент, який дає змогу автоматично знаходити переріз нарисованих геометричних фігур?

ПРОЄКТНА РОБОТА

Ця рубрика адресована передусім тим, хто бажає навчитися самотійно здобувати знання, творчо мислити, формувати, висловлювати та обстоювати свою точку зору, висувати гіпотези, знаходити найбільш раціональні та нестандартні рішення.

Першим кроком, який може допомогти в досягненні цих цілей, є участь у проєктній роботі.

Проект — це самотійне дослідження за вибраною темою, яке можна виконувати як індивідуально, так і в групі.

Дамо кілька порад щодо організації роботи над проєктом та оформлення результатів дослідження.

1. Під час вибору теми потрібно враховувати її актуальність, наявність джерел інформації в літературі та інтернет-ресурсів. При цьому дуже важливе ваше бажання проявити себе дослідником у роботі саме над вибраною темою.

2. Роботу починають зі складання попереднього плану, у якому викладають задум та етапи реалізації задуманого. Після ознайомлення з основними джерелами інформації складають остаточний план за допомогою керівника проєкту.

3. Важливо чітко сформулювати цілі дослідження. Їх можна записати, наприклад, у такий спосіб: вивчити, описати, проаналізувати, довести, порівняти тощо.

4. Роботу завершують підбиттям підсумків дослідження, роблять висновки, накреслюють перспективи подальшого вивчення теми.

5. Приблизний обсяг роботи — 10–15 сторінок. Додатково можна навести ілюстративний матеріал.

6. Робота може бути оформлена у вигляді реферату, доповіді, комп'ютерної презентації.

Нижче наведено рекомендований список тем, які можна вибрати для проектної роботи.

1. Арифметика й алгебра в Стародавньому світі
2. Ігри та стратегії
3. Математичні софізми
4. Математичні фокуси
5. Аліквотні дроби
6. Системи числення
7. Порівняння за модулем
8. Ознаки подільності
9. Таємниці простих чисел
10. Що сьогодні вивчає алгебра? Новітні галузі алгебри
11. Здобутки українських учених ХХ століття в новітніх галузях алгебри
12. Математичні основи обчислювальної техніки
13. Що таке обчислювальна математика
14. Роль математики в розвитку авіації та космонавтики
15. Українські вчені — засновники вітчизняної кібернетики
16. Геометрія довкола нас
17. Ножиці в руках геометра / геометрині
18. Геометрія та мистецтво
19. Евклід і його визначна книга «Начала»
20. Геометрія — одна з найдавніших наук
21. Три знамениті задачі давнини — трисекція кута, квадратура круга, подвоєння куба
22. Одна задача — два розв'язання
23. Метод ГМТ у задачах на побудову
24. Побудови на місцевості за допомогою спеціальних приладів та інструментів
25. Виникнення геометрії як науки та основні етапи її розвитку

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

§ 4. Статистичні ймовірності (продовження)

1119. 13 км. 1121. $a = 3$. 1123. Генеральною сукупністю є множина всіх студентів і студенток цього університету. 1124. Генеральною сукупністю є множина всіх жителів і жительок мікрорайону. 1125. 20 осіб; 380 осіб. 1126. 10 деталей; 10 000 деталей. 1127. 100. Генеральною сукупністю є всі українські сім'ї. 1128. 20. Генеральною сукупністю є всі семикласники та семикласниці цієї школи. 1131. 1) Ні. В опитуванні взяла участь тільки одна вікова категорія населення. 2) Так. Численна вибірка семикласників і семикласниць, яка представляє всі регіони країни, сформована випадковим чином. 3) Ні. Жителі та жительки тільки двох великих міст не можуть формувати репрезентативну вибірку. Зокрема, у ній не представлені жителі та жительки сіл. 4) Ні. В опитуванні не брали участь юнаки. 5) Ні. Більшість зір у Всесвіті неможливо побачити неозброєним оком — вони надто тьмяні для спостережень із Землі. 1132. 1) Ні. Власники садових ділянок часто бувають на природі. 2) Так. Вибір семикласників і семикласниць для опитування здійснено випадковим чином з усіх регіонів країни. 3) Ні. 4) Ні. Стаціонарними телефонами в наш час переважно користуються жителі та жительки старшої вікової категорії. 5) Ні. У Національній бібліотеці України представлено переважно шкільні підручники, що видаються в Україні. 1133. 200 осіб. *Вказівка.* Буде помилковим вважати, що в даному дослідженні вибірка складається з 5 осіб, адже комісія детально вивчила всіх претендентів. Те, що комісія відібрала 5 найбільш кваліфікованих експертів, стосується за-

гального висновку, а не вибірки. У цьому дослідженні вибірка збігається зі всією генеральною сукупністю і складається з 200 осіб. 1138. З означення модуля випливає, що $|x| \geq x$, тому $|x| - x \geq 0$. Разом з тим $2x - x^2 - 2 = -x^2 + 2x - 1 - 1 = -(x - 1)^2 - 1 < 0$. 1154. 8 кидків. 1163. 1) 5; 2) 3,5. 1164. 2) $(x^2 - 3y - 4)(x^2 - 3y + 4)$.

§ 5. Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості

1177. Рис. 508. 1179. 1 точка, або 4 точки, або 6 точок. 1180. Найменша можлива кількість точок перетину — 1, найбільша — 10. 1181. Рис. 509. 1182. 12 точок. 1183. Рис. 510. 1184. 3) x — будь-яке невід'ємне число; 4) x — будь-яке недодатне число. 1186. 60 кг, 20 кг. 1209. 8 см або 56 см. 1211. 1) Усі точки відрізка EF ; 2) точки A і B (рис. 511); 3) таких точок не існує.

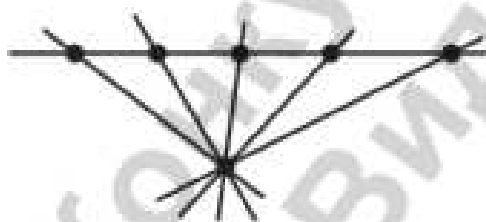


Рис. 508

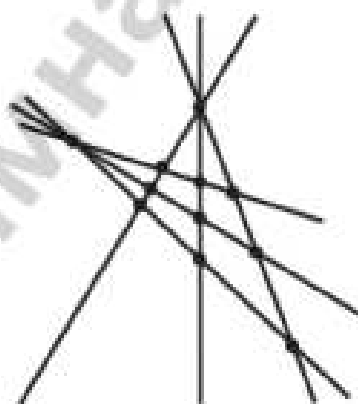


Рис. 509

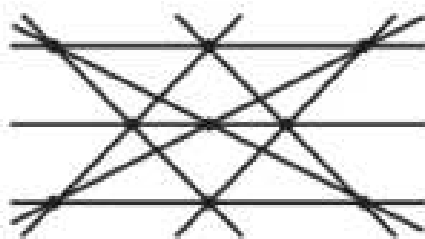


Рис. 510



Рис. 511

1212. Таких точок дві. Одна з них є такою внутрішньою точкою C відрізка AB , що $AC : BC = 1 : 2$, а друга — така, що точка A — середина відрізка BC .
 1213. 4 см. 1215. 1) 3,8; 2) коренів немає. 1217. 600 г, 400 г. 1220. *Вказівка.* Скористайтесь рівністю: 1) $13 - 2 \cdot 5 = 3$; 2) $3 \cdot 5 - 13 = 2$; 3) $2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 1$. 1221. *Вказівка.* Скористайтесь рівністю: 1) $2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 = 8$; 2) $3 \cdot 11 - 4 \cdot 7 = 5$. 1245. 60° . 1246. 108° . 1249. 68° . 1250. 153° . 1251. 1) 6° . 2) $0,5^\circ$. 1253. 50° або 110° . 1254. 77° або 163° . 1258. *Вказівка.* Відкладіть від довільного променя даний кут послідовно 14 разів. Скористайтесь тим, що утворений таким чином кут на 2° більший за розгорнутий кут. 1259. 1) *Вказівка.* Скористайтесь тим, що $19^\circ \cdot 19 = 361^\circ$. 1261. 10 км. 1263. 1) Західний або східний; 2) північно-західний або північно-східний. 1285. 90° . 1286. 180° . 1287. 75° . 1288. 108° , 72° . 1289. 136° , 44° . 1294. 90 км. 1310. 1) 124° ; 2) 98° . 1311. 126° . 1315. 70° , 160° . 1316. 130° . 1317. 1) *Вказівка.* $90^\circ = 17^\circ \cdot 5 + 5^\circ$. 1320. 8 днів.

§ 6. Трикутники

1344. 48 см. 1345. 13 см. 1347. 1) 5; 2) коренів немає; 3) y — будь-яке число. 1383. 3 см. 1384. 10 см. 1386. 2) *Вказівка.* Доведіть, що $\angle AOM = \angle BOK$. Кут AOB — розгорнутий. Тоді $\angle AOM + \angle MOB = 180^\circ$. Звідси $\angle MOB + \angle BOK = 180^\circ$. 1388. 1) -45 ; 2) 24. 1390. 15 деталей, 11 деталей. 1421. 4 см або 7 см. 1422. 4 см і 6 см або 5 см і 5 см. 1426. 26 см або 14 см. 1428. 1) $-\frac{29}{25}$; 2) $\frac{37}{6}$. 1429. 28 банок. 1439. 6 см. 1444. *Вказівка.* Скориставшись тим, що коли бісектриса трикутника є його висотою, то трикутник — рівнобедрений, доведіть, що трикутники MAD і KBD —

рівнобедрені. 1445. 8 см. 1446. $AB : AC = 1 : 2$. 1448. 2 см, 3 см, 4 см. *Вказівка.* Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC (рис. 512), відрізок CE — його медіана, $BD \perp CE$. Доведіть, що $\triangle CBE$ — рівнобедрений ($BC = BE$). Тоді $AB = 2BC$ і можуть мати місце такі випадки: $AB - BC = 1$ см або $AB - BC = 2$ см, тобто $BC = 1$ см або $BC = 2$ см.

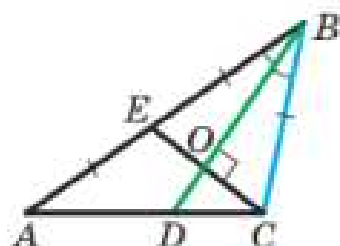


Рис. 512

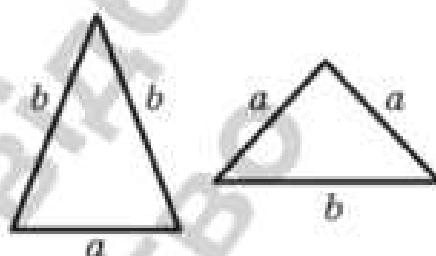


Рис. 513

1449. 2 см. *Вказівка.* Доведіть, що трикутники KMC і KDA — рівнобедрені. 1451. 1) 3; 2) 9. 1452. 14 км/год, 42 км. 1468. Ні. *Вказівка.* Розгляньте трикутники, зображені на рисунку 513. 1469. *Вказівка.* Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — дані трикутники, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, відрізки AM і A_1M_1 — медіани трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно. На продовженнях відрізків AM і A_1M_1 за точки M і M_1 відкладіть відповідно відрізки MD і M_1D_1 такі, що $MD = AM$ і $M_1D_1 = A_1M_1$. Доведіть, що $AC = BD$ і $A_1C_1 = B_1D_1$. Далі доведіть рівність трикутників ABD і $A_1B_1D_1$, MBD і $M_1B_1D_1$ і, нарешті, ABC і $A_1B_1C_1$. 1471. 1) $0; \frac{3}{8}$; 2) $0; 0,4$.

1472. 20 кг, 80 кг. 1486. *Вказівка.* Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — дані трикутники, відрізки AM і A_1M_1 — відповідно їхні медіани, $AM = A_1M_1$, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$, $\angle CAM = \angle C_1A_1M_1$. На продовженнях відрізків AM та A_1M_1 за точки M і M_1 відкладіть відповідно

відрізки MD і M_1D_1 такі, що $MD = AM$ і $M_1D_1 = A_1M_1$. Доведіть, що $AC = BD$ і $A_1C_1 = B_1D_1$. Далі доведіть рівність трикутників ABD і $A_1B_1D_1$, звідки легко отримати рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. 1489. 40 л, 10 л.

§ 7. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

1498. Безліч. 1504. *Вказівка*. Припустимо, що прямі a і b перетинаються. Виберемо довільну точку, яка належить прямій a , відмінну від точки перетину a і b . Через вибрану точку можна провести пряму, яка перетинає пряму a та паралельна прямій b , що суперечить умові. 1507. 7. 1508. 8 км/год. 1532. Ні. 1535. *Вказівка*. Доведіть, що $\triangle BKM$ рівнобедрений. 1536. *Вказівка*. Доведіть, що $BF \parallel AC$ і $BD \parallel AC$, та скористайтесь аксіомою паралельності прямих. 1538. 1) 0; $-0,2$; 2) 0; 3,6. 1561. 40° . 1566. 40° , 70° , 70° . 1567. 121° . 1571. *Вказівка*. Проведіть через точку C пряму, яка паралельна AB . 1574. *Вказівка*. Доведіть, що трикутники AMO і CKO — рівнобедрені. 1578. $k = -1$. 1579. 500 кг. 1622. 25° , 55° , 100° . 1623. 35° , 35° , 110° . 1625. 140° . 1628. *Вказівка*. Знайдіть кути трикутника ABC і доведіть, що трикутники AMB і MAC — рівнобедрені. 1629. 36° , 72° , 72° . 1630. *Вказівка*. Застосуйте метод доведення від супротивного. 1632. Гострокутний. *Вказівка*. Розгляньте по черзі кожний кут трикутника. Оскільки сума двох інших кутів більша за 90° , то розглядуваний кут менший від 90° . Оскільки всі кути виявляються меншими від 90° , то трикутник — гострокутний. 1633. Ні. 1635. 36° , 72° , 72° або 90° , 45° , 45° . 1636. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. 1637. $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$, $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$, $\left(\frac{180}{7}\right)^\circ$. 1638. 90° , 40° , 50° . *Вказів-*

ка. Розгляньте трикутник DAK , де точка K — середина AB . 1649. 37 см. 1651. 3 см. 1652. 12 см. 1654. Так. 1655. Вказівка. У трикутнику DAC кут DAC — тупий. Отже, $DC > AC$. 1658. Вказівка. Візьміть на прямій m довільну точку X і порівняйте суму $AX + BX$ із довжиною відрізка AB . 1659. 3 см. 1660. Вказівка. На продовженні медіани AM за точку M відкладіть відрізок MD , який дорівнює цій медіані, та розгляньте $\triangle ABD$. 1663. 2) 9. 1665. 1) У будь-якій точці коридору між входами в палати (включаючи точки біля входів у палати); 2) біля входу в палату, розміщену посередині; 3) у будь-якій точці коридору між входами в другу і третю палати (включаючи точки біля входів у палати). 1666. Більша за 1 м і не більша за 5 м. 1696. Вказівка. Доведіть рівність трикутників AKH і CMH . 1697. Вказівка. Доведіть, що $\triangle MEN = \triangle NFM$. Звідси випливає, що $MK = NK$. Крім того, $KE = FM = NE$. Отже, $MK = MN$. 1698. Ні. 1700. 1) $-0,6$; 2) $-\frac{1}{11}$. 1714. 30° , 1 см. 1715. 30° . 1716. 9 см. 1717. 15 см. 1720. 8 см. 1721. 6 см. Вказівка. Доведіть, що трикутник ADB — рівнобедрений. 1722. 1) $-\frac{5}{8}$; 2) коренем рівняння є будь-яке число. 1724. Вказівка. Додайте ліві й праві частини даних рівностей.

§ 8. Коло та круг

1744. 6 см. 1750. 1,5 см. 1751. 2,5 см. 1752. Коло даного радіуса із центром у даній точці. 1753. Серединний перпендикуляр відрізка, який сполучає дані точки. 1754. Дві прямі, які складаються з бісектрис чотирьох кутів, утворених при перетині даних прямих. 1755. Усі точки серединного перпендикуляра

даної основи, крім точки перетину цього перпендикуляра з основою. 1756. Пряма, що є серединним перпендикуляром відрізка, який є перпендикулярним до даних прямих і кінці якого належать даним прямим. 1757. Пара паралельних прямих, кожна з яких віддалена від даної прямої на дану відстань. 1758. Вказівка. Сполучіть точку M і центр O кола, розгляньте трикутники AOM і BOM . 1759. Усі точки півплощини, якій належить точка B і межею якої є серединний перпендикуляр відрізка AB , за винятком межі цієї півплощини. 1760. Усі точки площини, що не належать колу із центром A і радіусом AB . 1761. 2) $\frac{5}{8}$. 1763. 3. 1781. 1) 90° ; 2) 120° . 1782. 12 см. 1784. 40° . 1785. 120° . 1790. Усі точки прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даної прямої, крім даної точки. 1791. Усі точки бісектриси кута, за винятком вершини кута. 1792. Усі точки площини, за винятком даної прямої. 1793. Вказівка. Розглянувши трикутник OAK , доведіть, що $OK = 2AK$. 1794. Вказівка. Скористайтесь властивістю дотичних, проведених до кола через одну точку. 1796. -39 . 1826. 24 см, 24 см, 20 см. 1827. 20 см, 14 см, 18 см. 1728. 50° , 55° , 75° . 1831. Вказівка. Скористайтесь властивістю дотичних, проведених до кола через одну точку. 1832. а. 1833. 16 см. Вказівка. Доведіть, що сума периметрів утворених трикутників дорівнює периметру даного трикутника. 1834. 0,5 см. Вказівка. Нехай M_1 і M_2 — точки дотику кіл, вписаних відповідно в трикутники ABD і DBC . Для відрізків DM_1 і DM_2 скористайтесь результатом задачі 1831. 1835. Вказівка. Скористайтесь тим, що бісектриси трикутника, зокрема трикутника AMC , перетинаються в одній точці. 1836. Вказівка. Позначте на різних сторонах кута

точки M і N . Проведіть бісектриси кутів BMN і BNM . Далі позначте на різних сторонах кута точки E та F . Проведіть бісектриси кутів BEF і BFE . 1837. 36° , 36° , 108° . Вказівка. Скористайтеся тим, що трикутники FAO і BOA — рівнобедрені. 1840. 9 задач. 1853. $22,5^\circ$. 1855. 2π см, 20π см. 1856. $\frac{140\pi}{9}$ см. 1858. $(0; -6)$. 1860. -2 . 1861. 1) 16. Вказівка. $1,66 \cdot 4,68 = 1,66 \cdot 2,34 \cdot 2$; 2) 0,16. 1892. 1) Вказівка. Побудуйте прямокутний трикутник, у якому гіпотенуза дорівнює даній бісектрисі, а гострий кут дорівнює половині даного кута. 1894. Вказівка. Побудуйте прямокутний трикутник, у якому один із катетів дорівнює половині даної основи, а другий — радіусу кола. 1897. Вказівка. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом, який дорівнює даній висоті, і протилежним гострим кутом, що дорівнює даному. 1898. Вказівка. Побудуйте прямокутний трикутник, у якому гіпотенуза дорівнює даній стороні, а катет — даній висоті. 1906. Вказівка. Побудуйте прямокутний трикутник, один із катетів якого дорівнює різниці катета й радіуса, а другий — радіусу. Тоді кут, протилежний другому катету, дорівнює половині гострого кута шуканого трикутника. 1910. Вказівка. Побудуйте коло, що проходить через три задані точки. 1911. Побудуйте кут, який дорівнює 60° . Далі скористайтеся рівністю $6^\circ = 60^\circ - 54^\circ$. 1912. $b = 11$. 1925. Вказівка. Шукана точка належить ГМТ, віддалених на відстань AB від прямої n . Указане ГМТ — пара прямих, паралельних прямій n . Кожна з точок перетину цих прямих із прямою m задовольняє умову. Задача має два розв'язки. 1932. Вказівка. Проведіть відрізок, перпендикулярний до двох даних паралельних прямих, кінці A і B якого належать цим прямим. Тоді центр шуканого кола належить двом

ГМТ: першому — рівновіддалених від точок A і B і другому — віддалених від даної в умові точки на відстань $\frac{1}{2}AB$. 1933. *Вказівка*. Геометричним місцем центрів кіл, що дотикаються до даної прямої в даній точці B , є пряма, перпендикулярна до даної і така, що проходить через цю точку (дана точка B не належить ГМТ). Геометричним місцем центрів кіл, що проходять через точки A і B , є серединний перпендикуляр відрізка AB . 1939. *Вказівка*. Побудуйте прямокутний трикутник BCD , у якому катет BC дорівнює даному катету, а катет DC — сумі гіпотенузи та другого катета. Тоді вершина A шуканого трикутника ABC належить серединному перпендикуляру відрізка BD . 1940. *Вказівка*. Побудуйте трикутник ADB , у якому $\angle D = 45^\circ$, сторона DB дорівнює сумі даних катетів, сторона AB — даній гіпотенузі. 1941. *Вказівка*. Побудуйте трикутник ADB , у якому $\angle D = 135^\circ$, сторона DB дорівнює різниці даних катетів, сторона AB — даній гіпотенузі. 1942. *Вказівка*. Побудуйте трикутник DBC , у якому $\angle C = 90^\circ$, катет CB дорівнює даному катету, катет CD — різниці гіпотенузи й другого катета. Тоді шукана вершина A лежить на серединному перпендикулярі відрізка DB . 1943. *Вказівка*. Побудуйте трикутник ADC , у якому сторона AC дорівнює даній, сторона DC — сумі двох інших сторін, кут DCA — даному куту. 1944. *Вказівка*. Побудуйте трикутник ADC за даною стороною AC , даним кутом C і стороною DC , що дорівнює даній різниці сторін. Вершина B шуканого трикутника ABC лежить на серединному перпендикулярі відрізка AD . Описана побудова застосовна до випадку, коли заданий кут C прилягає до більшої з двох невідомих сторін. 1945. *Вказівка*. Побудуйте трикутник ADC , у якому $\angle D = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$,

де β — даний кут, сторона AC дорівнює даній стороні, сторона AD — даній різниці сторін. Тоді шукана вершина B лежить на серединному перпендикулярі відрізка DC . 1946. *Вказівка*. Побудуйте трикутник ADC , у якому $\angle D = \frac{\beta}{2}$, де β — даний кут, сторона AC

дорівнює даній стороні, сторона AD — даній сумі сторін. Тоді шукана вершина B лежить на серединному перпендикулярі відрізка DC . 1948. *Вказівка*. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом, який дорівнює висоті, і протилежним кутом, який дорівнює даному. Гіпотенуза цього трикутника — одна зі сторін шуканого. Тепер задачу зведено до задачі 1943. 1949. *Вказівка*. Побудуйте прямокутний трикутник BDM , у якому гіпотенуза BM дорівнює даній медіані, катет BD — даній висоті. Тоді центр описаного кола шуканого трикутника лежить на прямій, перпендикулярній до відрізка DM і яка проходить через точку M . 1950. *Вказівка*. Побудуйте трикутник ABD , у якому сторони AB і AD дорівнюють двом даним сторонам, а сторона BD у 2 рази більша за дану медіану. 1951. *Вказівка*. Побудуйте трикутник ADC , у якому AC — дана сторона, сторона AD у 2 рази більша за дану медіану, а висота, проведена з вершини D , дорівнює даній висоті. Покажіть, що сторона DC дорівнює одній з невідомих сторін шуканого трикутника. 1953. (1; -1).

§ 9. Розгортки поверхонь многогранників

1967. 1) Точки B і O ; 2) точки C і D . 1968. 1) Точка T ; 2) точки B і C . 1971. 3. 1972. 1) 3; 2) $\frac{7}{4}$.

Вправи для повторення курсу математики 7 класу

1986. Не існують. *Вказівка*. Знайдіть суму даних многочленів. 1988. 1) $1\frac{6}{7}$; 2) $\frac{6}{11}$; 3) $-0,2$; 4) 5.

1989. 1) $-0,4$; 2) 4; 3) розв'язків немає; 4) коренем рівняння є будь-яке число. 1990. -4 . 1991. 1) 20; 2) 5,93. 1992. 1) 2,7; 2) 0,4; 3) 23; 4) 51,2. 1995. -4 . 1996. $\frac{2}{3}$. 1998. При $a = c$ або $b = d$. 2000. 1) 0,5; 2) 0. 2001. 1) 1; 2) 4. 2009. 1) 2; 2) 0,5; 3) $-\frac{1}{13}$. 2013. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$. 2029. $-\frac{37}{7}$. 2035. 1) $(-2; 1)$; 2) $(3; -2)$; 3) $(1; -1)$; 4) $(4; 2)$. 2036. 32 учні та учениці. 2037. 15 м/с, 10 м/с. 2038. 64 %. 2039. 120 г, 60 г. 2040. 8 л, 2 л. 2041. 30 га, 40 га. 2042. 20 га, 25 га. 2043. 12 кг. 2044. 29. 2045. 91. Вказівка. Якщо дане число дорівнює x , то отримане число дорівнює $10x + 1000 + 1 = 10x + 1001$ або $21x$. 2046. 16; 12. 2047. $\frac{4a}{5}$. 2050. 60° або 180° . Два розв'язки. 2052. 20° . 2054. 42 см. 2066. 15 см. 2075. 45° , 45° , 90° . 2078. 35° . 2079. 10° . 2080. 52° , 52° , 76° . 2081. 70° , 70° , 40° . 2085. 33° , 57° . 2086. 45° . 2090. 50° , 50° , 80° або 80° , 80° , 20° . 2092. 70° , 70° , 40° або 50° , 50° , 80° . 2093. 135° . 2095. 22 см. 2096. 9 см. 2097. 60° . 2101. 120° . 2105. 60° . 2109. 6 см. 2111. Вказівка. Нехай точка O — центр кола. Доведіть, що $\angle COD = 180^\circ$. 2112. 114° . 2114. Вказівка. Доведіть, що точки O_1 і O_2 належать бісектрисі кута B .

**ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ»
В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ**

Номер завдання	Номер задачі										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
8	В	Г	А	В	В	В	Б	Б	В	Б	В
9	Б	В	Г	Г	Б	В	Б	Б	А	В	Б
10	Г	В	В	А	А	Б	В	В	Б	В	А
11	В	Г	А	В	Б	А	В	В	Г	Б	Г

Конкурсний вісник
Видавництво
«Гімназія»

ПОХОДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ТЕРМІНІВ

Аксіома	від грец. <i>axios</i> — гідний визнання
Бісектриса	від лат. <i>bis</i> — двічі та <i>sectrix</i> — січна
Геометрія	від грец. <i>geo</i> — земля та <i>metreo</i> — вимірювати
Гіпотенуза	від грец. <i>gipotenusa</i> — та, що стягує
Градус	від лат. <i>gradus</i> — крок, ступінь
Діагональ	від грец. <i>dia</i> — через і <i>gonium</i> — кут
Діаметр	від грец. <i>diametros</i> — поперечник
Катет	від грец. <i>katetos</i> — прямовисний, перпендикулярний
Квадрат	від лат. <i>quadratus</i> — чотирикутний (від <i>quattuor</i> — чотири)
Куб	від грец. <i>kybos</i> — гральна кісточка
Математика	від грец. <i>mathematike</i> (від <i>mathema</i> — знання, наука)
Медіана	від лат. <i>medius</i> — середній
Метр	від франц. <i>mètre</i> — палка для вимірювання або грец. <i>metron</i> — міра
Паралельність	від грец. <i>parallelos</i> — той, хто йде поруч
Периметр	від грец. <i>peri</i> — навколо та <i>metreo</i> — вимірювати
Перпендикуляр	від лат. <i>perpendicularis</i> — прямовисний
Планіметрія	від грец. <i>planum</i> — площина
Пропорція	від лат. <i>proportio</i> — співвідношення
Радіус	від лат. <i>radius</i> — спиця в колесі, промінь
Теорема	від грец. <i>theoreo</i> — розглядаю, обдумую
Транспортер	від лат. <i>transportaro</i> — переносити, перекладати
Фігура	від лат. <i>figura</i> — зовнішній вигляд, образ
Формула	від лат. <i>formula</i> — форма, правило
Хорда	від грец. <i>chorde</i> — струна, тятива
Центр	від лат. <i>centrum</i> — вістря ніжки циркуля
Циркуль	від лат. <i>circulus</i> — коло

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аксіома 90

- паралельності прямих 167
- про існування трикутника, рівного даному 105

Аналіз задачі на побудову 255

Бісектриса кута 67

- трикутника 108

Бічна сторона рівнобедреного трикутника 126

Величина кута 68

Вершина кута 65

- рівнобедреного трикутника 126
- трикутника 103

Відносна частота випадкової події 30

Вибірка 21

- репрезентативна 22

Випадкова подія 29

Висновок теореми 146

Висота трикутника 107

Відрізки паралельні 165

- перпендикулярні 83
- рівні 54

Відрізок 54

- одиничний 55

Відстань від точки до прямої 84

- між паралельними прямими 182
- між точками 56

Властивість вертикальних кутів 77

- відповідних кутів 172
- дотичної 233
- односторонніх кутів 172
- різносторонніх кутів 171
- суміжних кутів 77

Властивості зовнішнього кута трикутника 189

- кола 232
- паралельних прямих 180, 181
- прямокутного трикутника 211
- рівнобедреного трикутника 126

Генеральна сукупність 21

Геометричне місце точок 222

Геометрія 47

Гіпотенуза 203

Гістограма 3

Градус 68

Градусна міра кута 68

- — дуги кола 250

Діаграма кругова 3

- стовпчаста 3

Діаметр кола 225

- круга 226

Довжина відрізка 55

- дуги кола 252
- кола 251

Дотична до кола 233

- — круга 233

Дуга кола 250

Ймовірність випадкової події 29

— статистична 32

Катет 203

Кінці відрізка 54

Коло 225

—, вписане в трикутник 241

—, описане навколо трикутника 240

Круг 226

Кут 65

— гострий 69

— між прямими 83

— одиничний 68

— при вершині рівнобедреного трикутника 126

— при основі рівнобедреного трикутника 126

— прямий 69

— розгорнутий 66

— трикутника 103

— трикутника зовнішній 189

— тупий 69

— центральний 250

Кути вертикальні 77

— відповідні 171

— односторонні 171

— рівні 67

— різносторонні 171

— суміжні 77

Медіана трикутника 108

Межа півплощини 66

Метод від супротивного 147

— геометричних місць точок 266

Нерівність трикутника 198

Одиниця довжини 55

Ознака дотичної до кола 234

Ознаки паралельності прямих 165, 171

— рівнобедреного трикутника 134, 135, 136

— рівності прямокутних трикутників 204, 205

— рівності трикутників 114, 116, 140

Означення 49

Описане коло трикутника 240

Основа перпендикуляра 84

— рівнобедреного трикутника 126

Основна властивість 90

— — величини кута 70

— — відкладання кутів 67

— — довжини відрізка 56

— — прямої 48

Периметр трикутника 104

Перпендикуляр 84

Півплощина 66

Півпряма 64

Планіметрія 47

Поверхня куба 280

— піраміди 283

— прямокутного паралелепіпеда 279

- Постулат 94
Похила 84
Початок променя 64
Прийом додаткової побудови 147-148
Промені доповняльні 64
— паралельні 165
— перпендикулярні 84
Промінь 64
Пряма 48
Прямі паралельні 165
— перпендикулярні 83
—, що перетинаються 49
Радіус кола 225
— круга 226
Розгортка куба 281
— правильної трикутної піраміди 285
— правильної чотирикутної піраміди 284
— прямокутного паралелепіпеда 281
Рулетка 55
Румб 69
Сегмент круговий 226
Сектор круговий 226
Секунда 69
Середина відрізка 57
Серединний перпендикуляр відрізка 115
Січна 171
Статистика 20
Сторони кута 65
— трикутника 103
Сума відрізків 56
— кутів 70
— кутів трикутника 188
Теорема 50
— -властивість 146
— -наслідок 146
— обернена 147
— -ознака 146
— пряма 147
Теорема взаємно обернені 147
Точка 48
— дотику 233
Трикутник 103
—, вписаний у коло 240
— гострокутний 104
—, описаний навколо кола 241
— прямокутний 104
— рівнобедрений 126
— рівносторонній 126
— різносторонній 127
— тупокутний 104
Трикутники рівні 104
Умова теореми 146
Фігури рівні 107
Хорда кола 225
— круга 226
Центр кола 225
— —, вписаного в трикутник 242
— —, описаного навколо трикутника 241
— круга 226

ЗМІСТ

§ 4. Статистичні ймовірності (продовження)	3
31. Стовпчасті та кругові діаграми. Графіки	3
32. Початкові відомості про статистику	20
33. Частота та ймовірність випадкової події	28
<i>Головне в параграфі 4</i>	44

Розділ 2. ГЕОМЕТРІЯ

§ 5. Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості	45
34. Що вивчає геометрія?	45
35. Точки та прямі	48
36. Відрізок і його довжина	54
37. Промінь. Кут. Вимірювання кутів	64
38. Суміжні та вертикальні кути	77
39. Перпендикулярні прямі	83
40. Аксиоми	90
• З історії геометрії	92
<i>Завдання № 8 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	98
<i>Головне в параграфі 5</i>	100

§ 6. Трикутники	103
41. Рівні трикутники. Висота, медіана, бісектриса трикутника	103
42. Перша та друга ознаки рівності трикутників	113
43. Рівнобедрений трикутник та його властивості	126
44. Ознаки рівнобедреного трикутника	134
45. Третя ознака рівності трикутників	140
46. Теореми	146
• Українська геометрична школа	151
<i>Завдання № 9 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	160
<i>Головне в параграфі 6</i>	162

§ 7. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника	165
47. Паралельні прямі	165
48. Ознаки паралельності двох прямих	171
• П'ятий постулат Евкліда	178

49. Властивості паралельних прямих	180
50. Сума кутів трикутника	188
51. Нерівності, пов'язані з елементами трикутника	197
52. Прямокутний трикутник	203
53. Властивості прямокутного трикутника	211
<i>Завдання № 10 «Перевірте себе» в тестовій формі ...</i>	<i>215</i>
<i>Головне в параграфі 7</i>	<i>218</i>
§ 8. Коло та круг	221
54. Геометричне місце точок. Коло та круг	221
55. Деякі властивості кола. Дотична до кола	232
56. Описане та вписане кола трикутника	240
57. Центральний кут. Довжина кола. Довжина дуги кола	250
58. Задачі на побудову	254
59. Метод геометричних місць точок у задачах на побудову	266
• З історії геометричних побудов	273
<i>Завдання № 11 «Перевірте себе» в тестовій формі ...</i>	<i>275</i>
<i>Головне в параграфі 8</i>	<i>276</i>
§ 9. Розгортки поверхонь многогранників	279
60. Розгортки поверхонь многогранників	279
Вправи для повторення курсу математики 7 класу	291
Дружимо з комп'ютером	310
Проектна робота	316
<i>Відповіді та вказівки до вправ</i>	<i>318</i>
<i>Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	<i>329</i>
<i>Походження математичних термінів</i>	<i>330</i>
<i>Предметний покажчик</i>	<i>331</i>