Аркадій Мерзляк, Михайло Якір

«Математика»

підручник інтегрованого курсу для 7 класу
закладів загальної середньої освіти
(у 2-х частинах)
Частина 1

Видавництво «Гімназія»

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.).

Аркадій Мерзляк
Михайло Якір

МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА 1

7

ЕЛЕКТРОННИЙ ВАРІАНТ ПІДРУЧНИКА

ГІМНАЗІЯ

Аркадій Мерзляк
Михайло Якір

МАТЕМАТИКА

Підручник інтегрованого курсу
для 7 класу закладів загальної
середньої освіти
(у 2-х частинах)

ЧАСТИНА 1

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

Харків
«Гімназія»
2024

УДК 373.167.1:51
М52

Підручник відповідає модельній навчальній програмі «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Василишин М. С., Мильник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Шкільний О. В.)

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

Мераляк А. Г.

М52 Математика : підруч. інтегров. курсу для 7 кл. закладів заг. серед. освіти (у 2-х ч.) : Ч. 1 / А. Г. Мераляк, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2024. — 320 с. : іл.

Від авторів

ЛЮБІ СЕМИКЛАСНИКИ ТА СЕМИКЛАСНИЦІ!

У наш час немає такої галузі науки, де не застосовують досягнень математики. У фізиці та хімії, астрономії та біології, географії та економіці, навіть у лінгвістиці та історії використовують «математичний інструмент».

Сподіваємося, що отримати ґрунтовні математичні знання вам допоможе підручник, який ви тримаєте в руках. Він складається з двох розділів: перший присвячений алгебрі (пункти 1–33), другий — геометрії (пункти 34–60).

Алгебра — корисний і дуже цікавий навчальний предмет. Його вивчення розвиває аналітичне й логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість.

Опановуючи алгебру, ви навчитеся розв'язувати різні типи рівнянь, установлювати зв'язки між величинами, будувати математичні моделі різноманітних реальних ситуацій.

Геометрія — одна з найдавніших наук. Її появу пояснюють тим, що зародження й розвиток геометрії були тісно пов'язані з практичною діяльністю людини: розмічанням меж земельних ділянок, будівництвом шляхів, зрошувальних каналів та інших споруд, тобто геометрія була *прикладною наукою*. Поступово, крок за кроком, людство накопичувало знання, і геометрія перетворилася на красиву та досконалу, строгу та послідовну математичну теорію. На уроках ви познайомитеся із цією наукою та навчатиметеся застосовувати здобуті знання на практиці.

Зверніть увагу: слова «географія» та «геометрія» мають однакову частину — «гео» (грецькою — «земля»). Проте якщо на уроках географії в 6 класі ви справді робили землеопис («графія» грецькою — «опис»), то під час вивчення геометрії вам не доведеться здійснювати землеміряння («метрео» грецькою — «міряти»).

Текст підручника поділено на 9 параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книжці виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Більшість пунктів завершується особливою задачею, для розв'язування якої потрібні не спеціальні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі допоможуть вам навчитися приймати несподівані й нестандартні рішення не тільки в математиці, а й у житті.

Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевірте себе».

У рубриці «Говоримо та пишемо українською правильно» наведено приклади правильної математичної мови.

Крім того, у рубриці «Коли зроблено уроки» ви зможете прочитати цікаві оповідання з історії математики, зокрема про внесок української ученої спільноти в розвиток цієї науки.

Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ ТА КОЛЕЖАНКИ!

У книжці дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці.

Блакитним кольором позначено номери задач, що рекомендовані для домашньої роботи, **пурпуровим** кольором — номери задач, що рекомендовані для розв'язування усно.

У деяких пунктах частину тексту розміщено на кольоровому фоні. Так виокремлено матеріал, який на ваш розсуд можна віднести до необов'язкового для вивчення.

Бажаємо творчої наснаги й терпіння.

Комунальний заклад «Видавництво «Імідж»

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

● закінчення доведення теореми;

◀ закінчення розв'язування прикладу;

ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;

доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;

доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;

доведення теореми, не обов'язкове для вивчення;

завдання, які можна виконувати за допомогою комп'ютера;

рубрика «Говоримо та пишемо українською правильно»;

рубрика «Коли зроблено уроки».

Рівні відрізки на кресленнях позначено однаковою кількістю штрихів, рівні кути — однаковою кількістю дужок, за винятком відрізків і кутів, які треба знайти.

Конспект вибір вчителя гімназія

Розділ 1. АЛГЕБРА

§1 АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ. РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

У цьому параграфі ви навчитеся спрощувати вирази, ознайомитеся з формулами та прийомами, які допомагають полегшити роботу з перетворення виразів. Дізнаєтеся, що піднесення числа до квадрата й куба — окремі випадки нової арифметичної дії. Навчитеся класифікувати алгебраїчні вирази.Дізнаєтеся, що багато відомих вам рівнянь можна об'єднати в один клас.

1. Вступ до алгебри

Ви починаєте вивчати алгебру. Зауважимо, що ви вже знайомі з «азбукою» цієї науки. Так, коли ви записували формули та складали рівняння, вам доводилося позначати числа буквами, конструюючи **буквені вирази.**

Наприклад, записи a^2, $(x+y)^2$, $2(a+b)$, $\frac{x-y+z}{2}$, abc, $\frac{m}{n}$ є буквеними виразами.

Наголосимо, що не будь-який запис, складений із чисел, букв, знаків арифметичних дій і дужок, є буквеним виразом. Наприклад, запис $2x+)-($ є беззмістовним набором символів.

Разом з тим вираз, складений з однієї букви, вважають буквеним виразом.

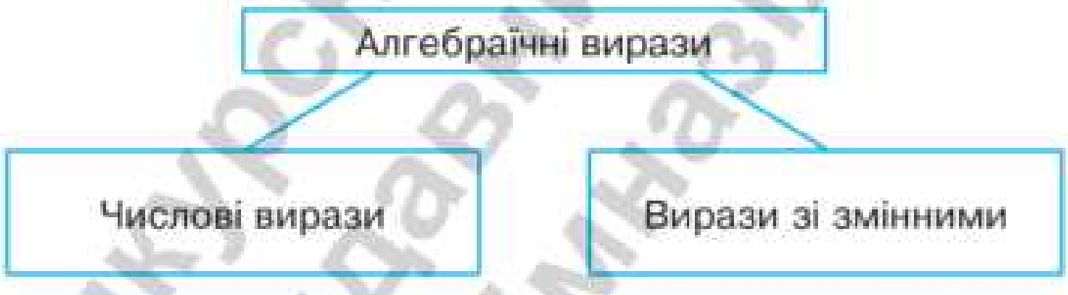
Розглянемо буквений вираз $2(a+b)$. Ви знаєте, що за його допомогою можна знайти периметр прямокутника зі сторонами a і b. Якщо, наприклад, букви a і b замінити відповідно числами 3 і 4, то дістанемо **числовий вираз** $2(3+4)$. За таких умов периметр прямокутника дорівнюватиме 14 одиницям довжини. Число 14 називають **значенням числового виразу** $2(3+4)$.

Зрозуміло, що замість букв a і b можна підставляти й інші числа, отримуючи щоразу новий числовий вираз.

Оскільки букви можна заміняти довільними числами, то ці букви називають **змінними**, а сам буквений вираз — **виразом зі змінними** (або зі змінною, якщо вона одна).

Розглянемо вираз $2x + 3$. Якщо змінну x замінити, наприклад, числом $\frac{1}{2}$, то дістанемо числовий вираз $2 \cdot \frac{1}{2} + 3$. При цьому говорять, що $\frac{1}{2}$ — **значення змінної** x, а число 4 — значення виразу $2x + 3$ при $x = \frac{1}{2}$.

Числові вирази та вирази зі змінними називають **алгебраїчними виразами.**



Розглянемо дві групи алгебраїчних виразів:

I група	II група
$x - y^3$	$\frac{1}{x}$
$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{(a+b)^2}$
$\frac{1}{3}b^2 + 5a$	$\frac{m}{n+3}$
$\frac{mn}{7}$	$5 - \frac{x}{y^2}$

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

Вирази кожної групи містять такі дії: додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня, ділення. Однак вирази першої групи не містять ділення на вирази зі змінними. Вирази першої групи називають **цілими виразами**. Вирази другої групи не є цілими.

У 7 класі ми вивчатимемо цілі вирази.

Приклад. Значення змінних a, b і m такі, що $a - b = 4$, $m = -5$. Чому дорівнює значення виразу $7bm - 7am$?

Розв'язання. Використовуючи розподільну та сполучну властивості множення, отримуємо:

$$7bm - 7am = 7m(b - a) = 7 \cdot (-5) \cdot (-4) = 7 \cdot 20 = 140.$$

Відповідь: 140. ◀

? **1.** Як інакше називають буквені вирази? **2.** Які вирази називають алгебраїчними? **3.** Які алгебраїчні вирази називають цілими?

ВПРАВИ

1.° Знайдіть значення числового виразу:

1) $0{,}72 + 3{,}018$; 3) $1{,}8 \cdot 0{,}3$; 5) $72 : 0{,}09$;

2) $4 - 2{,}8$; 4) $5{,}4 : 6$; 6) $9 : 4$.

2.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$; 5) $\frac{46}{75} : \frac{23}{45}$; 9) $6 - 1\frac{3}{5}$;

2) $\frac{3}{7} - \frac{2}{9}$; 6) $\frac{2}{3} : 4$; 10) $4\frac{2}{7} - 1\frac{4}{9}$;

3) $\frac{7}{16} \cdot \frac{8}{35}$; 7) $10 : \frac{5}{11}$; 11) $8\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{14}$;

4) $\frac{4}{9} \cdot 18$; 8) $2\frac{3}{8} + 4\frac{1}{6}$; 12) $1\frac{3}{5} : 5\frac{1}{3}$?

Конкурсний відбір Видавництво «Ранок»

3.° Обчисліть значення виразу:

1) $3{,}8 + (-2{,}5)$;
2) $-4{,}8 + 4{,}8$;
3) $-1 + 0{,}39$;
4) $9{,}4 - (-7{,}8)$;
5) $4{,}2 - 5{,}7$;
6) $0 - 7{,}8$;
7) $0 - (-2{,}4)$;
8) $-4{,}5 - 2{,}5$;
9) $8 \cdot (-0{,}4)$;
10) $-1{,}2 \cdot (-0{,}5)$;
11) $-48 \cdot 0$;
12) $-3{,}3 : (-11)$;
13) $3{,}2 : (-4)$;
14) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;
15) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$.

4.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $18\frac{5}{12} - \frac{7}{12} \cdot 1\frac{19}{21} - \frac{17}{72} \cdot \frac{2}{3}$;
2) $(-1{,}42 - (-3{,}22)) : (-0{,}4) + (-6) \cdot (-0{,}7)$;
3) $\left(-3\frac{1}{12} - 2\frac{1}{15}\right) : \left(-5\frac{3}{20}\right)$?

5.° Обчисліть значення числового виразу:

1) $\left(5\frac{8}{9} : 1\frac{17}{36} + 1\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{21}$;
2) $(-3{,}25 - 2{,}75) : (-0{,}6) + 0{,}8 \cdot (-7)$.

6.° Знайдіть значення виразу:

1) $2x - 3$ при $x = 4;\ 0;\ -3$;
2) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b$ при $a = -6,\ b = 16$;
3) $3m - 5n + 3k$ при $m = -7,\ n = 1{,}4,\ k = -0{,}1$.

7.° Обчисліть значення виразу:

1) $0{,}4y + 1$ при $y = -0{,}5;\ 8;\ -10$;
2) $\frac{2}{7}c - 0{,}2d$ при $c = -28,\ d = 15$.

8.° Які з даних виразів є цілими:

1) $7a + 0{,}3$;
2) $5x\left(y - \frac{1}{3}\right)$;
3) $\frac{a+b}{c}$;
4) $\frac{a+b}{4}$;
5) $\frac{3m}{5} + \frac{5}{3m}$;
6) $9x - 5y + \frac{1}{z}$?

Копія з відкритого видавництва «Київська книгарня»

9.° Користуючись термінами «сума», «різниця», «добуток», «частка», прочитайте алгебраїчні вирази та вкажіть, які з них є цілими:

1) $a-(b+c)$; 4) $2m-10$; 7) $ac+bc$;

2) $a+bc$; 5) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$; 8) $\frac{a}{b+4}$;

3) $x-\frac{y}{z}$; 6) $(a+b)c$; 9) $(a-b)(c+d)$.

10.° Запишіть у вигляді виразу:

1) число, протилежне числу a;
2) число, обернене до числа a;
3) суму чисел x і y;
4) число, обернене до суми чисел x і y;
5) суму чисел, обернених до чисел x і y;
6) суму числа a та його квадрата;
7) частку від ділення числа a на число, протилежне числу b;
8) добуток суми чисел a і b та числа, оберненого до числа c;
9) різницю добутку чисел m і n та частки чисел p і q.

11.° Олівець коштує x грн, а зошит — y грн. Запишіть у вигляді виразу зі змінними:

1) скільки коштують 5 олівців і 7 зошитів;
2) на скільки більше треба заплатити за a зошитів, ніж за b олівців.

12.° Робітниці видали заробітну плату однією купюрою номіналом 1000 грн, a купюрами номіналом 500 грн і b купюрами по 100 грн. Запишіть у вигляді виразу зі змінними, яку суму грошей отримала робітниця.

13.* Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

1) добуток суми чисел -12 і 8 та числа 0,5;
2) сума добутку чисел -12 і 8 та числа 0,5;
3) частка суми й різниці чисел $-1{,}6$ і $-1{,}2$;

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

4) квадрат суми чисел −10 і 6;
5) сума квадратів чисел −10 і 6.

14.* Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:
1) частка від ділення суми чисел $\frac{4}{9}$ і $-\frac{5}{6}$ на число $-\frac{14}{27}$;
2) різниця добутку чисел −1,5 і 4 та числа 2;
3) добуток суми та різниці чисел −1,9 і 0,9;
4) куб різниці чисел 6 і 8.

15.* Із двох міст, відстань між якими дорівнює 300 км, вирушили одночасно назустріч один одному два автомобілі зі швидкостями m км/год і n км/год. Запишіть у вигляді виразу зі змінними, через скільки годин після початку руху вони зустрінуться.

16.* Із двох селищ, відстань між якими дорівнює s км, одночасно в одному напрямку вирушили пішохід і велосипедистка. Пішохід іде попереду зі швидкістю a км/год, а велосипедистка їде зі швидкістю b км/год. Запишіть у вигляді виразу зі змінними, через скільки годин після початку руху велосипедистка наздожене пішохода. Обчисліть значення отриманого виразу при $a = 4$, $b = 12$, $s = 12$.

17.* Запишіть у вигляді виразу:
1) потроєний добуток різниці чисел a і b та їхньої суми;
2) суму трьох послідовних натуральних чисел, менше з яких дорівнює n;
3) добуток трьох послідовних парних натуральних чисел, більше з яких дорівнює $2k$;
4) число, у якому a тисяч, b сотень і c одиниць;
5) кількість сантиметрів у x метрах і y сантиметрах;
6) кількість секунд у m годинах, n хвилинах і p секундах.

Електронний варіант підручника

18.* Запишіть у вигляді виразу:

1) добуток чотирьох послідовних натуральних чисел, більше з яких дорівнює x;

2) різницю добутку двох послідовних непарних чисел і меншого з них, якщо більше число дорівнює $2k + 1$;

3) кількість кілограмів у a тоннах і b центнерах.

19.** Складіть вирази для обчислення довжини синьої лінії та площі фігури, яку вона обмежує (рис. 1).

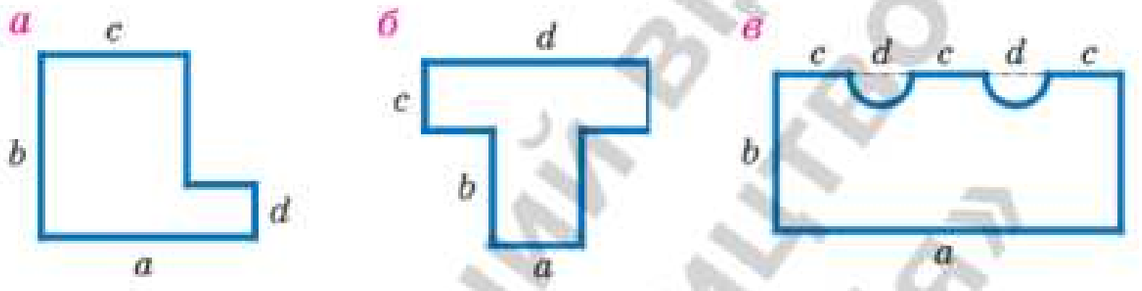


Рис. 1

20.** Складіть вирази для обчислення довжини синьої лінії та площі фігури, яку вона обмежує (рис. 2).

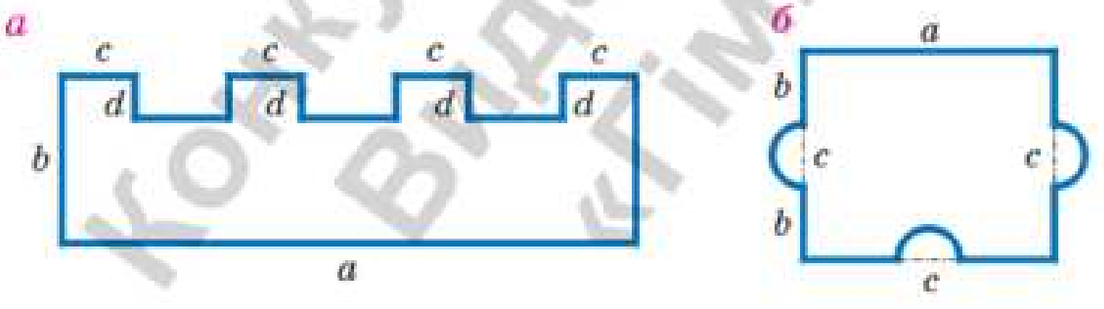


Рис. 2

21.** Значення змінних a і b такі, що $a + b = -8$, $c = 4$. Чому дорівнює значення виразу:

1) $a + b - c$; 2) $0{,}5(a + b) + c$; 3) $3ac + 3bc$?

22.** Значення змінних m і n такі, що $m - n = 5$, $k = -2$. Чому дорівнює значення виразу:

1) $(n - m)k$; 2) $2m - 2n + 3k$?

Конкурсний відбір
Видавництво
«Імназія»

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

23. (*Задача з українського фольклору.*) Мірошник бере за роботу $\frac{1}{10}$ змеленого борошна. Скільки пудів борошна намололи селянину, якщо додому він повіз 99 пудів?

24. До їдальні завезли капусту, моркву та картоплю. Капусти було 64 кг, маса моркви становила $\frac{5}{8}$ маси капусти, а маса картоплі — 180 % маси моркви. Скільки всього кілограмів овочів завезли до їдальні?

25. Відомо, що a і b — натуральні числа, а число $\frac{a}{b}$ — правильний дріб. Чи можна стверджувати, що:

1) $a - b > 0$; 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 3) $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

26. Доведіть, що:

1) число 5 є коренем рівняння $3x + 1 = 21 - x$;
2) число -2 не є коренем рівняння $x(x + 4) = 4$.

27. Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}3x = 9$; 2) $-2x = 3$; 3) $15x = 0$.

28. Розкрийте дужки:

1) $2(x - 3y + 4z)$; 2) $-0{,}4(-5 + 1{,}5y)$.

29. Зведіть подібні доданки:

1) $4a + 9a - 18a + a$; 2) $1{,}2a - a + b - 2{,}1b$.

30. Розкрийте дужки та зведіть подібні доданки:

1) $(x + 3{,}2) - (x + 4{,}5)$; 2) $1{,}4(a - 2) - (6 - 2a)$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

31. Дано 12 натуральних чисел. Доведіть, що з них завжди можна вибрати два, різниця яких ділиться націло на 11.

Книга про відновлення та протиставлення

Готуючись до вивчення нової теми, ви, напевно, повторили основні властивості рівнянь. Знаменно, що з однією із цих властивостей пов'язано походження слова «алгебра».

Електронний варіант видавництва «Гімназія»

У IX ст. видатний учений Мухаммед ібн Муса аль-Хорезмі (що означає Мухаммед, син Муси, з Хорезма) написав трактат про способи розв'язування рівнянь. У ті часи від'ємні числа вважали хибними, брехливими, абсурдними. Тому якщо під час розв'язування рівнянь отримували «хибне число», то його перетворювали на «справжнє», переносячи в іншу частину рівняння. Таке перетворення Мухаммед аль-Хорезмі назвав *відновленням* (арабською мовою — «аль-джебр»). Знищення однакових членів в обох частинах рівняння він назвав *протиставленням* (арабською мовою — «аль-мукабала»).

Мухаммед ібн Муса аль-Хорезмі
(IX ст.)

Середньоазійський математик, астроном і географ. Він був першим, хто у своїх наукових працях розглядав алгебру як самостійний розділ математики.

Сам трактат мав назву «Коротка книга про відновлення та протиставлення» (арабською мовою — «Кітаб аль-мухтасар фі хісаб аль-джебр ва-аль-мукабала»).

Слово «аль-джебр» із часом перетворилося на добре відоме всім слово «алгебра».

У XII ст. праці аль-Хорезмі було перекладено латинською мовою. У середньовічній Європі ім'я аль-Хорезмі записували як *Algorizmi*, і багато правил з його праць починалися словами *Dixit Algorizmi* («Алгоризмі сказав»). Поступово стали звикати, що із цих слів починається багато правил, а слово *Algorizmi* перестали пов'язувати з ім'ям автора. Так виник термін

«алгоритм», яким позначають процес, що дозволяє за скінченну кількість кроків отримати розв'язок задачі.

З такими процесами ви докладно ознайомитеся на уроках інформатики.

2. Лінійне рівняння з однією змінною

Розглянемо три рівняння:

$$2x = -3,\ 0x = 0,\ 0x = 2.$$

Число $-1{,}5$ є єдиним коренем першого рівняння.

Оскільки добуток будь-якого числа на нуль дорівнює нулю, то коренем другого рівняння є будь-яке число.

Третє рівняння коренів не має.

Незважаючи на істотні відмінності отриманих відповідей, наведені рівняння зовні схожі: усі вони мають вигляд $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа.

Означення. **Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.**

Наведемо ще приклади лінійних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 7;\ -0{,}4x = 2{,}8;\ -x = 0.$$

Зауважимо, що, наприклад, рівняння $x^2 = 0$, $(x - 2) \times (x - 3) = 0$, $|x| = 5$ не є лінійними.

Текст, виділений **жирним шрифтом**, роз'яснює зміст терміна «лінійне рівняння з однією змінною». У математиці речення, яке розкриває сутність терміна (поняття, об'єкта), називають **означенням**.

Отже, ми сформулювали (або, як говорять, дали) означення лінійного рівняння з однією змінною.

Розв'яжемо рівняння $ax = b$ для різних значень a і b.

1) Якщо $a \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння $ax = b$ на a, отримаємо $x = \frac{b}{a}$. Тоді можна зроби-

ти такий висновок: *якщо* $a \neq 0$, *то рівняння* $ax = b$ *має єдиний корінь, що дорівнює* $\frac{b}{a}$.

2) Якщо $a = 0$, то лінійне рівняння набуває такого вигляду: $0x = b$. Тоді можливі два випадки: $b = 0$ або $b \neq 0$.

У першому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$. Тоді можна зробити такий висновок: *якщо* $a = 0$ *та* $b = 0$, *то рівняння* $ax = b$ *має безліч коренів: будь-яке число є його коренем.*

У другому випадку, коли $b \neq 0$, то при будь-якому значенні x маємо хибну рівність $0x = b$. Тоді можна зробити такий висновок: *якщо* $a = 0$ *та* $b \neq 0$, *то рівняння* $ax = b$ *коренів не має.*

Отримані висновки подамо у вигляді таблиці.

Значення a і b	$a \neq 0$	$a = 0$, $b = 0$	$a = 0$, $b \neq 0$
Корені рівняння $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	Коренів немає

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x + 2{,}1)(8 - 2x) = 0$; 2) $|5x - 6| = 4$.

Розв'язання. 1) Ви знаєте, що добуток кількох множників дорівнює нулю тоді, коли принаймні один із множників дорівнює нулю, і навпаки, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, то й добуток дорівнює нулю. Тому для розв'язування даного рівняння достатньо розв'язати кожне з рівнянь:

$$3x + 2{,}1 = 0,\ 8 - 2x = 0.$$

Звідси $x = -0{,}7$ або $x = 4$.

Відповідь: $-0{,}7$; 4. ◀

2) Ураховуючи, що існують тільки два числа, -4 і 4, модулі яких дорівнюють 4, отримуємо:

$$5x - 6 = 4 \text{ або } 5x - 6 = -4.$$

Звідси $x = 2$ або $x = 0{,}4$.

Відповідь: 2; 0,4. ◀

Звертаємо вашу увагу на те, що наведені рівняння не є лінійними, проте розв'язування кожного з них зводиться до розв'язування лінійного рівняння.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

1) $(a-1)x = 2$; 2) $(a+9)x = a+9$.

Розв'язання. 1) При $a = 1$ рівняння набуває вигляду $0x = 2$. У цьому випадку коренів немає. При $a \neq 1$ отримуємо: $x = \frac{2}{a-1}$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то рівняння не має коренів; якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{2}{a-1}$.

2) При $a = -9$ рівняння набуває вигляду $0x = 0$. У цьому випадку коренем рівняння є будь-яке число. При $a \neq -9$ отримуємо: $x = 1$.

Відповідь: якщо $a = -9$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq -9$, то $x = 1$. ◀

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянням з однією змінною? **2.** Скільки коренів має лінійне рівняння $ax = b$, якщо: 1) $a \neq 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$; 3) $a = b = 0$?

ВПРАВИ

32.° Які з наведених рівнянь є лінійними:

1) $3x = 6$; 3) $x^2 = 4$; 5) $\frac{4}{x} = 2$; 7) $x = 0$;

2) $x = 4$; 4) $|x| = 2$; 6) $\frac{1}{4}x = 2$; 8) $0x = 8$?

33.° Чи є число 4 коренем рівняння:

1) $4x = 12$; 2) $\frac{1}{4}x = 1$; 3) $0x = 0$; 4) $0x = 4$?

Електронний варіант підручника видавництва «Ранок»

34.° Скільки коренів має рівняння:

1) $3x = -10$; 2) $0x = 6$; 3) $0x = 0$; 4) $5x = 0$?

35.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5}{9}x = 1$; 2) $-3x = \frac{6}{7}$; 3) $-1{,}4x = -2{,}1$; 4) $-\frac{1}{6}x = 6$.

36.° Розв'яжіть рівняння:

1) $-6x = \frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{3}x = 12$;

2) $0{,}1x = -2{,}75$; 4) $\frac{5}{7}x = -\frac{10}{49}$.

37.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2x - 7 = x + 4$; 4) $10 - 2x = 12 + x$;

2) $18 - 16x = -30x - 10$; 5) $6x - 19 = -2x - 15$;

3) $-7x + 2 = 3x - 1$; 6) $0{,}2x + 3{,}4 = 0{,}6x - 2{,}6$.

38.° Знайдіть корінь рівняння:

1) $3x + 6 = 2x - 1$; 3) $20 - 3x = 2x - 45$;

2) $10x + 7 = 8x - 9$; 4) $2{,}7 + 1{,}9x = 2x + 1{,}5$.

39.* Розв'яжіть рівняння:

1) $-3(x - 4) = 5x - 12$;

2) $(16x - 5) - (3 - 5x) = 6$;

3) $26 - 4x = 3x - 7(x - 3)$;

4) $-2(3 - 4x) + 5(2 - 1{,}6x) = 4$.

40.* ***(Знайдіть помилку)*** Розв'язуючи рівняння $(9 - 4x) - (5 + 6x) = 8$, Василь Ледащенко записав таке:

$$9 - 4x - 5 + 6x = 8;$$
$$2x = 8 + 9 - 5;$$
$$2x = 12;\ x = 6.$$

Знайдіть помилки в цьому «розв'язуванні».

41.* Розв'яжіть рівняння:

1) $4(13 - 3x) - 17 = -5x$;

2) $(18 - 3x) - (4 + 2x) = 10$;

3) $14 - x = 0{,}5(4 - 2x) + 12$;

4) $4x - 3(20 - x) = 10x - 3(11 + x)$.

Електронний відбір вправ ІМНАВЧИТЬВО «Імназія»

42.* Доведіть, що:

1) коренем рівняння $4(x-5)=4x-20$ є будь-яке число;

2) рівняння $2y-8=4+2y$ не має коренів.

43.* Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}8-(1{,}5x-2)=-0{,}8+4{,}5x$;

2) $0{,}6x-5(0{,}3x+0{,}2)=0{,}5(x-1)-0{,}8$;

3) $\frac{5}{27}(5{,}4-8{,}1y)=0{,}03+\frac{4}{17}(6{,}8-3{,}4y)$.

44.* Знайдіть корінь рівняння:

1) $0{,}9x-0{,}6(x-3)=2(0{,}2x-1{,}3)$;

2) $\frac{4}{7}(0{,}56-4{,}2y)+0{,}4=\frac{5}{13}(0{,}52-6{,}5y)$.

45.* Розв'яжіть рівняння:

1) $8(7x-3)=-48(3x+2)$;

2) $4{,}5(8x+20)=6(6x+15)$.

46.* Чому дорівнює корінь рівняння:

1) $-36(6x+1)=9(4-2x)$;

2) $3{,}2(3x-2)=-4{,}8(6-2x)$?

47.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(4x-1{,}6)(8+x)=0$;

2) $x(5-0{,}2x)=0$;

3) $(3x-2)\left(4+\frac{1}{3}x\right)=0$;

4) $(2x+1{,}2)(x+1)(0{,}7x+0{,}21)=0$.

48.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(1{,}8-0{,}3y)(2y+9)=0$; 2) $(5y+4)(1{,}1y-3{,}3)=0$.

49.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5x-4}{2}=\frac{16x+1}{7}$; 2) $\frac{4y+33}{3}=\frac{17+y}{2}$.

50.* Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{3m+5}{4}=\frac{5m+1}{3}$; 2) $\frac{5x+3}{5}=\frac{x-5}{8}$.

Юридичний відділ видавництво «Гімназія»

51.* Чому дорівнює корінь рівняння:

1) $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{4}=23$; 2) $\frac{x}{6}-\frac{x}{8}=\frac{7}{36}$; 3) $\frac{3x}{10}-\frac{4}{15}=\frac{x}{6}$?

52.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{7x}{6}-\frac{5x}{18}=\frac{4}{27}$; 2) $\frac{2x}{7}+\frac{x}{4}=\frac{15}{14}$; 3) $-\frac{x}{8}+1=\frac{x}{12}$.

53.* При якому значенні змінної:

1) значення виразу $4x-0{,}2(8x-7)$ дорівнює $-22{,}6$;
2) вирази $0{,}2(3-2y)$ і $0{,}3(7-6y)+2{,}7$ набувають рівних значень;
3) значення виразу $0{,}6y$ на $1{,}5$ більше за значення виразу $0{,}3(y-4)$;
4) значення виразу $5x-1$ у 5 разів менше від значення виразу $6{,}5+2x$?

54.* При якому значенні змінної:

1) вирази $6-(2x-9)$ і $(18+2x)-3(x-3)$ набувають рівних значень;
2) значення виразу $-(2y-0{,}9)$ на $2{,}4$ менше від значення виразу $5{,}6-10y$?

55.* Розв'яжіть рівняння:

1) $|x|+6=13$; 4) $|x-5|=4$;
2) $|x|-7=-12$; 5) $|3x+4|=2$;
3) $7|x|-3=0$; 6) $||x|-3|=-5$.

56.* Розв'яжіть рівняння:

1) $|x|-8=-5$; 3) $|x+12|=3$;
2) $|x|+5=2$; 4) $|8-0{,}2x|=12$.

57.* При якому значенні a рівняння:

1) $5ax=-45$ має корінь, що дорівнює числу 3;
2) $(a-4)x=-5a+4x-7$ має корінь, що дорівнює числу -6?

58.* При якому значенні a рівняння:

1) $3ax=12-x$ має корінь, що дорівнює числу -9;
2) $(5a+2)x=8-2a$ має корінь, що дорівнює числу 2?

Електронний варіант видавництва «Вінгс»

59.* Укажіть яке-небудь значення b, при якому буде цілим числом корінь рівняння:

1) $0{,}1x = b$;
2) $bx = 21$;
3) $\frac{1}{6}x = b$;
4) $bx = \frac{1}{6}$.

60.** Складіть рівняння, яке:

1) має єдиний корінь, що дорівнює числу -4;
2) має безліч коренів;
3) не має коренів.

61.** Знайдіть усі цілі значення m, при яких є цілим числом корінь рівняння:

1) $mx = 3$;
2) $(m + 4)x = 49$.

62.** Знайдіть усі цілі значення n, при яких є натуральним числом корінь рівняння:

1) $nx = -5$;
2) $(n - 6)x = 25$.

63.** При якому значенні b мають один і той самий корінь рівняння:

1) $7 - 3x = 6x - 56$ і $x - 3b = -35$;
2) $2y - 9b = 7$ і $3{,}6 + 5y = 7(1{,}2 - y)$?

64.** При якому значенні c мають один і той самий корінь рівняння:

1) $(4x + 1) - (7x + 2) = x$ і $12x - 9 = c + 5$;
2) $\frac{1}{7}cx = x + c$ і $6 - 3(2x - 4) = -8x + 4$?

65.** При якому значенні a не має коренів рівняння:

1) $ax = 6$;
2) $(3 - a)x = 4$;
3) $(a - 2)x = a + 2$?

66.** При якому значенні a будь-яке число є коренем рівняння:

1) $ax = a$;
2) $(a - 2)x = 2 - a$;
3) $a(a + 5)x = a + 5$?

Комунальний заклад «Вільнянський ліцей» Вільнянської міської ради Запорізької області

67.** При яких значеннях a має єдиний корінь рівняння:
1) $(a-5)x=6$; 2) $(a+7)x=a+7$?

68.** Розв'яжіть рівняння:
1) $(b+1)x=9$; 2) $(b^2+1)x=-4$.

69.** Розв'яжіть рівняння $(m+8)x=m+8$.

70.* Розв'яжіть рівняння:
1) $|x|+3x=12$; 3) $2(x-5)-6|x|=-18$.
2) $|x|-4x=9$;

71.* Розв'яжіть рівняння:
1) $2x-|x|=-1$; 2) $7|x|-3(x+2)=-10$.

72.* При яких цілих значеннях a корінь рівняння:
1) $x-2=a$; 3) $2x-a=4$;
2) $x+7a=9$; 4) $x+2a=3$
є цілим числом, яке ділиться націло на 2?

73.* При яких цілих значеннях b корінь рівняння:
1) $x+3=b$; 2) $x-2=b$; 3) $x-3b=8$
є цілим числом, яке ділиться націло на 3?

74.* При яких значеннях b корінь рівняння є меншим від b: 1) $3x=b$; 2) $x=2b$?

75.* При яких значеннях d корінь рівняння є більшим за d: 1) $4x=d$; 2) $\frac{1}{5}x=d$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

76. У турнірі з волейболу брали участь 8 команд. Кожна команда двічі зіграла з кожною іншою командою. Скільки всього матчів було зіграно на турнірі?

77. Один робітник може виконати завдання за 45 год, а другому для цього потрібно в $1\frac{1}{2}$ раза менше часу, ніж першому. За скільки годин вони виконають це завдання, працюючи разом? Яку частину завдання при цьому виконає кожен із них?

Конкурсний відбір «Відкритий урок гімназія»

78. За перший день Олена прочитала $\frac{8}{15}$ сторінок книжки, за другий — $\frac{5}{12}$ сторінок книжки та за третій день — решту 12 сторінок. Скільки сторінок у цій книжці?

79. Відомо, що n — натуральне число. Яким числом, парним чи непарним, є значення виразу:

1) $4n$; 2) $2n - 1$; 3) $n(n + 1)$?

80. Чи є правильним твердження, що при будь-якому значенні a:

1) $2a > a$; 2) $2 \mid a \mid > \mid a \mid$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

81. Скільки існує шестицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна парна цифра?

3. Лінійні рівняння з однією змінною як математичні моделі сюжетних задач

Вам неодноразово доводилося розв'язувати задачі за допомогою складання рівнянь. Різноманітність цих задач є найкращим підтвердженням універсальності цього методу. У чому ж секрет його сили?

Річ у тім, що умови несхожих між собою задач удається записати математичною мовою. Отримане рівняння — це результат перекладу умови задачі з української мови математичною.

Часто умова задачі є описом якоїсь реальної ситуації. Складене за цією умовою рівняння називають **математичною моделлю** даної ситуації.

Зрозуміло, щоб отримати відповідь, рівняння треба розв'язати. Для цього в алгебрі розроблено різні методи та прийоми. З деякими з них ви вже знайомі, вивчення багатьох інших на вас ще чекає.

Знайдений корінь рівняння — це ще не відповідь задачі. Треба з'ясувати, чи не суперечить отриманий результат реальній ситуації, яка описана в умові задачі.

Розглянемо, наприклад, такі задачі.

1) За 4 год зібрали 6 кг ягід, причому кожної години збирали однакову за масою кількість ягід. Скільки кілограмів ягід збирали щогодини?
2) Кілька хлопчиків зібрали 6 кг ягід. Кожен із них зібрав по 4 кг. Скільки хлопчиків збирали ягоди?

За умовою обох задач можна скласти одне й те саме рівняння $4x = 6$, коренем якого є число 1,5. Проте в першій задачі відповідь «щогодини збирали 1,5 кг ягід» є прийнятною, а в другій — «ягоди збирали півтора хлопчика» — ні. Тому друга задача не має розв'язків.

Під час розв'язування задач на складання рівнянь бажано дотримуватися такої послідовності дій:

1) за умовою задачі скласти рівняння (побудувати математичну модель задачі);
2) розв'язати отримане рівняння;
3) з'ясувати, чи відповідає знайдений корінь змісту задачі, і дати відповідь.

Цю послідовність дій, яка складається з трьох кроків, можна назвати **алгоритмом** розв'язування текстових задач.

Приклад 1. Робітник мав виконати замовлення за 8 днів. Проте, виготовляючи щодня 12 деталей понад норму, він уже за 6 днів роботи не тільки виконав замовлення, а й виготовив додатково 22 деталі. Скільки деталей щодня виготовляв робітник?

Розв'язання. Нехай робітник виготовляв щодня x деталей. Тоді за нормою він мав виготовляти щодня $(x - 12)$ деталей, а всього їх мало бути виготовлено $8(x - 12)$. Насправді він виготовив $6x$ деталей. Оскільки за умовою значення виразу $6x$ на 22 більше за значення виразу $8(x - 12)$, то отримуємо рівняння

$$6x - 22 = 8(x - 12).$$

Конкурсний відбір Вимагається Гімназія

Тоді
$$6x - 22 = 8x - 96;$$
$$6x - 8x = -96 + 22;$$
$$-2x = -74;$$
$$x = 37.$$

Відповідь: 37 деталей. ◀

Приклад 2. Велосипедистка проїхала відстань у 65 км за 5 год. Частину шляху вона їхала зі швидкістю 10 км/год, а решту — зі швидкістю 15 км/год. Скільки часу вона їхала зі швидкістю 10 км/год і скільки — зі швидкістю 15 км/год?

Розв'язання. Нехай велосипедистка їхала x год зі швидкістю 10 км/год. Тоді зі швидкістю 15 км/год вона їхала $(5 - x)$ год. Перша частина шляху становить $10x$ км, а друга — $15(5 - x)$ км. Оскільки весь шлях складав 65 км, то маємо рівняння

$$10x + 15(5 - x) = 65.$$

Звідси
$$10x + 75 - 15x = 65;$$
$$-5x = -10;$$
$$x = 2.$$

Отже, зі швидкістю 10 км/год вона їхала 2 год, а зі швидкістю 15 км/год — 3 год.

Відповідь: 2 год, 3 год. ◀

Відмінюючи назви десятків 50, 60, 70, 80 (складні числівники), змінюємо тільки другу частину числівників (**-десят**), наприклад: Н. в. *п'ятдесят, вісімдесят*, Р. в. *п'ятдесяти, вісімдесяти*, Д. в. *п'ятдесяти, вісімдесяти*, Зн. в. *п'ятдесят, вісімдесят*, Ор. в. *п'ятдесятьма, вісімдесятьма*, М. в. *(на) п'ятдесятьох, вісімдесятьох*.

Назви чисел 40, 90, 100 в усіх відмінках, окрім називного та знахідного, мають закінчення **-а**, наприклад: Н. в. *сорок зошитів*, Р. в. *сорока зошитів*, Д. в. *сорока зошитам*, Зн. в. *сорок зошитів*, Ор. в. *сорока зошитами*, М. в. *(в) сорока зошитах*.

Зверніть увагу: після першої частини числівників *п'ятнадцять, п'ятдесят, п'ятсот* м'який знак не пишемо.

ВПРАВИ

82.° Ганна купила 24 зошити, причому зошитів у лінійку вона купила на 6 більше, ніж зошитів у клітинку. Скільки зошитів кожного виду купила Ганна?

83.° Із двох дерев зібрали 65,4 кг вишень, причому з одного дерева зібрали на 12,6 кг менше, ніж із другого. Скільки кілограмів вишень зібрали з кожного дерева?

84.° Периметр прямокутника дорівнює 7,8 см, а одна з його сторін на 1,3 см більша за другу. Знайдіть сторони прямокутника.

85.° Одна зі сторін прямокутника в 11 разів менша від другої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 144 см.

86.* Три найвищі гірські вершини України — Говерла, Бребенескул і Петрос — розташовані в найвищому гірському масиві Чорногори в Карпатах. Сума їхніх висот дорівнює 6113 м, причому Говерла на 29 м вища за Бребенескул і на 41 м вища за Петрос. Знайдіть висоту кожної з вершин.

Гора Говерла

87.* Три найглибші печери України — Солдатська, Каскадна та Нахімовська — розташовані в Криму. Сума їхніх глибин дорівнює 1285 м, причому глибина Каскадної на 115 м менша від глибини Солдатської та на 30 м більша за глибину Нахімовської. Знайдіть глибину кожної з печер.

88.* У будинку є 160 квартир трьох видів: однокімнатні, двокімнатні та трикімнатні. Однокімнатних квартир у 2 рази менше, ніж двокімнатних, і на 24 менше, ніж трикімнатних. Скільки в будинку квартир кожного виду?

89.* Троє робітників виготовили 96 деталей. Один із них виготовив у 3 рази більше деталей, ніж другий, а третій — на 16 деталей більше, ніж другий. Скільки деталей виготовив кожний робітник?

90.* У трьох цехах заводу працює 101 робітниця. Кількість робітниць першого цеху становить $\frac{4}{9}$ кількості робітниць третього цеху, а кількість робітниць другого цеху — 80 % кількості робітниць третього. Скільки робітниць працює в першому цеху?

91.* Велосипедисти взяли участь у триденному поході. За другий і третій дні вони проїхали відповідно 120 % і $\frac{4}{5}$ відстані, яку подолали за перший день. Який шлях вони проїхали за перший день, якщо довжина всього маршруту становить 270 км?

92.* У 6 великих і 8 маленьких ящиків розклали 232 кг яблук. Скільки кілограмів яблук було в кожному ящику, якщо в кожному маленькому ящику було на 6 кг яблук менше, ніж у кожному великому?

93.* У двох залах кінотеатру 534 місця. В одному залі 12 однакових рядів, а в другому — 15 однакових рядів. У кожному ряду першого залу на 4 місця більше, ніж у кожному ряду другого. Скільки місць у кожному залі кінотеатру?

94.* Відстань між двома містами мотоциклістка проїхала за 0,8 год, а велосипедист — за 4 год. Швидкість велосипедиста на 48 км/год менша від швидкості мотоциклістки. Знайдіть швидкості мотоциклістки та велосипедиста.

95.* За 3 кг цукерок одного виду заплатили стільки, скільки за 3,5 кг цукерок другого виду. Яка ціна кож-

ного виду цукерок, якщо 1 кг цукерок першого виду на 24 грн дорожчий за 1 кг цукерок другого виду?

96.* Кілограм огірків на 8 грн дешевший від кілограма помідорів. Скільки коштує 1 кг помідорів, якщо за 3,2 кг помідорів заплатили стільки ж, скільки за 3,6 кг огірків?

97.* В одному баку було в 3 рази більше води, ніж у другому. Коли в перший бак долили 16 л води, а в другий — 80 л, то в обох баках води стало порівну. Скільки літрів води було спочатку в кожному баку?

98.* На одній полиці було в 4 рази більше книжок, ніж на другій. Коли з першої полиці взяли 5 книжок, а на другу поставили 16 книжок, то на обох полицях книжок стало порівну. Скільки книжок було спочатку на кожній полиці?

99.* Зараз батькові 26 років, а його синові — 2 роки. Через скільки років батько буде в 5 разів старший за сина?

100.* Зараз матері 40 років, а її доньці — 18 років. Скільки років тому донька була в 3 рази молодша від матері?

101.* Для шкільної бібліотеки придбали 40 орфографічних і тлумачних словників української мови, заплативши разом 6900 грн. Скільки було словників кожного виду, якщо орфографічний словник коштує 150 грн, а тлумачний — 240 грн?

102.* Вкладник поклав у банк 30 000 грн на два різних депозитних рахунки, причому за першим рахунком йому нараховували 7 % річних, а за другим — 8 % річних. Через рік він одержав 2220 грн прибутку. Яку суму було внесено на кожний рахунок?

103.* Є 19 монет по 2 грн і по 5 грн на загальну суму 62 грн. Скільки є монет кожного номіналу?

Конкурсний відбір видавництво «Генеза»

104.* У двох сховищах була однакова кількість вугілля. Коли з першого сховища вивезли 680 т вугілля, а з другого — 200 т, то в першому залишилося в 5 разів менше вугілля, ніж у другому. Скільки тонн вугілля було в кожному сховищі спочатку?

105.* У Марини й Василя було порівну грошей. Коли на купівлю книжок Марина витратила 180 грн, а Василь — 270 грн, то в Марини залишилося у 2 рази більше грошей, ніж у Василя. Скільки грошей було в кожного з них спочатку?

106.* В одному мішку було в 5 разів більше борошна, ніж у другому. Коли з першого мішка пересипали 12 кг борошна в другий мішок, то маса борошна в другому мішку склала $\frac{5}{7}$ маси борошна в першому. Скільки кілограмів борошна було в кожному мішку спочатку?

107.* В одному контейнері було в 3 рази більше вугілля, ніж у другому. Коли з першого контейнера пересипали 300 кг вугілля в другий контейнер, то маса вугілля в першому контейнері склала 60 % маси вугілля в другому. Скільки кілограмів вугілля було в кожному контейнері спочатку?

108.* Одному робітникові потрібно було виготовити 90 деталей, а другому — 60. Перший робітник щодня виготовляв 4 деталі, а другий — 5 деталей. Через скільки днів першому робітникові залишиться виготовити вдвічі більше деталей, ніж другому, якщо вони почали працювати одночасно?

109.* В одній цистерні було 200 л води, а в другій — 640 л. Коли з другої цистерни використали вдвічі більше води, ніж із першої, то в другій залишилося в 3,5 раза більше води, ніж у першій. Скільки літрів води використали з кожної цистерни?

110.* Із двох міст, відстань між якими дорівнює 385 км, виїхали назустріч один одному легковий і вантажний автомобілі. Легковий автомобіль їхав зі швидкістю 80 км/год, а вантажний — 50 км/год. Скільки часу їхав до зустрічі кожен із них, якщо вантажний автомобіль виїхав на 4 год пізніше за легковий?

111.* З одного села до другого вирушив пішохід зі швидкістю 4 км/год, а через 1,5 год після цього з другого села назустріч йому виїхав велосипедист зі швидкістю 16 км/год. Через скільки хвилин після виїзду велосипедист зустрівся з пішоходом, якщо відстань між селами дорівнює 14 км?

112.* Відстань між двома містами річкою на 55 км менша, ніж по шосе. З одного міста до другого можна дістатися теплоходом за 6 год, а по шосе автобусом — за 3 год 30 хв. Знайдіть швидкості автобуса й теплохода, якщо швидкість теплохода на 30 км/год менша від швидкості автобуса.

113.* Теплохід пройшов 4 год за течією річки та 3 год проти течії. Шлях, який пройшов теплохід за течією, на 48 км більший за шлях, пройдений ним проти течії. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2,5 км/год.

114.* Турист і туристка плили 5 год на плоту за течією річки та 1,5 год на моторному човні проти течії. Швидкість човна в стоячій воді дорівнює 24 км/год. Знайдіть швидкість течії, якщо проти течії турист і туристка проплили на 23 км більше, ніж за течією.

115.** Під час розселення туристів і туристок у намети виявилося, що коли в кожний намет поселити 6 осіб, то 5 людям місця не вистачить, а якщо розселяти по 7 осіб, то 6 місць залишаться вільними. Скільки було туристів і туристок?

116." Під час підготовки новорічних подарунків для учнів і учениць 7 класу виявилося, що коли в кожний подарунок покласти по 4 апельсини, то не вистачить 3 апельсинів, а коли покласти по 3 апельсини, то залишаться зайвими 25 апельсинів. Скільки було апельсинів?

117." У двох ящиках було 55 кг печива. Коли з першого ящика переклали в другий $\frac{1}{3}$ маси печива, яке в ньому містилося, то в першому ящику залишилося на 5 кг більше печива, ніж стало в другому. Скільки кілограмів печива було в кожному ящику спочатку?

118." У двох кошиках було 24 кг груш. Коли з одного кошика переклали в другий $\frac{3}{7}$ маси груш, які були в першому, то маса груш у другому кошику стала вдвічі більшою за масу груш, що залишилися в першому. Скільки кілограмів груш було в кожному кошику спочатку?

119." На трьох полицях стояли книжки. На першій полиці стояло $\frac{4}{15}$ усіх книжок, на другій — 60 % усіх книжок, а на третій — на 8 книжок менше, ніж на першій. Скільки всього книжок стояло на трьох полицях?

120." У чотири бідони розлили молоко. У перший бідон налили 30 % усього молока, у другий — $\frac{5}{6}$ того, що в перший, у третій — на 26 л менше, ніж у перший, а в четвертий — на 10 л більше, ніж у другий. Скільки літрів молока розлили в чотири бідони?

121." Робітниця планувала щодня виготовляти по 20 деталей, щоб вчасно виконати виробниче завдання. Проте щодня вона виготовляла на 8 деталей більше,

ніж планувала, і вже за 2 дні до кінця терміну роботи виготовила 8 деталей понад план. Скільки днів за планом робітниця мала виконувати завдання?

122." Готуючись до екзамену, Олеся планувала щодня розв'язувати 10 задач. Оскільки вона щодня розв'язувала на 4 задачі більше, то вже за 3 дні до екзамену їй залишилося розв'язати 2 задачі. Скільки всього задач планувала розв'язати Олеся?

123." Із двох міст, відстань між якими дорівнює 270 км, виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. Через 2 год після початку руху відстань між ними становила 30 км. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість одного з них на 10 км/год більша за швидкість другого.

124." Маємо два сплави міді й цинку. Перший сплав містить 9 % цинку, а другий — 30 %. Скільки кілограмів кожного сплаву треба взяти, щоб отримати зливок сплаву масою 300 кг, який містить 23 % цинку?

125." Маємо два водно-сольових розчини. Перший розчин містить 25 % солі, а другий — 40 %. Скільки кілограмів кожного розчину треба взяти, щоб отримати розчин масою 50 кг, який містить 34 % солі?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

126. Обчисліть значення виразу:

1) $-9{,}6 : 12 - 29 : (-5{,}8) + 4 : (-25)$;

2) $-3{,}4 \cdot (4 - 4{,}6) + 12{,}4 \cdot (-0{,}8 - 2{,}2)$;

3) $\left(0{,}4 - \frac{3}{20}\right) \cdot 6\frac{2}{3} - 1{,}75 : \left(-7\frac{7}{8}\right)$.

127. Знайдіть значення виразу:

1) $14 - 6x$, якщо $x = 4;\ -2;\ \frac{3}{8}$;

2) $a^2 + 3$, якщо $a = 0;\ 0{,}4;\ -1\frac{1}{3}$;

3) $(2m - 1)n$, якщо $m = 0{,}2,\ n = -0{,}6$.

128. Заповніть таблицю, обчислюючи значення виразу $-3x+2$ для наведених значень x:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-3x+2$									

129. Яку цифру треба дописати ліворуч і праворуч до числа 37, щоб отримане число ділилося націло на 6?

130. Чи може бути цілим числом значення виразу:

1) $\frac{1}{x}$; 2) $\frac{x}{x+1}$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

131. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення кожного з виразів $n-2$, $n+24$, $n+26$ є простим числом.

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Обчисліть значення виразу $5-4b$ при $b=-2$.

А) 3; Б) -3; В) 13; Г) -13.

2. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{5}m+\frac{1}{3}n$, якщо $m=35$, $n=-18$.

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

3. Який із наведених виразів є записом різниці добутку чисел a і b та числа c?

А) $a-bc$; Б) $ab-c$; В) $a(b-c)$; Г) $(a-b)c$.

4. Серед наведених алгебраїчних виразів укажіть цілий.

А) $\frac{b}{b-7}$; В) $\frac{b+5}{7}$;

Б) $\frac{b+5}{b-7}$; Г) $\frac{b+5}{b}$.

5. Знайдіть корінь рівняння $7x+2=3x-6$.

А) 2; Б) 1; В) -2; Г) -1.

6. Яке з рівнянь є лінійним?

А) $2x=-3$; В) $|x|=4$;

Б) $\frac{1}{x}=0$; Г) $(x-1)(x-2)=0$.

Електронний відповідник «Гімназія»

7. Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=6$.

А) 12; Б) 36; В) −6; Г) −1.

8. Розв'яжіть рівняння $2(x-3)-(x+4)=x-10$.

А) 0; В) x — будь-яке число;
Б) коренів немає; Г) 10.

9. При якому значенні a рівняння $(a+4)x=a-3$ не має коренів?

А) 3; Б) −4; В) 0; Г) такого значення не існує.

10. Відомо, що 45 % числа a на 7 більше, ніж $\frac{1}{3}$ цього числа. Знайдіть число a.

А) 36; Б) 45; В) 60; Г) 90.

11. Три робітники виготовили 70 деталей. Перший робітник виготовив у 2 рази менше деталей, ніж другий, а третій — на 10 деталей більше, ніж перший.

Нехай перший робітник виготовив x деталей. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А) $x+2x+2x+10=70$; В) $x+2x+2x-10=70$;
Б) $x+2x+x+10=70$; Г) $x+2x+x-10=70$.

12. На першій ділянці було в 4 рази більше кущів малини, ніж на другій. Коли з першої ділянки пересадили на другу 12 кущів, то на другій стало у 2 рази менше кущів малини, ніж на першій.

Нехай на другій ділянці було спочатку x кущів. Яке з наведених рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $2(4x-12)=x+12$; В) $4x+12=2(x-12)$;
Б) $2(4x+12)=x-12$; Г) $4x-12=2(x+12)$.

4. Тотожно рівні вирази. Тотожності

Розглянемо дві пари виразів:

1) x^5-x і $5x^3-5x$;

2) $2(x-1)-1$ і $2x-3$.

У таблицях наведено значення цих виразів при *деяких* значеннях змінної x.

x	-2	-1	0	1	2
$x^5 - x$	-30	0	0	0	30
$5x^3 - 5x$	-30	0	0	0	30

x	-2	-1	0	1	2
$2(x-1)-1$	-7	-5	-3	-1	1
$2x-3$	-7	-5	-3	-1	1

Бачимо, що ці значення збігаються для кожної окремо взятої пари виразів.

Чи збережеться підмічена закономірність при *будь-яких інших* значеннях x?

Для виразів, записаних у першій таблиці, відповідь на це запитання заперечна: якщо, наприклад, $x = 3$, то $x^5 - x = 3^5 - 3 = 240$, а $5x^3 - 5x = 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3 = 120$.

Проте значення виразів, записаних у другій таблиці, збігаються при *будь-яких* значеннях x. Доведемо це.

$2(x-1)-1 = 2x-2-1 = 2x-3$, тобто після спрощення вираз $2(x-1)-1$ перетворився у вираз $2x-3$.

Означення. Вирази, відповідні значення яких є рівними при будь-яких значеннях змінних, що входять до них, називають тотожно рівними.

Наприклад, вирази $2(x-1)-1$ і $2x-3$ — тотожно рівні, а вирази $x^5 - x$ і $5x^3 - 5x$ не є тотожно рівними.

Ось ще приклади тотожно рівних виразів:

$$7(a+b) \text{ і } 7a+7b;$$

$$3x+y \text{ і } y+3x;$$

$$m^2np \text{ і } nm^2p;$$

$$a-(b+c) \text{ і } a-b-c.$$

Розглянемо рівність $7(a+b) = 7a+7b$. Згідно з розподільною властивістю множення вона є правильною при будь-яких значеннях змінних a і b.

Означення. **Рівність, яка є правильною при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають тотожністю.**

З пари тотожно рівних виразів легко отримати тотожність.

Наприклад, усі рівності

$$3x + y = y + 3x;$$
$$m^2np = nm^2p;$$
$$a - (b + c) = a - b - c$$

є тотожностями.

Зазначимо, що з тотожностями ви стикалися й раніше. Так, рівності, що виражають властивості додавання та множення чисел, є прикладами тотожностей:

$$a + b = b + a;$$
$$(a + b) + c = a + (b + c);$$
$$ab = ba;$$
$$(ab)\ c = a\ (bc);$$
$$a\ (b + c) = ab + ac.$$

Знайдемо значення виразу $11a - 3a + 2$ при $a = \frac{1}{8}$. Звичайно, можна відразу підставити в цей вираз замість a число $\frac{1}{8}$ та знайти значення числового виразу $11 \cdot \frac{1}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} + 2$. Однак набагато зручніше спочатку звести подібні доданки, замінивши даний вираз $11a - 3a + 2$ на тотожно рівний: $8a + 2$. Тепер знайдемо значення отриманого виразу при $a = \frac{1}{8}$. Маємо: $8 \cdot \frac{1}{8} + 2 = 3$.

Заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому, називають **тотожним перетворенням** виразу.

Зведення подібних доданків і розкриття дужок — приклади тотожних перетворень виразів. Спрощуючи

Конкурсний відбір Вибувають Гімназія

вираз, ми фактично заміняємо його простішим, тотожно рівним йому.

Для того щоб довести, що дана рівність є тотожністю (або, як ще говорять, довести тотожність), використовують такі прийоми (методи):

- *тотожно перетворюють одну із частин даної рівності, отримуючи другу частину;*
- *тотожно перетворюють кожну із частин даної рівності, отримуючи той самий вираз;*
- *показують, що різниця лівої і правої частин даної рівності тотожно дорівнює нулю.*

Приклад 1. Доведіть тотожність:

1) $2(3a+4b)+3(a-7b)-7(2a-7b)=-5a+36b$;

2) $0{,}6(x-5)+0{,}4(x+1)=0{,}8(x+2)+0{,}2(x-21)$;

3) $a(b-c)+b(c-a)=c(b-a)$.

Розв'язання. 1) Спростимо ліву частину рівності:

$$2(3a+4b)+3(a-7b)-7(2a-7b)=$$
$$=6a+8b+3a-21b-14a+49b=-5a+36b.$$

Тотожність доведено.

2) Спростимо ліву та праву частини рівності:

$0{,}6(x-5)+0{,}4(x+1)=0{,}6x-3+0{,}4x+0{,}4=x-2{,}6$;

$0{,}8(x+2)+0{,}2(x-21)=0{,}8x+1{,}6+0{,}2x-4{,}2=x-2{,}6$.

Отримали той самий вираз. Отже, тотожність доведено.

3) Розглянемо різницю лівої і правої частин рівності:

$$a(b-c)+b(c-a)-c(b-a)=$$
$$=ab-ac+bc-ab-bc+ac=0.$$

Тотожність доведено. ◀

Приклад 2. Доведіть, що рівність

$$(a+2)(a-3)=a^2-6$$

не є тотожністю.

Розв'язання. Щоб довести, що рівність не є тотожністю, достатньо навести *контрприклад*: указати

таке значення змінної (змінних, якщо їх кілька), при якому дана рівність не справджується.

Наприклад, при $a = 1$ маємо:

$(a + 2)(a - 3) = (1 + 2)(1 - 3) = -6$; $a^2 - 6 = 1 - 6 = -5$.

Отже, дана рівність не є тотожністю. ◀

1. Які вирази називають тотожно рівними? **2.** Що називають тотожністю? **3.** Що називають тотожним перетворенням виразу? **4.** Які тотожні перетворення виразів ви знаєте? **5.** Які прийоми використовують для доведення тотожностей?

У назвах сотень від 200 до 900 (складні числівники) відмінюємо обидві частини, наприклад: Н. в. *двісті, п'ятсот, сімсот*, Р. в. *двохсот, п'ятисот, семисот*, Д. в. *двомстам, п'ятистам, семистам*, Зн. в. *двісті, п'ятсот, сімсот*, Ор. в. *двомастами, п'ятьмастами, сьомастами*, М. в. (*на*) *двохстах, п'ятистах, семистах*.

Зверніть увагу: змінюючи складені числівники, кожне слово і відмінюємо, і пишемо окремо, наприклад: *шістдесяти двох, сімдесятьома трьома, на семистах дев'яноста шістьох*.

ВПРАВИ

132.° Які властивості арифметичних дій дають можливість стверджувати, що дані вирази є тотожно рівними:

1) $ab + cd$ і $cd + ab$;
2) $(a + 1) + b$ і $a + (1 + b)$;
3) $a \cdot 4b$ і $4ab$;
4) $(x + 2)(x + 3)$ і $(3 + x)(2 + x)$;
5) $7(a - 4)$ і $7a - 28$?

133.° Чи є тотожністю рівність:

1) $2x - 12 = 2(x - 6)$;
2) $a - b = -(b - a)$;
3) $3m + 9 = 3(m + 9)$;
4) $(a + b) \cdot 1 = a + b$;
5) $(a + b) \cdot 0 = a + b$;
6) $(a - a)(b + b) = 0$;
7) $3a - a = 3$;
8) $4x + 3x = 7x$;

Розкуповано Видавництво «Гімназія»

9) $a-(b+c)=a-b+c$;
10) $m+(n-k)=m+n-k$;
11) $4a-(3a-5)=a+5$;
12) $(a-5)(a+3)=(5-a)(3+a)$?

134.° Чи є тотожно рівними вирази:
1) $8(a-b+c)$ і $8a-8b+8c$;
2) $-2(x-4)$ і $-2x-8$;
3) $(5a-4)-(2a-7)$ і $3a-11$?

135.° Порівняйте значення виразів a^2 і $|a|$ при $a=-1$; 0; 1. Чи можна стверджувати, що рівність $a^2=|a|$ є тотожністю?

136.° Якому з наведених виразів тотожно дорівнює вираз $-3a+8b-a-11b$:
1) $-4a+3b$; 3) $-4a-3b$;
2) $-3a+3b$; 4) $-3a-3b$?

137.° Серед виразів $-10a+7$; $-10a-7$; $-14a+7$; $-14a-7$ знайдіть такий, який тотожно дорівнює виразу $-12a+(7-2a)$.

138.° Доведіть тотожність:
1) $-5x-6(9-2x)=7x-54$;
2) $\frac{1}{3}(12-0,6y)+0,3y=0,1y+4$;
3) $3(7-a)-7(1-3a)=14+18a$;
4) $3(2,1m-n)-0,9(7m+2n)=-4,8n$.

139.° Доведіть тотожність:
1) $(5a-3b)-(4+5a-3b)=-4$;
2) $5(0,4x-0,3)+(0,8-0,6x)=1,4x-0,7$.

140.° Які з наведених рівностей є тотожностями:
1) $(2a-3b)^2=(3b-2a)^2$;
2) $(a-b)^3=(b-a)^3$;
3) $|a+5|=a+5$;
4) $|a-b|=|b-a|$;
5) $|a^2+4|=a^2+4$;
6) $|a+b|=|a|+|b|$;
7) $|a-1|=|a|-1$;
8) $a^2-b^2=(a-b)^2$?

Комунальний Вибір Вільнянський гімназія

141.* Запишіть у вигляді рівності твердження:
1) сума протилежних чисел дорівнює нулю;
2) добуток даного числа та числа 1 дорівнює 1;
3) добутком даного числа та числа -1 є число, протилежне даному;
4) модулі протилежних чисел рівні;
5) різниця протилежних чисел дорівнює нулю.

Які із цих рівностей є тотожностями?

142.* Доведіть тотожність:
1) $a + b - 10ab = 2a\,(3 - b) - 3b\,(a - 2) - 5\,(ab + a + b)$;
2) $6\,(5a - 3) + (10 - 20a) - (6a - 4) = 5a - (3a - (2a - 4))$.

143.* Доведіть тотожність:
1) $(3m-7)\cdot 0{,}6 - 0{,}8(4m-5) - (-1{,}7 - 1{,}4m) = 1{,}5$;
2) $7a(3b+4c) - 3a\left(b + \frac{1}{3}c\right) = 9a(2b+3c)$.

144.* Доведіть, що не є тотожністю рівність:
1) $(a+3)^2 = a^2 + 9$;
2) $(b - 1)\,(b + 1) = (b - 1)\,b + 1$;
3) $(c+1)^3 = c^3 + 1$;
4) $|\,m\,| - |\,n\,| = |\,n\,| - |\,m\,|$.

145.* Доведіть, що не є тотожно рівними вирази:
1) $4 - m^2$ і $(2-m)^2$;
2) $|\,-m\,|$ і m;
3) $m^3 + 8$ і $(m+2)(m^2+4)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

146. Пасажирський поїзд проходить відстань між двома станціями за 12 год. Якщо одночасно від цих станцій вирушать назустріч один одному пасажирський і товарний поїзди, то вони зустрінуться через 8 год після початку руху. За який час товарний поїзд може подолати відстань між цими станціями?

147. Відомо, що $a > 0$ і $a + b < 0$. Порівняйте:
1) b і 0;
2) $|\,a\,|$ і $|\,b\,|$.

Комунальний вищий навчальний заклад «Київська академічна гімназія»

148. Ціну товару спочатку збільшили на 50 %, а потім зменшили на 50 %. Збільшилася чи зменшилася початкова ціна товару та на скільки відсотків?

149. Загальна довжина річки Дніпро становить 2201 км, з них у межах України — 981 км. Загальна довжина річки Десна становить 1130 км, з них у межах України — 591 км. Яка із цих річок має більший відсоток довжини в межах України?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

150. На дошці записано числа 1, 2, 3, ..., 10. За один крок дозволено вибрати два числа, до кожного з них додати 5 або від кожного відняти 1. Чи можна за допомогою цих операцій домогтися того, щоб усі числа, записані на дошці, виявилися рівними?

5. Степінь з натуральним показником

Як ви знаєте, у математиці придумали спосіб коротко записувати добуток, усі множники якого рівні.

Наприклад, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Вираз $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ називають **степенем**, число $\frac{1}{2}$ — **основою степеня**, а число 3 — **показником степеня**.

Означення. Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.

Степінь з основою a та показником n записують a^n і читають: «a в n-му степені». Степені з показниками 2 і 3 можна прочитати інакше: запис a^2 читають «a у квадраті», запис a^3 — «a в кубі».

Звернемо увагу, що в означенні степеня на показник n накладено обмеження $n > 1$. І це зрозуміло: адже не прийнято розглядати добуток, що складається з одного множника.

Конспект уроку «Вираз. Рівність. Рівняння»

А чи може показник степеня дорівнювати 1? Відповідь на це запитання дає таке означення.

Означення. Степенем числа a з показником 1 називають саме це число.

Таке означення дає змогу будь-яке число вважати степенем з показником 1.

Отже, з наведених означень випливає, що

$$a^n = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}, \text{ де } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

Легко підрахувати, що, наприклад, $2^5 = 32$. У таких випадках говорять, що число 2 **піднесли до п'ятого степеня** й отримали число 32. Також можна сказати, що виконали **дію піднесення до п'ятого степеня** числа 2.

Рівність $(-3)^2 = 9$ означає, що число -3 **піднесли до квадрата** й отримали число 9, а рівність $(-3)^3 = -27$ означає, що число -3 **піднесли до куба** й отримали число -27.

Зауважимо, що алгебраїчний вираз може бути побудований не тільки за допомогою додавання, віднімання, множення та ділення, а й за допомогою дії піднесення до степеня.

Очевидно, що коли $a > 0$, то $a^n > 0$; коли $a = 0$, то $0^n = 0$.

Отже, ***підносячи невід'ємне число до степеня, отримуємо невід'ємне число.***

При піднесенні від'ємного числа до степеня можливі два випадки.

- Якщо показник степеня — парне число, то при піднесенні до степеня множники можна розбити на пари.

Наприклад, $(-2)^6 = ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2))$.

Конкурсний відбір Видавництво Ранок

- Якщо показник степеня — непарне число, то один множник залишиться без пари.

Наприклад, $(-2)^5 = ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2)) \cdot (-2)$.

Оскільки кожні два від'ємні множники дають у добутку додатне число, то справедливе таке твердження:

підносячи від'ємне число до степеня з парним показником, отримуємо додатне число, а підносячи від'ємне число до степеня з непарним показником, отримуємо від'ємне число.

Чи можна, наприклад, число 5 піднести до степеня 0 або до степеня -2? Можна. Як це зробити, ви дізнаєтеся із курсу алгебри 8 класу.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $(x-10)^8 = -1$.

Розв'язання. Оскільки при піднесенні до степеня з парним показником будь-якого числа отримуємо невід'ємне число, то дане рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає. ◀

Приклад 2. Доведіть, що значення виразу $10^{200} + 2$ ділиться націло на 3.

Розв'язання. Запис значення виразу 10^{200} складається із цифри 1 і двохсот цифр 0, а запис значення виразу $10^{200} + 2$ — із цифри 1, цифри 2 і ста дев'яноста дев'яти цифр 0. Отже, сума цифр числа, яка є значенням даного виразу, дорівнює 3. Тому й саме це число ділиться націло на 3. ◀

Приклад 3. Доведіть, що значення виразу $9^n - 1$ ділиться націло на 10 при будь-якому парному значенні n.

Розв'язання. Якщо n — парне число, то вираз 9^n можна подати у вигляді добутку, який містить парну кількість дев'яток.

Тоді можна записати: $9^n = (9 \cdot 9)(9 \cdot 9)\ldots(9 \cdot 9)$.

Оскільки $9 \cdot 9 = 81$, то останньою цифрою значення виразу $(9 \cdot 9)(9 \cdot 9)\ldots(9 \cdot 9)$ є одиниця. Тому останньою цифрою значення виразу $9^n - 1$ є нуль.

Отже, значення виразу $9^n - 1$ ділиться націло на 10 при будь-якому парному значенні n. ◀

1. Що називають степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1? **2.** Як читають запис a^n? a^2? a^3? **3.** Що називають степенем числа a з показником 1? **4.** Чому дорівнює значення виразу 0^n при будь-якому натуральному значенні n? **5.** Яке число, додатне чи від'ємне, отримують при піднесенні до степеня додатного числа? **6.** Яким числом, додатним чи від'ємним, є значення степеня від'ємного числа, якщо показник степеня є парним числом? непарним числом?

Під час відмінювання іменників можуть відбуватися чергування голосних звуків: звук [і] в закритому складі замінює звук [е] або [о] у відкритому складі. Наприклад: *степінь — степеня, степенем, тотожність — тотожності, властивість — властивості.*

ВПРАВИ

151.° Прочитайте вираз, назвіть основу та показник степеня:

1) 9^6; 3) $0{,}3^5$; 5) $(-0{,}6)^3$; 7) 73^1;
2) $2{,}4^7$; 4) $(-8)^2$; 6) $(-a)^{11}$; 8) $(3p)^{12}$.

152.° Спростіть вираз, замінивши добуток однакових множників степенем:

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
2) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$;
3) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;
4) $2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m$;
5) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$;
6) $\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{\text{10 множників}}$;
7) $\underbrace{0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot \ldots \cdot 0{,}4}_{k \text{ множників}}$;
8) $\underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{m \text{ множників}}$.

153.° Подайте у вигляді степеня добуток:

1) $c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$;
2) $5b \cdot 5b \cdot 5b$;
3) $\underbrace{(-x) \cdot (-x) \cdot \ldots \cdot (-x)}_{19 \text{ множників}}$;
4) $\underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{d \text{ множників}}$.

154.° Користуючись означенням степеня, подайте у вигляді добутку степінь:

1) 11^6;
2) $0{,}1^4$;
3) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$;
4) $(5c)^3$;
5) $(-3{,}6)^7$;
6) $(a+b)^5$.

155.° Користуючись означенням степеня, подайте у вигляді добутку степінь:

1) 3^7;
2) $\left(2\frac{1}{7}\right)^4$;
3) $(c+d)^3$;
4) $(a-b)^2$.

156.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $0{,}6^2$; 2) 0^6; 3) $(-9)^2$; 4) 1^{12}; 5) $(-1)^{12}$; 6) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$?

157.° Знайдіть значення виразу:

1) 8^3;
2) $1{,}5^3$;
3) $(-1{,}9)^2$;
4) $\left(\frac{1}{9}\right)^3$;
5) $(-0{,}6)^3$;
6) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$;
7) $(-0{,}01)^3$;
8) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^5$.

158.° Виконайте піднесення до степеня:

1) 7^2;
2) $0{,}5^3$;
3) $1{,}2^2$;
4) $(-1)^7$;
5) $(-0{,}8)^3$;
6) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$.

159.° Заповніть таблицю:

a	2	-2	10	-10	0,1	$-0{,}1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
a^2								
a^3								
a^4								

Конкурсний відбір
Видавництво
«Ігнатзя»

160.° Заповніть таблицю:

a	-6	6	$-0{,}4$	$0{,}4$	3	$0{,}03$	$\frac{1}{2}$	-1	0
$10a^2$									
$(10a)^2$									

161.° Площа Кримського півострова — найбільшого півострова України —дорівнює $2{,}55 \cdot 10^4$ км^2. Виразіть цю площу натуральним числом у квадратних кілометрах.

162.° Відстань від Землі до Сонця дорівнює $1{,}495 \cdot 10^{11}$ м. Виразіть цю відстань натуральним числом у метрах.

163.° Площа материків і островів Землі становить $1{,}49 \cdot 10^8$ км^2, а площа океанів — $3{,}61 \cdot 10^8$ км^2. Виразіть ці площі натуральними числами у квадратних кілометрах.

164.° Обчисліть:

1) $8^2 - 1^{10}$; 2) $0{,}3 \cdot 2^4$; 3) $(4{,}2 - 4{,}1)^4 \cdot 25^2$.

165.° Обчисліть:

1) $4^3 + 3^5$; 2) $0{,}6^3 - 0{,}4^3$; 3) $0{,}12 \cdot 5^4$.

166.° Знайдіть значення виразу:

1) $x^2 - x^3$, якщо $x = 0{,}1$;
2) $15a^2$, якщо $a = 0{,}4$;
3) $(x - y)^5$, якщо $x = 0{,}8$, $y = 0{,}6$;
4) a^2b^3, якщо $a = 0{,}6$, $b = 0{,}5$;
5) $(x^2 - y^2) : (x - y)$, якщо $x = 5$, $y = 3$;
6) $(x^2 - y^2) : x - y$, якщо $x = 5$, $y = 3$;
7) $x^2 - y^2 : (x - y)$, якщо $x = 5$, $y = 3$;
8) $x^2 - y^2 : x - y$, якщо $x = 5$, $y = 3$.

167.° Знайдіть значення виразу:

1) $16 - c^3$, якщо $c = 2$;
2) $(16x)^6$, якщо $x = 0{,}125$;

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

3) a^3b^2, якщо $a=10$, $b=0{,}1$;

4) $4a^4-a$, якщо $a=3$.

168.° Не виконуючи обчислення, порівняйте:

1) $(-5{,}8)^2$ і 0;

2) 0 і $(-3{,}7)^3$;

3) $(-12)^7$ і $(-6)^4$;

4) -8^8 і $(-8)^8$;

5) $(-17)^6$ і 17^6;

6) $(-34)^5$ і $(-39)^5$.

169.° Не виконуючи обчислення, порівняйте:

1) 0 і $(-1{,}9)^{10}$;

2) 0 і $(-76)^{15}$;

3) $(-0{,}1)^{12}$ і $(-12)^{25}$;

4) $\left(-4\frac{7}{9}\right)^9$ і $\left(-5\frac{8}{11}\right)^9$.

170.° Чи є правильною рівність:

1) $3^2+4^2=7^2$;

2) $5^2+12^2=13^2$;

3) $1^2+3^2+5^2+7^2+9^2=13^2$;

4) $(1+2+3)^2=1^3+2^3+3^3$?

171.° Доведіть, що $1^2+2^2+4^2+6^2+8^2=11^2$.

172.• Порівняйте з нулем значення виразів: 2^{100}; $(-2)^{100}$; -2^{100}; $-(-2)^{100}$. Чи є серед цих виразів такі, що набувають рівних значень?

173.• Порівняйте з нулем значення виразів: 5^{101}; -5^{101}; $(-5)^{101}$; $-(-5)^{101}$. Чи є серед цих виразів такі, що набувають рівних значень?

174.• Розташуйте в порядку спадання значення виразів:

1) 0,3; $0{,}3^2$; $0{,}3^3$;

2) $-0{,}4$; $(-0{,}4)^2$; $(-0{,}4)^3$.

175.• *(Домашня практична робота)* Розташуйте вирази в порядку зростання їхніх значень:

$\left(-\frac{1}{9}\right)^1$ Х, $\left(-\frac{1}{9}\right)^2$ А, $\left(-\frac{1}{9}\right)^3$ А, $\left(\frac{1}{9}\right)^1$ Н, $\left(\frac{1}{9}\right)^3$ Л, $\left(-\frac{1}{9}\right)^4$ Р.

Комунальний заклад «Вінницький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Марії Оплачко»

Букви, що відповідають даним виразам, утворять прізвище видатної української спортсменки, олімпійської чемпіонки. Знайдіть в інтернеті відомості про те, у якому виді спорту вона виступає та які спортивні досягнення має.

176.* Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $(-4)^7 \cdot (-12)^9$;
2) $(-5)^6 \cdot (-17)^{11}$;
3) $(-14)^4 \cdot (-25)^{14}$;
4) $(-7)^8 \cdot 0^6$.

177.* Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $(-2)^{14} \cdot (-3)^{15} \cdot (-4)^{16}$;
2) $(-5)^{17} \cdot (-6)^{18} \cdot (-7)^{19}$.

178.* Запишіть:

1) числа 16; 64; 256 у вигляді степеня з основою 4;
2) числа 0,09; 0,027; 0,00243 у вигляді степеня з основою 0,3.

179.* Подайте число: 1) 10 000; 2) −32; 3) 0,125; 4) −0,00001; 5) $-\frac{8}{343}$ у вигляді степеня з показником, більшим за 1, і з найменшою за модулем основою.

180.* Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

1) квадрат різниці чисел 7 і 5;
2) різниця квадратів чисел 7 і 5;
3) куб суми чисел 4 і 3;
4) сума кубів чисел 4 і 3.

181.* Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

1) сума куба числа 5 і квадрата числа 8;
2) куб різниці чисел 9 і 8;
3) сума квадратів чисел 2,5 і 0,25;
4) квадрат суми чисел 7,8 і 8,2.

182.* Скільки в 1 км міститься:

1) метрів; 2) сантиметрів; 3) міліметрів?

Відповідь запишіть у вигляді степеня числа 10.

Розділ 1 Вправи для повторення

183.* Яке число треба підставити замість зірочки, щоб утворилася правильна рівність:

1) $1\ \text{га} = 10^{*}\ \text{а}$;
2) $1\ \text{га} = 10^{*}\ \text{м}^2$;
3) $1\ \text{а} = 10^{*}\ \text{м}^2$;
4) $1\ \text{га} = 10^{*}\ \text{см}^2$?

184.* Швидкість світла у вакуумі дорівнює 300 000 км/с.

1) Запишіть цю величину, використовуючи степінь числа 10.
2) Виразіть швидкість світла в метрах за секунду; запишіть результат, використовуючи степінь числа 10.

185.* Скільки в 1 м^2 міститься:

1) квадратних дециметрів;
2) квадратних сантиметрів;
3) квадратних міліметрів?

Відповідь запишіть у вигляді степеня числа 10.

186.* У таблиці наведено відстані від Сонця до деяких планет Сонячної системи:

Планета	Марс	Сатурн	Меркурій	Юпітер
Відстань від Сонця, км	$2{,}28 \cdot 10^8$	$1{,}427 \cdot 10^9$	$5{,}79 \cdot 10^7$	$7{,}781 \cdot 10^8$

Запишіть назви цих планет у порядку спадання відстаней від них до Сонця.

187.* У таблиці наведено площі деяких держав Європи, округлені до сотень квадратних кілометрів:

Держава	Італія	Андорра	Люксембург	Угорщина
Площа держави, км^2	$3{,}013 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^2$	$2{,}6 \cdot 10^3$	$9{,}3 \cdot 10^4$

Запишіть назви цих держав у порядку зростання їхніх площ.

188.* При якому значенні x дорівнює нулю значення виразу:

1) $(2x-3)^2$;
2) $(x+4)^4$;
3) $(6x-1)^5$?

189.* Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{10} = -1$; 2) $(x-5)^4 = -16$.

190.** Доведіть, що вираз $x^2 + (x-1)^2$ набуває лише додатних значень.

191.** Доведіть, що вираз $(x+1)^2 + |x|$ набуває лише додатних значень.

192.** Доведіть, що не має додатних коренів рівняння:

1) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; 2) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.

193.** Доведіть, що не має від'ємних коренів рівняння:

1) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 5 = 0$;

2) $x^8 + x^4 + 1 = x^7 + x^3 + x$.

194.** При яких значеннях x і y є правильною рівність:

1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $(x-1)^4 + (y+2)^6 = 0$?

195.** При яких значеннях x і y є правильною рівність $x^8 + (y-3)^2 = 0$?

196.** При якому значенні змінної набуває найменшого значення вираз:

1) $x^2 + 7$; 2) $(x-1)^4 + 16$?

197.** При якому значенні змінної набуває найбільшого значення вираз:

1) $10 - x^2$; 2) $24 - (x+3)^6$?

198.** Доведіть, що значення виразу:

1) $101^{101} + 103^{103}$ ділиться націло на 2;

2) $16^7 + 15^8 - 11^9$ ділиться націло на 10;

3) $10^{10} - 7$ ділиться націло на 3.

199.** Доведіть, що значення виразу $10^{100} + 8$ ділиться націло на 9.

200.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу:

1) $6^n - 1$; 2) $111^n - 6$

ділиться націло на 5.

Конкурсний вибір
Видавництво
«Гімназія»

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

201. Михайло та Катерина збирали гриби. Михайло зібрав у 5 разів менше грибів, ніж Катерина. Яку частину всіх грибів зібрала Катерина?

202. До зливку сплаву масою 400 кг, що містить 15 % міді, додали 25 кг міді. Яким став відсотковий вміст міді в новому зливку?

203. Відомо, що одне із чисел a, b і c додатне, друге — від'ємне, а третє дорівнює нулю, причому $|a| = b^2(b-c)$. Визначте, яке із чисел є додатним, яке від'ємним і яке дорівнює нулю.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

204. Порівняйте значення виразів:

1) $2^2 \cdot 2^3$ і 2^5;

2) $4^2 \cdot 4^1$ і 4^3;

3) $(3^3)^2$ і 3^6;

4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^3$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^9$;

5) $5^3 \cdot 2^3$ і $(5 \cdot 2)^3$;

6) $(0{,}25 \cdot 4)^2$ і $0{,}25 \cdot 4^2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

205. У деякому місті від будь-якої станції метро можна доїхати до будь-якої іншої станції (можливо, з пересадками). Доведіть, що існує станція, яку можна закрити (без права проїзду через неї), і при цьому від будь-якої станції з тих, що залишилися, можна буде доїхати до будь-якої іншої.

6. Властивості степеня з натуральним показником

Розглянемо добуток двох степенів з однаковими основами, наприклад a^2a^5. Цей вираз можна подати у вигляді степеня з основою a:

$$a^2a^5 = (aa) \cdot (aaaaa) = aaaaaaa = a^7.$$

Отже, $a^2a^5 = a^{2+5}$.

Аналогічно легко переконатися в тому, що, наприклад, $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$, $a \cdot a^9 = a^{1+9} = a^{10}$.

Конкурсний відбір Видавництво Київ Вязя

Простежується закономірність: $a^m a^n = a^{m+n}$, де m і n — довільні натуральні числа.

Проте жодна кількість конкретних прикладів не може гарантувати, що наведена рівність є правильною для *будь-яких* натуральних чисел m і n. Істинність її можна встановити тільки шляхом **доведення**.

У математиці твердження, справедливість якого встановлено за допомогою доведення, називають **теоремою**.

Теорема 6.1. ***Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n є справедливою рівність***

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Доведення. ⊙ Для $m > 1$ і $n > 1$ маємо:

$$a^m a^n = (\underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множників}})(\underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}) = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ множників}} = a^{m+n}.$$

Оскільки не прийнято розглядати добуток, що складається з одного множника, то для повноти доведення слід окремо розглянути випадки: $m = 1$ і $n > 1$; $m > 1$ і $n = 1$; $m = n = 1$. Так, якщо $m = 1$ і $n > 1$, то

$$a \cdot a^n = a \cdot (\underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}) = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{(n+1) \text{ множників}} = a^{n+1}.$$

Випадки, коли $m > 1$ і $n = 1$ або коли $m = n = 1$, розгляньте самостійно. ●

Тотожність $a^m a^n = a^{m+n}$ виражає **основну властивість степеня**.

Аналогічна властивість має місце й для добутку трьох і більше степенів. Наприклад,

$$3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^7 = (3^2 \cdot 3^3) \cdot 3^7 = 3^{2+3} \cdot 3^7 = 3^{(2+3)+7} = 3^{2+3+7} = 3^{12}.$$

Отже, ***перемножуючи степені з однаковими основами, показники додають, а основу залишають тією самою.***

Конкурсний відбір видавництво «Ранок»

Розглянемо вираз $a^9 : a^4$, де $a \neq 0$. Він є часткою двох степенів з однаковими основами. Оскільки $a^4 \cdot a^5 = a^9$, то за означенням частки можна записати $a^9 : a^4 = a^5$, тобто $a^9 : a^4 = a^{9-4}$. Цей приклад підказує, що має місце така теорема.

Теорема 6.2. ***Для будь-якого числа a, відмінного від нуля, і будь-яких натуральних чисел m і n таких, що $m > n$, є справедливою рівність***

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доведення. ⊙ Розглянемо добуток степенів a^n і a^{m-n}. Використовуючи основну властивість степеня, маємо:

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)} = a^{n+m-n} = a^m.$$

Тоді за означенням частки:

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \bullet$$

Із цієї теореми випливає таке правило:

при діленні степенів з однаковими основами від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника, а основу залишають тією самою.

Розглянемо вираз $(a^3)^4$. Він є степенем з основою a^3 і показником 4. Тому

$$(a^3)^4 = a^3 a^3 a^3 a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4} = a^{12}.$$

Цей приклад підказує, що має місце така теорема.

Теорема 6.3. ***Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n є справедливою рівність***

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Доведення. ⊙ Очевидно, що для $n = 1$ рівність, яку треба довести, є правильною. Для $n > 1$ маємо:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ доданків}}} = a^{mn}. \bullet$$

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

Із цієї теореми випливає таке правило:

при піднесенні степеня до степеня показники перемножують, а основу залишають тією самою.

Наприклад, $(3^7)^2 = 3^{7\cdot 2} = 3^{14}$, $(x^k)^3 = x^{k\cdot 3} = x^{3k}$.

Покажемо, як можна перетворити степінь добутку, наприклад вираз $(ab)^3$:

$$(ab)^3 = (ab)\cdot(ab)\cdot(ab) = (aaa)\cdot(bbb) = a^3b^3.$$

У загальному випадку має місце така теорема.

Теорема 6.4. ***Для будь-яких чисел a і b та будь-якого натурального числа n є справедливою рівність***

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Доведення. ⊙ Очевидно, що для $n = 1$ рівність, яку треба довести, є правильною. Для $n > 1$ маємо:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ множників}} = (\underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ множників}})(\underbrace{bb\cdot\ldots\cdot b}_{n \text{ множників}}) = a^n b^n. \bullet$$

Аналогічна властивість має місце й для добутку трьох або більше множників. Наприклад,

$$(abc)^n = ((ab)\cdot c)^n = (ab)^n \cdot c^n = a^n b^n c^n.$$

Отже, ***при піднесенні добутку до степеня кожний множник підносять до степеня й отримані результати перемножують.***

Приклад 1. Спростіть вираз:

1) $(a^5)^2\cdot(a^6)^7$; 2) $(-a^4)^9$; 3) $(-a^4)^8$.

Розв'язання. 1) Застосувавши послідовно правило піднесення степеня до степеня та правило множення степенів з однаковою основою, отримаємо:

$$(a^5)^2\cdot(a^6)^7 = a^{10}\cdot a^{42} = a^{52}.$$

2) Оскільки $-a^4 = -1\cdot a^4$, то, застосувавши правило піднесення добутку до степеня, отримаємо:

$$(-a^4)^9 = (-1\cdot a^4)^9 = (-1)^9\cdot(a^4)^9 = -1\cdot a^{36} = -a^{36}.$$

3) Маємо: $(-a^4)^8 = (-1\cdot a^4)^8 = (-1)^8(a^4)^8 = 1\cdot a^{32} = a^{32}$. ◀

Конкурсний вибір
Видавництво
«Гімназія»

Приклад 2. Подайте у вигляді степеня вираз $216a^3b^6$.

Розв'язання. Маємо:

$$216a^3b^6 = 6^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3 = (6ab^2)^3. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. Знайдіть значення виразу $\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$.

Розв'язання.

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. Порівняйте значення виразів:

1) $(-11)^{14} \cdot (-11)^3$ і $(-11)^{16}$;
3) 5^{30} і 9^{20};
2) $(-12)^{19}$ і $(-12)^{15}$;
4) 16^3 і 65^2.

Розв'язання. 1) Маємо: $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 = (-11)^{17}$. Зазначимо, що $(-11)^{17} < 0$. Разом з тим $(-11)^{16} > 0$.

Отже, $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 < (-11)^{16}$.

2) Оскільки $|(-12)^{19}| > |(-12)^{15}|$, а числа, які треба порівняти, від'ємні, то $(-12)^{19} < (-12)^{15}$.

3) Оскільки $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ і $9^{20} = (9^2)^{10} = 81^{10}$, то $5^{30} > 9^{20}$.

4) Маємо: $16^3 = (4^2)^3 = (4^3)^2 = 64^2$. Отже, $16^3 < 65^2$. $\blacktriangleleft$

Приклад 5. Якою цифрою закінчується значення виразу 2^{100}?

Розв'язання. Маємо: $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$. Оскільки $6 \cdot 6 = 36$, то добуток будь-яких чисел, що закінчуються на 6, є числом, остання цифра якого 6.

Тому коли число закінчується цифрою 6, то будь-який його степінь закінчується цифрою 6.

Відповідь: 6. $\blacktriangleleft$

1. Яка тотожність виражає основну властивість степеня? **2.** Як помножити степені з однаковими основами? **3.** Як поділити степені з однаковими основами? **4.** Як піднести степінь до степеня? **5.** Як піднести добуток до степеня?

Комунальний заклад «Видавництво «Освіта»

Пригадайте. Нерівності читаємо так: ліву частину — у називному відмінку, а праву — у родовому відмінку, наприклад: $23 < 49$ — *двадцять три менше від сорока дев'яти;* $n > 6$ — *«ен» більше за шість;* $3^2 < 10$ — *три у квадраті менше від десяти.*

ВПРАВИ

206.° Подайте у вигляді степеня добуток:

1) m^5m^4;
2) xx^7;
3) a^3a^3;
4) $6^8 \cdot 6^3$;
5) $y^3y^5y^9$;
6) c^8c^9c;
7) $(b-c)^{10}\,(b-c)^6$;
8) $11^2 \cdot 11^4 \cdot 11^6$;
9) $x^4xx^{11}x^2$;
10) $(ab)^5 \cdot (ab)^{15}$;
11) $(2x+3y)^6 \cdot (2x+3y)^{14}$;
12) $(-xy)^2 \cdot (-xy)^7 \cdot (-xy)^9$.

207.° Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^5a^8;
2) a^2a^2;
3) a^9a;
4) aa^2a^3;
5) $(m+n)^{13} \cdot (m+n)$;
6) $(cd)^8 \cdot (cd)^{18} \cdot (cd)$.

208.° Замініть зірочку таким степенем з основою a, щоб виконувалася рівність:

1) $a^6 \cdot * = a^{14}$;
2) $* \cdot a^6 = a^7$;
3) $a^{10} \cdot * \cdot a^2 = a^{18}$.

209.° Подайте вираз a^{12} у вигляді добутку двох степенів з основами a, один з яких дорівнює:

1) a^6;
2) a^4;
3) a^3;
4) a^5;
5) a.

210.° Подайте у вигляді степеня частку:

1) $a^{12} : a^3$;
2) $b^6 : b$;
3) $c^7 : c^6$;
4) $(a+b)^8 : (a+b)^4$.

211.° Знайдіть значення виразу:

1) $7^7 : 7^5$;
2) $10^{18} : 10^{14}$;
3) $0{,}6^9 : 0{,}6^6$;
4) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^5 : \left(-1\frac{1}{8}\right)^3$.

212.° Виконайте ділення:

1) $m^{10} : m^2$;
2) $x^5 : x^4$;
3) $y^{18} : y^6$.

Копіювати вибір заборонено (фрагмент)

213.° Подайте у вигляді степеня з основою m вираз:

1) $(m^5)^3$; 3) $((m^2)^4)^6$;

2) $(m^3)^4$; 4) $(m^7)^2 \cdot (m^4)^9$.

214.° Подайте у вигляді степеня з основою n вираз:

1) $(n^2)^8$; 3) $((n^3)^2)^{10}$;

2) $(n^9)^5$; 4) $(n^{12})^4 \cdot (n^{21})^2$.

215.° Подайте степінь у вигляді добутку степенів:

1) $(ab)^6$; 3) $(3c)^7$; 5) $(-0{,}2cd)^4$;

2) $(mnp)^5$; 4) $(-8xy)^3$; 6) $\left(\frac{3}{7}kt\right)^9$.

216.° Подайте степінь у вигляді добутку степенів:

1) $(ax)^2$; 2) $(xyz)^{12}$; 3) $(7m)^8$; 4) $(-0{,}3bc)^{11}$.

217.° Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^3b^3; 3) $9m^2n^2$; 5) $-\frac{27}{343}c^3d^3$;

2) $-m^7$; 4) $64x^3y^3$; 6) $0{,}0001k^4p^4$.

218.° Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $x^{12}y^{12}$; 3) $32p^5q^5$;

2) $-125m^3n^3$; 4) $1\,000\,000\,000a^9b^9c^9$.

219.° ***(Знайдіть помилку)*** Знайдіть і виправте помилки, які зробив Василь Ледащенко, перетворюючи вирази, що містять степені:

1) $a^4a^3 = a^{12}$; 4) $3^2 \cdot 5^2 = 15^4$; 7) $3 \cdot 4^3 = 12^3$;

2) $a \cdot a = 2a$; 5) $2^3 \cdot 7^3 = 14^5$; 8) $a^7b^7 = (ab)^{14}$;

3) $(a^3)^2 = a^9$; 6) $(2a)^4 = 8a^4$; 9) $a^3b^2 = (ab)^6$.

220.° Подайте вираз у вигляді степеня та обчисліть його значення (у разі потреби скористайтеся таблицею степенів чисел 2 і 3, розміщеною на форзаці підручника):

1) $2^3 \cdot 2^4$; 4) $0{,}5^{12} \cdot 2^{12}$; 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot 9^9$;

2) $(3^2)^3$; 5) $2^{12} : 2^8$; 8) $2{,}5^5 \cdot 40^5$.

3) $0{,}2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}2^3$; 6) $(3^4)^5 : 3^{19}$;

Контрольний відділ «Видавництво «Ранок»

221.° Подайте вираз у вигляді степеня та обчисліть його значення (у разі потреби скористайтеся таблицею степенів чисел 2 і 3 на форзаці підручника):

1) $2^2 \cdot 2^3$; 3) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^3$; 5) $7^9 \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^9$;

2) $(2^2)^3$; 4) $0{,}3^8 : 0{,}3^5$; 6) $12{,}5^3 \cdot 8^3$.

222.* Спростіть вираз:

1) $-x \cdot x^2$; 3) $-x \cdot (-x)^2$;

2) $(-x)^2 \cdot x$; 4) $(-x) \cdot (-x)^2 \cdot (-x)$.

223.* Спростіть вираз:

1) $(-a)^2 \cdot a^3$; 3) $a^2 \cdot (-a)^3$;

2) $-a^2 \cdot a^3$; 4) $-a^2 \cdot (-a)^3$.

224.* Спростіть вираз:

1) $(-a^5)^2$; 2) $(-a^3)^3$; 3) $(-a^4)^7 \cdot (-a^2)^6$.

225.* Спростіть вираз:

1) $((-a^6)^5)^9$; 2) $((-a^{11})^2)^3$.

226.* Замість зірочки запишіть такий вираз, щоб виконувалася рівність:

1) $(*)^4 = c^{20}$; 2) $(*)^2 = c^{14}$; 3) $(*)^n = c^{8n}$; 4) $(*)^7 = c^{7n}$,

де n — натуральне число.

227.* Подайте степінь a^7 у вигляді добутку двох степенів з основою a всіма можливими способами.

228.* Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $a^n a^5$; 2) aa^n; 3) $a^3 a^n$; 4) $(a^3)^n$; 5) $(a^n)^2 \cdot (a^5)^n$,

де n — натуральне число.

229.* Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $2^4 \cdot 2^4$; 2) $2^4 + 2^4$; 3) $2^n \cdot 2^n$; 4) $2^n + 2^n$,

де n — натуральне число.

230.* Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $3^5 + 3^5 + 3^5$;

2) $4^k + 4^k + 4^k + 4^k$, де k — натуральне число.

231.* Доведіть, що коли сторону квадрата збільшити в n разів, то його площа збільшиться в n^2 разів.

Робочий зошит Вибір видавництва «Гімназія»

232.* У скільки разів збільшиться об'єм куба, якщо його ребро збільшити в m разів?

233.* Запишіть у вигляді степеня з показником 2 вираз:

1) a^2b^6; 3) $x^4y^{10}z^{18}$; 5) $81c^{10}d^{32}p^{44}$.

2) x^8y^{14}; 4) $4m^{12}n^{16}$;

234.* Запишіть у вигляді степеня з показником 3 вираз:

1) a^3b^6; 2) x^9y^{15}; 3) $8x^{12}y^{18}z^{24}$; 4) $0{,}001m^{30}n^{45}$.

235.* Подайте у вигляді степеня з основою 5 вираз:

1) 125^6; 2) $(25^4)^2$.

236.* Подайте у вигляді степеня з основою -5 вираз:

1) 625^5; 2) $((-25)^2)^3$.

237.* Подайте у вигляді степеня з основою 2 вираз:

1) $8^9 \cdot 4^5$; 2) $32 \cdot 16^6 \cdot 64^3$.

238.* Знайдіть значення виразу:

1) $(6^4)^4 : (6^5)^3$; 3) $\dfrac{7^{14} \cdot (7^2)^3}{(7^3)^6 \cdot 7^2}$; 5) $\dfrac{3^8 \cdot 7^8}{21^7}$;

2) $8^3 : 4^4$; 4) $\dfrac{25^3 \cdot 125^2}{5^{10}}$; 6) $\dfrac{5^9 \cdot 4^6}{20^6}$.

239.* Обчисліть:

1) $100^5 : 1000^2$; 3) $\dfrac{4^3 \cdot 16^2}{2^{12}}$;

2) $\dfrac{3^{10} \cdot (3^3)^5}{(3^5)^4 \cdot 3}$; 4) $\dfrac{45^{10}}{5^8 \cdot 3^{19}}$.

240.* Обчисліть значення виразу:

1) $\left(1\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{10}$; 3) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8$.

2) $5^{14} \cdot 0{,}2^{12}$;

241.* Знайдіть значення виразу:

1) $10^5 \cdot 0{,}1^7$; 2) $1{,}9^{14} \cdot \left(\frac{10}{19}\right)^{15}$.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

242.* Порівняйте значення виразів:

1) $(-5)^{21} \cdot (-5)$ і $(-5)^{24}$;
3) $(-8)^5 \cdot (-8)^4$ і $(-8)^8$;
2) $(-7)^8 \cdot (-7)^7$ і $(-7)^{17}$;
4) $(-6)^3 \cdot (-6)^9$ і $(-6)^{13}$.

243.** Замініть зірочку таким степенем, щоб виконувалася рівність:

1) $8 \cdot * = 2^8$;
2) $a^n \cdot * = a^{3n+2}$, де n — натуральне число.

244.** Запишіть вираз 3^{24} у вигляді степеня з основою:

1) 3^3; 2) 3^{12}; 3) 9; 4) 81.

245.** Запишіть вираз 2^{48} у вигляді степеня з основою:

1) 2^4; 2) 2^{16}; 3) 8; 4) 64.

246.** Порівняйте значення виразів:

1) 2^{300} і 3^{200};
3) 27^{20} і 11^{30};
2) 4^{18} і 18^9;
4) $3^{10} \cdot 5^8$ і 15^9.

247.** Порівняйте значення виразів:

1) 10^{40} і $10\,001^{10}$;
3) 8^{12} і 59^6;
2) 124^4 і 5^{12};
4) 6^{14} і $2^{16} \cdot 3^{12}$.

248.* Відомо, що сума $625 + 625 + \ldots + 625$ дорівнює 5^{101}. Скільки доданків у цій сумі?

249.* Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):

1) 4^{100}; 2) 3^{4n}; 3) 4^n; 4) 3^n?

250.* Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):

1) 9^{2n}; 2) 7^{4n}; 3) 7^{2n}?

251.* Доведіть, що значення виразу:

1) $17^8 + 19$ ділиться націло на 10;
2) $64^{64} - 1$ ділиться націло на 5;
3) $3^{4n} + 14$, де n — натуральне число, ділиться націло на 5.

252.* Доведіть, що значення виразу:

1) $4^{40} - 1$; 2) $2004^{171} + 171^{2004}$

ділиться націло на 5.

253.* Доведіть, що $48^{25} < 344^{17}$.

Електронний підручник видавництва «Ранок»

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

254. Сім'я Федоренків складається із шести осіб: батька, матері, доньки-студентки, двох дітей шкільного віку та дідуся-пенсіонера. Щомісячний бюджет сім'ї формується із заробітної плати батька в розмірі 21 300 грн, заробітної плати матері (22 200 грн), стипендії доньки (1230 грн) та пенсії дідуся (8820 грн). Скільки гривень у місяць припадає на кожного із шести членів сім'ї?

255. (*Задача з українського фольклору.*) Кум Іван спитав у кума Степана: «Скільки в тебе качок?» Кум Степан відповів: «Качок у мене стільки, що як висидять вони мені ще стільки ж каченят, та ще придбаю одну качку, та ще тричі куплю стільки ж, скільки цих качок і каченят, то всього буде їх у мене 100». Скільки качок було в кума Степана?

256. Малярка може пофарбувати кімнату за 6 год, а маляр — за 4 год. Спочатку малярка працювала 2 год, а потім до неї приєднався маляр. За скільки годин було пофарбовано кімнату?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

257. Спростіть вираз:

1) $3a \cdot (-1{,}2)$; 3) $-7a \cdot 9b$; 5) $-\frac{3}{14}m \cdot \frac{7}{9}n$;

2) $-0{,}2b \cdot (-0{,}5)$; 4) $2{,}4x \cdot 2y$; 6) $-\frac{1}{4}a \cdot \frac{4}{3}b \cdot (-3c)$.

258. Спростіть вираз $20m \cdot (-0{,}3n)$ і знайдіть його значення при $m = \frac{5}{12}$, $n = -4$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

259. Трамвайні квитки мають номери від 000 000 до 999 999. Номер називають «щасливим», якщо сума трьох його перших цифр дорівнює сумі трьох останніх. Доведіть, що кількість «щасливих» квитків є парною.

Конкурсний відбір «Видавничий дім «Гімназія»

7. Одночлени

Розглянемо вирази:

$$2b;\ \frac{1}{3}xy^2;\ -ab;\ m^3\cdot 3k^5;\ (3{,}14)^2\,pq^3\cdot(-7)r^2t^4.$$

Кожен із них є добутком чисел, змінних та їхніх степенів. Такі вирази називають **одночленами**.

Домовилися також вважати одночленами всі числа, будь-які змінні та їхні степені. Так, одночленами є вирази:

$$-5;\ 0{,}3;\ x;\ t^2;\ 2^3.$$

Зауважимо, що, наприклад, вирази

$$2a+b,\ x-1,\ a:b,\ y^2+y-2$$

не є одночленами, оскільки вони, крім множення та піднесення до степеня, містять ще й інші дії.

Коли ми бачимо одночлен $3ab^3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)abc$, виникає природне бажання спростити його. Маємо:

$$3ab^3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)abc=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)aab^3bc=-2a^2b^4c.$$

Отриманий одночлен містить *тільки один числовий множник, відмінний від нуля, який стоїть на першому місці*. Усі інші множники — це степені з *різними* основами. Такий вигляд одночлена називають **стандартним виглядом одночлена**.

Наведемо ще приклади одночленів стандартного вигляду:

$$-\frac{1}{8}xy;\ 2{,}8a^3;\ 7x^2yz^3t^5.$$

Зауважимо, що, наприклад, вирази $a^2\cdot 2b^3$ і $-3x^2xy^3$ не є одночленами стандартного вигляду. Справді, хоча перший із них і має єдиний числовий множник, але він не стоїть на першому місці. У другому — степінь з основою x записано двічі.

Проте ці одночлени легко **привести** (перетворити) до стандартного вигляду:

$$a^2 \cdot 2b^3 = 2a^2b^3 \text{ і } -3x^2xy^3 = -3x^3y^3.$$

До одночленів стандартного вигляду також належать числа, відмінні від нуля, змінні та їхні степені. Так, -2, 3^2, x, b^3 — одночлени стандартного вигляду.

Число 0, а також одночлени, які тотожно дорівнюють нулю, наприклад $0x^2$, $0ab$ тощо, називають **нуль-одночленами**. Їх не вважають одночленами стандартного вигляду.

Означення. Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом одночлена.

Наприклад, коефіцієнти одночленів $-3a^2bc$ і $0{,}07x$ відповідно дорівнюють -3 і $0{,}07$.

Узагалі, будь-який одночлен стандартного вигляду має коефіцієнт. І навіть, наприклад, в одночленів x^2y і $-mn$, у записі яких числовий множник не використовують, коефіцієнтами є числа 1 і -1 відповідно. І це зрозуміло, адже $x^2y = 1 \cdot x^2y$, $-mn = -1 \cdot mn$.

Розглянемо одночлени $\frac{2}{3}x^3yz$ і $-2zx^3y$. У них однакові буквені частини, тобто буквені частини є тотожно рівними виразами. Такі одночлени називають **подібними**. До подібних одночленів також належать і числа. Наприклад, 7 і -5 — подібні одночлени.

Звернемо увагу на те, що, наприклад, в одночленів $\frac{2}{3}x^3y^2z$ і $-2zx^3y$ буквені частини не однакові, хоча й складаються з одних і тих самих змінних. Тому вони не є подібними.

Означення. Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Степінь одночлена, який є числом, відмінним від нуля, вважають рівним нулю.

Також вважають, що нуль-одночлен степеня не має.

Наприклад, степінь одночлена $-3{,}8m^2xy^7$ дорівнює 10, а степені одночленів x^3 і 9 дорівнюють відповідно 3 і 0.

Розглянемо два одночлени $\frac{1}{5}ab^3$ і $10abx$. Одночлен $\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx$ є їхнім добутком. Спростимо його:

$$\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx = \left(\frac{1}{5} \cdot 10\right)(aa)(b^3b)x = 2a^2b^4x.$$

Отже, добутком двох одночленів є одночлен. Його зазвичай записують у стандартному вигляді.

При піднесенні одночлена до степеня також отримують одночлен. Піднесемо, наприклад, до четвертого степеня одночлен $-\frac{1}{2}xy^3z^2$. Маємо:

$$\left(-\frac{1}{2}xy^3z^2\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 \cdot (z^2)^4 = \frac{1}{16}x^4y^{12}z^8.$$

Приклад 1. Спростіть вираз $0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2$.

Розв'язання. Маємо:

$$0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2 =$$
$$= 0{,}2a^2b^4 \cdot (-5)^2 \cdot (a^3)^2 b^2 = 0{,}2a^2b^4 \cdot 25a^6b^2 =$$
$$= 0{,}2 \cdot 25a^2a^6b^4b^2 = 5a^8b^6. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Значення змінних a і b такі, що $4a^3b^4 = 7$. Знайдіть значення виразу $-\frac{2}{7}a^6b^8$.

КОНКУРСНИЙ ВІДБІР ВІДДІЛЕННЯ КІМНАЗІЯ

Розв'язання. Маємо:

$$-\frac{2}{7}a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot 16a^6b^8 = -\frac{1}{56}\cdot (4a^3b^4)^2 = -\frac{1}{56}\cdot 7^2 = -\frac{1}{56}\cdot 49 = -\frac{7}{8}. \blacktriangleleft$$

1. Які вирази називають одночленами? **2.** Поясніть, який вигляд одночлена називають його стандартним виглядом. **3.** Що називають коефіцієнтом одночлена? **4.** Які одночлени називають подібними? **5.** Що називають степенем одночлена?

ВПРАВИ

260.° Чи є одночленом вираз:

1) $5xy$;
2) $-\frac{1}{3}a^2b^3c$;
3) $m+n$;
4) 8;
5) 0;
6) $\frac{4}{7}pk^4$;
7) $\frac{6m^2k^3}{11a^5}$;
8) b^9;
9) m^4m;
10) $3(a^2-b^2)$;
11) $-2\frac{4}{9}aa^2b^3b^6$;
12) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^2x^5x^3yz^{10}$?

261.° Укажіть, які з одночленів записано в стандартному вигляді:

1) $5mnm^2$;
2) $1{,}4ab^7c^3$;
3) $-7t^8\cdot 4t^5$;
4) $-abc$;
5) $\frac{6}{13}x^8y^9$;
6) $m^6n^4\cdot 10$.

262.° Чи є подібними одночлени:

1) $5a$ і $7a$;
2) $3a^2b^3c$ і $6a^2b^3c$;
3) $8x^2y^4$ і $8x^2y^5$;
4) $3y^2$ і $2y^3$;
5) $\frac{1}{2}m^7n^8$ і $\frac{1}{2}m^8n^7$;
6) $-0{,}1a^9b^{10}$ і $0{,}1a^9b^{10}$?

263.° Запишіть одночлен, подібний даному, коефіцієнт якого в 4 рази більший за коефіцієнт даного одночлена:

1) $1{,}4x^3y^7$;
2) $c^4d^{10}p^2$;
3) $1\frac{1}{4}a^5b^5c^9$.

Конкурсний відділ Видавництво «Гімназія»

264.° Заповніть таблицю:

Одночлен	Стандартний вигляд одночлена	Коефіцієнт одночлена	Степінь одночлена
$1,2c^4c^8$			
$0,6m^2n^3 \cdot 4m^5n^2$			
$\frac{2}{7}a^2 \cdot 3,5b$			
$-5x^2 \cdot 0,2xy$			
$-1,6x^3y^6 \cdot 0,5x^2y^5$			

265.° Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $9a^4aa^6$;
2) $3x \cdot 0,4y \cdot 6z$;
3) $7a \cdot (-9ac)$;
4) $-3\frac{1}{3}m^5 \cdot 9mn^9$;
5) $-5x^2 \cdot 0,1x^2y \cdot (-2y)$;
6) $c \cdot (-d) \cdot c^{18}$.

266.° Подайте одночлен у стандартному вигляді, підкресліть його коефіцієнт:

1) $6bb^2$;
2) $1,5c^3d^4 \cdot 8c^2d^5$;
3) $2u^4 \cdot 4t^3 \cdot (-3t^7)$;
4) $4,5a^2bc^7 \cdot 2a^8b^6c$.

267.° Знайдіть значення одночлена:

1) $5x^2$, якщо $x = -4$;
2) $-4,8a^4b^3$, якщо $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$;
3) $\frac{4}{9}m^3n^2p^3$, якщо $m = -3$, $n = 5$, $p = -1$.

268.° Знайдіть значення одночлена:

1) $3m^3$, якщо $m = -3$;
2) $\frac{7}{16}a^2b^4$, якщо $a = -\frac{1}{7}$, $b = 2$.

Конкурсний відбір видавництво «Гімназія»

269.° Знайдіть добуток одночленів:

1) $2a$ і $5b$; 2) $-m$ і $4n$; 3) $6x$ і $-8y^2$; 4) $-\frac{1}{7}x^3$ і $-7x^2$.

270.° Виконайте множення одночленів:

1) $13c^2d \cdot (-3cd)$;
2) $-4m^3 \cdot 0{,}25m^6$;
3) $0{,}7x^6y^9 \cdot 0{,}3xy$;
4) $56x^5y^{14} \cdot \frac{2}{7}x^2y$.

271.° ***(Домашня практична робота)*** Розшифруйте прізвище видатної української науковиці, математикині, докторки фізико-математичних наук, професорки. Номер прикладу відповідає місцю, на якому стоїть буква у слові.

1) $0{,}6a^4b^3 \cdot 4a^2b$;
2) $-2{,}8a^2b^5 \cdot 0{,}5a^4b^2$;
3) $-3ab \cdot (-7a^2b)$;
4) $1{,}6a^2b \cdot (-0{,}25a^3b^2)$;
5) $-0{,}7a^2b^2 \cdot (-3a)$;
6) $\frac{3}{4}a^2b^4 \cdot \frac{2}{15}a^2b^2$;
7) $-2{,}6a^3b \cdot \frac{2}{13}a^2b^3$;
8) $1{,}2a^5b^3 \cdot (-2ab)$.

Відповідь	$21a^3b^2$	$2{,}1a^3b^2$	$0{,}1a^4b^6$	$-2{,}4a^6b^4$
Буква	**Р**	**Е**	**Н**	**О**
Відповідь	$-1{,}4a^6b^7$	$-0{,}4a^5b^3$	$2{,}4a^6b^4$	$-0{,}4a^5b^4$
Буква	**І**	**Ч**	**В**	**К**

Знайдіть в інтернеті відомості про життя і діяльність цієї науковиці, зокрема дізнайтеся, членкинею яких іноземних математичних товариств вона є.

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

272.° Піднесіть до квадрата одночлен:

1) $6a$; 3) $-9a^4b^5$; 5) $\frac{1}{8}x^3y^6$;

2) $3b^2$; 4) $-0{,}2m^8n^9$; 6) $-\frac{5}{7}ab^2c^8$.

273.° Піднесіть до куба одночлен:

1) $2b$; 3) $\frac{1}{3}x^5$; 5) $-\frac{1}{4}x^3y^2$;

2) $10c^4$; 4) $-0{,}1m^7n^{10}$; 6) $-a^3b^2c$.

274.° Перетворіть в одночлен стандартного вигляду вираз:

1) $(3a^2b)^2$; 3) $(-10m^2y^8)^4$;

2) $(-0{,}2x^3y^4)^3$; 4) $(6x^6y^7z^8)^2$.

275.° Виконайте піднесення до степеня:

1) $(-7x^9y^{10})^2$; 2) $(0{,}5a^{12}b^{14})^2$; 3) $(3ab^4c^5)^4$.

276.• Чи є правильним твердження (відповідь обґрунтуйте):

1) одночлен $6x^2$ при будь-яких значеннях x набуває додатних значень;
2) одночлен $0{,}4a^4b^6$ при будь-яких значеннях a і b набуває невід'ємних значень;
3) одночлен $-\frac{1}{3}a^3$ при будь-яких значеннях a набуває від'ємних значень;
4) одночлен $-5b^2$ при будь-яких значеннях b набуває від'ємних значень?

277.• Подайте даний вираз у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $3a^2b^6$:

1) $3a^6b^8$; 3) $-2{,}7a^5b^7$;

2) $-12a^2b^{10}$; 4) $2\frac{2}{7}a^{20}b^{30}$.

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

278.* Яким одночленом треба замінити зірочку, щоб виконувалася рівність:

1) $* \cdot 3b^4 = 12b^6$;
2) $-5a^5b^2 \cdot * = -20a^6b^8$;
3) $-7a^3b^9 \cdot * = 4{,}2a^5b^{12}$;
4) $23a^{12}b^{16} \cdot * = -23a^{29}b^{17}$?

279.* Подайте у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $4a^{10}$;
2) $36a^8b^2$;
3) $0{,}16a^{14}b^{16}$;
4) $289a^{20}b^{30}c^{40}$.

280.* Подайте у вигляді куба одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $8x^6$;
2) $-27x^3y^9$;
3) $0{,}001x^{12}y^{18}$;
4) $-\frac{125}{216}x^{15}y^{21}z^{24}$.

281.* Подайте одночлен $64a^6b^{12}$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $2a^2b^8$;
2) квадрата одночлена стандартного вигляду;
3) куба одночлена стандартного вигляду.

282.* Подайте одночлен $81m^4n^{16}$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $-\frac{1}{3}mn^{14}$;
2) квадрата одночлена стандартного вигляду;
3) четвертого степеня одночлена стандартного вигляду.

283.* Спростіть вираз:

1) $2a^3 \cdot (-5a^4b^5)^2$;
2) $(-x^6y)^3 \cdot 11x^4y^5$;
3) $(-0{,}6a^3b^5c^6)^2 \cdot 3a^2c^8$;
4) $-1\frac{3}{11}m^4n^9 \cdot \left(-\frac{1}{7}mn^3\right)^2$;
5) $(3m^6n^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}m^9n\right)$;
6) $-(-2c^2d^5)^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}c^4d^5\right)^4$.

Контрольний примірник
Видавництво «Гімназія»

284.* Спростіть вираз:

1) $20a^8 \cdot (9a)^2$;
2) $(-b^5)^4 \cdot 12b^6$;
3) $(0{,}2x^7y^8)^3 \cdot 6x^2y^2$;
4) $\left(-\frac{1}{2}ab^4\right)^3 \cdot (4a^6)^2$.

285.** Замініть зірочки такими одночленами, щоб виконувалася рівність:

1) $(*)^2 \cdot (*)^3 = 9a^2b^3c^5$;
2) $(*)^3 \cdot (*)^4 = 16a^7b^6c^8$;
3) $(*)^3 \cdot (*)^2 = -72m^8n^{11}$;
4) $(*)^2 \cdot (*)^5 = 32x^{29}y^{21}z^9$.

286.** Значення змінних x і y такі, що $5x^2y^4 = 6$. Знайдіть значення виразу:

1) $1{,}5x^2y^4$;
2) $25x^4y^8$;
3) $-25x^6y^{12}$.

287.** Значення змінних a і b такі, що $3ab^3 = 4$. Знайдіть значення виразу:

1) $-1{,}2ab^3$;
2) $27a^3b^9$;
3) $-\frac{2}{3}a^2b^6$.

288.** Значення змінних a, b і c такі, що $2a^2b = 7$, $a^3c^2 = 2$. Знайдіть значення виразу:

1) $6a^5bc^2$;
2) $a^7b^2c^2$;
3) $2\frac{1}{7}a^8bc^4$.

289.** Значення змінних m, n і p такі, що $m^3n^2 = 3$, $\frac{1}{3}n^3p^2 = 5$. Знайдіть значення виразу:

1) $m^3n^5p^2$;
2) $2m^3n^8p^4$;
3) $-0{,}4m^{12}n^{11}p^2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

290. У магазині канцтоварів продавець сказав Дмитру, що за 9 однакових наборів фломастерів треба заплатити 245 грн. Дмитро одразу ж сказав, що продавець помилився. Як він це визначив?

291. Сорочка спочатку подешевшала на 10 %, а потім подорожчала на 20 %. У результаті цих двох переоцінок виявилося, що ціна сорочки змінилася на 48 грн. Знайдіть початкову ціну сорочки.

Конкурсний відбір
Видавництво «Гімназія»

292. Замініть зірочки такими цифрами, щоб:

1) число *5* ділилося націло на 3 і на 10;

2) число 13*2* ділилося націло на 9 і на 5;

3) число 58* ділилося націло на 2 і на 3.

Знайдіть усі можливі розв'язки.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

293. Спростіть вираз:

1) $6x-12x+15x-9x$;

2) $7a-9b-12a+14b$;

3) $-0{,}8k+0{,}9-1{,}7k+0{,}5k+1{,}4$;

4) $-\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{9}a-\frac{3}{4}b$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

294. Скількома способами можна поставити на шахівницю білу й чорну тури так, щоб вони не били одна одну?

8. Многочлени

У попередньому пункті ви дізналися, що добуток одночленів є одночленом. Інша справа із сумою одночленів. Наприклад, вирази $2a+b^2$ і $2a-b^2$ не є одночленами. Перший із них є сумою одночленів $2a$ і b^2, а другий — сумою одночленів $2a$ і $-b^2$.

Означення. **Вираз, який є сумою кількох одночленів, називають многочленом.**

Ось ще приклади многочленів:

$7xy+y-11$; $x^4-2x^3+5x^2-x+1$; $3a-a+b$; $11x-2x$.

Одночлени, з яких складено многочлен, називають **членами многочлена**. Так, членами многочлена $7xy+y-11$ є одночлени $7xy$, y і -11.

Многочлен, який складається з двох членів, називають **двочленом**, а той, який складається з трьох членів, — **тричленом**. Домовилися розглядати одночлен як окремий вид многочлена. Вважають, що такий многочлен складається з одного члена.

Зв'язки між многочленами, одночленами та їхнім окремим видом — числами ілюструє схема, зображена на рисунку 3.

Рис. 3

Якщо серед одночленів, з яких складається многочлен, є подібні, то їх називають **подібними членами многочлена**. Наприклад, у многочлені $\underline{7a^2b}-\underline{\underline{3a}}+\underline{\underline{4}}-\underline{a^2b}-\underline{\underline{1}}+\underline{a}+b$ подібні члени підкреслено однаковою кількістю рисочок.

Використовуючи правило зведення подібних доданків, спростимо цей многочлен:

$$7a^2b-3a+4-a^2b-1+a+b=6a^2b-2a+b+3.$$

Таке спрощення називають **зведенням подібних членів многочлена**. Це перетворення дає змогу замінити многочлен на тотожно рівний йому, але простіший — з меншою кількістю членів.

Розглянемо многочлен $2x^3y-xy+1$. Цей многочлен складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних.

Означення. Многочлен, складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних, називають многочленом стандартного вигляду.

Многочлени xy^2+x^2y, $2a^2b$, 5 є прикладами многочленів стандартного вигляду.

Комунальний заклад Видавництво Освіта

Зауважимо, що многочлен $3bab^2 + a \cdot 5 + a \cdot 2b^3 - a$ не є многочленом стандартного вигляду. Проте його можна перетворити у многочлен стандартного вигляду таким чином: записати в стандартному вигляді одночлени, з яких він складений, а потім звести подібні доданки.

Маємо:

$$3bab^2 + a \cdot 5 + a \cdot 2b^3 - a = \underline{3ab^3} + \underline{5a} + \underline{2ab^3} - \underline{a} = 5ab^3 + 4a.$$

Розглянемо многочлен стандартного вигляду $2x^3y - x^2y^2 + 5x^2y + y - 2$. Він складений з одночленів: $2x^3y$, $-x^2y^2$, $5x^2y$, y, -2, степені яких відповідно дорівнюють числам 4, 4, 3, 1, 0. Найбільший із цих степенів дорівнює числу 4. У цьому разі говорять, що степінь многочлена $2x^3y - x^2y^2 + 5x^2y + y - 2$ дорівнює 4.

Означення. Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких цей многочлен складений.

Наведемо ще приклади:

- степінь многочлена $3x^2 - xy + 5y^2$ дорівнює двом;
- степінь многочлена $3x^4y^2$ дорівнює шести;
- степінь многочлена 3 дорівнює нулю.

Число 0, а також многочлени, які тотожно дорівнюють нулю (наприклад, $0a + 0b$, $x - x$ і т. п.), називають **нуль-многочленами.** Їх не вважають многочленами стандартного вигляду.

Вважають, що нуль-многочлен степеня не має.

1. Що називають многочленом? **2.** Який многочлен називають двочленом? тричленом? **3.** Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду? **4.** Що називають степенем многочлена стандартного вигляду?

ВПРАВИ

295.° Чи є многочленом вираз:

1) x^2+1; 4) 9; 7) $(m+1)(m-4)$;
2) $4x^2y\cdot 3y$; 5) $xy\,(x^3-3y)$; 8) $(x+3y)^2$?
3) $\dfrac{1}{x^2+1}$; 6) $2x^3-2x+2$;

296.° Назвіть одночлени, сумою яких є даний многочлен:

1) $-5a^4+3a^2-a+8$;
2) $6x^3-10x^2y+7xy^2+y^3$;
3) t^3+3t^2-4t+5;
4) $1{,}8a^3b-3{,}7a^2b^2+16ab^3-b^4$.

297.° Запишіть многочлен, який складається з одночленів:

1) $3a$ і $2b$; 3) x^3, $2x^2$ і $-3x$;
2) $6c$ і $-5p$; 4) x^2, $-xy$ і y^2.

298.° Запишіть многочлен, який складається з одночленів:

1) $-4a$ і $5b$; 3) a^2, $2ab$ і b^2;
2) p^2 і $-5p$; 4) x^4, $-x^3y$, x^2y^2 і $-xy^3$.

299.° Знайдіть значення многочлена:

1) $2x^2+x-3$ при $x=0{,}5$;
2) x^3+5xy при $x=3$, $y=-2$;
3) $a^2-2ab+b^2$ при $a=-4$, $b=6$;
4) $y^4+7y^3-2y^2-y+10$ при $y=-1$.

300.° Знайдіть значення многочлена $2y^3-3y^2+4y-6$ при:

1) $y=1$; 2) $y=0$; 3) $y=-5$.

301.° Чи є даний многочлен многочленом третього степеня:

1) $3a^2+3a+3$; 4) a^2b+b^2-1;
2) a^3-1; 5) $a^3+a^2b^2+b^3$;
3) a^2+2a-6; 6) a^3+a+1?

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

302.° Чи є даний многочлен многочленом четвертого степеня:

1) $a^4 + 2a^2 - 1$;
2) $aa^3 - 5a + 6$;
3) $a^4 + a^2b^2 - a^4$;
4) $a^3b - 2ab^3 + b^5$?

303.° Перетворіть многочлен у многочлен стандартного вигляду. Укажіть його степінь:

1) $4b^2 + a^2 + 9ab - 18b^2 - 9ab$;
2) $8m^3 - 13mn - 9n^2 - 8m^3 - 2mn$;
3) $2a^2b - 7ab^2 - 3a^2b + 2ab^2$;
4) $0{,}9c^4 + 1{,}1c^2 + c^4 - 0{,}6c^2$;
5) $3x^2 + 6x - 5 - x^2 - 10x + 3$;
6) $b^3 - 3bc + 3b^3 + 8bc - 4b^3$.

304.° Перетворіть многочлен у многочлен стандартного вигляду. Укажіть його степінь:

1) $5x^2 - 10x + 9 - 2x^2 + 14x - 20$;
2) $-m^5 + 2m^4 - 6m^5 + 12m^3 - 18m^3$;
3) $0{,}2a^3 + 1{,}4a^2 - 2{,}2 - 0{,}9a^3 + 1{,}8a^2 + 3$;
4) $6x^2y - xy^2 - 8x^2y + 2xy^2 - xy + 7$.

305.° Закінчіть розташування членів многочлена в порядку спадання степенів змінної:

1) $8x - 3x^2 + 6x^3 - 4 = 6x^3 - 3x^2 + \ldots$;
2) $x^4 - 5x^6 - 3x^2 + 3x^3 - 7x + 2 = -5x^6 + x^4 + \ldots$;
3) $3 - 10x^5 + x = -10x^5 + \ldots$.

306.° Розташуйте члени многочлена в порядку зростання степенів змінної:

1) $4m^3 - 5m - m^2 + 6$;
2) $9a - 8a^4 + 5a^3 + 7 - a^2$.

307.• Зведіть подібні члени та знайдіть значення многочлена при вказаних значеннях змінних:

1) $-3a^5 + 4a^3 + 7a^5 - 10a^3 + 12a$, якщо $a = -2$;
2) $x^3y - 3xy^2 - 4x^3y + 8xy^2$, якщо $x = -1$, $y = -3$;
3) $0{,}8x^2 - 0{,}3x - x^2 + 1{,}6 + 1{,}1x - 0{,}6$, якщо $x = 5$.

Комунальний заклад «Вінницький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти»

308.* Зведіть подібні члени та знайдіть значення многочлена при вказаних значеннях змінних:

1) $2a^3+3ab-b^2-6a^3-7ab+2b^2$, якщо $a=2$, $b=-6$;

2) $mn-6mn^2-8mn-6mn^2$, якщо $m=0{,}5$, $n=-2$.

309.** З одночленів $4a$, $-3ab$, $7a^2$, $-8a^2$, $9ab$, $5a$ виберіть кілька та складіть із них:

1) многочлен стандартного вигляду;

2) многочлен, який містить подібні члени;

3) два многочлени стандартного вигляду, використавши при цьому всі дані одночлени.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

310. На рулоні шпалер написано, що довжина полотна шпалер відрізняється від номінальної не більше ніж на 0,8 %. Номінальна довжина полотна в рулоні дорівнює 10 м. Укажіть, якій з наведених величин не може дорівнювати довжина шпалер у цьому рулоні.

1) 10,06 м; 2) 9,94 м; 3) 9,9 м; 4) 10,02 м.

311. За зняття готівкових грошей у банкоматі деякого банку стягується комісія в розмірі 1,5 % від суми, що знімається. Яку суму буде списано з банківського рахунку під час зняття в банкоматі 2000 грн готівкою?

312. Крамниця закупає чашки за оптовою ціною 120 грн за одну штуку та продає з націнкою 30 %. Скільки коштуватиме така чашка в цій крамниці?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

313. Якому з поданих виразів тотожно дорівнює вираз $-9x+(4x-7)$:

1) $13x-7$; 2) $-5x+7$; 3) $-5x-7$; 4) $13x+7$?

314. Якому з поданих виразів тотожно дорівнює вираз $-8y-(3y-1)$:

1) $-11y+1$; 2) $-5y+1$; 3) $-11y-1$; 4) $-5y-1$?

315. Спростіть вираз:

1) $(2a+b)-(b-2a)$;
2) $(3a-4)+(3-5a)$;
3) $(m+n)-(2m+n)-(m-4n)$;
4) $(5c-2)-(6c+1)+(c-8)$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

316. Навколо зорі обертається кілька планет, відстані між якими не змінюються та є попарно різними. На кожній планеті перебуває один астроном, який спостерігає за найближчою планетою. Доведіть, що існують дві планети, на яких астрономи спостерігають один за одним.

9. Додавання і віднімання многочленів

Нехай треба додати два многочлени $3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11$ і $-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2$. Для цього візьмемо їх у дужки й поставимо між ними знак «плюс». Потім розкриємо дужки та зведемо подібні доданки (якщо такі є).

Запишемо:

$$(3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11)+(-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2)=$$
$$=\underline{3xy^2}+\underline{\underline{5x^2y^2}}-\underline{\underline{7xy}}+x+\underline{11}-\underline{2xy^2}+\underline{\underline{x^2y^2}}+\underline{\underline{2xy}}+y-\underline{2}=$$
$$=xy^2+6x^2y^2-5xy+x+y+9.$$

Отриманий многочлен є сумою двох даних многочленів.

Нехай тепер треба від першого з даних многочленів відняти другий. Для цього кожний із многочленів візьмемо в дужки й поставимо перед від'ємником знак «мінус». Потім розкриємо дужки та зведемо подібні доданки.

Маємо:

$$(3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11)-(-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2)=$$
$$=\underline{3xy^2}+\underline{\underline{5x^2y^2}}-\underline{\underline{7xy}}+x+\underline{11}+\underline{2xy^2}-\underline{\underline{x^2y^2}}-\underline{\underline{2xy}}-y+\underline{2}=$$
$$=5xy^2+4x^2y^2-9xy+x-y+13.$$

Київський видавничий Видавництво «Ранок»

Отриманий многочлен є різницею двох даних многочленів.

При додаванні та відніманні многочленів завжди отримуємо многочлен.

Приклад 1. Доведіть, що різниця двоцифрового числа й числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться націло на 9.

Розв'язання. Нехай дане число має a десятків і b одиниць. Тоді воно дорівнює $10a + b$.

Число, записане тими самими цифрами у зворотному порядку, дорівнює $10b + a$.

Розглянемо різницю $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$.

Очевидно, що значення виразу $9(a - b)$ ділиться націло на 9. ◀

Запис $\overline{ab}$ є позначенням двоцифрового числа, яке має a десятків і b одиниць, тобто $\overline{ab} = 10a + b$. Аналогічно запис $\overline{abc}$ є позначенням трицифрового числа, яке має a сотень, b десятків і c одиниць, тобто $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Приклад 2. Доведіть, що різниця $(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ba} + \overline{ca} + \overline{cb})$ ділиться націло на 18.

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned}(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ba} + \overline{ca} + \overline{cb}) &= \\ = (10a + b + 10a + c + 10b + c) - & \\ - (10b + a + 10c + a + 10c + b) &= \\ = (20a + 11b + 2c) - (20c + 11b + 2a) &= \\ = 20a + 11b + 2c - 20c - 11b - 2a &= \\ = 18a - 18c = 18(a - c). &\end{aligned}$$

Очевидно, що значення виразу $18(a - c)$ ділиться націло на 18. ◀

Приклад 3. Доведіть, що сума чотирьох послідовних парних натуральних чисел не ділиться націло на 8.

Конкурсний відбір
Видавництво
Грамотія

Розв'язання. Нехай перше із цих чисел дорівнює $2n$, де n — довільне натуральне число. Тоді наступними трьома числами є $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$ відповідно.

Розглядувана сума має такий вигляд:

$$2n+(2n+2)+(2n+4)+(2n+6)=8n+12.$$

Перший доданок $8n$ суми $8n+12$ ділиться націло на 8, а другий доданок 12 — не ділиться. Отже, сума $8n+12$ не ділиться націло на 8. ◀

ВПРАВИ

317.° Знайдіть суму многочленів:

1) $-6-a^2$ і a^2+13;
2) a^2-b+c^3 і $-a^2+b+c^2$;
3) $3x+14$ і $-x^2-3x-18$.

318.° Знайдіть суму многочленів:

1) $-5x^2-4$ і $8x^2-6$;
2) $2x+16$ і $-x^2-6x-20$.

319.° Знайдіть різницю многочленів:

1) x^2+8x і $4-3x$;
2) $2x^2+5x$ і $4x^2-2x$;
3) $4x^2-7x+3$ і $x^2-8x+11$;
4) $9m^2-5m+4$ і $-10m+m^3+5$.

320.° Знайдіть різницю многочленів:

1) $-5{,}4m+n^2$ і $n^2+3{,}9m$;
2) a^2-b^2 і $-b^2+a^2-c^2$;
3) $3x^2-6x+2$ і $x^2-7x+15$.

321.° Знайдіть суму і різницю двочленів:

1) $a+b$ і $a-b$;
2) $a-b$ і $b-a$;
3) $b-a$ і $a-b$;
4) $b-a$ і $-a-b$.

322.° Знайдіть суму і різницю двочленів:

1) $2a-b$ і $3a+b$;
2) $b-2a$ і $b-3a$;
3) $2a+b$ і $3a-b$;
4) $b-2a$ і $3a-b$.

323.° Спростіть вираз:

1) $(5a^4+3a^2b-b^3)-(3a^4-4a^2b-b^2)$;
2) $(7ab^2-8ab+4a^2b)+(10ab-7a^2b)$;
3) $(2c^2+3c)+(-c^2+c)-(c^2+4c-1)$.

Електронний відповідник «Видавництво «Магазія»

324.° Спростіть вираз:

1) $(3x^2-2x)+(-x^2+3x)$;

2) $(4c^2-2cd)-(10c^2+8cd)$;

3) $(3n^3-2mn+4m^3)-(2mn+3n^3)$.

325.• Який двочлен треба додати до даного двочлена, щоб їхня сума тотожно дорівнювала нулю:

1) $a+b$; 2) $a-b$; 3) $-a-b$?

326.• Розв'яжіть рівняння:

1) $10-(7-4x-x^2)=x^2+8x-9$;

2) $(5x^2-3)-(2x+5)=5x^2$;

3) $6+x^3-(2x-9+x^3)=5$;

4) $12-(6-9x-x^2)=x^2+5x-14$;

5) $3x^2-(2x^2-8x)-(x^2-3)=x$.

327.• Розв'яжіть рівняння:

1) $5y^3-(6y+1)=19-2y+5y^3$;

2) $7x-2x^2-(10-2x^2)=11$;

3) $8x^2+6x-(2x+8x^2-12)=4$;

4) $x^2-(x+1)-(x^2-7x+32)=3$.

328.• Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної, що входить до нього:

1) $1{,}6-7a^2-(0{,}8-4a^2)+(3a^2-0{,}7)$;

2) $3x^2-9x-(8-5x^2-(9x-8x^2))$.

329.• Доведіть, що значення виразу

$$(2c^2-3c)+1{,}8-c^2-(c^2-3c-2{,}2)$$

не залежить від значення змінної, що входить до нього.

330.• Який многочлен треба додати до тричлена $2a^2-5a+7$, щоб сума дорівнювала:

1) 5; 2) 0; 3) a^2; 4) $-2a$?

331.• Який многочлен треба відняти від двочлена $4a^3-8$, щоб їхня різниця дорівнювала:

1) -4; 2) 9; 3) $-2a^3$; 4) $3a$?

Конкурсний відбір «Видавництво «Ранок»

332.* Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоб утворилася тотожність:

1) $*-(3x^2-4xy+2y^2)=9x^2+y^2$;

2) $a^3-6a^2+2a-(*)=a^5+2a^2-7$.

333.* Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоб утворилася тотожність:

1) $(2x^2-14x+9)+(*)=20-10x$;

2) $(19a^4-17a^2b+b^3)-(*)=20a^4+5a^2b$.

334.* Подайте у вигляді многочлена число, яке складається:

1) із 4 сотень, x десятків і y одиниць;

2) з a тисяч, b сотень, 5 десятків і c одиниць.

335.* Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $\overline{cba}$; 2) $\overline{abc}-\overline{ab}$; 3) $\overline{a0c}+\overline{ac}$.

336.* Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $\overline{cab}+\overline{ca}$; 2) $\overline{abc}+\overline{bca}$; 3) $\overline{ab9}+\overline{7a}$.

337.* Доведіть, що значення виразу $(9-18n)-(6n-7)$ кратне 8 при будь-якому натуральному значенні n.

338.* Доведіть, що значення виразу $(6m+8)-(3m-4)$ кратне 3 при будь-якому натуральному значенні m.

339.* Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(5n+9)-(5-2n)$ при діленні на 7 дає остачу, яка дорівнює 4.

340.* Чому дорівнює остача при діленні на 9 значення виразу $(16n+8)-(7n+3)$, де n — довільне натуральне число?

341.** Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоби після зведення подібних членів отриманий многочлен не містив змінної a:

1) $4a^2-3ab+b+8+*$; 2) $9a^3-9a+7ab^2+bc+bm+*$.

342.** Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоби після зведення подібних членів многочлен $3x^2+$ $+5x^2y+7x-8y+15+*$ не містив:

1) членів з x^2;
2) членів зі змінною x;
3) членів зі змінною y.

343.** Подайте многочлен $3a^2b+8a^3-6a+12b-9$ у вигляді суми двох многочленів таких, щоб один із них не містив змінної b.

344.** Подайте многочлен

$$4mn^2+11m^4-7m^5+14mn-9n+3$$

у вигляді різниці двох многочленів з додатними коефіцієнтами.

345.** Подайте многочлен $6x^2-3xy+5x-8y+2$ у вигляді різниці двох многочленів таких, щоб один із них не містив змінної y.

346.** Доведіть, що:

1) сума п'яти послідовних натуральних чисел ділиться націло на 5;
2) сума трьох послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 6;
3) сума чотирьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться націло на 8;
4) сума чотирьох послідовних натуральних чисел не ділиться націло на 4;
5) остача від ділення на 6 суми шести послідовних натуральних чисел дорівнює 3.

347.** Доведіть, що:

1) сума трьох послідовних натуральних чисел кратна 3;
2) сума семи послідовних натуральних чисел ділиться націло на 7;
3) сума чотирьох послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 4;
4) сума п'яти послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 10.

348.** Доведіть, що:

1) сума чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ і $\overline{ca}$ ділиться націло на 11;

2) різниця чисел $\overline{abc}$ і $\overline{cba}$ ділиться націло на 99.

349.** Доведіть, що:

1) сума чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ і $\overline{cab}$ кратна 111;

2) різниця числа $\overline{abc}$ і суми його цифр ділиться націло на 9.

350.* Доведіть, що не існує таких значень x і y, при яких многочлени $5x^2-6xy-7y^2$ і $-3x^2+6xy+8y^2$ одночасно набували б від'ємних значень.

351.* Розставте дужки так, щоб рівність стала тотожністю:

1) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=2$;

2) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=-2$;

3) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

352. У листопаді телевізор коштував 22 000 грн. З 1 грудня магазин підвищив на 15 % ціну телевізора. 15 грудня в магазині оголосили про початок проведення передноворічних святкових продажів і знизили ціни на телевізори на 10 %. Коли було вигідніше купити телевізор: у листопаді чи під час передноворічних розпродажів?

353. Пальто коштувало 4000 грн. Спочатку його ціну знизили на 5 %, а потім підвищили на 5 %. Якою стала нова ціна пальто?

354. Через першу трубу басейн можна наповнити водою за 3 год, а через другу — за 6 год. Спочатку 2 год була відкрита перша труба, потім її закрили, але відкрили другу. За скільки годин було наповнено басейн?

355. У парку $\frac{7}{24}$ дерев становлять каштани, а $\frac{5}{18}$ — берези. Скільки всього дерев у парку, якщо їх більше за 100, але менше від 200?

Корисний відгук — безкоштовно «Магазія»

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

356. Знайдіть значення виразу, використовуючи розподільну властивість множення:

1) $12\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$; 2) $36\cdot\left(\frac{17}{18}-\frac{5}{12}+\frac{4}{9}\right)$; 3) $\left(\frac{5}{7}+\frac{5}{14}\right)\cdot\frac{28}{25}$.

357. Розкрийте дужки:

1) $4\,(2a-3b)$; 3) $(-2{,}6m+3{,}5n-7{,}2)\cdot(-10)$;

2) $0{,}3\,(9x-5y+7)$; 4) $-m\,(-n+8k-12)$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

358. Сашко й Наталка записують 30-цифрове число, використовуючи тільки цифри 1, 2, 3, 4, 5. Першу цифру пише Сашко, другу — Наталка й т. д. Наталка хоче отримати число, кратне 9. Чи зможе Сашко їй завадити?

ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яка з наведених рівностей не є тотожністю?

А) $-3\,(a-b)=-3a+3b$; В) $8a-(4a+1)=4a-1$;

Б) $9a-8a+a=2a$; Г) $-(x+3y)+(2x-y)=3x+2y$.

2. Знайдіть значення виразу $(-2{,}4+0{,}4)^4$.

А) -8; Б) 8; В) 16; Г) -16.

3. Спростіть вираз $(-a^6)^3\cdot(-a^7)^4$.

А) a^{20}; Б) $-a^{20}$; В) a^{46}; Г) $-a^{46}$.

4. Виконайте піднесення до степеня: $(0{,}3a^4)^2$.

А) $0{,}9a^6$; Б) $0{,}9a^8$; В) $0{,}09a^6$; Г) $0{,}09a^8$.

5. Який із наведених виразів є одночленом?

А) $0{,}4x+y$; Б) $0{,}4x-y$; В) $0{,}4xy$; Г) жоден.

6. Якому з одночленів дорівнює вираз $0{,}7a^3b^2\cdot\frac{1}{7}a^2b^4$?

А) $7a^5b^6$; Б) $7a^6b^8$; В) $0{,}1a^5b^6$; Г) $0{,}1a^6b^8$.

7. Квадратом якого з наведених одночленів є вираз $\frac{1}{4}b^{64}c^{100}$?

А) $-\frac{1}{2}b^8c^{10}$; Б) $\frac{1}{2}b^{32}c^{50}$; В) $\frac{1}{2}b^8c^{10}$; Г) $-\frac{1}{2}b^{32}c^{10}$.

Конкурсний відбір видавництво «Ґімназія»

8. Відомо, що $m < 0$ і $n < 0$. Порівняйте з нулем значення виразу m^5n^6.

А) $m^5n^6 = 0$; В) $m^5n^6 < 0$;
Б) $m^5n^6 > 0$; Г) неможливо з'ясувати.

9. Зведіть подібні члени многочлена $2x^2 + 6xy - 5x^2 - 9xy + 3y^2$.

А) $-3xy$; В) $3x^2y^2$;
Б) $-3x^2 - 3xy + 3y^2$; Г) $3x^2 + 3xy + 3y^2$.

10. Знайдіть різницю многочленів $x^2 - 3x - 4$ і $x - 3x^2 - 2$.

А) $4x^2 - 4x - 2$; В) $-2x^2 - 2x - 6$;
Б) $-2x^2 - 4x - 2$; Г) $4x^2 - 4x - 6$.

11. Який із наведених виразів набуває тільки від'ємних значень?

А) $x^6 + 4$; Б) $x^6 - 4$; В) $-x^6 + 4$; Г) $-x^6 - 4$.

12. Якого найменшого значення може набути вираз $(x - 7)^2 + 2$?

А) 2; Б) 7; В) 5; Г) 9.

10. Множення одночлена на многочлен

Помножимо одночлен $2x$ на многочлен $3x + 2y - 5$. Для цього запишемо добуток $2x(3x + 2y - 5)$. Розкриємо дужки, застосувавши розподільну властивість множення. Маємо:

$$2x(3x + 2y - 5) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 2y - 2x \cdot 5 = 6x^2 + 4xy - 10x.$$

Отриманий многочлен $6x^2 + 4xy - 10x$ є добутком одночлена $2x$ і многочлена $3x + 2y - 5$.

Добуток одночлена й многочлена завжди можна подати у вигляді многочлена.

Щоби помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити цей одночлен на кожний член многочлена й отримані добутки додати.

Конкурсний відбір Вибувний відбір Гімназія

При множенні одночлена й многочлена виконується переставна властивість множення. Тому наведене правило дає змогу множити многочлен на одночлен.

Приклад 1. Спростіть вираз

$$6x(x-1)-3(2x^2-3x+4).$$

Розв'язання. Маємо:

$$6x(x-1)-3(2x^2-3x+4)=$$
$$=\underline{6x^2}-\underline{6x}-\underline{6x^2}+\underline{\underline{9x}}-12=3x-12.$$ ◀

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння

$$0{,}5x(3+4x)=2x(x-2)-11.$$

Розв'язання. Маємо:

$$1{,}5x+2x^2=2x^2-4x-11;$$
$$1{,}5x+2x^2-2x^2+4x=-11;$$
$$5{,}5x=-11;$$
$$x=-2.$$

Відповідь: -2. ◀

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{5x+4}{12}-\frac{x+3}{8}=2.$$

Розв'язання. Помноживши обидві частини даного рівняння на число 24, яке є найменшим спільним знаменником дробів, що містить це рівняння, отримуємо:

$$\left(\frac{5x+4}{12}-\frac{x+3}{8}\right)\cdot 24=2\cdot 24.$$

Звідси
$$24\cdot\frac{5x+4}{12}-24\cdot\frac{x+3}{8}=48;$$
$$2(5x+4)-3(x+3)=48;$$
$$10x+8-3x-9=48;$$
$$7x-1=48;$$
$$x=7.$$

Відповідь: 7. ◀

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

Приклад 4. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної a значення виразу $3a(a^2-4)-2a^2(1{,}5a+4a^4)+6(2a-1)$ є від'ємним числом.

Розв'язання. $3a(a^2-4)-2a^2(1{,}5a+4a^4)+6(2a-1)=$
$=3a^3-12a-3a^3-8a^6+12a-6=-8a^6-6.$

Вираз $-8a^6$ при будь-якому значенні a набуває недодатного значення. Отже, значення виразу $-8a^6-6$ є від'ємним числом при будь-якому значенні a. ◀

? Як помножити одночлен на многочлен?

ВПРАВИ

359.° Виконайте множення:

1) $a(a-b)$;
2) $m(m+n-4)$;
3) $-c(4+c)$;
4) $-a^2(a^2-a+1)$.

360.° Виконайте множення:

1) $m(n-3)$;
2) $x(y-z+4)$;
3) $-m(m-6)$;
4) $-a(a^3-b+c)$.

361.° Перетворіть у многочлен добуток:

1) $3x(2x+5)$;
2) $4x(x^2-8x-2)$;
3) $-2a(a^2+a-3)$;
4) $5b^2(3b^2-7b+10)$;
5) $mn(m^2n-n^3)$;
6) $(4y^3-6y+7)\cdot(-7y^3)$.

362.° Виконайте множення:

1) $3x(4x^2-x)$;
2) $-5a^2(a^2-6a-3)$;
3) $(8b^2-10b+2)\cdot 0{,}5b$;
4) $x^3(x^5-x^2+7x-1)$.

363.° Спростіть вираз:

1) $8x-2x(3x+4)$;
2) $7a^2+3a(9-5a)$;
3) $6x(4x-7)-12(2x^2+1)$;
4) $2m(m-3n)+m(5m+11n)$;
5) $8x(x^2+y^2)-9x(x^2-y^2)$.

Електронний відділ видавництва «Гімназія»

364.° ***(Знайдіть помилку)*** Розв'язуючи завдання, у якому потрібно було спростити вираз, Василь Ледащенко записав таке:

$$4m^2\,(2m^2-m)-3m^3\,(m-2)=$$
$$=8m^4-4m^3-3m^4-6m^3=5m^4-10m^3.$$

Знайдіть помилку в цьому «розв'язуванні».

365.° Спростіть вираз:

1) $7x\,(x-4)-x\,(6-x)$;
2) $5ab\,(4a+3b)-10a^2\,(2b-4)$;
3) $xy\,(2x-11y)-x\,(xy+14y^2)$;
4) $5c^3\,(4c-3)-2c^2\,(8c^2-12)$.

366.* Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $3x\,(2x-5)-8x\,(4x-3)$, якщо $x=-1$;
2) $8ab\,(a^2-2b^2)-7a\,(a^2b-3b^3)$, якщо $a=-3$, $b=2$.

367.* Спростіть вираз $6x\,(6x-4)+9x\,(3-4x)$ і знайдіть його значення, якщо $x=-\frac{1}{9}$.

368.* Розв'яжіть рівняння:

1) $5x\,(3x-2)-15x\,(4+x)=140$;
2) $1{,}2x\,(4+5x)=3x\,(2x+1)-9$;
3) $12x-3x\,(6x-9)=9x\,(4-2x)+3x$;
4) $7x^2-x\,(7x-5)-2\,(2{,}5x+1)-3=0$.

369.* Знайдіть корінь рівняння:

1) $0{,}4x\,(5x-6)+7{,}2=2x\,(x+0{,}6)$;
2) $x\,(3x+2)-9\,(x^2-7x)=6x\,(10-x)$.

370.* Доведіть тотожність:

1) $ab\,(b-c)+ac\,(c-b)-a\,(b^2-3bc+c^2)=abc$;
2) $4a\,(a+b)-a\,(3a-4b)-8ab=a^2$;
3) $a\,(a+2b)+b\,(a+b)=b\,(2a+b)+a\,(a+b)$;
4) $a\,(b+c-bc)-b\,(a+c-ac)=(a-b)\,c$.

371.* Доведіть тотожність:

1) $a\,(a+b)-b\,(a-b)=a^2+b^2$;
2) $b\,(a-b)+b\,(b+c)=b\,(a+b)-b\,(b-c)$.

Конкурсний відбір Державний університет «Дубна»

372.* Спростіть вираз:

1) $15a \cdot \frac{a+4}{3} + 12a^2 \cdot \frac{5-2a}{6}$;

2) $24c^3 \cdot \frac{c^2+2c-3}{8} - 18c^2 \cdot \frac{c^3-c^2+2}{9}$;

3) $34x \cdot \frac{x-y}{17} - 45y \cdot \frac{x-2y}{15} - y(6y-5x)$.

373.* Спростіть вираз:

1) $6b^2 \cdot \frac{5b^2-4}{3} + 20b \cdot \frac{3b-2b^3}{4}$;

2) $14m \cdot \frac{m+n}{7} - \frac{m-n}{8} \cdot 16n - 2(m^2+n^2)$.

374.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-7}{4} - \frac{x}{6} = 2$;

2) $\frac{x+6}{2} - \frac{x-7}{7} = 4$;

3) $\frac{2x+3}{6} + \frac{1-4x}{8} = \frac{1}{3}$;

4) $3x - \frac{2x+3}{2} = \frac{x+6}{3}$.

375.* Знайдіть корінь рівняння:

1) $x - \frac{7x+1}{8} = \frac{4x+3}{4}$;

2) $\frac{2x+1}{6} - \frac{3x+1}{7} = 2$.

376.* При якому значенні змінної значення виразу $8y\,(y-7)$ на 15 більше за значення виразу $2y\,(4y-10{,}5)$?

377.* Довжина прямокутника в 3 рази більша за його ширину. Якщо ширину прямокутника зменшити на 6 см, то його площа зменшиться на 144 см^2. Знайдіть початкову ширину прямокутника.

378.* Ширина прямокутника на 8 см менша від його довжини. Якщо довжину прямокутника збільшити на 6 см, то його площа збільшиться на 72 см^2. Знайдіть периметр даного прямокутника.

379.** Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $* \cdot (a-b+c) = -abc + b^2c - bc^2$;

Конкурсний відбір
Видавництво
«Мандрівець»

2) $*\cdot(ab-b^2)=a^3b-a^2b^2$;

3) $-3a^2(*-*)=6a^3+15a^4$.

380.** Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(x-y)\cdot *=x^2y^2-x^3y$; 2) $(-9x^2+*)\cdot y=*+y^4$.

381.** Доведіть, що коли:

1) $a+b+c=0$, то $a(bc-1)+b(ac-1)+c(ab-1)=3abc$;

2) $a^2+b^2=c^2$, то $c(ab-c)-b(ac-b)-a(bc-a)+abc=0$.

382.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{6x-7}{5}-\frac{3x+1}{6}=\frac{11-x}{15}$; 3) $\frac{8x-5}{3}-\frac{4x+3}{4}+\frac{2-9x}{2}=-3$;

2) $\frac{5x-3}{9}-\frac{4x+3}{6}=x-1$; 4) $\frac{8x^2-3x}{16}-\frac{6x^2+1}{12}=-1$.

383.** Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{2x+3}{3}-\frac{5x+13}{6}+\frac{5-2x}{2}=6$;

2) $\frac{4x^2+5x}{14}+\frac{10-2x^2}{7}=5$.

384.** За три дні туристка пройшла 108 км. За другий день вона пройшла на 6 км більше, ніж за перший, а за третій — $\frac{5}{13}$ відстані, пройденої за два перших дні. Скільки кілометрів пройшла туристка за кожний із цих днів?

385.** Три бригади робітників виготовили за зміну 80 деталей. Перша бригада виготовила на 12 деталей менше, ніж друга, а третя — $\frac{3}{7}$ кількості деталей, виготовлених першою та другою бригадами разом. Скільки деталей виготовила кожна бригада?

Конкурсний відбір Видавництво Гімназія

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

386. Під час розпродажу нова ціна черевиків склала 0,68 старої ціни. На скільки відсотків зменшилася ціна черевиків?

387. Квиток на проїзд у міжміському автобусі для дорослої людини коштує 200 грн, а ціна квитка для школяра чи школярки становить 60 % від ціни квитка для дорослої людини. Група складається з 22 школярів і школярок та трьох дорослих людей. Скільки коштують квитки на проїзд для всієї групи?

388. Три найбільших лимани України — Дніпровсько-Бузький, Дністровський і Сасик (Кундук) — розташовані на узбережжі Чорного моря. Їхня загальна площа 1364,8 км^2. Площа Дністровського лиману у $2\frac{2}{9}$ раза менша від площі Дніпровсько-Бузького, а площа лиману Сасик становить 25,6 % площі Дніпровсько-Бузького. Знайдіть площу кожного лиману.

389. Першого дня Надія прочитала $\frac{2}{7}$ сторінок книжки, другого — 64 % решти, а третього — 54 сторінки, що залишилися. Скільки сторінок у книжці?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

390. У волейбольному турнірі, який проходив в одне коло (тобто кожна команда грала з кожною іншою один раз), 20 % усіх команд не виграли жодної гри. Скільки команд узяло участь у цьому турнірі? (*Примітка*. У волейболі нічиїх не буває, обов'язково одна команда виграє, а друга програє.)

11. Множення многочлена на многочлен

Покажемо, як помножити многочлен на многочлен, на прикладі добутку $(a+b)(x-y-z)$. Позначимо другий множник буквою c. Тоді отримуємо:

$$(a+b)(x-y-z)=(a+b)c=ac+bc.$$

Тепер у вираз $ac+bc$ підставимо замість c многочлен $x-y-z$. Запишемо:

$$ac+bc=a(x-y-z)+b(x-y-z)=ax-ay-az+bx-by-bz.$$

Отриманий многочлен і є шуканим добутком.

Цей самий результат можна отримати, якщо добуток знаходити за схемою:

Вона роз'яснює таке правило:

щоб помножити многочлен на многочлен, можна кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого й отримані добутки додати.

Отже, при множенні многочлена на многочлен завжди отримуємо многочлен.

Приклад 1. Спростіть вираз

$$(3x-4)(2x+3)-(x-2)(x+5).$$

Розв'язання. Маємо:

$$(3x-4)(2x+3)-(x-2)(x+5)=$$
$$=6x^2+9x-8x-12-(x^2+5x-2x-10)=$$
$$=\underline{6x^2}+\underline{\underline{9x}}-\underline{\underline{8x}}-\underline{\underline{12}}-\underline{x^2}-\underline{\underline{5x}}+\underline{\underline{2x}}+\underline{\underline{10}}=5x^2-2x-2.$$ ◀

Приклад 2. Подайте у вигляді многочлена вираз

$$(a+2)(a-5)(a+3).$$

Розв'язання. $(a+2)(a-5)(a+3)=$

$$=(a^2-5a+2a-10)(a+3)=(a^2-3a-10)(a+3)=$$
$$=a^3+\underline{3a^2}-\underline{3a^2}-\underline{\underline{9a}}-\underline{\underline{10a}}-30=a^3-19a-30.$$ ◀

Приклад 3. Знайдіть чотири послідовних натуральних числа таких, що добуток третього й четвертого з них на 38 більший за добуток першого та другого.

Розв'язання. Нехай менше із цих чисел дорівнює x, тоді три наступних за ним числа дорівнюватимуть $x+1$, $x+2$, $x+3$. Оскільки за умовою добуток

$(x+2)(x+3)$ на 38 більший за добуток $x(x+1)$, то маємо:

$$(x+2)(x+3)-x(x+1)=38.$$

Звідси $x^2+3x+2x+6-x^2-x=38;$

$$4x=38-6;$$

$$x=8.$$

Отже, шуканими числами є 8, 9, 10 і 11. ◀

Приклад 4. Доведіть, що значення виразу

$$(n+39)(n-4)-(n+31)(n-3)$$

кратне 7 при всіх натуральних значеннях n.

Розв'язання. Виконаємо перетворення:

$$(n+39)(n-4)-(n+31)(n-3)=$$
$$=n^2-4n+39n-156-(n^2-3n+31n-93)=$$
$$=\underline{n^2}-\underline{4n}+\underline{39n}-\underset{\cdot\cdot\cdot}{\underline{156}}-\underline{n^2}+\underline{3n}-\underline{31n}+\underset{\cdot\cdot\cdot}{\underline{93}}=$$
$$=7n-63=7(n-9).$$

Даний вираз подано у вигляді добутку двох множників, один з яких дорівнює 7, а другий набуває тільки цілих значень. Отже, при будь-якому натуральному n значення даного виразу ділиться націло на 7. ◀

? Як помножити многочлен на многочлен?

ВПРАВИ

391.° Виконайте множення:

1) $(a-2)(b+5)$;
2) $(m+n)(p-k)$;
3) $(x-8)(x+4)$;
4) $(x-10)(x-9)$;
5) $(c+5)(c+8)$;
6) $(3y+1)(4y-6)$;
7) $(5x^2-x)(6x^2+4x)$;
8) $(-c-4)(c^3+3)$;
9) $(2a+3)(4a^2-4a+3)$;
10) $a(5a-4)(3a-2)$.

392.° Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(a+b)(c-d)$;
2) $(x-6)(x-4)$;
3) $(a-3)(a+7)$;
4) $(11-c)(c+8)$;
5) $(3y-5)(2y-12)$;
6) $(2x^2-3)(x^2+4)$;
7) $(x-6)(x^2-2x+9)$;
8) $b(6b+7)(3b-4)$.

Вимагайте в учителя

393.° Спростіть вираз:

1) $(x+2)(x+11)-2x(3-4x)$;
2) $(a+5)(a-2)+(a-4)(a+6)$;
3) $(y-9)(3y-1)-(2y+1)(5y-7)$;
4) $(4x-1)(4x-3)-(2x-10)(8x+1)$.

394.° Спростіть вираз:

1) $(a-2)(a-1)-a(a+1)$;
2) $(b-5)(b+10)+(b+6)(b-8)$;
3) $(2c+3)(3c+2)-(2c+7)(2c-7)$.

395.* Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(x+2)(x-5)-(x-3)(x+4)$, якщо $x=-5{,}5$;
2) $(y+9)(y-2)+(3-y)(6+5y)$, якщо $y=-1\frac{1}{2}$.

396.* Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(a+3)(a-10)-(a+7)(a-4)$, якщо $a=-0{,}01$;
2) $(8c+12)(3c-1)+(3c+2)(-5c-6)$, якщо $c=1\frac{1}{3}$.

397.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-3)(4x+3)-8x^2=33$;
2) $21x^2-(3x-7)(7x-3)=37$;
3) $(x+1)(x+2)-(x-3)(x+4)=12$;
4) $(-4x+1)(x-1)-x=(5-2x)(2x+3)-17$.

398.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-1)(15+9x)-6x(3x-5)=87$;
2) $(x+10)(x-5)-(x-6)(x+3)=16$;
3) $(3x+7)(8x+1)=(6x-7)(4x-1)+93x$.

399.* Виконайте множення:

1) $(x+2)(x-1)(x-4)$;
2) $(2x+1)(x+5)(x-6)$;
3) $(x^2-2x+3)(x^2+2x-3)$;
4) $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

400.* Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(a+1)(a-2)(a-3)$; 2) $(a^2-2a+1)(a^2+3a-2)$.

Конкурсний відбір
Університетська гімназія

401.* Замініть степінь добутком, а потім добуток перетворіть у многочлен:

1) $(a+5)^2$; 2) $(4-3b)^2$; 3) $(a+b+c)^2$; 4) $(a-b)^3$.

402.* Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення виразу $(x+3)(x^2-4x+7)-(x^2-5)(x-1)$ дорівнює 16.

403.* Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення виразу $(x-3)(x^2+7)-(x-2)(x^2-x+5)$ дорівнює -11.

404.* Задумали чотири натуральних числа. Друге число на 1 більше за перше, третє — на 5 більше за друге, а четверте — на 2 більше за третє. Знайдіть ці числа, якщо відношення першого числа до третього дорівнює відношенню другого числа до четвертого.

405.* Задумали три натуральних числа. Друге число на 4 більше за перше, а третє — на 6 більше за друге. Знайдіть ці числа, якщо відношення першого числа до другого дорівнює відношенню другого числа до третього.

406.* Знайдіть чотири послідовних натуральних числа таких, що добуток четвертого й другого із цих чисел на 17 більший за добуток третього та першого.

407.* Знайдіть три послідовних натуральних числа таких, що добуток другого та третього із цих чисел на 50 більший за квадрат першого.

408.* Сторона квадрата на 3 см менша від однієї зі сторін прямокутника та на 5 см більша за його другу сторону. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа на 45 см^2 більша за площу даного прямокутника.

409.* Периметр прямокутника дорівнює 60 см. Якщо одну його сторону зменшити на 5 см, а другу збільшити на 3 см, то його площа зменшиться на 21 см^2. Знайдіть сторони даного прямокутника.

410.* Довжина прямокутника на 2 см більша за його ширину. Якщо довжину збільшити на 2 см, а ширину зменшити на 4 см, то площа прямокутника зменшиться на 40 см^2. Знайдіть початкові довжину та ширину прямокутника.

411.* Доведіть тотожність:

1) $x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$;
2) $y^2(y-7)(y+2)=y^4-5y^3-14y^2$;
3) $(a^4-a^2+1)(a^4+a^2+1)=a^8+a^4+1$.

412.* Доведіть тотожність:

1) $3a^2+10a+3=3(a+3)\left(a+\frac{1}{3}\right)$;
2) $(a+1)(a^2+5a+6)=(a^2+3a+2)(a+3)$;
3) $(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)=a^5+1$.

413.* Чи при всіх натуральних значеннях n значення виразу $(n+9)(n+11)-(n+3)(n+5)$ кратне 12?

414.* Чи при всіх натуральних значеннях n значення виразу $(n+29)(n+3)-(n+7)(n+1)$ кратне 8?

415.** Вибрали деякі чотири послідовних натуральних числа й обчислили різницю добутку другого й третього із цих чисел і добутку першого та четвертого. Чи залежить ця різниця від вибору чисел?

416.** Вибрали деякі три послідовних натуральних числа й обчислили різницю квадрата другого із цих чисел і добутку першого та третього. Чи залежить ця різниця від вибору чисел?

417.** Доведіть, що значення виразу $\overline{ab}\cdot\overline{ba}-ab$ ділиться націло на 10 незалежно від значень a і b.

418.** Доведіть, що коли $ab+bc+ac=0$, то

$$(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)=a^2+b^2+c^2.$$

Конкурсний відбір
Відповідність
«Гімназія»

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

419. Податок на доходи фізичних осіб становить 18 % від заробітної плати. Після утримання податку інженер отримав 19 680 грн. Яка заробітна плата була йому нарахована?

420. Після подорожчання на 20 % костюм став коштувати 2760 грн. Якою була ціна костюма до подорожчання?

421. Змішали 72 г 5 %-го розчину солі та 48 г 15 %-го розчину солі. Знайдіть відсотковий вміст солі в утвореному розчині.

422. (*Старовинна грецька задача.*) Демохар[1] четверту частину життя прожив хлопчиком, п'яту частину — юнаком, третю частину — зрілою людиною та 13 років — у літах. Скільки років прожив Демохар?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

423. Обчисліть, використовуючи розподільну властивість множення:

1) $4{,}8 \cdot 2{,}9 + 4{,}8 \cdot 7{,}1$;

2) $3\frac{9}{14} \cdot \frac{7}{9} - 2\frac{5}{14} \cdot \frac{7}{9}$.

424. Розв'яжіть рівняння:

1) $x\,(x+4) = 0$;

2) $(3x+5)\,(10-0{,}4x) = 0$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

425. У кожній клітинці дошки розміром 5×5 клітинок сидить жук. У деякий момент усі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі або вертикалі) клітинки. Чи обов'язково при цьому залишиться порожня клітинка?

12. Розкладання многочлена на множники. Винесення спільного множника за дужки

Помножимо многочлен $2x - 1$ на многочлен $x + 1$. Маємо:

$$(2x-1)\,(x+1) = 2x^2 + 2x - x - 1 = 2x^2 + x - 1.$$

[1] Демохар (IV–III ст. до н. е.) — давньогрецький політик, оратор та історик.

Отримали тотожність $(2x-1)(x+1)=2x^2+x-1$, яку можна записати ще й так: $2x^2+x-1=(2x-1)(x+1)$.

Про цей запис говорять, що многочлен $2x^2+x-1$ **розклали на множники** $2x-1$ і $x+1$.

Узагалі, подання многочлена у вигляді добутку кількох многочленів називають **розкладанням многочлена на множники**.

Розкладання многочлена на множники є ключем до розв'язування багатьох задач. Наприклад, кожне з рівнянь $2x-1=0$ і $x+1=0$ розв'язати дуже легко, а ось рівняння $2x^2+x-1=0$ ви поки що розв'язувати не вмієте. Проте якщо скористатися розкладанням многочлена $2x^2+x-1$ на множники, то рівняння $2x^2+x-1=0$ можна записати так:

$$(2x-1)(x+1)=0.$$

Звідси $2x-1=0$ або $x+1=0$. Шуканими коренями є числа 0,5 і -1.

Отже, розкладання многочлена на множники дозволило звести розв'язання складного рівняння до розв'язання двох простіших.

Існує чимало способів розкладання многочлена на множники. Найпростіший із них — **винесення спільного множника за дужки**.

Це перетворення вам уже відоме. Наприклад, у 6 класі значення виразу $1{,}62\cdot 1{,}08-0{,}08\cdot 1{,}62$ знаходили так:

$$1{,}62\cdot 1{,}08-0{,}08\cdot 1{,}62=1{,}62\,(1{,}08-0{,}08)=1{,}62.$$

Тут використано розподільну властивість множення $c\,(a+b)=ac+bc$, прочитану справа наліво: $ac+bc=c\,(a+b)$.

Скористуємося цією ідеєю, розв'язуючи такі приклади.

Приклад 1. Розкладіть на множники:

1) $a^2b^2 + ab^3$; 2) $8a^2b^2 - 12ab^3$; 3) $10a^8 - 5a^5$.

Розв'язання. 1) Одночлени a^2b^2 і ab^3 містять такі спільні множники: a, b, ab, b^2 і ab^2. Будь-який із цих множників можна винести за дужки. Але зазвичай спільний множник вибирають такий, щоб члени многочлена, який залишається в дужках, не мали спільного буквеного множника. Такі міркування підказують, що потрібно винести за дужки спільний множник ab^2:

$$a^2b^2 + ab^3 = ab^2(a + b).$$

Щоби перевірити, чи правильно розкладено многочлен на множники, треба перемножити отримані множники.

2) Якщо коефіцієнти многочлена — цілі числа, то за дужки зазвичай виносять найбільший спільний дільник модулів цих коефіцієнтів (у нашому прикладі це число 4):

$$8a^2b^2 - 12ab^3 = 4ab^2(2a - 3b).$$

3) Маємо: $10a^8 - 5a^5 = 5a^5(2a^3 - 1)$. ◀

Приклад 2. Подайте у вигляді добутку многочленів вираз:

1) $a(m - 3) + b(m - 3)$; 3) $6x(x - 7) - (x - 7)^2$.

2) $x(c - d) + y(d - c)$;

Розв'язання. 1) У даному випадку спільним множником є многочлен $m - 3$:

$$a(m - 3) + b(m - 3) = (m - 3)(a + b).$$

2) Маємо:

$$x(c-d)+y(d-c) = x(c-d)+y\cdot(-1)\cdot(c-d) =$$
$$= x(c-d) - y(c-d) = (c-d)(x-y).$$

3) Маємо:

$$6x(x-7) - (x-7)^2 = (x-7)(6x-(x-7)) =$$
$$= (x-7)(6x-x+7) = (x-7)(5x+7).$$ ◀

Конкурсний відділ Видавництво «Гімназія»

Приклад 3. Винесіть за дужки спільний множник у виразі $(12x - 18y)^2$.

Розв'язання. Маємо:

$$(12x - 18y)^2 = (6\,(2x - 3y))^2 =$$
$$= 6^2\,(2x - 3y)^2 = 36\,(2x - 3y)^2. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння:

1) $4x^2 - 12x = 0$; 2) $(3x - 7)(x + 4) + (x - 1)(x + 4) = 0$.

Розв'язання. 1) Розклавши ліву частину рівняння на множники та застосувавши умову, за якої добуток дорівнює нулю, отримуємо:

$$4x\,(x - 3) = 0;$$
$$x = 0 \text{ або } x - 3 = 0;$$
$$x = 0 \text{ або } x = 3.$$

Відповідь: 0; 3.

2) $$(3x - 7)(x + 4) + (x - 1)(x + 4) = 0;$$
$$(x + 4)(3x - 7 + x - 1) = 0;$$
$$x + 4 = 0 \text{ або } 4x - 8 = 0;$$
$$x = -4 \text{ або } x = 2.$$

Відповідь: -4; 2. $\blacktriangleleft$

Приклад 5. Доведіть, що значення виразу:

1) $8^7 - 4^9$ ділиться націло на 14;

2) $20^3 - 4^4$ ділиться націло на 121.

Розв'язання. 1) Подамо вирази 8^7 і 4^9 у вигляді степенів з основою 2 та винесемо за дужки спільний множник. Отримуємо:

$$8^7 - 4^9 = (2^3)^7 - (2^2)^9 = 2^{21} - 2^{18} = 2^{18}(2^3 - 1) = 2^{18} \cdot (8 - 1) =$$
$$= 2^{18} \cdot 7 = 2^{17} \cdot 2 \cdot 7 = 2^{17} \cdot 14.$$

Отже, даний вираз дорівнює добутку двох натуральних чисел, одним з яких є 14. Звідси випливає, що значення виразу $8^7 - 4^9$ ділиться націло на 14.

2) Маємо: $20^3 - 4^4 = (5 \cdot 4)^3 - 4^4 = 5^3 \cdot 4^3 - 4^4 = 4^3(5^3 - 4) =$
$= 4^3(125 - 4) = 4^3 \cdot 121.$

Таким чином, значення даного виразу ділиться націло на 121. $\blacktriangleleft$

Книга з друкованої основи видавництво «Гімназія»

Приклад 6. При якому значенні a рівняння $(x+2)\times$ $\times(x+a)-x(x+1)=3a+1$ має безліч коренів?

Розв'язання. Маємо:

$$x^2+ax+2x+2a-x^2-x=3a+1;$$
$$ax+x+2a=3a+1;$$
$$ax+x=a+1;$$
$$(a+1)\,x=a+1.$$

При $a=-1$ останнє рівняння набуває вигляду $0x=0$ і має безліч коренів. Зазначимо, що коли $a\neq -1$, то рівняння має єдиний корінь $x=(a+1):(a+1)$, який дорівнює 1.

Відповідь: при $a=-1$. ◀

1. Поясніть, що називають розкладанням многочлена на множники. **2.** Яку властивість множення використовують при винесенні спільного множника за дужки?

ВПРАВИ

426.° Розкладіть на множники:

1) $am+an$; 2) $6x-6y$; 3) $-cx-cy$; 4) $7c-7$.

427.° Винесіть за дужки спільний множник:

1) $9a+9b$; 2) $ab-bc$; 3) $ax+a$; 4) $4bk+4bt$.

428.° Закінчіть розкладання многочлена на множники:

1) $4a-12b=4\,(\ldots$; 3) $27a^2b+18ab^2=9ab\,(\ldots$;
2) $x^3-2x^2y=x^2\,(\ldots$; 4) $6x^2+12x^4-18x^5=6x^2\,(\ldots$.

429.° Закінчіть розкладання многочлена на множники:

1) $7m+3mn=m\,(\ldots$; 3) $-m^3-mnp=-m\,(\ldots$;
2) $a^7+a^4=a^4\,(\ldots$; 4) $x^5y-x^4y^3+x^3y^2=x^3y\,(\ldots$.

430.° Винесіть за дужки спільний множник:

1) $4b+16c$; 4) $24x+30y$; 7) $3d^2-3cd$;
2) $12x-15y$; 5) $10mx-15my$; 8) $4a^2+16ab$;
3) $-8a-18b$; 6) x^2+xy; 9) a^6-a^3;

Робочий зошит Видавництво «Гімназія»

10) b^2+b^8;
11) $7p^3-5p$;
12) $15c^2d-3cd$;
13) $14x^2y+21xy^2$;
14) $-2x^9+16x^6$;
15) $8a^4b^2-36a^3b^7$.

431.° ***(Знайдіть помилку)*** Знайдіть і виправте помилки, які зробив Василь Ледащенко, розкладаючи многочлени на множники:

1) $4a+4=4\ (a+4)$;
2) $6ab-3b=b\ (6a-2b)$;
3) $-5x-10y=-5\ (x-2y)$;
4) $x^6-x^4+x^2=x^2(x^3-x^2+x)$.

432.° Розкладіть на множники:

1) $3a+6b$;
2) $12m-16n$;
3) $10ck-15cp$;
4) $8ax+8a$;
5) $5b-25bc$;
6) $14x^2+7x$;
7) $n^{10}-n^5$;
8) m^6+m^7;
9) $9x-27x^4$;
10) $18y^5+12y^4$;
11) $56a^{10}b^6-32a^4b^8$;
12) $36mn^5+63m^2n^6$.

433.° Обчисліть, використовуючи винесення спільного множника за дужки:

1) $173^2+173\cdot 27$;
2) $214\cdot 314-214^2$;
3) $0{,}4^3+0{,}4^2\cdot 0{,}6$.

434.° Знайдіть значення виразу:

1) $516^2-516\cdot 513$;
2) $0{,}7^3+0{,}7\cdot 0{,}51$;
3) $0{,}2^4-0{,}2^3\cdot 1{,}2$.

435.° Розв'яжіть рівняння:

1) $y^2-6y=0$;
2) $x^2+x=0$;
3) $4m^2-20m=0$;
4) $13x^2+x=0$;
5) $9x^2-6x=0$;
6) $12x-0{,}3x^2=0$.

436.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-x=0$;
2) $p^2+15p=0$;
3) $5x^2-30x=0$;
4) $14x^2+18x=0$.

Конкурсний відбір видавництво «Гімназія»

437.° Закінчіть розкладання на множники:

1) $3a\,(x-y)+b\,(x-y)=(x-y)\,\ldots$;
2) $b\,(c-2)+(c-2)=(c-2)\,\ldots$;
3) $x\,(y-6)+z\,(6-y)=x\,(y-6)-z\,(y-6)=\ldots$;
4) $m\,(8-n)-5\,(n-8)=m\,(8-n)+5\,(\ldots$.

438.° Закінчіть розкладання на множники:

1) $a\,(b-c)-(b-c)=(b-c)\,\ldots$;
2) $2x\,(3c-y)+7y\,(y-3c)=2x\,(3c-y)-7y\,(\ldots$.

439.° Розкладіть на множники:

1) $2x\,(a+b)+y\,(a+b)$;
2) $(a-4)-b\,(a-4)$;
3) $5a\,(m-n)+7b\,(m-n)$;
4) $a\,(c-d)+b\,(d-c)$;
5) $x\,(x-6)-10\,(6-x)$;
6) $b\,(b-20)+(20-b)$.

440.° Подайте вираз у вигляді добутку многочленів:

1) $c\,(x-3)-d\,(x-3)$;
2) $m\,(p-k)-(p-k)$;
3) $m\,(x-y)-n\,(y-x)$;
4) $x\,(2-x)+4\,(x-2)$;
5) $4x\,(2x-y)-5y\,(y-2x)$.

441.• Розкладіть на множники:

1) $2a^5b^2-4a^3b+6a^2b^3$;
2) $mn^3+5m^2n^2-7m^2n$;
3) xy^2+x^2y-xy;
4) $9x^3+4x^2-x$;
5) $-6m^4-8m^5-2m^6$;
6) $42a^4b-28a^3b^2-70a^5b^3$.

442.• Винесіть за дужки спільний множник:

1) $m^2n+mn+n$;
2) $3x^6+6x^5-15x^4$;
3) $7a^4b^3-14a^3b^4+21a^2b^5$;
4) $20b^6c^5-45b^5c^6-30b^5c^5$.

443.• Доведіть, що сума будь-якого натурального числа та його квадрата є парним числом.

444.• Розкладіть на множники:

1) $(m-9)^2-3\,(m-9)$;
2) $a\,(a+5)^2+(a+5)$;
3) $(m^2-3)-n\,(m^2-3)^2$;
4) $8c\,(p-12)+7d\,(p-12)^2$;

Електронний відповідник «Видавництво «Ранок»

5) $a(2a+b)(a+b)-4a(a+b)^2$;

6) $3m^2(m-8)+6m(m-8)^2$;

7) $(2a+3)(a+5)+(a-1)(a+5)$.

445.* Подайте у вигляді добутку многочленів вираз:

1) $(y+1)^2-4y(y+1)$;

2) $10(a^2-5)+(a^2-5)^2$;

3) $(a-2)^2-6(a-2)$;

4) $(x-6)(2x-4)+(x-6)(8-x)$;

5) $(x^2-2)(3y+5)-(x^2-2)(y+12)$;

6) $(4a-3b)(5a+8b)+(3b-4a)(2a+b)$.

446.* Розв'яжіть рівняння, використовуючи розкладання на множники:

1) $(x-3)(x+7)-(x+7)(x-8)=0$;

2) $(4x-9)(x-2)+(1-x)(x-2)=0$;

3) $0{,}2x(x-5)+8(x-5)=0$;

4) $7(x-7)-(x-7)^2=0$;

447.* Розв'яжіть рівняння, використовуючи розкладання на множники:

1) $(2x-9)(x+6)-x(x+6)=0$;

2) $(3x+4)(x-10)+(10-x)(x-8)=0$;

3) $3(3x+1)^2-4(3x+1)=0$;

4) $(9x-12)-x(9x-12)=0$.

448.* Винесіть за дужки спільний множник:

1) $(2x-6)^2$;

2) $(5y+5)^2$;

3) $(36x+30y)^2$;

4) $(2x+4)^4$;

5) $(6x-9y)^3$;

6) $(a^2+ab)^2$;

7) $(-7a-14ab)^2$;

8) $(3c^4-6c^3)^4$.

449.* Винесіть за дужки спільний множник:

1) $(4x-4y)^2$;

2) $(18a+27b)^2$;

3) $(8m-10n)^3$;

4) $(a^2-9a)^2$;

5) $(16x^2y+40xy^2)^2$;

6) $(22x^4-28x^2y^3)^5$.

Комунальний заклад «Вишгородський ліцей № 1 імені Т. Шевченка»

450.** Доведіть, що значення виразу:

1) 19^5+19^4 кратне 20;
2) $8^{10}-8^9-8^8$ кратне 11;
3) 8^7+2^{15} кратне 5;
4) 27^4-9^5 кратне 24;
5) 12^4-4^6 кратне 130;
6) $2\cdot3^{2006}+5\cdot3^{2005}+7\cdot3^{2004}$ кратне 10.

451.** Доведіть, що значення виразу:

1) $25^{25}-25^{24}$ ділиться націло на 12;
2) $16^4+8^5-4^7$ ділиться націло на 10;
3) 36^5+6^9 ділиться націло на 42;
4) 10^5-5^7 ділиться націло на 7.

452.** Доведіть, що коли:

1) $a+b=2$, то $a^2b+ab^2-2ab=0$;
2) $3a+4b=-2$, то $12a^3b+16a^2b^2+32a^2b=24a^2b$.

453.** Доведіть, що коли:

1) $a+b+c=0$, то $a^3b^3c^2+a^2b^4c^2+a^2b^3c^3=0$;
2) $a^2-b^2=2ab+1$, то $a^6b^4-2a^5b^5-a^4b^6=a^4b^4$.

454.** Спростіть вираз, використовуючи винесення спільного множника за дужки:

1) $(a-1)(a+2)-(a-2)(a+2)+(a-3)(a+2)-(a-4)(a+2)$;
2) $(3a-2)(5b^2-4b+10)+(2-3a)(5b^2-6b+10)$;
3) $(4a-7b)(2a^2-4ab+b^2)-(4a-7b)(2a^2-4ab-b^2)$.

455.** Спростіть вираз, використовуючи винесення спільного множника за дужки:

1) $ab(a^2+ab+b^2)-ab(a^2-ab+b^2)$;
2) $(a+b)(a+1)-(a+b)(1-b)+(b+a)(b-a)$.

456.** Розв'яжіть рівняння $4x^2-1{,}2x=a$, якщо один із його коренів дорівнює 0,3.

457.** Розв'яжіть рівняння $5x^2+8x=a$, якщо один із його коренів дорівнює $-1{,}6$.

Комунальний заклад «Харківська академічна гімназія»

458.** Відомо, що при деякому значенні y значення виразу $y^2 - 4y + 2$ дорівнює 6. Знайдіть при цьому значенні y значення виразу:

1) $5y^2 - 20y + 10$;

2) $y^2(y^2 - 4y + 2) - 4y(y^2 - 4y + 2)$;

3) $3y^2 - 12y + 8$.

459.** Відомо, що при деякому значенні a значення виразу $a^2 + 2a - 5$ дорівнює -4. Знайдіть при цьому значенні a значення виразу:

1) $-2a^2 - 4a + 10$;

2) $a^2(a^2 + 2a - 5) + 2a(a^2 + 2a - 5)$;

3) $4a^2 + 8a - 16$.

460.* При якому значенні a не має коренів рівняння:

1) $(x + 1)(x - 3) - x(x - 3) = ax$;

2) $x(5x - 1) - (x - a)(5x - 1) = 4x - 2a$;

3) $(2x - 5)(x + a) - (2x + 3)(x + 1) = 4$?

461.* При якому значенні a має безліч коренів рівняння:

1) $(x - 4)(x + a) - (x + 2)(x - a) = -6$;

2) $x(3x - 2) - (x + 2a)(3x + 2) = 5a + 6$?

462.* Знайдіть усі двоцифрові числа, які дорівнюють добутку їхніх цифр, збільшених на 1.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

463. За тиждень в офісі витрачають 1200 аркушів паперу. Яку найменшу кількість пачок паперу потрібно купити, щоб забезпечити роботу офісу протягом 8 тижнів, якщо в одній пачці міститься 500 аркушів?

464. Вміст солі в морській воді становить 5 %. Скільки кілограмів прісної води треба додати до 30 кг морської води, щоби вміст солі в утвореному розчині становив 3 %?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

465. З аркуша картону вирізали кілька рівних рівносторонніх трикутників. У вершинах кожного написали цифри 1, 2, 3. Потім ці трикутники склали в стіс. Чи могло статися так, що сума чисел уздовж кожного ребра стосу дорівнює 55?

Онлайн-версія підручника «Відкритий клас»

13. Розкладання многочлена на множники. Метод групування

Многочлен $ax+bx+ay+by$ не вдасться розкласти на множники методом винесення за дужки спільного множника, оскільки множника, спільного для всіх доданків, немає. Проте члени цього многочлена можна об'єднати в групи так, що доданки кожної групи матимуть спільний множник:

$$ax+bx+ay+by=(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b).$$

Ми отримали вираз, у якому обидва доданки мають множник $(a+b)$. Винесемо його за дужки:

$$x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y).$$

Заданий многочлен удалося розкласти на множники завдяки тому, що ми у зручний спосіб об'єднали його члени в групи. Тому описаний прийом розкладання многочлена на множники називають **методом групування.**

Приклад 1. Розкладіть на множники многочлен:

1) $2ac+2bc+5am+5bm$; 3) $xy-12+4x-3y$.

2) x^4-2x^3-3x+6;

Розв'язання. 1) Згрупувавши члени даного многочлена так, щоб доданки в кожній групі мали спільний множник, отримуємо:

$$2ac+2bc+5am+5bm=(2ac+2bc)+(5am+5bm)=$$
$$=2c(a+b)+5m(a+b)=(a+b)(2c+5m).$$

Той самий результат можна отримати, якщо доданки згрупувати в інший спосіб:

$$(2ac+5am)+(2bc+5bm)=a(2c+5m)+b(2c+5m)=$$
$$=(2c+5m)(a+b).$$

2) Маємо: $x^4-2x^3-3x+6=(x^4-2x^3)-(3x-6)=$
$$=x^3(x-2)-3(x-2)=(x-2)(x^3-3).$$

3) $xy-12+4x-3y=(xy+4x)+(-12-3y)=$
$$=x(y+4)-3(4+y)=(y+4)(x-3).$$ ◀

Приклад 2. Розкладіть на множники тричлен $x^2 + 6x + 8$.

Розв'язання. Подавши доданок $6x$ у вигляді суми $2x + 4x$, застосуємо метод групування:

$$x^2 + 6x + 8 = x^2 + 2x + 4x + 8 = (x^2 + 2x) + (4x + 8) = x(x + 2) + 4(x + 2) = (x + 2)(x + 4).$$ ◀

ВПРАВИ

466.° Закінчіть розкладання многочлена на множники:

1) $3m + 3n + mx + nx = (3m + 3n) + (mx + nx) = 3(m + n) + x(m + n) = \ldots$;
2) $8c - 8 - ac + a = (8c - 8) + (-ac + a) = 8(c - 1) - a(\ldots$;
3) $4ab + 8b + 3a + 6 = (4ab + 8b) + (3a + 6) = 4b(a + 2) + \ldots$;
4) $a^2b + 2c^2 - abc - 2ac = a^2b - abc + 2c^2 - 2ac = (a^2b - abc) + (2c^2 - 2ac) = ab(a - c) + 2c(c - a) = \ldots$.

467.° Закінчіть розкладання многочлена на множники:

1) $5a + 5c - ab - bc = (5a + 5c) + (-ab - bc) = 5(a + c) - b(a + c) = \ldots$;
2) $xy + 2y - x - 2 = (xy + 2y) + (-x - 2) = y(x + 2) - \ldots$;
3) $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2) + (x + 1) = \ldots$.

468.° Подайте у вигляді добутку многочленів вираз:

1) $a(b + c) + 4b + 4c$;
2) $x(y - 8) + 6y - 48$;
3) $m(n - 2) + n - 2$;
4) $x(m - n) + n - m$.

469.° Розкладіть на множники:

1) $b(p - k) + cp - ck$;
2) $a(b + 9) + b + 9$;
3) $a(c - 6) + 5c - 30$;
4) $7 - x + y(x - 7)$.

470.• Розкладіть на множники многочлен:

1) $ma + mb + 4a + 4b$;
2) $3x + cy + cx + 3y$;
3) $5a - 5b + ap - bp$;
4) $7m + mn + 7 + n$;
5) $a - 1 + ab - b$;
6) $xy + 8y - 2x - 16$;
7) $ab + ac - b - c$;
8) $3p - 3k - 4ap + 4ak$.

Електронний варіант видавництва «Генеза»

471.* Подайте у вигляді добутку многочленів вираз:

1) $ay - 3y - 4a + 12$;
2) $9a + 9 - na - n$;
3) $6x + ay + 6y + ax$;
4) $8x - 8y + xz - yz$;
5) $mn + m - n - 1$;
6) $ab - ac - 2b + 2c$.

472.* Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^3 + a^2 + a + 1$;
2) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 12$;
3) $c^6 - 10c^4 - 5c^2 + 50$;
4) $y^3 - 18 + 6y^2 - 3y$;
5) $a^2 - ab + ac - bc$;
6) $20a^3bc - 28ac^2 + 15a^2b^2 - 21bc$.

473.* Розкладіть на множники многочлен:

1) $8c^3 - 2c^2 + 4c - 1$;
2) $x^2y + x + xy^2 + y$;
3) $9a^2b - 3a^2 + 3b^2 - b$;
4) $8a^2 - 2ab - 4ac + bc$;
5) $2b^3 - 7b^2c - 4b + 14c$;
6) $6x^3 + 4x^2y^2 - 9x^3y - 6y^3$.

474.* Знайдіть значення виразу, розклавши його попередньо на множники:

1) $2a^3 - 3a^2 - 2ab + 3b$, якщо $a = 0{,}5$, $b = 2{,}25$;
2) $xy + y^2 - 12x - 12y$, якщо $x = 10{,}8$, $y = -8{,}8$.

475.* Знайдіть значення виразу $2a + b + 2a^2 + ab$, якщо $a = -3$, $b = 4$.

476.* Закінчіть обчислення значення виразу:

1) $38{,}14 \cdot 12{,}26 + 12{,}26 \cdot 11{,}86 - 24{,}37 \cdot 2{,}26 - 2{,}26 \cdot 25{,}63 =$
$= (38{,}14 \cdot 12{,}26 + 12{,}26 \cdot 11{,}86) + (-24{,}37 \cdot 2{,}26 - 2{,}26 \cdot 25{,}63) =$
$= 12{,}26 \cdot (38{,}14 + 11{,}86) - 2{,}26 \cdot (24{,}37 + 25{,}63) = \ldots$;

2) $0{,}7 \cdot 2{,}48 - 0{,}3 \cdot 1{,}62 - 0{,}4 \cdot 2{,}48 + 0{,}3 \cdot 3{,}14 =$
$= (0{,}7 \cdot 2{,}48 - 0{,}4 \cdot 2{,}48) + (0{,}3 \cdot 3{,}14 - 0{,}3 \cdot 1{,}62) = \ldots$.

477.* Обчисліть, не використовуючи калькулятора:

1) $3{,}74^2 + 3{,}74 \cdot 2{,}26 - 3{,}74 \cdot 1{,}24 - 2{,}26 \cdot 1{,}24$;
2) $58{,}7 \cdot 1{,}2 + 36 \cdot 3{,}52 - 34{,}7 \cdot 1{,}2 - 2{,}32 \cdot 36$;
3) $2\frac{4}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}8 + 2\frac{5}{9} \cdot 3\frac{2}{7} + 1\frac{5}{7} \cdot 2{,}2$.

Комунальний заклад «Київський фізико-математичний ліцей № 145»

478.* Знайдіть значення виразу:

1) $34{,}4 \cdot 13{,}7 - 34{,}4 \cdot 8{,}7 - 15{,}6 \cdot 8{,}7 + 13{,}7 \cdot 15{,}6$;

2) $0{,}6^3 - 2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}8 + 0{,}6 \cdot 0{,}8^2 - 2 \cdot 0{,}8^3$.

479.** Розкладіть на множники многочлен:

1) $ax^2 + ay - bx^2 - by + cx^2 + cy$;

2) $a^2b + a + ab^2 + b + 3ab + 3$;

3) $x^3 - x^2 + x^2y + x - xy + y$;

4) $m^2n + mn - 5 - 5m + n - 5m^2$;

5) $x^6 - 2x^5 + 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$;

6) $a^3b + ab^2 - abc^3 - a^2c - bc + c^4$.

480.** Подайте вираз у вигляді добутку многочленів:

1) $ab + ac + ad + bx + cx + dx$;

2) $7p - 7k - px + kx + k - p$;

3) $x^3y^3 - x^2y^2 + xy - 6 + 6xy - 6x^2y^2$;

4) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

481.** Розкладіть на множники тричлен, подавши попередньо один із його членів у вигляді суми подібних доданків:

1) $x^2 + 8x + 12$;

2) $x^2 - 5x + 4$;

3) $x^2 + 7x - 8$;

4) $x^2 - 4x - 5$.

482.** Розкладіть на множники тричлен:

1) $x^2 + 4x + 3$;

2) $x^2 - 10x + 16$;

3) $x^2 + 3x - 18$;

4) $x^2 - 4x - 32$.

483.* Доведіть, що при всіх натуральних значеннях n значення виразу $n^3 + 3n^2 + 2n$ ділиться націло на 6.

484.* Розкладіть на множники многочлен

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

485.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n, яке більше за 1, значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ ділиться націло на 10.

486.* Відомо, що при деяких значеннях x і y виконується рівність $x^2 + y^2 = 1$. Знайдіть при цих самих значеннях x і y значення виразу $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2$.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Ранок»

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

487. Ціну на деякий товар спочатку знизили на 20 %, а потім підвищили на 20 %. Як змінилася ціна цього товару порівняно з початковою (підвищилася чи знизилася) і на скільки відсотків?

488. Ціну на деякий товар спочатку підвищили на 10 %, а потім знизили на 30 %. Як змінилася ціна цього товару порівняно з початковою (підвищилася чи знизилася) і на скільки відсотків?

489. (*Задача з українського фольклору.*) Підпасок привів на полонину овець. На полонині були кілки. Якщо до кожного кілка він прив'яже по вівці, то для однієї кілка не вистачить. Якщо ж до кожного кілка він прив'яже по дві вівці, то один кілок залишиться вільним. Скільки овець привів підпасок?

490. Ольга й Дмитро можуть прополоти город, працюючи разом, за 2,4 год. Ольга може зробити це самостійно за 4 год. Скільки часу потрібно Дмитру, щоб самостійно прополоти город?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

491. Піднесіть до квадрата одночлен:

1) $2a$; 3) $3b^3$; 5) $0{,}3x$; 7) $\frac{1}{6}a^2b^3c^4$;

2) a^2; 4) $7x^4$; 6) $0{,}4y^5z^2$; 8) $1\frac{1}{3}m^6n$.

492. Запишіть у вигляді виразу:

1) суму чисел a і c;
2) різницю чисел m і n;
3) добуток суми чисел x і y та їхньої різниці;
4) квадрат різниці чисел x і y;
5) різницю квадратів чисел x і y.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

493. У турнірі, організованому за олімпійською системою (той, хто програв, — вибуває), беруть участь n тенісистів. Яку кількість матчів треба провести, щоб виявити переможця турніру?

Конкурсний відбір «Вирівняні та ГІМназія»

ЗАВДАННЯ № 3 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Подайте у вигляді многочлена вираз $3y^2(y^3+1)$.

А) $3y^6+1$; В) $3y^5+1$;
Б) $3y^6+3y^2$; Г) $3y^5+3y^2$.

2. Спростіть вираз $-9y(y-3)+4{,}5y(2y-4)$.

А) $45y$; Б) $-45y$; В) $-9y$; Г) $9y$.

3. Якому многочлену дорівнює вираз $(x-3)(x+7)$?

А) $x^2+4x-21$; В) $x^2+10x-21$;
Б) $x^2-4x-21$; Г) $x^2-10x-21$.

4. Спростіть вираз $(3x+2)(2x-1)-(5x-2)(x-4)$.

А) $x^2-23x-10$; В) $x^2-21x+6$;
Б) $x^2+23x-10$; Г) $x^2+21x+6$.

5. Винесіть спільний множник за дужки: $3mn-4mk$.

А) $n(3m-4k)$; В) $n(4m-3k)$;
Б) $m(3n-4k)$; Г) $m(4n-3k)$.

6. Розкладіть на множники вираз m^2n+mn^2.

А) $m(m+n)$; В) $mn(m+n)$;
Б) $n(m+n)$; Г) $m^2n^2(m+n)$.

7. Розкладіть вираз $mn-mn^2$ на множники.

А) $mn(1-n)$; В) $m(1-n)(1-n)$;
Б) $mn(1+n)$; Г) $n(1-m)(1-m)$.

8. Подайте многочлен $2x^2-4x^6$ у вигляді добутку одночлена та многочлена.

А) $2x^2(1-2x^3)$; В) $2x^2(2-x^3)$;
Б) $2x^2(1-2x^4)$; Г) $2x^2(2-x^4)$.

9. Розв'яжіть рівняння $x^2-2x=0$.

А) 0; Б) 0; −2; В) 0; 2; Г) 2.

10. Подайте у вигляді добутку многочлен $ax-ay+5x-5y$.

А) $(x-y)(a+5)$; В) $(x+y)(a-5)$;
Б) $(x-y)(a-5)$; Г) $(x+y)(a+5)$.

11. Розв'яжіть рівняння $\frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}=1$.

А) 11; Б) 1; В) 7; Г) 5.

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

12. Значення змінної a є таким, що значення виразу $a^2 - 7a + 3$ дорівнює 2. Знайдіть значення виразу $2a^2 - 14a + 10$.

А) 4; Б) 12; В) 8; Г) 14.

14. Добуток різниці та суми двох виразів

Нерідко в математиці, крім знання загального закону (теореми), зручно користуватися правилами, що застосовуються в окремих (особливих) випадках.

Наприклад, коли множать десятковий дріб на 10, 100, 1000 й т. д., то немає потреби використовувати загальний алгоритм множення у стовпчик, а набагато зручніше застосувати правило перенесення коми.

Особливі ситуації трапляються також при множенні многочленів.

Розглянемо окремий випадок, коли в добутку двох многочленів один із них є різницею двох виразів, а другий — їхньою сумою.

Маємо:

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2.$$

Отримали тотожність

$$\boxed{(a-b)(a+b)=a^2-b^2}$$

Тепер при множенні різниці виразів на їхню суму можна скоротити роботу, одразу записавши результат — різницю квадратів цих виразів. Тому цю тотожність називають **формулою скороченого множення.** Її виражає таке правило:

добуток різниці двох виразів та їхньої суми дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Приклад 1. Виконайте множення многочленів:

1) $(2a - 5b)(2a + 5b)$;

2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2)$;

3) $(-4mn - p)(4mn - p)$.

Конкурсний відділ Видавництво Ранок

Розв'язання. 1) $(2a - 5b)(2a + 5b) = (2a)^2 - (5b)^2 = 4a^2 - 25b^2$.

2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2) = (3x^4 + y^2)(3x^4 - y^2) = (3x^4)^2 - (y^2)^2 = 9x^8 - y^4$.

3) $(-4mn - p)(4mn - p) = (-p - 4mn)(-p + 4mn) = (-p)^2 - (4mn)^2 = p^2 - 16m^2n^2$. ◀

Приклад 2. Спростіть вираз:

1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1)$;

2) $-2x(x + 5)(5 - x)$;

3) $(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4)$.

Розв'язання. 1) $(b - 3)(b + 3) - (2b + 1)(2b - 1) = b^2 - 9 - (4b^2 - 1) = b^2 - 9 - 4b^2 + 1 = -3b^2 - 8$.

2) $-2x(x + 5)(5 - x) = -2x(25 - x^2) = -50x + 2x^3$.

3) Застосувавши двічі формулу добутку суми й різниці двох виразів, отримаємо:

$(a^3 - 2)(a^3 + 2)(a^6 + 4) = (a^6 - 4)(a^6 + 4) = a^{12} - 16$. ◀

1. Чому дорівнює добуток різниці двох виразів та їхньої суми? **2.** Запишіть формулу добутку різниці та суми двох виразів.

ВПРАВИ

494.° Чи є тотожністю рівність:

1) $(b - c)(b + c) = b^2 - c^2$;
2) $(m + n)(m - n) = m^2 + n^2$;
3) $(x + y)(y - x) = y^2 - x^2$;
4) $(p - q)(p + q) = (p - q)^2$?

495.° Якому з наведених многочленів тотожно дорівнює добуток $(7a - 2b)(7a + 2b)$:

1) $7a^2 - 2b^2$;
2) $7a^2 + 2b^2$;
3) $49a^2 - 4b^2$;
4) $49a^2 + 4b^2$?

496.° Закінчіть перетворення виразу в многочлен:

1) $(c - 8)(c + 8) = c^2 - 8^2 = \ldots$;
2) $(5x - 7y^2)(5x + 7y^2) = (5x)^2 - (7y^2)^2 = \ldots$;
3) $(a^4 + b^3)(b^3 - a^4) = (b^3 + a^4)(b^3 - a^4) = (b^3)^2 - (a^4)^2 = \ldots$;

4) $(-9xy - z)(9xy - z) = -(9xy + z)(9xy - z) = -((9xy)^2 - z^2) = \ldots$.

497.° Закінчіть перетворення виразу в многочлен:

1) $(2ab + 3)(2ab - 3) = (2ab)^2 - 3^2 = \ldots$;

2) $(6m^2 - 11p^5)(11p^5 + 6m^2) = (6m^2 - 11p^5)(6m^2 + 11p^5) = (6m^2)^2 - \ldots$.

498.° Виконайте множення многочленів:

1) $(m - n)(m + n)$;
2) $(x - 1)(x + 1)$;
3) $(9 - y)(9 + y)$;
4) $(3b - 1)(3b + 1)$;
5) $(10m - 7)(10m + 7)$;
6) $(4a - b)(b + 4a)$;
7) $(5b + 1)(1 - 5b)$;
8) $(3x - 5y)(3x + 5y)$.

499.° Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(c - 2)(c + 2)$;
2) $(12 - x)(12 + x)$;
3) $(3x + y)(3x - y)$;
4) $(6x - 9)(6x + 9)$;
5) $(x + 7)(7 - x)$;
6) $(8m + 2)(2 - 8m)$.

500.° Виконайте множення:

1) $(a^2 - 3)(a^2 + 3)$;
2) $(5 + b^2)(b^2 - 5)$;
3) $(3x - 2y^2)(3x + 2y^2)$;
4) $(10p^3 - 7k)(10p^3 + 7k)$;
5) $(11a^3 + 5b^2)(5b^2 - 11a^3)$;
6) $(7 - xy)(7 + xy)$.

501.° Виконайте множення:

1) $(x^3 + 4)(x^3 - 4)$;
2) $(ab - c)(ab + c)$;
3) $(x - y^2)(y^2 + x)$;
4) $(3m^2 - 2c)(3m^2 + 2c)$.

502.° Спростіть вираз:

1) $(2a - b)(2a + b) + b^2$;
2) $10x^2 + (y - 5x)(y + 5x)$;
3) $64m^2 - (8m + 9)(8m - 9)$;
4) $3a(a - b) - (3a + 2b)(3a - 2b)$.

503.° Спростіть вираз:

1) $(9a - 2)(9a + 2) - 18a^2$;
2) $25m^2 - (5m - 7)(5m + 7)$.

504.• На який вираз треба помножити двочлен $0{,}3x^3 - xy^2$, щоб їхній добуток дорівнював двочлену $0{,}09x^6 - x^2y^4$?

505.• На який вираз треба помножити многочлен $7t^4 + 9p^5$, щоб їхній добуток дорівнював многочлену $49t^8 - 81p^{10}$?

Електронний варіант підручника «Гімназія»

506.* Які одночлени треба поставити замість зірочок, щоб виконувалася тотожність:

1) $(*-12a)(*+*)=9b^2-*$;

2) $(*-5c)(*+5c)=16d^2-*$;

3) $(0{,}7p+*)(*-0{,}7p)=\frac{1}{9}m^8-0{,}49p^2$?

507.* Поставте замість зірочок такі одночлени, щоб виконувалася тотожність:

1) $(8a^2b-*)(8a^2b+*)=*-25c^6$;

2) $(3m^2+*)(*-*)=9m^4-n^6$.

508.* Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $a\,(a-2)\,(a+2)$;

2) $-3\,(x+3)\,(x-3)$;

3) $7b^2(b+4)(4-b)$;

4) $(c-d)(c+d)(c^2+d^2)$;

5) $(2a-1)(2a+1)(4a^2+1)$;

6) $(c^3-5)(c^3+5)(c^6+25)$.

509.* Виконайте множення:

1) $5b\,(b-1)\,(b+1)$;

2) $(c+2)(c-2)\cdot 8c^2$;

3) $(m-10)(m^2+100)(m+10)$;

4) $(a^2+1)(a^2-1)(a^4+1)$.

510.* Спростіть вираз:

1) $(4x-7y)\,(4x+7y)+(7x-4y)\,(7x+4y)$;

2) $(a-2)\,(a+3)+(6-a)\,(a+6)$;

3) $(8a-3)\,(8a+3)-(7a+4)\,(8a-4)$;

4) $-b^2c\,(4b-c^2)(4b+c^2)+16b^4c$.

511.* Спростіть вираз:

1) $(b+7)\,(b-4)+(2b-6)\,(2b+6)$;

2) $81a^8-(3a^2-b^3)(9a^4+b^6)(3a^2+b^3)$.

512.* Розв'яжіть рівняння:

1) $8x\,(3+2x)-(4x+3)\,(4x-3)=9x-6$;

2) $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)=x^8+10x$.

513.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-17)(x+17)=x^2+6x-49$;

2) $7x-4x\,(x-5)=(8-2x)\,(8+2x)+27x$.

Онлайн-версія підручника «Алгебра» 7 клас

514.** Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(7n + 8)(7n - 8) - (5n + 10)(5n - 10)$ ділиться націло на 12.

515.** Доведіть, що не існує такого натурального числа n, при якому значення виразу $(4n + 3)(9n - 4) - (6n - 5)(6n + 5) - 3(n - 2)$ ділиться націло на 8.

516.** Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу

$$(9n - 4)(9n + 4) - (8n - 2)(4n + 3) + 5(6n + 9)$$

ділиться націло на 7.

517.** Знайдіть значення виразу:

1) $3^{20} \cdot 6^{20} - (18^{10} - 2)(18^{10} + 2)$;
2) $(5 + 28^{17})(5 - 28^{17}) + 14^{34} \cdot 2^{34}$;
3) $7^{36} \cdot 8^{12} - (14^{18} + 3)(14^{18} - 3)$;
4) $(3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1)(3^{32} + 1) - 3^{64}$;
5) $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) - 2^{32}$.

518.** Чому дорівнює значення виразу:

1) $81^{15} \cdot 8^{20} - (6^{30} + 1)(6^{30} - 1)$;
2) $5^{24} - (5^3 - 2)(5^3 + 2)(5^6 + 4)(5^{12} + 16)$?

519.* Порівняйте значення виразів, не обчислюючи їх:

1) $415 \cdot 425$ і $426 \cdot 414$;
2) $1\,234\,567 \cdot 1\,234\,569$ і $1\,234\,568^2$.

520.* Порівняйте значення виразів, не обчислюючи їх:

1) $253 \cdot 259$ і $252 \cdot 260$;
2) $987\,654^2$ і $987\,646 \cdot 987\,662$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

521. Олеся й Остап купили однакові ручки. Ціна кожної з них дорівнює цілому числу гривень. Олеся заплатила за ручки 65 грн, а Остап — на 39 грн більше. Скільки коштує одна ручка? Скільки ручок купив Остап?

522. Один вантажний автомобіль може перевезти зібраний з поля врожай за 10 год, другий — за 12 год, а третій — за

15 год. За скільки годин вони зможуть перевезти врожай, працюючи разом?

523. (*Старовинна єгипетська задача.*) Кожний із 7 чоловіків має 7 кішок. Кожна кішка з'їдає по 7 мишей, кожна миша за одне літо може знищити 7 ячмінних колосків, а із зерен одного колоска може вирости 7 жмень ячмінного зерна. Маса однієї жмені зерна — 80 г. Скільки жмень зерна щорічно рятують кішки? Скільки це становить тонн зерна? Відповідь округліть до сотих.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

524. Подайте даний вираз у вигляді квадрата одночлена:

1) x^6; 3) $4x^2$; 5) a^8b^{10}; 7) $1{,}21m^{10}n^{20}$;

2) y^4; 4) $\frac{1}{9}x^4$; 6) $0{,}36x^2y^{12}$; 8) $1\frac{9}{16}a^{14}b^{16}$.

525. Чи можна подати у вигляді різниці квадратів двох одночленів вираз:

1) a^2-16b^2; 3) $100b^4-25c^6$; 5) $-a^{12}-49c^8$;

2) $25c^2+9b^2$; 4) $-64+a^{10}$; 6) $-0{,}01a^4+0{,}04b^4$?

У разі ствердної відповіді запишіть цю різницю квадратів.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

526. Для перевезення вантажу виділено 4-, 7- і 8-тонні вантажівки. Кожний автомобіль має зробити тільки один рейс. Скільки треба вантажівок кожного виду для перевезення 44 т вантажу?

15. Різниця квадратів двох виразів

Ви вже знаєте два способи розкладання многочленів на множники: винесення спільного множника за дужки та метод групування. Розглянемо ще один спосіб.

Формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ перепишемо так:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Цю тотожність називають **формулою різниці квадратів двох виразів.**

Тепер можна сформулювати правило.

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їхньої суми.

Наведемо приклади застосування цієї формули для розкладання многочленів на множники.

Приклад 1. Розкладіть на множники:

1) $a^2 - 4$; 2) $36m^2 - 2\frac{7}{9}n^8$; 3) $-a^2b^6 + 1$.

Розв'язання. 1) Маємо:

$$a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a - 2)(a + 2).$$

2) $$36m^2 - 2\frac{7}{9}n^8 = 36m^2 - \frac{25}{9}n^8 = (6m)^2 - \left(\frac{5}{3}n^4\right)^2 =$$

$$= \left(6m - \frac{5}{3}n^4\right)\left(6m + \frac{5}{3}n^4\right).$$

3) $-a^2b^6 + 1 = 1 - a^2b^6 = (1 - ab^3)(1 + ab^3)$. ◀

Приклад 2. Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

1) $100 - (a + 5)^2$; 2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2$.

Розв'язання. 1) $100 - (a + 5)^2 = 10^2 - (a + 5)^2 =$
$= (10 - (a + 5))(10 + (a + 5)) = (10 - a - 5)(10 + a + 5) =$
$= (5 - a)(15 + a)$.

2) $(2a + 3b)^2 - (3a - b)^2 =$
$= ((2a + 3b) - (3a - b))((2a + 3b) + (3a - b)) =$
$= (2a + 3b - 3a + b)(2a + 3b + 3a - b) =$
$= (4b - a)(5a + 2b)$. ◀

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $(2x - 7)^2 - 81 = 0$.

Розв'язання. 1) Застосувавши формулу різниці квадратів і умову рівності добутку нулю, отримуємо:

$$(x - 6)(x + 6) = 0;$$
$$x - 6 = 0 \text{ або } x + 6 = 0;$$
$$x = 6 \text{ або } x = -6.$$

Відповідь: 6; −6.

Комунальний вищий навчальний заклад «Криворізький педагогічний коледж» Криворізької міської ради

2) Маємо:

$$(2x - 7 - 9)(2x - 7 + 9) = 0;$$
$$(2x - 16)(2x + 2) = 0;$$
$$2x - 16 = 0 \text{ або } 2x + 2 = 0;$$
$$x = 8 \text{ або } x = -1.$$

Відповідь: 8; −1. ◀

Приклад 4. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2$ ділиться націло на 8.

Розв'язання. Маємо:

$$(6n + 7)^2 - (2n - 1)^2 = (6n + 7 - 2n + 1)(6n + 7 + 2n - 1) =$$
$$= (4n + 8)(8n + 6) = 4(n + 2) \cdot 2(4n + 3) = 8(n + 2)(4n + 3).$$

Даний вираз подано у вигляді добутку трьох множників, один з яких дорівнює 8, а два інших — теж натуральні числа. Звідси випливає, що значення даного виразу ділиться націло на 8 при будь-якому натуральному n. ◀

1. Запишіть формулу різниці квадратів двох виразів.
2. Сформулюйте правило розкладання на множники різниці квадратів двох виразів.

ВПРАВИ

527.° Яким з наведених добутків многочленів тотожно дорівнює многочлен $a^2 - 144$:

1) $(a - 12)^2$;
2) $(a - 12)(a + 12)$;
3) $(12 - a)(12 + a)$;
4) $(12 - a)(-12 - a)$?

528.° Яка з даних рівностей є тотожністю:

1) $-49 + b^2 = (7 - b)(7 + b)$;
2) $-49 + b^2 = (b - 7)(b + 7)$;
3) $-49 + b^2 = (7 - b)^2$;
4) $-49 + b^2 = (b - 49)(b + 49)$?

529.° Чи можна, застосовуючи формулу різниці квадратів, розкласти на множники вираз:

1) a^2-9; 4) $25+x^2$; 7) $81+100p^2$;
2) b^2+1; 5) $1-y^2$; 8) $81-100p^2$;
3) $4-c^2$; 6) $16a^2-b^2$; 9) $-m^2n^2-25$?

Якщо це можливо, то виконайте розкладання на множники.

530.° Розкладіть на множники:

1) b^2-d^2; 8) b^2c^2-1;
2) x^2-1; 9) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2$;
3) $-x^2+1$; 10) $-4a^2b^2+25$;
4) $36-c^2$; 11) $100a^2-0{,}01b^2$;
5) $4-25a^2$; 12) a^4-b^2;
6) $49a^2-100$; 13) $p^2t^2-0{,}36k^2d^2$;
7) $16x^2-121y^2$; 14) $y^{10}-9$.

531.° Розкладіть на множники:

1) $16-b^2$; 7) $0{,}09x^2-0{,}25y^2$;
2) c^2-49; 8) $a^2b^4-c^6d^8$;
3) $0{,}04-a^2$; 9) $4a^2c^2-9x^2y^2$;
4) $x^2-\frac{4}{9}$; 10) $x^{24}-y^{22}$;
5) $4x^2-25$; 11) $-1600+a^{12}$;
6) $81c^2-64d^2$; 12) $a^{18}-\frac{49}{64}$.

532.° Обчисліть, застосовуючи формулу різниці квадратів:

1) 86^2-76^2; 2) $19{,}4^2-19{,}3^2$; 3) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2-\left(2\frac{1}{3}\right)^2$.

533.° Знайдіть значення виразу x^2-y^2, якщо:

1) $x=75$, $y=25$; 2) $x=5{,}89$, $y=4{,}11$.

Комунальний вибір
Видавництво
«Гімназія»

534.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 49 = 0$; 3) $x^2 + 36 = 0$; 5) $9x^2 - 4 = 0$;

2) $\frac{1}{4} - z^2 = 0$; 4) $x^2 - 0{,}01 = 0$; 6) $0{,}04x^2 - 1 = 0$.

535.° Розв'яжіть рівняння:

1) $c^2 - 0{,}25 = 0$; 3) $-0{,}09 + 4x^2 = 0$.

2) $81x^2 - 121 = 0$;

536.• Розкладіть на множники, користуючись формулою різниці квадратів:

1) $(x+2)^2 - 49$;

2) $(x-10)^2 - 25y^2$;

3) $25 - (y-3)^2$;

4) $(a-4)^2 - (a+2)^2$;

5) $(8y+4)^2 - (4y-3)^2$;

6) $(5a+3b)^2 - (2a-4b)^2$;

7) $4(a-b)^2 - (a+b)^2$;

8) $(x^2+x+1)^2 - (x^2-x+2)^2$.

537.• Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(x-2)^2 - 4$; 4) $a^4 - (7b-a^2)^2$;

2) $(b+7)^2 - 100c^2$; 5) $(4x-9)^2 - (2x+19)^2$;

3) $121 - (b+7)^2$; 6) $(a+b+c)^2 - (a-b-c)^2$.

538.• Чому дорівнює площа заштрихованої фігури, зображеної на рисунку 4? Обчисліть значення отриманого виразу при $a = 7{,}4$ см, $b = 2{,}6$ см.

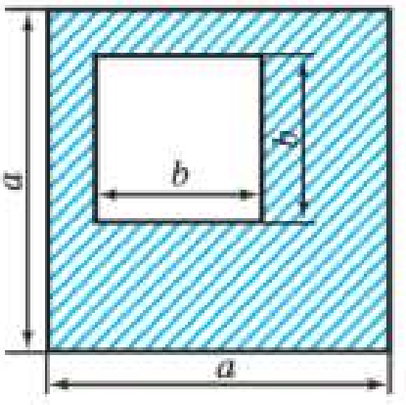


Рис. 4

539.• Два кола, радіуси яких дорівнюють R і r $(R > r)$, мають спільний центр. Виразіть через π, R і r площу фігури, обмеженої цими колами. Обчисліть значення отриманого виразу при $R = 5{,}1$ см, $r = 4{,}9$ см.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

540.* Подайте у вигляді добутку трьох множників вираз:

1) $m^4 - 625$; 2) $x^{16} - 81$.

541.* Розкладіть на множники:

1) $a^8 - b^8$; 2) $a^{16} - 256$.

542.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 5)^2 - 49 = 0$;

2) $(4x + 7)^2 - 9x^2 = 0$;

3) $(a - 1)^2 - (2a + 9)^2 = 0$.

543.* Розв'яжіть рівняння:

1) $16 - (6 - 11x)^2 = 0$;

2) $(7m - 13)^2 - (9m + 19)^2 = 0$.

544.** Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $(7n + 4)^2 - 9$ ділиться націло на 7;

2) $(8n + 1)^2 - (3n - 1)^2$ ділиться націло на 11;

3) $(3n + 7)^2 - (3n - 5)^2$ ділиться націло на 24.

545.** Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $(5n + 4)^2 - (5n - 4)^2$ ділиться націло на 80;

2) $(10n + 2)^2 - (4n - 10)^2$ ділиться націло на 12.

546.** Доведіть, що:

1) різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює сумі цих чисел;

2) різниця квадратів двох послідовних парних чисел ділиться націло на 4.

547.** Доведіть, що:

1) різниця квадратів двох послідовних парних чисел дорівнює подвоєній сумі цих чисел;

2) різниця квадратів двох послідовних непарних чисел ділиться націло на 8.

548.** При якому значенні b рівняння $(b^2 - 4)x = b - 2$:

1) має безліч коренів;

Комунальний заклад «Вишгородський ліцей № 1 «Гімназія»

2) не має коренів;
3) має один корінь?

549.** При якому значенні a рівняння $(a^2-25)x=a+5$:
1) має безліч коренів;
2) не має коренів;
3) має один корінь?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

550. У магазині «Стиль» ціну костюма знизили спочатку на 10 %, а потім ще на 10 %. У магазині «Мода» ціну такого самого костюма одразу знизили на 20 %. У якому магазині вигідніше купити костюм, якщо спочатку ціна костюма в обох магазинах була однаковою?

551. За 3 дні продали 130 кг апельсинів. Другого дня продали $\frac{4}{9}$ того, що продали за перший день, а третього — стільки ж, скільки за перші два дні разом. Скільки кілограмів апельсинів продали за перший день?

552. Для пари виразів знайдіть усі значення a, при яких значення другого виразу в 3 рази більше за відповідне значення першого виразу:
1) a і $3a$;
2) a^2 і $3a^2$;
3) a^2+1 і $3a^2+3$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

553. Запишіть у вигляді виразу:
1) квадрат суми чисел a і b;
2) суму квадратів чисел a і b;
3) подвоєний добуток чисел a і b;
4) квадрат різниці одночленів $3m$ і $4n$.

554. Знайдіть подвоєний добуток одночленів:
1) a^2 і $3b$;
2) $5x$ і $6y$;
3) $0{,}5m$ і $4n$;
4) $\frac{1}{3}m^2$ і $6m$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

555. Меню складається зі 101 страви. Доведіть, що кількість способів вибору обіду з непарної кількості страв дорівнює кількості способів вибору обіду з парної кількості страв за умови, що замовити всі страви з меню не можна.

16. Квадрат суми та квадрат різниці двох виразів

Перетворимо у многочлен вираз $(a+b)^2$. Маємо:

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$.

Отже,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Цю тотожність називають **формулою квадрата суми двох виразів.** Тепер можна сформулювати правило.

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу.

Перетворимо в многочлен вираз $(a-b)^2$. Маємо:

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$.

Ми отримали **формулу квадрата різниці двох виразів:**

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого й другого виразів плюс квадрат другого виразу.

Зауважимо, що формулу квадрата різниці двох виразів можна отримати за допомогою формули квадрата суми двох виразів:

$(a-b)^2=(a+(-b))^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

За допомогою отриманих формул можна простіше підносити до квадрата суму або різницю будь-яких двох виразів, не застосовуючи правила множення двох многочленів. Тому вони належать до формул скороченого множення.

Приклад 1. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(3b-4c)^2$; 2) $(a^3+5a)^2$.

Розв'язання. 1) За формулою квадрата різниці двох виразів отримуємо:

$$(3b-4c)^2=(3b)^2-2\cdot 3b\cdot 4c+(4c)^2=9b^2-24bc+16c^2.$$

2) За формулою квадрата суми двох виразів отримуємо:

$$(a^3+5a)^2=(a^3)^2+2\cdot a^3\cdot 5a+(5a)^2=a^6+10a^4+25a^2.$$ ◀

Приклад 2. Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(-a-b)^2$; 2) $(-x^2-6)^2$.

Розв'язання. 1) Маємо: $(-a-b)^2=(-a)^2-2\,(-a)\,b+b^2=$ $=a^2+2ab+b^2$.

Цей приклад можна розв'язати інакше. Оскільки

$$(-a-b)^2=(-1\cdot(a+b))^2=(-1)^2\cdot(a+b)^2=(a+b)^2,$$

тобто вирази $(-a-b)^2$ і $(a+b)^2$ тотожно рівні, то маємо:

$$(-a-b)^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

2) $(-x^2-6)^2=(x^2+6)^2=x^4+12x^2+36$. ◀

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння

$$(x-10)^2=(x+7)^2-17.$$

Розв'язання. Маємо:

$$x^2-20x+100=x^2+14x+49-17;$$
$$x^2-20x-x^2-14x=49-17-100;$$
$$-34x=-68;\ x=2.$$

Відповідь: 2. ◀

Приклад 4. Доведіть, що остача при діленні квадрата натурального числа на число 3 дорівнює 0 або 1.

Розв'язання. Нехай n — деяке натуральне число. Розглянемо три випадки.

1) Число n кратне 3. Тоді $n=3k$, де k — натуральне число.

Маємо: $n^2=(3k)^2=9k^2$. Значення виразу $9k^2$ кратне 3, тобто остача при діленні n^2 на 3 дорівнює 0.

2) Остача при діленні на 3 числа n дорівнює 1. Тоді n можна подати у вигляді $n = 3k + 1$, де k — натуральне число.

Маємо:

$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3p + 1$, де $p = 3k^2 + 2k$ — неповна частка при діленні n^2 на 3, а остача при цьому дорівнює 1.

3) Остача при діленні на 3 числа n дорівнює 2. Тоді $n = 3k + 2$, де k — натуральне число.

Маємо: $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = (9k^2 + 12k + 3) + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Очевидно, що й у цьому випадку остача при діленні n^2 на 3 дорівнює 1. ◀

?

1. Яку тотожність називають формулою квадрата суми двох виразів? **2.** Сформулюйте правило піднесення до квадрата суми двох виразів. **3.** Яку тотожність називають формулою квадрата різниці двох виразів? **4.** Сформулюйте правило піднесення до квадрата різниці двох виразів.

ВПРАВИ

556.° Чи є даний вираз квадратом суми або квадратом різниці двох виразів:

1) $(a + 50)^2$; 3) $(5 - x)^2$; 5) $(xy + mn)^2$;
2) $a^2 + b^2$; 4) $m^2 - n^2$; 6) $(6 - c)^3$?

557.° Якому з наведених многочленів тотожно дорівнює вираз $(5a + 3)^2$:

1) $25a^2 + 15a + 9$; 3) $25a^2 + 9$;
2) $25a^2 + 30a + 9$; 4) $5a^2 + 3$?

558.° Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a + x)^2$; 3) $(y - 1)^2$; 5) $(y - 13)^2$;
2) $(x + 2)^2$; 4) $(5 - p)^2$; 6) $(13 - y)^2$.

559.° Виконайте піднесення до квадрата:

1) $(a + 8)^2$; 2) $(b - 2)^2$; 3) $(7 + c)^2$;

4) $(4+k)^2$; 5) $(6-d)^2$; 6) $(d-6)^2$.

560.° Закінчіть піднесення двочлена до квадрата:

1) $(3x+5y)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2=\ldots$;

2) $\left(\frac{1}{2}a+6b\right)^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}a\cdot 6b+(6b)^2=\ldots$;

3) $\left(\frac{1}{3}x^4+0{,}6y^5\right)^2=\left(\frac{1}{3}x^4\right)^2+2\cdot\frac{1}{3}x^4\cdot 0{,}6y^5+(0{,}6y^5)^2=\ldots$.

561.° Закінчіть піднесення двочлена до квадрата:

1) $(ab-9)^2=(ab)^2-2\cdot ab\cdot 9+9^2=\ldots$;

2) $(4a^2-a^3)^2=(4a^2)^2-2\cdot 4a^2\cdot a^3+(a^3)^2=\ldots$.

562.° Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(3a-2)^2$; 4) $(0{,}4m-0{,}5n)^2$; 7) $(a^2+4b)^2$;

2) $(7b+6)^2$; 5) $\left(3a+\frac{1}{3}b\right)^2$; 8) $(a^2+a)^2$;

3) $(8x+4y)^2$; 6) $(b^2-11)^2$; 9) $(3b^2-2b^5)^2$.

563.° Виконайте піднесення до квадрата:

1) $(2m+1)^2$; 3) $(10c+7d)^2$; 5) $(m^4-n^3)^2$;

2) $(4x-3)^2$; 4) $(c^2-6)^2$; 6) $(5a^4-2a^7)^2$.

564.° Спростіть вираз:

1) $a^2+(3a-b)^2$; 4) $c^2+36-(c-6)^2$;

2) $(4x+5)^2-40x$; 5) $(x-2)^2+x(x+10)$;

3) $50a^2-(7a-1)^2$; 6) $3m(m-4)-(m+2)^2$.

565.° Спростіть вираз:

1) $(x-12)^2+24x$; 3) $2x(x+2)-(x-2)^2$;

2) $(x+8)^2-x(x+5)$; 4) $p(p-7)-(p+7)^2$.

566.° Доведіть тотожність $(a-b)^2=(b-a)^2$.

567.* Спростіть вираз:

1) $(y-9)^2+(4-y)(y+6)$; 3) $(2a-3b)^2+(3a+2b)^2$;

2) $(x-4)(x+4)-(x-1)^2$; 4) $(x-5)^2-(x-7)(x+7)$.

Конкурсний вибір
Видавництво
«Гімназія»

568.* Спростіть вираз:

1) $(y+7)^2+(y+2)(y-7)$;
2) $(a+1)(a-1)-(a+4)^2$;
3) $(x-10)(9-x)+(x+10)^2$;
4) $(x-4)(3+x)-(x-3)^2$.

569.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-8)^2-x(x+6)=-2$;
2) $(x+7)^2=(x-3)(x+3)$;
3) $(2x+1)^2-(2x-1)(2x+3)=0$;
4) $x(x-2)-(x+5)^2=35$.

570.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+9)^2-x(x+8)=1$;
2) $(x-11)^2=(x-7)(x-9)$;
3) $(x-4)(x+4)-(x+6)^2=-16$.

571.* Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(*+b)^2=*+4ab+b^2$;
2) $(4x-*)^2=16x^2-*+100y^2$;
3) $(*-5c)^2=*-20b^2c+25c^2$;
4) $(7a^2+*)^2=*+*+9b^6$.

572.* Замініть зірочки такими одночленами, щоб утворилася тотожність:

1) $(*+6b)^2=*+24ab+*$;
2) $(*-*)^2=9m^4-42m^2n^8+*$.

573.* Перетворіть у многочлен вираз:

1) $(-x+1)^2$;
2) $(-m-9)^2$;
3) $(-5a+3b)^2$;
4) $(-0,7c-10d)^2$.

574.* Виконайте піднесення до квадрата:

1) $(-3m+7n)^2$;
2) $(-0,4x-1,5y)^2$;
3) $(-x^2-y)^2$;
4) $(-a^2b^2+c^{10})^2$.

575.* Перетворіть у многочлен вираз:

1) $6(1-2c)^2$;
2) $a(a-6b)^2$;
3) $5b(b^2+7b)^2$;
4) $(a+3)(a-4)^2$;

Корисний відбір Видавництво «Гімназія»

5) $(a-5)^2(a+5)^2$; 6) $(3x+4y)^2(3x-4y)^2$.

576.* Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $7x(x^3-2x)^2$; 3) $(10p-k)^2(10p+k)^2$.

2) $(5y-2)^2(2y+1)$;

577.* Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(a+3)^2-(a-9)(a+9)$, якщо $a=-2{,}5$;

2) $(5x-8)^2-(4x-3)^2+26x$, якщо $x=-\frac{1}{3}$.

578.* Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $2m(m-6)^2-m^2(2m-15)$, якщо $m=-4$;

2) $(2x-5)^2-4(x+1)(x-7)$, якщо $x=-3{,}5$.

579.* При якому значенні змінної значення квадрата двочлена $x+12$ на 225 більше за відповідне значення квадрата двочлена $x-13$?

580.* Знайдіть сторону квадрата, якщо при збільшенні її на 5 см отримаємо квадрат, площа якого на 95 см^2 більша за площу даного.

581.* Якщо сторону квадрата зменшити на 8 см, то отримаємо квадрат, площа якого на 352 см^2 менша від площі даного. Знайдіть сторону даного квадрата.

582.* Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо подвоєний квадрат більшого з них на 79 більший за суму квадратів двох інших чисел.

583.* Знайдіть чотири послідовних натуральних числа, якщо сума квадратів другого й четвертого з них на 82 більша за суму квадратів першого й третього.

584.* При яких значеннях a і b є правильною рівність:

1) $(a+b)^2=a^2+b^2$; 2) $(a-b)^2=(a+b)^2$?

585.* Доведіть тотожність:

1) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$;

2) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$;

3) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$.

586.* Доведіть тотожність:

1) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$;

2) $(a-b)^2+(ab+1)^2=(a^2+1)(b^2+1)$.

587.** Яким числом, парним чи непарним, є квадрат непарного натурального числа?

588.** Доведіть формулу куба суми двох виразів

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Користуючись цією формулою, перетворіть у многочлен вираз: 1) $(x+3)^3$; 2) $(2x+y)^3$.

589.** Доведіть формулу куба різниці двох виразів

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Користуючись цією формулою, перетворіть у многочлен вираз: 1) $(1-x)^3$; 2) $(x-5y)^3$.

590.** Доведіть формулу квадрата тричлена

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

Користуючись цією формулою, перетворіть у многочлен вираз: 1) $(a+b-c)^2$; 2) $(a-b+4)^2$.

591.** Давньогрецький учений Евклід (бл. 365–300 рр. до н. е.) доводив формули квадрата суми та квадрата різниці двох виразів геометрично. Користуючись рисунками 5 і 6, відтворіть його доведення.

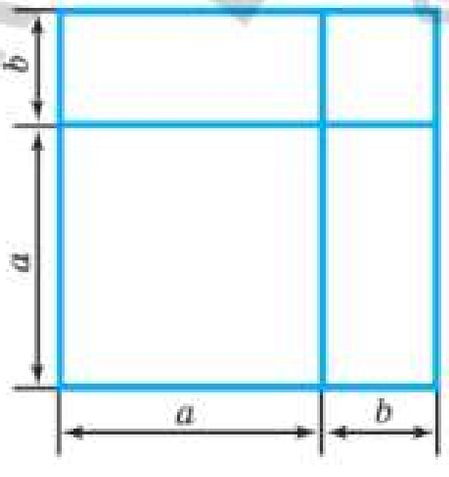


Рис. 5

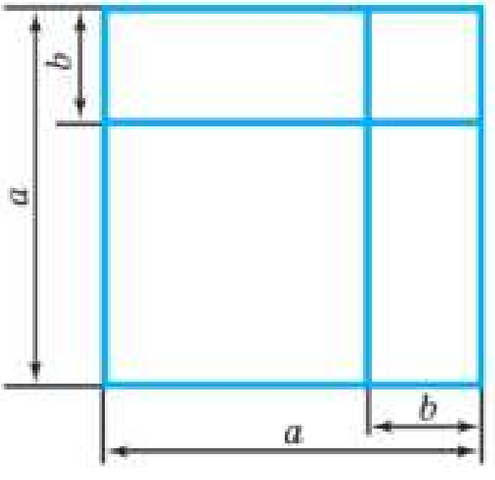


Рис. 6

Конкурсний примірник Видавництво «Ранок»

592.** Чому дорівнює остача при діленні квадрата непарного натурального числа на 8?

593.** Доведіть, що коли остача при діленні натурального числа на 16 дорівнює 4, то квадрат цього числа ділиться націло на 16.

594.** Доведіть, що коли остача при діленні натурального числа на 25 дорівнює 5, то квадрат цього числа кратний 25.

595.** Використовуючи формули скороченого множення, подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a+b+c)(a+b-c)$;

2) $(a+b+c)(a-b-c)$;

3) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.

596.** Використовуючи формули скороченого множення, подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a-b-c)(a+b-c)$; 2) $(a-b+c+d)(a-b-c-d)$.

597.* З'ясуйте, яку остачу може давати квадрат натурального числа при діленні на 4.

598.* Доведіть тотожність

$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2.$$

Наведена тотожність є правилом видатного давньогрецького вченого Піфагора (VI ст. до н. е.) для обчислення цілочислових значень довжин сторін прямокутного трикутника. При одному й тому самому натуральному значенні n значення виразів $2n+1$; $2n^2+2n$; $2n^2+2n+1$ є довжинами сторін прямокутного трикутника.

599.* (*Тотожність Лагранжа*[1].) Доведіть тотожність

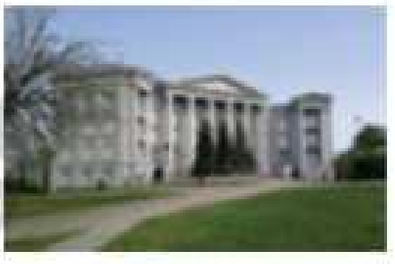
$$(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+k^2)-(am+bn+ck)^2=$$
$$=(an-bm)^2+(ak-cm)^2+(bk-cn)^2.$$

[1] Лагранж Жозеф Луї (1736–1813) — французький математик і механік.

600.* Доведіть, що сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел не може дорівнювати квадрату натурального числа.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

601. Цукровий буряк, що є найсолодшою коренеплідною рослиною, яку вирощують в Україні. У ньому накопичується до 25 % цукру, тоді як у цукровій тростині — лише 18 %. Скільки тонн цукрової тростини треба переробити, щоб отримати стільки ж цукру, скільки одержують з 3600 т цукрових буряків?



Національний музей історії України (м. Київ)

602. У 2017 р. в місті Києві працювало 28 **історичних, літературних і мистецьких** музеїв. Мистецьких музеїв було в 3,4 раза менше, ніж історичних, і на один музей менше, ніж літературних. Скільки працювало музеїв кожного із цих трьох видів?

603. Заробітна плата робітника пропорційна кількості відпрацьованих ним годин. У перший місяць він працював 170 год і отримав 11 900 грн. Скільки годин він працював у другому місяці, якщо отримав за роботу 13 300 грн?

604. При якому значенні змінної виконується рівність:

1) $(x-1)^2+(x+1)^2=-10$;

2) $(x-1)^2+(x+1)^2=0$;

3) $(x^2-1)^2+(x+1)^2=0$?

605. При яких значеннях змінних x і y виконується рівність:

1) $(x+2)^2+(y-6)^2=-1$;

2) $(x+2)^2+(y-6)^2=0$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

606. Відомо, що натуральні числа m і n такі, що значення виразу $10m+n$ ділиться націло на 11. Доведіть, що значення виразу $(10m+n)(10n+m)$ ділиться націло на 121.

Трикутник Паскаля

Розв'язуючи задачу 588, ви довели, що

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Цю тотожність називають **формулою куба суми двох виразів.**

Якщо записати, що $(a+b)^4 = (a+b)^3\,(a+b)$, то можна перетворити в многочлен вираз $(a+b)^4$. Отримуємо таку тотожність:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Діючи аналогічно, можна перетворити в многочлен будь-який вираз вигляду $(a+b)^n$. Проте зі збільшенням показника n зростатиме обсяг роботи, пов'язаної з перетвореннями виразів.

Технічну роботу можна скоротити, якщо підмітити певні закономірності. Усі одночлени, які стоять у правій частині тотожності, мають однаковий степінь, що дорівнює показнику степеня двочлена. Буквені частини цих одночленів відповідно мають такий вигляд: a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$, …, ab^{n-1}, b^n. Для пошуку коефіцієнтів цих одночленів існує спеціальна таблиця (рис. 7), яку називають «трикутником Паскаля» на честь видатного французького математика та філософа Блеза Паскаля.

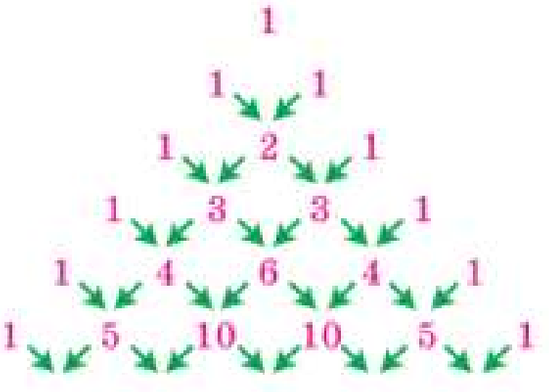


Рис. 7

Блез Паскаль
(1623–1662)

Французький математик, фізик, літератор і філософ. Один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей і проєктивної геометрії. Створив перші зразки обчислювальної техніки.

Тут стрілочками показано, як знайти наступний рядок таблиці за попереднім: додавши два сусідніх пурпурових числа, отримаємо інше пурпурове число, записане в наступному рядку між двома даними числами.

Далі показано, як користуватися цією таблицею.

$$\begin{array}{ll} & 1 \\ (a+b)^1: & 1\cdot a^1+1\cdot b^1 \\ (a+b)^2: & 1\cdot a^2+2\cdot a^1b^1+1\cdot b^2 \\ (a+b)^3: & 1\cdot a^3+3\cdot a^2b^1+3\cdot a^1b^2+1\cdot b^3 \\ (a+b)^4: & 1\cdot a^4+4\cdot a^3b^1+6\cdot a^2b^2+4\cdot a^1b^3+1\cdot b^4 \\ (a+b)^5: & 1\cdot a^5+5\cdot a^4b^1+10\cdot a^3b^2+10\cdot a^2b^3+5\cdot a^1b^4+1\cdot b^5 \end{array}$$

17. Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів

Перепишемо формули квадрата суми та квадрата різниці двох виразів, поміняв місцями їхні ліві та праві частини:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

У такому вигляді ці формули в ряді випадків дозволяють «згорнути» тричлен у квадрат двочлена.

Конкурсний відділ Видавництво «Підручник»

Тричлен, який можна подати у вигляді квадрата двочлена, називають **повним квадратом**.

Приклад 1. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $x^2 + 10x + 25$; 2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4$.

Розв'язання.

1) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x+5)^2$.

2) $9a^6 - 42a^3b^2 + 49b^4 = (3a^3)^2 - 2 \cdot 3a^3 \cdot 7b^2 + (7b^2)^2 =$
$= (3a^3 - 7b^2)^2$. ◀

Приклад 2. Знайдіть, користуючись перетворенням виразу у квадрат двочлена, значення суми

$$5{,}2^2 + 10{,}4 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2.$$

Розв'язання. Маємо:

$$5{,}2^2 + 10{,}4 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2 = 5{,}2^2 + 2 \cdot 5{,}2 \cdot 4{,}8 + 4{,}8^2 =$$
$$= (5{,}2 + 4{,}8)^2 = 10^2 = 100.$$ ◀

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Розв'язання. Подамо ліву частину рівняння у вигляді квадрата різниці:

$$(2x - 3)^2 = 0.$$

Оскільки значення квадрата дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його основа дорівнює нулю, то отримуємо:

$$2x - 3 = 0;$$
$$x = 1{,}5.$$

Відповідь: 1,5. ◀

Приклад 4. Доведіть, що значення виразу

$$(2x + 1)^2 - 2(2x + 1)(2x - 5) + (2x - 5)^2$$

не залежить від значення змінної.

Розв'язання. Маємо: $(2x + 1)^2 - 2(2x + 1)(2x - 5) +$
$+ (2x - 5)^2 = ((2x + 1) - (2x - 5))^2 = (2x + 1 - 2x + 5)^2 =$
$= 6^2 = 36$. ◀

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

Приклад 5. Доведіть, що вираз $x^2 - 4x + 5$ набуває додатних значень при будь-яких значеннях x. Якого найменшого значення набуває вираз і при якому значенні x?

Розв'язання. Перетворимо даний вираз:

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1.$$

Подання виразу у вигляді суми, одним з доданків якої є квадрат двочлена (у нашому прикладі це $(x - 2)^2$), називають **виділенням квадрата двочлена** з даного виразу.

Оскільки $(x-2)^2 \geqslant 0$ при будь-яких значеннях x, то вираз $(x - 2)^2 + 1$ набуває лише додатних значень. Також зрозуміло, що $(x-2)^2 + 1 \geqslant 1$. Звідси найменшого значення, яке дорівнює 1, даний вираз набуває при $x = 2$. ◀

Приклад 6. При яких значеннях x і y значення многочлена $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40$ дорівнює нулю?

Розв'язання. Маємо: $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 40 =$

$$= x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 = (x - 6)^2 + (y + 2)^2.$$

Ми подали даний многочлен у вигляді суми двох доданків, які можуть набувати лише невід'ємних значень. Їхня сума, а отже, і даний многочлен набуватимуть нульового значення тоді й тільки тоді, коли кожен із доданків дорівнюватиме нулю, тобто коли $x = 6$ і $y = -2$.

Відповідь: $x = 6$, $y = -2$. ◀

ВПРАВИ

607.° Якому з наведених виразів тотожно дорівнює многочлен $a^2 - 18a + 81$:

1) $(a-3)^2$; 2) $a - 9$; 3) $(a - 9)(a + 9)$; 4) $(a-9)^2$?

608.° Яка з даних рівностей є тотожністю:

1) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a + 8b)^2$;

2) $a^2+8ab+16b^2=(a+4b)^2$;

3) $a^2+8ab+16b^2=(ab+4)^2$;

4) $a^2+8ab+16b^2=(a+2b)^2$?

609.° Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $c^2+2cd+d^2$;

2) $p^2-2pq+q^2$;

3) $x^2-2\cdot x\cdot 7+7^2$.

610.° Розкладіть на множники многочлен:

1) $m^2+2mn+n^2$;

2) $b^2-2bc+c^2$;

3) $11^2-2\cdot 11\cdot p+p^2$.

611.° Подайте многочлен у вигляді квадрата суми або квадрата різниці двох виразів:

1) a^2+2a+1;

2) $x^2-12x+36$;

3) $y^2-18y+81$;

4) $100-20c+c^2$;

5) $a^2-6ab+9b^2$;

6) $9a^2-30ab+25b^2$;

7) $b^4-2b^2c+c^2$;

8) $m^8+m^4n^2+\frac{1}{4}n^4$;

9) $36a^2b^2-12ab+1$;

10) x^4+2x^2+1.

612.° Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) b^2-2b+1;

2) $4+4n+n^2$;

3) $x^2-14x+49$;

4) $4a^2+4ab+b^2$;

5) $9x^2-24xy+16y^2$;

6) a^6-2a^3+1.

613.° Знайдіть значення виразу, подавши його попередньо у вигляді квадрата двочлена:

1) $y^2-8y+16$, якщо $y=-4$;

2) $c^2+24c+144$, якщо $c=-10$;

3) $25x^2-20xy+4y^2$, якщо $x=3$, $y=5{,}5$.

614.° Знайдіть значення виразу:

1) $b^2-30b+225$, якщо $b=6$;

2) $100a^2+60ab+9b^2$, якщо $a=0{,}8$, $b=-3$.

Конкурсний вибір
Видавництво
«Підручники»

615.* Який одночлен треба поставити замість зірочки, щоб можна було подати у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $* - 56a + 49$;
2) $9c^2 - 12c + *$;
3) $* - 42xy + 49y^2$;
4) $0{,}01b^2 + * + 100c^2$;
5) $a^2b^2 - 4a^3b^5 + *$;
6) $1{,}44x^2y^4 - * + 0{,}25y^6$;
7) $64 - 80y^{20} + *$;
8) $\frac{9}{25}a^6b^2 - a^5b^5 + *$?

616.* Замініть зірочки такими одночленами, щоб виконувалася тотожність:

1) $n^2 + 60n + * = (* + 30)^2$;
2) $25c^2 - * + * = (* - 8k)^2$;
3) $225a^2 - * + 64b^4 = (* - *)^2$;
4) $0{,}04x^2 + * + * = (* + 0{,}3y^3)^2$.

617.* Подайте, якщо це можливо, у вигляді квадрата двочлена або у вигляді виразу, протилежного квадрату двочлена, тричлен:

1) $-8x + 16 + x^2$;
2) $a^8 + 4a^4b^3 + 4b^6$;
3) $2x - 25 - 0{,}04x^2$;
4) $25m^2 - 15mn + 9n^2$;
5) $81c^2 - 54b^2c + 9b^2$;
6) $b^{10} - a^2b^5 + 0{,}25a^4$.

618.* Подайте, якщо це можливо, у вигляді квадрата двочлена або у вигляді виразу, протилежного квадрату двочлена, тричлен:

1) $-a^4 - 0{,}8a^6 - 0{,}16a^8$;
2) $121m^2 - 44mn + 16n^2$;
3) $-a^6 + 4a^3b - 4b^2$;
4) $80xy + 16x^2 + 25y^2$.

619.* Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $(4a + 3b)^2 - 8b(4a + b)$;
2) $(10x + 3y)^2 - (8x + 4y)(8x - 4y)$.

620.* Перетворіть у квадрат двочлена вираз:

1) $(3m - 2n)^2 + 5m(4n - m)$;
2) $(9x + 2y)^2 - (8x + 3y)(4x - 4y)$.

Комунальний заклад «Відділ освіти Сумської міської ради»

621.* Користуючись перетворенням виразів у квадрат суми або різниці двох чисел, знайдіть значення даного виразу:

1) $1{,}02^2 - 1{,}02 \cdot 1{,}96 + 0{,}98^2$; 2) $24^2 + 96 \cdot 38 + 76^2$.

622.* Обчисліть:

1) $203^2 - 406 \cdot 103 + 103^2$;

2) $1{,}58^2 + 1{,}58 \cdot 2{,}84 + 1{,}42^2$.

623.* Яке число треба додати до многочлена $81a^2b^2 - 36ab + 9$, щоб отриманий вираз тотожно дорівнював квадрату двочлена?

624.* Яке число треба додати до многочлена $100m^4 + 120m^2 + 40$, щоб отриманий вираз тотожно дорівнював квадрату двочлена?

625.* Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 16x + 64 = 0$; 2) $81x^2 + 126x + 49 = 0$.

626.* Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 12x + 36 = 0$; 2) $25x^2 - 30x + 9 = 0$.

627.** Чи є тотожністю рівність

$$(a-2)(a-3)(a+3)(a+2) + a^2 = (a^2 - 6)^2?$$

628.** Доведіть тотожність:

1) $(a-1)^2 + 2(a-1) + 1 = a^2$;

2) $(a+b)^2 - 2(a+b)(a-b) + (a-b)^2 = 4b^2$;

3) $(a-8)^2 + 2(a-8)(3-a) + (a-3)^2 = 25$;

4) $(x^n - 2)^2 - 2(x^n - 2)(x^n + 2) + (x^n + 2)^2 = 16$, де n — довільне натуральне число.

629.** Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $(3x+8)^2 - 2(3x+8)(3x-8) + (3x-8)^2$;

2) $(4x-7)^2 + (4x-11)^2 + 2(4x-7)(11-4x)$.

630.** Доведіть, що не має коренів рівняння:

1) $x^2 - 14x + 52 = 0$; 2) $4x^2 - 2x + 1 = 0$.

Конкурсний вибір
Видавництво
«Гімназія»

631.** Доведіть, що даний вираз набуває додатних значень при всіх значеннях x. Укажіть, якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x:

1) $x^2-6x+10$; 2) $16x^2+24x+25$; 3) x^2+x+1.

632.** Чи може набувати від'ємних значень вираз:

1) $x^2-24x+144$; 2) $4x^2+20x+28$?

633.** Якого найбільшого значення та при якому значенні змінної набуває вираз:

1) $-x^2-16x+36$; 2) $2-16x^2+24x$?

634.** Якого найменшого значення та при якому значенні змінної набуває вираз:

1) $x^2-28x+200$; 2) $9x^2+30x-25$?

635.** Доведіть, що вираз $(a-3b)(a-3b-4)+4$ набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінних.

636.** Подайте у вигляді суми квадратів двох виразів многочлен:

1) $2a^2-2a+1$; 4) $10x^2-6xy+y^2$;

2) $a^2+b^2+2a+2b+2$; 5) $x^2+5y^2+4xy-4y+4$;

3) $x^2+6x+y^2-2y+10$; 6) $2a^2+2b^2$.

637.** Розкладіть на множники многочлен, попередньо подавши його у вигляді різниці квадратів двох виразів:

1) a^4+a^2+1; 3) $a^2b^2+2ab-c^2-8c-15$;

2) $x^2-y^2+4x-4y$; 4) $8a^2-12a+2ab-b^2+4$.

638.** Подайте многочлен у вигляді суми або різниці квадратів двох виразів:

1) a^4+17a^2+16; 3) $2x^2-6xy+9y^2-6x+9$;

2) $x^2+y^2-10x+14y+74$; 4) $x^2-y^2-4x-2y+3$.

639.** При яких значеннях x і y дорівнює нулю значення многочлена:

1) $x^2+y^2+8x-10y+41$; 2) $x^2+37y^2+12xy-2y+1$?

Конкурсний відбір
Видавництво
«Підручник»

640.** Чи існують такі значення x і y, при яких дорівнює нулю значення многочлена:

1) $x^2+4y^2+2x-4y+2$; 2) $9x^2+y^2-12x+8y+21$?

641.** Значення змінних a і b є такими, що $a+b=7$, $ab=2$. Знайдіть значення виразу a^2+b^2.

642.** Додатні значення змінних a і b є такими, що $a^2+b^2=34$, $ab=15$. Знайдіть значення виразу $a+b$.

643.** Від'ємні значення змінних a і b є такими, що $a^2+b^2=68$, $ab=16$. Знайдіть значення виразу $a+b$.

644.* Подайте число 24 у вигляді суми таких двох чисел, щоб їхній добуток був найбільшим.

645.* Знайдіть сторони прямокутника, що має найбільшу площу з усіх прямокутників, периметр кожного з яких дорівнює 20 см.

646.* Числа a і b такі, що $b^2+\frac{a^2}{4}=1$, $ab=3$, $a>0$, $b>0$. Знайдіть значення виразу $a+2b$.

647.* Числа a, b і c такі, що $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$. Чому дорівнює значення виразу $a+b-2c$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

648. Для виробництва 1 т паперу потрібно використати 6,3 м³ деревини або 1400 кг макулатури. Учні та учениці школи зібрали 2100 кг макулатури. Скільки кубічних метрів деревини можна зекономити, використавши для виробництва паперу зібрану макулатуру?

649. Акції підприємства розподілено між державою та приватними особами у відношенні 5 : 2. Загальний прибуток підприємства за рік після сплати податків склав 2,8 млн грн. Скільки гривень із цього прибутку має піти на виплату приватним акціонерам?

650. Екіпаж круїзного лайнера складається із 72 осіб, а найбільша кількість туристів і туристок, які можуть на ньому подорожувати, — 264. Яка найменша кількість рятувальних човнів має бути на лайнері, якщо один човен розрахований на 60 осіб?

651. (*Старовинна болгарська задача.*) Сім рибалок ловили на озері рибу. Перший ловив рибу щодня, другий — через день, третій — через 2 дні й т. д., сьомий — через 6 днів. Сьогодні всі рибалки прийшли на озеро. Через яку найменшу кількість днів усі сім рибалок зберуться разом на озері?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

652. Запишіть у вигляді виразу:
1) куб суми чисел a і b;
2) суму кубів чисел a і b;
3) різницю кубів чисел c і d;
4) куб різниці чисел c і d.

653. Піднесіть до куба одночлен:

1) y^2;
2) $2x^3$;
3) $3a^2b^4$;
4) $0{,}1mn^5$;
5) $\frac{1}{6}b^6c^7$;
6) $\frac{2}{7}p^{10}k^{15}$.

654. Подайте у вигляді куба одночлена вираз:

1) a^3b^6;
2) $8x^3y^9$;
3) $\frac{1}{64}c^9$;
4) $125m^{12}n^{21}$;
5) $0{,}216k^{15}p^{24}$;
6) $0{,}008a^9b^{18}c^{27}$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

655. Чи можна натуральні числа від 1 до 32 розбити на три групи так, щоби добутки чисел кожної групи були рівними?

Конкурсний відділ Видавництво «Гімназія»

ЗАВДАННЯ № 4 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Виконайте множення: $(3n + 1)(3n - 1)$.

А) $9n^2 - 6n + 1$; В) $9n^2 - 1$;
Б) $9n^2 + 6n + 1$; Г) $9n^2 + 1$.

2. Якому многочлену дорівнює вираз $(4x - 1)^2$?

А) $16x^2 + 8x + 1$; В) $16x^2 + 1$;
Б) $16x^2 - 8x + 1$; Г) $16x^2 - 1$.

3. Розкладіть на множники вираз $4a^2 - 25$.

А) $(2a - 5)^2$; В) $(2a - 5)(2a + 5)$;
Б) $(2a + 5)^2$; Г) $2a(2a - 25)$.

4. Подайте у вигляді добутку вираз $-0{,}09x^4 + 81y^{10}$.

А) $(0{,}03x^2 - 9y^4)(0{,}03x^2 + 9y^4)$;
Б) $(9y^8 - 0{,}03x^2)(9y^8 + 0{,}03x^2)$;
В) $(9y^8 - 0{,}3x^2)(9y^8 + 0{,}3x^2)$;
Г) $(9y^4 - 0{,}3x^2)(9y^4 + 0{,}3x^2)$.

5. Який з даних двочленів можна розкласти на множники, застосовуючи формулу різниці квадратів?

А) $-a^2 - 4b^2$; Б) $4a^2 + b^2$; В) $a^2 - 4b^2$; Г) $4b^2 + a^2$.

6. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз $a^2 - 8a + 16$.

А) $(a + 4)^2$; Б) $(a - 4)^2$; В) $(4a + 1)^2$; Г) $(a - 1)^2$.

7. Відомо, що $\left(\frac{1}{2}x - 3y^2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + axy^2 + 9y^4$. Чому дорівнює значення a?

А) 3; Б) -3; В) 6; Г) -6.

8. Спростіть вираз $(x + 8)(x - 8) - x(x - 6)$.

А) $6x - 16$; Б) $6x + 16$; В) $-6x - 64$; Г) $6x - 64$.

9. Якому многочлену дорівнює вираз $(7m - 2)^2 - (7m - 1)(7m + 1)$?

А) $-14m + 5$; Б) $-14m + 3$; В) $-28m + 5$; Г) $-28m + 3$.

10. Спростіть вираз $(c - 4)^2 - (3 - c)^2$.

А) $2c - 7$; Б) $7 - 2c$; В) $7 + 2c$; Г) $-2c - 7$.

11. Знайдіть значення виразу $(x - 4)^2 + 2(4 + x)(4 - x) + (x + 4)^2$ при $x = -1{,}2$.

А) 64; Б) 32; В) 48; Г) 72.

12. Подайте у вигляді многочлена вираз $(4 + a^2)(a - 2)(a + 2)$.

А) $a^2 - 16$; Б) $16 - a^2$; В) $16 - a^4$; Г) $a^4 - 16$.

КОНКУРСНИЙ ВИБІР видавництво «Гімназія»

18. Сума й різниця кубів двох виразів

Помножимо двочлен $a+b$ на тричлен a^2-ab+b^2. Отримаємо:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-\underline{a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}-\underline{\underline{ab^2}}+b^3=a^3+b^3.$$

Тим самим ми довели тотожність

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Цю тотожність називають **формулою суми кубів** двох виразів.

Многочлен a^2-ab+b^2, який стоїть у правій частині, називають **неповним квадратом різниці**. Така назва пояснюється його зовнішньою схожістю з многочленом $a^2-2ab+b^2$, який дорівнює квадрату різниці a і b.

Тепер можна сформулювати правило.

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їхньої різниці.

Розкладемо на множники вираз a^3-b^3. Маємо:

$$a^3-b^3=a^3+(-b)^3=(a+(-b))(a^2-a(-b)+(-b)^2)=$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Ми довели тотожність

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Цю тотожність називають **формулою різниці кубів** двох виразів.

Многочлен a^2+ab+b^2 називають **неповним квадратом суми.**

Отже, сформулюємо правило.

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їхньої суми.

Зауважимо, що цю формулу також можна довести, перемноживши многочлени, які стоять у правій частині.

Конкурсний відбір Рувіквуд Тімназія

Приклад 1. Розкладіть на множники:

1) $8a^3 + 27b^3$; 2) $x^6 - y^9$.

Розв'язання. 1) Подавши даний многочлен у вигляді суми кубів двох виразів, отримуємо:

$8a^3 + 27b^3 = (2a)^3 + (3b)^3 = (2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

2) Подавши даний многочлен у вигляді різниці кубів двох виразів, отримуємо:

$$x^6 - y^9 = (x^2)^3 - (y^3)^3 = (x^2 - y^3)(x^4 + x^2y^3 + y^6).$$ ◀

Приклад 2. Спростіть вираз $(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1)$ і знайдіть його значення при $y = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1) = (4y)^3 - 1 = 64y^3 - 1.$$

При $y = \frac{1}{2}$ отримуємо:

$$64y^3 - 1 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{8} - 1 = 8 - 1 = 7.$$ ◀

Приклад 3. Подайте у вигляді добутку вираз $(m - 4)^3 + 216$.

Розв'язання. Застосувавши формулу суми кубів, отримуємо:

$$(m - 4)^3 + 216 = (m - 4)^3 + 6^3 =$$
$$= (m - 4 + 6)((m - 4)^2 - 6(m - 4) + 36) =$$
$$= (m + 2)(m^2 - 8m + 16 - 6m + 24 + 36) =$$
$$= (m + 2)(m^2 - 14m + 76).$$ ◀

Приклад 4. Доведіть, що значення виразу $25^3 - 1$ ділиться націло на 24.

Розв'язання. Застосувавши формулу різниці кубів, матимемо:

$$25^3 - 1 = (25 - 1)(25^2 + 25 + 1) = 24(25^2 + 26).$$

Даний вираз подано у вигляді добутку, один із множників якого дорівнює 24, а другий є числовим виразом, значення якого — натуральне число. Отже, значення цього виразу ділиться націло на 24. ◀

Конкурсний відбір Видавництво «Мапа»

? **1.** Яку тотожність називають формулою суми кубів? **2.** Який многочлен називають неповним квадратом різниці? **3.** Сформулюйте правило розкладання на множники суми кубів двох виразів. **4.** Яку тотожність називають формулою різниці кубів? **5.** Який многочлен називають неповним квадратом суми? **6.** Сформулюйте правило розкладання на множники різниці кубів двох виразів.

ВПРАВИ

656.° Який із даних виразів є неповним квадратом суми, а який — неповним квадратом різниці:

1) $m^2+2mn+n^2$;
2) m^2+mn-n^2;
3) m^2+mn+n^2;
4) $m^2-4mn+n^2$;
5) m^2-mn+n^2;
6) $m^2-2mn+n^2$?

657.° Чи є тотожністю рівність:

1) $x^3+y^3=(x+y)(x^2+xy+y^2)$;
2) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$;
3) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-2xy+y^2)$;
4) $x^3-y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$?

658.° Якому з даних виразів тотожно дорівнює многочлен a^3-27:

1) $(a-3)(a^2+6a+9)$;
2) $(a-3)(a^2-9)$;
3) $(a-3)(a^2-3a+9)$;
4) $(a-3)(a^2+3a+9)$?

659.° Розкладіть на множники:

1) a^3+8;
2) c^3-64;
3) $125-b^3$;
4) $1+x^3$;
5) a^3+1000;
6) $27a^3-1$;
7) $1000c^3-216$;
8) a^3b^3-1;
9) $m^3n^3+0{,}001$.

660.° Розкладіть на множники:

1) x^3-1;
2) $27+a^3$;
3) $216-y^3$;
4) $\frac{1}{8}a^3+b^3$;
5) $0{,}001m^3+8n^3$;
6) $a^3b^3-c^3$.

Електронний відбір Видавництво Гімназія

661.° Яка з даних рівностей є тотожністю:

1) $m^3+8n^6=(m+2n^2)(m^2+2mn^2+4n^4)$;

2) $m^3+8n^6=(m-2n^2)(m^2+2mn^2+4n^4)$;

3) $m^3+8n^6=(m+2n^2)(m^2-2mn^2+4n^4)$;

4) $m^3+8n^6=(m-2n^2)(m^2-2mn^2+4n^4)$?

662.° Закінчіть розкладання на множники:

1) $64x^6-0{,}027y^9=(4x^2)^3-(0{,}3y^3)^3=\ldots$;

2) $b^{12}+216c^{15}=(b^4)^3+(6c^5)^3=\ldots$;

3) $\frac{1}{8}p^{18}-\frac{1}{27}b^{21}=\left(\frac{1}{2}p^6\right)^3-\left(\frac{1}{3}b^7\right)^3=\ldots$.

663.° Розкладіть на множники:

1) $a^{12}+b^9$;

2) $x^{18}-y^{27}$;

3) $m^6n^3-p^{12}$;

4) $a^{24}b^{33}+1$;

5) $8m^6+27n^9$;

6) $0{,}027x^{21}+0{,}125y^{24}$;

7) $0{,}216-8c^{27}$;

8) $1000a^{12}b^3+0{,}001c^6d^{15}$.

664.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) a^6-8;

2) $m^{12}+27$;

3) $a^3-b^{15}c^{18}$;

4) $1-a^{21}b^9$;

5) $125c^3d^3+0{,}008b^3$;

6) $\frac{64}{729}x^3-\frac{27}{1000}y^6$.

665.° Знайдіть, використовуючи формулу суми кубів або формулу різниці кубів, значення виразу:

1) $\frac{9^3+7^3}{32}$;

2) $\frac{16^3-10^3}{24}$.

666.° Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(x-2)(x^2+2x+4)$;

2) $(2a-1)(4a^2+2a+1)$;

3) $(a^2+1)(a^4-a^2+1)$;

4) $(0{,}5xy+2)(0{,}25x^2y^2-xy+4)$.

667.° Виконайте множення:

1) $(b-4)(b^2+4b+16)$;

2) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$;

Видавництво «Ранок»

3) $(x^3+6y^2)(x^6-6x^3y^2+36y^4)$.

668.° Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(9a^2+3a+1)(3a-1)$, якщо $a=\frac{1}{3}$;

2) $(5y-2)(25y^2+10y+4)+8$, якщо $y=-\frac{1}{5}$.

669.° Знайдіть значення виразу:

1) $(1-b^2)(1+b^2+b^4)$, якщо $b=-2$;

2) $2x^3+7-(x+1)(x^2-x+1)$, якщо $x=-1$.

670.• Розкладіть на множники:

1) $(a+6)^3-27$;

2) $(2x-1)^3+64$;

3) $8a^6-(4a-3)^3$;

4) $(x+y)^3-(x-y)^3$.

671.• Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(4-3x)^3-8x^3$;

2) $(c+3)^3+(c-3)^3$.

672.• Спростіть вираз:

1) $(x+1)(x^2-x+1)+(2-x)(4+2x+x^2)$;

2) $(x-4)(x^2+4x+16)-x(x-5)(x+5)$;

3) $a(a-3)^2-(a+3)(a^2-3a+9)$;

4) $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)(a^6+1)(a^{12}+1)$.

673.• Спростіть вираз:

1) $(a-5)(a^2+5a+25)-(a-1)(a^2+a+1)$;

2) $(y-3)(y^2+3y+9)-y(y-3)(y+3)-(y+3)^2$;

3) $(a-b)(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)$.

674.•• Доведіть, що значення виразу:

1) 456^3-156^3 ділиться націло на 300;

2) 254^3+238^3 ділиться націло на 123;

3) 17^6-1 ділиться націло на 36.

675.•• Доведіть, що значення виразу:

1) 341^3+109^3 ділиться націло на 90;

2) $2^{15}+3^3$ ділиться націло на 35.

Електронний варіант підручника «Алгебра»

676.** Укажіть найменше натуральне значення n таке, щоб вираз $x^{2n}-y^{3n}$ можна було розкласти на множники як за формулою різниці квадратів, так і за формулою різниці кубів. Розкладіть отриманий многочлен на множники за цими формулами.

677.** Придумайте многочлен, який можна розкласти на множники як за формулою різниці квадратів, так і за формулою різниці кубів. Розкладіть придуманий многочлен на множники за цими формулами.

678.** Чи можна стверджувати, що коли сума двох натуральних чисел ділиться націло на деяке натуральне число, то на це число ділиться націло:

1) різниця їхніх квадратів;
2) сума їхніх квадратів;
3) сума їхніх кубів?

679.** Відомо, що числа x і y такі, що $x^2+y^2=1$. Знайдіть значення виразу $x^6+3x^2y^2+y^6$.

680.** Відомо, що числа x і y такі, що $x^3-y^2=2$. Знайдіть значення виразу $x^9-6x^3y^2-y^6$.

681.** Доведіть, що коли $2a-b=1$, то $8a^3-b^3=6ab+1$.

682.** Доведіть, що коли $a+3b=2$, то $a^3+27b^3=8-18ab$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

683. Розкладіть на множники:

1) $3x^2+12xy$;
2) $10m^5-5m$;
3) $ab-ac+7b-7c$;
4) $6x-xy-6y+y^2$;
5) $49b^2-c^2$;
6) $p^2+12pk+36k^2$;
7) $100a^4-\frac{1}{9}b^2$;
8) $25a^2-(a-3)^2$.

684. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-4)(x+3)=0$;
2) $x^2-81=0$;
3) $7x^2+21x=0$;
4) $9x^2-6x+1=0$;
5) $x(x+7)(3x-2)=0$;
6) $12x^3-2x^2=0$.

19. Застосування різних способів розкладання многочлена на множники

У попередніх пунктах ми розглянули такі способи розкладання многочлена на множники:

- винесення спільного множника за дужки;
- метод групування;
- застосування формул скороченого множення.

Проте в математиці під час розв'язування багатьох задач часто доводиться використовувати кілька прийомів, застосовуючи їх у певній послідовності. Зокрема, є многочлени, для розкладання яких на множники треба застосувати одразу кілька способів.

Виникає природне запитання: які способи та в якій послідовності треба застосовувати при розкладанні многочлена на множники? Універсальних рекомендацій не існує, усе залежить від конкретного многочлена. І все ж дамо кілька загальних порад:

1) якщо це можливо, то розкладання треба починати з винесення спільного множника за дужки;

2) далі потрібно перевірити, чи можна застосувати формули скороченого множення;

3) якщо не вдається застосувати формули скороченого множення, то можна спробувати скористатися методом групування.

Приклад 1. Розкладіть на множники многочлен:

1) $3a^2b - 12b$;
2) $-5x^2 + 30xy - 45y^2$;
3) $24m^4 + 3m$;
4) $3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab$.

Розв'язання. 1) Застосувавши послідовно винесення спільного множника за дужки й формулу різниці квадратів, отримаємо:

$$3a^2b - 12b = 3b\,(a^2 - 4) = 3b\,(a - 2)\,(a + 2).$$

2) Застосувавши послідовно винесення спільного множника за дужки й формулу квадрата різниці, отримаємо:

$$-5x^2 + 30xy - 45y^2 = -5\,(x^2 - 6xy + 9y^2) = -5\,(x - 3y)^2.$$

3) Винесемо спільний множник за дужки та застосуємо формулу суми кубів:

$$24m^4 + 3m = 3m\,(8m^3 + 1) = 3m\,(2m + 1)\,(4m^2 - 2m + 1).$$

4) Комбінуючи метод винесення спільного множника за дужки та метод групування, матимемо:

$$3a^3 + 21a^2 - 6a^2b - 42ab = 3a\,(a^2 + 7a - 2ab - 14b) =$$
$$= 3a\,((a^2 + 7a) + (-2ab - 14b)) =$$
$$= 3a\,(a\,(a + 7) - 2b\,(a + 7)) = 3a\,(a + 7)\,(a - 2b). \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Подайте у вигляді добутку многочленів:

1) $x^{16} - 1$; 2) $a^{12} - b^{12}$.

Розв'язання.

1) $x^{16} - 1 = (x^8 - 1)\,(x^8 + 1) = (x^4 - 1)\,(x^4 + 1)\,(x^8 + 1) =$
$$= (x^2 - 1)\,(x^2 + 1)\,(x^4 + 1)\,(x^8 + 1) =$$
$$= (x - 1)\,(x + 1)\,(x^2 + 1)\,(x^4 + 1)\,(x^8 + 1).$$

2) $a^{12} - b^{12} = (a^6 - b^6)\,(a^6 + b^6) = (a^3 - b^3)\,(a^3 + b^3)\,(a^6 + b^6)$.

Ми отримали три множники, один з яких є різницею кубів, а два інших — сумою кубів. Використовуючи відповідні формули, отримуємо:

$$a^{12} - b^{12} = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)\,(a + b) \times$$
$$\times\,(a^2 - ab + b^2)\,(a^2 + b^2)\,(a^4 - a^2b^2 + b^4). \blacktriangleleft$$

Приклад 3. Розкладіть на множники:

1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n$; 2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$.

Розв'язання. 1) $m^2 - 16n^2 + 2m - 8n =$
$$= (m^2 - 16n^2) + (2m - 8n) = (m - 4n)\,(m + 4n) +$$
$$+ 2\,(m - 4n) = (m - 4n)\,(m + 4n + 2).$$

2) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 16 = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 16 =$
$$= (x + 2y)^2 - 4^2 = (x + 2y - 4)\,(x + 2y + 4). \blacktriangleleft$$

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Розв'язання. Маємо:

$$x^2\,(x + 1) - 4\,(x + 1) = 0;$$
$$(x + 1)\,(x^2 - 4) = 0;$$

$$(x+1)(x-2)(x+2)=0;$$
$$x+1=0, \text{ або } x-2=0, \text{ або } x+2=0;$$
$$x=-1, \text{ або } x=2, \text{ або } x=-2.$$

Відповідь: -1; 2; -2. ◀

Приклад 5. Розкладіть на множники тричлен x^2+8x-9, виділивши попередньо квадрат двочлена.

Розв'язання. Якщо до суми x^2+8x додати число 16, то отриманий вираз $x^2+8x+16$ можна «згорнути» за формулою квадрата суми. Тому, додавши до даного тричлена число 16 і віднявши від нього 16, отримуємо:

$$x^2+8x-9=x^2+8x+16-16-9=(x+4)^2-25=$$
$$=(x+4-5)(x+4+5)=(x-1)(x+9).$$ ◀

Приклад 6. Розкладіть на множники многочлен x^4+4y^4.

Розв'язання. Оскільки $x^4=(x^2)^2$, $4y^4=(2y^2)^2$, то, додавши до даного многочлена $4x^2y^2$ (подвоєний добуток одночленів x^2 і $2y^2$) і віднявши від нього такий самий одночлен, отримуємо:

$$x^4+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2=$$
$$=(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy).$$ ◀

ВПРАВИ

685.° Закінчіть розкладання на множники:

1) $7a^2-7b^2=7\,(a^2-b^2)=\ldots$;
2) $3y^3-27y=3y\,(y^2-9)=\ldots$;
3) $m^5-m^3=m^3\,(m^2-1)=\ldots$;
4) $\frac{49}{64}x^2y^3z^6-0{,}04yz^8=yz^6\left(\frac{49}{64}x^2y^2-0{,}04z^2\right)=\ldots$.

686.° Розкладіть на множники многочлен:

1) $2a^2-2b^2$;
2) cx^2-cy^2;
3) $3x^2-3$;
4) $3ab^2-27a$;
5) x^3-4x;
6) $2y^3-18y$;
7) x^4-x^2;
8) $0{,}09t^4-t^6$;
9) $\frac{16}{49}a^2b^4c^5-b^2c^3$.

687.° Подайте у вигляді добутку многочлен:

1) $12b^2 - 12c^2$;
2) $2a^2c - 2b^2c$;
3) $5a^2 - 20$;
4) $3mn^2 - 48m$;
5) $7y^3 - 7y$;
6) $a^3 - a^5$.

688.° Закінчіть розкладання на множники:

1) $9a^2b^2 - 6ab^2 + b^2 = b^2\ (9a^2 - 6a + 1) = \ldots$;
2) $4b^2c - 20abc + 25a^2c = c\ (4b^2 - 20ab + 25a^2) = \ldots$;
3) $-3m^3 + 6m^2n - 3mn^2 = -3m\ (m^2 - 2mn + n^2) = \ldots$.

689.° Розкладіть на множники:

1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$;
2) $5m^2 + 5n^2 - 10mn$;
3) $-3x^2 + 12x - 12$;
4) $-7b^2 - 14bc - 7c^2$;
5) $x^2y + 14xy^2 + 49y^3$;
6) $-8a^3b + 56a^2b^2 - 98ab^3$.

690.° Розкладіть на множники:

1) $8x^2 + 16xy + 8y^2$;
2) $-2a^2 + 24ab - 72b^2$;
3) $-12b^3 - 12b^2 - 3b$;
4) $48m^3n - 72m^2n + 27mn$.

691.* Закінчіть розкладання на множники:

1) $a^4 - 10\ 000 = (a^2)^2 - 100^2 = (a^2 - 100)\,(a^2 + 100) = \ldots$;
2) $m^8 - n^4 = (m^4)^2 - (n^2)^2 = (m^4 - n^2)\,(m^4 + n^2) = \ldots$.

692.* Подайте у вигляді добутку многочлен:

1) $a^4 - b^4$;
2) $c^4 - 81$.

693.* Розкладіть на множники:

1) $x^4 - 16$;
2) $y^8 - 1$.

694.* Закінчіть розкладання на множники:

1) $16x - 2x^4 = 2x\ (8 - x^3) = \ldots$;
2) $3a^5 + 375a^2 = 3a^2\ (a^3 + 125) = \ldots$.

695.* Розкладіть на множники:

1) $4a^3 - 4b^3$;
2) $2m^3 - 16$;
3) $7 + 7b^3$;
4) $-x^4 + 27x$;
5) $2a^4 - 250a$;
6) $9a^5 - 9a^2$.

696.* Подайте у вигляді добутку многочлен:

1) $3x^3 + 3y^3$;
2) $5m^4 - 320mn^3$;
3) $6c^5 - 6c^8$.

Конкурсний відділ Видавництво «Гімназія»

697.* Розкладіть на множники:

1) $a^7 + ab^6$; 2) $x^8 - y^8$; 3) $c^6 - 1$.

698.* Розкладіть на множники:

1) $c^6 + c^9$; 2) $m^9 - n^9$; 3) $a^8 - b^4$.

699.* Подайте у вигляді добутку многочлен:

1) $3ab + 15b - 3a - 15$;
2) $84 - 42y - 7xy + 14x$;
3) $abc + 6ac + 8ab + 48a$;
4) $m^3 - m^2n + m^2 - mn$;
5) $a^3 + a^2 - a - 1$;
6) $2x^3 - 2xy^2 - 8x^2 + 8y^2$;
7) $5a^2 - 5b^2 - 15a^3b + 15ab^3$;
8) $a^2b^2 - 1 - b^2 + a^2$.

700.* Розкладіть на множники:

1) $15cx + 2cy - cxy - 30c$;
2) $35a^2 - 42ab + 10a^2b - 12ab^2$;
3) $x^3 + x^2y + x^2 + xy$;
4) $mn^4 - n^4 + mn^3 - n^3$.

701.* Розкладіть на множники:

1) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$; 2) $81 - (x^2 + 6x)^2$.

702.* Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(m^2 - 2m)^2 - 1$; 2) $16 - (m^2 + 4m)^2$.

703.* Розкладіть на множники:

1) $x^2(x-2) - 18x(x-2) + 81(x-2)$;
2) $4x(y^2 - 9) + 4x^2(y^2 - 9) - 9 + y^2$;
3) $(a-b)(b^2 - c^2) - (b-c)(a^2 - b^2)$.

704.* Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $x^2(x+4) - 20x(x+4) + 100(x+4)$;
2) $a^2 - 36 - 2a(36 - a^2) - a^2(36 - a^2)$.

705.* Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - 4x = 0$;
2) $x^4 - x^2 = 0$;
3) $x^5 - 36x^3 = 0$;
4) $9x^3 - x = 0$;
5) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$;
6) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$;
7) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$;
8) $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$.

Комунальний заклад «Державництво і економіка»

706.* Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - x = 0$;
2) $x^4 + x^2 = 0$;
3) $x^4 - 8x^3 = 0$;
4) $49x^3 + 14x^2 + x = 0$;
5) $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$;
6) $x^3 - 4x^2 - 25x + 100 = 0$.

707.* Чи є тотожністю рівність:

1) $(a-1)^3 - 9(a-1) = (a-1)(a-4)(a+2)$;
2) $(x^2+1)^2 - 4x^2 = (x-1)^2(x+1)^2$?

708.* Доведіть тотожність:

1) $(a+2)^3 - 25(a+2) = (a+2)(a+7)(a-3)$;
2) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2 = (a+b+c-d)(a+b-c+d)$.

709.* Розкладіть вираз на множники двома способами:

а) застосуйте формулу різниці квадратів;

б) розкрийте дужки та застосуйте метод групування:

1) $(ab+1)^2 - (a+b)^2$;
2) $(a+2b)^2 - (ab+2)^2$.

710.** Розкладіть на множники:

1) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$;
2) $c^2 + 4c + 4 - k^2$;
3) $9a^2 + c^2 + 6ac - 9$;
4) $a^2 - b^2 - 10b - 25$;
5) $49 - y^2 + x^2 - 14x$;
6) $mn^2 - m^3 - 12m^2 - 36m$.

711.** Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $x^2 - 18xy + 81y^2 - z^2$;
2) $64x^2 + 48xy + 9y^2 - 144$;
3) $c^2 - a^2 + 22a - 121$;
4) $100 - 25y^2 - 60x^2y - 36x^4$.

712.** Розкладіть на множники:

1) $a^2 - b^2 - a - b$;
2) $x - y - x^2 + y^2$;
3) $4m^2 - 9n^2 + 2m + 3n$;
4) $c^2 - d^2 + 4c - 4d$;
5) $5x^2y - 5xy^2 - x^2 + y^2$;
6) $a^2 - 10a + 25 - ab + 5b$.

Конкурсний відбір «Тімназія»

713.** Розкладіть на множники:

1) m^2-n^2-m+n;
2) $16x^2-25y^2-4x-5y$;
3) $12a^2b^3+3a^3b^2+16b^2-a^2$;
4) $49c^2-14c+1-21ac+3a$;
5) $ax^2+ay^2+x^4+2x^2y^2+y^4$.

714.** Розкладіть на множники тричлен, виділивши попередньо квадрат двочлена:

1) $x^2-10x+24$;
2) $a^2+4a-32$;
3) b^2-3b-4;
4) $4a^2-12a+5$;
5) $9x^2-24xy+7y^2$;
6) $36m^2-60mn+21n^2$.

715.** Розкладіть на множники многочлен:

1) x^2-4x+3;
2) $a^2+2a-24$;
3) $y^2+12y+35$;
4) x^2+x-6;
5) $c^2+8cd+15d^2$;
6) $9x^2-30xy+16y^2$.

716.** Значення змінних x_1 і x_2 є такими, що виконуються рівності $x_1-x_2=8$, $x_1x_2=5$. Знайдіть значення виразу:

1) $x_1x_2^2-x_1^2x_2$;
2) $x_1^2+x_2^2$;
3) $(x_1+x_2)^2$.

717.** Значення змінних x і y є такими, що виконуються рівності $x+y=6$, $xy=-3$. Знайдіть значення виразу:

1) $x^3y^2+x^2y^3$;
2) $(x-y)^2$;
3) x^4+y^4.

718.* Розкладіть на множники:

1) x^4-5x^2+4;
2) x^4+x^2+1;
3) $4x^4-12x^2+1$;
4) x^5+x+1;
5) x^4+4;
6) x^8+x^4-2.

719.* Подайте у вигляді добутку вираз:

1) x^4+5x^2+9;
2) x^4-8x^2+4.

720.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n, відмінному від 1, значення виразу n^4+n^2+1 є складеним числом.

Комунальний Вищий Видавничий Коледж «Гуманітар»

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

721. Під час оплати послуг через платіжний термінал стягується комісія в розмірі 3 %. Термінал приймає суми, кратні 10 грн. Ганна хоче поповнити рахунок свого мобільного телефону не менше ніж на 200 грн. Яку найменшу суму грошей вона має заплатити через цей термінал?

722. Першого дня туристка проїхала 0,4 усього шляху, другого — $\frac{2}{3}$ решти, а третього — 20 км, що залишилися. Знайдіть довжину шляху.

723. У двох магазинах проводять акції. У магазині «Модний одяг» будь-яка сорочка деякої фірми коштує 600 грн, а при покупці двох сорочок знижка на другу сорочку становить 60 %. У магазині «Сучасний одяг» сорочка тієї самої фірми коштує 550 грн, а при покупці двох сорочок знижка на другу сорочку становить 40 %. У якому магазині вигідніше придбати дві сорочки?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

724. Обчисліть значення y за формулою $y = 0{,}2x - 3$, якщо:

1) $x = 4$; 2) $x = -3$.

725. Знайдіть координати точок A, B, C, D, E, F, K, M, N, зображених на рисунку 8.

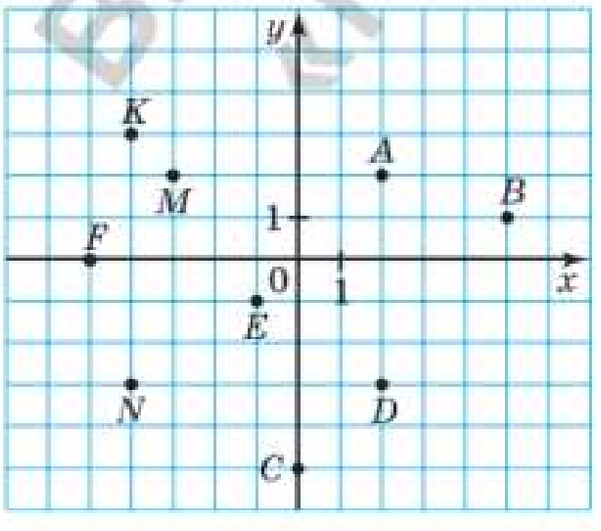


Рис. 8

Конкурсний відбір
Державний університет
Гімназія

726. На координатній площині позначте точки: $A(2;\ 3)$; $B(4;5)$; $C(-3;7)$; $D(-2;2)$; $K(-2;-2)$; $M(0;2)$; $N(-3;0)$; $P(1;-6)$; $F(-4;-2)$.

727. Побудуйте відрізки AB і CD та знайдіть координати точки перетину цих відрізків, якщо $A(-5;-2)$; $B(1;4)$; $C(-3;2)$; $D(2;-3)$.

728. Як розміщена на координатній площині відносно осі x точка:

1) $A(2;\ 6)$;
2) $B(-3;\ 1)$;
3) $C(-4;\ -5)$;
4) $D(-3;\ 0)$?

729. Знайдіть координати вершин квадрата зі стороною 4, якщо дві його сторони лежать на осях координат, а добуток координат однієї з вершин — додатне число. Скільки розв'язків має задача?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

730. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ — деякий набір натуральних чисел, а набір $y_1, y_2, \ldots, y_{25}$ отримано з нього в результаті перестановки деяких чисел. Доведіть, що значення виразу $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\ldots(x_{25} - y_{25})$ є парним числом.

ЗАВДАННЯ № 5 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Подайте у вигляді многочлена вираз $(x - 6)(x^2 + 6x + 36)$.

А) $x^3 - 36$;
Б) $x^3 + 36$;
В) $x^3 - 216$;
Г) $x^3 + 216$.

2. Знайдіть многочлен M, якщо $y^3 - 64 = (y - 4) \cdot M$.

А) $y^2 - 8y + 16$;
Б) $y^2 + 8y + 16$;
В) $y^2 - 4y + 16$;
Г) $y^2 + 4y + 16$.

3. Спростіть вираз $(a^2 + 2b^3)(a^4 - 2a^2b^3 + 4b^6)$.

А) $a^6 + 4b^9$;
Б) $a^6 - 4b^9$;
В) $a^6 - 8b^9$;
Г) $a^6 + 8b^9$.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

4. Розкладіть на множники многочлен $3c^2 - 48$.

А) $3\,(c - 16)$;
В) $3\,(c - 4)^2$;
Б) $3\,(c - 4)\,(c + 4)$;
Г) $3c\,(c - 16)$.

5. Розкладіть на множники вираз $7a^2 - 42a + 63$.

А) $7\,(a - 3)\,(a + 3)$;
В) $7\,(a + 3)^2$;
Б) $7\,(a - 3)^2$;
Г) $7\,(a - 9)^2$.

6. Розкладіть на множники многочлен $a^8 - a^6$.

А) $a^6\,(a - 1)$;
В) $a^6\,(a + 1)^2$;
Б) $a^6\,(a - 1)\,(a + 1)$;
Г) $a^6\,(a - 1)^2$.

7. Розкладіть на множники вираз $m^2 - n^2 + m + n$.

А) $(m + n)\,(m - n + 1)$;
Б) $(m - n)\,(m - n + 1)$;
В) $(m - n)\,(m + n + 1)$;
Г) $(m + n)\,(m + n + 1)$.

8. Подайте у вигляді добутку вираз $x^2 - y^2 + 14y - 49$.

А) $(x - y + 7)\,(x + y + 7)$;
Б) $(x - y - 7)\,(x + y + 7)$;
В) $(x - y + 7)\,(x + y - 7)$;
Г) $(x - y - 7)\,(x + y - 7)$.

9. Розкладіть на множники многочлен $81a^4 - 1$.

А) $(3a - 1)\,(3a + 1)\,(9a^2 + 1)$;
Б) $(3a^2 - 1)\,(3a^2 + 1)\,(9a^2 + 1)$;
В) $(3a - 1)^2\,(3a + 1)^2$;
Г) $(3a - 1)^4$.

10. Розв'яжіть рівняння $49x - x^2 = 0$.

А) 0; 7;
В) 0; 49;
Б) −7; 0; 7;
Г) −7; 7.

11. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

А) −1; 1;
В) 1; 3;
Б) −1; 3;
Г) −3; −1; 1.

12. Подайте у вигляді добутку вираз $(x^2 - 2)^2 - 4\,(x^2 - 2) + 4$.

А) $(x - 4)^2$;
В) x^4;
Б) $(x - 2)^2\,(x + 2)^2$;
Г) $(x^2 - 6)^2$.

Комунальний вищий навчальний заклад «Гімназія»

Мова, зрозуміла всім

Тут трьома східними мовами — арабською, китайською та івритом — записано добре відому вам властивість: від перестановки місць доданків сума не змінюється.

في الجمع تبديل أماكن الأعداد لا يغير النتيجة

加数的次序不影响加和的结果

כאשר מחברים שני מספרים, אין השיבות לשאלה מי הראשון ומי השני.

Проте людина, яка не володіє цими мовами, такого простого речення не зрозуміє. Тоді на допомогу приходить інтернаціональна математична мова. Переклад нею має такий вигляд:

$$a + b = b + a.$$

Як і будь-яка інша мова, вона має свій алфавіт — математичні символи. Це цифри, букви, знаки математичних дій тощо. З них складають «слова» математичної мови, наприклад вирази. Зі слів складають «речення» математичної мови, наприклад формули й т. ін.

Здавалося б, що може бути простішим — використати математичну фразу «$2x = 4$» для запису лінійного рівняння. Однак навіть великий аль-Хорезмі[1] записував це речення громіздко: «Два корені дорівнюють 4 дирхемам[2]». Це пов'язано з тим, що за часів аль-Хорезмі математичної символіки ще не існувало.

Сказане зовсім не означає, що до IX ст. вчені не робили спроб створити математичну мову.

---

[1] Ми розповідали про нього на с. 14, 15.

[2] Дирхем — старовинна арабська срібна монета.

Ще в I ст. грецький математик Герон Александрійський почав позначати невідому величину буквою ς («сигма»). Наступний крок у створенні символіки зробив у III ст. Діофант Александрійський. У своїй знаменитій праці «Арифметика» він запровадив позначення не лише для невідомої величини, але й для деяких її степенів:

перший степінь	—	σ;
другий степінь	—	Δ^{ν} (від Δυναμις — «дюнаміс», що означає «сила», «степінь»);
третій степінь	—	K^{ν} (від Κυβος — «кубос», тобто «куб»).

Для рівності Діофант застосовував знак ισ — перші дві букви слова ισος — «ісос», тобто «рівний».

Навряд чи символіку Діофанта можна вважати зручною та наочною. Наприклад, він не запровадив ніяких спеціальних символів для позначення дій додавання та множення. Позначення всіх невідомих величин однією буквою ς також значною мірою ускладнювало запис розв'язання задач, у яких фігурувало кілька змінних. Із занепадом епохи античності алгебраїчну символіку Діофанта практично було забуто.

Відновлення процесу створення алгебраїчної символіки пов'язане з роботами талановитого німецького вченого XIII ст. Йордана Неморарія, який відродив у європейській математиці ідею буквеної символіки.

У XV ст. широкого розповсюдження набули символи, які застосовував видатний італійській математик Лука Паччолі.

Чимало зробили для вдосконалення математичної мови німецькі математики XVI ст. Ян Відман і Адам Різе.

Засновником буквеної символіки по праву вважають найвидатнішого французького математика XVI ст. Франсуа Вієта. Він перший позначив буквами не тільки невідомі, але й дані величини. Вієт запропонував: «Шукані величини будемо позначати буквою A або іншою голосною (E, I, O, U), а дані — буквами B, D, G та іншими приголосними». Такі позначення дали змогу Вієту не тільки розв'язувати окремі рівняння, але й досліджувати процес розв'язування цілого класу рівнянь. Наприклад, завдяки символіці Вієта всі лінійні рівняння можна записати у вигляді $ax = b$, а отже, побудувати процес розв'язування рівняння в загальному вигляді так, як ми це зробили в п. 2.

Франсуа Вієт
(1540–1603)

Мови багатьох народів продовжують розвиватися. Не є винятком і математична мова. Нові відкриття приносять у математику нові символи й терміни.

В. Й. Левицький
(1872–1956)

М. О. Зарицький
(1889–1961)

Великий внесок у розвиток і систематизацію української математичної термінології зробив професор

фізико-математичного факультету Львівського університету Володимир Йосипович Левицький. Його науково-методичні праці значною мірою сприяли становленню й розвитку української математичної школи.

Фундатором української математичної культури по праву вважають ученого з європейським іменем, доктора філософії, професора Мирона Онуфрійовича Зарицького. Його наукові праці та педагогічні здобутки добре відомі в багатьох країнах світу.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Вираз зі змінними

Запис, складений із чисел, букв, знаків арифметичних дій і дужок, називають буквеним виразом або виразом зі змінними.

Алгебраїчні вирази

Числові вирази та вирази зі змінними називають алгебраїчними виразами.

Цілий вираз

Вираз, який не містить ділення на вираз зі змінними, називають цілим виразом.

Лінійне рівняння з однією змінною

Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Розв'язування лінійного рівняння з однією змінною

Значення a і b	$a \neq 0$	$a = 0$, $b = 0$	$a = 0$, $b \neq 0$
Корені рівняння $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	Коренів немає

Конкурсний відбір Видавництво Гімназія

Алгоритм розв'язування задач на складання рівнянь

1) За умовою задачі скласти рівняння (побудувати математичну модель задачі);
2) розв'язати отримане рівняння;
3) з'ясувати, чи відповідає знайдений корінь змісту задачі, і дати відповідь.

Тотожно рівні вирази

Вирази, відповідні значення яких є рівними при будь-яких значеннях змінних, що входять до них, називають тотожно рівними.

Тотожність

Рівність, яка є правильною при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають тотожністю.

Прийоми доведення тотожностей

- Тотожно перетворюють одну із частин даної рівності, отримуючи іншу частину;
- тотожно перетворюють кожну із частин даної рівності, отримуючи один і той самий вираз;
- показують, що різниця лівої і правої частин даної рівності тотожно дорівнює нулю.

Степінь з натуральним показником

Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.

Степенем числа a з показником 1 називають саме це число.

Знак степеня

Підносячи невід'ємне число до степеня, отримуємо невід'ємне число.

Комунальний заклад Бучанський ліцей №6 Бучанської міської ради Київської області

Підносячи від'ємне число до степеня з парним показником, отримуємо додатне число, а підносячи від'ємне число до степеня з непарним показником, отримуємо від'ємне число.

Властивості степеня з натуральним показником

$a^m a^n = a^{m+n}$ (основна властивість степеня)

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

Одночлен

Вираз, який являє собою добуток чисел, змінних та їхніх степенів, називають одночленом.

Одночлен стандартного вигляду

Одночленом стандартного вигляду називають одночлен, що містить тільки один числовий множник, відмінний від нуля, який стоїть на першому місці; решта його множників є степенями з різними основами.

Коефіцієнт одночлена

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом одночлена.

Степінь одночлена

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Степінь одночлена, який є числом, відмінним від нуля, вважають рівним нулю.

Многочлен

Вираз, який є сумою кількох одночленів, називають многочленом.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Підручник»

Многочлен стандартного вигляду

Многочлен, складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних, називають многочленом стандартного вигляду.

Степінь многочлена

Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких цей многочлен складений.

Множення одночлена на многочлен

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити цей одночлен на кожний член многочлена й отримані добутки додати.

Множення многочленів

Щоб помножити многочлен на многочлен, можна кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого й отримані добутки додати.

Добуток різниці та суми двох виразів

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Різниця квадратів двох виразів

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Квадрат суми двох виразів

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

Квадрат різниці двох виразів

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Сума кубів двох виразів

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

Різниця кубів двох виразів

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Конкурсний відділ Видавництво «Гімназія»

§2 ФУНКЦІЇ

У цьому параграфі ви вивчатимете зв'язки між величинами. Ознайомитеся з особливим видом правила, яке визначає ці зв'язки, — функцією. Опануєте способи задання функції.

20. Зв'язки між величинами. Функція

Учитель / учителька пише на дошці. При цьому змінюється довжина сліду крейди, маса, об'єм і навіть температура шматочка крейди.

Працює шкільна їдальня. Протягом дня змінюється кількість учнів і учениць, що її відвідали, витрати електроенергії та води, грошова виручка тощо.

Узагалі, у процесах, що відбуваються навколо нас, багато величин змінюють свої значення. Деякі із цих величин пов'язані між собою, тобто зміна однієї величини спричиняє зміну другої.

Багато наук, такі як фізика, хімія, біологія та інші, досліджують залежності між величинами. Вивчає ці зв'язки й математика, будуючи **математичні моделі** реальних процесів. З поняттям математичної моделі ви вже ознайомилися в п. 3.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Змінюється сторона квадрата. Зрозуміло, що при цьому змінюватиметься також його периметр. Якщо довжину сторони квадрата позначити a, а периметр — P, то залежність значення змінної P від значення змінної a (коротко говорять: «залежність змінної P від змінної a») можна задати формулою

$$P = 4a.$$

Ця формула є математичною моделлю зв'язку між такими величинами, як довжина сторони квадрата та його периметр.

За допомогою цієї формули можна, вибравши довільну довжину сторони, знайти відповідне значення периметра квадрата. Тому в цій моделі змінну a називають **незалежною змінною**, а змінну P — **залежною змінною.**

Наголосимо, що ця формула задає правило, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна *однозначно* знайти значення залежної змінної. ◀

Приклад 2. Сім'я поклала в банк 10 000 грн під 10 % річних. Тоді через рік величина M — сума грошей на рахунку — становитиме

$$M = 10\,000 + \frac{10\,000 \cdot 10}{100} = 11\,000 \text{ (грн)}.$$

Через два роки ця сума складатиме

$$M = 11\,000 + \frac{11\,000 \cdot 10}{100} = 12\,100 \text{ (грн)}.$$

Аналогічно можна встановити, що через три роки $M = 13\,310$ грн, через чотири роки $M = 14\,641$ грн, через п'ять років $M = 16\,105{,}1$ грн.

У таблиці показано, як залежить сума грошей на рахунку від кількості років, які минули з моменту відкриття рахунку.

Кількість років n	1	2	3	4	5
Сума грошей на рахунку M, грн	11 000	12 100	13 310	14 641	16 105,1

Ця таблиця є математичною моделлю залежності величини M від величини n. Тут n виступає в ролі незалежної змінної, а M — залежної.

Наголосимо, що ця таблиця задає правило, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна *однозначно* знайти значення залежної змінної. ◀

Комунальний заклад «Видавництво «Гімназія»

Приклад 3. На рисунку 9 зображено графік залежності температури повітря від часу доби.

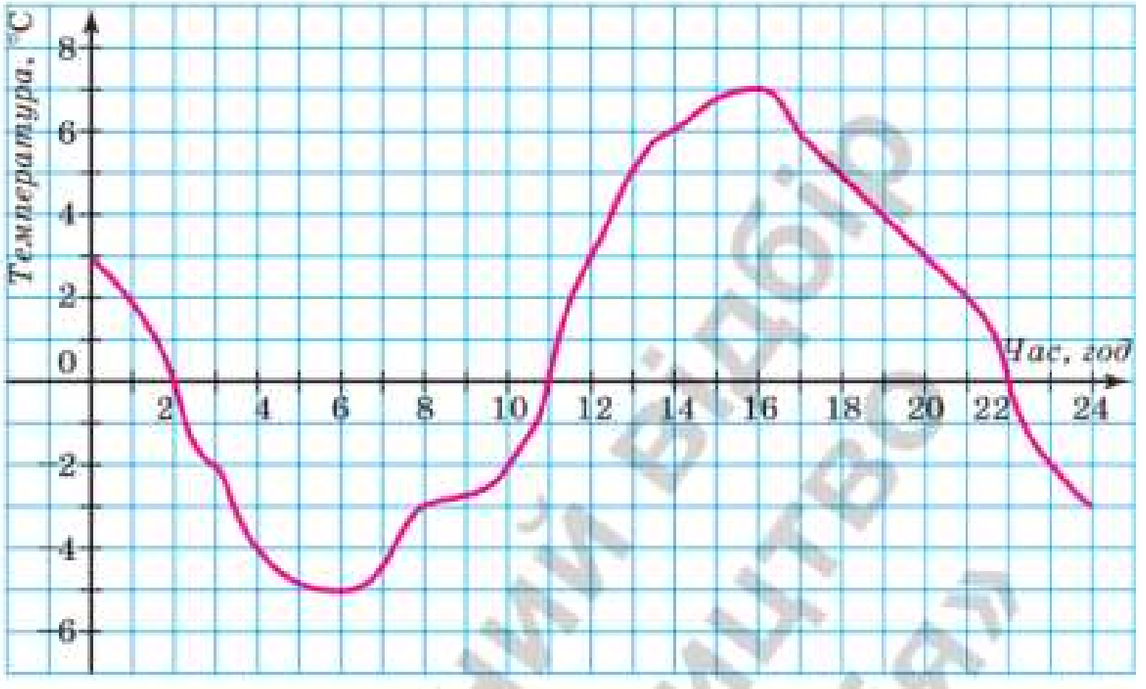


Рис. 9

За цим графіком можна, вибравши довільний момент часу t, знайти відповідну температуру повітря T (у градусах Цельсія). Таким чином, величина t є незалежною змінною, а величина T — залежною.

Цей графік можна розглядати як математичну модель залежності величини T (температури) від величини t (часу).

Наголосимо, що даний графік задає правило, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна *однозначно* знайти значення залежної змінної. ◀

Незважаючи на істотні відмінності моделей залежностей, описаних у цих трьох прикладах, їм усім притаманне таке: *указано правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної*. Таке правило називають **функцією**, а відповідну залежність однієї змінної від другої — **функціональною**.

Комунальний заклад «Вирівнянівський ліцей»

Отже, правила, описані в прикладах 1, 2 і 3, є функціями. Не кожна залежність однієї змінної величини від другої є функціональною. Наприклад, нехай довжина маршруту автобуса дорівнює 15 км. Вартість проїзду визначається за такою таблицею:

Вартість проїзду, грн	12	14	16
Довжина шляху, який проїжджає пасажир, км	до 5	від 5 до 10	від 10 до 15

Зрозуміло, що змінні величини «вартість проїзду» й «довжина шляху, який проїжджає пасажир», пов'язані між собою. Проте якщо вважати вартість проїзду незалежною змінною, то описана залежність не є функціональною. Справді, якщо пасажир заплатив 12 грн, то не можна *однозначно* встановити довжину шляху, який він проїхав.

Якщо в прикладі 3 температуру T вважати незалежною змінною, то не завжди можна за значенням величини T *однозначно* знайти значення величини t. Тому наведена залежність часу t від температури T не є функціональною.

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Якщо змінна y функціонально залежить від змінної x, то цей факт позначають так: $y = f(x)$ (читають: «ігрек дорівнює еф від ікс»). Незалежну змінну ще називають **аргументом функції**.

Усі значення, яких набуває аргумент, утворюють **область визначення функції**. Так, у прикладі 1 областю визначення функції є всі додатні числа; у прикладі 2 — натуральні числа 1, 2, 3, 4, 5; у прикладі 3 — усі невід'ємні числа, що не перевищують 24.

Для функції f кожному значенню аргументу x відповідає деяке значення залежної змінної y. Значення

залежної змінної ще називають **значенням функції.** Значення функції f, яке відповідає значенню x_0 аргументу x, позначають $f(x_0)$. Наприклад, $f(7)$ — це значення функції при $x=7$.

Так, якщо кожне з правил, описаних у прикладах 1, 2 і 3, позначити буквою f, то в першому прикладі $f(2)=8$, у другому $f(2)=12\ 100$, у третьому $f(2)=0$. Узагалі, запис $f(a)=b$ означає, що значенню a аргументу відповідає значення b функції.

Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють **область значень функції.**

У прикладі 1 область значень функції — це всі додатні числа; у прикладі 2 — числа, записані в другому рядку таблиці; у прикладі 3 — усі числа, не менші від -5 й не більші за 7.

?

1. Яке правило називають функцією? **2.** Яку залежність однієї змінної від другої називають функціональною? **3.** Як читають запис $y=f(x)$? **4.** Що називають аргументом функції? **5.** Що таке область визначення функції? **6.** Що називають значенням функції? **7.** Що означає запис $f(a)=b$? **8.** Що таке область значень функції?

ВПРАВИ

731.° Чи пов'язані між собою периметр рівностороннього трикутника та його сторона? Якщо сторона трикутника дорівнює a, а периметр — P, то якою формулою можна задати залежність змінної P від змінної a? Чи є ця залежність функціональною?

732.° Чи пов'язані між собою площа квадрата та його сторона? Якщо сторона квадрата дорівнює a, а площа — S, то якою формулою можна задати залежність змінної S від змінної a? Чи є ця залежність функціональною?

733.° Автомобіль рухається зі швидкістю 60 км/год. Як залежить довжина пройденого ним шляху s від часу руху t? Задайте цю залежність формулою. Чи є ця залежність функціональною? У разі ствердної відповіді назвіть аргумент відповідної функції.

734.° У цистерні було 300 л води. Через відкритий кран щохвилини із цистерни виливається 2 л води. Задайте формулою залежність об'єму V води в цистерні від часу t, протягом якого з неї виливається вода. Чи є правило, за допомогою якого за значенням змінної t можна знайти значення змінної V, функцією? У разі ствердної відповіді вкажіть область визначення та область значень цієї функції.

735.° Нехай a — довжина ребра куба, V — його об'єм. Задайте формулою залежність змінної V від змінної a. Чи є ця залежність функціональною?

736.° Автомобіль проїхав 120 км зі швидкістю v. Якою формулою можна задати залежність часу t, витраченого на поїздку, від швидкості v автомобіля? Чи є ця залежність функціональною? У разі ствердної відповіді вкажіть, яка зі змінних є аргументом відповідної функції.

737.° Нехай градусні міри двох суміжних кутів дорівнюють α і β. Задайте формулою залежність β від α. Чи є ця залежність функціональною? У разі ствердної відповіді вкажіть, яка зі змінних є аргументом відповідної функції, її область визначення та область значень.

738.° У вашому класі було проведено контрольну роботу з математики.

1) Кожній дитині поставили у відповідність оцінку, яку вона отримала.
2) Кожній оцінці поставили у відповідність дитину, яка її отримала.

Яке із цих правил є функцією?

739.° Розглянемо правило, згідно з яким кожному натуральному числу відповідає протилежне йому число. Чи є таке правило функцією?

740.° Кожному невід'ємному числу поставили у відповідність саме це число, а кожному від'ємному числу — число, йому протилежне. Чи є таке правило функцією?

741.° Кожному раціональному числу, відмінному від нуля, відповідає обернене до нього число. Чи є таке правило функцією?

742.° Користуючись графіком залежності температури повітря від часу протягом доби (рис. 9), визначте:

1) якою була температура повітря о 4 год; о 6 год; о 10 год; о 18 год; о 22 год;
2) о котрій годині температура повітря була 5 °С; −2 °С;
3) о котрій годині температура повітря дорівнювала нулю;
4) якою була найнижча температура та о котрій годині;
5) якою була найвища температура та о котрій годині;
6) протягом якого проміжку часу температура повітря була нижчою від 0 °С; вищою за 0 °С;
7) протягом якого проміжку часу температура повітря підвищувалася; знижувалася.

Складіть за графіком таблицю зміни температури повітря протягом доби через кожні 2 год.

743.° На рисунку 10 зображено графік зміни температури розчину під час хімічного досліду.

1) Якою була початкова температура розчину?
2) Якою була температура розчину через 30 хв після початку досліду; через півтори години?
3) Якою була найвища температура розчину та через скільки хвилин після початку досліду?

Електронний відповідник до підручника Мерзляка

4) Через скільки хвилин після початку досліду температура розчину була 35 °С?

Складіть за графіком таблицю зміни температури розчину через кожні 10 хв протягом перших двох годин після початку досліду.

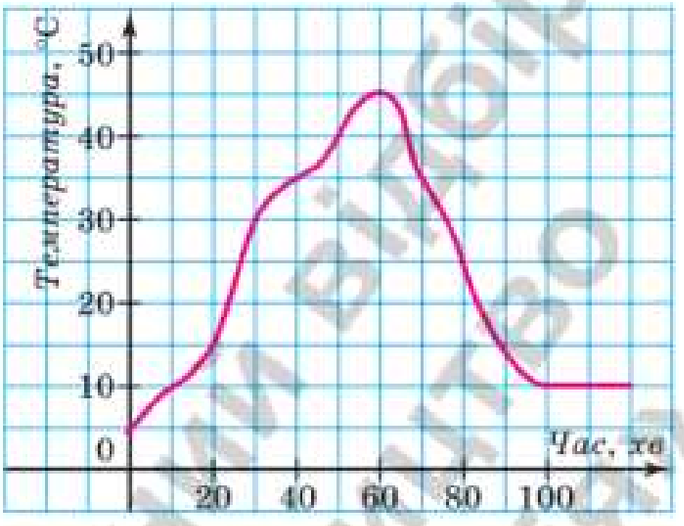


Рис. 10

744. На рисунку 11 зображено графік зміни температури повітря протягом доби. Користуючись цим графіком, визначте:

1) якою була температура повітря о 2 год; о 8 год; о 12 год; о 16 год; о 22 год;
2) о котрій годині температура повітря була −3 °С; −4 °С; 0 °С;
3) якою була найнижча температура та о котрій годині;
4) якою була найвища температура та о котрій годині;
5) протягом якого проміжку часу температура повітря була нижчою від 0 °С; вищою за 0 °С;
6) протягом якого проміжку часу температура повітря підвищувалася; знижувалася.

Складіть за графіком таблицю зміни температури повітря протягом доби через кожні 2 год.

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

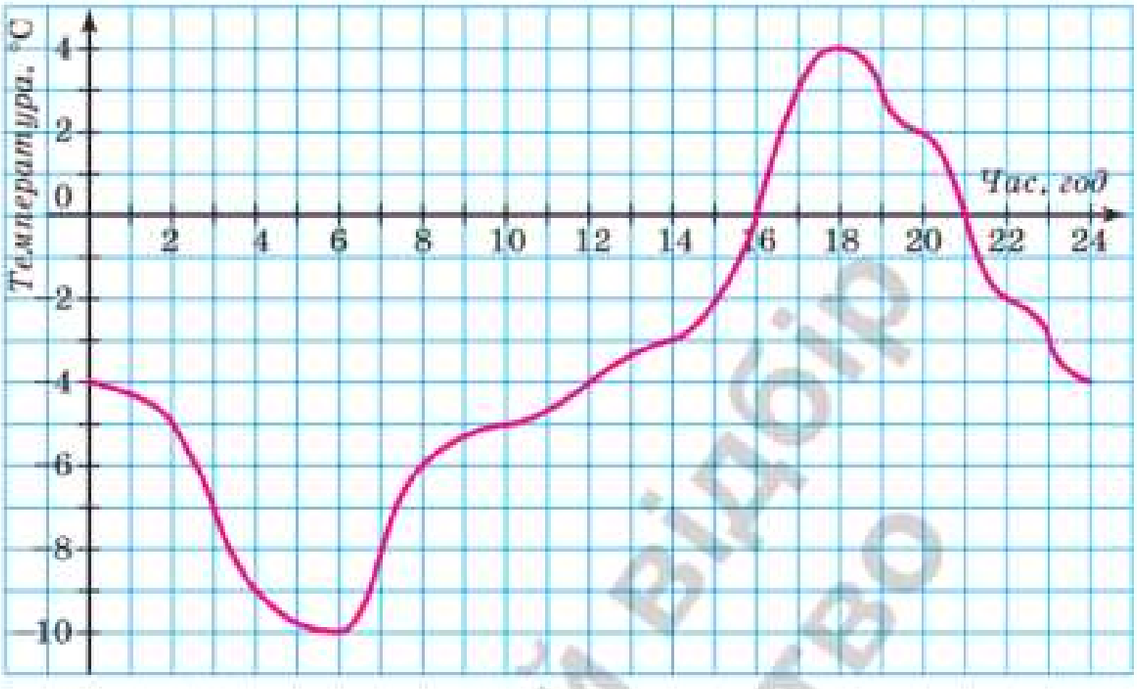


Рис. 11

745.* Мотоцикліст виїхав із дому й через деякий час повернувся. На рисунку 12 зображено графік зміни відстані від мотоцикліста до дому залежно від часу (*графік руху мотоцикліста*). Користуючись графіком, визначте:

Рис. 12

1) яку відстань проїхав мотоцикліст за першу годину руху;

Конкурсний відбір
Видавництво
«Ґімназія»

2) на якій відстані від місця початку руху мотоцикліст зупинився відпочити першого разу; другого разу;
3) скільки часу тривала перша зупинка; друга зупинка;
4) на якій відстані від дому був мотоцикліст через 5 год після початку руху;
5) з якою швидкістю рухався мотоцикліст останні пів години.

746.* Туристка вийшла з базового табору й через деякий час повернулася. На рисунку 13 зображено графік руху туристки.

Рис. 13

1) На якій відстані від табору була туристка через 10 год після початку руху?
2) Скільки часу вона витратила на зупинку?
3) Через скільки годин після виходу туристка була на відстані 8 км від табору?
4) З якою швидкістю йшла туристка до зупинки?
5) З якою швидкістю йшла туристка останні 2 год?

747.* Кожному числу поставили у відповідність відстань від точки, що зображає це число на координатній прямій, до початку відліку. Поясніть, чому описане правило є функцією. Знайдіть її область ви-

Комунальний видавничий підприємство «Гімназія»

значення та область значень. Позначивши цю функцію буквою f, знайдіть $f(2)$, $f(-5)$, $f(0)$.

748.* Розглянемо функцію g, задану таким правилом: кожному одноцифровому натуральному числу поставили у відповідність останню цифру його квадрата.

1) Запишіть, чому дорівнює $g(7)$; $g(3)$; $g(1)$; $g(9)$; $g(4)$.
2) Знайдіть область визначення та область значень функції.

749.* Розглянемо правило, за яким числу 0 ставляться у відповідність усі парні числа, а числу 1 — усі непарні числа. Чи є це правило функцією?

750.* Придумайте функцію f, областю визначення якої є всі натуральні числа, а областю значень — три числа: 0; 1; 2. Знайдіть $f(7)$; $f(15)$; $f(101)$.

751.* Розглянемо правило, за яким кожному натуральному числу поставили у відповідність остачу при діленні його на 7. Чи є це правило функцією? У разі ствердної відповіді знайдіть область визначення та область значень цієї функції.

752.* У таблиці наведено виміри температури повітря протягом доби через кожну годину[1]. Побудуйте за цими даними графік зміни температури.

Час доби, год	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Температура, °С	2	3	1	0	−2	−3	−5	−4	−2	0	1	4	7
Час доби, год	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Температура, °С	8	9	7	5	4	3	2	1	0	−2	−3	−6	

[1] У наведеній таблиці значення аргументу в кожному наступному стовпці на 1 більше за значення аргументу в попередньому стовпці. У такому випадку говорять, що таблицю складено з *кроком* 1.

Користуючись графіком, знайдіть, протягом якого часу температура підвищувалася та протягом якого часу знижувалася.

753.* В економічних дослідженнях часто використовують криву попиту. *Крива попиту* — це графік, який показує, як залежить попит на товар від його ціни. У таблиці наведено залежність попиту на картоплю в деякому регіоні (у тисячах тонн) від ціни 1 кг картоплі.

Ціна 1 кг картоплі, грн	8	9	10	11	12	13
Попит, тис. т	15	12	10	6	4	1

Подайте дані, наведені в таблиці, графічно. Сполучивши отримані точки відрізками, побудуйте криву попиту на картоплю.

754.* У таблиці наведено дані про рівень води в річці порівняно з ординаром (середнім рівнем води) з 1 по 15 травня.

Дата	Рівень води, см	Дата	Рівень води, см	Дата	Рівень води, см
1	8	6	20	11	4
2	10	7	18	12	0
3	12	8	14	13	−3
4	15	9	10	14	−5
5	16	10	8	15	−6

Побудуйте графік зміни рівня води в річці за вказаний час.

755.** Велосипедистка виїхала з дому на прогулянку. Перші 2 год вона їхала зі швидкістю 12 км/год, потім відпочивала годину й повернулася додому зі швидкістю 8 км/год. Побудуйте графік руху велосипедистки.

756.** Початкова температура води була 6 °С. Під час нагрівання температура води підвищувалася щохвилини на 2 °С.

1) Запишіть формулу залежності температури T води від часу t її нагрівання.
2) Складіть таблицю значень температури T за час нагрівання від 0 хв до 10 хв із кроком 1 хв.
3) Побудуйте графік залежності температури води від часу нагрівання протягом перших 10 хв.

757.** Прямолінійна дорога проходить повз туристичний табір. Турист, перебуваючи на відстані 5 км від табору, почав рухатися цією дорогою зі швидкістю 4 км/год, віддаляючись від табору.

1) Знайдіть відстань s від табору, на якій перебуватиме турист через t год після початку руху.
2) Заповніть таблицю значень s:

t, год	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
s, км									

3) Користуючись заповненою таблицею, побудуйте графік залежності відстані до табору від часу руху.

758.** У міській раді Сонячного міста представлено дві партії: партія допитливих і партія ерудитів. Усього в міській раді 20 місць. У таблиці наведено кількість депутатських місць, які отримала партія допитливих протягом 8 останніх виборів.

Вибори	1	2	3	4	5	6	7	8
Кількість депутатів від партії допитливих	14	12	10	16	18	15	14	10

1) Складіть подібну таблицю для партії ерудитів.
2) Подайте дані кожної таблиці графічно в одній системі координат. Побудуйте «криві популярності» кожної партії, сполучивши отримані точки відрізками.

759." У баку було 8 л гасу. Щохвилини в бак уливають 4 л.

1) Запишіть залежність кількості y літрів гасу в баку від часу x, протягом якого гас уливали в бак.
2) Накресліть графік зміни y, надаючи x значень від 0 до 10.
3) Користуючись графіком, визначте:
   а) скільки літрів гасу буде в баку через 3 хв; через 5 хв;
   б) через скільки хвилин у баку буде 40 л гасу.
4) Через скільки хвилин бак буде наповнено, якщо його місткість — 80 л?

760." На складі було 100 т вугілля. Щодня на склад привозили 20 т вугілля.

1) Виразіть формулою залежність кількості m вугілля на складі від часу t.
2) Накресліть графік цієї залежності.

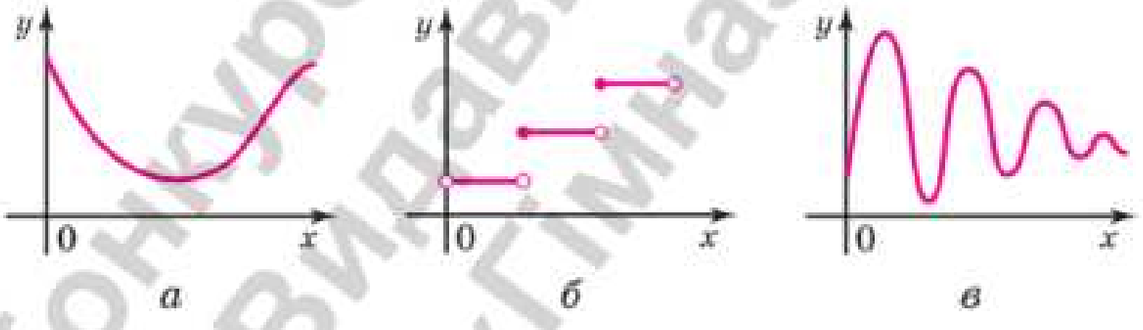


Рис. 14

761." Який із наведених графіків (рис. 14) ілюструє залежність змінної y від змінної x, подану нижче:

1) вартість проїзду в автобусі зростає на 1 грн через кожні 10 км шляху (x км — довжина шляху, y грн — вартість проїзду);
2) металеву пружину розтягнули та відпустили (x с — час, y см — довжина пружини);
3) вартість полуниці на ринку протягом травня–червня (x днів — час, y грн — вартість)?

Конкурсний відділ Видавництво «Гімназія»

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

762. Розв'яжіть рівняння:

1) $-1{,}2x + 7{,}2 = 0$;
2) $-\frac{1}{3}x - 6 = 0$;
3) $3x + 1{,}5 = -2{,}5$;
4) $6 - 0{,}5x = 16$.

763. Відомо, що при деякому значенні x значення виразу $2x^2 - 3x + 1$ дорівнює 2. Знайдіть значення виразу $10x^2 - 15x - 20$ при цьому значенні змінної x.

764. У готелі є тільки одномісні та двомісні номери. На кожні 3 одномісних номери припадає 2 двомісних. 1) Скільки відсотків становить кількість одномісних номерів від загальної кількості номерів? 2) Скільки всього місць в готелі, якщо є 34 двомісних номери?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

765. Натуральні числа x і y такі, що $34x = 43y$. Доведіть, що число $x + y$ складене.

21. Способи задання функції

Приклади, розглянуті в попередньому пункті, показують, що функцію можна задавати різними способами.

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення та правило, за допомогою якого можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

Вам не раз доводилося формулювати різні правила. Оскільки функція — це правило, то його можна виразити словами. Такий спосіб задання функції називають **заданням функції описом.**

Наведемо кілька прикладів.

Приклад 1. Нехай незалежна змінна набуває будь-яких значень. Значення залежної змінної знаходимо за таким правилом: кожне значення незалежної змінної множимо на 2 і від отриманого добутку віднімає-

Конкурсний відбір Видавництво «Освіта»

мо 1. Очевидно, що такий спосіб дає змогу однозначно знайти значення залежної змінної. Отже, ми задали деяку функцію f, областю визначення якої є всі числа. Наприклад,

$$f(2)=2\cdot 2-1=3;\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2-1=0;$$

$$f(-13{,}4)=(-13{,}4)\cdot 2-1=-27{,}8 \text{ і т. п.} \blacktriangleleft$$

Приклад 2. Нехай незалежна змінна набуває будь-яких значень, крім 0. Відповідні значення залежної і незалежної змінних — взаємно обернені числа. Тут задано функцію f, область визначення якої — усі числа, крім 0. Наприклад,

$$f(1)=1;\ f(3)=\frac{1}{3};\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2 \text{ і т. п.} \blacktriangleleft$$

Розглянемо найпоширеніший спосіб задання функції: задання функції **за допомогою формули.**

Якщо у прикладі 1 незалежну змінну позначити буквою x, а залежну — буквою y, указати область визначення — усі числа, то формула $y=2x-1$ задає вищеописану функцію.

Зрозуміло, що функцію з прикладу 2 задає формула $y=\frac{1}{x}$, де x — будь-яке число, крім 0.

Якщо функцію задано формулою, права частина якої — цілий вираз, і при цьому не вказано область визначення, то вважатимемо, що областю визначення такої функції є всі числа. Наприклад, формули $y=x^2$; $y=\frac{x-3}{5}$; $y=x^2-x+2$ задають функції, областю визначення кожної з яких є всі числа.

Якщо, наприклад, функцію задано формулою $y=x^3$, то просто говорять, що задано функцію $y=x^3$.

Конкурсний відбір Видавництво «Літера»

Якщо хочуть наголосити, що, наприклад, формула $y=5-\frac{x}{3}$ задає деяку функцію f, то пишуть: $f(x)=5-\frac{x}{3}$.

Якщо хочуть наголосити, що, наприклад, формула $s=10t+2$ задає функцію з аргументом t і залежною змінною s, то пишуть: $s(t)=10t+2$.

Розглянемо функцію $f(x)=x-2x^2$, область визначення якої складається із чисел -1; 0; $\frac{1}{2}$; 1; 3. Маємо:

$$f(-1)=-3;\ f(0)=0;\ f\left(\frac{1}{2}\right)=0;\ f(1)=-1;\ f(3)=-15.$$

Отримані результати занесемо до таблиці:

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
$f(x)$	-3	0	0	-1	-15

Усі числа, записані в першому рядку цієї таблиці, складають область визначення даної функції f. Таблиця дає змогу за вказаним значенням аргументу однозначно знайти відповідне значення функції. Отже, ця таблиця — ще один спосіб задання функції f. Його називають **табличним**.

Цей спосіб зручно використовувати в тих випадках, коли область визначення функції складається з кількох чисел.

Приклад 3. Функцію задано формулою $y=5x+2$. Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 12.

Розв'язання. Підставивши у формулу $y=5x+2$ замість y число 12, отримуємо рівняння $5x+2=12$, звідки $x=2$.

Відповідь: 2. ◀

Конкурсний відбір Видавництво «Генеза»

Приклад 4. Функцію f задано таким чином: $f(x) = x + 7$, якщо $x \leqslant -1$, і $f(x) = 2$, якщо $x > -1$. Знайдіть значення функції f, яке відповідає аргументу: 1) -2; 2) -1; 3) 1.

Розв'язання. 1) Оскільки $-2 \leqslant -1$, то значення функції в точці $x = -2$ обчислюємо за формулою $f(x) = x + 7$. Отже, $f(-2) = -2 + 7 = 5$.

2) Оскільки $-1 \leqslant -1$, то $f(-1) = -1 + 7 = 6$.

3) Оскільки $1 > -1$, то $f(1) = 2$.

Для задання даної функції використовують форму запису за допомогою фігурної дужки:

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ 2, \quad \text{якщо } x > -1. \end{cases}$$ ◀

Приклад 5. Функції задано формулами $y = 4x + 1$ і $y = 2x - 7$. При якому значенні аргументу ці функції набувають рівних значень?

Розв'язання. Щоб знайти шукане значення аргументу, розв'яжемо рівняння $4x + 1 = 2x - 7$. Маємо:

$$4x - 2x = -7 - 1;$$
$$x = -4.$$

Відповідь: при $x = -4$. ◀

1. Що треба вказати, щоби функція вважалася заданою?
2. Які способи задання функції ви знаєте?

ВПРАВИ

766.° Прочитайте запис, укажіть аргумент функції та залежну змінну:

1) $s(t) = 70t$;
2) $y(x) = -2x + 4$;
3) $V(a) = a^3$;
4) $f(x) = x^2 - 4$.

767.° Функцію задано формулою $y = 10x + 1$. Знайдіть значення y, якщо:

1) $x = -1$; 2) $x = 3$; 3) $x = -\frac{1}{5}$; 4) $x = 7$.

768.° Функцію задано формулою $f(x) = 3 - 4x$. Чи є правильною рівність:

1) $f(-2) = -5$; 3) $f(0) = -1$;

2) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; 4) $f(-1) = 7$?

769.° Функцію задано формулою $f(x) = 7x - 5$. Знайдіть:

1) $f(2)$; 2) $f(0)$; 3) $f(-3)$; 4) $f(200)$.

770.° Функцію задано формулою $f(x) = 2x^2 - 1$. Чи є правильною рівність:

1) $f(1) = 1$; 3) $f(-2) = -9$; 5) $f(-1) = 1$;

2) $f(4) = 15$; 4) $f(0) = 0$; 6) $f(-5) = 19$?

771.° Функцію задано формулою $y = x^2 - 3$. Знайдіть значення y, якщо:

1) $x = 5$; 2) $x = -4$; 3) $x = 0{,}1$; 4) $x = 0$.

772.° Функцію задано формулою $f(x) = 3 + 4x$. Знайдіть значення x, при якому:

1) $f(x) = 19$; 2) $f(x) = -3$; 3) $f(x) = 0$; 4) $f(x) = 323$.

773.° Функцію задано формулою $f(x) = -0{,}1x - 2$. Знайдіть значення x, при якому:

1) $f(x) = 1$; 2) $f(x) = -100$; 3) $f(x) = -43{,}6$.

774.° Функцію задано формулою $y = -\frac{1}{6}x + 2$. Знайдіть:

1) значення функції для значень аргументу 12; 6; -6; 0; 1; 2; -4; -3;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 4; 3; 0; -1.

775.° Функцію задано формулою $f(x) = 2x - 1$.

1) Знайдіть $f(3)$; $f(-4)$; $f(0)$; $f(-0{,}5)$; $f(3{,}2)$.

2) Знайдіть значення x, при якому $f(x) = 7$; $f(x) = -9$; $f(x) = 0$; $f(x) = -2{,}4$.

3) Чи є правильною рівність: $f(5) = 9$; $f(0{,}3) = 0{,}4$; $f(-3) = -7$?

ГОНЧАРЕНКО ВІДКР ВИЗВОЛЕННЯ ГІМНАЗІЯ

776.° Функцію задано формулою $y = x(x + 8)$. Заповніть таблицю:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

777.° Функцію задано формулою $y = -\frac{2}{3}x$. Заповніть таблицю:

x	−9	−6	−3	−2	−1	0	1	2	3	6
y										

778.° Функцію задано формулою $y = x^2 + x + 1$. Заповніть таблицю:

x	−3	−2	−1	0	1	2	4	7
y								

779.• Кожному натуральному числу, яке більше за 10, але менше від 20, поставили у відповідність остачу при діленні цього числа на 6.

1) Яким способом задано цю функцію?
2) Яка область значень цієї функції?
3) Задайте цю функцію табличним способом.

780.• Область визначення деякої функції — усі двоцифрові натуральні числа, які кратні 10, а значення функції у 5 разів менші від відповідних значень аргументу. Задайте цю функцію формулою та табличним способом.

781.• Область визначення деякої функції — одноцифрові натуральні числа, а значення функції у 2 рази більші за відповідні значення аргументу.

1) Яким способом задано цю функцію?
2) Задайте цю функцію формулою та табличним способом.

Комунальний вищий навчальний заклад «Київський фізико-математичний ліцей»

782.* Задайте формулою функцію, якщо значення функції:

1) протилежні відповідним значенням аргументу;
2) дорівнюють потроєним відповідним значенням аргументу;
3) на 4 більші за квадрати відповідних значень аргументу.

783.* Задайте формулою функцію, якщо значення функції:

1) на 3 менші від відповідних значень аргументу;
2) на 5 більші за подвоєні відповідні значення аргументу.

784.* Складіть із кроком 0,5 таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^2 + 2x$, де $-1 \leqslant x \leqslant 3$.

785.* Складіть із кроком 1 таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^3 - 1$, де $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

786.* Функцію задано формулою $y = 0{,}2x - 5$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y:

x	4		$-1{,}5$		-3
y		2		$-1{,}4$	

787.* Дано функцію $y = 8 - \frac{1}{7}x$. Заповніть таблицю:

x	14		$-1{,}4$	
y		0		9

788.* Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 3, \\ 6, & \text{якщо } x \geqslant 3. \end{cases}$

Знайдіть: 1) $f(-3)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(2)$; 4) $f(3)$; 5) $f(2{,}9)$; 6) $f(8{,}1)$.

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

789.* Знайдіть значення функції $y=\begin{cases}-2x+4, \text{ якщо } x>0,\\ 0{,}1x-5, \text{ якщо } x\leqslant 0,\end{cases}$ яке відповідає аргументу: 1) 3; 2) 0,001; 3) 0; 4) −8.

790.* Функцію задано за допомогою таблиці:

x	2	4	6	8
y	5	7	9	11

1) Які числа складають область визначення цієї функції?
2) Задайте цю функцію описом і формулою.

791.* Функцію задано за допомогою таблиці:

x	1	3	5	7	9
y	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5

1) Які числа складають область визначення цієї функції?
2) Задайте цю функцію описом і формулою.

792.* Функції задано формулами $y=x^2-8x$ і $y=4-8x$. При яких значеннях аргументу ці функції набувають рівних значень?

793.* Функцію задано формулою $f(x)=3x+5$. При якому значенні x значення функції дорівнює значенню аргументу?

794.* Функцію задано формулою $y=x^2+2x-1$. При яких значеннях x значення функції дорівнює подвоєному значенню аргументу?

795.* Функцію f задано описом: значення функції дорівнює найбільшому цілому числу, яке не більше за відповідне значення аргументу[1]. Знайдіть $f(3{,}7)$; $f(0{,}64)$; $f(2)$; $f(0)$; $f(-0{,}35)$; $f(-2{,}8)$.

[1] Для даної функції існує спеціальне позначення $y=[x]$ (читають: «y дорівнює цілій частині числа x»).

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

796. Цього року фермер скоротив площу під капусту на 10 %. Урожайність капусти цього року підвищилася на 12 % порівняно з минулим роком. Збільшився чи зменшився врожай капусти порівняно з минулим роком і на скільки відсотків?

797. Доведіть, що коли $a + c = 2b$, то $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

798. Побудуйте пряму, яка проходить через точки A $(-2; 3)$ і B $(4; 3)$. Чому дорівнюють ординати точок цієї прямої?

799. Побудуйте пряму, яка проходить через точки C $(3; 0)$ і D $(3; -4)$. Чому дорівнюють абсциси точок цієї прямої?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

800. Доведіть, що в будь-якому 60-цифровому числі, десятковий запис якого не містить нулів, можна закреслити кілька цифр таких, що отримане в результаті цього число буде ділитися націло на 1001.

22. Графік функції

Розглянемо функцію $y = x^2 - 4x$, де $-1 \leqslant x \leqslant 4$. Складемо таблицю значень цієї функції при цілих значеннях аргументу:

x	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0

Розглянемо пари чисел, записаних у кожному стовпці цієї таблиці, як координати $(x; y)$ точок координатної площини. При цьому значення аргументу є абсцисою точки, а відповідне значення функції — її ординатою.

Конкурс «Учитель» Видавництво «Мнемозіна»

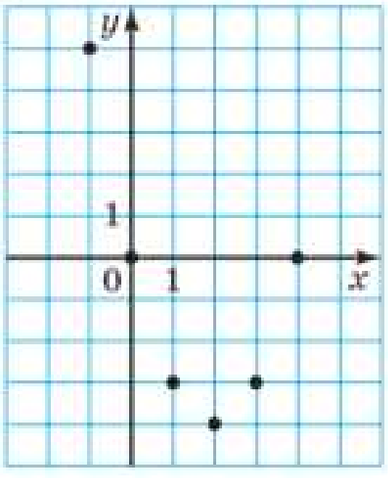


Рис. 15

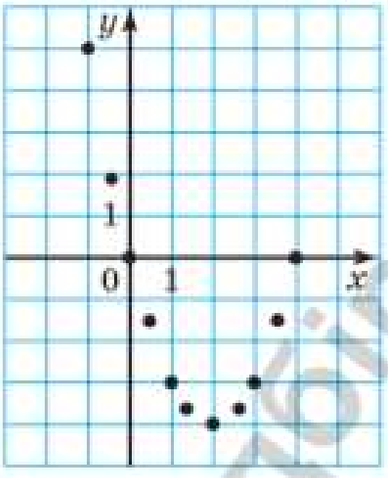


Рис. 16

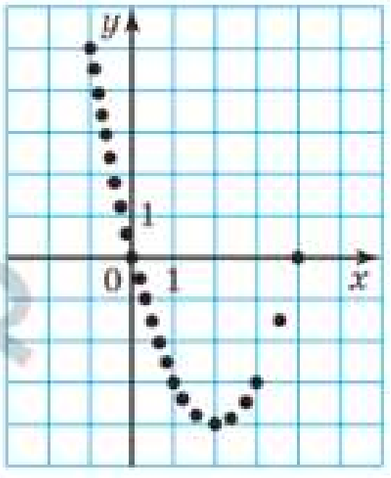


Рис. 17

Ці точки зображено на рисунку 15.

Очевидно, що, надаючи аргументу інших значень (відмінних від цілих) з області визначення та знаходячи відповідні значення функції, можна позначити все більше й більше точок на координатній площині (рис. 16, 17). Усі точки координатної площини, які можна позначити, діючи в такий спосіб, утворюють **графік функції.**

Означення. Графіком функції f називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Очевидно, що реалізувати на практиці описаний метод побудови графіка функції $y = x^2 - 4x$ неможливо. Адже точок, які треба було б позначити, безліч. Проте, якщо позначити досить багато точок, а потім сполучити їх плавною лінією, то отримана крива (рис. 18) буде тим менше відрізнятися від шуканого графіка, чим більше точок ми позначимо.

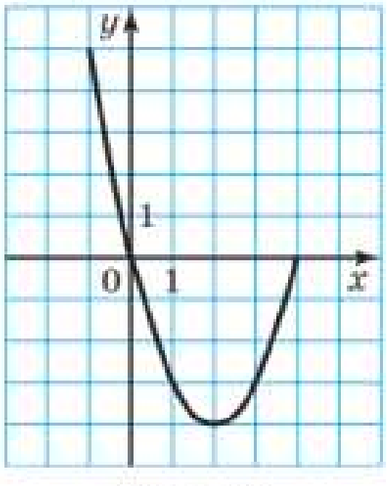


Рис. 18

Оскільки описаний метод побудови графіка функції передбачає значну технічну роботу, то істотну її частину може взяти на себе комп'ютер. Сьогодні існує багато програм, призначених для побудови графіків. Так, на екрані монітора (рис. 19) зображено графік функції $y = x^3$, де $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Рис. 19

Наголосимо, що *коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:*

1) *якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ обов'язково належить графіку;*

2) *якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.*

Графіком функції не обов'язково є лінія. На рисунку 20 зображено графік функції, заданої таблицею:

x	1	-2
y	3	0

Він складається з двох точок.

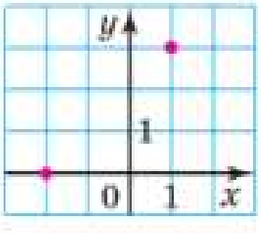


Рис. 20

Розглянемо приклад побудови графіка функції, заданої описом.

Нехай область визначення даної функції — усі числа. Для кожного додатного аргументу значення функції дорівнює 1; для кожного від'ємного аргументу значення функції дорівнює −1; якщо аргумент дорівнює нулю, то значення функції дорівнює нулю. Графік цієї функції зображено на рисунку 21. Він складається з трьох частин: точки O (0; 0) і двох променів, у кожного з яких «виколото» початок.

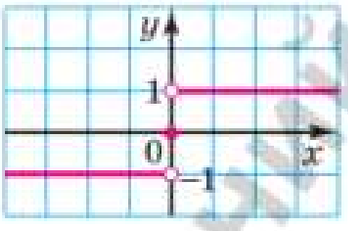


Рис. 21

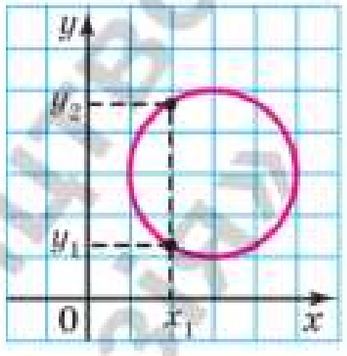


Рис. 22

Не будь-яка фігура, зображена на координатній площині, може слугувати графіком функції. Наприклад, коло не може бути графіком функції, оскільки за заданим значенням змінної x не завжди однозначно знаходиться значення змінної y (рис. 22).

Фігура, зображена на координатній площині, може бути графіком функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має із цією фігурою не більше ніж одну спільну точку. Можна говорити, що ця фігура задає деяку функцію. Такий спосіб задання функції називають **графічним**. Абсциси всіх точок цієї фігури утворюють область визначення, а ординати — область значень функції.

Якщо функцію задано графічно, то значення функції за заданим значенням x_0 аргументу можна знай-

ти за таким правилом: через точку $(x_0; 0)$ провести пряму, перпендикулярну до осі абсцис, а потім знайти ординату точки перетину цієї прямої з графіком. Знайдена ордината дорівнює $f(x_0)$ (рис. 23).

Рисунок, схема, фотографія якогось об'єкта або процесу дають про нього наочне уявлення. Ту саму роль відіграє для функції її графік. Так, вивчаючи графік, зображений на рисунку 24, можна, наприклад, знайти:

1) область визначення функції: усі x такі, що $-3 \leqslant x \leqslant 6$;

2) область значень функції: усі y такі, що $-2 \leqslant y \leqslant 4$;

3) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю: $x = -3$ або $x = 1$;

4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень: $1 < x \leqslant 6$;

5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень: $-3 < x < 1$.

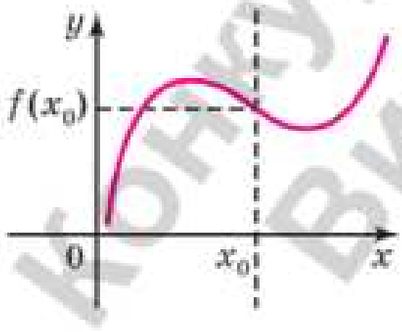


Рис. 23

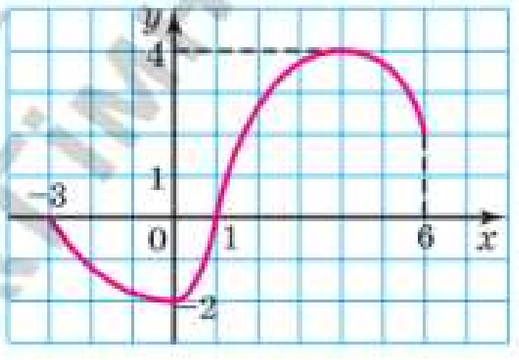


Рис. 24

Після вивчення матеріалу цього пункту стає зрозумілим, чому в техніці, медицині, економіці та багатьох інших сферах людської діяльності так широко використовують комп'ютерні програми, які дозволяють будувати графіки різноманітних функціональних залежностей.

Конкурсний відділ Видавництво «Ранок»

Приклад 1. Чи належить графіку функції, заданої формулою $y = x - 6$, точка: 1) A (8; 2); 2) B (2; 4)?

Розв'язання. Щоб установити, чи належить точка графіку функції, знайдемо значення функції, коли значення аргументу дорівнює абсцисі даної точки. Якщо значення функції дорівнюватиме ординаті даної точки, то точка належить графіку, а якщо ні, — то не належить.

1) При $x = 8$ маємо $y = 8 - 6 = 2$. Отже, точка A належить графіку даної функції.

2) При $x = 2$ маємо $y = 2 - 6 = -4 \neq 4$. Отже, точка B не належить графіку функції $y = x - 6$. ◀

Приклад 2. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = x^2 - 4$ з осями координат.

Розв'язання. Точка належить осі абсцис тоді й тільки тоді, коли її ордината дорівнює нулю. Тому щоб знайти координати точки перетину графіка даної функції з віссю абсцис, треба розв'язати рівняння $x^2 - 4 = 0$.

Маємо $x = 2$ або $x = -2$.

Отже, графік даної функції має з віссю абсцис дві спільні точки: A (2; 0) і B (−2; 0).

Точка належить осі ординат тоді й тільки тоді, коли її абсциса дорівнює нулю. Тому щоб знайти координати точки перетину графіка функції з віссю ординат, треба знайти значення даної функції при $x = 0$.

Маємо $y = -4$.

Отже, графік функції перетинає вісь ординат у точці C (0; −4). ◀

?

1. Що називають графіком функції? **2.** Які дві умови мають виконуватися, щоб фігура була графіком функції f? **3.** Чи може графік функції складатися з однієї точки? **4.** Чи будь-яка

фігура на координатній площині може слугувати графіком функції? **5.** Наведіть приклад фігури, яка не може бути графіком функції. **6.** Скільки спільних точок може мати з графіком функції будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис?

Подвійну нерівність читаємо, починаючи із середнього числа, у називному відмінку, а ліву та праву частини — у родовому відмінку. Наприклад: $5 < 7 < 9$ — *сім більше за п'ять, але менше від дев'яти.*

Подвійну нерівність зі знаками «$\leqslant$» і «$\geqslant$» також починаємо читати із середнього числа у називному відмінку, а от ліву та праву частини — у давальному відмінку, наприклад: $-3 \leqslant x \leqslant 2$ — *«ікс» більше або дорівнює мінус трьом, але менше або дорівнює двом.*

ВПРАВИ

801.° Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 25, заповніть таблицю:

x	-3	-2	0	2	6	7
$f(x)$						

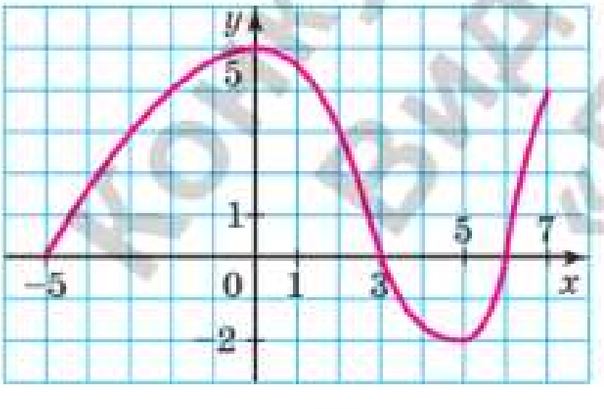


Рис. 25

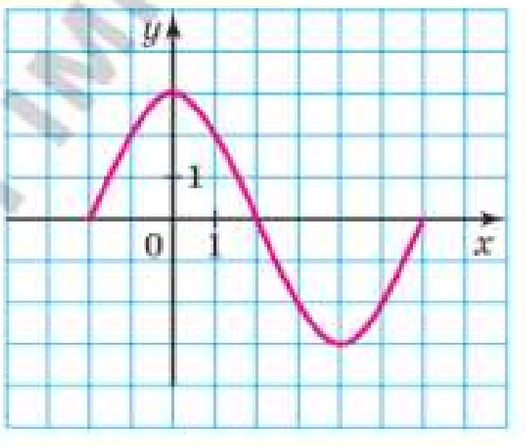


Рис. 26

802.° Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 26, заповніть таблицю:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

803.° Знайдіть область визначення й область значень функції, графік якої зображено на рисунку 27.

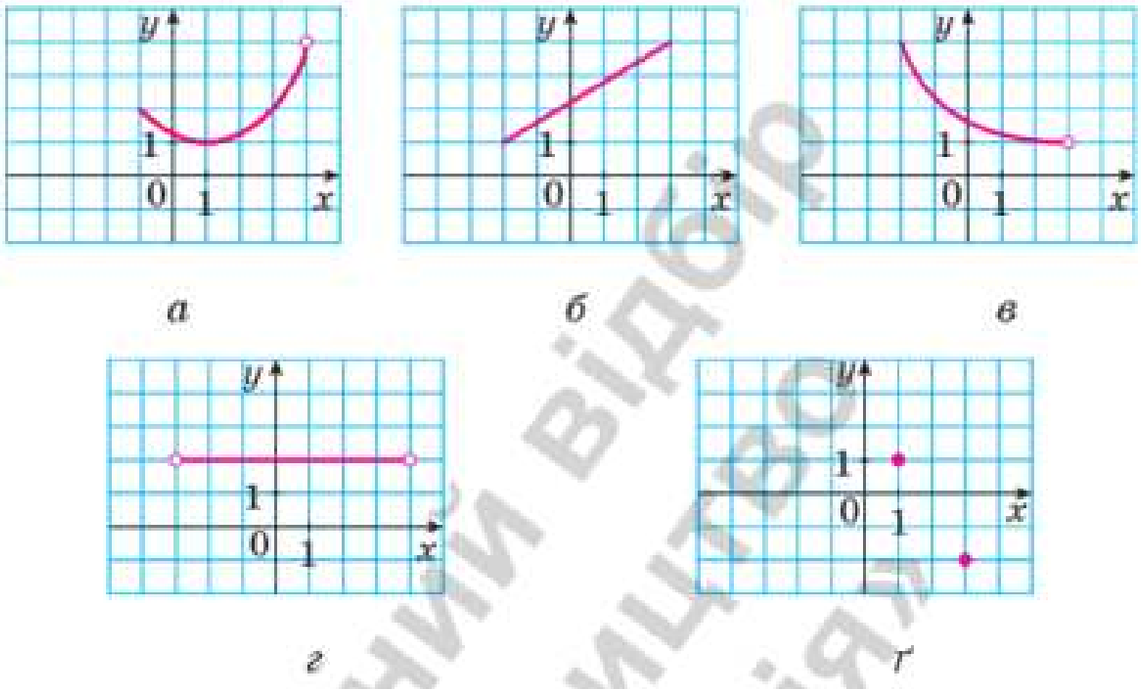


Рис. 27

804.° Знайдіть область визначення й область значень функції, графік якої зображено на рисунку 28.

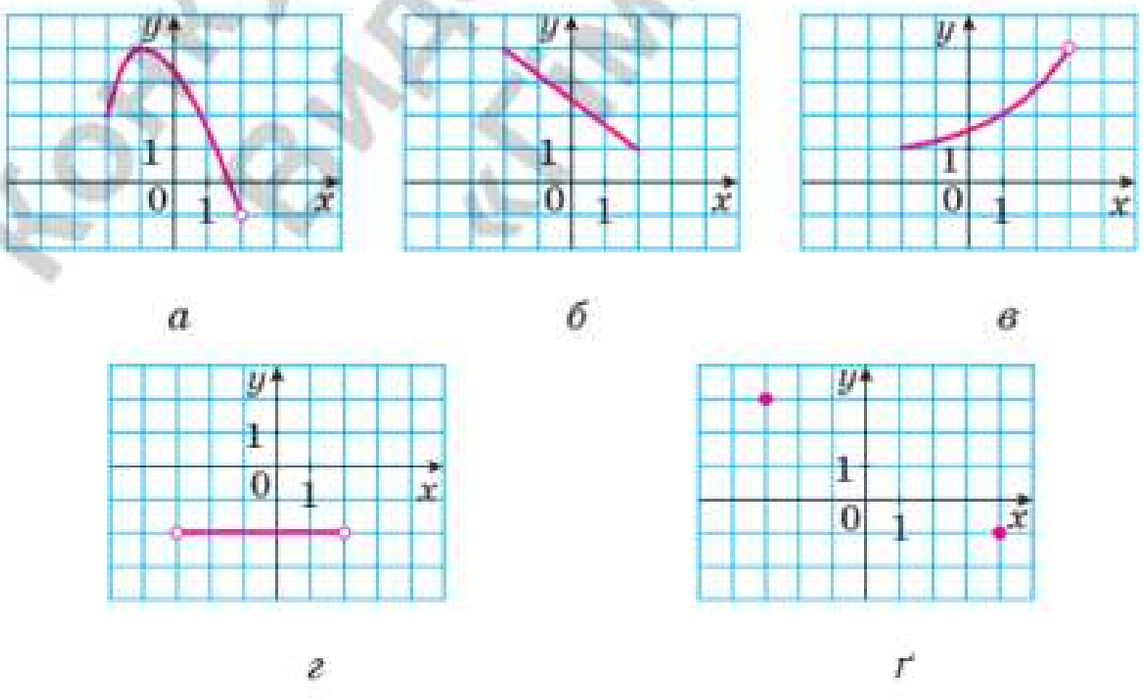


Рис. 28

Копіювання відсканованої версії підручника заборонено. Ліцензія

805.° Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 25, знайдіть:

1) значення аргументу, при яких $y = 3$;
2) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю;
3) область визначення функції;
4) область значень функції;
5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень;
6) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

806.° На рисунку 29 зображено графік функції $y = f(x)$. Користуючись графіком, знайдіть:

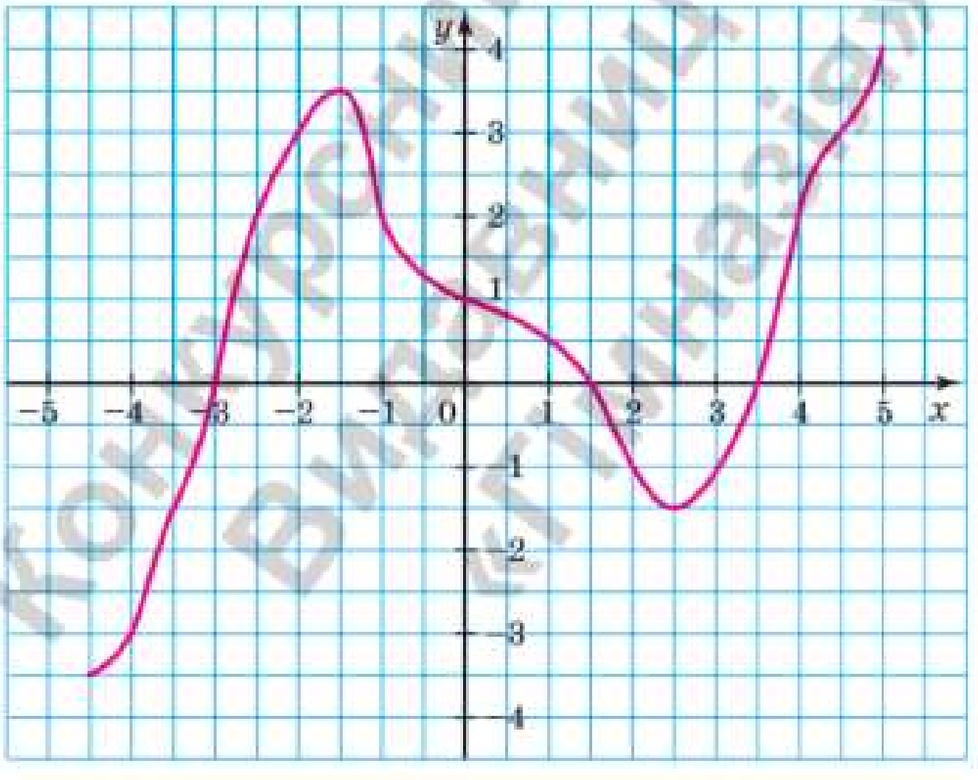


Рис. 29

1) значення y, якщо $x = -3{,}5;\ -1{,}5;\ 2;\ 4$;
2) значення x, яким відповідають значення $y = -3;\ -1{,}5;\ 2$;
3) значення аргументу, при яких значення функції дорівнюють нулю;

Копія електронного підручника з видавництва «Генеза»

4) область визначення та область значень функції;
5) значення аргументу, при яких значення функції додатні;
6) значення аргументу, при яких значення функції від'ємні.

807.° Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 30, знайдіть:
1) область визначення функції;
2) область значень функції;
3) координати точок перетину графіка функції з віссю абсцис;
4) координати точки перетину графіка функції з віссю ординат;
5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень;
6) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

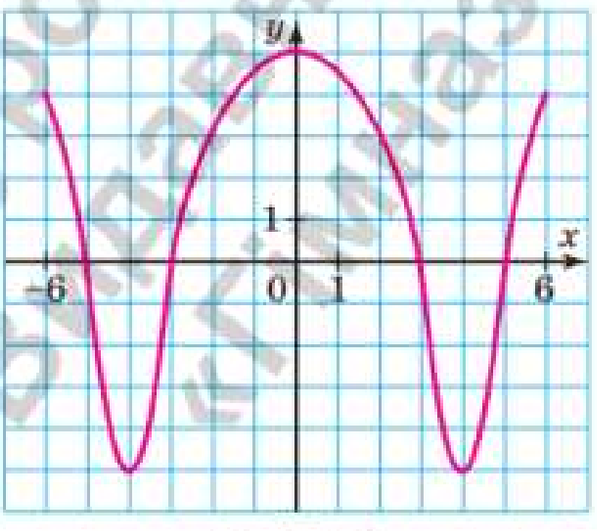


Рис. 30

808.° На рисунку 31 зображено графік функції $y = f(x)$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) $f(-4)$; $f(-2{,}5)$; $f(0{,}5)$; $f(2)$;
2) значення x, при яких $f(x) = 2{,}5$; $f(x) = 1$; $f(x) = 0$;
3) область визначення та область значень функції;
4) значення аргументу, при яких значення функції додатні;

Конкурсний відбір Видавництво «Ранок»

5) значення аргументу, при яких значення функції від'ємні.

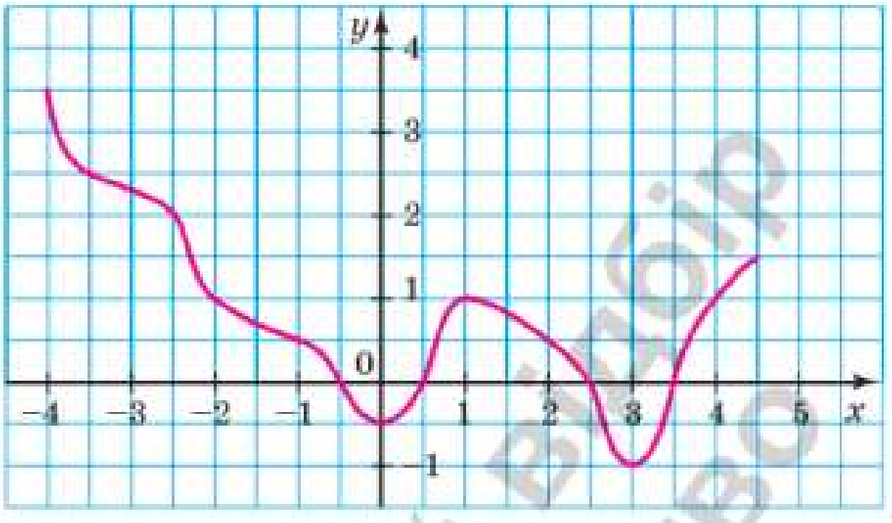


Рис. 31

809.° Чи належить графіку функції $y = x^2 + 2$ точка:

1) $A\ (0;\ 2)$; 2) $B\ (-1;\ 1)$; 3) $C\ (-2;\ 6)$; 4) $D\ (-3;\ -7)$?

810.° Назвіть координати кількох точок, які належать графіку функції:

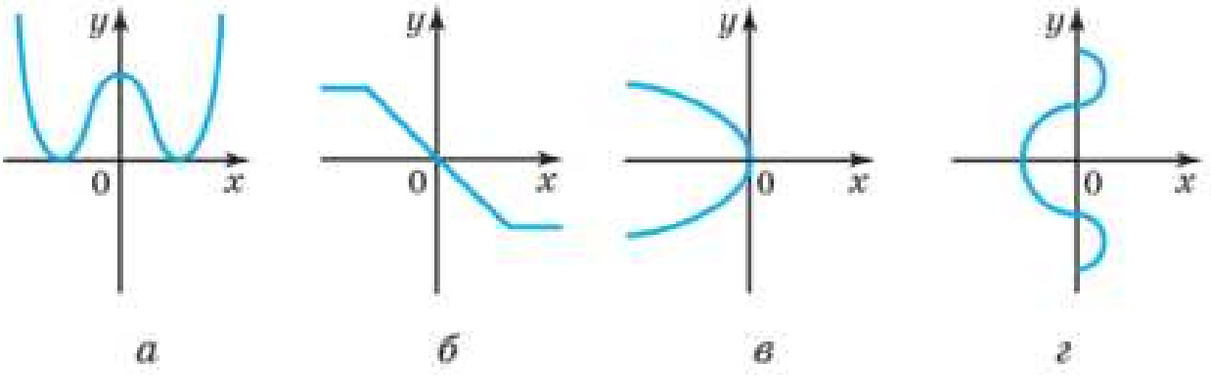
1) $y = 7x - 4$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = 4 - |\ x\ |$.

811.° Чи належить графіку функції $y = -\frac{x}{3}$ точка:

1) $A\ (9;\ -3)$; 3) $C\ (-1;\ 3)$;

2) $B\ (6;\ 2)$; 4) $D\ (-12;\ 4)$?

812.° Які з фігур, зображених на рисунку 32, можуть бути графіками функцій з аргументом x?



а *б* *в* *г*

Рис. 32

Навчальний посібник Видавництво «Мандрівець»

813.° Яка з фігур, зображених на рисунку 33, може бути графіком функції з аргументом x?

а *б*

Рис. 33

814.• Графіком деякої функції є ламана $ABCD$ з вершинами в точках A $(-3;\ 6)$, B $(-1;\ 2)$, C $(3;\ -2)$, D $(9;\ 0)$.

1) Побудуйте графік даної функції.
2) Знайдіть значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -2; 0; 2; 6.
3) Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 1; -1; 0.

815.• Чи може ламана ABC бути графіком деякої функції, якщо:

1) A $(-4;\ -1)$, B $(1;\ 2)$, C $(2;\ 4)$;
2) A $(-4;\ -1)$, B $(1;\ 2)$, C $(1;\ 3)$?

816.• Графіком деякої функції є ламана MKE, де M $(-4;\ 1)$, K $(2;\ 4)$, E $(5;\ -2)$.

1) Побудуйте графік даної функції.
2) Знайдіть значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -2; 0; 3.
3) Знайдіть значення x, при якому $y = -2$; 0; 2.

817.• Функцію задано формулою $y = x^2 - 1$, де $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

1) Складіть таблицю значень функції з кроком 1.
2) Побудуйте графік функції, користуючись складеною таблицею.

3) Користуючись графіком, знайдіть значення аргументу, при яких значення функції менші від нуля, а при яких — більші за нуль.
4) Користуючись графіком функції, укажіть область значень функції.

818.* Функцію задано формулою $y = 4 - x^2$, де $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

1) Складіть таблицю значень функції з кроком 1.
2) Побудуйте графік функції, користуючись складеною таблицею.
3) Користуючись графіком, знайдіть значення аргументу, при яких значення функції менші від нуля, а при яких — більші за нуль.
4) Користуючись графіком функції, укажіть область значень функції.

819.* Значення функції $y = f(x)$ дорівнюють 0 при значеннях аргументу, що дорівнюють -5 і 4. Яке з наведених тверджень є правильним:

1) графік функції має з віссю ординат дві спільні точки $(0; -5)$ і $(0; 4)$;
2) графік функції має з віссю абсцис дві спільні точки $(-5; 0)$ і $(4; 0)$?

820.* Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = x^2 - 16x$;
2) $y = |x| - 2$;
3) $y = x^3 - 9x$;
4) $y = 0{,}8x$.

821.* Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 36 - 9x$;
2) $y = x^2 + x$;
3) $y = 49 - x^2$.

822.* Задано функцію $y = 1 - x$, областю визначення якої є всі одноцифрові натуральні числа. Побудуйте графік цієї функції.

823.* Побудуйте графік функції $f(x) = 1{,}5x + 1$, областю визначення якої є цілі числа, при яких виконується нерівність $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

824.* Побудуйте графік функції, областю визначення якої є всі натуральні числа та яка набуває значення 1 при парних значеннях аргументу та значення −1 при непарних значеннях аргументу.

825.* Функцію f задано описом: значення функції дорівнює найбільшому цілому числу, яке не більше за відповідне значення аргументу. Побудуйте графік цієї функції.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

826. Тракторист Іван і Петро, працюючи разом, можуть зорати поле за 21 год, тракторист Петро й Остап — за 28 год, а Іван і Остап — за 20 год. За який час Іван, Петро й Остап можуть зорати це поле, працюючи втрьох?

827. Знайдіть які-небудь три натуральних значення змінної x таких, щоб вираз a^2-2x можна було розкласти на множники за формулою різниці квадратів. Отримані вирази розкладіть на множники.

828. (*Задача Бхаскари*[1].) Є кадамба-квітка; на одну пелюстку бджілок п'ята частина сіла. Поряд росла вся у цвіту сименгда, і на ній третя частина розмістилася. Різницю їхню ти знайди, тричі її ти додай, на кумай цих бджіл посади. Лише бджілка одна не знайшла собі місця ніде, усе літала туди-сюди та скрізь пахощами квітів тішилася. Тепер скажи мені: скільки бджілок усього тут зібралося?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

829. У таблиці наведено відповідні значення величин x і y. Установіть, чи є ці величини прямо пропорційними.

1)

x	2	5	7	9
y	6	15	21	27

2)

x	0,4	1,8	2,3	3,1
y	0,8	3,8	4,6	6,2

[1] Бха́скара II (1114–1185) — індійський математик і астроном, автор трактату «Вінець системи» (бл. 1150 р.), у якому викладено методи розв'язування ряду алгебраїчних задач.

830. Заповніть таблицю, якщо величина y прямо пропорційна величині x.

x	0,3	8	3,2		
y			9,6	2,7	42

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

831. Із квадратного аркуша паперу в клітинку, який містить цілу кількість клітинок, вирізали по лініях квадрат, що містить цілу кількість клітинок, так, що залишилася 71 клітинка. Скільки клітинок було на початковому аркуші паперу?

23. Лінійна функція, її графік і властивості

Розглянемо два приклади.

Приклад 1. У басейні було 200 л води. Протягом t хв до басейну наливається щохвилини 80 л води. Тоді об'єм V води в басейні до його заповнення можна обчислити за формулою

$$V = 80t + 200, \text{ де } t \geqslant 0.$$

Ця формула задає функціональну залежність змінної V від змінної t. ◀

Приклад 2. Перша бригада зібрала 25 ящиків яблук; кожний робітник другої бригади зібрав по 2 ящики. Нехай у другій бригаді було x робітників. Позначимо кількість усіх ящиків, зібраних двома бригадами, буквою y. Тоді залежність змінної y від змінної x виражається формулою

$$y = 2x + 25, \text{ де } x \text{ — натуральне число.}$$ ◀

У наведених прикладах ми побудували функції, що описують дві різні реальні ситуації. Проте ці функції схожі в тому, що формули, які їх задають, мають вигляд $y = kx + b$.

Означення. **Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна, називають лінійною.**

Ось ще приклади лінійних функцій:

$$y = -2x + 1, \quad y = 1 - x, \quad y = 5x, \quad y = 2.$$

Зауважимо, що *областю визначення лінійної функції є всі числа.*

Побудуємо графік функції $y = -2x + 1$.

Складемо таблицю значень цієї функції для деяких значень аргументу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	-1	-3	-5

Точки $A(-3; 7)$, $B(-2; 5)$, $C(-1; 3)$, $D(0; 1)$; $E(1; -1)$, $F(2; -3)$, $G(3; -5)$ належать шуканому графіку (рис. 34). Усі ці точки лежать на одній прямій, яка є графіком функції $y = -2x + 1$ (рис. 35).

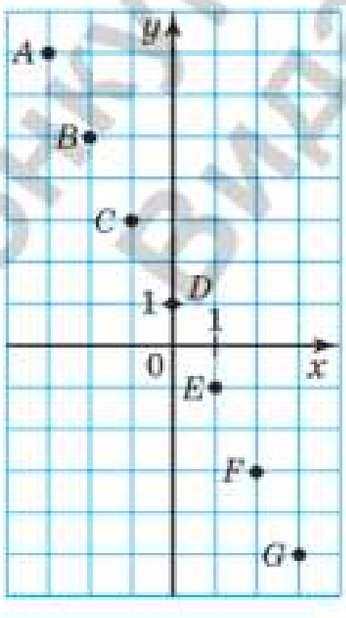


Рис. 34

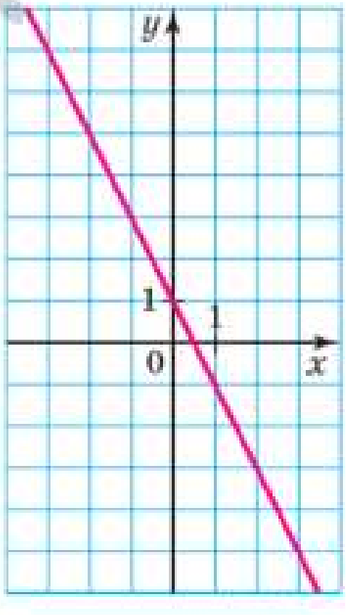


Рис. 35

У курсі математики 9 класу ви доведете, що ***графіком лінійної функції є пряма.***

Комунальний заклад «Вирадівський ліцей» «Гімназія»

Зазначимо, що ця пряма не може бути вертикальною, тобто прямою, перпендикулярною до осі абсцис. Справді, вертикальна пряма не може слугувати графіком функції.

Оскільки пряма однозначно визначається будь-якими двома її точками, то для побудови графіка лінійної функції достатньо вибрати два довільних значення аргументу й скласти таблицю значень функції, яка має лише два стовпці.

Приклад 3. Побудуйте графік функції $y = -3x + 2$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень даної функції для двох довільних значень аргументу:

x	0	1
y	2	-1

Позначимо на координатній площині точки (0; 2) і (1; −1) та проведемо через них пряму (рис. 36). Ця пряма є графіком лінійної функції $y = -3x + 2$. ◀

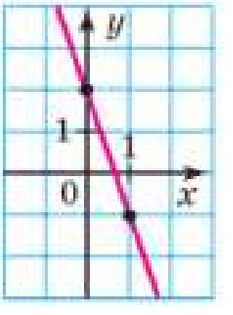


Рис. 36

У формулі $y = kx + b$, яка задає лінійну функцію, припустимими є й випадки, коли $k = 0$ та / або $b = 0$.

Розглянемо випадок, коли $b = 0$ і $k \neq 0$. Тоді формула набуває вигляду $y = kx$. Звідси для всіх значень аргументу, відмінних від нуля, можна записати, що $\frac{y}{x} = k$. Ця формула показує, що для функції $y = kx$ при $x \neq 0$ відношення відповідних значень залежної та незалежної змінних залишається сталим і дорівнює k.

Нагадаємо, що в курсі математики 6 класу ви вже ознайомилися з подібними залежностями між величинами. Таку залежність називають прямою пропорцій-

ністю. Тому лінійну функцію, яку задають формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, також називають **прямою пропорційністю.**

Функції $y = 2x$, $y = x$, $y = -x$, $y = -\frac{1}{3}x$ — приклади прямих пропорційностей.

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції (це ілюструє схема, зображена на рисунку 37), то її графік — пряма. Особливість цієї прямої полягає в тому, що вона при будь-якому k проходить через точку O (0; 0). Справді, якщо у формулі $y = kx$ покласти $x = 0$, то отримаємо $y = 0$. Тому для побудови графіка прямої пропорційності достатньо знайти яку-небудь точку графіка, відмінну від початку координат, і провести пряму через цю точку й точку O (0; 0).

Рис. 37

На рисунку 38 зображено графіки прямих пропорційностей, які наводилися вище як приклади.

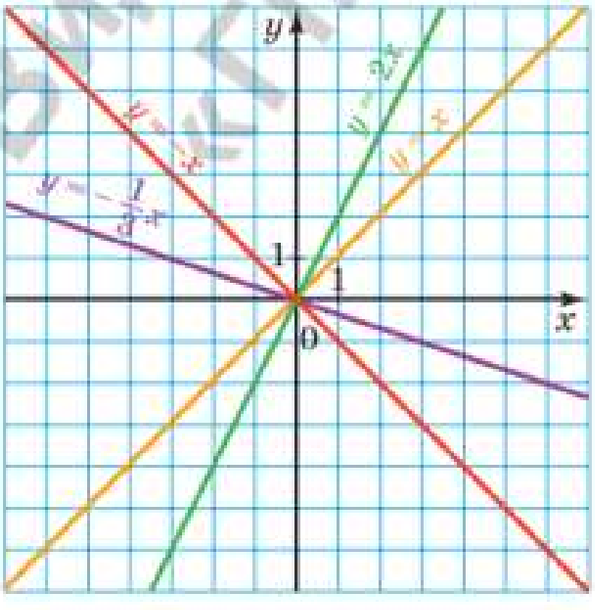


Рис. 38

Конкурсний відбір Вимоги до кваліфікації

Розглянемо ще один окремий випадок лінійної функції.

У формулі $y=kx+b$ покладемо $k=0$. Отримаємо $y=b$. Зрозуміло, що в цьому разі значення функції залишатимуться незмінними при будь-яких змінах значень аргументу.

Приклад 4. Побудуйте графік функції $y=2$.

Розв'язання. Як і для побудови графіка будь-якої лінійної функції, треба знати дві точки, які належать йому. Ці точки матимуть однакові ординати, які дорівнюють 2. Їхні абсциси виберемо довільно, наприклад -2 і 0. Залишається провести пряму через точки $A(-2;2)$ і $B(0;2)$ (рис. 39). Ця пряма паралельна осі абсцис. ◀

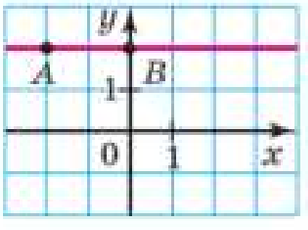


Рис. 39

Зауважимо, що графіком функції $y=0$ є вісь абсцис. Графіком функції $y=b$, де $b\neq 0$, є пряма, паралельна осі абсцис.

Приклад 5. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої зображено на рисунку 40.

Розв'язання. Графік даної функції перетинає вісь ординат у точці (0; 4). Підставивши координати цієї точки у формулу $y=kx+b$, отримуємо $4=k\cdot 0+b$, звідки $b=4$.

Оскільки даний графік перетинає вісь абсцис у точці (3; 0), то, підставивши її координати у формулу $y=kx+4$, матимемо: $3k+4=0$; $k=-\frac{4}{3}$.

Відповідь: $y=-\frac{4}{3}x+4$. ◀

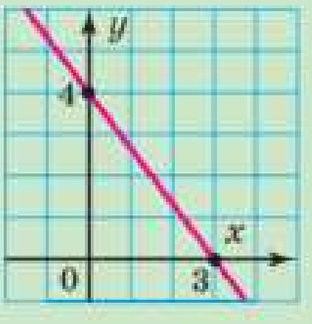


Рис. 40

1. Яку функцію називають лінійною? **2.** Що є графіком лінійної функції? **3.** Яку функцію називають прямою пропорційністю? **4.** Що є графіком прямої пропорційності? **5.** Що є графіком функції $y = b$, де $b \neq 0$? **6.** Графіком якої функції є вісь абсцис? **7.** Чи існує функція, графіком якої є вісь ординат?

ВПРАВИ

832.° Чи є лінійною функція, задана формулою:

1) $y = 3x - 2$;
2) $y = 8 - 7x$;
3) $y = \frac{x}{3} + 2$;
4) $y = \frac{3}{x} + 2$;
5) $y = 2x^2 + 4$;
6) $y = \frac{12x - 8}{4}$;
7) $y = \frac{x}{5}$;
8) $y = -4$;
9) $y = 0$?

У разі ствердної відповіді вкажіть значення коефіцієнтів k і b.

833.° Чи є прямою пропорційністю функція, задана формулою:

1) $y = 4x$;
2) $y = \frac{4}{x}$;
3) $y = \frac{x}{4}$;
4) $y = 0$;
5) $y = -4x$;
6) $y = -\frac{x}{4}$?

У разі ствердної відповіді вкажіть значення коефіцієнта k.

834.° Лінійну функцію задано формулою $y = 6x - 5$. Заповніть таблицю:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

835.° Функцію задано формулою $y = -2x + 5$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -4; $3{,}5$; 0;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 9; -5; 0.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

836.° Функцію задано формулою $y = 0{,}4x + 3$. Заповніть таблицю:

x	-2		0		5	
y		-2		0		-13

837.° Функцію задано формулою $y = 0{,}3x - 2$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 5; −2; 0;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 1; −11; 0,8.

838.° Заповніть таблицю та побудуйте графік функції:

1) $y = x + 3$;

x	0	1
y		

2) $y = \frac{1}{3}x - 5$.

x	0	3
y		

839.° Заповніть таблицю та побудуйте графік функції:

1) $y = 3 - 0{,}5x$;

x	0	2
y		

2) $y = \frac{1}{8}x - 1$.

x	0	8
y		

840.° Побудуйте графік функції:

1) $y = x - 5$;
2) $y = 3x + 1$;
3) $y = -\frac{1}{6}x - 2$;
4) $y = 0{,}4x + 3$.

841.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 4 - x$;
2) $y = -4x + 5$;
3) $y = 0{,}2x - 3$.

842.° Функцію задано формулою $y = \frac{1}{3}x$. Знайдіть:

1) значення y, якщо $x = 6$; -3; $-3{,}2$;
2) значення x, при якому $y = -2$; $\frac{1}{3}$; 12.

Конкурсний відбір Видавництво «Грамота»

843.° Функцію задано формулою $y = 0{,}6x$. Заповніть таблицю:

x	10	0,6	−5	−1,2			
y					4,8	−60	$\frac{1}{3}$

844.° Функцію задано формулою $y = 1{,}2x$. Знайдіть:

1) значення y, якщо $x = 10$; 0,6; −5; −4;

2) значення x, при якому $y = 3{,}6$; −2,4; 6.

845.° Побудуйте графік прямої пропорційності:

1) $y = 3x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = -0{,}6x$; 4) $y = \frac{1}{7}x$.

846.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 5x$; 2) $y = 0{,}8x$; 3) $y = -\frac{1}{6}x$.

847.° Побудуйте в одній системі координат графіки лінійних функцій: $y = 3$; $y = -5$; $y = 0$.

848.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = 1{,}8x - 3$, визначте, через які з даних точок проходить цей графік: A (−2; −6,6); B (1; 1,2); C (0; −3); D (5; 7).

849.° Не виконуючи побудови, визначте, чи належить графіку функції $y = 8x - 14$ точка:

1) A (−1; −6); 2) B (2; 2).

850.• Функціональна залежність змінної y від змінної x є прямою пропорційністю.

1) Заповніть таблицю:

x	8	6	2	1	$\frac{1}{2}$	0	−1	−2	−3	−4
y	4									

2) Задайте цю функцію формулою.

3) Побудуйте графік цієї функції.

851.• Побудуйте графік функції $y = 2x - 3$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 4; −1; 0,5;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 1; −1; 0;
3) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

852.* Побудуйте графік функції $y = 2 - 4x$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 1; 0; −2;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: −4; −2; 2;
3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

853.* Побудуйте графік функції $y = 0{,}5x$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 4; −6; 3;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 2,5; −2; 1;
3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

854.* Побудуйте графік функції $y = -4x$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 2; −1; 0,5;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: −4; 2;
3) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

855.* Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x - 1$ і $y = \frac{1}{4}x + 2$ та знайдіть координати точки їхнього перетину.

Електронний вибір видавництво «Гімназія»

856.* Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 5x - 6$ і $y = -2x + 1$ та знайдіть координати точки їхнього перетину.

857.* Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 2{,}5x + 10$; 2) $y = 6x - 4$.

858.* Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = \frac{2}{3}x - 4$; 2) $y = 7 - 3x$.

859.* Не виконуючи побудови графіка функції $y = 2x - 9$, знайдіть точку цього графіка, у якої:

1) абсциса дорівнює ординаті;

2) ордината на 6 більша за абсцису.

860.* Не виконуючи побудови графіка функції $y = -7x + 8$, знайдіть точку цього графіка, у якої абсциса та ордината — протилежні числа.

861.* Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y = 3{,}7x + 10$ і $y = 1{,}4x - 13$;

2) $y = 4 - \frac{2}{7}x$ і $y = \frac{9}{7}x + 26$.

862.* Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = 4x - 7$ і $y = -2x + 11$.

863.* При якому значенні змінної x функції $f(x) = 4x - 3$ і $g(x) = 3x - 2$ набувають рівних значень? Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій f і g. Визначте, при яких значеннях x:

1) $f(x) > g(x)$; 2) $f(x) < g(x)$.

864.* При якому значенні незалежної змінної функції $f(x) = 5 - 2x$ і $g(x) = 2x - 3$ набувають рівних значень? Побудувавши на одній координатній площині графіки даних функцій, установіть, при яких значеннях x:

1) $f(x) < g(x)$; 2) $f(x) > g(x)$.

865.* Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку M (2; −5).

866.* Знайдіть значення b, при якому графік функції $y=-\frac{1}{9}x+b$ проходить через точку A (−27; 4).

867.* При якому значенні k графік функції $y = kx - 15$ проходить через точку B (3; −6)?

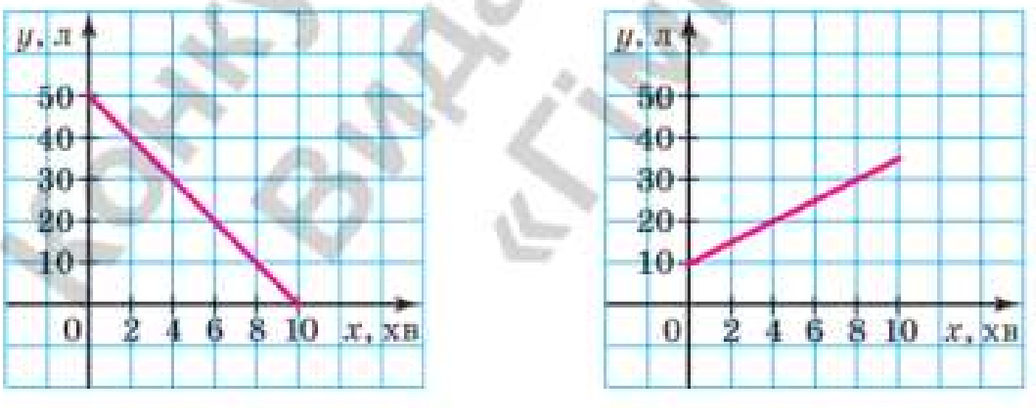
868.* Графік функції $y = kx + b$ перетинає осі координат у точках C (0; 4) і D (−8; 0). Знайдіть значення k і b.

869.* Графік функції $y = kx + b$ перетинає осі координат у точках M (3; 0) і K (0; −1). Знайдіть значення k і b.

870.* Усі точки графіка функції $y = kx + b$ мають однакову ординату, яка дорівнює −6. Знайдіть значення k і b.

871.* Графік функції $y = kx + b$ паралельний осі абсцис і проходить через точку A (−2; 3). Знайдіть значення k і b.

872.* Один із графіків, наведених на рисунку 41, відображає процес наповнення водою першого бака, а другий — витікання води з другого бака.



а *б*

Рис. 41

1) Яким процесам відповідають графіки, наведені на рисунку 41?
2) Скільки води було спочатку в кожному баку?
3) Скільки води було в кожному баку через 2 хв після відкриття кранів? через 6 хв?

4) Через скільки хвилин після відкриття кранів у кожному баку було по 30 л води?
5) Скільки літрів води щохвилини наливається в перший бак і скільки виливається з другого?
6) Задайте формулою залежність кількості води в кожному баку від часу.

873.* Яка з прямих, зображених на рисунку 42, є графіком функції:

1) $y = x$; 2) $y = 4x$; 3) $y = \frac{1}{4}x$; 4) $y = -\frac{1}{4}x$?

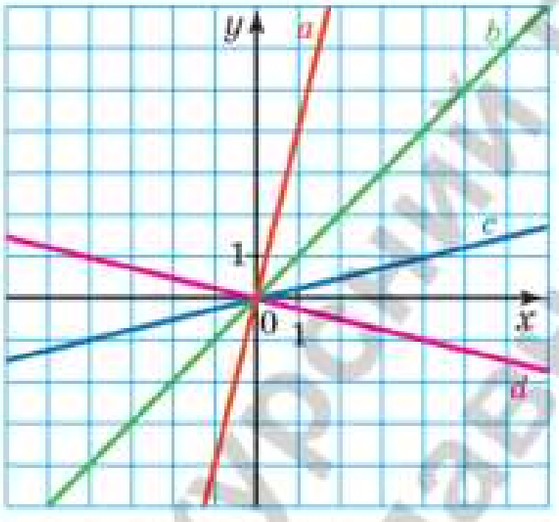


Рис. 42

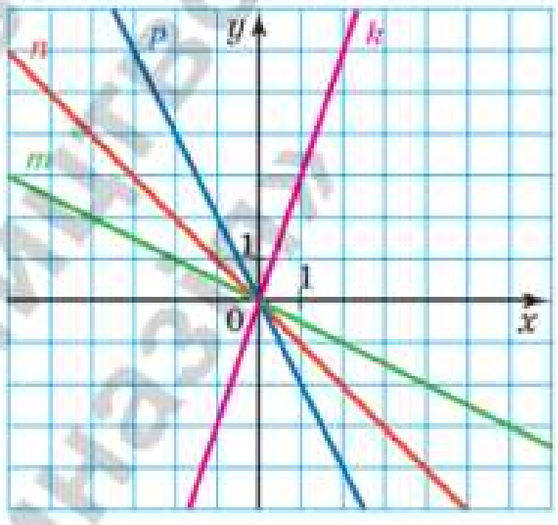


Рис. 43

874.* Яка з прямих, зображених на рисунку 43, є графіком функції:

1) $y = -x$; 2) $y = 3x$; 3) $y = -\frac{1}{2}x$; 4) $y = -2x$?

875.** Задайте формулою які-небудь дві лінійні функції, графіки яких проходять через точку:

1) A (0; 4); 2) B (1; 3).

876.** Точка C належить відрізку AB завдовжки 8. Довжина відрізка AC дорівнює x, довжина відрізка BC — y. Побудуйте графік залежності y від x, якщо $0 < x < 8$. Позначте на цьому графіку точку, яка відповідає випадку, коли точка C — середина відрізка AB.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

877.** Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 12, $AB = x$, $AD = y$, $0 < x < 6$. Побудуйте графік залежності y від x. Позначте на цьому графіку точку, яка відповідає випадку, коли прямокутник $ABCD$ є квадратом.

878.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x - 4, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -2x - 4, & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 3x - 2, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо } x > 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 2, & \text{якщо } x \neq 2, \\ 3, & \text{якщо } x = 2. \end{cases}$

879.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} -3x, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ 3, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ 2x + 1, & \text{якщо } x \geqslant 1; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 5 - x, & \text{якщо } x \leqslant 3, \\ x + 1, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$

880.** Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| + x$; 3) $y = 4x - |x| + 2$.

881.** Побудуйте графік функції:

1) $y = -|x|$; 2) $y = x - |x|$; 3) $y = 3x + 2|x|$.

882.** Задайте формулою лінійну функцію, графіком якої є зображена на рисунку 44: 1) пряма a; 2) пряма b.

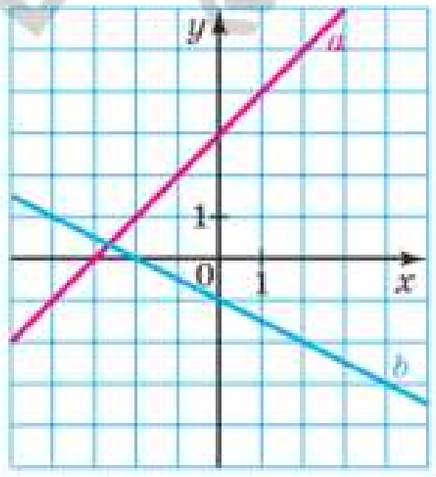


Рис. 44

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

883.** Задайте формулою лінійну функцію, графіком якої є зображена на рисунку 45: 1) пряма m; 2) пряма n.

884.* Функцію задано описом: значення функції дорівнює різниці між значенням аргументу й цілою частиною аргументу[1]. Побудуйте графік цієї функції.

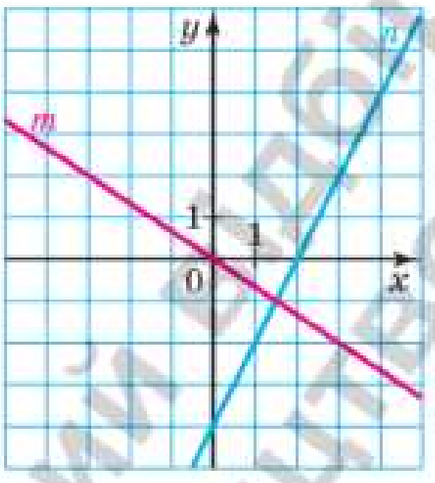


Рис. 45

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

885. Троє друзів вирішили створити фірму з виробництва меблів і домовилися ділити прибуток пропорційно своїм внескам до статутного капіталу фірми. Один із них уніс 75 000 грн, другий — 125 000 грн, а третій — 175 000 грн. За підсумками першого року роботи прибуток склав 1 800 000 грн. Скільки грошей має отримати кожен із друзів?

886. У двох діжках було порівну води. Об'єм води в першій діжці спочатку збільшили на 10 %, а потім зменшили на 10 %. Об'єм води в другій діжці, навпаки, спочатку зменшили на 10 %, а потім збільшили на 10 %. У якій діжці води стало більше?

887. Відомо, що $x^2+y^2=a$, $xy=b$. Чому дорівнює значення виразу $x^4+x^2y^2+y^4$?

---

[1] Дану функцію називають дробовою частиною числа, і для неї існує спеціальне позначення: $y=\{x\}$. За означенням $\{x\}=x-[x]$, де $[x]$ — ціла частина x. Наприклад, $\{3{,}2\}=0{,}2$; $\{-3{,}2\}=0{,}8$; $\{-0{,}16\}=0{,}84$; $\{2\}=0$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

888. Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}1x + 5y$, якщо $x = -4$, $y = 0{,}6$;

2) $x^2 - 3y + 7$, якщо $x = 6$, $y = -2$;

3) $|x| + |y - 6|$, якщо $x = -10$, $y = 2$;

4) $(2y - 3)^2 - (x + 4)^2$, якщо $x = -4$, $y = 1{,}5$.

889. Зобразіть на координатній площині всі точки $(x; y)$ такі, що:

1) $x = -3$, y — довільне число;

2) $y = 2$, x — довільне число;

3) $x = 0$, y — довільне число.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

890. Є два друкарських автомати. Перший, отримавши на вході картку із числами $(a; b; c)$, видає на виході картку із числами $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b+c}{2}; \frac{a+c}{2}\right)$, а другий за карткою із числами $(a; b; c)$ — картку із числами $(2a - b; 2b - c; 2c - a)$. Чи можна за допомогою цих автоматів з картки із числами $(2{,}8; -1{,}7; 16)$ отримати картку із числами $(1{,}73; 2; 0{,}4)$?

ЗАВДАННЯ № 6 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. При якому значенні аргументу значення функції $y = -1{,}5x + 4$ дорівнює -2?

А) 4; Б) -4; В) 2; Г) -2.

2. Серед наведених функцій укажіть пряму пропорційність:

А) $y = 12 + x$; Б) $y = 12$; В) $y = \frac{12}{x}$; Г) $y = 12x$.

3. Яка з даних функцій не є лінійною?

А) $y = -2x + 9$; В) $y = -\frac{x}{2} + 9$;

Б) $y = -\frac{2}{x} + 9$; Г) $y = 9 - 0{,}2x$.

4. Через яку з даних точок проходить графік функції $y = x^2 - 3$?

А) $A\ (-3; 0)$; В) $C\ (-3; 3)$;

Б) $B\ (-3; 6)$; Г) $D\ (-3; -12)$.

Конкурсний відділ Видавництво «Гімназія»

5. Уранці учениця пішла до школи, а після уроків повернулася додому. На рисунку 46 зображено графік залежності відстані між учницею та її домом від часу, який минув від моменту виходу з дому. Скільки годин учениця перебувала в школі?

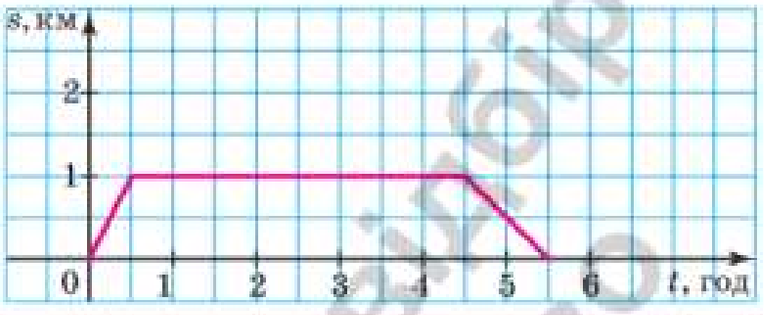


Рис. 46

А) 5 год; В) 4 год;
Б) 4,5 год; Г) 3,5 год.

6. Графіком якої з даних функцій є пряма, що проходить через початок координат?

А) $y = 20 + x$; В) $y = 20 - x$;
Б) $y = 20x$; Г) $y = x - 20$.

7. Графіком якої з даних функцій є горизонтальна пряма?

А) $y = \frac{1}{9}$; В) $y = \frac{1}{9}x + 1$;
Б) $y = \frac{1}{9} - x$; Г) $y = \frac{1}{9}x$.

8. У якій точці графік функції $y = x - 2$ перетинає вісь ординат?

А) A (0; −2); В) C (2; 0);
Б) B (0; 2); Г) D (−2; 0).

9. Визначте абсцису точки перетину графіків функцій $y = 8 - 4x$ і $y = x + 14$.

А) −2; Б) 2; В) −1,2; Г) 1,2.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

10. На якому з рисунків зображено графік функції $y = 0{,}2x$ (рис. 47)?

А) Б) В) Г)

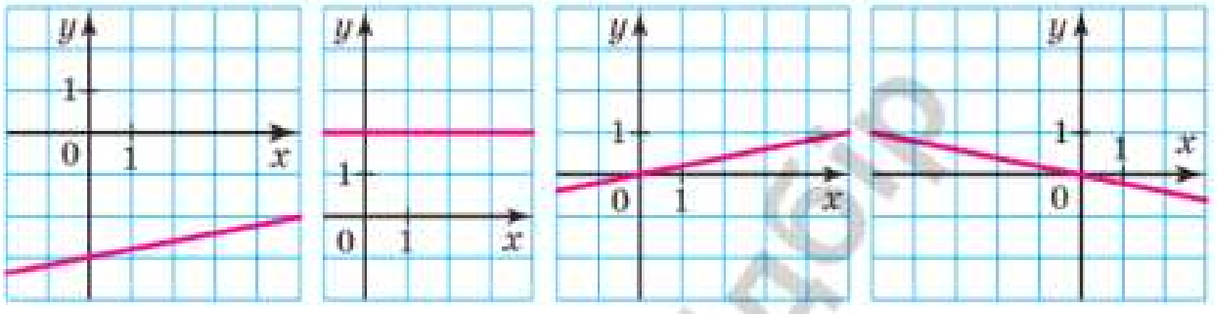


Рис. 47

11. Графік якої функції зображено на рисунку 48?

А) $y = 3x$;
Б) $y = -x + 3$;
В) $y = x + 3$;
Г) $y = \frac{1}{3}x$.

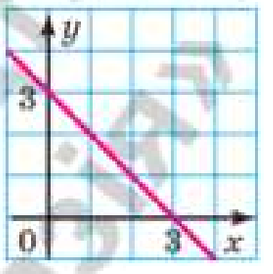


Рис. 48

12. При якому значенні m графік функції $y = mx + 2m - 5$ перетинає вісь x у точці з абсцисою -1?

А) 5; Б) -5; В) -3; Г) 3.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Функція

Функцією називають правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної.

Область визначення функції

Усі значення, яких набуває аргумент, утворюють область визначення функції.

Конкурсний відділ Видавництво «Гімназія»

Область значень функції

Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють область значень функції.

Способи задання функції

За допомогою опису; за допомогою формули; табличний; графічний.

Графік функції

Графіком функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Лінійна функція

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна, називають лінійною.

Графік лінійної функції

Графіком лінійної функції є пряма.

Пряма пропорційність

Лінійну функцію, яку задають формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, називають прямою пропорційністю.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

§3 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

У цьому параграфі ви ознайомитеся з рівняннями з двома змінними та їхніми системами. Вивчите деякі методи їх розв'язування. Дізнаєтеся, що рівняння з двома змінними може слугувати математичною моделлю реальної ситуації. Оволодієте новим ефективним методом розв'язування текстових задач.

24. Рівняння з двома змінними

Розглянемо приклад реальної ситуації.

Приклад 1. Відстань між Києвом і Харковом дорівнює 450 км. З Києва до Харкова зі швидкістю x км/год виїхав автомобіль. Через 1 год назустріч йому з Харкова зі швидкістю y км/год виїхав другий автомобіль. Вони зустрілися через 2 год після виїзду другого автомобіля.

Побудуємо математичну модель цієї ситуації.

Шлях, пройдений другим автомобілем до зустрічі, дорівнює $2y$ км. Оскільки перший автомобіль перебував у дорозі на 1 год більше, ніж другий, тобто 3 год, то до зустрічі він проїхав $3x$ км. Разом автомобілі проїхали 450 км.

Звідси $3x + 2y = 450$.

Ця рівність із двома змінними є математичною моделлю описаної вище реальної ситуації. ◀

Розглянемо ще кілька прикладів ситуацій, математичними моделями яких є рівності з двома змінними.

Приклад 2. Площа квадрата, сторона якого — 10 см, дорівнює сумі площ двох інших квадратів.

Площа квадрата зі стороною 10 см дорівнює 100 см^2. Якщо довжини сторін двох інших квадратів позначити x см і y см, то отримаємо рівність

$$x^2 + y^2 = 100. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. Дано прямокутний трикутник.

Якщо градусні міри його гострих кутів позначити x і y, то можна записати:

$$x + y = 90. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. Дано прямокутник, площа якого дорівнює 12 см^2. Позначимо довжини його сторін x см і y см. Тоді

$$xy = 12. \blacktriangleleft$$

Приклад 5. Купили 5 ручок і 7 зошитів. За всю покупку заплатили 190 грн.

Якщо одна ручка коштує x грн, а один зошит — y грн, то можна записати:

$$5x + 7y = 190. \blacktriangleleft$$

Як бачимо, кожна з отриманих у прикладах 1–5 рівностей

$$3x + 2y = 450,$$
$$x^2 + y^2 = 100,$$
$$x + y = 90,$$
$$xy = 12,$$
$$5x + 7y = 190$$

містить по дві змінні x і y. Такі рівності називають **рівняннями з двома змінними.**

Якщо, наприклад, у рівняння $xy = 12$ замість x і y підставити числа 2 і 6, то отримаємо правильну рівність $2 \cdot 6 = 12$. У такому разі говорять, що пара значень змінних $x = 2$, $y = 6$ **задовольняє** дане рівняння або що ця пара є **розв'язком** даного рівняння.

Конкурсний відбір Видавництво «Мимізіяя»

Означення. Пару значень змінних, яка перетворює рівняння в правильну рівність, називають розв'язком рівняння з двома змінними.

Так, для рівняння $x^2+y^2=100$ кожна з пар чисел

$$x=8,\ y=6;$$
$$x=-6,\ y=8;$$
$$x=10,\ y=0$$

є його розв'язком, а, наприклад, пара $x=5,\ y=9$ його розв'язком не є.

Звернемо увагу на те, що дане означення схоже на означення кореня рівняння з однією змінною. Через це виникає поширена помилка: кожне число пари або саму пару, що є розв'язком, називати коренем рівняння з двома змінними.

Той факт, що пара $x=a,\ y=b$ є розв'язком рівняння, прийнято записувати так: $(a;b)$ є розв'язком рівняння. У дужках на першому місці[1] пишуть значення змінної x, а на другому — значення змінної y.

Використовуючи таке позначення, можна, наприклад, записати, що кожна з пар чисел (5; 85), (40; 50), (50; 40) є розв'язком рівняння $x+y=90$.

Три вказані пари чисел не вичерпують усі розв'язки цього рівняння. Якщо замість змінної y підставляти в рівняння $x+y=90$ будь-які її значення, то матимемо лінійні рівняння з однією змінною, коренями яких є відповідні значення змінної x. Зрозуміло, що таким чином можна отримати безліч пар чисел, які є розв'язками рівняння $x+y=90$.

[1] Якщо змінні в рівнянні позначено буквами, відмінними від x і y, то, записуючи розв'язок у вигляді пари, потрібно домовитися, значення якої змінної треба ставити на перше місце в парі, а якої — на друге. Зазвичай беруть до уваги порядок букв латинського алфавіту.

Рівняння з двома змінними не обов'язково має безліч розв'язків. Наприклад, рівняння $|x|+|y|=0$ має тільки один розв'язок — пару чисел $(0;0)$. Справді, оскільки $|x|\geqslant 0$ і $|y|\geqslant 0$, то при $x \neq 0$ або $y \neq 0$ ліва частина рівняння набуває тільки додатних значень. Рівняння $x^2+y^2=-2$ взагалі не має розв'язків.

Зауважимо, що ми розв'язали рівняння $|x|+|y|=0$ і $x^2+y^2=-2$, але не розв'язали рівняння $x+y=90$.

Означення. Розв'язати рівняння з двома змінними — це означає знайти всі його розв'язки або показати, що воно не має розв'язків.

Властивості рівнянь із двома змінними запам'ятати легко: вони аналогічні властивостям рівнянь з однією змінною, які ви вивчали в курсі математики 6 класу.

- Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.
- Якщо будь-який доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.
- Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме, відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.

Розглянемо рівняння $x^2+y^2+2=2x-2y$. Перетворимо його, використовуючи властивості рівнянь. Маємо:

$$x^2-2x+y^2+2y+2=0.$$

Далі запишемо: $x^2-2x+1+y^2+2y+1=0;$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=0.$$

Оскільки $(x-1)^2\geqslant 0$ і $(y+1)^2\geqslant 0$, то ліва частина рівняння перетворюється в нуль тільки при *одночасному*

виконанні умов: $x-1=0$ і $y+1=0$. Звідси випливає, що пара чисел $(1;-1)$ — єдиний розв'язок даного рівняння.

Вивчаючи якийсь об'єкт, ми прагнемо не тільки описати його властивості, а й скласти про нього наочне уявлення. Графік функції — характерний тому приклад. Оскільки розв'язком рівняння з двома змінними є пара чисел, наприклад $(a;b)$, то цілком природно зобразити цей розв'язок у вигляді точки $M(a;b)$ на координатній площині. Якщо зобразити всі розв'язки рівняння, то матимемо **графік рівняння**.

Означення. Графіком рівняння з двома змінними називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких (пари чисел) є розв'язками даного рівняння.

Наприклад, розглянуте вище рівняння $x^2+y^2+2=2x-2y$ має єдиний розв'язок $(1;\ -1)$. Тому його графіком є єдина точка $M(1;-1)$ (рис. 49).

На рисунку 50 зображено графік функції $y=2x-1$. Оскільки формула, яка задає лінійну функцію, є рівнянням із двома змінними, то також можна сказати, що на рисунку 50 зображено графік рівняння $y=2x-1$.

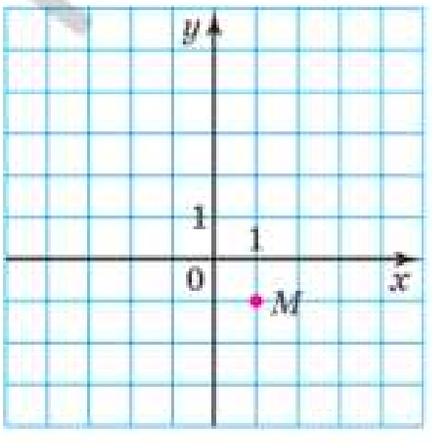


Рис. 49

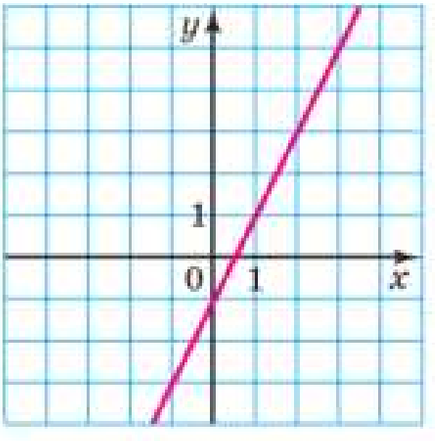


Рис. 50

Наголосимо, що *коли якась фігура є графіком рівняння, то виконуються дві умови*:

1) *усі розв'язки рівняння є координатами точок, які належать графіку*;
2) *координати будь-якої точки, що належить графіку, — це пара чисел, яка є розв'язком даного рівняння.*

Графіки рівнянь є дуже різноманітними. З багатьма з них ви ознайомитеся в курсі математики пізніше. Наприклад, із курсу математики 8 класу ви дізнаєтеся, що графіком розглянутого на початку пункту рівняння $xy = 12$ є фігура, зображена на рисунку 51. Її називають **гіперболою**. А в курсі математики 9 класу ви зможете довести, що графіком рівняння $x^2 + y^2 = 4$ є коло (рис. 52).

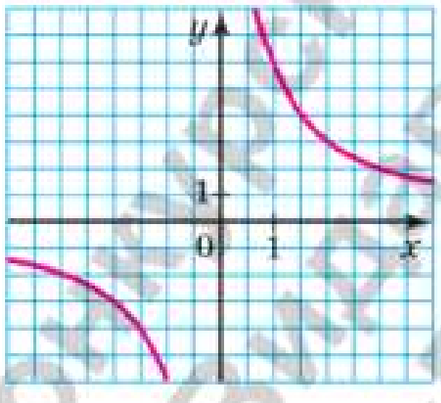


Рис. 51

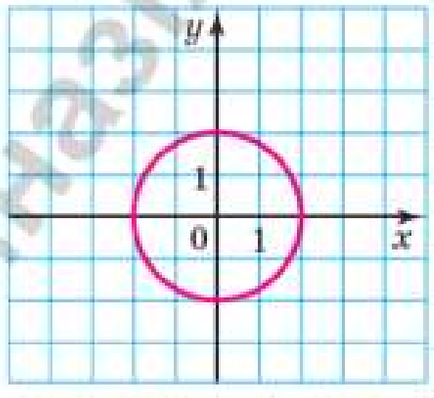


Рис. 52

Приклад 6. Побудуйте графік рівняння $xy + 3y = 0$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $y(x + 3) = 0$.

Звідси $y = 0$ або $x + 3 = 0$.

Отже, розв'язками даного рівняння є всі пари чисел виду $(x; 0)$, де x — довільне число, і всі пари чисел виду $(-3; y)$, де y — довільне число.

Усі точки, координати яких мають вигляд $(x; 0)$, де x — довільне число, утворюють вісь абсцис.

Комунальний заклад «Вінницький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Грінченка»

Усі точки, координати яких мають вигляд $(-3; y)$, де y — довільне число, утворюють пряму, яка проходить через точку $(-3; 0)$ паралельно осі ординат.

Отже, графіком даного рівняння є пара прямих, зображених на рисунку 53. ◀

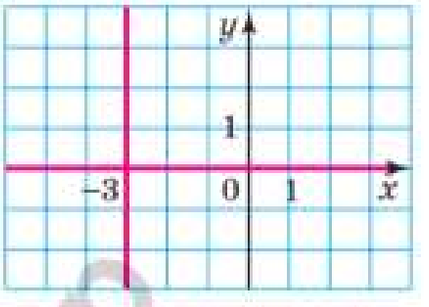


Рис. 53

?

1. Що називають розв'язком рівняння з двома змінними?
2. Що означає розв'язати рівняння з двома змінними?
3. Сформулюйте властивості рівнянь із двома змінними.
4. Що називають графіком рівняння з двома змінними?

ВПРАВИ

891.° Які з даних рівнянь є рівняннями з двома змінними:

1) $2x + y = 8$;
2) $x + y + z = 0$;
3) $a^2 - 3b = 8$;
4) $a^2 - 3b = 8c$;
5) $xy + 1 = 2$;
6) $5m - 3n = 6$;
7) $x^3 - 8x = 100$;
8) $x^3 - 8y = 100$;
9) $x^3 - 8xy = 100$?

892.° Чи є пара чисел $(-2; 3)$ розв'язком рівняння:

1) $4x + 3y = 1$;
2) $x^2 + 5 = y^2$;
3) $xy = 6$?

893.° Які з пар чисел $(0; 1)$; $(5; -4)$; $(0; 1{,}2)$; $(-1; 1)$; $(1; -1)$ є розв'язками рівняння:

1) $x^2 + 5y - 6 = 0$;
2) $xy + x = 0$?

894.° Чи належить графіку рівняння $2x^2 - y + 1 = 0$ точка:

1) $A\ (-3; -17)$;
2) $B\ (2; 9)$;
3) $C\ (-2; 9)$;
4) $D\ (-1; 4)$?

895.° Доведіть, що графік рівняння $xy - 12 = 0$ не проходить через точку:

1) $A\ (3; -4)$;
2) $B\ (-2; 6)$;
3) $C\ (7; 2)$.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Ранок»

896.° Чи проходить через початок координат графік рівняння:

1) $12x + 17y = 0$; 3) $x^3 - 4y = y^2 + 3x$?

2) $x^2 - xy + 2 = 0$;

897.° Укажіть які-небудь три розв'язки рівняння:

1) $x - y = 10$; 2) $x = 4y$; 3) $2x^2 + y = 20$.

898.° Укажіть які-небудь три розв'язки рівняння:

1) $x + y = 1$; 2) $5x - y = 2$.

899.• Графік рівняння $4x + 3y = 30$ проходить через точку A $(6; b)$. Чому дорівнює значення b?

900.• Графік рівняння $7x - 5y = 47$ проходить через точку B $(a; -1)$. Чому дорівнює значення a?

901.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

1) $x + y = 2$; 3) $x^2 + y^2 = 9$;

2) $x^3 - y = 1$; 4) $|x| - y = 5$.

902.• Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

1) $2x - 3y = 6$; 2) $x^2 + y = 4$; 3) $|x| + |y| = 7$.

903.• Складіть яке-небудь рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел:

1) $x = 1$, $y = 2$; 2) $x = -3$, $y = 5$; 3) $x = 10$, $y = 0$.

904.• Складіть яке-небудь рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точку:

1) A $(-2; 2)$; 2) B $(4; -1)$; 3) C $(0; 0)$.

905.• Придумайте три рівняння, графіки яких проходять через точку M $(6; -3)$.

906.• Придумайте три рівняння, графіки яких проходять через точку K $(0; 4)$.

907.• Чи належать графіку рівняння $x^4 - y = -2$ точки, що мають від'ємну ординату?

908.• Чи проходить графік рівняння $x + y^2 = -4$ через точки, що мають додатну абсцису?

909.* Чи має розв'язки рівняння:

1) $y^2 = x^2$;
2) $y^2 = -x^2$;
3) $xy = 0$;
4) $x^2 + y^2 = 25$;
5) $x^2 + y^2 = -25$;
6) $x^2 - y^2 = -9$;
7) $|x| + |y| = 1$;
8) $|x| + |y| = 0$;
9) $|x| + |y| = -1$?

У разі ствердної відповіді вкажіть які-небудь розв'язки.

910.* Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + y^2 = 0$;
2) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 0$;
3) $x^4 + y^6 = -4$.

911.* Скільки розв'язків має рівняння:

1) $x^2 + (y-2)^2 = 0$;
2) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 0$;
3) $9x^2 + 16y^2 = 0$;
4) $(x^2 + y^2)y = 0$;
5) $xy = 2$;
6) $|x+1| + |y| = 0$;
7) $x^2 + |y| = -100$;
8) $x + y = 2$?

912.* Наведіть приклад рівняння зі змінними x і y:

1) яке має один розв'язок;
2) яке не має розв'язків;
3) яке має безліч розв'язків;
4) розв'язком якого є будь-яка пара чисел.

913.** Що являє собою графік рівняння:

1) $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 0$;
2) $|x+9| + |y-8| = 0$;
3) $4x + y = y + 4x$;
4) $(x-1)(y+5) = 0$?

914.** Побудуйте графік рівняння:

1) $(x+2)^2 + y^2 = 0$;
2) $|x| + (y-3)^2 = 0$;
3) $xy = 0$;
4) $(x+1)(y-1) = 0$;
5) $xy - 2y = 0$.

915.** Побудуйте графік рівняння:

1) $|x-4| + |y-4| = 0$;
2) $(x-4)(y-4) = 0$;
3) $xy + x = 0$.

Електронний відділ видавництва «Гімназія»

916.** Знайдіть усі пари $(x; y)$ натуральних чисел, які є розв'язками рівняння:

1) $2x + 3y = 5$; 2) $x + 5y = 16$.

917.** Знайдіть усі пари $(x; y)$ цілих чисел, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 5$.

918.** Катерині треба заплатити за математичний довідник 29 грн. У неї є монети тільки по 2 грн і по 5 грн. Скількома способами вона може розрахуватися за покупку без здачі?

919.** Учням і ученицям 7 класу на конкурсі з математики було запропоновано задачі з алгебри та з геометрії. За кожну правильно розв'язану задачу з алгебри нараховували 2 бали, а за задачу з геометрії — 3 бали. Максимальна кількість набраних балів могла скласти 24. Скільки було запропоновано задач окремо з алгебри та з геометрії, якщо з кожного із цих предметів була хоча б одна задача? Знайдіть усі можливі відповіді.

920.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + y^2 + 4 = 4y$; 3) $x^2 + y^2 + x + y + 0{,}5 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$; 4) $9x^2 + y^2 + 2 = 6x$.

921.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 10y + 30 = 10x - y^2 - 20$;

2) $4x^2 + y^2 + 4x = 2y - 3$.

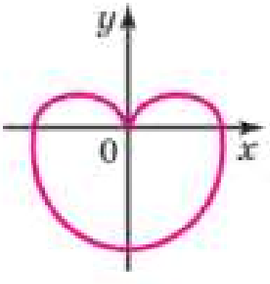


Рис. 54

922.** Графіком рівняння $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ є крива, яку називають *кардіоїдою* (рис. 54). Знайдіть координати точок її перетину з осями координат.

923.** Графіком рівняння $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ є крива, яку називають *еліпсом* (рис. 55). Знайдіть координати точок її перетину з осями координат.

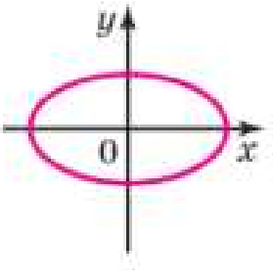


Рис. 55

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

924. У посудину, яка містить 150 мл 8 %-го розчину кислоти, додали 90 мл води. Чому дорівнює концентрація кислоти в одержаному розчині?

925. Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{4x+1}{5}-\frac{2x-3}{3}=x-4$; 2) $\frac{3x-5}{4}+\frac{5x-2}{3}=x+9$.

926. З міста A до міста B одночасно виїхали легковий і вантажний автомобілі. Через 3,5 год після виїзду легковий автомобіль прибув у місто B, а вантажному залишилося ще проїхати 77 км. Знайдіть відстань між містами, якщо швидкість вантажного автомобіля в 1,4 раза менша від швидкості легкового.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

927. Порівняйте значення виразів $(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 999\cdot 1000)^2$ і 1000^{1000}.

25. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік

Означення. **Лінійним рівнянням із двома змінними називають рівняння виду $ax+by=c$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа.**

Рівняння $3x+2y=450$, $x+y=90$, які ми розглядали в попередньому пункті, є лінійними. Ось ще приклади лінійних рівнянь: $x+y=3$; $0x+5y=-1$; $-3x+0y=5$; $0x+0y=0$; $0x+0y=2$.

З'ясуємо, яка фігура є графіком лінійного рівняння. Для цього розглянемо три випадки.

Випадок 1. Нехай задано лінійне рівняння $ax+by=c$, у якому $b\neq 0$. Це рівняння можна перетворити так:

$$by=-ax+c.$$

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

Оскільки $b \neq 0$, то, поділивши обидві частини останнього рівняння на b, отримаємо

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Введемо позначення: $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$. Тепер можна записати:

$$y = kx + p.$$

Ми отримали формулу, яка задає лінійну функцію. Графіком лінійної функції є невертикальна пряма. Отже, графіком рівняння $ax + by = c$, де $b \neq 0$, є невертикальна пряма.

Приклад 1. Побудуйте графік рівняння $x - 3y = -2$.

Розв'язання. Ми вже знаємо, що графіком цього рівняння є пряма. Тому для побудови достатньо визначити координати двох будь-яких її точок.

Маємо: якщо $x = 1$, то $y = 1$; якщо $x = -2$, то $y = 0$. Тепер через точки $M(1; 1)$ і $N(-2; 0)$ проведемо пряму (рис. 56). Ця пряма є шуканим графіком. ◀

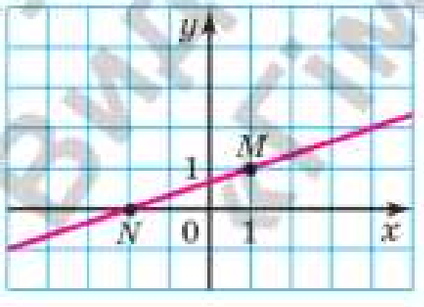


Рис. 56

Випадок 2. Нехай задано лінійне рівняння $ax + by = c$, де $a \neq 0$, $b = 0$. Отримуємо $ax + 0y = c$. Побудову графіка рівняння такого виду розглянемо в прикладі 2.

Приклад 2. Побудуйте графік рівняння $3x + 0y = 6$.

Розв'язання. Легко знайти кілька розв'язків цього рівняння. Ось, наприклад, чотири його розв'язки:

Конкурсний вибір Відділення освіти

$(2;\ -1)$; $(2;\ 0)$; $\left(2;\frac{1}{3}\right)$; $(2;\ -100)$. Зрозуміло, що будь-яка пара виду $(2;t)$, де t — довільне число, і тільки вона є розв'язком рівняння $3x+0y=6$. Отже, шуканий графік містить усі точки, абсциса кожної з яких дорівнює 2, а ордината — будь-яке число. Усі ці точки належать прямій, яка перпендикулярна до осі абсцис і проходить через точку $(2;0)$ (рис. 57). При цьому координати будь-якої точки цієї прямої — пара чисел, що є розв'язком даного рівняння. Отже, зазначена вертикальна пряма є шуканим графіком. ◀

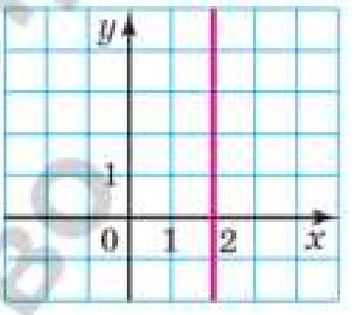


Рис. 57

Міркуючи аналогічно, можна показати, що графіком рівняння $ax+0y=c$, де $a\neq 0$, є вертикальна пряма.

Тепер можна зробити такий висновок: ***у кожному з двох випадків:*** **1)** $b\neq 0$; **2)** $b=0$ ***і*** $a\neq 0$ — ***графіком рівняння*** $ax+by=c$ ***є пряма.***

Часто, наприклад, замість речення «дано рівняння $y=2x$» говорять: «дано пряму $y=2x$».

Випадок 3. Нехай задано лінійне рівняння $ax+by=c$, у якому $a=b=0$. Маємо: $0x+0y=c$.

Якщо $c\neq 0$, то це рівняння не має розв'язків, а отже, на координатній площині не існує точок, які могли б слугувати графіком рівняння.

Якщо $c=0$, то рівняння набуває вигляду

$$0x+0y=0.$$

Будь-яка пара чисел є його розв'язком. Отже, у цьому випадку графіком рівняння є вся координатна площина.

У таблиці підсумовано матеріал, розглянутий у цьому пункті.

Рівняння	Значення a, b, c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c — будь-які	Невертикальна пряма
$ax + by = c$	$b = 0$, $a \neq 0$, c — будь-яке	Вертикальна пряма
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	Уся координатна площина
$ax + by = c$	$a = b = 0$, $c \neq 0$	—

Приклад 3. Виразіть із рівняння $3x - 2y = 6$ змінну x через змінну y та знайдіть будь-які два розв'язки цього рівняння.

Розв'язання. Маємо: $3x = 2y + 6$;

$$x = \frac{2y+6}{3};$$

$$x = \frac{2}{3}y + 2.$$

Надаючи змінній y довільних значень та обчислюючи за отриманою формулою $x = \frac{2}{3}y + 2$ відповідні значення змінної x, можемо знайти безліч розв'язків даного рівняння $3x - 2y = 6$.

Наприклад,

якщо $y = 6$, то $x = \frac{2}{3} \cdot 6 + 2 = 6$;

якщо $y = -2$, то $x = \frac{2}{3} \cdot (-2) + 2 = \frac{2}{3}$.

Пари чисел (6; 6) і $\left(\frac{2}{3}; -2\right)$ є розв'язками даного рівняння. ◀

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

Приклад 4. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графіком якого є пряма, що проходить через початок координат і точку A (3; −12). **Побудуйте графік цього рівняння.**

Розв'язання. Оскільки графік шуканого рівняння проходить через точки O (0; 0) та A (3; −12), що мають різні абсциси, то він є невертикальною прямою. Тоді рівняння цієї прямої можна записати у вигляді $y = kx + b$, де k і b — деякі числа.

З того, що графік проходить через початок координат, випливає, що $b = 0$.

Оскільки графік проходить через точку A (3; −12), то $-12 = k \cdot 3$, звідки $k = -4$.

Отже, шукане рівняння має вигляд $y = -4x$ або $4x + y = 0$. Графік цього рівняння зображено на рисунку 58.

Відповідь: $4x + y = 0$. ◀

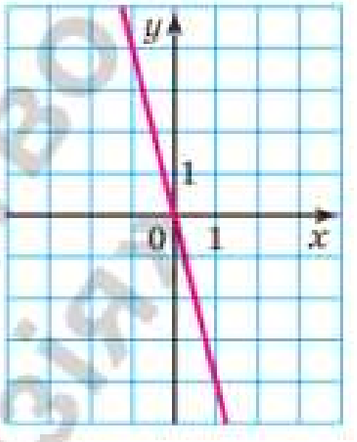


Рис. 58

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянням із двома змінними? **2.** Що є графіком рівняння $ax + by = c$, коли $b \neq 0$ або коли $b = 0$ і $a \neq 0$? **3.** Що є графіком рівняння $ax + by = c$ при $a = b = c = 0$? **4.** При яких значеннях a, b і c рівняння $ax + by = c$ не має розв'язків?

ВПРАВИ

928.° Чи є лінійним рівняння з двома змінними:

1) $7x + 11y = 36$;
2) $x^2 + 4y = 6$;
3) $12x - 17y = 0$;
4) $-3x + xy = 10$?

929.° Чи є лінійним рівняння з двома змінними:

1) $8x - 0{,}9y = \frac{1}{6}$;
2) $x - 4y^2 = 5$;
3) $6x + 2xy = 9$;
4) $3x + 4y = 0$?

Конкурсний відбір
Київавтошляхбуд
Київ, вул. Назаріївська

930.° Які з пар чисел (7; 1), (0; −2), (8; 2), (−7; −5), (10; 3) є розв'язками рівняння $3x - 7y = 14$?

931.° Розв'язком якого з рівнянь є пара чисел (3; −2):
1) $4x + 5y = 2$; 2) $3x - 2y = 5$; 3) $0{,}2x - 0{,}5y = 1{,}6$?

932.° Чи є розв'язком рівняння $2x - 9y = 13$ пара чисел:
1) (2,5; 2); 2) (10,5; 2); 3) $\left(5; -\frac{1}{3}\right)$; 4) (−7; −3)?

933.° Відомо, що пара чисел $(-5; y)$ є розв'язком рівняння $2x + 9y = 17$. Знайдіть значення y.

934.° Відомо, що пара чисел $(8; y)$ є розв'язком рівняння $2x - 3y = 4$. Знайдіть значення y.

935.° Відомо, що пара чисел $\left(x; \frac{2}{3}\right)$ є розв'язком рівняння $\frac{1}{7}x + 6y = 1$. Знайдіть значення x.

936.° Відомо, що пара чисел $(x; 6)$ є розв'язком рівняння $8x - 3y = 22$. Знайдіть значення x.

937.° Графіку якого з рівнянь належить точка M (1; 4):
1) $4y - 2x = -4$; 2) $6x + 11y = 50$?

938.° Чи проходить графік рівняння $3x + y = -1$ через точку:
1) M (−3; 10); 2) N (4; −13); 3) K (0; −1)?

939.° Виразіть із даного рівняння змінну x через змінну y і знайдіть які-небудь три розв'язки цього рівняння:
1) $x + y = 12$; 3) $x + 6y = 10$; 5) $-6x + 5y = 18$;
2) $x - 7y = 5$; 4) $2x + 8y = 16$; 6) $3x - 7y = 1$.

940.° Виразіть із даного рівняння змінну y через змінну x і знайдіть які-небудь два розв'язки цього рівняння:
1) $4x - y = 7$; 2) $-2x + y = 11$; 3) $5x - 3y = 15$.

941.° Знайдіть які-небудь три розв'язки рівняння:
1) $x - y = 10$; 2) $2y - 5x = 11$.

Електронний архів видавництва «Ранок»

942.° Знайдіть які-небудь три розв'язки рівняння:

1) $6x + y = 7$; 2) $2x - 3y = -4$.

943.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x - y = 4$; 3) $3x + 2y = 6$;

2) $x - 5y = 5$; 4) $7x - 3y = 21$.

944.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x + y = -3$; 2) $6x + y = 0$; 3) $2x - 3y = 9$.

945.° Які пари чисел є розв'язками рівняння:

1) $0x + 4y = 20$; 2) $-3x + 0y = 27$?

946.° Побудуйте графік рівняння:

1) $4y = -8$; 2) $1{,}2x = 3{,}6$.

947.° Побудуйте графік рівняння:

1) $-0{,}2x = 1$; 2) $0{,}5y = 2$.

948.• У якій точці пряма $7y - 3x = 21$ перетинає:

1) вісь x; 2) вісь y?

949.• Знайдіть координати точок перетину прямої $0{,}3x + 0{,}2y = 6$ з осями координат.

950.• Складіть яке-небудь лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $(-2; 1)$.

951.• Складіть яке-небудь лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $(3; 5)$.

952.• Знайдіть розв'язок рівняння $7x + 8y = 30$, який складається з двох рівних чисел.

953.• Знайдіть розв'язок рівняння $-12x + 17y = -87$, який складається з двох протилежних чисел.

954.• При якому значенні a пара чисел $(a; 2a)$ є розв'язком рівняння $2x + 7y = 16$?

955.• При якому значенні a пара чисел $(-4; 2)$ є розв'язком рівняння:

1) $3x + 5y = a$; 2) $ax + 5y = 18$?

956.• При якому значенні a графік рівняння $11x - 13y = a + 4$ проходить через початок координат?

Електронний варіант видавництва «Ранок»

957.* При якому значенні a через точку A (5; −3) проходить графік рівняння:

1) $4x - 9y = a$; 2) $6x - ay = 15$?

958.* При якому значенні a графік рівняння $ax + 4y = 0$ проходить через точку:

1) A (12; −4); 2) B (0; 2); 3) O (0; 0)?

959.* При якому значенні b графік рівняння $5x + by = 0$ проходить через точку:

1) M (−4; −10); 2) N (0; 1); 3) K (−2; 0)?

960.* Графіком яких із даних рівнянь є та сама пряма, що й графік рівняння $2x - 5y = 3$:

1) $4x - 10y = 6$;
2) $4x - 10y = 3$;
3) $2x - 5y = 6$;
4) $5y - 2x = -3$;
5) $x - 2{,}5y = 1{,}5$;
6) $-0{,}4x - y = 0{,}6$?

961.* Складіть рівняння з двома змінними за такою умовою:

1) довжина прямокутника дорівнює x м, ширина — y м, периметр — 18 м;
2) автобус їхав 4 год зі швидкістю x км/год і 3 год зі швидкістю y км/год, проїхавши всього 250 км;
3) зошит коштує x грн, а ручка — y грн, 2 ручки дорожчі за 5 зошитів на 18 грн;
4) кусок сплаву масою x кг, який містив 12 % міді, та кусок сплаву масою y кг, який містив 20 % міді, сплавили разом і отримали новий сплав, що містить 9 кг міді;
5) в одному ящику було x кг цукерок, а в другому — y кг; після того як із першого ящика переклали в другий 8 кг цукерок, в обох ящиках цукерок стало порівну.

962.* Складіть рівняння з двома змінними за такою умовою:

1) бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює a см, основа — b см, периметр — 32 см;

Комунальний заклад «Вибірський ліцей»

2) один автомобіль проїхав зі швидкістю x км/год за 6 год на 32 км менше, ніж другий автомобіль зі швидкістю y км/год за 7 год;

3) в одному магазині було x ц яблук, а в другому — y ц; за день у першому магазині продали 14 % яблук, а в другому — 18 % яблук, причому в другому магазині продали на 1,2 ц яблук менше, ніж у першому.

963.* Доведіть, що прямі $5y - x = 6$ і $3x - 7y = 6$ перетинаються в точці A (9; 3).

964.* Доведіть, що прямі $4x - 3y = 12$ і $3x + 4y = -66$ перетинаються в точці B (−6; −12).

965.* Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графіком якого є пряма, що проходить через початок координат і точку:

1) A (2; 8); 2) B (−6; 15).

966.* Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графіком якого є пряма, що проходить через початок координат і точку C (8; −12).

967.* Доведіть, що не існує такого значення a, при якому пряма $ax - 3y = 12$ проходить через початок координат.

968.* При яких значеннях a і b пряма $ax + by = 24$ перетинає осі координат у точках A (−6; 0) і B (0; 12)?

969.* На якому з рисунків 59, *а*–*г* зображено графік рівняння $x + y = 3$?

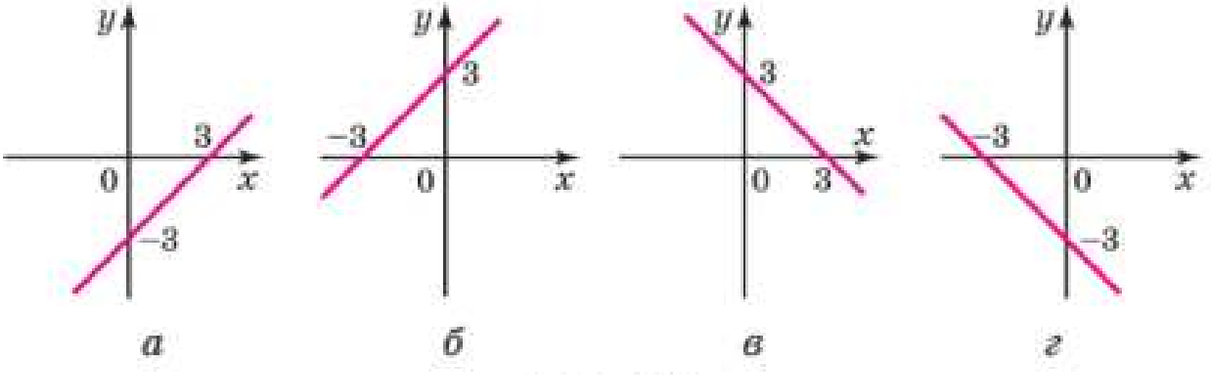
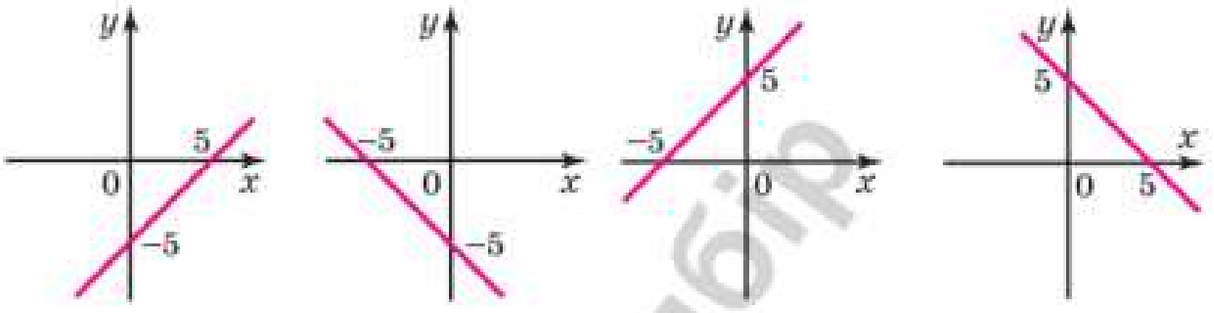


Рис. 59

970.* На якому з рисунків 60, *а*–*г* зображено графік рівняння $x - y = -5$?



а *б* *в* *г*

Рис. 60

971.* Яка з прямих, зображених на рисунку 61, є графіком рівняння:

1) $0x + y = -3$;
2) $2x - y = 1$;
3) $3x + 0y = 6$;
4) $x + 2y = 0$?

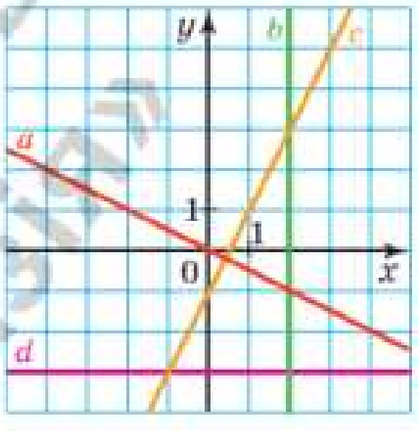


Рис. 61

972.** При якому значенні a точка перетину прямих $2x - 3y = -6$ і $4x + y = a$ належить осі абсцис?

973.** При якому значенні b точка перетину прямих $9x + 7y = 35$ і $x + by = -20$ належить осі ординат?

974.** Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графік якого перетинає осі координат у точках:

1) $A\ (-4;\ 0)$ і $B\ (0;\ 2)$;
2) $C\ (0;\ -3)$ і $D\ (5;\ 0)$.

975.** Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точки $M\ (6;\ 0)$ і $K\ (0;\ 6)$.

976.** Складіть рівняння, графіки яких зображено на рисунку 62.

977.** Складіть рівняння, графіки яких зображено на рисунку 63.

Репозиторій відділу видавництва «Ранок»

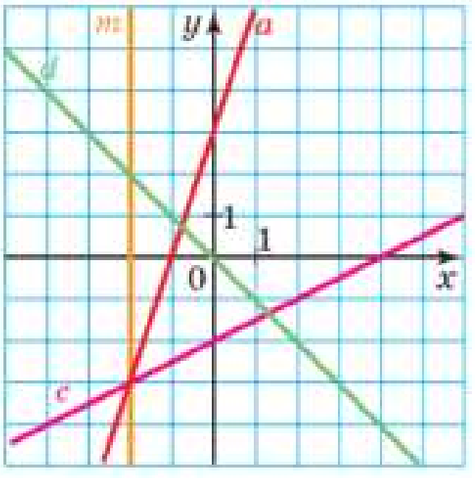


Рис. 62

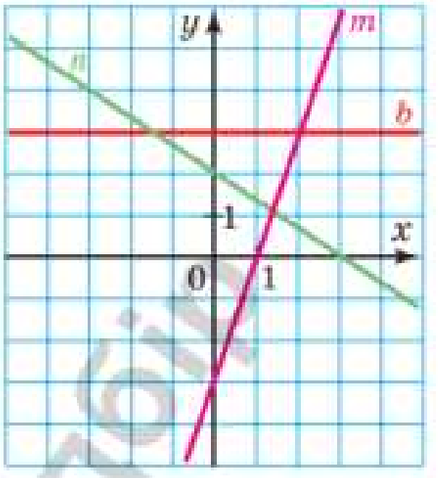


Рис. 63

978.* Скільки існує пар простих чисел $(x; y)$, які є розв'язками рівняння $5x - 6y = 3$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

979. Дві бригади виготовили 840 деталей, причому одна бригада виготовила на 80 % більше деталей, ніж друга. Скільки деталей виготовила кожна бригада?

980. Відомо, що 4 однакових екскаватори можуть вирити котлован за 12 год. За який час 6 таких самих екскаваторів виріють 3 таких котловани?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

981. Яка з пар чисел (3; 3), (−3; 3), (−3; −3) є розв'язком кожного з рівнянь $x^2 + y^2 = 18$ і $x + y = 0$?

982. На рисунку 64 зображено графіки рівнянь $y = x^2$ і $x - y + 2 = 0$. Користуючись цим рисунком, знайдіть усі пари чисел, які є розв'язками кожного з даних рівнянь.

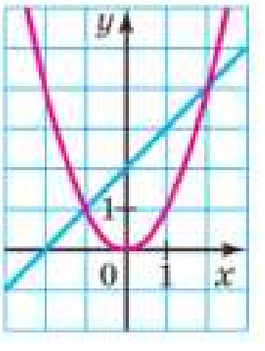


Рис. 64

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

983. Сума 100 різних натуральних чисел дорівнює 5051. Знайдіть ці числа.

Як будували міст між геометрією та алгеброю

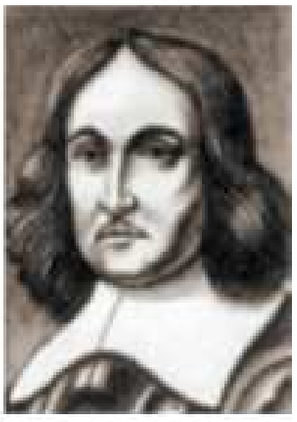
Ідея координат зародилася дуже давно. Адже ще в давнину люди вивчали Землю, спостерігали зорі, а за результатами своїх досліджень складали карти, схеми.

У II ст. до н. е. давньогрецький учений Гіппарх уперше використав ідею координат для визначення місця розташування об'єктів на поверхні Землі.

Лише в XIV ст. французький учений Ніколя Орем (бл. 1323–1392) уперше застосував у математиці ідею Гіппарха: розбив площину на клітинки (подібно до того, як на клітинки поділено аркуш вашого зошита) і став задавати положення точок широтою та довготою.

Однак величезні можливості застосування цієї ідеї розкрили лише в XVII ст. видатні французькі математики П'єр Ферма і Рене Декарт. У своїх працях ці вчені показали, як завдяки системі координат можна переходити від точок до чисел, від ліній — до рівнянь, від геометрії — до алгебри.

Незважаючи на те що П. Ферма опублікував свою працю на рік раніше, ніж Р. Декарт, ту систему координат, якою дотепер ми користуємось, називають **декартовою**. Це пов'язано з тим, що Р. Декарт у праці «Міркування про метод» винайшов нову зручну буквену



П'єр Ферма
(1601–1665)

Рене Декарт
(1596–1650)

символіку, яку з невеликими змінами ми використовуємо й сьогодні. Слідом за ним ми позначаємо змінні останніми буквами латинського алфавіту x, y, z, а коефіцієнти — першими: a, b, c, ... Звичні нам позначення степенів x^2, x^3, y^5 і т. д. також увів Р. Декарт.

Математика — це і жіноча справа

Після ознайомлення з оповіданнями з історії розвитку математики, зокрема з оповіданням «Як будували міст між геометрією та алгеброю», у вас може скластися враження, що математика — це суто чоловіча справа. На жаль, протягом століть це так і було. Проте жінки, особливо із середини XIX ст., вели боротьбу за можливість вивчати науки, зокрема математику. І на сьогодні жінки-математики посідають чільне місце поміж провідних науковців світу. Серед них чимало і наших співвітчизниць. Зокрема, усьому світу відомі імена українських науковиць Ніни Опанасівни Вірченко, з якою ви могли познайомитися, розв'язуючи вправу 271, та Марини Сергіївни В'язовської, нагородженої медаллю Філдса — найпрестижнішою відзнакою в галузі математики.

М. С. В'язовська
(нар. 1984)

Заохоченню дівчат до занять математикою, демонстрації своїх здібностей у цій сфері, створенню сприятливого середовища, де вони зможуть отримати впевненість і визнання своїх математичних талантів, сприяє Європейська математична олімпіада серед дівчат (*англ.* European Girls' **Mathematical Olympiad; скорочено — EGMO**) — щорічний міжна-

Емблема EGMO

родний математичний конкурс виключно для жінок віком до 20 років, які не навчаються у вишах. Участь у ньому можуть брати представниці різних континентів. Команда кожної країни складається із чотирьох учасниць, які змагаються в індивідуальному заліку.

Уперше олімпіаду було проведено 2012 р. у м. Кембриджі (Велика Британія). Відтоді вона набула неабиякої популярності. У 2019 р. олімпіада проходила в Україні: із 7 по 13 квітня у Києві змагалися 196 учасниць із 50 країн.

Збірна України від самого початку бере участь у цій олімпіаді і досягла значних успіхів: у 2014, 2015, 2017, 2019 і 2023 роках наша команда очолювала офіційний (європейський) залік. Протягом 2012–2023 років наші дівчата вибороли 15 золотих, 22 срібні та 8 бронзових медалей. Віримо, що й у майбутньому юні українки будуть гідно представляти нашу країну на цьому та інших математичних конкурсах.

Збірна команда України — переможниця EGMO-2023 (*зліва направо*): Євгенія Франкевич (*Львів*), Поліна Геник, Ірина Романюк (*обидві — Київ*), Марина Спектрова (*Харків*)

26. Системи рівнянь із двома змінними. Графічний метод розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

Легко перевірити, що пара чисел $(-2; 0)$ є розв'язком як рівняння $x^2+y^2=4$, так і рівняння $y=x^2-4$. У таких випадках говорять, що пара чисел $(-2; 0)$ — **спільний розв'язок** зазначених рівнянь.

На рисунку 65 зображено графіки рівнянь $-6x + 5y = 9$ і $4x + 3y = 13$. Вони перетинаються в точці $M(1; 3)$. Ця точка належить кожному з графіків. Отже, пара чисел $(1; 3)$ є спільним розв'язком даних рівнянь.

Якщо поставлено завдання знайти сторони прямокутника, площа якого дорівнює 12 см², а периметр — 14 см, то треба знайти спільний розв'язок рівнянь $xy=12$ і $2x+2y=14$, де x см і y см — довжини сусідніх сторін прямокутника.

Якщо треба знайти всі спільні розв'язки кількох рівнянь, то говорять, що треба розв'язати **систему рівнянь**.

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки.

Так, запис $\begin{cases} xy=12, \\ 2x+2y=14 \end{cases}$ є математичною моделлю задачі про знаходження сторін прямокутника, площа якого дорівнює 12 см², а периметр — 14 см.

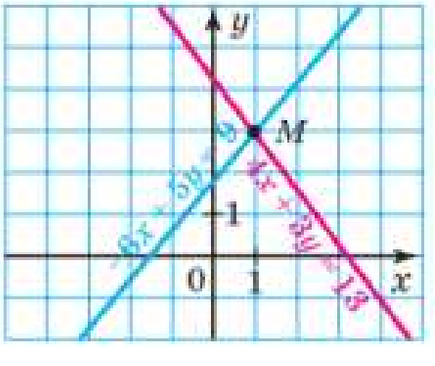


Рис. 65

Система $\begin{cases} -6x+5y=9, \\ 4x+3y=13 \end{cases}$ є математичною моделлю задачі про знаходження координат спільних точок двох прямих (рис. 65).

Обидва рівняння даної системи є лінійними. Тому цю систему називають **системою двох лінійних рівнянь із двома змінними.**

Означення. Розв'язком системи рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює кожне рівняння системи в правильну рівність.

Із прикладу, наведеного на початку пункту, випливає, що пара чисел $(-2; 0)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

Проте це зовсім не означає, що дану систему розв'язано.

Означення. Розв'язати систему рівнянь — це означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Пара чисел $(-2; 0)$ не вичерпує всіх розв'язків останньої системи. Наприклад, пара чисел $(2; 0)$ — також її розв'язок. Цю систему, як і систему, отриману в задачі про прямокутник, ви навчитеся розв'язувати в курсі математики 9 класу.

А от систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -4, \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

ми можемо розв'язати вже зараз. Очевидно, що перше рівняння цієї системи розв'язків не має, а отже, не існує і спільних розв'язків рівнянь, що входять до системи. Звідси можна зробити висновок: дана система розв'язків не має.

Так само можна вважати розв'язаною систему

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13. \end{cases}$$

Комунальний заклад «Вишгородський ліцей»

Справді, графіки рівнянь системи перетинаються в точці M (1; 3) (рис. 65). Її координати є розв'язком кожного рівняння системи, а отже, і самої системи. Інших спільних точок графіки рівнянь не мають, таким чином, не має інших розв'язків і сама система. Висновок: пара чисел (1; 3) — єдиний розв'язок даної системи.

Описаний метод розв'язування системи рівнянь називають **графічним**.

Його суть полягає в такому:

- *побудувати на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять до системи;*
- *знайти координати всіх точок перетину побудованих графіків;*
- *отримані пари чисел і будуть шуканими розв'язками.*

Не будь-яку систему рівнянь доцільно розв'язувати графічно.

Наприклад, якщо пара чисел $\left(\frac{1}{17}; -\frac{36}{85}\right)$ є розв'язком якоїсь системи, то зрозуміло, що графічно встановити цей факт украй складно. А тому графічний метод зазвичай застосовують тоді, коли розв'язок достатньо знайти наближено. Те, що пара чисел (1; 3) є розв'язком системи $\begin{cases} -6x+5y=9, \\ 4x+3y=13, \end{cases}$ підтверджує безпосередня підстановка цієї пари в кожне з рівнянь системи, тобто перевірка.

Графічний метод є ефективним і тоді, коли треба визначити кількість розв'язків системи.

Наприклад, на рисунку 66 зображено графіки деяких функцій

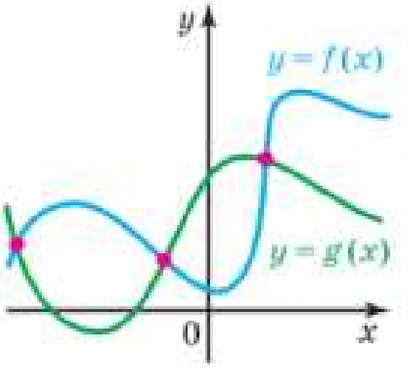


Рис. 66

Конкурсний відбір
Видавництво
«Ранок»

$y = f(x)$ і $y = g(x)$. Ці графіки мають три спільні точки. Це дозволяє нам стверджувати, що система $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x) \end{cases}$ має три розв'язки.

З'ясуємо, скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними.

Якщо одне з рівнянь системи не має розв'язків, то очевидно, що вся система розв'язків не має.

Наприклад, система $\begin{cases} 0x + 0y = 7, \\ 2x - 3y = 15 \end{cases}$ розв'язків не має.

Розглянемо випадок, коли кожне з рівнянь системи має розв'язки.

Якщо графіком одного з рівнянь системи є площина, то очевидно, що система має безліч розв'язків. Справді, площина та проведена на ній пряма мають безліч спільних точок.

Наприклад, система $\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ 2x - 3y = 15 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

Якщо графіками рівнянь, що входять до системи лінійних рівнянь, є прямі, то кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розміщення двох прямих на площині:

1) *якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;*
2) *якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків;*
3) *якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має.*

Приклад, який відповідає випадку, коли система має єдиний розв'язок, ми вже розглянули вище. Це система $\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13. \end{cases}$

Конкурсний відбір Міністерство освіти і науки України

Тепер звернемося до прикладів, що ілюструють випадки 2 і 3.

Так, якщо в системі $\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 1, \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ обидві частини першого рівняння помножити на 2, то розв'язки цього рівняння, а отже, і всієї системи не зміняться.

Маємо:

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$$

Очевидно, що розв'язки цієї системи збігаються з розв'язками рівняння $x - 2y = 2$. Проте це рівняння має безліч розв'язків, отже, і розглядувана система також має безліч розв'язків.

Наведемо приклад системи, яка не має розв'язків:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Справді, помножимо обидві частини першого рівняння системи на 3. Отримаємо:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Зрозуміло, що не існує такої пари значень x і y, при яких вираз $2x + 3y$ одночасно набуває значення і 6, і 7.

На закінчення зазначимо, що саме графічний метод нам підказав, що не існує системи лінійних рівнянь, яка мала б, наприклад, рівно два, або рівно три, або рівно 100 й т. п. розв'язків.

1. У якому випадку говорять, що треба розв'язати систему рівнянь? **2.** Що є розв'язком системи рівнянь із двома змінними? **3.** Що означає розв'язати систему рівнянь?

Конкурсний відбір Видавництво Ранок

4. У чому суть графічного методу розв'язування систем рівнянь із двома змінними? **5.** Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними? **6.** Яким є взаємне розміщення прямих, що є графіками двох лінійних рівнянь із двома змінними, які складають систему рівнянь, якщо: 1) система має єдиний розв'язок; 2) система не має розв'язків; 3) система має безліч розв'язків?

ВПРАВИ

984.° Яка з пар чисел $(-2; 1)$, $(2; -1)$, $(6; 4)$, $(8; -4)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 3x-8y=-14, \\ 4x+y=28? \end{cases}$

985.° Чи є правильним твердження:

1) пара чисел $(0; 0)$ не є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} y-x=5, \\ 3x+2y=4; \end{cases}$

2) пара чисел $(-1; 2)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x+y=1, \\ 3x+2y=-1; \end{cases}$

3) пара чисел $(2; -1)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2y-x=-4, \\ 2x+3y=1; \end{cases}$

4) пара чисел $(9; -1)$ не є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=10; \end{cases}$

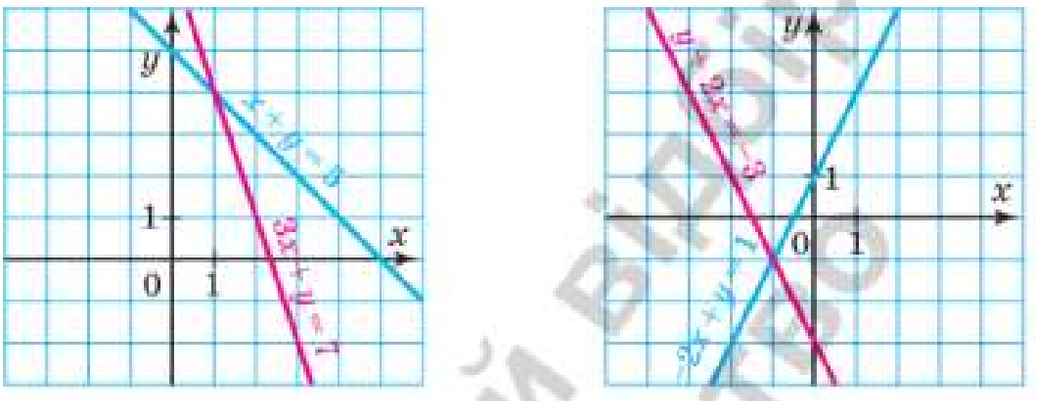
5) система рівнянь $\begin{cases} 4x+5y=6, \\ 5y+4x=7 \end{cases}$ не має розв'язків?

986.° Чи є пара чисел $(-5; 2)$ розв'язком системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 3y-2x=16, \\ 6x+7y=-16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=-9, \\ 10y-x=15? \end{cases}$

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

987.° Визначте координати точки перетину прямих, зображених на рисунку 67. Запишіть відповідну систему рівнянь, перевірте знайдений розв'язок системи, підставивши координати точки перетину прямих у рівняння системи.



а *б*

Рис. 67

988.* Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x-y=1, \\ x+2y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=-5, \\ 4x-y=-5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 2x-y=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=0, \\ 3x-y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 3x-y=9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x-3y=-26, \\ y-2x=8. \end{cases}$

989.* Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+2y=0, \\ 5x+y=-18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-2y=1, \\ y-x=-2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-5y=10, \\ 4x-y=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=-1. \end{cases}$

990.* Складіть яку-небудь систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, розв'язком якої є пара значень змінних:

1) $x=3$, $y=2$; 2) $x=-4$, $y=1$; 3) $x=5$, $y=0$.

991.* Складіть яку-небудь систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, розв'язком якої є пара чисел $(2;\ -2)$.

Конкурсний відбір Вправи «Гімназія»

992.* Пара чисел (6; 4) є розв'язком системи рівнянь:

1) $\begin{cases} ax+2y=26, \\ 4x+by=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+by=6, \\ ax+by=0. \end{cases}$

Знайдіть значення a і b.

993.* При яких значеннях a і b пара чисел $(-2; 3)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax-3y=-13, \\ 7x+by=1? \end{cases}$

994.* Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x-7y=6, \\ 8x-28y=24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=-2, \\ 6x+3y=9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=0{,}5, \\ 2x+4y=2? \end{cases}$

995.* Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases} x-y=4, \\ 3x-3y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-1{,}5y=-4, \\ 3y-2x=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 9x+9y=18, \\ x+y=2? \end{cases}$

996.** До рівняння $2x-3y=6$ доберіть друге лінійне рівняння таке, щоб отримати систему рівнянь, яка:

1) має єдиний розв'язок;
2) має безліч розв'язків;
3) не має розв'язків.

997.** До рівняння $x-y=2$ доберіть друге лінійне рівняння таке, щоб отримати систему рівнянь, яка:

1) має єдиний розв'язок;
2) має безліч розв'язків;
3) не має розв'язків.

998.** При яких значеннях a не має розв'язків система рівнянь $\begin{cases} 8x+9y=7, \\ 8x+9y=a? \end{cases}$

999.** При якому значенні a має безліч розв'язків система рівнянь:

1) $\begin{cases} x+5y=4, \\ 4x+20y=a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+ay=12, \\ 9x-15y=36? \end{cases}$

Комунальний заклад «Харківська гімназія»

1000.** При яких значеннях a система рівнянь:

1) $\begin{cases} 7x-12y=14, \\ 7x-12y=a \end{cases}$ не має розв'язків;

2) $\begin{cases} 6x+ay=4, \\ 3x-5y=2 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

1001.* Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} |x|-y=0, \\ x-y=-4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |x|-y=0, \\ x+3y=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y+|x|=0, \\ x+y=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-|y|=0, \\ 2x-y=3. \end{cases}$

1002.* Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ x+2y=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} |y-2x|=3, \\ x-2y=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=4, \\ |x+y|=2. \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1003. Зливок сплаву міді й олова масою 5,5 кг містить міді на 20 % більше, ніж олова. Знайдіть масу міді в цьому зливку.

1004. Із Києва до Лубен, відстань між якими дорівнює 200 км, виїхав автобус. Через 32 хв після виїзду автобуса назустріч йому з Лубен виїхав автомобіль зі швидкістю, на 20 км/год більшою за швидкість автобуса. З якою швидкістю рухався автобус, якщо вони зустрілися через 1,2 год після виїзду автомобіля?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1005. Виразіть y через x і x через y з рівняння:

1) $x+y=10$;
2) $2x+y=7$;
3) $y-x=-4$;
4) $x-6y=1$;
5) $5y-4x=0$;
6) $4x+3y=-12$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

1006. Десятковий запис одного п'ятицифрового числа складається тільки із цифр 2 і 3, а другого п'ятицифрового числа — тільки із цифр 3 і 4. Чи може запис добутку цих чисел складатися тільки із цифр 2 і 4?

27. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки

Якщо математикам / математикиням трапляється нова задача, то зазвичай вони намагаються звести її розв'язування до розв'язування вже знайомої задачі.

Покажемо, як розв'язування системи лінійних рівнянь із двома змінними можна звести до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною. А з останньою задачею ви вже знайомі.

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$$

З першого рівняння виразимо змінну y через змінну x:

$$y = 2x - 8.$$

Підставимо в друге рівняння системи замість змінної y вираз $2x - 8$. Отримаємо систему

$$\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + 2(2x - 8) = 5. \end{cases}$$

Ця система та вихідна мають одні й ті самі розв'язки. Приймемо тут цей факт без обґрунтувань. Ви можете розглянути доведення цього факту на заняттях математичного гуртка.

Друге рівняння останньої системи є рівнянням з однією змінною. Розв'яжемо його:

$$3x + 2(2x - 8) = 5;$$

$$3x + 4x - 16 = 5;$$

$$7x = 21;$$

$$x = 3.$$

Підставимо знайдене значення змінної x у рівняння $y = 2x - 8$.

Отримаємо:

$$y = 2 \cdot 3 - 8; \quad y = -2.$$

Пара чисел $(3; -2)$ — шуканий розв'язок.

Описаний тут спосіб розв'язування системи називають **методом підстановки.**

Отже, *щоб розв'язати систему двох лінійних рівнянь методом підстановки, треба:*

1) *виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;*
2) *підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;*
3) *розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;*
4) *підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;*
5) *обчислити значення другої змінної;*
6) *записати відповідь.*

Цю послідовність дій можна назвати **алгоритмом** розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними методом підстановки.

ВПРАВИ

1007.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2y - 8, \\ x - 4y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 6y, \\ x + 5y = 88; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5y - x = 8, \\ 5x - 4y = 23; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 5y = 46; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 15 - x = 2y, \\ 4x - 3y = 27; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x - y = 6{,}2, \\ 0{,}8x + 3y = 13. \end{cases}$

Комунальний заклад «Вижівничий ліцей» Вижівської міської ради Чернівецької області

1008.° Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x+y=12, \\ 7x+2y=20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2y=5, \\ 3x+8y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4y-x=11, \\ 5x-2y=17; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x-y=-1, \\ 2x-3y=-11; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y=7, \\ 9y-2x=-25; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x-3y=0, \\ 15x+2y=55. \end{cases}$

1009.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x-3y=15, \\ 3x-4y=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-3y=2, \\ 5x+2y=24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5y-6x=4, \\ 7x-4y=-1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x+5y=1, \\ 8x-2y=38; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5a-4b=3, \\ 2a-3b=11; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 8m-2n=11, \\ 9m+4n=8. \end{cases}$

1010.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5x+2y=15, \\ 8x+3y=20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x+4y=5, \\ 3x+2y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8p-5q=-11, \\ 5p-4q=-6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6u-5v=-38, \\ 2u+7v=22. \end{cases}$

1011.°° Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 6y-5x=1, \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{3y-x}{4}=-4\dfrac{3}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{8}+\dfrac{x-y}{6}=4, \\ \dfrac{3x+y}{4}-\dfrac{2x-5y}{3}=5. \end{cases}$

Комунальний Відділ Видавництво «Гімназія»

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1012. Під час роботи ліхтарика батарейка розряджається, і напруга в електричному колі ліхтарика зменшується. На рисунку 68 зображено графік зміни напруги в колі під час роботи ліхтарика. Користуючись цим графіком, визначте:

Рис. 68

1) якою була напруга в колі: а) в момент включення ліхтарика; б) через 6 год після початку роботи ліхтарика;
2) через скільки годин після включення ліхтарика напруга дорівнювала 1 В;
3) за скільки годин роботи напруга зменшилася від 1,6 В до 1,2 В.

1013. У школі 50 % учнів та учениць відвідують спортивні секції, із них 6 % співають у хорі. Який відсоток учнів та учениць школи одночасно відвідують спортивні секції і співають у хорі?

1014. (*Задача з болгарського фольклору.*) Троє чоловіків прийшли до перукаря. Той поголив першого й сказав: «Подивись, скільки грошей у шухляді стола, поклади ще стільки ж і візьми 8 левів[1] решти». Те саме перукар сказав і другому, і третьому. Після того як усі троє пішли, виявилося, що в касі немає грошей. Скільки грошей було в касі перед тим, як заплатив перший чоловік?

[1] Лев — грошова одиниця Болгарії.

Конкурсний відбір Університет Винниченка Гімназія

28. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання

Розглянемо ще один спосіб, який дає змогу звести розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними до розв'язування лінійного рівняння з однією змінною.

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 4x + 5y = 5. \end{cases}$$

Оскільки в цій системі коефіцієнти при змінній y є протилежними числами, то рівняння з однією змінною можна отримати, додавши почленно ліві й праві частини рівнянь системи. Запишемо:

$$2x - 5y + 4x + 5y = 7 + 5;$$

$$6x = 12;$$

$$x = 2.$$

Підставити знайдене значення змінної x можна в будь-яке з рівнянь системи. Підставимо, наприклад, у перше. Отримаємо:

$$2 \cdot 2 - 5y = 7;$$

$$-5y = 3;$$

$$y = -0{,}6.$$

Отже, розв'язком системи є пара чисел $(2; -0{,}6)$.

Описаний спосіб розв'язування системи називають **методом додавання.**

Цей метод заснований на такому твердженні: *якщо одне з рівнянь системи замінити на рівняння, отримане шляхом додавання лівих і правих частин рівнянь системи, то отримана система буде мати такі самі розв'язки, що й початкова* (приймемо цей факт без доведення).

Конкурсний відбір
Видавництво
«Підручник»

Так, розв'язуючи систему $\begin{cases}2x-5y=7,\\4x+5y=5,\end{cases}$ ми замінили її на систему $\begin{cases}2x-5y+4x+5y=7+5,\\2x-5y=7.\end{cases}$

Розв'яжемо ще одну систему

$$\begin{cases}2x-3y=11,\\6x+5y=19.\end{cases}$$

Якщо додати почленно ліві й праві частини рівнянь системи, то знову отримаємо рівняння з двома змінними. Дана система ще «не готова» до застосування методу додавання.

Помножимо обидві частини першого рівняння на -3. Отримаємо систему $\begin{cases}-6x+9y=-33,\\6x+5y=19,\end{cases}$ розв'язки якої збігаються з розв'язками вихідної системи.

Для такої системи метод додавання вже буде ефективним.

Маємо:

$$-6x+9y+6x+5y=-33+19;$$
$$14y=-14;$$
$$y=-1.$$

Підставимо знайдене значення y в перше рівняння вихідної системи. Отримаємо:

$$2x-3\cdot(-1)=11;$$
$$2x=8;$$
$$x=4.$$

Пара чисел $(4;\ -1)$ — шуканий розв'язок.

Розглянемо систему, у якій одразу два рівняння треба підготувати до застосування методу додавання:

$$\begin{cases}7x+8y=9,\\3x+5y=7.\end{cases}$$

Конкурсний відбір
Визавчимтво
Гімназія

Щоб виключити змінну y, помножимо обидві частини першого рівняння на число 5, а другого — на число -8 і застосуємо метод додавання:

$$\begin{cases} 35x + 40y = 45, \\ -24x - 40y = -56; \end{cases}$$

$$35x + 40y - 24x - 40y = 45 - 56;$$

$$11x = -11;$$

$$x = -1.$$

Підставивши знайдене значення x у перше рівняння даної системи, отримаємо:

$$-7 + 8y = 9;$$

$$y = 2.$$

Отже, пара чисел $(-1; 2)$ — розв'язок даної системи.

Щоб розв'язати систему двох лінійних рівнянь методом додавання, треба:

1) *дібравши «вигідні» множники, перетворити одне чи обидва рівняння системи так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;*
2) *додати почленно ліві й праві частини рівнянь, отриманих на першому кроці;*
3) *розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;*
4) *підставити знайдене на третьому кроці значення змінної в будь-яке з рівнянь вихідної системи;*
5) *обчислити значення другої змінної;*
6) *записати відповідь.*

ВПРАВИ

1015.° Запишіть рівняння, яке отримаємо, додавши почленно ліві й праві частини рівнянь системи:

1) $\begin{cases} 2x - y = 6, \\ 3x + y = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x - 7y = 8, \\ 6y - 4x = 1. \end{cases}$

Конкурсний примірник Видавництво «Ранок»

1016.° На яке число треба помножити обидві частини першого рівняння системи, щоб у рівняннях коефіцієнти при змінній y стали протилежними числами:

1) $\begin{cases} 4x+y=7, \\ 5x-6y=30; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+4y=9, \\ 3x+20y=40? \end{cases}$

1017.° На яке число треба помножити обидві частини першого рівняння системи, щоб у рівняннях коефіцієнти при змінній x стали протилежними числами:

1) $\begin{cases} 3x+7y=21, \\ 3x-9y=-2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x+3y=8, \\ 28x-5y=12? \end{cases}$

1018.° На яке число треба помножити обидві частини першого рівняння системи, а на яке — обидві частини другого рівняння, щоб у рівняннях коефіцієнти при змінній y стали протилежними числами:

1) $\begin{cases} 2x-6y=7, \\ 5x+4y=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x+6y=22, \\ 35x+9y=34? \end{cases}$

1019.° Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} x+y=6, \\ x-y=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-9y=11, \\ 7x+9y=25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x+y=14, \\ 5x-y=10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -6x+y=16, \\ 6x+4y=34. \end{cases}$

1020.° Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} 4x-y=20, \\ 4x+y=12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9x+17y=52, \\ 26x-17y=18. \end{cases}$

1021.* Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} 8x+y=8, \\ 12x+y=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-3y=5, \\ 4x+9y=41; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x-5y=29, \\ 7x+8y=-10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10x+2y=12, \\ -5x+4y=-6; \end{cases}$

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

5) $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ 12x+7y=-26; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x+8y=13, \\ 2x-3y=17; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x-4y=16, \\ 5x+6y=14; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 3x+5y=8. \end{cases}$

1022.* Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

1) $\begin{cases} -5x+7y=2, \\ 8x+7y=15; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x-6y=24, \\ 9x+8y=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x+y=7, \\ 7x-4y=-1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x-5y=23, \\ 2x-7y=13; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x-2y=16, \\ 8x+3y=38; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x-4y=10, \\ 2x-3y=-3. \end{cases}$

1023.* Знайдіть, не виконуючи побудови, координати точки перетину прямих: 1) $y=2-3x$ і $2x+3y=7$; 2) $5x+6y=-20$ і $2x+9y=25$.

1024.* Знайдіть, не виконуючи побудови, координати точки перетину прямих:

1) $2x-3y=8$ і $7x-5y=-5$;
2) $9x+y=3$ і $8x+3y=-10$.

1025.* При яких значеннях a і b графік рівняння $ax+by=8$ проходить через точки $A\ (1;\ 3)$ і $B\ (2;\ -4)$?

1026.* При яких значеннях m і n графік рівняння $mx-ny=6$ проходить через точки $C\ (2;\ -1)$ і $D\ (-6;\ 5)$?

1027.* Запишіть рівняння прямої $y=kx+b$, яка проходить через точки:

1) $M\ (2;\ 1)$ і $K\ (-3;\ 2)$;
2) $P\ (-4;\ 5)$ і $Q\ (4;\ -3)$.

1028.* Запишіть рівняння прямої $y=kx+b$, яка проходить через точки:

1) $A\ (3;\ 2)$ і $B\ (-1;\ 4)$;
2) $C\ (-2;\ -3)$ і $D\ (1;\ 6)$.

1029.** Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ 3x-4y=24, \\ x-2y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 3x+5y=1, \\ 5x+9y=5? \end{cases}$

1030.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 6x+5y=10, \\ 8x-5y=32, \\ 3x+10y=-7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=1, \\ 2x+y=7, \\ 4x+y=14. \end{cases}$

1031.** Запишіть систему лінійних рівнянь із двома змінними, графіки яких зображено на рисунку 69.

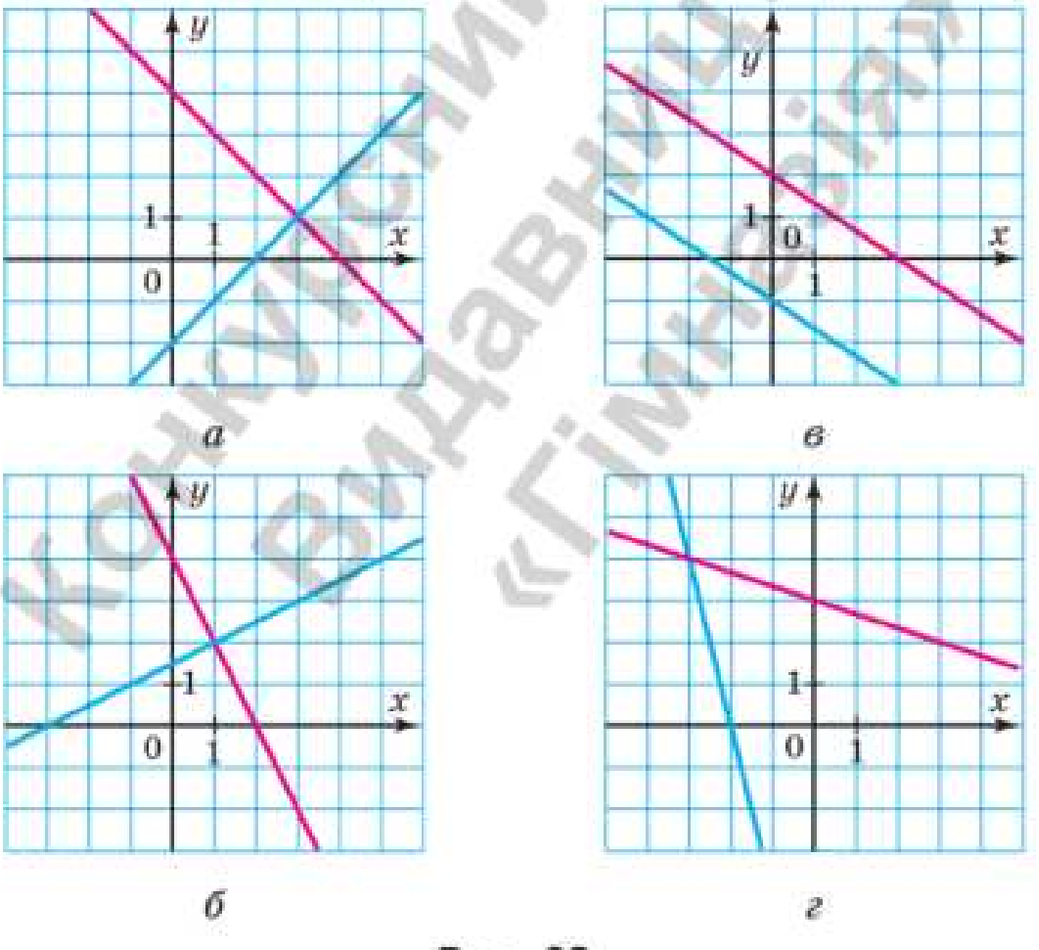
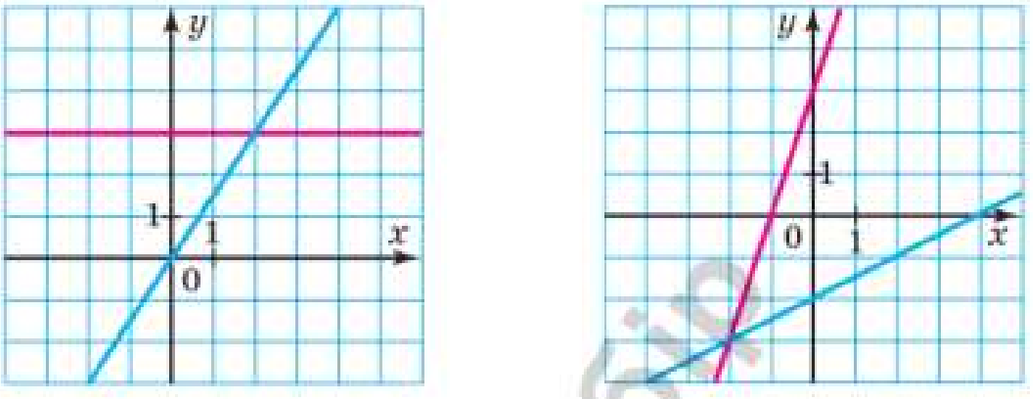


Рис. 69

1032.** Запишіть систему лінійних рівнянь із двома змінними, графіки яких зображено на рисунку 70.

Комунальний вищий навчальний заклад «Гімназія»



а *б*

Рис. 70

1033." При якому значенні k пряма $y = kx + 2$ проходить через точку перетину прямих $3x + 5y = 5$ і $7x - 4y = 43$?

1034." При якому значенні a має розв'язок система рівнянь $\begin{cases} 8x - 7y = 21, \\ 5x - 3y = 20, \\ ax + 2y = 24? \end{cases}$

1035." Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + y)^2 + (x - 3)^2 = 0$;
2) $(x + 2y - 3)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
3) $|x - 3y - 6| + (9x + 6y - 32)^2 = 0$;
4) $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 = 0$;
5) $25x^2 + 10y^2 - 30xy + 8y + 16 = 0$.

1036." Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2y)^2 + (y - 5)^2 = 0$;
2) $(4x + 2y - 5)^2 + |4x - 6y + 7| = 0$;
3) $50x^2 + 4y^2 - 28xy + 16x + 64 = 0$.

1037.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 15, \\ \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{5}{2x - 3y} + \frac{10}{3x - 2y} = 3, \\ \frac{20}{3x - 2y} - \frac{15}{2x - 3y} = 1. \end{cases}$

Копіювання відбір вилучення кон назія

1038.* Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{7}{y} = 6, \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 46; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{9}{x+4y} - \frac{6}{5x-y} = -2, \\ \frac{3}{x+4y} + \frac{18}{5x-y} = 1. \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1039. Після того як вода в чайнику закипіла, його вимкнули. На рисунку 71 зображено графік зміни температури води в чайнику. Користуючись графіком, визначте:

1) якою була температура води через 10 хв після вимкнення чайника;
2) через скільки хвилин після вимкнення температура води становила 30 °С;
3) за скільки хвилин температура води знизилася від 60 °С до 40 °С.

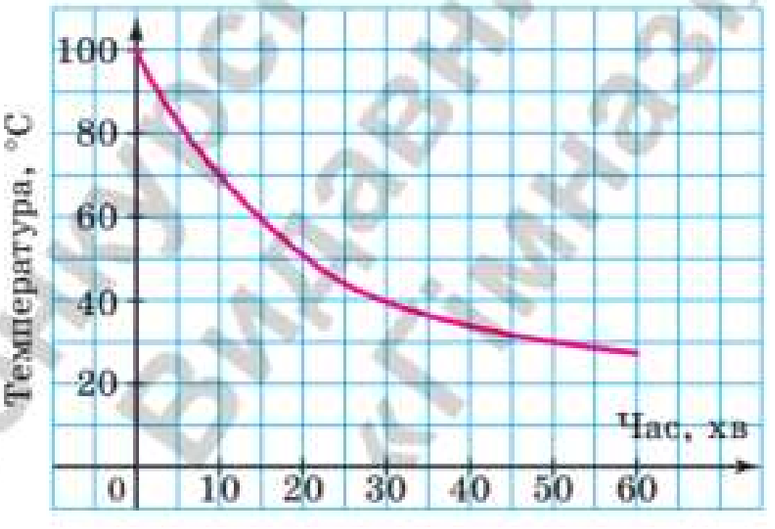


Рис. 71

1040. Оптова ціна коробки цукерок — 130 грн. Роздрібна ціна в магазині на 30 % вища за оптову. Яку найбільшу кількість таких коробок можна купити в магазині, маючи 2500 грн?

1041. (*Задача з німецького фольклору.*) За який час лев, вовк і собака можуть з'їсти трьох овець, якщо лев один може з'їсти вівцю за 1 год, вовк — за 3 год, а собака — за 6 год?

Комунальний вибір Видавництво «Підручники і посібники»

1042. У саду дерев більше за 90, але менше від 100. Третина всіх дерев — яблуні, а чверть усіх дерев — сливи. Скільки дерев у саду?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

1043. Клітинки таблиці розміром 101×101 заповнено числами так, що добуток чисел у кожному стовпці є від'ємним. Чи може виявитися, що кількість рядків, добуток чисел у яких додатний, дорівнює 51?

29. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь

Розглянемо задачі, у яких системи двох лінійних рівнянь із двома змінними використовують як математичні моделі реальних ситуацій.

Приклад 1. На пошиття одного плаття та чотирьох однакових спідниць витратили 9 м тканини, а на пошиття трьох таких самих платтів та восьми таких самих спідниць — 21 м тканини. Скільки метрів тканини треба для пошиття одного плаття та однієї спідниці окремо?

Розв'язання. Нехай на одне плаття витрачають x м тканини, а на одну спідницю — y м. Тоді на одне плаття та 4 спідниці треба $(x+4y)$ м тканини, що за умовою становить 9 м. Отже, $x+4y=9$.

На 3 плаття та 8 спідниць потрібно $(3x+8y)$ м тканини, або 21 м. Отже, $3x+8y=21$.

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x+4y=9, \\ 3x+8y=21. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримуємо: $x=3$, $y=1{,}5$. Отже, на пошиття одного плаття треба 3 м тканини, а однієї спідниці — 1,5 м.

Відповідь: 3 м, 1,5 м. ◀

Приклад 2. З міста A до міста B, відстань між якими 264 км, виїхав мотоцикліст. Через 2 год після цього назустріч йому з міста B виїхала велосипедистка, яка зустрілася з мотоциклістом через 1 год після свого виїзду. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо за 2 год мотоцикліст проїжджає на 40 км більше, ніж велосипедистка за 5 год.

Розв'язання. Нехай швидкість мотоцикліста дорівнює x км/год, а велосипедистки — y км/год. До зустрічі мотоцикліст рухався 3 год і проїхав $3x$ км, а велосипедистка відповідно — 1 год та y км. Разом вони проїхали 264 км. Тоді $3x + y = 264$.

Велосипедистка за 5 год проїжджає $5y$ км, а мотоцикліст за 2 год — $2x$ км, що на 40 км більше за $5y$ км. Тоді $2x - 5y = 40$.

Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y = 264, \\ 2x - 5y = 40, \end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел $x = 80$, $y = 24$.

Отже, швидкість мотоцикліста дорівнює 80 км/год, а велосипедистки — 24 км/год.

Відповідь: 80 км/год, 24 км/год. ◀

Приклад 3. Стіл і стілець коштували разом 1360 грн. Після того як стіл подешевшав на 20 %, а стілець подорожчав на 10 %, вони стали коштувати разом 1160 грн. Знайдіть початкову ціну стола та початкову ціну стільця.

Розв'язання. Нехай початкова ціна стола становила x грн, а стільця — y грн. Тоді за умовою $x + y = 1360$.

Нова ціна стола становить 80 % початкової та дорівнює $0{,}8x$ грн. Нова ціна стільця становить 110 % початкової та дорівнює $1{,}1y$ грн. Тоді $0{,}8x + 1{,}1y = 1160$.

Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y=1360, \\ 0{,}8x+1{,}1y=1160. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є пара $x=1120$, $y=240$.

Отже, початкова ціна стола була 1120 грн, а стільця — 240 грн.

Відповідь: 1120 грн, 240 грн. ◀

Приклад 4. Скільки грамів 3 %-го та скільки грамів 8 %-го розчинів солі треба взяти, щоб отримати 500 г 4 %-го розчину?

Розв'язання. Нехай першого розчину треба взяти x г, а другого — y г. Тоді за умовою $x+y=500$.

У 3 %-му розчині міститься $0{,}03x$ г солі, у 8 %-му — $0{,}08y$ г солі. У 500 г 4 %-го розчину міститься $500 \cdot 0{,}04 = 20$ (г) солі. Отже, $0{,}03x+0{,}08y=20$.

Складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y=500, \\ 0{,}03x+0{,}08y=20, \end{cases}$$

розв'язавши яку матимемо: $\begin{cases} x=400, \\ y=100. \end{cases}$

Отже, треба взяти 400 г 3 %-го розчину та 100 г 8 %-го розчину.

Відповідь: 400 г, 100 г. ◀

Приклад 5. У Петра були купюри по 5 грн і по 20 грн. Він каже, що купив набір шахів за 255 грн, віддавши за нього 20 купюр, а Ніна стверджує, що такого бути не може. Хто з них має рацію?

Розв'язання. Нехай було x купюр по 5 грн та y купюр по 20 грн. Тоді

$$\begin{cases} x+y=20, \\ 5x+20y=255. \end{cases}$$

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

Розв'язком цієї системи є пара $\left(9\frac{2}{3};10\frac{1}{3}\right)$. Проте цей розв'язок не відповідає змісту задачі, оскільки кількість купюр може бути тільки натуральним числом.

Відповідь: має рацію Ніна. ◀

ВПРАВИ

1044.° Знайдіть два числа, якщо їхня сума дорівнює 63, а різниця дорівнює 19.

1045.° Група із 46 туристів і туристок вирушила в похід на 10 човнах, частина з яких була чотиримісними, а решта — шестимісними. Скільки було човнів кожного виду?

1046.° Знайдіть два числа, якщо їхня різниця дорівнює 23, а сума подвоєного більшого із цих чисел і другого числа дорівнює 22.

1047.* Для того щоб нагодувати 4 коней і 12 корів, потрібно 120 кг сіна на день, а щоб нагодувати 3 коней і 20 корів — 167 кг сіна. Знайдіть денну норму сіна для коня та для корови.

1048.* За перший день 2 гусеничних трактори й один колісний зорали 22 га, а за другий день 3 гусеничних і 8 колісних — 72 га. Знайдіть, скільки гектарів землі може зорювати щодня один гусеничний трактор і скільки — один колісний.

1049.* Двоє робітників виготовили 135 деталей. Перший робітник працював 7 днів, а другий — 12 днів. Скільки деталей виготовляв щодня кожний робітник, якщо перший за 3 дні зробив на 3 деталі більше, ніж другий — за 4 дні?

1050.* Дві бригади працювали на збиранні яблук. Першого дня одна бригада працювала 5 год, а друга — 4 год, причому разом вони зібрали 40 ц яблук.

Комунальний заклад «Видавничий центр «Академія»

Наступного дня бригади працювали з тією самою продуктивністю праці, при цьому перша бригада зібрала за 3 год на 2 ц більше, ніж друга — за 2 год. Скільки центнерів яблук збирала кожна бригада за 1 год?

1051.* За 6 однакових наборів олівців і 5 однакових циркулів заплатили 510 грн. Скільки коштує набір олівців і скільки — циркуль, якщо 3 набори олівців дорожчі за 1 циркуль на 150 грн?

1052.* За 11 однакових зошитів і 8 однакових ручок заплатили 245 грн. Скільки коштує 1 зошит і скільки — 1 ручка, якщо 5 зошитів дорожчі за 4 ручки на 35 грн?

1053.* Із Києва й Вінниці, відстань між якими 256 км, виїхали одночасно назустріч один одному автобус і автомобіль, які зустрілися через 2 год після початку руху. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо автобус за 2 год проїжджає на 46 км більше, ніж автомобіль за 1 год.

1054.* Із двох станцій, відстань між якими 300 км, одночасно назустріч один одному вирушили пасажирський і товарний поїзди, які зустрілися через 3 год після початку руху. Якби пасажирський поїзд вирушив на 1 год раніше від товарного, то вони зустрілися б через 2,4 год після виходу товарного поїзда. Знайдіть швидкість кожного поїзда.

1055.* Із села до станції вийшла пішохідка. Через 30 хв із цього села до станції виїхав велосипедист, який наздогнав пішохідку через 10 хв після виїзду. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо за 3 год пішохідка проходить на 4 км більше, ніж велосипедист проїжджає за півгодини.

1056.* Із Житомира до Одеси, відстань між якими 536 км, виїхав перший автомобіль. Через 2,5 год після початку руху першого автомобіля назустріч йому

з Одеси виїхав другий автомобіль, який зустрівся з першим через 2 год після свого виїзду. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо перший за 2 год проїжджає на 69 км менше, ніж другий за 3 год.

1057.* Дві майстерні мали пошити 75 костюмів. Коли перша майстерня виконала 60 % замовлення, а друга — 50 %, то виявилося, що перша майстерня пошила на 12 костюмів більше, ніж друга. Скільки костюмів мала пошити кожна майстерня?

1058.* Михайло та Галина мали разом 300 грн. Коли Михайло витратив $\frac{1}{3}$ своїх грошей на придбання довідника з математики, а Галина — $\frac{1}{6}$ своїх грошей на придбання довідника з української мови, то виявилося, що Михайло витратив на 5 грн менше, ніж Галина. Скільки грошей було в кожного з них спочатку?

1059.* Відомо, що 4 кг огірків і 3 кг помідорів коштували 340 грн. Після того як огірки подорожчали на 50 %, а помідори подешевшали на 20 %, за 2 кг огірків і 5 кг помідорів заплатили 360 грн. Знайдіть початкову ціну 1 кг огірків і 1 кг помідорів.

1060.* Відомо, що 2 однакові банки фарби та 3 однакові банки оліфи коштували 290 грн. Після того як фарба подешевшала на 10 %, а оліфа подорожчала на 40 %, за 6 банок фарби та 5 банок оліфи заплатили 728 грн. Знайдіть початкову ціну однієї банки фарби та однієї банки оліфи.

1061.* Вкладник поклав у банк 14 000 грн на два різних рахунки. За першим із них банк виплачує 4 % річних, а за другим — 6 % річних. Через рік вкладник одержав 680 грн відсоткових грошей. Скільки гривень він поклав на кожний рахунок?

1062.* Вкладниця поклала в банк 12 000 грн на два різних рахунки. За першим із них банк виплачує 5 % річних, а за другим — 7 % річних. Через рік вкладниця отримала за 5 %-м вкладом на 240 грн відсоткових грошей більше, ніж за другим. Скільки гривень вона поклала на кожний рахунок?

1063.* Маємо два сплави міді й цинку. Перший сплав містить 9 %, а другий — 30 % цинку. Скільки кілограмів кожного сплаву треба взяти, щоб одержати 300 кг сплаву, який містить 23 % цинку?

1064.* Маємо два водно-сольових розчини. Перший розчин містить 25 %, а другий — 40 % солі. Скільки кілограмів кожного розчину треба взяти, щоб одержати 50 кг розчину, який містить 34 % солі?

1065.** (*Задача з грецького фольклору.*) Віслюк і мул ідуть поруч з вантажем на спині. Віслюк скаржиться на непосильну ношу, а мул відповідає: «Чого ти скаржишся? Адже якщо я візьму один твій мішок, то моя ноша стане вдвічі важчою за твою. А якщо ти візьмеш один мій мішок, то твоя поклажа зрівняється з моєю». Скажіть же, мудрі математики, скільки мішків ніс віслюк і скільки ніс мул?

1066.** (*Задача з індійського фольклору.*) Один каже другому: «Дай мені 100 рупій, і я буду вдвічі багатший за тебе». Другий відповідає: «А якщо ти даси мені 10 рупій, то я стану в 6 разів багатший за тебе». Скільки грошей було в кожного?

1067.** Син 6 років тому був у 4 рази молодший від батька, а через 12 років він буде молодшим від батька у 2 рази. Скільки років батькові та скільки — синові?

1068.** Бабуся 6 років тому була в 9 разів старша за онуку, а 4 роки тому — у 7 разів старша. Скільки років бабусі та скільки — онуці?

1069.** Із двох селищ, відстань між якими дорівнює 45 км, одночасно назустріч один одному вирушили велосипедистка й пішохід, які зустрілися через 3 год після початку руху. Якби велосипедистка виїхала на 1 год 15 хв раніше, ніж вийшов пішохід, то вони зустрілися б через 2 год після виходу пішохода. З якими швидкостями рухалися велосипедистка й пішохід?

1070.** З пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 24 км, одночасно назустріч одна одній вирушили дві туристки. Через 2 год після початку руху вони ще не зустрілися, а відстань між ними становила 6 км. Ще через 2 год одній з них залишилося пройти до пункту B на 4 км менше, ніж другій — до пункту A. Знайдіть швидкість кожної туристки.

1071.** Автобус і маршрутне таксі виїжджають щодня назустріч одне одному за розкладом о 8 год з міст Вишневе та Яблуневе й зустрічаються о 8 год 10 хв. Відстань між містами 18 км. Одного дня автобус виїхав за розкладом, а таксі — із запізненням — о 8 год 9 хв. Тому зустрілися вони того дня о 8 год 15 хв. Знайдіть швидкості автобуса та маршрутного таксі.

1072.* В одному баку було 12 л води, а в другому — 32 л. Якщо перший бак долити доверху водою з другого бака, то другий бак залишиться наповненим на половину свого об'єму. Якщо другий бак долити доверху водою з першого, то перший бак залишиться наповненим на шосту частину свого об'єму. Знайдіть об'єм кожного бака.

1073.* У двох посудинах місткістю 40 л і 60 л була деяка кількість води. Якщо в меншу посудину долити доверху води з більшої, то в більшій залишиться $\frac{5}{7}$ тієї кількості води, що була в ній спочатку. Якщо в більшу посудину долити доверху води з меншої, то в меншій залишиться $\frac{5}{14}$ тієї кількості води, що була

в ній спочатку. Скільки літрів води було в кожній посудині спочатку?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1074. На рисунку 72 зображено графік руху туристки від залізничної станції до туристичного табору. Користуючись графіком, визначте:

1) скільки кілометрів становить відстань від станції до табору та за скільки годин туристка подолала цю відстань;
2) на якій відстані від станції була туристка через 4 год після початку руху;
3) через скільки годин після виходу зі станції туристка зробила першу зупинку та скільки вона тривала;
4) з якою швидкістю туристка рухалася від станції до першої зупинки;
5) з якою швидкістю туристка рухалася від першої зупинки до другої.

Рис. 72

1075. Доведіть тотожність

$$(a - bc)^2 - 2(b^2c^2 - a^2) + (bc + a)^2 = 4a^2.$$

1076. Розкладіть на множники вираз:

1) $4kn + 6ak + 6an + 9a^2$;
2) $b^6 - 4b^4 + 12b^2 - 9$;
3) $y^4(x^2 + 8x + 16) - a^8$;
4) $9x^2 - 6x - 35$.

1077. Точки A (2; 3) і B (5; a) належать прямій $y = kx$. Знайдіть значення a.

Конкурсний примірник видавництво «Генеза»

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

1078. Доведіть, що квадрат натурального числа має непарну кількість дільників.

ЗАВДАННЯ № 7 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яка з наведених пар чисел є розв'язком рівняння $5x + 3y = 4$?

А) (2; 1); Б) (1; 0); В) (2; −2); Г) (−1; 2).

2. Які координати точки перетину графіка рівняння $2x - 5y = 10$ з віссю абсцис?

А) (0; −2); Б) (−2; 0); В) (0; 5); Г) (5; 0).

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 5x - 4y = 11, \\ 2x + 4y = 10. \end{cases}$

А) (3; 1); Б) (1; 3); В) (1; 2); Г) (2; 1).

4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 15x + 2y = 7, \\ 2x - y = 6. \end{cases}$

А) (3; −19); Б) (1; −4); В) (−5; 41); Г) (−1; 11).

5. Нехай пара чисел $(a; b)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$ Знайдіть значення виразу $a^2 - b^2$.

А) 5; Б) −5; В) 3; Г) −3.

6. При якому значенні a система рівнянь $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ x - ay = -6 \end{cases}$ не має розв'язків?

А) 3; Б) −3; В) $\frac{1}{3}$; Г) $-\frac{1}{3}$.

7. При якому значенні b система рівнянь $\begin{cases} 4x + by = 10, \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

А) −6; Б) 6; В) 3; Г) такого значення не існує.

8. Графік лінійної функції проходить через точки A (1; 4) і B (−2; 13). Задайте цю функцію формулою.

А) $y = 3x + 1$; В) $y = -3x + 1$;

Б) $y = -3x + 7$; Г) $y = 3x + 7$.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

9. Мати й син зліпили разом 104 вареники, причому син працював 2 год, а мати — 3 год. За 1 год мати робить на 8 вареників більше за сина.

Нехай син за 1 год робить x вареників, а мати — y вареників. Яка з наведених систем рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові?

А) $\begin{cases} 2x+3y=104, \\ x-y=8; \end{cases}$ В) $\begin{cases} 2x+3y=104, \\ y-x=8; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 3x+2y=104, \\ x-y=8; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 3x+2y=104, \\ y-x=8. \end{cases}$

10. Із двох міст, відстань між якими 60 км, виїхали одночасно вантажний і легковий автомобілі. Якщо вони рухатимуться назустріч один одному, то зустрінуться через 30 хв; а якщо в одному напрямку, то легковий автомобіль наздожене вантажний через 3 год після початку руху.

Нехай швидкість вантажного автомобіля дорівнювала x км/год, а легкового — y км/год. Яка з наведених систем рівнянь відповідає умові задачі?

А) $\begin{cases} 0{,}5x+0{,}5y=60, \\ 3y-3x=60; \end{cases}$ В) $\begin{cases} 30x+30y=60, \\ 3x-3y=60; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} 30x+30y=60, \\ 3y-3x=60; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} 0{,}5x+0{,}5y=60, \\ 3x-3y=60. \end{cases}$

11. Люстра та настільна лампа коштували разом 2000 грн. Після того як люстра подорожчала на 10 %, а лампа подешевшала на 10 %, вони стали коштувати разом 2020 грн.

Нехай люстра коштувала спочатку x грн, а настільна лампа — y грн. Яка з наведених систем рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $\begin{cases} x+y=2000, \\ 110x+90y=2020; \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x+y=2000, \\ 1{,}1x+0{,}9y=2020; \end{cases}$

В) $\begin{cases} x+y=2000, \\ 0{,}1x+0{,}1y=2020; \end{cases}$ Г) $\begin{cases} x+y=2000, \\ 0{,}9x+1{,}1y=2020. \end{cases}$

12. Розв'яжіть рівняння $x^2+y^2+12x-2y+37=0$.

А) (6; 1); В) (−6; −1);

Б) (−6; 1); Г) рівняння не має розв'язків.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Підручники і посібники»

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Розв'язок рівняння з двома змінними

Пару значень змінних, яка перетворює рівняння в правильну рівність, називають розв'язком рівняння з двома змінними.

Розв'язати рівняння з двома змінними

Розв'язати рівняння з двома змінними — це означає знайти всі його розв'язки або показати, що воно не має розв'язків.

Властивості рівнянь із двома змінними

- Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.
- Якщо будь-який доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.
- Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі розв'язки, що й дане.

Графік рівняння з двома змінними

Графіком рівняння з двома змінними називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких (пари чисел) є розв'язками даного рівняння.

Лінійне рівняння з двома змінними

Рівняння виду $ax + by = c$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа, називають лінійним рівнянням із двома змінними.

Конкурсний відбір
Видавництво
«Генеза»

Графік лінійного рівняння з двома змінними

У кожному з двох випадків: 1) $b \neq 0$; 2) $b = 0$ і $a \neq 0$ — графіком рівняння $ax + by = c$ є пряма. Графіком рівняння $0x + 0y = 0$ є вся координатна площина.

Розв'язок системи рівнянь із двома змінними

Розв'язком системи рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює кожне рівняння системи в правильну рівність.

Розв'язування системи рівнянь методом підстановки

1) Виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;
2) підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь.

Розв'язування системи рівнянь методом додавання

1) Дібравши «вигідні» множники, перетворити одне чи обидва рівняння системи так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;
2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь, отриманих на першому кроці;
3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
4) підставити знайдене на третьому кроці значення змінної в будь-яке з рівнянь вихідної системи;
5) обчислити значення другої змінної;
6) записати відповідь.

Комунальний заклад «Харківський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Г. С. Сковороди»

§ 4 СТАТИСТИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

У цьому параграфі ви дізнаєтеся, що таке статистичне спостереження, як забезпечити його належну якість. Навчитеся групувати статистичні дані, формувати на їх основі таблиці, будувати діаграми та графіки. Ознайомитеся зі статистичним підходом до обчислення ймовірностей подій.

30. Інформація і таблиці

Нас оточує море інформації. Щосекунди ми дізнаємося щось нове — читаємо повідомлення в месенджері, дивимося відео в інтернеті, слухаємо музику або спілкуємося з друзями.

Значну частину корисної інформації становлять дані.

Щоб зробити їх зручними для використання, інформацію варто впорядкувати. Для цього вже понад 4000 років люди використовують **таблиці** (від лат. *tabula* — дошка). Звісно, вам уже неодноразово траплявся табличний спосіб подання даних. І це не випадково. Інформацію в таблицях легко читати, сприймати й навіть запам'ятовувати. Адже в таблицях, на відміну від звичайного тексту, немає нічого другорядного, зайвого. Такий концентрований спосіб подання даних робить таблицю максимально інформативною.

Наведемо приклади табличного способу подання даних.

Шкільний розклад уроків зазвичай складають у формі таблиці.

Електронний відбір Міністерство освіти і науки України

Розклад уроків на понеділок

		7-А клас	Каб.	7-Б клас	Каб.	7-В клас	Каб.
ПОНЕДІЛОК	1	Українська мова	24	Математика	27	Математика	30
	2	Фізика	37	Українська література	21	Географія	23
	3	Інформатика	13/16	Фізика	37	Українська література	21
	4	Математика	27	Англійська мова	22/23	Історія України	28
	5	Географія	23	Українська мова	24	Біологія	31
	6	Англійська мова	22/23			Українська мова	24

Дати в календарі, оцінки в класному журналі, результати спортивних змагань, інформацію на сайті — усі ці дані зазвичай записують у формі таблиць.

Сторінка календаря

Серпень

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Нд
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Конгресний відділ Видавництва «Ранок»

Сторінка класного журналу

82 Англійська мова (1 гр.) (Назва предмета) **Облік навчальних досягнень учнів**

№ з/п	Місяць і число / Прізвище та ім'я учня (учениці)	грудень								січень			
		5	7	12	15	19	22	26	2 семестр	14	17	21	24
1	Войнаровський Вадим	н	н	н			11		7		5	7	
2	Васильєв Лев		11	9		10	н	11	11	6			
3	Кулюба Вікторія			7	11	6	8	12	7	9	12	9	9
4	Кудко Денис			11	6		10	9	8		10	11	
5	Задорожний Антон		н	7			5		6		6		11
6	Кравець Григорій	12		11		7	6	9	8				6
7	Лінник Софія	7	9			7	10	6	7		6		
8	Мамонтова Ліза	н		8	6		11		10		12	10	
9	Наумов Андрій				7	н	11		9	6			7
10	Стефанович Ніна		9	7	н		н		8		11	10	6
11	Хмельченко Оксана	8	н	н	н	н	н		8		11	12	10
12	Чхеїдзе Оксана	7	6	12			7	7	8	12	10		
13	Шевчук Світлана	7				7	11		10			9	9
14	Щербань Тетяна		н			6	12		10	5		6	11

Вивчаючи хімію, ви неодноразово звертатиметеся до Періодичної системи хімічних елементів, сформованої у вигляді таблиці.

Зазвичай таблиці дають назву. Її вибирають так, щоб пояснити, які дані подано в таблиці.

Таблиці складаються з рядків і стовпців. Здебільшого їм дають назву, щоб описати зміст поданої в них інформації. На перетині рядка та стовпця міститься клітинка таблиці, у яку власне і вносять дані.

Багато таблиць закінчуються підсумковим рядком та/або підсумковим стовпцем, наприклад, у поданій нижче таблиці наведено підсумковий рядок:

Таблиця виступів українських школярів на Міжнародних математичних олімпіадах у 2014–2023 рр.

Рік	Країна проведення	Золото	Срібло	Бронза	Разом медалей	Місце
2014	ПАР	2	3	1	6	6
2015	Таїланд	2	3	1	6	11
2016	Гонконг	0	2	4	6	30
2017	Бразилія	1	2	2	5	14
2018	Румунія	4	2	0	6	4
2019	Велика Британія	1	4	1	6	11
2020	Онлайн-олімпіада	0	6	0	6	11
2021	Онлайн-олімпіада	3	2	1	6	6
2022	Норвегія	1	1	4	6	17
2023	Японія	0	1	5	6	31
Разом		**14**	**26**	**19**	**59**	

Таблиці дають змогу подати великі обсяги даних у добре організованому структурованому вигляді. Саме тому важливо навчитися читати та складати таблиці.

Приклад 1. Пасажир купив квиток на авіарейс Відень — Мадрид. Реєстрація на рейс закінчується за 40 хвилин до вильоту о 7:30. Користуючись розкладом експрес-поїздів із центру Відня в аеропорт, визначте, о котрій годині (найпізніше) може виїхати до аеропорту пасажир, щоб не спізнитися на літак.

№ рейсу	Відправлення	Прибуття
01	05:37	05:53
02	06:07	06:23
03	06:37	06:53
04	07:07	07:23
05	07:37	07:53
...	...	...

Розв'язання. Пасажир може скористатися другим рейсом, що відправляється о 6:07. У цьому разі він прибуде до аеропорту о 06:23, а реєстрація закінчується о 06:50. Зазначимо, що наступний рейс № 03 прибуває в аеропорт після закінчення реєстрації. ◀

Приклад 2. Заповніть таблицю. Проаналізуйте отримані дані та висловіть гіпотезу, яких значень може набувати остача від ділення на 3 квадрата натурального числа. Обговоріть цю гіпотезу в класі.

Число	Квадрат числа	Остача від ділення квадрата числа на 3
3		
5		
6		
8		
10		
11		
12		
20		

Розв'язання. Піднесемо задані числа до квадрата і знайдемо остачі від ділення на 3:

Число	Квадрат числа	Остача від ділення квадрата числа на 3
3	9	0
5	25	1
6	36	0
8	64	1
10	100	1
11	121	1
12	144	0
20	400	1

Конкурсний відбір видавництво «Гімназія»

Проаналізувавши останній стовпець таблиці, можна сформулювати таку гіпотезу[1]: квадрат будь-якого натурального числа від ділення на 3 дає в остачі 0 або 1. ◀

1. Для чого використовують таблиці? **2.** Із чого складаються таблиці? **3.** Як вибирають назву таблиці? **4.** Наведіть приклади таблиць, які ви бачили в школі, на відпочинку, в інтернеті.

ВПРАВИ

1079.° У таблиці подано інформацію про метрополітени деяких європейських столиць станом на 2019 р.

1) У яких містах, наведених у таблиці, метрополітен має три лінії?
2) У якому з наведених міст метрополітен складається з найбільшої кількості станцій?
3) Які з наведених метрополітенів відкрили до початку Другої світової війни?
4) Яке місто в таблиці займає третє місце за довжиною мережі метрополітену?
5) Скільки пасажирів перевезли в 2019 р. усі наведені метрополітени разом?

Місто	Рік відкриття	Довжина мережі, км	Кількість ліній	Кількість станцій	Пасажиропотік, млн осіб
Берлін (Німеччина)	1902	155,4	9	175	596,0
Будапешт (Угорщина)	1896	39,4	4	52	354,0
Бухарест (Румунія)	1979	77,0	5	63	179,2

[1] Це твердження є правильним. Для доведення скористайтеся тим фактом, що будь-яке натуральне число можна подати у вигляді $3k$, або $3k + 1$, або $3k + 2$, де k — деяке ціле невід'ємне число.

Місто	Рік відкриття	Довжина мережі, км	Кількість ліній	Кількість станцій	Пасажиропотік, млн осіб
Київ (Україна)	1960	69,6	3	52	495,3
Прага (Чехія)	1974	65,2	3	61	440,0
Стокгольм (Швеція)	1950	110,0	3	100	462,0

1080.° У таблиці подано параметри деяких моделей смартфонів.

1) Які параметри має модель SE (1st)?
2) Які моделі смартфонів мають найменший екран?
3) Скільки моделей смартфонів мають оперативну пам'ять 4 ГБ?
4) Які моделі смартфонів мають екран 6,1 дюйма, камеру 12 Мп та оперативну пам'ять 6 ГБ?

Модель смартфона	Екран, дюймів	Оперативна пам'ять, ГБ	Основна камера, Мп
6	4,7	1	8
6S, 7, 8	4,7	2	12
SE (1st)	4,0	2	12
7+, 8+	5,5	3	12
XS, 11 Pro	5,9	4	12
XS Max, 11 Pro Max	6,5	4	12
11, 12, 13	6,1	4	12
12 mini, 13 mini	5,4	4	12
12 Pro, 13 Pro, 14	6,1	6	12
14 Pro	6,1	6	48
14 Pro Max	6,7	6	48

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»

1081.° У таблиці подано середні ціни на окремі товари та послуги в деяких містах світу в перерахунку на гривні за курсом Національного банку України (НБУ) станом на 2023 р.

1) Скільки коштує 1 кг курячого філе в указаних містах?
2) У якому місті найдешевше відвідати кінотеатр?
3) У яких містах вистачить 45 грн, щоб проїхати 1 км в таксі?
4) У якому місті 0,5 кг хліба коштує 95 грн, а 1 кг сиру — 290 грн?

Товари та послуги	Київ (Україна)	Віндхук (Намібія)	Пекін (Китай)	Хайфа (Ізраїль)	Гельсінкі (Фінляндія)	Нью-Йорк (США)
Капучино	50	70	150	135	170	195
Хліб (0,5 кг)	25	30	65	95	95	165
Твердий сир (1 кг)	310	290	470	510	290	680
Куряче філе (1 кг)	150	185	135	360	420	620
Таксі (1 км)	12	25	15	40	50	70
Кінотеатр (1 місце)	150	130	330	440	650	660
Середня зарплата	20 000	21 000	67 000	94 000	124 000	237 000

1082.° Завершіть таблицю результатів виступу українських спортсменів і спортсменок на літній Олімпіаді-2020 у Токіо підсумковим рядком.

Вид спорту	Золото	Срібло	Бронза	
Бокс	0	1	0	
Боротьба	1	1	2	

Вид спорту	Золото	Срібло	Бронза	
Велоспорт	0	1	0	
Веслування на байдарках і каное	0	1	1	
Дзюдо	0	0	1	
Карате	0	1	1	
Легка атлетика	0	0	1	
Плавання	0	1	1	
Синхронне плавання	0	0	2	
Стрільба	0	0	1	
Теніс	0	0	1	
Фехтування	0	0	1	

1083.° Завершіть таблицю результатів виступу українських спортсменів і спортсменок на літній Олімпіаді-2020 у Токіо підсумковим стовпцем.

1084.• У школі працюють три нічних сторожі: Іван Іванович, Петро Петрович і Василь Васильович. Вони виходять на роботу почергово кожної третьої ночі. Складіть розклад чергування сторожів на перший тиждень нового року, якщо 1 січня чергує Петро Петрович, а 3 січня — Василь Васильович.

	1.01	2.01	3.01	4.01	5.01	6.01	7.01
Іван Іванович							
Петро Петрович	+						
Василь Васильович			+				

Робочий зошит Видавництво «Ранок»

1085.* Михайло ходить на тренування з боксу по понеділках, середах і п'ятницях, а його однокласниця Дінара відвідує секцію аеробіки по вівторках і суботах. Заповніть таблицю з розкладом тренувань Михайла та Дінари, якщо відомо, що 13 і 16 травня Михайло піде на тренування.

	12.05	13.05	14.05	15.05	16.05	17.05	18.05	19.05
Михайло		+			+			
Дінара								

1086.* Микола працює на будівництві за таким графіком:

День тижня	Робочі години	Перерва
Пн	08:00–17:00	12:00–13:00
Вт	13:00–22:00	17:00–18:00
Ср	10:00–19:00	14:00–15:00
Чт	08:00–17:00	12:00–13:00
Пт	13:00–22:00	17:00–18:00

Він хоче записатися на прийом до свого сімейного лікаря Петренка В. І. У таблиці наведено години прийому сімейних лікарів районної поліклініки.

Сімейний лікар	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт
Коновалова В. З.	10:00–14:00	13:00–17:00	12:00–16:00	14:00–18:00	15:00–19:00
Петренко В. І.	12:00–16:00	08:00–12:00	15:00–19:00	11:00–15:00	10:00–14:00
Ярош З. А.	12:00–16:00	09:00–13:00	11:00–15:00	10:00–14:00	08:00–12:00

У які дні тижня Микола може потрапити до свого сімейного лікаря, якщо йому потрібно 45 хвилин, щоб дістатися з місця роботи до поліклініки?

1087.* Петру Івановичу треба купити 2 буханці хліба, 800 г ковбаси та 0,5 кг шинки. У таблиці наведено ціни на ці продукти в трьох магазинах, найближчих до дому Петра Івановича.

Магазин	Ціна, грн		
	Хліб (за буханець)	Ковбаса (за 1 кг)	Шинка (за 1 кг)
«Смачно»	26	280	400
«Апетит»	24	270	360
«Свіжі продукти»	28	310	480

У магазині «Смачно» в Петра Івановича є дисконтна картка зі знижкою в розмірі 5 % на всі продукти. У магазині «Свіжі продукти» цього дня діє знижка в розмірі 10 % на всі ковбасні та м'ясні вироби. У якому магазині Петру Івановичу найвигідніше зробити покупку?

1088.* Студентка Олена живе в селі Карпове, а навчається в коледжі обласного центру, до вокзалу якого вона їде приміським електропоїздом. У коледжі заняття починаються о 8:30, а на дорогу від залізничного вокзалу до коледжу вона витрачає 40 хв. У таблиці наведено фрагмент розкладу руху електропоїздів.

Відправлення зі станції Карпове	Прибуття на вокзал обласного центру
5:18	6:16
6:09	7:13
6:27	7:31
6:52	7:57
12:50	13:48

О котрій годині найпізніше може виїхати Олена, щоб не спізнитися на заняття?

1089.* Заповніть пропуски в таблиці витрат енергії під час занять спортом.

Вид спорту	Маса тіла, кг	Час, год	Інтенсивність витрат енергії, ккал на 1 год на 1 кг маси тіла	Загальні витрати енергії, ккал
Футбол	60	1,5	4,4	
Біг підтюпцем	45	0,5		189
Катання на роликових ковзанах		0,75	4,2	126
Стрибки через скакалку		0,1	5,6	28

1090.* У таблиці подано інформацію про міста України з найбільшою кількістю жителів станом на 2020 р. Заповніть останній стовпець таблиці.

Місто	Населення, млн осіб	Територія, км^2	Щільність, осіб/км^2
Київ	2,967	836	
Харків	1,443	350	
Одеса	1,018	162	
Дніпро	0,991	410	
Донецьк	0,908	358	

1091.* Заповніть пропуски в таблиці витрат сім'ї на продукти харчування.

	Назва товару	Кількість	Ціна	Вартість покупки
1	Цукор кристалічний	2 кг	40 грн/кг	
2	Соняшникова олія	3 л	75 грн/л	

Комунальний заклад «Вишгородський ліцей»

	Назва товару	Кількість	Ціна	Вартість покупки
3	Куряче яйце		60 грн/дес.	120 грн
4	Молоко	2 л		80 грн
5	Твердий сир		400 грн/кг	160 грн
6	Яблука	2,5 кг		80 грн

1092.* На одному із сайтів розміщено таку інформацію:

...Газета на звичайному папері буде перероблена природою за 2–3 місяці. Дещо довше — до 4–5 місяців — розкладатиметься тонкий картон. Офісний папір для принтера згниє на звалищі за 2 роки. Консервні й алюмінієві банки окислюються та розпадаються на найдрібніші фрагменти протягом 80 років. Але справжній жах для навколишнього середовища — це пластик. Звичайний пластиковий стакан розкладатиметься 150 років, поліетиленові пакети можуть лежати в землі до 300 років, а багато пластикових предметів переживуть і 500 років.

Складіть таблицю, яка відображає час розкладання сміття в природі.

Комунальний заклад «Вибір» Видавництво «Гімназія»

1093.* На одному із сайтів розміщено таку інформацію:

...Сьогодні у світі налічується близько 1,3 млрд курців. Від різних хвороб, пов'язаних із курінням, щороку помирає 4,8 млн людей. Під час куріння утворюється близько 1200 шкідливих речовин, виділяються смоли, які містять 43 види канцерогенів (речовин, що викликають рак). Викурюючи пачку сигарет, курець вводить у свій організм понад 400 мл чадного газу. Серце курця робить за добу 15 000–20 000 додаткових скорочень і швидко зношується. Курець власноруч скорочує своє життя на 10–15 років.

Доповніть цю інформацію даними з інтернету та складіть таблицю, яка відображає шкоду куріння.

1094.* Заповніть пропуски в таблиці результатів українських школярок на Європейській математичній олімпіаді серед дівчат за останні роки.

Рік	Місце проведення	Золото	Срібло	Бронза	Разом
2019	Україна	3	0	1	
2020	Нідерланди	0	3		3
2021	Грузія		3	1	
2022	Угорщина		2	1	4
2023	Словенія	1			4
Разом			**11**		**19**

1095.* Заповніть пропуски в таблиці результатів українських школярів і школярок у Міжнародних фізичних олімпіадах 2019–2023 рр.

Рік	Місце проведення	Золото	Срібло	Бронза	Разом
2019	Ізраїль	0	1		4
2020	Росія		2		2
2021	Литва	1	1		
2022	Швейцарія		1	3	4
2023	Японія	0	1		5
Разом		1	6	13	

1096.* (*Домашня практична робота*) Медичні спостереження показали, що відношення зросту людини до довжини її стопи в дорослих чоловіків приблизно становить 6,6, а в дорослих жінок — 6,8. Під час археологічних розкопок однієї з пірамід індіанців мая було встановлено розмір жіночої стопи — 23,5 см. Оцініть зріст цієї жінки. Проведіть аналогічне дослідження серед своїх однолітків і знайдіть відповідні коефіцієнти. Подайте результати ваших вимірювань у формі таблиці.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1097. Загальна площа двох ділянок, засіяних кукурудзою, дорівнює 100 га. На першій ділянці зібрали по 90 т зеленої маси кукурудзи з 1 га, а на другій — по 80 т. Знайдіть площу кожної ділянки, якщо з першої ділянки зібрали на 2200 т більше, ніж із другої.

1098. Розкладіть на множники:

1) $2ab-3ab^2$;
2) $8x^4+2x^3$;
3) $12a^2b^2+6a^2b^3+12ab^3$;
4) $2a-2b+ac-bc$;
5) $m^2-mn-4m+4n$;
6) $ax-ay+cy-cx-x+y$.

1099. При деякому значенні x значення виразу $3x^2-x+7$ дорівнює 10. Якого значення набуває вираз $6x^2-2x+7$ при цьому значенні x?

ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

Пропонуємо вашій увазі завдання з елементами інформатики, які ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Деякі з них — продовження та розвиток вправ цього підручника (такі вправи в тексті підручника помічено значком «», а тут указано номер відповідної вправи).

На уроках інформатики ви вивчатимете елементи програмування. Головне в програмуванні — це придумати алгоритм, тобто послідовність дій, за допомогою якої можна із вхідних даних отримати вихідні дані. Нижче наведено багато завдань на складання алгоритмів. Ці завдання не є обов'язковими для виконання, їх насамперед адресовано тим, хто цікавиться інформатикою. А якщо ви вже опановуєте якусь мову програмування, то можете не лише придумати алгоритм, а й написати програму для його реалізації. Якщо ви захоплюєтеся програмуванням, постарайтеся зробити це для всіх наведених тут завдань, хоча серед них є і досить складні. Найскладніші завдання, які потребують багато часу, позначено зірочкою (*). Їх можна виконати на канікулах.

Геометрія вивчає фігури: відрізки, трикутники, прямокутники, прямокутні паралелепіпеди, кулі тощо. Тому корисно навчитися користуватися **графічним редактором**, за допомогою якого можна працювати з геометричними фігурами та будувати креслення. Прикладами таких редакторів можуть бути *CorelDraw*, *Visio* тощо. Виберіть з допомогою вчителя графічний редактор для виконання рисунків до завдань цього розділу. Крім цих завдань, за допомогою вибраного графічного редактора можна ілюструвати задачі, які ви розв'язуєте. А коли ви захочете зробити доповідь

або цікаве повідомлення для товаришів, то можете за допомогою **програм для побудови презентацій** (наприклад, *PowerPoint*) створити навіть мультфільм із «життя» геометричних фігур.

Існує багато програм, створених спеціально для школярів і призначених допомогти їм вивчати математику: мультимедійні освітні програми, програми для виконання геометричних побудов. Ви можете знайти їх у мережі «Інтернет». А може, здобувши знань і набувши вмінь, ви й самі розробите корисні програми для вивчення геометрії.

Наведені нижче завдання ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем.

Вступ до алгебри

Як використовують змінні в програмуванні? Чому використання змінних дає змогу розв'язати не одну-єдину задачу, а низку схожих задач?

Дізнайтеся, яку мову програмування ви вивчатимете на уроках інформатики. Як у цій мові використовують змінні? Як складають числові вирази?

Якщо вираз містить ділення на змінну, то чи завжди він має зміст? Як треба це враховувати під час написання програм?

Лінійне рівняння з однією змінною

Запишіть алгоритм, для якого вхідними даними є значення чисел a і b, а вихідними — розв'язок лінійного рівняння $ax = b$. Які випадки треба передбачити, щоб цей алгоритм видавав правильну відповідь для будь-яких значень a і b?

Лінійні рівняння з однією змінною як математичні моделі сюжетних задач

Деякі задачі цього пункту схожі. Це означає, що їхня математична модель однакова.

Комунальний заклад «Вінницький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Миколи Пирогова»

Знайдіть такі задачі. Побудуйте для них математичну модель і напишіть алгоритм для їхнього розв'язування. Які величини будуть для цього алгоритму вхідними даними, а які — вихідними?

Тотожно рівні вирази. Тотожності

Чи можна за допомогою комп'ютера довести тотожність, перебравши всі можливі значення змінних, що до неї входять, та обчисливши при цих значеннях змінних значення лівої та правої частин тотожності?

Степінь з натуральним показником

Запишіть алгоритм, вхідними даними для якого є основа степеня a і показник степеня n, а вихідними — степінь числа a з показником n. Для якого значення показника треба розглянути окремий випадок?

Властивості степеня з натуральним показником

Напишіть програму, яка ілюструє одну з властивостей степеня з натуральним показником.

Одночлени

Як у мові програмування, яку ви вивчаєте, записати одночлен? Що для цього потрібно, крім чисел і змінних? Яка принципова відмінність існує між записом одночлена в математиці та в програмуванні?

Придумайте який-небудь одночлен. Напишіть програму для обчислення його значення. Які величини будуть вхідними даними для цієї програми, а які — вихідними?

Многочлени

Як у мові програмування, яку ви вивчаєте, записати многочлен?

Придумайте який-небудь многочлен. Напишіть програму для обчислення його значення.

Многочлен являє собою вираз. У якому порядку виконуються операції під час обчислення його значення в математиці? А в мові програмування, яку ви вибрали?

Додавання і віднімання многочленів

Як використовують дужки у вибраній вами мові програмування? Як вони впливають на порядок обчислення виразів?

348. У цій задачі використано форму запису числа $\overline{abc}$. Напишіть програму, для якої вхідними даними є значення змінних a, b, c, а вихідними — значення числа $\overline{abc}$. Чи можете ви написати програму, для якої кількість цифр у цьому записі буде змінною?

Множення одночлена на многочлен

Як записати вибраною вами мовою програмування добуток одночлена та многочлена?

Множення многочлена на многочлен

Як записати вибраною вами мовою програмування добуток двох многочленів?

421. Сформулюйте цю задачу в загальному вигляді. Які дані для цієї задачі є вхідними, а які — вихідними? Побудуйте математичну модель задачі. Запишіть алгоритм її розв'язування в загальному вигляді.

Розкладання многочлена на множники. Винесення спільного множника за дужки

455. Спростіть вираз, наведений у цій вправі. Виберіть які-небудь значення змінних. Обчисліть за допомогою калькулятора спочатку значення початкового виразу, потім — значення спрощеного виразу. На скільки операцій спрощення виразу полегшило роботу з обчислення його значення?

462. Запишіть алгоритм для розв'язування цієї задачі перебором усіх двоцифрових чисел. Скільки часу

знадобилося б для розв'язування цієї задачі перебором без комп'ютера та калькулятора?

Розкладання многочлена на множники. Метод групування

490. Сформулюйте цю задачу в загальному вигляді. Які дані для цієї задачі є вхідними, а які — вихідними? Створіть математичну модель задачі. Запишіть алгоритм розв'язування цієї задачі в загальному вигляді.

492. Запишіть мовою програмування, яку ви вивчаєте, наведені в задачі вирази.

Добуток різниці та суми двох виразів

514. Напишіть програму для обчислення значення виразу, наведеного в цій задачі. Чи можна за допомогою цієї програми довести твердження задачі?

Різниця квадратів двох виразів

529. Чи можете ви сформулювати алгоритм, яким користувалися під час розв'язування цієї задачі?

538. Запишіть алгоритм для розв'язування цієї задачі.

539. Запишіть алгоритм для розв'язування цієї задачі. Яким чином ви задасте число π?

Квадрат суми та квадрат різниці двох виразів

580, 581. Чи можна для задач 580 і 581 побудувати спільну математичну модель? Запишіть спільний алгоритм для розв'язування цих двох задач.

Оповідання «Трикутник Паскаля»

Напишіть програму для формування трикутника Паскаля, вхідними даними для якої є кількість рядків у трикутнику. Зверніть увагу на розташування результатів у формі рівнобедреного трикутника.

Конгрсний відділ Видавництво «Ірвязія»

Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів

611. Чи можете ви сформулювати алгоритм, яким користувалися під час розв'язування цієї задачі?

648. Знайдіть в інтернеті інформацію про те, скільки кілограмів макулатури (у середньому) заміняють одне дерево під час виробництва паперу. Виберіть який-небудь вид дерев і знайдіть кількість кисню, яку виробляє дерево такого виду за рік. За умовою задачі 648 визначте, скільки дерев такого виду врятували учениці й учні цієї школи та який об'єм кисню виробляють ці дерева за рік.

652. Запишіть мовою програмування, яку ви вивчаєте, наведені в задачі вирази.

Сума й різниця кубів двох виразів

659. Запишіть алгоритм, за допомогою якого можна розкласти на множники суму або різницю двох одночленів за формулами суми або різниці кубів двох виразів. Які вхідні дані треба передбачити, щоб цей алгоритм працював для якомога різноманітніших одночленів?

Зв'язки між величинами. Функція

Напишіть програму, що ілюструє розв'язування прикладу 2 цього пункту. Які вхідні дані треба передбачити, щоб написана вами програма була якомога гнучкішою (тобто щоб її можна було застосовувати для якомога більшого числа випадків)?

У вправах цього пункту описано різноманітні функціональні залежності між величинами. Виберіть кілька залежностей; для кожної з них визначте незалежну змінну й запишіть алгоритм, для якого вхідними даними буде значення незалежної змінної, а вихідними — значення залежної змінної.

Яким чином можна зобразити координатну площину на екрані комп'ютера? Знайдіть засоби в графічному редакторі, якими ви для цього скористаєтеся. Які засоби використовують у мові програмування, що ви її вивчаєте, для розміщення яких-небудь зображень у певному місці екрана комп'ютера?

734. Запишіть алгоритм для обчислення залежності об'єму V води в цистерні від часу t, протягом якого з неї виливається вода. Не забудьте, що рано чи пізно вода в цистерні закінчиться. Яку відповідь має видавати цей алгоритм, коли вся вода із цистерни виллється? Зробіть висновок, як потрібно в програмуванні враховувати область визначення функції.

Способи задання функції

Створіть у текстовому та/або табличному редакторі таблицю, яка задає деяку функцію.

Вивчіть інструменти цього редактора, які дають змогу заповнити таблицю за допомогою формули, що задає функцію. Виконайте за допомогою цих інструментів які-небудь завдання цього пункту.

Графік функції

Освойте інструменти текстового та/або табличного редактора для побудови графіка функції, заданої таблично. Які елементи оформлення дають змогу зробити графік наочним?

Чи знаєте ви які-небудь комп'ютерні програми, що дають змогу побудувати графік довільної функції?

* Ви можете написати свою програму, яка зображує графік довільної функції на екрані комп'ютера. Які інструменти програмування вам потрібно для цього опанувати? Що необхідно знати про цю функцію, щоб графік адекватно зображував її та був красиво розташований на екрані?

Лінійна функція, її графік і властивості

Запишіть алгоритм, що за вхідними даними k і b визначить, яка пряма є графіком функції $y = kx + b$: горизонтальна чи негоризонтальна; проходить ця пряма через початок координат чи ні.

Створіть у текстовому та/або табличному редакторі таблицю, що задає яку-небудь лінійну функцію. За допомогою засобів цього редактора побудуйте графік вибраної функції.

Рівняння з двома змінними

Припустимо, що ви маєте підпрограму, вхідними даними для якої є пара чисел, а вихідними — відповідь, чи є ця пара чисел розв'язком деякого рівняння з двома змінними. Як, використовуючи дану підпрограму, написати програму для зображення графіка цього рівняння на екрані комп'ютера? Що ще треба знати, щоб отриманий графік був інформативним?

* Напишіть таку програму.

Лінійне рівняння з двома змінними та його графік

Запишіть алгоритм, що за вхідними даними a, b і c визначить, яка фігура є графіком рівняння $ax + by + c = 0$.

* Напишіть програму, яка за вхідними даними a, b і c рисує на екрані комп'ютера графік рівняння $ax + by + c = 0$.

Системи рівнянь із двома змінними. Графічний метод розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

Опануйте засоби графічного редактора, які дають змогу зобразити на екрані точку із заданими координатами. Навчіться проводити пряму через дві точки. Виберіть яку-небудь систему рівнянь з даного пункту та проілюструйте її розв'язання графічним методом за допомогою цього інструментарію.

Конкурсний відділ Видавничого «Генеза»

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки

* За алгоритмом, описаним у цьому пункті, напишіть програму розв'язування системи з двох лінійних рівнянь із двома змінними методом підстановки. Як ця програма має передбачати ситуації, коли система не має розв'язків? має безліч розв'язків?

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання

* За алгоритмом, описаним у цьому пункті, напишіть програму розв'язування системи з двох лінійних рівнянь із двома змінними методом додавання. Як у цій програмі потрібно передбачити ситуації, коли система не має розв'язків? має безліч розв'язків?

Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь

* Припустимо, що задано координати деяких двох точок A і B на координатній площині та через ці точки проведено пряму. Задають абсцису деякої точки C, яка лежить на цій самій прямій. Напишіть алгоритм, що знаходить ординату точки C. Чи завжди цей алгоритм «працюватиме»? Яку ситуацію треба розглянути окремо та яку перевірку для цього потрібно виконати? Які вихідні дані для цієї ситуації має видати алгоритм?

Інформація і таблиці

1087. Автоматизуйте обчислення за допомогою табличного редактора. Зробіть інформацію про ціну продуктів і наявність знижок змінними величинами (вхідними даними).

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

§ 1. Алгебраїчні вирази. Рівняння з однією змінною

4. 1) $17\frac{4}{27}$; 2) $-0{,}3$; 3) 1. **5.** 1) $1\frac{1}{4}$; 2) 4,4. **23.** 110 пудів. **39.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$; 3) коренів немає; 4) коренем рівняння є будь-яке число. **41.** 1) 5; 2) 0,8; 3) коренем рівняння є будь-яке число; 4) коренів немає. **43.** 1) 0,6; 2) $\frac{3}{14}$; 3) $-0{,}9$. **44.** 1) 44; 2) $-5{,}2$. **45.** 1) $-\frac{9}{25}$; 2) коренем рівняння є будь-яке число. **46.** 1) $-\frac{4}{11}$; 2) коренів немає. **47.** 1) 0,4; -8; 2) 0; 25; 3) $\frac{2}{3}$; -12; 4) $-0{,}6$; -1; $-0{,}3$. **48.** 1) 6; $-4{,}5$; 2) $-0{,}8$; 3. **49.** 1) 10; 2) -3. **50.** 1) 1; 2) $-1{,}4$. **51.** 1) 12; 2) $4\frac{2}{3}$; 3) 2. **52.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2; 3) 4,8. **53.** 1) -10; 2) 3; 3) 1; 4) 0,5. **54.** 1) -12; 2) $-0{,}2$. **55.** 5) $-\frac{2}{3}$; -2. **56.** 4) -20; 100. **57.** 2) 55. **58.** 2) $\frac{1}{3}$. **61.** 2) -53; -11; -5; -3; 3; 45. **62.** 2) 7; 11; 31. **63.** 1) 14; 2) $-\frac{31}{45}$. **64.** 1) -17; 2) 3,5. **65.** 2) 3; 3) 2. **66.** 2) 2; 3) -5. **67.** 1) $a \neq 5$; 2) $a \neq -7$. **68.** 1) Якщо $b \neq -1$, то $x = \frac{9}{b+1}$; якщо $b = -1$, то коренів немає; 2) $x = -\frac{4}{b^2+1}$. **69.** Якщо $m \neq -8$, то $x = 1$; якщо $m = -8$, то x — будь-яке число. **70.** 1) 3; 2) $-1{,}8$; 3) -1; 2.

Комунальний заклад «Видавництво «Гімназія»

71. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) коренів немає. **72.** 1) a — парне число; 2) a — непарне число; 3) число a кратне 4; 4) таких значень не існує. **73.** 1) Число b кратне 3; 2) число b при діленні на 3 дає остачу 1; 3) таких значень не існує. **74.** 1) При $b > 0$; 2) при $b < 0$. **75.** 1) При $d < 0$; 2) при $d > 0$. **76.** 56 матчів. **77.** 1) 18 год; перший виконає $\frac{2}{5}$ завдання, а другий — $\frac{3}{5}$ завдання. **78.** 240 сторінок. **79.** 1) Парним; 2) непарним; 3) парним. **80.** 1) Ні, $2a < a$ при $a < 0$ і $2a = a$ при $a = 0$; 2) ні, $2|a| = |a|$ при $a = 0$. **86.** 2061 м, 2032 м, 2020 м. **87.** 515 м, 400 м, 370 м. **90.** 20 робітниць. **91.** 90 км. **92.** 20 кг, 14 кг. **93.** 264 місця, 270 місць. **94.** 12 км/год, 60 км/год. **95.** 168 грн, 144 грн. **96.** 72 грн. **99.** 4 роки. **100.** 7 років. **101.** 30 словників, 10 словників. **102.** 18 000 грн, 12 000 грн. **103.** 11 монет, 8 монет. **104.** 800 т. **105.** 360 грн. **106.** 40 кг, 8 кг. **107.** 600 кг, 200 кг. **108.** 5 днів. **109.** 40 л, 80 л. **110.** 4,5 год, 0,5 год. **111.** 24 хв. **112.** 50 км/год, 20 км/год. **113.** 30,5 км/год. **114.** 2 км/год. **115.** 71 особа. **116.** 109 апельсинів. **117.** 45 кг, 10 кг. **118.** 14 кг, 10 кг. **119.** 60 книжок. **120.** 160 л. **121.** 8 днів. **122.** 100 задач. **123.** 55 км/год, 65 км/год або 70 км/год, 80 км/год. **124.** 100 кг, 200 кг. **125.** 20 кг, 30 кг. **126.** 1) 4,04; 2) −35,16; 3) $1\frac{8}{9}$. **129.** 4. **146.** 24 год. **147.** 1) $b < 0$; 2) $|a| < |b|$. **148.** Зменшилася на 25 %. **164.** 2) 4,8; 3) 0,0625. **165.** 3) 75. **194.** 2) $x = 1$ і $y = -2$. **196.** 1) $x = 0$; 2) $x = 1$. **197.** 1) $x = 0$; 2) $x = -3$. **198.** 2) *Вказівка.* Доведіть, що остання цифра значення виразу дорівнює 0; 3) *Вказівка.* Значення виразу — це число, остання цифра якого дорівнює 3, а решта — 9. **199.** *Вказівка.* Доведіть, що сума цифр значення виразу

дорівнює 9. **200.** *Вказівка.* Доведіть, що остання цифра значення виразу дорівнює 5. **202.** 20 %. **203.** a — від'ємне число, b — додатне число, $c = 0$. **229.** 2) 2^5; 3) 2^{2n}; 4) 2^{n+1}. **248.** 5^{97}. **249.** 1) 6; 2) 1; 3) 4 або 6; 4) 1, або 3, або 7, або 9. **250.** 1) 1; 2) 1; 3) 1 або 9. **251.** 1) *Вказівка.* Останньою цифрою степеня 17^8 є 1; 2) *Вказівка.* Останньою цифрою степеня 64^{64} є 6; 3) *Вказівка.* Останньою цифрою степеня $3^{4n} = 81^n$ є 1. **252.** 1) *Вказівка.* Останньою цифрою степеня 4^{40} є 6; 2) *Вказівка.* Останньою цифрою степеня 2004^{171} є 4, а степеня 171^{2004} — 1. **253.** $48^{25} < 49^{25} = 7^{50} < 7^{51} = (7^3)^{17} = 343^{17} < 344^{17}$. **255.** 12 качок. **256.** 3,6 год. **286.** 3) −43,2. **287.** 3) $-\frac{32}{27}$. **288.** 2) 24,5; 3) 30. **289.** 2) 1350; 3) −486. **291.** 600 грн. **327.** 4) 6. **340.** 5. **349.** 1) $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c)$. **350.** *Вказівка.* Розгляньте суму даних многочленів. **352.** У листопаді. **353.** 3990 грн. **354.** 4 год. **355.** 144 дерева. **368.** 1) −2; 2) −5; 3) коренем рівняння є будь-яке число; 4) коренів немає. **369.** 1) 2; 2) 0. **373.** 1) $7b^2$; 2) 0. **374.** 1) 45; 2) 0; 3) $\frac{7}{4}$; 4) 2,1. **375.** 1) −1; 2) $-\frac{83}{4}$. **376.** $-\frac{3}{7}$. **377.** 8 см. **378.** 64 см. **384.** 36 км, 42 км, 30 км. **385.** 22 деталі, 34 деталі, 24 деталі. **388.** 800 км², 360 км², 204,8 км². **389.** 210 сторінок. **397.** 1) −7; 2) 1; 3) −1; 4) коренів немає. **398.** 1) 2; 2) 6; 3) коренем рівняння є будь-яке число. **404.** 6; 7; 12; 14. **405.** 8; 12; 18. **406.** 7; 8; 9; 10. **407.** 16; 17; 18. **408.** 15 см. **409.** 18 см, 12 см. **410.** 14 см, 12 см. **419.** 24 000 грн. **420.** 2300 грн. **421.** 9 %. **422.** 60 років. **444.** 5) $-a(a + b) \times (2a + 3b)$; 6) $3m(m - 8)(3m - 16)$; 7) $(a + 5)(3a + 2)$. **445.** 4) $(x - 6)(x + 4)$; 5) $(x^2 - 2)(2y - 7)$; 6) $(4a - 3b) \times$

$\times(3a + 7b)$. **446.** 1) -7; 2) 2; $2\frac{2}{3}$; 3) 5; -40; 4) 7; 14. **447.** 1) -6; 9; 2) 10; -6; 3) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; 4) $1\frac{1}{3}$; 1. **448.** 7) $49a^2\times$ $\times(1 + 2b)^2$; 8) $81c^{12}(c - 2)^4$. **449.** 5) $64x^2y^2(2x + 5y)^2$; 6) $32x^{10}(11x^2 - 14y^3)^5$. **454.** 1) $2a + 4$; 2) $6ab - 4b$; 3) $8ab^2 - 14b^3$. **455.** 1) $2a^2b^2$; 2) $2ab + 2b^2$. **458.** 2) 24; 3) 20. **459.** 2) -4; 3) -12. **460.** 1) 1; 2) 0,8; 3) 5. **461.** 1) $a = 3$; 2) $a = -\frac{2}{3}$. **462.** 18. *Вказівка.* Нехай дане число $\overline{ab}$. Тоді $\overline{ab} = 10a + b = (a + 1)(b + 1)$, звідси $9a =$ $= ab + 1$, $a\,(9 - b) = 1$. Звідси $a = 1$, $b = 8$. **464.** 20 кг. **477.** 1) 15; 2) 72; 3) 25. **478.** 1) 250; 2) -1. **481.** 1) $(x + 6)\,(x + 2)$; 2) $(x - 4)\,(x - 1)$; 3) $(x - 1)\,(x + 8)$; 4) $(x + 1)\,(x - 5)$. **482.** 1) $(x + 1)\,(x + 3)$; 2) $(x - 2)\,(x - 8)$; 3) $(x + 6)\,(x - 3)$; 4) $(x - 8)\,(x + 4)$. **483.** *Вказівка.* $n^3 +$ $+ 3n^2 + 2n = n\,(n^2 + 3n + 2) = n\,(n^2 + n + 2n + 2) =$ $= n(n(n + 1) + 2(n + 1)) = n(n + 1)(n + 2)$. **484.** $(a + b + c)^2$. *Вказівка.* Подайте кожний із членів $2ab$, $2bc$ і $2ac$ даного многочлена у вигляді суми $ab + ab$, $bc + bc$, $ac + ac$ відповідно та застосуйте метод групування. **485.** *Вказівка.* $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) =$ $= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10(3^n - 2^{n-1})$. **486.** 2. *Вказівка.* $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 +$ $+ y^4 + y^2 = 2x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) + y^2$. **487.** Знизилася на 4 %. **488.** Знизилася на 23 %. **489.** 4 вівці. **490.** 6 год. **508.** 5) $16a^4 - 1$; 6) $c^{12} - 625$. **509.** 4) $a^8 - 1$. **510.** 4) b^2c^5. **511.** 2) b^{12}. **512.** 1) -1; 2) $-25{,}6$. **513.** 1) -40; 2) коренів немає. **517.** 1) 4; 2) 25; 3) 9; 4) -1; 5) -1. **518.** 1) 1; 2) 256. **520.** 1) *Вказівка.* $253 \cdot 259 = (256 - 3)(256 + 3)$, $252 \cdot 260 = (256 - 4)(256 + 4)$. **522.** 4 год. **523.** $7^5 = 16\,807$ жмень, 1,34 т. **541.** 1) $(a - b)\,(a + b)\,(a^2 + b^2)\,(a^4 + b^4)$;

2) $(a^2-2)(a^2+2)(a^4+4)(a^8+16)$. **542.** 1) 4; $-\frac{2}{3}$; 2) -1; -7; 3) -10; $-2\frac{2}{3}$. **543.** 1) $\frac{2}{11}$; $\frac{10}{11}$; 2) -16; $-\frac{3}{8}$. **547.** 1) $(2n+2)^2-(2n)^2=(2n+2-2n)(2n+2+2n)=2(4n+2)$. **548.** 1) $b=2$; 2) $b=-2$; 3) $b\neq 2$ і $b\neq -2$. **551.** 45 кг. **552.** 1) $a>0$; 2) $a\neq 0$; 3) a — будь-яке число. **579.** 5. **580.** 7 см. **581.** 26 см. **582.** 12; 13; 14. **583.** 19; 20; 21; 22. **592.** 1. **597.** 0 або 1. **600.** Нехай n — третє з даних чисел, тоді дані числа дорівнюють відповідно $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, де $n>2$. Доведіть, що сума квадратів цих чисел дорівнює $5(n^2+2)$. Щоб здобутий результат міг бути квадратом деякого натурального числа, значення виразу n^2+2 має бути кратним 5, тобто його останньою цифрою має бути цифра 0 або цифра 5. Оскільки останньою цифрою значення виразу n^2 може бути одна із цифр 0, 1, 4, 5, 6, 9, то значення виразу n^2+2 не може закінчуватися цифрою 0 або цифрою 5. **601.** 5000 т. **603.** 190 год. **604.** 2) Таких значень немає; 3) $x=-1$. **619.** 1) $(4a-b)^2$; 2) $(6x+5y)^2$. **620.** 1) $(2m+2n)^2$; 2) $(7x+4y)^2$. **621.** 1) 0,0016; 2) 10 000. **622.** 1) 10 000; 2) 9. **625.** 2) $-\frac{7}{9}$. **626.** 2) $\frac{3}{5}$. **630.** 1) *Вказівка.* $x^2-14x+52=x^2-14x+49+3=(x-7)^2+3$. **631.** 1) 1 при $x=3$; 2) 16 при $x=-\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$ при $x=-\frac{1}{2}$. **633.** 1) 100 при $x=-8$; 2) 11 при $x=\frac{3}{4}$. **634.** 1) 4 при $x=14$; 2) -50 при $x=-\frac{5}{3}$. **635.** $(a-3b)(a-3b-4)+4=(a-3b)^2-4(a-3b)+4=(a-3b+2)^2$. **636.** 6) *Вказівка.* $2a^2+2b^2=(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)$.

637. 1) $(a^2 + 1 - a)(a^2 + 1 + a)$; 2) $(x - y)(x + y + 4)$; 3) $(ab - c - 3)(ab + c + 5)$; 4) $(2a + b - 2)(4a - b - 2)$. **638.** 1) $(a^2 + 4)^2 + (3a)^2$; 2) $(x - 5)^2 + (y + 7)^2$; 3) $(x - 3y)^2 + (x - 3)^2$; 4) $(x - 2)^2 - (y + 1)^2$. **639.** 1) $x = -4$, $y = 5$; 2) $x = -6$, $y = 1$. **640.** 1) $x = -1$, $y = 0{,}5$; 2) таких значень не існує. **641.** 45. **642.** 8. **643.** -10. **644.** $24 = 12 + 12$. *Вказівка.* Нехай один із доданків дорівнює x, тоді другий дорівнює $24 - x$, а їхній добуток: $x(24-x) = 24x - x^2 = 12^2 - 12^2 + 2 \cdot 12x - x^2 = 144 - (12-x)^2$.

645. 5 см, 5 см. **646.** 4. *Вказівка.* $b^2 + \frac{a^2}{4} = b^2 + \frac{a^2}{4} + ab - ab = \left(b + \frac{a}{2}\right)^2 - ab$. **647.** 0. *Вказівка.* Обидві частини даної в умові рівності помножте на 2, а потім подайте у вигляді $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 = 0$. **650.** 6 човнів. **651.** 420 днів. *Вказівка.* Щоб дізнатися, через скільки днів рибалки знову зберуться на озері разом, треба знайти НСК (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). **672.** 1) 9; 2) $25x - 64$; 3) $-6a^2 + 9a - 27$; 4) $a^{24} - 1$. **673.** 1) -124; 2) $-y^2 + 3y - 36$; 3) $a^6 - b^6$. **679.** 1. *Вказівка.* $x^6 + 3x^2y^2 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + 3x^2y^2$. **680.** 8. **684.** 4) $\frac{1}{3}$; 6) 0; $\frac{1}{6}$. **705.** 6) -2; -3; 3; 7) 5; 8) -1; 1. **706.** 5) -1; 1; 6) -5; 5; 4. **714.** 4) $(2a - 5)(2a - 1)$; 5) $(3x - 7y)(3x - y)$; 6) $3(2m - n) \times (6m - 7n)$. **715.** 4) $(x + 3)(x - 2)$; 5) $(c + 3d)(c + 5d)$; 6) $(3x - 8y)(3x - 2y)$. **716.** 1) -40; 2) 74; 3) 84. **717.** 1) 54; 2) 48; 3) 1746. **718.** 1) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$; 2) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; 3) $(2x^2 - 4x + 1)(2x^2 + 4x + 1)$. *Вказівка.* $4x^4 - 12x^2 + 1 = (4x^4 + 4x^2 + 1) - 16x^2$; 4) $(x^2 + x + 1) \times (x^3 - x^2 + 1)$. *Вказівка.* $x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$; 5) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$; 6) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \times (x^4 + 2)$. **719.** 1) $(x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$; 2) $(x^2 - 2x - 2) \times (x^2 + 2x - 2)$. **721.** 210 грн.

§2. Функції

764. 1) 60 %; 2) 119 місць. **796.** Збільшився на 0,8 %. **803.** а) Область визначення: усі x такі, що $-1 \leqslant x < 4$, область значень: усі y такі, що $1 \leqslant y < 4$; б) область визначення: усі x такі, що $-2 \leqslant x \leqslant 3$, область значень: усі y такі, що $1 \leqslant y \leqslant 4$; в) область визначення: усі x такі, що $-2 \leqslant x < 3$, область значень: усі y такі, що $1 < y \leqslant 4$; г) область визначення: усі x такі, що $-2 < x < 4$, область значень: $y = 2$; ґ) область визначення: $x = 1$ або $x = 3$, область значень: $y = -2$ або $y = 1$. **804.** а) Область визначення: усі x такі, що $-2 \leqslant x < 2$, область значень: усі y такі, що $-1 < y \leqslant 4$; б) область визначення: усі x такі, що $-2 \leqslant x \leqslant 2$, область значень: усі y такі, що $1 \leqslant y \leqslant 4$; в) область визначення: усі x такі, що $-2 \leqslant x < 3$, область значень: усі y такі, що $1 \leqslant y < 4$; г) область визначення: усі x такі, що $-3 < x < 2$, область значень: $y = -2$; ґ) область визначення: $x = -3$ або $x = 4$, область значень: $y = -1$ або $y = 3$. **824.** Рис. 73. **825.** Рис. 74. **826.** 15 год. **828.** 15 бджілок. **860.** $A\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **861.** 1) $(-10; -27)$; 2) $(-14; 8)$. **862.** $(3; 5)$. **866.** 1. **867.** 3. **868.** $k = 0{,}5$, $b = 4$. **869.** $k = \frac{1}{3}$,

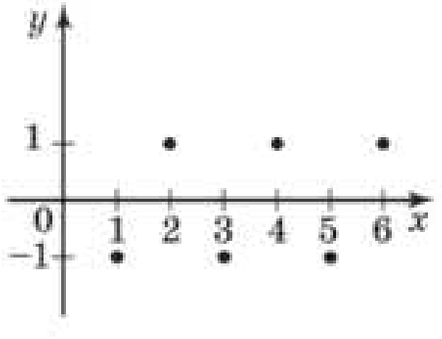


Рис. 73

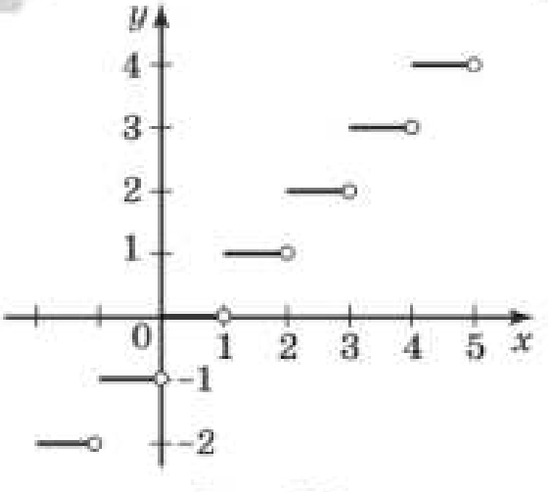


Рис. 74

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

$b = -1$. **874.** 1) n; 2) k; 3) m; 4) p. **882.** 1) $y = x + 3$; 2) $y = -0{,}5x - 1$. **883.** 1) $y = -\frac{2}{3}x$; 2) $y = 2x - 4$. **884.** Рис. 75.

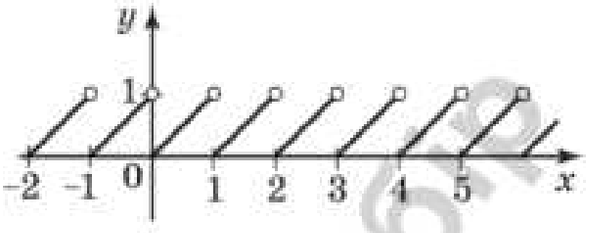


Рис. 75

885. Перший — 360 000 грн, другий — 600 000 грн, третій — 840 000 грн. **887.** $a^2 - b^2$. *Вказівка.* $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$.

§ 3. Системи лінійних рівнянь із двома змінними

899. 2. **900.** 6. **901.** 3) (−3; 0); (3; 0); (0; −3); (0; 3); 4) (5; 0); (−5; 0); (0; −5). **916.** 1) (1; 1); 2) (1; 3); (6; 2); (11; 1). **918.** 3 способи. **919.** 9 задач з алгебри та 2 з геометрії, або 6 задач з алгебри та 4 з геометрії, або 3 задачі з алгебри та 6 з геометрії. **920.** 1) (0; 2); 2) (−1; 3); 3) (−0,5; −0,5); 4) розв'язків немає. **921.** 1) (5; −5); 2) розв'язків немає. **922.** (0; 0); (−1; 0); (1; 0); (0; −2). **923.** (0; 4); (0; −4); (5; 0); (−5; 0). **924.** 5 %. **925.** 1) 6; 2) −5. **926.** 269,5 км. **968.** $a = -4$, $b = 2$. **971.** 1) d; 2) c; 3) b; 4) a. **972.** −12. **973.** −4. **974.** 1) $y = 0{,}5x + 2$; 2) $y = 0{,}6x - 3$. **975.** $x + y = 6$. **978.** 1 пара (3; 2). **980.** 24 год. **992.** 1) $a = 3$, $b = -2{,}5$; 2) $a = 4$, $b = -6$. **993.** $a = 2$, $b = 5$. **998.** При $a \neq 7$. **999.** 1) 16; 2) −5. **1000.** 1) При $a \neq 14$; 2) при $a = -10$. **1001.** 1) (−2; 2); 2) (−2; 2); (1; 1); 3) розв'язків немає; 4) (1; −1); (3; 3). **1002.** 1) (1; 1); (−3; 3); 2) (2; 1); (−2; −1); 3) (2; 0); (−2; 0); (0; 2); (0; −2). **1003.** 3 кг. **1004.** 60 км/год. **1009.** 1) (6; 3); 2) (4; 2); 3) (1; 2); 4) (4; −3); 5) (−5; −7); 6) (1,2; −0,7).

1010. 1) $(-5; 20)$; 2) $(-1; 3)$; 3) $(-2; -1)$; 4) $(-3; 4)$. **1011.** 1) $(-5; -4)$; 2) $(-14; 2)$. **1014.** 7 левів. **1021.** 3) $(8; 1)$; 4) $(1{,}2; 0)$; 5) $(-1; -2)$; 6) $(7; -1)$; 7) $(4; -1)$; 8) $(6; -2)$. **1022.** 3) $(1; 2)$; 4) $(3; -1)$; 5) $(4; 2)$; 6) $(6; 5)$. **1023.** 1) $\left(-\frac{1}{7}; 2\frac{3}{7}\right)$; 2) $(-10; 5)$. **1024.** 1) $(-5; -6)$; 2) $(1; -6)$. **1025.** $a = 5{,}6$, $b = 0{,}8$. **1026.** $m = 9$, $n = -12$. **1027.** 1) $y = -0{,}2x + 1{,}4$; 2) $y = -x + 1$. **1028.** 1) $y = -0{,}5x + 3{,}5$; 2) $y = 3x + 3$. **1030.** 1) $(3; -1{,}6)$; 2) розв'язків немає. **1033.** $-0{,}8$. **1034.** 2. **1035.** 1) $(3; -3)$; 2) $(1{,}5; 0{,}75)$; 3) $\left(4; -\frac{2}{3}\right)$; 4) $(-5; 6)$; 5) $(-2{,}4; -4)$. **1036.** 1) $(10; 5)$; 2) $(0{,}5; 1{,}5)$; 3) $(-8; -28)$. **1037.** 1) $(0{,}2; 1)$; 2) $(1; -1)$. **1038.** 1) $\left(\frac{1}{20}; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(2; -2)$. **1041.** 2 год. **1042.** 96 дерев. **1045.** 7 чотиримісних човнів і 3 шестимісних. **1047.** 9 кг, 7 кг. **1048.** 8 га, 6 га. **1049.** 9 деталей, 6 деталей. **1050.** 4 ц, 5 ц. **1051.** 60 грн, 30 грн. **1052.** 15 грн, 10 грн. **1053.** 58 км/год, 70 км/год. **1054.** 60 км/год, 40 км/год. **1055.** 4 км/год, 16 км/год. **1056.** 84 км/год, 79 км/год. **1057.** 45 костюмів, 30 костюмів. **1058.** 90 грн, 210 грн. **1059.** 40 грн, 60 грн. **1060.** 70 грн, 50 грн. **1061.** 8000 грн, 6000 грн. **1062.** 9000 грн, 3000 грн. **1063.** 100 кг, 200 кг. **1064.** 20 кг, 30 кг. **1065.** 5 мішків, 7 мішків. **1066.** 40 рупій, 170 рупій. **1067.** 42 роки, 15 років. **1068.** 60 років, 12 років. **1069.** 3 км/год, 12 км/год. **1070.** 5 км/год, 4 км/год. **1071.** 48 км/год, 60 км/год. **1072.** 24 л, 40 л. **1073.** 28 л, 42 л. **1076.** 2) $(b^3 - 2b^2 + 3) \times (b^3 + 2b^2 - 3)$; 4) $(3x - 7)(3x + 5)$. **1077.** 7,5.

§ 4. Статистичні ймовірності

1097. 60 га, 40 га. **1099.** 13.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Номер завдання	Номер задачі											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	А	Б	В	В	А	Б	В	Б	В	Б	Г
2	Г	В	Г	Г	В	В	Б	В	Б	А	Г	А
3	Г	Г	А	Б	Б	В	А	Б	В	А	А	В
4	В	Б	В	В	В	Б	Б	Г	В	Б	А	Г
5	В	Г	Г	Б	Б	Б	А	В	А	В	Г	Б
6	А	Г	Б	Б	В	Б	А	А	В	В	Б	А
7	В	Г	А	Б	В	Г	А	Б	В	А	Б	Б

Конкурсний відділ Видавництва «Гімназія»

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аргумент 172

Винесення спільного множника 99
Вираз алгебраїчний 8
— зі змінними 8
— цілий 9
— числовий 7
Віднімання многочленів 78
Властивості рівнянь 226
— степеня 52

Графік лінійного рівняння з двома змінними 234
— лінійної функції 206
— прямої пропорційності 208
— рівняння з двома змінними 227
— функції 192

Двочлен 72
Добуток різниці та суми двох виразів 114
— степенів 53
Додавання многочленів 78

Зведення подібних членів 73
Змінна 8
— залежна 170
— незалежна 170
Значення виразу 7
— — зі змінною 8
— — числового 7
— функції 173

Квадрат різниці двох виразів 126
— неповний різниці двох виразів 146
— неповний суми двох виразів 146
— суми двох виразів 126
— числа 43
Коефіцієнт одночлена 64
Корінь рівняння 17, 225
Куб числа 43

Метод групування 108
— додавання 260
— підстановки 257
Многочлен 72
Множення многочлена на многочлен 93
— одночлена на многочлен 86

Область визначення функції 172
— значень функції 173
Одночлен 63
— стандартного вигляду 63
Означення 16
Основа степеня 42
Основна властивість степеня 53

Піднесення до степеня 43
— — — добутку 55
— — — степеня 55
Подібні члени 73

Конкурсний відділ
Видавництво
«Гімназія»

Показник степеня 42

Рівняння з двома змінними 224
— лінійне з двома змінними 233
— — — однією змінною 16
Різниця квадратів 119
— кубів 146
— многочленів 78
Розв'язок рівняння 16
— — з двома змінними 225
— системи рівнянь 248
Розкладання на множники многочлена 99
— — — різниці квадратів 120
— — — різниці кубів 146
— — — суми кубів 146

Стандартний вигляд одночлена 63
Степінь 42
— одночлена 65
— многочлена 74
— числа 42

Тотожність 37
Тотожно рівні вирази 36
Тричлен 72

Формула квадрата різниці 126
— — суми 126
— різниці квадратів 119
— — кубів 146
— скороченого множення 114
— суми кубів 146
Функція 171
— лінійна 206
— пряма пропорційність 208

Член многочлена 72

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

ЗМІСТ

Від авторів 3

Умовні позначення 6

Розділ 1. АЛГЕБРА

§ 1. Алгебраїчні вирази. Рівняння з однією змінною 7

1. Вступ до алгебри 7
   - Книга про відновлення та протиставлення 14
2. Лінійне рівняння з однією змінною 16
3. Лінійні рівняння з однією змінною як математичні моделі сюжетних задач 24

Завдання № 1 «Перевірте себе» в тестовій формі 34

4. Тотожно рівні вирази. Тотожності 35
5. Степінь з натуральним показником 42
6. Властивості степеня з натуральним показником 52
7. Одночлени 63
8. Многочлени 72
9. Додавання і віднімання многочленів 78

Завдання № 2 «Перевірте себе» в тестовій формі 85

10. Множення одночлена на многочлен 86
11. Множення многочлена на многочлен 92
12. Розкладання многочлена на множники. Винесення спільного множника за дужки 98
13. Розкладання многочлена на множники. Метод групування 108

Завдання № 3 «Перевірте себе» в тестовій формі 113

14. Добуток різниці та суми двох виразів 114
15. Різниця квадратів двох виразів 119
16. Квадрат суми та квадрат різниці двох виразів 126

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

● Трикутник Паскаля 135
17. Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів 136
Завдання № 4 «Перевірте себе» в тестовій формі 145
18. Сума й різниця кубів двох виразів 146
19. Застосування різних способів розкладання многочлена на множники 152
Завдання № 5 «Перевірте себе» в тестовій формі 160
● Мова, зрозуміла всім 162
Головне в параграфі 1 165

§ 2. Функції 169
20. Зв'язки між величинами. Функція 169
21. Способи задання функції 183
22. Графік функції 191
23. Лінійна функція, її графік і властивості 205
Завдання № 6 «Перевірте себе» в тестовій формі 219
Головне в параграфі 2 221

§ 3. Системи лінійних рівнянь із двома змінними 223
24. Рівняння з двома змінними 223
25. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік 233
● Як будували міст між геометрією та алгеброю 244
● Математика — це і жіноча справа 245
26. Системи рівнянь із двома змінними. Графічний метод розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними 247
27. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки 256
28. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання 260

Конкурсний відбір
Видавництво
«Гімназія»

29. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь 268

Завдання № 7 «Перевірте себе» в тестовій формі 277

Головне в параграфі 3 279

§ 4. Статистичні ймовірності 281

30. Інформація і таблиці 281

Дружимо з комп'ютером 296

Відповіді та вказівки до вправ 305

Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі 314

Предметний покажчик 315

Конкурсний відбір Видавництво «Гімназія»