ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

НАТАЛІЯ ПРОКОПЕНКО
ЮРІЙ ЗАХАРІЙЧЕНКО
ЛАРИСА ПЕКАРСЬКА

НАВЧАННЯ
БЕЗ МЕЖ

АЛГЕБРА

7

НОВА
УКРАЇНСЬКА
ШКОЛА

Проєкт майбутнього підручника видавництва „Ранок"

Наталія Прокопенко, Юрій Захарійченко, Лариса Пекарська

«Алгебра»

підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видавництво «Ранок»

Проект майбутнього
підручника видавництва "Ранок"

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 р. № 124)

Проект підручника майбутнього видавництва "Ранок"

Підручник створено відповідно до модельної навчальної програми
«Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авт. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П.,
Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.)

НАТАЛІЯ ПРОКОПЕНКО
ЮРІЙ ЗАХАРІЙЧЕНКО
ЛАРИСА ПЕКАРСЬКА

АЛГЕБРА 7

Підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

rnk.com.ua/106123
Електронний
інтерактивний додаток
до підручника

Київ · Харків
Видавництво «Ранок»
2024

Проєкт майбутнього
підручника видавництва "Ранок"

ЗМІСТ

Як працювати з підручником 6

ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ЩО ВИВЧАВСЯ У 5–6 КЛАСАХ

Повторення матеріалу, що вивчався у 5–6 класах 10
Контрольна робота № 1 (діагностична). 14

Розділ 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ

§ 1. Числові вирази. Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази 16
Домашнє завдання 23
§ 2. Тотожність. Тотожні перетворення виразу 24
Самостійна робота № 1 30
Домашнє завдання 31
§ 3. Степінь з натуральним показником 32
Домашнє завдання 39
§ 4. Властивості степеня з натуральним показником . . . 40
Самостійна робота № 2 49
Домашнє завдання 50
§ 5. Одночлени. Множення одночленів. Піднесення одночлена до степеня 51
Самостійна робота № 3 58
Домашнє завдання 59
Підсумовуємо вивчене в § 1–5 60
Контрольна робота № 2. 61
§ 6. Многочлени. Степінь многочлена. Додавання та віднімання многочленів 62
Самостійна робота № 4 70
Домашнє завдання 71
§ 7. Множення одночлена на многочлен. Множення многочленів 72
Самостійна робота № 5 79
Домашнє завдання 80
§ 8. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки та способом групування 81
Самостійна робота № 6 89
Домашнє завдання 90
Підсумовуємо вивчене в § 6–8 91
Контрольна робота № 3. 92

САМОКОНТРОЛЬ

Контрольна робота № 1 (діагностична), с. 14
Контрольна робота № 2, с. 61
Контрольна робота № 3, с. 92
Контрольна робота № 4, с. 128

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

Теми навчальних проєктів до розділу 1, с. 15

ЗАДАЧІ «MATH FOR LIFE»

с. 22, 30, 38, 48, 57, 70, 78, 88, 100, 108, 116, 125

ДОСЛІДЖУЄМО

с. 17, 30, 34, 51, 76, 84, 85, 86, 93, 96, 104

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

с. 21, 35, 49, 56, 65, 68, 77, 87, 98, 107, 115, 119

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

с. 21, 26, 37, 44, 56, 68, 77, 84, 86, 99, 105, 116, 124

В ОДИН КЛІК

с. 20, 38

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

с. 23, 29, 36, 50, 58, 71, 80, 90, 101, 110, 117, 126

TO BE SMART

с. 23, 31, 39, 50, 59, 71, 80, 90, 101, 108, 117, 126

§ 9. Формули скороченого множення.
Квадрат двочлена 93
Домашнє завдання 101
§ 10. Формули скороченого множення.
Різниця квадратів 102
Самостійна робота № 7 109
Домашнє завдання 110
§ 11. Формули скороченого множення.
Сума та різниця кубів 111
Домашнє завдання 117
§ 12. Розкладання многочленів на множники
із застосуванням декількох способів 118
Самостійна робота № 8 125
Домашнє завдання 126
Підсумовуємо вивчене в § 9–12 127
Контрольна робота № 4 128

Розділ 2. ФУНКЦІЇ

§ 13. Функція, способи її задання. Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів. 130
Домашнє завдання 142
§ 14. Графік функції. Область визначення та область значень функції. Графіки залежностей між величинами, які описують реальні процеси 145
Самостійна робота № 9 156
Домашнє завдання 157
§ 15. Лінійна функція, її графік та властивості 159
Самостійна робота № 10 166
Домашнє завдання 168
Підсумовуємо вивчене в § 13–15 169
Контрольна робота № 5 170

САМОКОНТРОЛЬ

Контрольна робота № 5, с. 170

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

Теми навчальних проєктів до розділу 2, с. 129

ЗАДАЧІ «MATH FOR LIFE»

с. 142, 155, 167

ДОСЛІДЖУЄМО

с. 132, 146, 161

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

с. 140, 154, 164

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

с. 141, 150

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

с. 143, 158, 168

TO BE SMART

с. 144

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

Розділ 3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

§16. Лінійне рівняння з однією змінною. Лінійні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій 172
Самостійна робота № 11 182
Домашнє завдання 185
§17. Рівняння з двома змінними та його графік. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік 187
Самостійна робота № 12 197
Домашнє завдання 197
Підсумовуємо вивчене в §16–17 199
Контрольна робота № 5 200
§18. Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома змінними графічним способом . . . 201
Самостійна робота № 13 208
Домашнє завдання 209
§19. Розв'язування систем лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки 211
Домашнє завдання 217
§20. Розв'язування систем лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання. 219
Самостійна робота № 14 225
Домашнє завдання 225
§21. Системи лінійних рівнянь із двома змінними як математичні моделі реальних ситуацій 227
Самостійна робота № 15 236
Домашнє завдання 237
Підсумовуємо вивчене в §18–21 239
Контрольна робота № 7 240

Повторення матеріалу, що вивчався в 7 класі 241
Контрольна робота № 8 250

Відповіді 251
Покажчик 259

САМОКОНТРОЛЬ

Контрольна робота № 6, с. 200
Контрольна робота № 7, с. 240
Контрольна робота № 8, с. 250

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

Теми навчальних проєктів до розділу 3, с. 171

ЗАДАЧІ «MATH FOR LIFE»

с. 183, 195, 207, 217, 224,

ДОСЛІДЖУЄМО

с. 173, 174, 176, 189, 205, 214,

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

с. 174, 175, 180, 103, 224

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

с. 181, 194, 195, 223, 237,

В ОДИН КЛІК

с. 202

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

с. 186, 198, 218,

TO BE SMART

с. 185, 198, 218, 226, 235, 249

ЯК ПРАЦЮВАТИ З ПІДРУЧНИКОМ

Шановні семикласники й семикласниці!

Ви рушаєте в подорож захопливим світом алгебри. Вашим надійним помічником буде підручник, який ви тримаєте в руках. Зорієнтуватися в його змісті вам допоможуть різноманітні рубрики, з якими вас ознайомить невеличкий дороговказ.

Цікавої вам подорожі!

$4x + 2y$

1 ЦІЛІ ВИРАЗИ

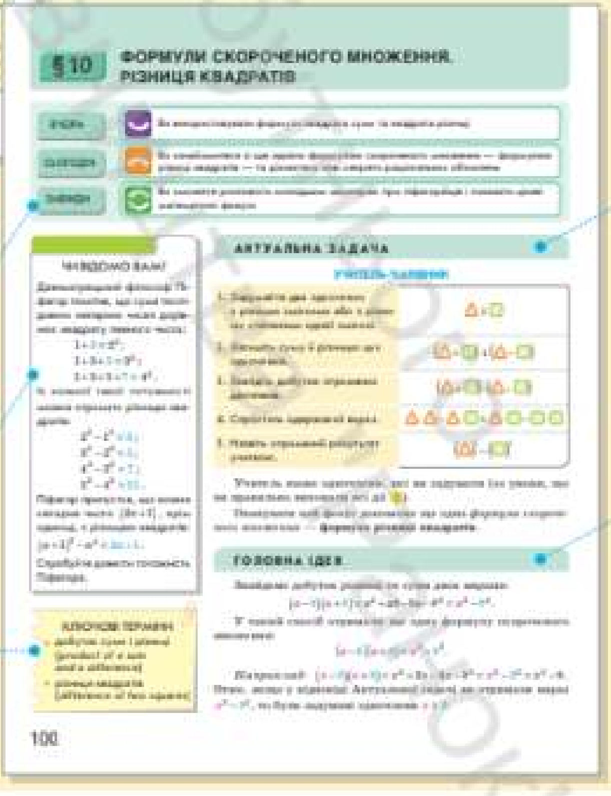
ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

Застосовуємо на практиці: відомості щодо практичного застосування знань, яких ви набудете, опанувавши цей розділ

Шляхом досліджень: теми навчальних проєктів і досліджень

Цитати: висловлювання видатних людей



§10 ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ. РІЗНИЦЯ КВАДРАТІВ

ВЧОРА

СЬОГОДНІ

ЗАВЖДИ

ЧИ ВІДОМО ВАМ!

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ГОЛОВНА ІДЕЯ

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

100

Актуальна задача: задачі практичного змісту (з повним або частковим розв'язанням)

Вчора, сьогодні, завжди: що ви знаєте, чого навчитеся, як зможете застосувати

Чи відомо вам! Цікава інформація

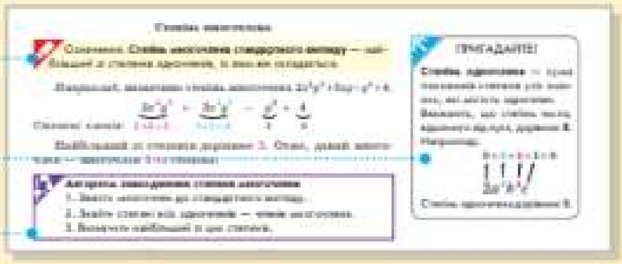
Головна ідея: основний теоретичний матеріал

Ключові терміни параграфа

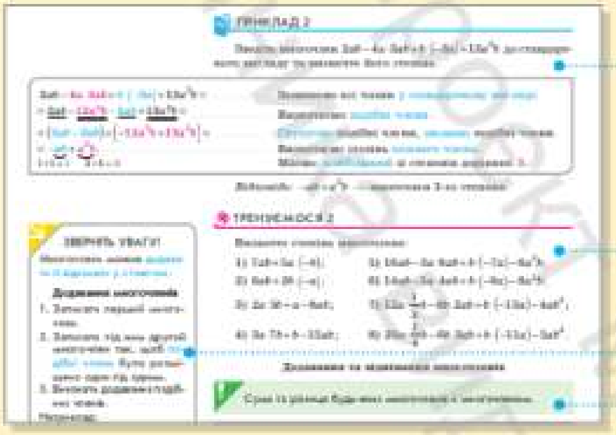
Запам'ятайте: основні означення, правила, твердження, теореми

Пригадайте: посилання на вивчене раніше

Алгоритми виконання математичних дій



Приклади з покроковим розв'язанням, докладним поясненням і записом розв'язання



Тренуємося: вправи, що містять 8 завдань, диференційованих за рівнем навчальних досягнень: завдання 1 і 2 — початковий рівень; 3 і 4 — середній; 5 і 6 — достатній; 7 і 8 — високий

Зверніть увагу: коментарі, пояснення, зауваження

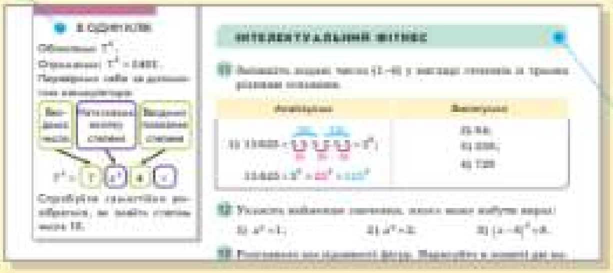
Слід знати: основні формули, пояснення, зауваження, які потрібно враховувати під час виконання вправ

Розминка: усні та письмові вправи на закріплення нового матеріалу

Практикум: вправи на первинне закріплення вивченого матеріалу

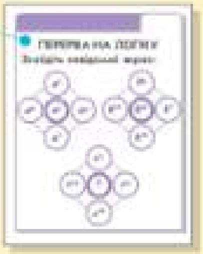
В один клік: приклади використання комп'ютерних програм і сервісів

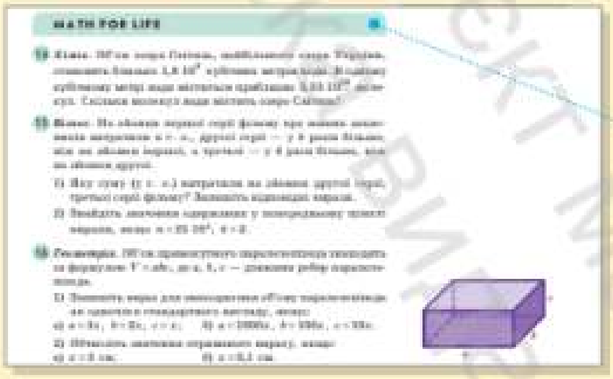
Працюємо в парах: завдання на самооцінювання



Інтелектуальний фітнес: система різнорівневих вправ зростаючої складності

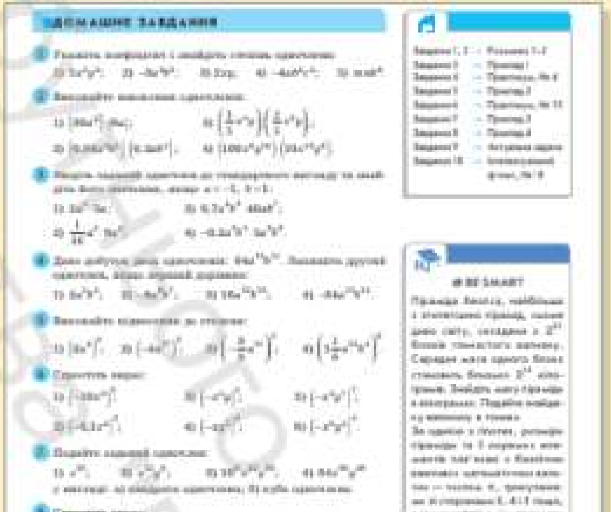
Досліджуємо, Знайдіть помилку, Поміркуйте, Перерва на логіку: завдання різної направленості для активізації розумової діяльності



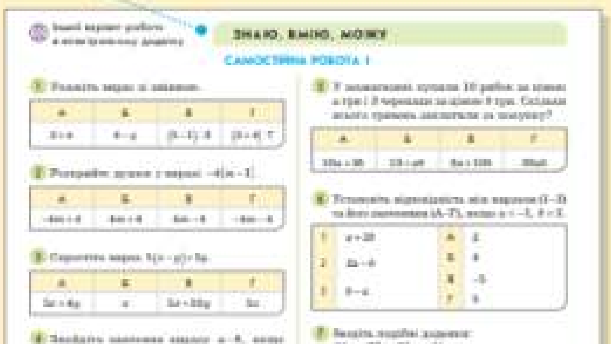


Math for life: задачі на створення математичних моделей до ситуацій із реального життя

Домашнє завдання з посиланням на відповідні приклади в параграфі



Знаю, вмію, можу: самостійні роботи для самоконтролю



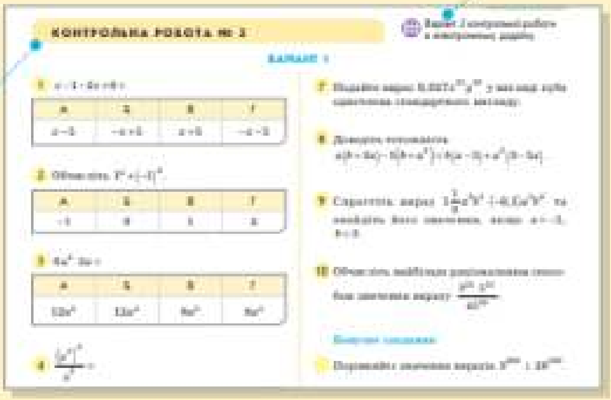
To be smart: інформація про цікаві місця, книжки, курси, проєкти тощо

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 1–3

Підсумовуємо: узагальнюючий теоретичний матеріал

Електронний додаток: онлайн-тестування за кожною темою

Контрольні роботи


КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

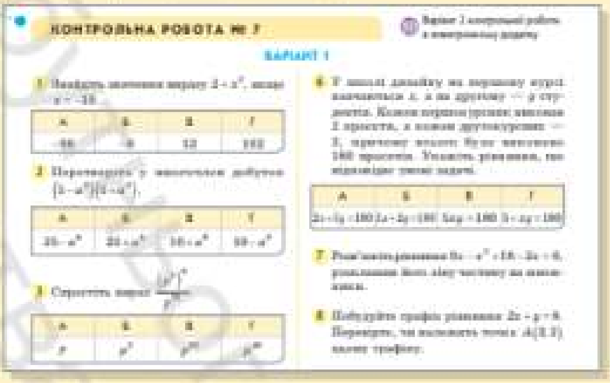
ВАРІАНТ 1

Повторення навчального матеріалу: завдання для повторення за основними темами на початку та в кінці підручника

ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ЩО ВИВЧАВСЯ В 7 КЛАСІ

1. ЦІЛІ ВИРАЗИ

Підсумкова контрольна робота


КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 7

ВАРІАНТ 1

Відповіді

ВІДПОВІДІ

Повторення матеріалу, що вивчався у 5–6 класах

Предметний покажчик

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Проєкт макету підручника видавництва "Ранок"

ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ЩО ВИВЧАВСЯ У 5–6 КЛАСАХ

Підручника майбутнього
Проект видавництва "Ранок"

Порядок дій

Спочатку виконуються дії в дужках, потім множення і ділення зліва направо по порядку, а потім — додавання й віднімання зліва направо по порядку.

Зведення подібних доданків

Щоб звести подібні доданки, треба додати їх коефіцієнти і знайдений результат помножити на спільну буквену частину.

Додавання й віднімання звичайних дробів

- При додаванні (відніманні) дробів з однаковими знаменниками до чисельника першого дробу додають чисельник другого дробу (від чисельника першого дробу віднімають чисельник другого дробу) і залишають той самий знаменник.
- При додаванні (відніманні) дробів з різними знаменниками спочатку їх зводять до спільного знаменника, а потім застосовують правило додавання (віднімання) дробів з однаковими займеннниками)
- Щоб додати (відняти) два мішаних числа, треба окремо додати (відняти) їх цілі та дробові частини.
- Отриманий дріб, якщо це можливо, скорочують — ділять чисельник і знаменник на їхній спільний дільник, відмінний від 1

1 Знайдіть значення виразу:

1) $(95+5)\cdot 4$;
2) $(30+70)\cdot 3$;
3) $(82-32):10$;
4) $(64-14):5$;
5) $(12{,}4+7{,}6)\cdot 3$;
6) $(26{,}7+3{,}3)\cdot 6$;
7) $(101-6{,}8:6{,}8)\cdot 4{,}7$;
8) $(1001-3{,}4:3{,}4)\cdot 8{,}2$.

2 Обчисліть у найзручніший спосіб:

1) $4\cdot 37+6\cdot 37$;
2) $8\cdot 41+2\cdot 41$;
3) $93\cdot 52-93\cdot 42$;
4) $65\cdot 36-65\cdot 26$;
5) $43{,}5\cdot 87-43{,}5\cdot 86$;
6) $51{,}9\cdot 74-51{,}9\cdot 73$;
7) $\frac{14}{23}\cdot 5+\frac{14}{23}\cdot 18$;
8) $\frac{26}{37}\cdot 15+\frac{26}{37}\cdot 22$.

3 Спростіть вираз:

1) $4x-4x$;
2) $18m-18m$;
3) $5b+4b$;
4) $12c+6c$;
5) $47y-y$;
6) $58a-a$;
7) $44p-54p$;
8) $27n-67n$.

4 Розв'яжіть рівняння:

1) $x-37=0$;
2) $x+55=0$;
3) $2x=50$;
4) $3x=60$;
5) $14x-12x=6$;
6) $16x-15x=9$;
7) $23x-20x+17=17$;
8) $39x-34x+11=11$.

5 Обчисліть:

1) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$;
2) $\frac{4}{7}+\frac{3}{7}$;
3) $\frac{17}{12}-\frac{5}{12}$;
4) $\frac{19}{13}-\frac{6}{13}$;
5) $\frac{8}{15}+\frac{1}{4}-\frac{8}{15}$;
6) $\frac{3}{14}+\frac{1}{6}-\frac{3}{14}$;
7) $\frac{30}{51}+\frac{18}{51}-\frac{17}{51}$;
8) $\frac{23}{67}+\frac{39}{67}-\frac{38}{67}$.

6 Виконайте дії:

1) $3+\frac{1}{2}$;
2) $4+\frac{1}{3}$;
3) $8-\frac{1}{5}$;
4) $7-\frac{1}{6}$;
5) $\frac{5}{8}-\frac{1}{3}$;
6) $\frac{2}{21}+\frac{5}{7}$;
7) $5\frac{4}{7}-2\frac{1}{2}$;
8) $4\frac{2}{9}+3\frac{11}{18}$.

7 Виконайте множення:

1) $2\cdot\frac{1}{2}$; 3) $\frac{16}{16}\cdot\frac{4}{5}$; 5) $4\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{12}$; 7) $\frac{0}{19}\cdot\frac{4}{15}$;
2) $\frac{1}{3}\cdot 3$; 4) $\frac{5}{6}\cdot\frac{18}{18}$; 6) $\frac{8}{3}\cdot 1{,}875$; 8) $\frac{12}{17}\cdot\frac{0}{25}$.

8 Виконайте ділення:

1) $\frac{3}{8}:\frac{3}{8}$; 3) $5:\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{5}:6$; 7) $\frac{9}{14}:4{,}5$;
2) $\frac{5}{7}:\frac{5}{7}$; 4) $4:\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{7}:2$; 8) $1\frac{2}{13}:\frac{5}{13}$.

9 Обчисліть:

1) $4:0{,}1$; 4) $7{,}2:0{,}1$; 7) $47{,}2:0{,}01$;
2) $6:0{,}1$; 5) $0{,}05:0{,}1$; 8) $25{,}12:0{,}01$.
3) $5{,}3:0{,}1$; 6) $0{,}006:0{,}1$;

10 Визначте:

1) 4 % від числа 100; 5) 50 % від числа 140;
2) 3 % від числа 100; 6) 50 % від числа 250;
3) 10 % від числа 60; 7) 25 % від числа 80;
4) 10 % від числа 90; 8) 20 % від числа 65.

11 Знайдіть число,

1) 10 % якого дорівнюють 15;
2) 10 % якого дорівнюють 21;
3) 50 % якого дорівнюють 60;
4) 50 % якого дорівнюють 90;
5) 25 % якого дорівнюють 40;
6) 20 % якого дорівнюють 100;
7) 30 % якого дорівнюють 300;
8) 40 % якого дорівнюють 500.

12 Пам'ять роботизованого пристрою збільшили зі 120 Тб до 150 Тб. На скільки відсотків збільшили пам'ять роботизованого пристрою?

13 Спортсмен збільшив щоденний заплив з 500 м до 800 м. На скільки відсотків спортсмен збільшив щоденний заплив?

14 Кількість шкідливих речовин, що потрапляють щодня в атмосферу, знизилася зі 150 т до 120 т. На скільки відсотків знизилась щоденна кількість шкідливих речовин, які потрапляють в атмосферу?

Множення й ділення звичайних дробів

- Множення звичайних дробів виконується так:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

- При діленні дробу на дріб чисельник діленого множать на знаменник дільника, а знаменник діленого — на чисельник дільника:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Множення й ділення мішаних чисел

Щоб виконати множення (ділення) мішаних чисел, треба спочатку записати їх у вигляді неправильних дробів, а потім скористатися правилом множення (ділення) звичайних дробів

Знаходження відсотків від числа

Якщо число x складає b % від числа a, то $x=a\cdot\frac{b}{100}$

Знаходження числа за його відсотком

Якщо b % від числа a дорівнюють c, то $a=c:\frac{b}{100}$

Знаходження відсоткового відношення двох чисел

Щоб знайти відсоткове відношення двох чисел, треба їх відношення помножити на 100 і до результату дописати знак відсотка

Підручник видавництва "Ранок"
Проект "Майбутнього"

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

Знаходження числа за його дробом

Щоб знайти число за величиною його дробу, треба цю величину спочатку поділити на чисельник, а потім помножити на знаменник дробу, або можна дану величину поділити на цей дріб

15 Час, відведений на рекламу, зменшили з 5 хв до 3 хв. На скільки відсотків зменшився час, відведений на рекламу?

16 Визначте число, якщо:

1) $\frac{1}{2}$ його дорівнює 3;
2) $\frac{1}{2}$ його дорівнює 5;
3) $\frac{1}{4}$ його дорівнює 20;
4) 0,25 його дорівнює 8;
5) $\frac{2}{3}$ його дорівнює 12;
6) $\frac{2}{3}$ його дорівнює 18;
7) 0,6 його дорівнює 150;
8) $\frac{6}{7}$ його дорівнює 420.

Знаходження дробу від числа

Щоб знайти дріб від числа, треба число помножити на цей дріб.

17 240 співробітниць і співробітників трьох відділів працюють у режимі онлайн. У першому та другому відділах працює $\frac{5}{12}$ і 0,1875 усієї кількості людей, що працюють онлайн, відповідно. Скільки людей працюють у режимі онлайн у кожному відділі?

18 Три групи «павучків» сплели 180 маскувальних сіток. Перша та друга групи сплели $\frac{5}{18}$ і $\frac{7}{15}$ усієї кількості маскувальних сіток відповідно. Скільки маскувальних сіток сплела кожна група?

Властивості пропорції

Добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку її середніх членів:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$$

19 Виразіть a зі співвідношення:

1) $a:2=b:5$;
2) $a:3=1:b$;
3) $4:a=7:b$;
4) $1:a=b:4$;
5) $\frac{b}{a}=\frac{9}{2}$;
6) $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$;
7) $\frac{b}{8}=\frac{3}{a}$;
8) $\frac{1}{b}=\frac{a}{7}$.

Модуль числа

- Якщо $a\geqslant 0$, то $|a|=a$.
- Якщо $a<0$, то $|a|=-a$

20 Обчисліть:

1) $|0|+2$;
2) $|0|\cdot 3$;
3) $|14|$;
4) $|17|$;
5) $|-9|$;
6) $|-12|$;
7) $\left|-4\frac{1}{2}\right|$;
8) $\left|-5\frac{1}{4}\right|$.

21 Виконайте дії:

1) $-12-18$;
2) $-39-11$;
3) $40+(-35)$;
4) $50+(-65)$;
5) $4\cdot(-6)$;
6) $-15:5$;
7) $-28:(-7)$;
8) $-10\cdot(-5)$.

22 Розв'яжіть рівняння:

1) $-3x=27$;
2) $2x=-10$;
3) $-4x=-36$;
4) $-5x=-40$;
5) $9x-11x=-6$;
6) $13x-16x=-15$;
7) $-\frac{5}{17}\cdot x=-\frac{10}{17}$;
8) $-\frac{4}{19}\cdot x=-\frac{12}{19}$.

23 Розкрийте дужки:

1) $2\cdot(x+1)$;
2) $3\cdot(4+x)$;
3) $(x-2)\cdot 5$;
4) $(x-6)\cdot 4$;
5) $7\cdot(3a-b)$;
6) $8\cdot(b-4a)$;
7) $-2\cdot(7a-3b)$;
8) $-3\cdot(8b-5a)$.

Розкриття дужок

- Якщо перед дужками стоїть знак «+», то, розкриваючи дужки, знак кожного доданка не змінюємо.
- Якщо перед дужками стоїть знак «−», то, розкриваючи дужки, знак кожного доданка змінюємо на протилежний

24 Знайдіть значення виразу:

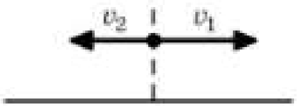
1) $4a+1$, якщо $a=5$;
2) $2a-7$, якщо $a=4$;
3) $\frac{a}{2}-12$, якщо $a=6$;
4) $\frac{a}{3}-16$, якщо $a=12$;
5) $\frac{a-10}{4}$, якщо $a=-70$;
6) $\frac{a-40}{5}$, якщо $a=-60$;
7) $|3a|+\frac{5}{12}$, якщо $a=-\frac{7}{36}$;
8) $|5a|+\frac{3}{11}$, якщо $a=-\frac{8}{55}$.

25 Порівняйте числа:

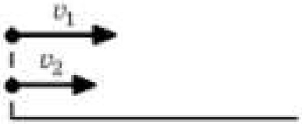
1) 12,4 і −34,1;
2) −5 і 0;
3) $\frac{72}{9}$ і $\frac{24}{3}$;
4) $\frac{16}{8}$ і $\frac{12}{4}$;
5) $-\frac{2}{3}$ і $-\frac{2}{5}$;
6) $-\frac{7}{4}$ і $-\frac{7}{2}$;
7) −3,602 і −3,612;
8) −0,138 і −0,831

26 Два дрони-розвідники вилетіли з одного пункту у протилежних напрямках зі швидкостями 40 км/год і 80 км/год. Через скільки годин відстань між ними буде дорівнювати 240 км? Вважайте, що дрони весь час рухаються по прямій.

27 Два дрони-розвідники вилетіли з одного пункту в одному напрямку зі швидкостями 50 км/год і 70 км/год. Через скільки годин відстань між ними буде дорівнювати 60 км? Вважайте, що дрони весь час рухаються по прямій.



До задачі 25



До задачі 26

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

(діагностична)

Інший варіант роботи в електронному додатку

ВАРИАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Виконайте додавання: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$.

А	Б	В	Г
$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{14}$

2 Обчисліть $83{,}67\cdot 0{,}1$.

А	Б	В	Г
0,8367	8,367	83,67	836,7

3 Спростіть вираз $5m-7m$.

А	Б	В	Г
$2m$	2	-2	$-2m$

4 Виразіть a зі співвідношення $\frac{1}{a}=\frac{2}{b}$.

А	Б	В	Г
$a=2b$	$a=\frac{2}{b}$	$a=\frac{b}{2}$	$a=\frac{1}{2b}$

5 Визначте число, 15 % якого дорівнює 150.

А	Б	В	Г
22,5	2250	1000	1500

6 У школі 40 кабінетів, у $\frac{2}{5}$ з них влітку було проведено ремонт. Скільки кабінетів було відремонтовано?

А	Б	В	Г
8	16	20	32

7 Обчисліть у найзручніший спосіб:
$\frac{31}{70}\cdot 16+\frac{31}{70}\cdot 19$.

8 Знайдіть значення виразу $|6a|+\frac{3}{8}$, якщо $a=-\frac{7}{30}$.

9 Розв'яжіть рівняння:
1) $5(x-14)+160=90$;
2) $-\frac{9}{14}x=-\frac{3}{2}$.

10 Велосипедист і велосипедистка вирушили з одного пункту в одному напрямку зі швидкостями 15 км/год і 18 км/год.
1) На скільки відсотків швидкість руху одного велосипеда більша за швидкість руху іншого?
2) Через скільки годин відстань між ними дорівнюватиме 12 км?

Бонусне завдання

Котра зараз година, якщо час, що минув від початку доби, на $3\frac{1}{2}$ год більший за час, що залишився до кінця доби?

1 ЦІЛІ ВИРАЗИ

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

Алгебраїчні вирази мають дуже важливе значення, адже це — основа алгебри. Не знаючи основ, неможливо розв'язати жодної практичної задачі. Опанувавши цей розділ, ви навчитеся:

- спілкуватися універсальною мовою алгебри;
- скорочувати запис великих чисел, зокрема об'ємів інформації чи космічних відстаней
- перетворювати складне завдання на декілька простіших і знаходити їхні розв'язки
- розв'язувати задачі в загальному вигляді
- правильно ставити завдання для комп'ютерного опрацювання даних;
- заощаджувати свій час, виконуючи обчислення раціональним способом
- розвивати інтуїцію, використовувати нестандартні підходи для розв'язування завдань

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

Теми навчальних проєктів:

- Таємниці формул скороченого множення
- Ділення многочленів
- Остання цифра степеня
- Алгебраїчні софізми й парадокси

> *«Якщо ти зараз заснеш, тобі, звичайно, насниться твоя мрія, але якщо ти зараз навчатимешся, ти втілиш свою мрію в життя»*
>
> З пам'ятки для мотивації студентів Гарвардського університету

§1 ЧИСЛОВІ ВИРАЗИ. ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ. ЦІЛІ РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

ВЧОРА	Ви читали й записували числові й буквені вирази та знаходили їхні значення
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся, де застосовують вирази зі змінними, які вирази називають цілими раціональними, як знаходять значення алгебраїчного виразу
ЗАВЖДИ	Ви зможете спілкуватися універсальною мовою алгебри зі своїми іншомовними друзями

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- змінна (*variable*)
- вирази зі змінними (*variable expressions*)
- раціональний вираз (*rational expression*)
- значення виразу (*value of expression*)

Виконайте завдання

1. Запишіть за умовою задачі **числовий вираз**, використовуючи свій номер телефону.
2. Чому дорівнює **значення** отриманого числового виразу?
3. Перевірте, чи правильно записані в наведеному **буквеному виразі** всі дії, що ви виконували?

   $((a\cdot 80+1)\cdot 250+2\cdot b-250):2$
4. Назвіть **порядок виконання дій**.
5. Які значення мають букви ***a*** і ***b*** для номера вашого телефону? А для номера телефону вашого друга, подруги?

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ФОКУС ІЗ ЧИСЛАМИ

Здивуйте друзів фокусом.
Скористайтесь калькулятором і виконайте такі дії.

1. Введіть перші три цифри номера свого телефону без коду оператора:

   $\underbrace{***}_{a}****$

2. Помножте це число на 80.

   $a\cdot\underline{80}$

3. Додайте до отриманого добутку 1.

   $a\cdot 80\underline{+1}$

4. Помножте отриману суму на 250.

   $(a\cdot 80+1)\cdot\underline{250}$

5. Додайте двічі до отриманого добутку число, що складається з чотирьох останніх цифр вашого номера телефону: $***\underbrace{****}_{b}$

   $(a\cdot 80+1)\cdot 250\underline{+2\cdot b}$

6. Відніміть від отриманої суми 250.

   $(a\cdot 80+1)\cdot 250+$
   $+2\cdot b\underline{-250}$

7. Поділіть отриману різницю на 2.

   $((a\cdot 80+1)\cdot 250+$
   $+2\cdot b-250)\underline{:2}$

8. Запишіть відповідь.

   $\underbrace{***}_{a}\underbrace{****}_{b}$

   Здивувались?

Оскільки букви ***a*** і ***b*** можуть набувати різних значень, то їх називають змінними. А буквений вираз — виразом зі змінними.

Ось тут і починається АЛГЕБРА!!!

Вивчаючи алгебру, ви навчитеся працювати зі змінними та алгебраїчними виразами.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Алгебраїчними виразами називають числові вирази та вирази зі змінними.

В алгебраїчних виразах **НЕ використовують** знаки «=», «<», «>».

Невідомі числа, які можуть набувати різних значень, у виразах зі змінними позначають буквами. Ці букви називають змінними. Вирази зі змінними можуть містити одну, дві, три й більше змінних.

Наприклад: $\underbrace{5-12m}_{\text{одна змінна}}$; $\underbrace{(a-n)^3}_{\text{дві змінні}}$; $\underbrace{5(2a-5c)+2b}_{\text{три змінні}}$.

ДОСЛІДЖУЄМО!

Проаналізуйте інформацію про алгебраїчні вирази.

Знайдіть спільне й відмінне між числовими виразами й виразами зі змінними.

<table>
<tr><th>Числові вирази</th><th>Вирази зі змінними</th></tr>
<tr><td>① Числові вирази — це записи, що утворюють із чисел за допомогою знаків арифметичних дій та дужок.

<i>Наприклад</i>: $5{,}8+0{,}1$; $(7-12)^3$; $12\pi+5$.
Зверніть увагу! $\pi\approx 3{,}14$ — число.</td><td>① Вирази зі змінними — це записи, що складають із букв (змінних) і чисел за допомогою знаків арифметичних дій та дужок.

<i>Наприклад</i>: $3a+20b$; $(a+b)^2$.</td></tr>
<tr><td>② Числовим виразом вважають також будь-яке число.

<i>Наприклад:</i> 25; −17; 0,48; π — числові вирази.</td><td>② Виразом зі змінною вважають також саму змінну.

<i>Наприклад</i>: x; y; a; d — вирази зі змінними.</td></tr>
<tr><td>③ Значення числового виразу — це число, яке отримують у результаті виконання всіх арифметичних дій у числовому виразі.

Для знаходження значення числового виразу застосовують порядок виконання дій:

$$11 \overset{6}{+} \left(0{,}1 \overset{2}{\cdot} 3^{\overset{1}{2}} \overset{4}{-} 27 \overset{3}{:} 10\right) \overset{5}{:} 1{,}8 = 10$$
<i>Значення числового виразу</i>

Кожний числовий вираз (якщо він має зміст) має ОДНЕ значення!</td><td>③ Для знаходження числового значення виразу зі змінними при заданих значеннях змінних необхідно:
1) <i>підставити</i> замість змінних відповідні числові значення;
2) <i>виконати</i> всі арифметичні дії.

<table>
<tr><td>Значення a</td><td>1</td><td>0,1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Вираз: $3a+2$</td><td>$3\cdot1+2$</td><td>$3\cdot0{,}1+2$</td><td>$3\cdot0+2$</td></tr>
<tr><td>Значення виразу</td><td>5</td><td>2,3</td><td>2</td></tr>
</table>
При різних значеннях змінних вираз зі змінними може набувати РІЗНИХ значень.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо неможливо знайти значення виразу, то кажуть, що вираз не має змісту.</td></tr>
<tr><td><i>Наприклад:</i> запис $((5-7)++$ як числовий вираз не має змісту, оскільки неможливо знайти його значення.</td><td><i>Наприклад:</i> запис $(a\pm b)\cdot:c$ як вираз зі змінною не має змісту, оскільки неможливо виконати його перетворення.</td></tr>
</table>

Вираз $\frac{15}{8\cdot 3-24}$ не має змісту, оскільки знаменник виразу дорівнює нулю: $\frac{15}{8\cdot 3-24}=\frac{15}{24-24}=\frac{15}{0}$,

Якщо $y=5$, то вираз $\frac{14}{y-5}$ не має змісту, оскільки знаменник виразу перетворюється на нуль: $\frac{14}{y-5}=\frac{14}{5-5}=\frac{14}{0}$,

на 0 ділити не можна!

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

1. $17a$; $5b$
2. $9\cdot b=9b$; $m\cdot n\cdot p=mnp$
3. $15\cdot(1+a)=15(1+a)$;

$(2+a)\cdot(b-1)=(2+a)(b-1)$

Існують певні правила запису виразів.

1. Числовий множник розташовують перед буквеним.
2. Знак множення між числовими та буквеними множниками зазвичай не записують.
3. Знак множення між множником і дужками та між двома дужками зазвичай не записують.

Алгебраїчні вирази, які містять лише дії додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня й ділення, називають **раціональними виразами**.

Раціональні вирази бувають **цілими й дробовими**.

Наприклад: вирази $(3x+10)-25y$; $\frac{33+5a}{15}$ — цілі раціональні, оскільки не містять ділення на вираз зі змінною, а вирази $\frac{2}{m-9}$; $\frac{2}{c}-128c^3$ — дробово-раціональні, оскільки містять ділення на вираз зі змінною.

Цілий раціональний вираз — це вираз, який **не містить ділення на вираз зі змінною**.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Французький філософ і математик Рене Декарт (1596–1650) запропонував позначати в записах відомі числа (коефіцієнти, параметри) першими буквами алфавіту: a, b, c, а невідомі (змінні) — останніми буквами алфавіту x, y, z. Це виявилось не дуже зручним, оскільки знак множення плутали зі змінною x: $x\times y$. Саме тому в алгебрі знак множення заміняють точкою або, у деяких випадках, зовсім не записують.

У всьому винен Декарт

РОЗМИНКА 1

1 Укажіть, які з наведених записів є числовими виразами, а які — виразами зі змінними:

1) $135-2\cdot 29$;
2) $129+4\pi$;
3) $5:(2x-3)$;
4) $5c-4=0$;
5) -27;
6) x.

2 Поясніть, чому наведені вирази не мають змісту:

1) $5:(12-3\cdot 4)$;
2) $35:(a-7)$, якщо $a=7$.

3 Укажіть цілі вирази:

1) $\frac{1}{3}m+5$;
2) $\frac{2}{a-4}$;
3) $\frac{x+12}{11}$;
4) $9a+\frac{1}{9a}$.

ПРИКЛАД 1

Знайдіть значення числового виразу $11+\left(0{,}1\cdot 3^2-27:10\right):1{,}8$.

Розв'язання

$11+\left(0{,}1\cdot 3^2-27:10\right):1{,}8=$ .... Виконаємо дії в дужках.

$=11+\left(0{,}1\cdot 3^2-27:10\right):1{,}8=$ .... Знайдемо значення степеня.

$=11+\left(0{,}1\cdot 9-27:10\right):1{,}8=$ .... Виконаємо множення й ділення зліва направо.

$=11+\left(0{,}9-2{,}7\right):1{,}8=$ .... Знайдемо різницю в дужках.

$=11+\left(-1{,}8\right):1{,}8=$ .... Виконаємо ділення.

$=11+\left(-1\right)=$ .... Знайдемо суму.

$=10$ .... Отримали значення виразу.

Відповідь: 10.

Порядок виконання дій

1. Дії в дужках.
2. Піднесення до степеня.
3. Множення й ділення (зліва направо).
4. Додавання й віднімання (зліва направо).

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Знайдіть значення числового виразу:

1) $(34-20):7$;
2) $(18+6):6$;
3) $(45+90:5):9$;
4) $(31-80:4)\cdot 5$;
5) $(111:3-15\cdot 4)\cdot 2+45$;
6) $(124:4-13\cdot 2)\cdot 5-28$;
7) $\left(10^2\cdot 0{,}2+5{,}6:0{,}4\right):17-3{,}9$;
8) $\left(5^2\cdot 0{,}4+7{,}2:0{,}3\right):2-15{,}1$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Один і той самий алгебраїчний вираз можна прочитати різними способами.

$a+4$
- *а плюс* 4
- *а додати* 4
- *сума* чисел *а* і 4
- *а збільшити на* 4
- *разом а* і 4

РОЗМИНКА 2

Прочитайте вираз різними способами:

1) $c-d$; 2) $10a$; 3) $2ad$; 4) $b:c$.

ПРИКЛАД 2

Прочитайте твердження і запишіть його у вигляді алгебраїчного виразу.

Читаємо	*Записуємо*
1) Сума добутку чисел 7 та x і числа 4	$7x+4$
2) Добуток суми чисел 7 та x і числа 4	$(7+x)\cdot 4$
3) Різниця добутку чисел 8 та x і числа y	$8x-y$
4) Добуток різниці чисел 8 та x і числа y	$(8-x)\cdot y$
5) Подвоєний добуток чисел x та y	$2xy$
6) Половина різниці чисел x та y	$(x-y):2$

СЛІД ЗНАТИ!

Читати числовий вираз розпочинають із назви дії, яку виконують останньою.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

Підручник. Проект майбутнього видавництва "Ранок"

В ОДИН КЛІК

На уроках інформатики ви будете вивчати програму Microsoft Excel, за допомогою якої з легкістю зможете обчислювати значення виразів зі змінними за різних значень змінних.

Наприклад, обчислити значення виразу $5x^2+\frac{1}{3}y-10z$, якщо $x=2$, $y=9$, $z=-5$.

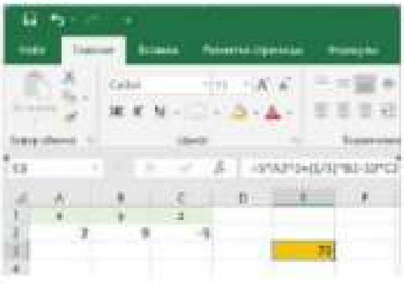
Для цього треба:

1) ввести в комірки A2, B2, C2 значення x, y і z відповідно;
2) ввести в комірку E3 формулу для обчислення значення виразу:

- виділити комірку E3, натиснути =;
- ввести 5*, клацнути на комірку A2 (значення змінної x), ввести ^2 (піднесення до степеня 2),
- натиснути +(1/3)*, клацнути на комірку B2 (значення змінної y);
- ввести −10*, клацнути на комірку C2 (значення змінної z).

У комірці E3 маємо формулу =5*A2^2+(1/3)*B2−10*C2.

Відповідь: 73.



ТРЕНУЄМОСЯ 2

Запишіть у вигляді алгебраїчних виразів твердження:

1) сума числа a та добутку чисел 3 і b;
2) добуток числа 7 та різниці чисел a і b;
3) сума подвоєного добутку чисел a і b та числа 8;
4) різниця числа a та подвоєного добутку чисел b і c;
5) добуток суми й різниці чисел a і b;
6) частка суми й різниці чисел a і b.

РОЗМИНКА 3

Знайдіть значення алгебраїчного виразу:

1) $3+a$, якщо $a=7$;
2) $a-6$, якщо $a=4$;
3) $2b$, якщо $b=-5$;
4) $c:4$, якщо $c=24$;
5) $x-y$, якщо $x=20$, $y=15$;
6) $m+n$, якщо $m=-12$, $n=8$.

ПРИКЛАД 3

Знайдіть значення алгебраїчного виразу, якщо $x=-3$, $y=-10$:

1) $6(x-2)$;
2) $6x-2y$.

Розв'язання

Підставляємо числові значення змінних, виконуємо дії, записуємо відповідь.

1) Якщо $x=-3$, то $6(x-2)=6(-3-2)=6\cdot(-5)=-30$;

2) якщо $x=-3$, $y=-10$, то $6x-2y=6\cdot(-3)-2\cdot(-10)=$ $=-18+20=2$.

Відповідь: 1) −30; 2) 2.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Знайдіть значення алгебраїчного виразу:

1) $2x-1$, якщо $x=5$;
2) $3x+4$, якщо $x=2$;
3) $10(x-4)$, якщо $x=-1$;
4) $6(1-x)$, якщо $x=-3$;
5) $10x-6y$, якщо $x=-7$, $y=2$;
6) $4x-9y$, якщо $x=10$, $y=-2$;
7) $0{,}6y-0{,}1x$, якщо $x=-30$, $y=-5$;
8) $0{,}2y-0{,}8x$, якщо $x=-40$, $y=-25$.

ПРАКТИКУМ

1.1 Визначте порядок дій і знайдіть значення виразу:

1) $1-0{,}24:0{,}4-0{,}2$; 3) $(1-0{,}24):0{,}4-0{,}2$;
2) $(1-0{,}24):(0{,}4-0{,}2)$; 4) $1-0{,}24:(0{,}4-0{,}2)$.

1.2 Прочитайте алгебраїчний вираз:

1) $5x+2$; 3) $(6-x):y$; 5) $(x+2)y$;
2) $x+2y$; 4) $5(x+2)$; 6) $6-x:y$.

1.3 Запишіть числовий вираз та обчисліть його значення:

1) сума добутку чисел 8,2 і −10 та числа 42;
2) добуток різниці чисел 3,6 і 10,4 та числа −10;
3) подвоєний добуток чисел 0,05 і −100;
4) добуток суми чисел 5,3 і 4,7 на їх різницю.

1.4 З'ясуйте, чи має зміст числовий вираз. Поясніть свої міркування.

1) $\dfrac{4\cdot 0{,}5+2}{4\cdot 0{,}5-2}$; 2) $\dfrac{0{,}6-0{,}2\cdot 3}{0{,}6}$; 3) $\dfrac{4-36:9}{-3{,}6:0{,}9+4}$.

1.5 Установіть відповідність між твердженнями (1–6) та алгебраїчними виразами (А–Е).

Обчисліть значення алгебраїчних виразів (А–Е), якщо $a=2$; $a=-1$; $a=0{,}5$.

1	Добуток числа 4 на різницю чисел a і 3	А	$8(a+1)$
2	Частка від ділення числа 5 на різницю чисел a і 3	Б	$5:a-3$
		В	$4(a-3)$
3	Сума добутку чисел 8 і a та числа 1	Г	$4a-3$
4	Різниця частки чисел 5 і a та числа 3	Д	$8a+1$
5	Добуток числа 8 та суми чисел a і 1	Е	$5:(a-3)$
6	Різниця добутку чисел 4 і a та числа 3		

1.6 Знайдіть значення алгебраїчного виразу:

1) $\dfrac{a+b}{2}$, якщо $a=40$, $b=-10$; 3) a^2-4b, якщо $a=-5$, $b=3$;
2) $\dfrac{a-b}{3}$, якщо $a=70$, $b=10$; 4) a^2+5b, якщо $a=4$, $b=-2$;
5) $\dfrac{2b+a^2}{4}-13$, якщо $a=-1$, $b=9{,}5$;
6) $\dfrac{2b-a^2}{5}+14$, якщо $a=-1$, $b=10{,}5$.

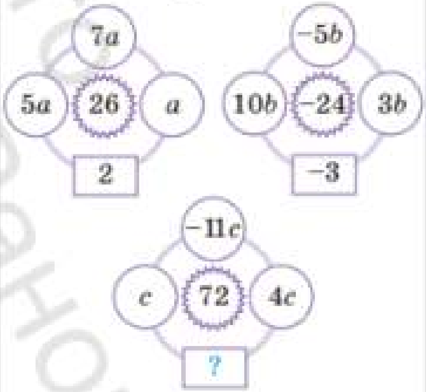
ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!
Дужки змінюють порядок дій у виразах.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Виберіть три різні числа від 1 до 7.
Використовуючи всі ці числа, але кожне — тільки один раз, запишіть якомога більше числових виразів, що мають різні значення.
Виграє той, хто запише більшу кількість виразів.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть невідоме число:



Щоб оцінити, на якій відстані (у кілометрах) від блискавки ви перебуваєте, скористайтеся таким правилом:
рахують кількість секунд між спалахом блискавки та ударом грому. Отримане число ділять на 3.

Для заварювання чорного чаю середньої міцності зазвичай використовують таке правило:
у розігрітий чайник насипають чай із розрахунку стільки чайних ложок чаю, скільки чашок води міститься в чайнику; додатково насипають ще одну чайну ложку чаю на весь чайник.

	Ціна, грн	
Категорія відвідувача	за цілий день	за 1 год
Дорослий	100	20
Дитина	50	10

MATH FOR LIFE

1.7 ***Безпека.*** На якій відстані (у кілометрах) від блискавки ви перебуваєте, якщо між спалахом блискавки та ударом грому пройшло: а) 12 секунд; б) 30 секунд; в) x секунд?

1.8 ***Фізика.*** Формула $F = 1{,}8C + 32$ дозволяє перейти від температури, виміряної у градусах Цельсія (C), до температури, виміряної у градусах Фаренгейта (F). Скориставшись формулою, заповніть за зразком таблицю (у зошиті).

C	-10	-5	0	10	20
$F = 1{,}8C + 32$	$1{,}8 \cdot (-10) + 32 = -18 + 32 = 14$				

1.9 ***Кулінарія.*** Запишіть відповідні вирази і визначте, скільки чайних ложок чаю необхідно насипати в чайник, що містить:

а) 5 чашок води; б) 10 чашок води; в) x чашок води.

1.10 ***Фінанси.*** Родина, що складається з двох дорослих і трьох дітей, збирається відвідати аквапарк. У таблиці наведено ціни на квитки.

1) Складіть вираз, за яким можна обчислити витрати на квитки, якщо родина планує провести в аквапарку:
а) цілий день; б) 4 год; в) t год.
2) Скільки грошей заплатить родина за 5 год перебування в аквапарку?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1.11 Розгляньте числові вирази. З якого виразу з однією змінною їх отримали? При яких значеннях змінної?

1) $5(7+13)$; $5(10+13)$; $5(-3+13)$;
2) $2 \cdot 3 + 5$; $2 \cdot 7 + 5$; $2 \cdot (-1) + 5$.

1.12 Відомо, що сума $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$ обчислюється за формулою $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$. Обчисліть значення виразів 1–3.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3} = 70$, де $n = 5$; $n + 1 = 6$; $n + 2 = 7$.	2) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 10 \cdot 11$; 3) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 99 \cdot 100$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1.13 Знайдіть значення числового виразу:

1) $(47-13):2$;
2) $(64-70:7)\cdot 6$;
3) $(135:3-18\cdot 2):9-31$;
4) $\left(10^2\cdot 0{,}8+9{,}5:0{,}5\right):11-7{,}4$.

1.14 Запишіть у вигляді алгебраїчного виразу наведене твердження:

1) добуток різниці чисел a і b на число 4;
2) подвоєна сума чисел a і b;
3) сума квадратів чисел a і b без подвоєного добутку цих чисел;
4) різниця квадрата суми чисел a і b та числа 5.

Знайдіть значення кожного алгебраїчного виразу, якщо $a=3$ і $b=-5$.

1.15 Знайдіть значення алгебраїчного виразу:

1) $4x-5$, якщо $x=3$;
2) $7(2-x)$, якщо $x=-4$;
3) $9x-5y$, якщо $x=6$, $y=-7$;
4) $0{,}1y-0{,}5x$, якщо $x=-8$, $y=-30$.

1.16 Знайдіть значення алгебраїчного виразу:

1) $\frac{a+b}{3}$, якщо $a=50$, $b=-20$; 2) a^2-5b, якщо $a=-6$, $b=4$.

1.17 Щоб оцінити відстань у метрах до блискавки, користуються формулою $s=344t$, де t — час у секундах між спалахом блискавки й ударом грому. На якій відстані в метрах спалахнула блискавка, якщо час t становив:

а) 5 с; б) 10 с; в) 20 с?

1.18 Формула $C=(F-32):1{,}8$ дозволяє перейти від температури, виміряної у градусах Фаренгейта (F), до температури, виміряної у градусах Цельсія (C). Скориставшись формулою, заповніть таблицю (у зошиті).

F	-40	-4	0	50	40
$C=(F-32):1{,}8$					

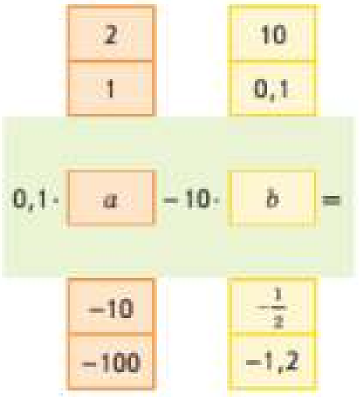
1.19 За умовою задачі 10 на с. 22 складіть вираз для обчислення витрат на квитки в аквапарк родини, що складається з a дорослих і b дітей, якщо вони планують провести в аквапарку:

а) цілий день; б) 4 год; в) t год.

Завдання 1.13 →	Приклад 1
Завдання 1.14 →	Приклад 2
Завдання 1.15 →	Приклад 3
Завдання 1.16 →	Практикум, 1.6
Завдання 1.17–1.19 →	Math for life, 1.7, 1.8, 1.10

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

1) Складіть вираз із двома змінними a і b.
2) Задайте для змінних по 5 числових значень.
3) Зробіть тренажер для обчислення значень виразу (див. рисунок).



BE SMART

Розгадайте фокус

- Загадайте число.
- Помножте його на 3.
- Додайте 15.
- Поділіть на 3.
- Відніміть загадане число.
- Ви отримали 5.

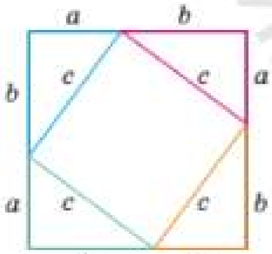
Запишіть вираз зі змінною, де a — загадане число, розкрийте дужки і спробуйте розгадати фокус.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

§2 ТОТОЖНІСТЬ. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗУ

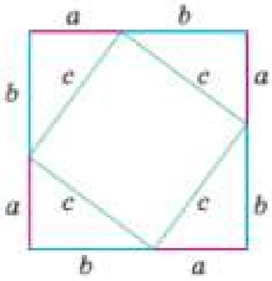
ВЧОРА	Ви застосовували властивості арифметичних дій для обчислення значень виразів
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся, що таке тотожність, як виконувати тотожні перетворення виразів, і навчитеся доводити тотожності різними способами
ЗАВЖДИ	Ви зможете спрощувати обчислення

①



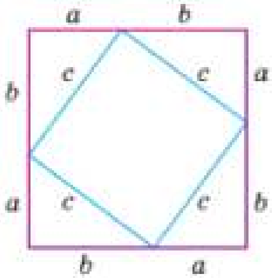
$4(a+b+c)$

②



$4a+4b+4c$

③



$4(a+b)+4c$

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

АКЦІЯ «ПРИКРАШАЄМО ШКІЛЬНЕ ПОДВІР'Я»

У межах проведення акції було заплановано висадити на квадратну клумбу троянди різних кольорів по периметрах чотирьох трикутників (див. рисунок). За планом троянди одного кольору мають утворити однакові сторони цих трикутників, де a, b і c — кількість троянд кожного кольору.

Складіть вираз для обчислення загальної кількості троянд на клумбі. Знайдіть значення виразу, якщо $a=3$, $b=4$, $c=5$.

Розв'язання

Для обчислення кількості троянд учні й учениці 7 класів різними способами записали вирази й обчислили їхні значення.

	① $4(a+b+c)$	② $4a+4b+4c$	③ $4(a+b)+4c$
$a=3$, $b=4$, $c=5$	$4(3+4+5)=$ $=4\cdot12=\underline{48}$	$4\cdot3+4\cdot4+4\cdot5=$ $=12+16+20=\underline{48}$	$4(3+4)+4\cdot5=$ $4\cdot7+20=28+20=\underline{48}$

1. Скільки арифметичних дій треба виконати, обчислюючи значення кожного виразу?

2. Значення якого виразу обчислювати найпростіше?

3. Який висновок можна зробити про значення цих виразів?

Для БУДЬ-ЯКИХ значень змінних a, b і c, що входять до зазначених виразів, ці вирази набувають **однакових значень**.

Такі вирази називають **тотожними**, або **тотожно рівними**.

Якщо два тотожні вирази з'єднати знаком рівності, то утвориться **тотожність**:

$$\boxed{4(a+b+c)} = \boxed{4a+4b+4c} = \boxed{4(a+b)+4c}$$

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Тотожними, або **тотожно рівними**, називаються вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, що входять до них.

Наприклад:

Однакові значення

	Тотожно рівні	
	$5x+5y$ і	$5(x+y)$
$x=2,\ y=3$	$5\cdot2+5\cdot3=25$	$5(2+3)=5\cdot5=25$
$x=-1,\ y=4$	$5\cdot(-1)+5\cdot4=-5+20=15$	$5(-1+4)=5\cdot3=15$

Однакові значення

З'єднавши тотожні вирази знаком рівності, утворимо **тотожність**. *Наприклад*: $5x+5y=5(x+y)$.

Якщо в таку рівність підставити замість змінних будь-які числові значення, то отримаємо правильну числову рівність:

$$5\cdot2+5\cdot3=5(2+3);$$
$$25=25$$

Правильні числові рівності також вважають **тотожностями**.

Тотожність — це рівність, правильна при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї.

Прикладами тотожностей є рівності, що виражають властивості (закони) дій над числами: переставні та сполучні властивості додавання та множення, розподільна властивість.

РОЗМИНКА 1

1 Установіть відповідність між формулами (1–5), якими записані властивості арифметичних дій, і тотожностями (А–Д).

1	$a+b=b+a$	А	$4(7x+2y)=4\cdot7x+4\cdot2y$
2	$a\cdot b=b\cdot a$	Б	$x+3y=3y+x$
3	$(a+b)+c=a+(b+c)$	В	$2\cdot(2x-y)=2\cdot2x-2\cdot y$
4	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	Г	$5x+(7y+z)=(5x+7y)+z$
5	$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$	Д	$5\cdot2x=2x\cdot5$

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- тотожні вирази (*identical expressions*)
- рівні вирази (*equivalent expressions*)
- тотожність (*identity*)
- доведення тотожностей (*proof of identity*)

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Для того щоб показати, що рівність НЕ Є тотожністю, достатньо знайти ОДНЕ допустиме значення змінної, при якому отримані числові вирази НЕ БУДУТЬ дорівнювати один одному.
Наприклад, $2a\neq2+a$, оскільки при $a=1$, отримуємо: $2\neq3$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У математиці існує спеціальний знак тотожності у вигляді трьох паралельних штрихів: ≡. Вперше цей знак застосував німецький математик Георг Фрідріх Бернхард Ріман у 1857 р.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$a+0=a,$$
$$a+(-a)=0,$$
$$a\cdot0=0,$$
$$a\cdot1=a$$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Існує відомий алгебраїчний софізм «Усі числа дорівнюють одне одному».

Доведемо, що $5=6$.

Запишемо тотожність:

$$35+10-45=42+12-54.$$

Винесемо за дужки спільні множники:

$$5(7+2-9)=6(7+2-9).$$

Поділимо обидві частини тотожності на спільний множник:

$$\frac{5\cancel{(7+2-9)}}{\cancel{(7+2-9)}}=\frac{6\cancel{(7+2-9)}}{\cancel{(7+2-9)}}$$

Отже, $5=6$.

Знайдіть помилку в діях.

2 Визначте, чи є тотожно рівними вирази:

1) $10a+3b$ і $3b+10a$;
2) $5c-3d$ і $-3d+5c$;
3) $3x-2y$ і $2y-3x$;
4) $(2c+3d)\cdot 0$ і $2c+3d$;
5) $2(n-7)$ і $2n-7$;
6) $5(b+20)$ і $5b+100$.

Тотожні перетворення виразів

Для полегшення обчислень вирази **спрощують** за допомогою тотожних перетворень.

> **!** **Тотожним перетворенням виразу** називають заміну виразу на тотожний йому вираз.

Правила тотожних перетворень виразів ґрунтуються на властивостях арифметичних дій.

Прикладами найпростіших тотожних перетворень виразів, зокрема, є:

- запис у вигляді алгебраїчної суми: $a-b=a+(-b)$;
- зведення подібних доданків;
- розкриття дужок.

Зведення подібних доданків

$a-2b-7a+11b=$ ………… Щоб звести подібні доданки, треба:

$a=1\cdot a$

$=(a-7a)+(-2b+11b)=$ ………… згрупувати подібні доданки (переставна і сполучна властивості);

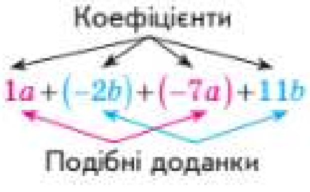
$=(1-7)a+(-2+11)b=$ ………… додати їхні коефіцієнти (розподільна властивість);

$=-6a+9b$ ………… результат помножити на спільну буквену частину.

ПРИГАДАЙТЕ!

Доданки, що мають *однакову* буквену частину, називають **подібними доданками**.

У виразі $a-2b-7a+11b$:



РОЗМИНКА 2

1 Назвіть подібні доданки у виразі:

1) $x+2y+3x$; 2) $2a-2-2b+a+b$; 3) $5-c-1+5c$.

2 Зведіть подібні доданки у виразі:

1) $8+7-15$;
2) $9-11+11$;
3) $x+3x$;
4) $5x+2x$;
5) $6y-4y$;
6) $7y-9y$;
7) $5a+6a-11a$;
8) $3a+9a-12a$;
9) $14a-6a+7a-14a$;
10) $17a-9a+9a-18a$;
11) $a+3b-5a+13a-3b$;
12) $6a-b+11a-4b-17a$;
13) $-16a-7b-5a-5+20a+12b$;
14) $-8a-15b+12a-3b-4+14b$.

Розкриття дужок

Пригадайте вивчене раніше: при **розкритті дужок** користуємось такими правилами.

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то, розкриваючи дужки, ЗНАК кожного доданка НЕ ЗМІНЮЄМО.

Наприклад:

$$3a+(2b-4c+5d)=3a+(+2b-4c+5d)=$$

Знаки не змінюються

$$=3a+2b-4c+5d$$

Якщо перед дужками стоїть знак «−», то, розкриваючи дужки, ЗНАК кожного доданка ЗМІНЮЄМО НА ПРОТИЛЕЖНИЙ.

Наприклад:

$$3a-(2b-4c+5d)=3a-(+2b-4c+5d)=$$

Знаки змінюються на протилежні: «+» на «−», «−» на «+»

$$=3a-2b+4c-5d$$

РОЗМИНКА 3

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$+(-b)=-b$

$-(-b)=+b$

1 Розкрийте дужки у виразі:

1) $x+(-y)$;
3) $-a+(-b)$;
5) $x+(-y)-(-z)$;
2) $x-(-y)$;
4) $-a-(-b)$;
6) $-a-(-b)+(-c)$.

2 Розкрийте дужки у виразі:

1) $2(a+1)$;
3) $-3(1+b)$;
5) $-6(-a+b)$;
2) $5(3-x)$;
4) $-4(y-2)$;
6) $-10(-m-n)$.

ПРИКЛАД 1

Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки у виразі $8(2a+1)-0{,}4(20-4a)$.

Розв'язання:

$8(2a+1)-0{,}4(20-4a)=$ .... Розкриємо дужки.

$=8\cdot 2a+8\cdot 1-0{,}4\cdot 20-0{,}4\cdot(-4a)=$ .... Виконаємо множення.

$=16a+8-8+1{,}6a=$ .... Зведемо подібні доданки.

$=17{,}6a$ .... Записуємо відповідь.

Відповідь: $17{,}6a$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Розподільна властивість множення

$a(b+c)=ab+ac$

$4(x+5)=4x+4\cdot 5=4x+20$

$a(b-c)=ab-ac$

$4(x-5)=4x-4\cdot 5=4x-20$

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $3(4-a)+3a$;
5) $7(5a-4)+0{,}5(56+10a)$;
2) $4(a+5)-4a$;
6) $5(3a-6)+0{,}2(150-10a)$;
3) $9(2b+1)-3\cdot 6b$;
7) $8(4p-1)-\frac{3}{7}\left(14p-\frac{56}{3}\right)$;
4) $12(3b-1)-4\cdot 9b$;
8) $4(6p-1)-\frac{5}{9}\left(18p-\frac{36}{5}\right)$.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

$\boxed{A} = \boxed{B}$

Ліва частина тотожності

Права частина тотожності

$\boxed{A \to B \text{ або } B \to A}$

$\boxed{A \to C \leftarrow B}$

$\boxed{A - B = 0}$

Доведення тотожностей

Щоб переконатись у правильності тотожності, її доводять.

Способи доведення тотожностей

1. Тотожно перетворити ліву частину A у праву частину B *або* праву частину B у ліву частину A.
2. Звести обидві частини A і B до одного виразу.
3. Показати, що різниця лівої і правої частин тотожності дорівнює нулю.

РОЗМИНКА 4

З'ясуйте, чи є правильною рівність:

1) $x+3x=4x$; 3) $14a-8a=6a$; 5) $9b-(-b)=8b$;

2) $8x=5x+3x$; 4) $5a-7a=2a$; 6) $-8b-(-b)=-7b$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Для доведення тотожностей слід вибирати найбільш раціональний спосіб.

ПРИКЛАД 2

Доведіть тотожність:

1) $10a-(7a+13b)+15b=2b+3a$;

2) $2(b+2c)-3b+14=-3(c-2b)+7(c-b+2)$.

Розв'язання:

1) Тотожне перетворення лівої частини тотожності у праву.

$10a-(7a+13b)+15b=$

$=10a-7a-13b+15b=$ ………… Розкрили дужки.

$=10a-7a-13b+15b=3a+2b$ ………… Звели подібні доданки.

$3a+2b=2b+3a$ ………… Тотожність доведено.

2) Зведення обох частин тотожності до одного й того самого виразу.

Спрощуємо *ліву* частину		Спрощуємо *праву* частину
$2(b+2c)-3b+14=$	Розкриваємо дужки.	$-3(c-2b)+7(c-b+2)=$
$=2b+4c-3b+14=$	Зводимо подібні доданки.	$=-3c+6b+7c-7b+14=$
$=2b-3b+4c+14=$		$=-3c+7c+6b-7b+14=$
$=-b+4c+14$		$=4c-b+14$

Порівнюємо отримані результати: $-b+4c+14=4c-b+14$.

Тотожність доведено.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Доведіть тотожність:

1) $5b-1+2b=7b-1$;

2) $4b-2+8b=12b-2$;

3) $15a-(5a-11)=11+10a$;

4) $18a-(4a-13)=13+14a$;

5) $23a-(3a+7b)-8b=20a-15b$;

6) $31a-(a+9b)-11b=30a-20b$;

7) $-5(3m-4)+17m+16=2(m+20)-4$;

8) $4(2c+1)-24c-18=3(6-4c)-4c-32$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$a-(b+c)=a-b-c$

$a-(b-c)=a-b+c$

$a-(-b-c)=a+b+c$

ПРАКТИКУМ

2.1 Запишіть вираз, тотожно рівний заданому:

1) $25a+17b-15a-7b$;
2) $24a-16b+a+41b$;
3) $b+42c-2b+21c$;
4) $35m+12k-m-11k$;
5) $29a+24b+8-12{,}5b-6+21a$;
6) $15{,}2x+19y-9+14{,}8x-60y+1$.

2.2 Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $(a+b)+(a-b)$;
2) $(a+b)-(a-b)$;
3) $(x-y)-(x+y)$;
4) $(x+y)-(y-x)$;
5) $a-(b-c+a)$;
6) $a-(-b+c-a)$.

2.3 Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $6a-(2a+25)+15$, якщо $a=40$;
2) $8b-(9+4b)+49$, якщо $b=20$;
3) $0{,}7(x-3)-0{,}6(4+2x)$, якщо $x=-30$;
4) $0{,}1(4-3x)-0{,}05(4x+8)$, якщо $x=-5$.

2.4 З'ясуйте, чи є тотожними вирази:

1) $5x-2(x+y)$ і $3x-2y$;
2) $4(x-y)+12y$ і $8y-4x$;
3) $0{,}3(-10a-b)$ і $-30a-0{,}3b$;
4) $-0{,}2(a-12b)$ і $2{,}4b-0{,}2a$;
5) $-(-30c+16d)-15(2c-d)$ і $-d$;
6) $2(3a-6b)-6(-a-2b)$ і $12a$.

2.5 Доведіть тотожність найбільш зручним способом:

1) $46a+(18a-14b)-21a=43a-14b$;
2) $53b-(27a+34b)-21a=-48a+19b$;
3) $2x=-3(x+2y)+11x+6(y-x)$;
4) $y=x-2(2x-3y)+y+3(x-2y)$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

2.6 Доведіть, що значення виразу не залежить від значень a і b:

1) $10a+4(8a-5b)-5(11a-4b)+13a$;
2) $-3a+5(12a-2b)-10(5a-b)-7a+2$.

2.7 У записах 1–3 розставте дужки так, щоб отримати тотожність.

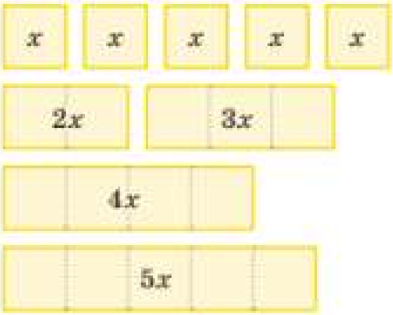
Аналізуємо	Виконуємо
1) $2a-b-a-b=a-b$. $2(a-b)-(a-b)=2a-2b-a+b=$ $=2a-a-2b+b=a-b$	2) $x+2-x+2=0$; 3) $-x-y+2x-y=x$

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Запишіть якомога більше тотожностей для виразу:
1) $a+b+c$; 2) $x-y-z$.
Обміняйтесь записами. Виграє той / та, хто запише найбільшу кількість тотожностей.

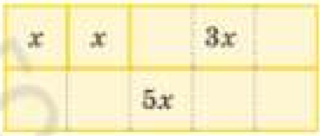
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Зробіть набір смужок із цупкого паперу, як показано на рисунку.



Складіть якомога більше різних варіантів тотожно рівних виразів і запишіть отримані тотожності.

Наприклад:



$x + x + 3x = 5x$

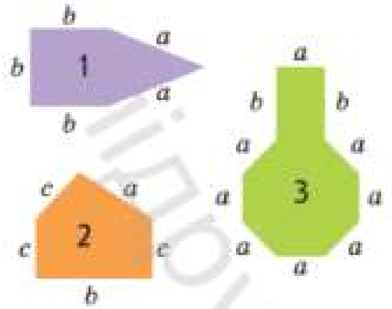
Підручник. Проєкт майбутнього видавництва "Ранок"

MATH FOR LIFE

2.8 ***Геометрія.*** На рисунку зображено схеми розміщення павільйонів у зоопарку. Навколо павільйонів прокладено доріжки.

1) Запишіть вирази, за допомогою яких можна знайти довжину доріжки навколо кожного павільйону.

2) Знайдіть значення цих виразів, якщо $a = 26$ м, $b = 30$ м, $c = 14$ м.



2.9 ***Логістика.*** Для підготовки одного шкільного кабінету до навчання необхідно закупити 15 столів, 30 стільців, 3 шафи та 1 дошку. У таблиці наведено ціни зазначених товарів у грошових одиницях (г. о.).

Складіть вираз для обчислення витрат (у г. о.) для підготовки до навчання:

1) 1 кабінету;
2) 3 кабінетів;
3) n кабінетів.

Товар	Ціна, г. о.
Стіл	90
Стілець	20
Шафа	300
Дошка	200

Інший варіант роботи в електронному додатку

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Укажіть вираз зі змінною.

А	Б	В	Г
$2+\pi$	$4-y$	$(5-1):3$	$(2+4)\cdot 7$

2 Розкрийте дужки у виразі $-4(m-1)$.

А	Б	В	Г
$-4m+4$	$4m+4$	$4m-4$	$-4m-4$

3 Спростіть вираз $5(x-y)+5y$.

А	Б	В	Г
$5x+4y$	x	$5x+10y$	$5x$

4 Знайдіть значення виразу $a-8$, якщо $a=-2$.

А	Б	В	Г
-6	16	-10	6

5 У зоомагазині купили 10 рибок за ціною a грн і 3 черепахи за ціною b грн. Скільки всього гривень заплатили за покупку?

А	Б	В	Г
$10a+3b$	$13+ab$	$3a+10b$	$30ab$

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г), якщо $a=-1$, $b=3$.

1	$a+2b$	А	2
2	$2a-b$	Б	4
3	$b-a$	В	-5
		Г	5

7 Зведіть подібні доданки:
$24m-37n-35m+24n$.

8 Доведіть тотожність
$16a-5(2a-3b)-15b=6a$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

2.10 Зведіть подібні доданки:

1) $a+7a-8a$;
2) $15a-5a+6a-15a$;
3) $a+7b-16a+18a-7b$;
4) $20a-2b-8a+14b-9a-17b$.

2.11 Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $5(3-a)+15a$;
2) $10(2b+1)-4\cdot 5b$;
3) $6(4a-5)+0{,}4(75+10a)$;
4) $8(5b-1)-\frac{7}{6}\left(12b-\frac{48}{7}\right)$.

2.12 Доведіть тотожність:

1) $4b-3+5b=9b-3$;
2) $16a-(8a-15)=15+8a$;
3) $27a-(7a+8b)-12b=20a-20b$;
4) $30a-(-(6a-11b))+19b=36a+8b$.

2.13 З'ясуйте, чи є наведений вираз тотожно рівним виразу $a+b-c$.

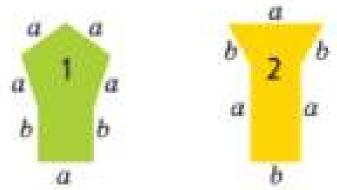
1) $a-c+b$;
2) $c-a-b$;
3) $-c+b+a$;
4) $b-c-a$;
5) $a-(c-b)$;
6) $b-(a-c)$.

2.14 Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $\frac{4}{7}(2{,}8a+7b)-5\left(\frac{3}{5}b-1{,}4a\right)$, якщо $a=-10$, $b=120$;
2) $-7(0{,}4b-5a)+\frac{4}{9}(1{,}8b-9a)$, якщо $a=25$, $b=-40$.

2.15 На рисунку зображено схеми розміщення павільйонів для зйомок фільмів. Навколо павільйонів прокладено доріжки.

1) Запишіть вирази, за допомогою яких можна знайти довжину доріжки навколо кожного павільйону.
2) Знайдіть значення цих виразів, якщо $a=245$ м, $b=190$ м.



2.16 За умовою завдання 9 на с. 30 (див. Math for life):

1) Складіть вираз для обчислення витрат (у г. о.) для підготовки до навчання: однієї школи, яка налічує m кабінетів; n таких шкіл.
2) Знайдіть значення виразу, отриманого в попередньому пункті, якщо $m=40$, $n=15$.

Бонусні завдання

2.17 Складіть задачу, яку можна розв'язати за допомогою виразу зі змінними:

1) $2(2x+5y+z)$;
2) $3(a+b)$.

2.18 Спробуйте не *спростити*, а *ускладнити* вираз $6a+6$ так, щоб отримати тотожно рівний йому вираз.

Завдання 2.10	→ Розминка 2
Завдання 2.11	→ Приклад 1
Завдання 2.12	→ Приклад 2
Завдання 2.13	→ Практикум, 2.1
Завдання 2.14	→ Практикум, 2.3
Завдання 2.15	→ Math for life, 2.8
Завдання 2.16	→ Math for life, 2.9

IQ

BE SMART

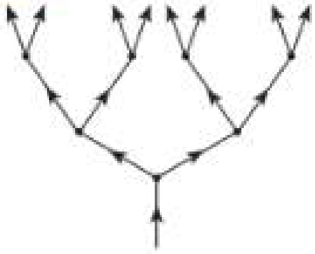
Найкрасивішою **тотожністю** в математиці визнано тотожність Леонарда Ейлера, що поєднує константи (постійні величини) з різних розділів математики:

$$e^{i\pi}+1=0.$$

Тут
0; 1 — арифметика;
i — алгебра;
π — геометрія;
e — математичний аналіз.

§3 СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

ВЧОРА	Ви множили однакові числа, обчислювали квадрат і куб числа
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся, що таке степінь з натуральним показником, навчитеся записувати степінь у вигляді добутку й добуток у вигляді степеня, знаходити значення степеня
ЗАВЖДИ	Ви зможете скорочувати запис великих чисел



АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ФЕЄРВЕРК. ГОТУЄМОСЯ ДО ПЕРЕМОГИ

На рисунку зображено, як ракета феєрверку через 1 секунду після запуску ділиться на дві частини, кожна з яких так само через 1 секунду ділиться на дві частини і т. д.

1. Скільки всього частин ракети утвориться через:

1) 1 секунду;
2) 2 секунди;
3) 3 секунди;
4) 4 секунди;
5) 5 секунд;
6) *n* секунд після запуску?

2. Якою буде відповідь на попереднє запитання, якщо кожного разу ракета ділитиметься не на дві, а на три частини?

3. Запишіть отримані добутки у вигляді СТЕПЕНЯ.

	Через					
Ракета	1 с	2 с	3 с	4 с	5 с	*n секунд*
Ділиться на 2 частини	2	$2\cdot2=4$	$2\cdot2\cdot2=8$	$2\cdot2\cdot2\cdot2=16$	$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$	$\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{n\ \text{множників}}=?$
Ділиться на 3 частини	3	$3\cdot3=9$	?	?	?	?

Якби вам було запропоновано записати кількість частин ракети через 60 с, ви б витратили багато часу й місця для запису.

Однією з особливостей математичної мови є те, що вона дозволяє «зашифрувати» певні дії короткими записами.

Суму кількох однакових доданків можна записати як добуток: $m+m+m=3m$; $9y+9y+9y+9y+9y=5\cdot(9y)$.	Добуток кількох однакових множників також можна подати у вигляді спеціального скороченого *математичного запису*, який називається СТЕПЕНЕМ. $m\cdot m\cdot m=m^3$; $(9y)\cdot(9y)\cdot(9y)\cdot(9y)\cdot(9y)=(9y)^5$.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Означення. Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають **добуток** n множників, кожний із яких дорівнює a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множників}},\ n \in N,\quad n > 1$$

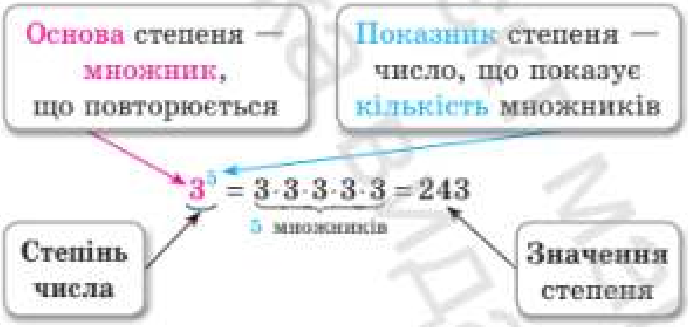
Степенем числа a з показником, що дорівнює 1, називають самé число a.

$$a^1 = a$$

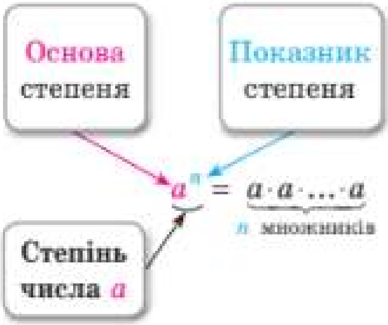
КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ
- степінь (*power*)
- основа степеня (*base*)
- покáзник степеня (*exponent*)

Обчислення значення степеня числа — це арифметична дія, яку називають піднесенням до степеня.

Числовий вираз


Основа степеня — множник, що повторюється
Показник степеня — число, що показує кількість множників
$3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5\ \text{множників}} = 243$
Степінь числа
Значення степеня

Алгебраїчний вираз


Основа степеня
Показник степеня
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множників}}$
Степінь числа a

Вираз a^n називають *степенем* числа a з натуральним показником n.

Читаємо правильно: «a в степені n» або «n-й степінь числа a». Слово «степінь» — чоловічого роду.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множників}}$$

a^n — степінь числа a;
a — основа степеня (будь-яке число або вираз);
n — показник степеня, натуральне число

Наприклад:

Степінь	Добуток	Основа степеня	Показник степеня	Значення степеня	Читаємо правильно
6^2	$6 \cdot 6$	6	2	36	«6 у другому степені» або «6 у квадраті»
$(-4)^3$	$(-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$	−4	3	−64	«мінус 4 у третьому степені» або «мінус 4 в кубі»
$\left(\frac{1}{3}\right)^5$	$\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}_{5\ \text{множників}}$	$\frac{1}{3}$	5	$\frac{1}{243}$	«$\frac{1}{3}$ у п'ятому степені» або «п'ятий степінь числа $\frac{1}{3}$»
1^n	$\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n\ \text{множників}}$	1	n	1	«одиниця в степені n»

$a^1 = a$

$1^n = 1$

$0^n = 0, \ n \geqslant 1$

Якщо основа степеня — вираз або від'ємне число, або звичайний дріб, її беруть у дужки.

Якщо показник степеня дорівнює 1, то його зазвичай не пишуть:

$$5^1 = 5; \ a^1 = a.$$

Одиниця у будь-якому натуральному степені дорівнює одиниці:

$$1^n = 1.$$

Нуль у будь-якому натуральному степені дорівнює нулю: $0^n = 0$.

РОЗМИНКА 1

1 Прочитайте вираз, назвіть основу степеня та показник степеня:

1) 2^7; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^1$; 3) $(-7)^3$; 4) x^2; 5) $(-y)^5$; 6) $(6+a)^3$.

2 Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $5 \cdot 5$;
2) $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$;
3) $0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4$;
4) $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$;
5) $\left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)$;
6) $(-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b)$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$5^4 = 5 \cdot 4 = 20$

$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 5^7$

3 Запишіть степінь у вигляді добутку, обчисліть значення степеня:

1) 3^4; 2) 4^3; 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; 5) 10^6; 6) $0{,}1^6$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$10^n = 1\underbrace{0 \dots \dots 0}_{n \text{ нулів}}$$

$$0{,}1^n = 0{,}\underbrace{0 \dots \dots 1}_{\substack{n \text{ знаків} \\ \text{після коми}}}$$

4 Які зі степенів мають парні показники, а які — непарні? Обчисліть та порівняйте з нулем степені:

1) $(-1)^6$; 2) $(-1)^7$; 3) $(-2)^4$; 4) $(-2)^5$; 5) $(-3)^2$; 6) $(-3)^3$.

Знак степеня з натуральним показником

Для того щоб визначити знак степеня, з'ясовують таке:

- яким числом (*додатним* або *від'ємним*) є основа степеня;
- яким числом (парним або непарним) є показник степеня.

У таблиці наведено квадрати й куби додатних і від'ємних чисел. Завершіть заповнення таблиці й доповніть твердження.

1) «Будь-яке від'ємне число в парному степені є ... числом»;
2) «Будь-яке від'ємне число в непарному степені є ... числом».

Існують правила, за якими визначають знак степеня.

ДОСЛІДЖУЄМО!

a	a^2	a^3
4	?	?
3	9	?
2	4	8
1	1	1
0	0	0
–1	1	–1
–2	4	–8
–3	9	?
–4	?	?

Невід'ємне число в будь-якому натуральному степені є *невід'ємним* числом.

Від'ємне число в парному степені є додатним числом.

Від'ємне число в непарному степені є від'ємним числом.

РОЗМИНКА 2

1 Обчисліть:

1) 0^2; 2) 1^3; 3) $(-1)^2$; 4) $(-1)^3$; 5) $1^4+(-1)^4$; 6) $1^5+(-1)^5$.

2 Не виконуючи обчислень, порівняйте з нулем значення виразу:

1) 1^7; 2) $(-1)^6$; 3) $(-6)^8$; 4) $(-4)^5$; 5) -7^{12}; 6) $-(-8)^7$.

СЛІД ЗНАТИ!

$$\underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)}_{\text{парне число множників}}=1$$

$$\underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)}_{\text{непарне число множників}}=-1$$

ПРИКЛАД 1

Обчисліть значення виразу:

1) $0{,}3^3\cdot10^2$; 3) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2\cdot2^4$; 5) $(-1{,}1+0{,}2)^3$;

2) $(0{,}3\cdot100)^4$; 4) $(-5)^3-(-10)^2$; 6) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^2$.

1) $0{,}3^3\cdot10^2=0{,}027\cdot100=2{,}7$ .... Підносимо до степеня. Множимо.

2) $(0{,}3\cdot100)^4=30^4=810\,000$ .... Множимо (у дужках). Підносимо до степеня.

3) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2\cdot2^4=\left(\frac{7}{4}\right)^2\cdot2^4=\frac{49}{16}\cdot16=49$ .... Перетворюємо в неправильний дріб. Підносимо до степеня. Множимо.

4) $(-5)^3-(-10)^2=-125-100=-225$ .... Підносимо до степеня. Знаходимо різницю.

5) $(-1{,}1+0{,}2)^3=(-0{,}9)^3=-0{,}729$ .... Додаємо (у дужках). Підносимо до степеня.

6) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^2=\frac{81}{16}\cdot\frac{16}{81}=1$ .... Перетворюємо в неправильний дріб. Підносимо до степеня. Множимо.

Відповідь: 1) 2,7; 2) 810 000; 3) 49; 4) −225; 5) −0,729; 6) 1.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

1 Запишіть у вигляді добутку й обчисліть:

1) 5^2; 3^2; 1^4; 4^3; 3) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{8}\right)^2$; $\left(-\frac{5}{2}\right)^3$;

2) $(-6)^2$; $(-1)^4$; $(-2)^3$; $(-1)^5$; 4) $(-0{,}6)^2$; $(-0{,}7)^2$; $(-0{,}1)^3$; $(-0{,}3)^3$.

2 Обчисліть значення виразу:

1) $10^3\cdot0{,}1^2$; 3) $\left(-25\cdot\frac{1}{5}\right)^3$; 5) $(-6)^2+2^2$; 7) $\left(1+\frac{1}{3}\right)^2$;

2) $10^3\cdot(-0{,}1)^3$; 4) $\left(-64\cdot\frac{1}{16}\right)^4$; 6) $(-3)^3-4^3$; 8) $\left(\frac{1}{2}-2\right)^3$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Ви знаєте, що $16=2^4=4^2$. Запишіть ще три числа, які можна подати у вигляді степеня двома способами. Обміняйтесь записами й перевірте результати одне одного.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

Порядок виконання дій

1. Дії в дужках.
2. Піднесення до степеня.
3. Множення й ділення (зліва направо).
4. Додавання й віднімання (зліва направо).

ПРИКЛАД 2

Знайдіть значення виразу $5x^2-(x-3)^3$, якщо $x=-2$.

$5x^2-(x-3)^3=$ .... Підставимо значення $x=-2$.

$=5(-2)^2-(-2-3)^3=$ ... Виконаємо дію в дужках.

$=5(-2)^2-(-5)^3=$ .... Обчислимо: $(-2)^2=4$; $(-5)^3=-125$.

$=5\cdot4-(-125)=$ .... Виконаємо множення, розкриємо дужки.

$=20+125=145$ .... Отримали значення виразу.

Відповідь: 145.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Знайдіть значення виразу:

1) x^2+12, якщо $x=6$;
2) x^2+11, якщо $x=7$;
3) $28-2x^2$, якщо $x=3$;
4) $32-3x^2$, якщо $x=2$;
5) $x^2+(x+3)^3$, якщо $x=-7$;
6) $(x+5)^3+x^2$, якщо $x=-8$;
7) $2(9-x)^2-(x-13)^3$, якщо $x=12$;
8) $3(11-x)^2-(x-16)^4$, якщо $x=15$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Для полегшення обчислень значень виразів зі степенями зробіть і заповніть таблицю.

a	2	3	5	7
a^2				
a^3				
a^4				
a^5				
a^6				
a^7				
a^8				
a^9				
a^{10}				

ПРИКЛАД 3

Розташуйте числові вирази за зростанням їхніх значень:

7^3; $(-7)^3$; 1^2; $(-1)^3$; 0^{10}; $(-7)^2$.

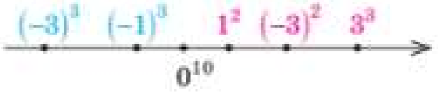
$(-7)^3=-343$, $(-1)^3=-1$ Від'ємне число в непарному степені — від'ємне число.

$0^{10}=0$, $1^2=1$ .... $0^n=0$, $1^n=1$.

$(-7)^2=49$ .... Від'ємне число в парному степені — додатне число.

$7^3=343$ .... Додатне число в будь-якому степені — додатне число.

Відповідь: $(-7)^3$; $(-1)^3$; 0^{10}; 1^2; $(-7)^2$; 7^3.



ТРЕНУЄМОСЯ 3

У завданнях 1–4 порівняйте значення числових виразів:

1) 0^5 і 1^4; 2) 1^7 і 0^9; 3) 2^3 і 3^2; 4) 5^2 і 4^3.

У завданнях 5–8, не виконуючи обчислень, розташуйте числові вирази за зростанням їхніх значень:

5) 8^{10}, 1^{11}, 8^{12};
6) 7^{10}, 7^8, 1^9;
7) $(-5)^{14}$, $(-5)^{15}$, 0^{16};
8) 0^{17}, $(-4)^{18}$, $(-4)^{19}$.

ПРАКТИКУМ

3.1 Знайдіть значення виразу:

1) $2^3+3^3-4^3$; 3) $(25+10)^2-8^3$; 5) $(2{,}5-2{,}4)^3\cdot 10^5+12^2$;

2) $5^2+6^2-7^2$; 4) $11^2-(15-19)^3$; 6) $(29-24)^3:10^3+1{,}5^2$.

3.2 Запишіть добуток у вигляді степеня:

1) $10\cdot 10\cdot 10\cdot 10$; 3) $\underbrace{(-10)\cdot(-10)\cdot\ldots\cdot(-10)}_{10\ \text{множників}}$;

2) $0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1$; 4) $\underbrace{(-0{,}1)\cdot(-0{,}1)\cdot\ldots\cdot(-0{,}1)}_{7\ \text{множників}}$.

3.3 Запишіть у вигляді степеня з основою 10:

1) кількість сантиметрів в 1 м;
2) кількість метрів в 1 км;
3) кількість квадратних метрів в 1 квадратному кілометрі.

3.4 Подайте задані числа у вигляді степеня із зазначеною основою:

1) 2; 4; 8; 16; 32; 64 з основою 2;
2) −5; 25; −125; 625; −3125 з основою −5;
3) −10; 100; −1000; 10 000; −100 000 з основою −10;
4) 0,1; 0,01; 0,001, 0,0001; 0,00001 з основою 0,1;
5) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{256}$ з основою $\frac{1}{4}$;
6) $\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; $-\frac{1}{243}$ з основою $-\frac{1}{3}$.

3.5 Обчисліть:

1) 1^7+0^6; 2) $1^4+(-1)^9$; 3) $1^{13}-0^{10}+(-1)^{14}$; 4) $1^8-0^{11}+(-1)^{17}$.

3.6 Знайдіть значення виразу:

1) $12x^2$, якщо $x=-1$; 10; 3) $25-c^4$, якщо $c=-2$; 1;

2) $(24y)^3$, якщо $y=\frac{1}{12}$; $-\frac{3}{8}$; 4) $(c+5)^4$, якщо $c=-5$; 5;

5) a^2b^3, якщо $a=0{,}1$, $b=10$;

6) a^2-b^3, якщо $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$.

3.7 Не виконуючи обчислень, порівняйте:

1) -3^2 і $(-4)^3$; 3) $(-11)^7$ і 0; 5) $(-4)^{14}$ і -4^{14};

2) $(-8)^3$ і $(-5)^2$; 4) 0 і -12^2; 6) -7^9 і $-(-7)^9$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$10^n=\underbrace{10\cdot 10\cdot\ldots\cdot 10}_{n\ \text{множників}}=1\underbrace{0\ldots\ldots\ldots}_{n\ \text{нулів}}$$

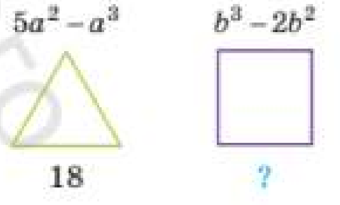
$$(0{,}1)^n=\underbrace{0{,}1\cdot 0{,}1\cdot\ldots\cdot 0{,}1}_{n\ \text{множників}}=0{,}\underbrace{000\ldots\ldots\ldots1}_{n\ \text{знаків після коми}}$$

ПРИГАДАЙТЕ!

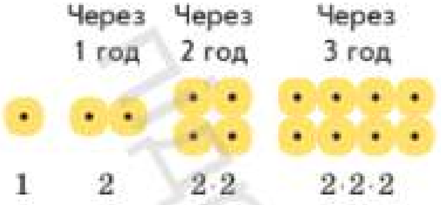
1 км = 1000 м;
1 м = 100 см;
1 км² = 1 000 000 м²

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть невідоме число



Підручник Проект Майбутнього
Підручника видавництва "Ранок"



В ОДИН КЛІК

Обчислимо 7^4.

Отримаємо: $7^4 = 2401$.

Перевіримо себе за допомогою калькулятора:

Вводимо число | Натискаємо кнопку степеня | Вводимо показник степеня

$7^4 =$ [7] [x^y] [4] [=]

Спробуйте самостійно розібратися, як знайти степінь числа 10.

MATH FOR LIFE

3.8 ***Астрономія.*** Спіральна галактика Андромеди є найближчою до нашої Галактики, але відстань до неї становить $2{,}5\cdot1\,000\,000$ світлових років. Запишіть цю відстань із використанням степеня.

3.9 ***Біологія.*** Кожної години клітина ділиться на дві (див. рисунок). Скільки клітин утвориться через 5 год? Запишіть у вигляді степеня кількість клітин, яка утвориться через 10 год.

3.10 ***Енергозбереження.*** Ви плануєте встановити на даху будинку m сонячних панелей, кожна з яких містить n рядів фотоелементів. Кожен ряд теж складається з n фотоелементів. Скільки фотоелементів на кожній панелі? Запишіть відповідь у вигляді степеня. Знайдіть загальну кількість фотоелементів на даху будинку, якщо $m=6$; 10.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

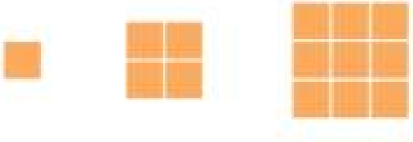
3.11 Запишіть подані числа (1–4) у вигляді степенів із трьома різними основами.

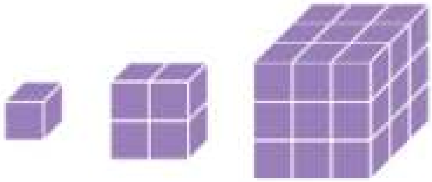
Аналізуємо	Виконуємо
1) $15\,625=\overset{125\ \cdot\ 125}{\underset{25\ \cdot\ 25\ \cdot\ 25}{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}}=5^6$; $15\,625=5^6=25^3=125^2$	2) 64; 3) 256; 4) 729

3.12 Укажіть найменше значення, якого може набути вираз:

1) a^4+1; 2) a^6+2; 3) $(x-6)^2+8$.

3.13 Розгляньте послідовності фігур. Нарисуйте в зошиті дві наступні фігури для першої послідовності. Заповніть таблиці за зразком.





Кількість *одиничних* квадратів (зі стороною 1)	1	4	9	?	?
Запишіть у вигляді степеня	1^2	2^2	?	?	?

Кількість *одиничних* кубів (зі стороною 1)	1	8	27	?	?
Запишіть у вигляді степеня	1^3	2^3	?	?	?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

3.14 Обчисліть значення виразу:

1) $4^2,\ 2^2,\ 1^5,\ 5^3$;

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^2,\ \left(\frac{3}{4}\right)^3,\ \left(-\frac{1}{6}\right)^2,\ \left(-\frac{2}{5}\right)^3$;

2) $(-7)^2,\ (-1)^6,\ (-3)^3,\ (-1)^7$;

4) $(-0{,}8)^2,\ (-0{,}9)^2,\ (-0{,}2)^3,\ (-0{,}1)^5$.

3.15 Обчисліть значення виразу:

1) $10^4\cdot(-0{,}1)^3$; 2) $\left(-36\cdot\frac{1}{9}\right)^3$; 3) $(-2)^3+7^2$; 4) $\left(\frac{1}{4}-2\right)^2$.

3.16 Запишіть у вигляді степеня з основою 10 кількість:

1) грамів в 1 кг;

3) грамів в 1 т.

2) кілограмів в 1 т;

3.17 Знайдіть значення виразу:

1) x^2+13, якщо $x=5$;

3) $x^2+(x+7)^3$, якщо $x=-9$;

2) $70-5x^2$, якщо $x=2$;

4) $2(9-x)^2-(x-15)^5$, якщо $x=14$.

3.18 Знайдіть значення виразу:

1) 1^9+0^4;

3) $1^{27}-0^{16}+(-1)^{21}$;

2) $(-1)^{11}-1^{10}$;

4) $0^{28}-1^{35}+(-1)^{57}$.

3.19 Порівняйте значення числових виразів:

1) 3^4 і 4^3; 2) 4^3 і 2^6; 3) 5^3 і 3^5; 4) 6^3 і 9^2.

3.20 Не виконуючи обчислень, розташуйте числові вирази за зростанням їхніх значень:

1) $6^{18},\ 1^{19},\ 6^{17}$; 2) $(-7)^{14},\ (-7)^{13},\ 0^{15}$; 3) $2^3,\ (-2)^3,\ -(-3)^2$.

3.21 У комп'ютерній грі на шляху персонажа протягом першої хвилини з'являються три перешкоди, а протягом кожної наступної хвилини їх стає утричі більше, ніж протягом попередньої.

1) Скільки перешкод з'явиться протягом 2-ї хвилини; 3-ї хвилини; 4-ї хвилини; n-ї хвилини з початку гри?

2) Якою буде відповідь на останній пункт попереднього запитання, якщо протягом кожної наступної хвилини кількість перешкод стає в m разів більшою, ніж протягом попередньої?

Бонусне завдання

3.22 Укажіть найбільше значення, якого може набути вираз:

1) $-b^2-10$; 2) $-b^4-22$; 3) $-(x-9)^2-3$.

Завдання 3.14, 3.15	→ Приклад 1
Завдання 3.16	→ Практикум, 3.3
Завдання 3.17	→ Приклад 2
Завдання 3.18	→ Практикум, 3.5
Завдання 3.19–3.21	→ Приклад 3

ПРИГАДАЙТЕ!

1 т = 1000 кг;
1 кг = 1000 г

# BE SMART

За легендою, винахідник шахів попросив за свою гру таку винагороду. За 1 клітинку шахової дошки — 1 зернятко, за другу — 2 зернятка, за третю — 4, за четверту — 8 і т. д., збільшуючи у два рази кількість зерняток за кожну наступну з 64 клітинок.

Запишіть у вигляді степеня кількість зерняток для 5-ї; 7-ї; 10-ї, 64-ї клітинок.

Загальна кількість зерняток, що мали скласти винагороду, дорівнює:

18 446 744 073 709 551 615.

Як отримати це число, ви дізнаєтесь, вивчаючи тему «Геометрична прогресія» в 9 класі.

§4 ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

ВЧОРА	Ви знаходили значення степеня з натуральним показником
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтесь, які дії можна виконувати зі степенями, та навчитеся застосовувати властивості степеня для спрощення обчислень
ЗАВЖДИ	Ви зможете порівняти великі числа, зокрема об'єми інформації чи космічні відстані

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

РОЗВИТОК КОМП'ЮТЕРНОЇ ТЕХНІКИ

Об'єм оперативної пам'яті персональних комп'ютерів (ПК) широкого вжитку в 1989 році дорівнював 2^6 Мб (мегабайтів), а у 2005 році збільшився в 16 разів. Яким став об'єм оперативної пам'яті ПК у 2005 році? Запишіть відповідь у вигляді степеня з основою 2.

У 2019 році об'єм оперативної пам'яті ПК дорівнював уже 2^3 Гб (гігабайтів). У скільки разів збільшилась оперативна пам'ять ПК порівняно з 1989 роком? (1 Гб = 2^{10} Мб.)

Розв'язання

1989	2^6 Мб
2005	У 16 разів більше Запишемо 16 у вигляді степеня з основою 2: $16=2^4$. Маємо: у 2^4 рази більше, ніж у 1989 році, тобто $2^6\cdot 2^4$ Мб
2019	2^3 Гб Подамо об'єм оперативної пам'яті в мегабайтах, враховуючи, що 1 Гб = 2^{10} Мб: 2^3 Гб = $2^3\cdot 2^{10}$ Мб. Маємо: об'єм оперативної пам'яті ПК збільшився порівняно з 1989 роком у $\frac{2^3\cdot 2^{10}}{2^6}$ разів

Для отримання відповідей необхідно вміти виконувати дії зі степенями.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Розробки однієї з перших у Європі електронно-обчислювальних машин — Малої електронно-обчислювальної машини (МЕОМ) проводились із 1948 року в Київському Інституті електротехніки під керівництвом академіка Сергія Олексійовича Лебедєва.

Розв'язання перших математичних задач за допомогою МЕОМ, зокрема піднесення до степеня, відбулося 4 січня 1951 року.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Для того щоб виконувати дії зі степенями, познайомимося з тотожними перетвореннями виразів зі степенями, які базуються на ***властивостях*** степеня з натуральним показником.

Множення степенів з однаковими основами

Заповніть таблицю і спробуйте сформулювати **правило множення степенів з однаковою основою**.

Добуток степенів	Подання у вигляді добутку множників	Кількість множників — сума показників	Степінь
$2^6\cdot 2^4$	$(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)$	$6+4=10$	2^{10}
$5^4\cdot 5^1$	$(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)\cdot 5$	?	5^7
$10^2\cdot 10^5$	?	?	?

Властивість 1	Правило множення степенів з однаковими основами
Для будь-якого числа ***a*** та будь-яких натуральних чисел m і n справджується рівність $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	При ***множенні*** степенів *з однаковими основами* основу залишають тією самою, а показники степенів **додають**

Пояснення: $a^2a^4=\underbrace{\overbrace{a\cdot a}^{2\text{ множники}}\cdot\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a}^{4\text{ множники}}}_{6\text{ множників}}=a^{2+4}=a^6$

Доведення: $a^ma^n=\underbrace{aa\ldots a}_{m\text{ множників}}\cdot\underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ множників}}=\underbrace{aa\ldots a}_{m+n\text{ множників}}=a^{m+n}$

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- добуток степенів (*product of powers*)
- частка степенів (*quotient of powers*)
- степінь степеня (*power of a power*)
- степінь добутку (*power of a product*)

Наприклад:

$b^7\cdot b^{13}=b^{7+13}=b^{20}$

$c=c^1$

$c\cdot c^{10}=c^1\cdot c^{10}=c^{1+10}=c^{11}$

$d^5\cdot d^2\cdot d=d^{5+2+1}=d^8$

$2^4\cdot 2^6=2^{4+6}=2^{10}$

$3^8\cdot 3=3^8\cdot 3^1=3^{8+1}=3^9$

$(-2)^5\cdot(-2)^5=(-2)^{5+5}=(-2)^{10}$

РОЗМИНКА 1

1 Подайте у вигляді степеня добуток:

1) $5^2\cdot 5^5$; 3) $(-3)^4\cdot(-3)^4$; 5) $a^2\cdot a^9$; 7) $c\cdot c^6$;

2) $0{,}2\cdot 0{,}2^9$; 4) $7\cdot 7^4\cdot 7^2$; 6) $b^5\cdot b^5$; 8) $d\cdot d^{15}\cdot d^2$.

2 Подайте вираз a^{10} у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами, один із яких дорівнює:

1) a^3; 2) a^8; 3) a^5; 4) a^9; 5) a^1.

3 Застосуйте правило множення степенів та обчисліть значення виразу:

1) $2^4\cdot 2^3$; 2) $3^3\cdot 3^2$; 3) $0{,}1^4\cdot 0{,}1^3$; 4) $10\cdot 10^4\cdot 10^2$.

СЛІД ЗНАТИ!

$a^ma^n=a^{m+n}$

$a^{m+n}=a^ma^n$

Ця властивість поширюється також на добуток трьох і більше степенів.

$a^ma^na^k=a^{m+n+k}$

Ділення степенів з однаковими основами

Заповніть таблицю і спробуйте сформулювати **правило ділення степенів з однаковими основами**.

Ділення степенів	Подання кожного степеня у вигляді добутку	Різниця показників у чисельнику і знаменнику	Степінь
$\frac{3^2}{3^1}$	$\frac{3\cdot 3}{3}$	$2-1=1$	3^1
$\frac{3^4}{3^2}$	$\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3}$	?	3^2
$\frac{3^5}{3^2}$	$\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3}$	?	?

ПРИГАДАЙТЕ!

Риска дробу — знак ділення

$$\frac{3}{7}=3:7$$

Властивість 2 | **Правило ділення степенів з однаковими основами**

Для будь-якого числа a, відмінного від нуля, та будь-яких натуральних чисел m і n таких, що $m>n$, справджується рівність:

$$a^m:a^n=a^{m-n},\ a\neq 0$$

При *діленні* степенів з *однаковими основами* основу залишають тією самою, а від показника степеня діленого ***віднімають*** показник степеня дільника.

Пояснення:

$$\frac{a^5}{a^3}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}^{5\text{ множників}}}{\underbrace{a\cdot a\cdot a}_{3\text{ множники}}}=\frac{a\cdot a\cdot \cancel{a}\cdot \cancel{a}\cdot \cancel{a}}{\cancel{a}\cdot \cancel{a}\cdot \cancel{a}}=\underbrace{a\cdot a}_{2\text{ множники}}=a^{5-3}=a^2$$

Доведення:

за *правилом множення степенів*: $a^{m-n}\cdot a^n=a^{m-n+n}=a^m$,
звідси за *означенням частки* маємо: $a^m:a^n=a^{m-n}$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},\ m>n,\ a\neq 0$$

Показник степеня діленого більше за показник степеня дільника!

Наприклад:

$b^9:b^6=b^{9-6}=b^3$
$c^{10}:c=c^{10}:c^1=c^{10-1}=c^9$
$d^{11}:d^{10}=d^{11-10}=d^1=d$
$7^7:7^5=7^{7-5}=7^2$
$9^8:9=9^8:9^1=9^{8-1}=9^7$
$10^6:10^5=10^{6-5}=10^1=10$

РОЗМИНКА 2

① Подайте у вигляді степеня частку:

1) $5^9:5^2$; 3) $4^4:4$; 5) $b^7:b^2$; 7) $d^5:d$;
2) $10^4:10^3$; 4) $(-6)^{10}:(-6)^7$; 6) $c^6:c^5$; 8) $k^{20}:k^{10}$.

② Обчисліть:

1) $2^8:2^5$; 2) $10^9:10^3$; 3) $4^4:4$; 4) $(-6)^{10}:(-6)^7$.

СЛІД ЗНАТИ!

Ця властивість поширюється також на частку трьох і більше степенів.

$$a^m:a^n:a^k=a^{m-n-k}$$

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

Піднесення степеня до степеня

Властивість 3	Правило піднесення степеня до степеня
Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n справджується рівність $\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}$	При ***піднесенні степеня до степеня*** основу залишають тією самою, а показники степенів ***перемножують***.

Пояснення: $\left(a^{7}\right)^{5}=\underbrace{a^{7}\cdot a^{7}\cdot a^{7}\cdot a^{7}\cdot a^{7}}_{5\text{ множників}}=a^{\overbrace{7+7+7+7+7}^{5\text{ доданків}}}=a^{7\cdot 5}=a^{35}$

Доведення: $\left(a^{m}\right)^{n}=\underbrace{a^{m}\cdot a^{m}\cdot a^{m}\cdot a^{m}\cdot a^{m}}_{n\text{ множників}}=a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n\text{ доданків}}}=a^{mn}$

Наприклад:

$$\left(a^{4}\right)^{6}=a^{4\cdot 6}=a^{24}$$

$$\left(b^{3}\right)^{3}=b^{3\cdot 3}=b^{9}$$

$$\left(\left(a^{2}\right)^{7}\right)^{5}=a^{2\cdot 7\cdot 5}=a^{70}$$

$$\left(5^{2}\right)^{3}=5^{2\cdot 3}=5^{6}$$

$$\left(9^{5}\right)^{5}=9^{5\cdot 5}=9^{25}$$

$$\left(\left(-4\right)^{2}\right)^{5}=\left(-4\right)^{2\cdot 5}=\left(-4\right)^{10}$$

РОЗМИНКА 3

1 Виконайте піднесення до степеня:

1) $\left(3^{2}\right)^{4}$; 2) $\left(\left(-3\right)^{5}\right)^{5}$; 3) $\left(a^{4}\right)^{2}$; 4) $\left(\left(7^{3}\right)^{7}\right)^{10}$; 5) $\left(\left(y^{4}\right)^{4}\right)^{5}$.

2 Подайте вираз b^{24} у вигляді степеня з основою:

1) b^{2}; 2) b^{3}; 3) b^{4}; 4) b^{6}; 5) b^{8}; 6) b^{12}.

СЛІД ЗНАТИ!

$$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}=a^{nm}$$

$$a^{mn}=\left(a^{m}\right)^{n}=\left(a^{n}\right)^{m}$$

Правильною є і така рівність:

$$\left(\left(a^{m}\right)^{n}\right)^{k}=a^{m\cdot n\cdot k}$$

ПРИКЛАД 1

Запишіть у вигляді степеня з основою a вираз:

1) $2\cdot 4^{6}$, якщо $a=2$; 2) $7^{2}\cdot 343^{3}$, якщо $a=7$.

Розв'язання:

1) $2\cdot 4^{6}=2\cdot\left(2^{2}\right)^{6}=2^{1}\cdot 2^{2\cdot 6}=2^{1+12}=2^{13}$;

$4=2^{2}$

$343=7^{3}$

2) $7^{2}\cdot 343^{3}=7^{2}\cdot\left(7^{3}\right)^{3}=7^{2}\cdot 7^{3\cdot 3}=7^{2+9}=7^{11}$.

Відповідь: 1) 2^{13}; 2) 7^{11}.

Застосовуємо властивості

$$\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn};$$

$$a^{m}a^{n}=a^{m+n}.$$

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Запишіть у вигляді степеня з основою a вираз:

1) $3\cdot 27$, якщо $a=3$;

2) $125\cdot 5$, якщо $a=5$;

3) $16\cdot 2^{5}$, якщо $a=2$;

4) $7^{4}\cdot 49$, якщо $a=7$;

5) $2^{5}\cdot 16^{3}$, якщо $a=2$;

6) $125^{2}\cdot 5^{4}$, якщо $a=5$;

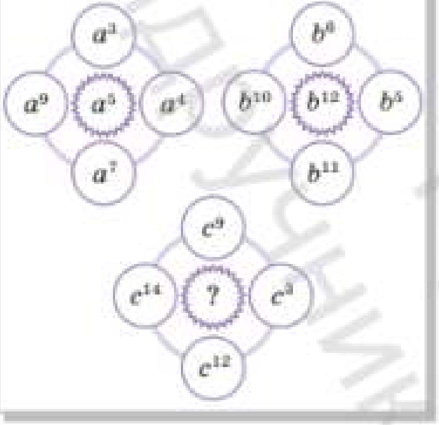
7) $\left(6^{3}\right)^{2}\cdot 216^{4}$, якщо $a=6$;

8) $243^{2}\cdot\left(3^{2}\right)^{5}$, якщо $a=3$.

Проект "Майбутнього" підручника видавництва "Ранок"

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть невідомий вираз:



ПРИКЛАД 2

Обчисліть значення виразу $\frac{5^6\cdot 125^3}{25^7}$.

Розв'язання

$$\frac{5^6\cdot 125^3}{25^7}=\frac{5^6\cdot\left(5^3\right)^3}{\left(5^2\right)^7}=\frac{5^6\cdot 5^{3\cdot 3}}{5^{2\cdot 7}}=\frac{5^6\cdot 5^9}{5^{14}}=\frac{5^{6+9}}{5^{14}}=\frac{5^{15}}{5^{14}}=5^{15-14}=5^1=5$$

$$\left(a^m\right)^n=a^{mn} \qquad a^m a^n=a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

Відповідь: 5.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{6^2\cdot 6^9}{6^8}$;
2) $\frac{7^{10}\cdot 7}{7^9}$;
3) $\frac{2^7}{4^3}$;
4) $\frac{9^4}{3^7}$;
5) $\frac{3^{23}}{27^5\cdot 3^7}$;
6) $\frac{8^7\cdot 2^4}{2^{24}}$;
7) $\frac{216^8\cdot 6^{15}}{36^{19}}$;
8) $\frac{100^{15}}{1000^6\cdot 10^{11}}$.

ПРИКЛАД 3

Спростіть вираз $\frac{a\left(a^5\right)^8:\left(a^4\right)^7}{\left(a^3\right)^4}$, якщо $a\neq 0$.

Розв'язання

Визначаємо порядок дій (1–4).

$$\frac{a\left(a^5\right)^8:\left(a^4\right)^7}{\left(a^3\right)^4}=\frac{a\cdot a^{5\cdot 8}:a^{4\cdot 7}}{a^{3\cdot 4}}=\frac{a^1\cdot a^{40}:a^{28}}{a^{12}}=\frac{a^{1+40}:a^{28}}{a^{12}}=$$

$$=\frac{a^{41}:a^{28}}{a^{12}}=\frac{a^{41-28}}{a^{12}}=\frac{a^{13}}{a^{12}}=a^{13-12}=a^1=a.$$

Відповідь: a $(a\neq 0)$.

Визначаємо порядок дій

1) піднесення степеня до степеня: $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$;
2) множення степенів: $a^m a^n=a^{m+n}$;
3) ділення степенів: $a^m:a^n=a^{m-n}$;
4) ділення степенів: $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Спростіть вираз $(x\neq 0)$:

1) $\frac{x\cdot x^7}{x^6}$;
2) $\frac{x^9\cdot x}{x^7}$;
3) $\frac{x^{12}\cdot x^3}{\left(x^2\right)^7}$;
4) $\frac{x^4\cdot x^{14}}{\left(x^3\right)^5}$;
5) $\frac{x^{20}\cdot\left(x^4\right)^2}{\left(x^3\right)^8}$;
6) $\frac{x^6\cdot\left(x^3\right)^5}{\left(x^9\right)^2}$;
7) $\frac{x^{25}\cdot\left(x^{10}\right)^2:\left(x^8\right)^3}{\left(x^4\right)^5}$;
8) $\frac{x^{35}\cdot\left(x^9\right)^4:\left(x^7\right)^3}{\left(x^6\right)^8}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Отримайте число 1 за допомогою п'яти цифр 3 й арифметичних дій.

Проект підручника майбутнього видавництва "Ранок"

Натуральний степінь добутку двох множників

Проаналізуйте ланцюжок обчислень і спробуйте сформулювати правило піднесення добутку до степеня.

$$0{,}25^4\cdot 4^4=\underbrace{(0{,}25\cdot 0{,}25\cdot 0{,}25\cdot 0{,}25)}_{\text{4 множники}}\cdot\underbrace{(4\cdot 4\cdot 4\cdot 4)}_{\text{4 множники}}=$$

$$=\underbrace{(0{,}25\cdot 4)\cdot(0{,}25\cdot 4)\cdot(0{,}25\cdot 4)\cdot(0{,}25\cdot 4)}_{\text{4 рази}}=(0{,}25\cdot 4)^4=1^4$$

Значення якого з виразів — $0{,}25^4\cdot 4^4$ або $(0{,}25\cdot 4)^4$ — обчислити простіше?

Властивість 4	Правило піднесення добутку до степеня
Для будь-яких чисел a і b та довільного натурального числа n справджується рівність $(ab)^n=a^n\cdot b^n$	При піднесенні ***добутку*** до степеня треба піднести до цього степеня ***кожний із множників*** і результати перемножити

Пояснення:

$$(ab)^3=\underbrace{ab\cdot ab\cdot ab}_{\text{3 рази}}=\left(\underbrace{a\cdot a\cdot a}_{\text{3 множники}}\right)\cdot\left(\underbrace{b\cdot b\cdot b}_{\text{3 множники}}\right)=a^3\cdot b^3=a^3b^3$$

Доведення:

$$(ab)^n=\underbrace{ab\cdot ab\cdot\ldots\cdot ab}_{n\text{ разів}}=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множників}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ множників}}=a^n\cdot b^n=a^nb^n$$

Наприклад:

$(b\cdot c)^7=b^7\cdot c^7$

$(6d)^4=6^4d^4$

$(m\cdot n\cdot k)^5=m^5n^5k^5$

$(2\cdot 13)^5=2^5\cdot 13^5$

$((-4)\cdot 7)^2=(-4)^2\cdot 7^2$

$(4\cdot 25\cdot 3)^3=4^3\cdot 25^3\cdot 3^3$

РОЗМИНКА 4

1 Подайте у вигляді добутку степенів вираз:

1) $(7\cdot 10)^3$; 3) $(4a)^2$; 5) $((-2)\cdot 5)^7$; 7) $(-8b)^2$;

2) $(cd)^5$; 4) $(6bc)^6$; 6) $(-xy)^9$; 8) $(-3xy)^3$.

2 Подайте у вигляді степеня з основою ab добуток:

1) a^2b^2; 2) a^3b^3; 3) $b^{10}a^{10}$.

3 Спростіть вираз і знайдіть його значення.

1) $\left(\frac{2}{7}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^4$; 3) $\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)^2$;

2) $3^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 4) $(-6)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3$.

СЛІД ЗНАТИ!

$$(ab)^n=a^nb^n$$

Ця властивість поширюється також на степінь трьох і більше добутків.

$$(abc)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$$

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$(7\cdot 8)^6=7^3\cdot 8^3$;

$(3n)^4=12n^4$.

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ПРИКЛАД 4

Обчисліть найбільш раціональним способом:

1) $\left(\frac{4}{9}\right)^7\cdot 2{,}25^7$; 2) $0{,}2^{12}\cdot 5^{13}$.

Розв'язання:

1) $$\left(\frac{4}{9}\right)^7\cdot 2{,}25^7=\left(\frac{4}{9}\right)^7\cdot\left(2\frac{1}{4}\right)^7=\left(\frac{4}{9}\right)^7\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^7=\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4}\right)^7=1^7=1;$$

$$2\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

$$a^nb^n=(ab)^n$$

2) $$0{,}2^{12}\cdot5^{13}=0{,}2^{12}\cdot5^{12+1}=0{,}2^{12}\cdot5^{12}\cdot5^1=(0{,}2\cdot5)^{12}\cdot5=1^{12}\cdot5=1\cdot5=5.$$

$$a^{m+n}=a^ma^n \qquad a^nb^n=(ab)^n$$

Відповідь: 1) 1; 2) 5.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Обчисліть найбільш раціональним способом:

1) $0{,}5^7\cdot2^7$; 3) $\left(\frac{1}{7}\right)^3\cdot21^3$; 5) $\left(\frac{2}{7}\right)^{10}\cdot3{,}5^{10}$; 7) $0{,}1^{16}\cdot10^{17}$;

2) $0{,}2^9\cdot5^9$; 4) $\left(\frac{1}{9}\right)^3\cdot18^3$; 6) $\left(\frac{5}{36}\right)^{12}\cdot7{,}2^{12}$; 8) $0{,}25^{12}\cdot4^{11}$.

Натуральний степінь дробу (частки)

Властивість 5	Правило піднесення дробу до степеня
Для будь-яких чисел a і b $(b\neq0)$ та довільного натурального числа n справджується рівність $$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$	Виконуючи піднесення до степеня ***дробу***, слід піднести до цього степеня окремо чисельник та окремо знаменник і записати перший результат у чисельник, а другий — у знаменник нового дробу

Доведення: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ разів}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ множників}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\text{ множників}}}=\frac{a^n}{b^n}$, причому $b\neq0$

Наприклад:

$$\left(\frac{b}{c}\right)^8=\frac{b^8}{c^8}$$

$$(m:n)^3=m^3:n^3$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^3=\frac{4^3}{7^3}$$

$$(10:0{,}1)^7=10^7:0{,}1^7$$

РОЗМИНКА 5

Подайте у вигляді частки степенів вираз:

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$; 3) $\left(\frac{2}{a}\right)^3$; 4) $\left(\frac{b}{3}\right)^5$; 5) $\left(\frac{1}{d}\right)^8$.

ПРАКТИКУМ

4.1 Які числа треба вписати в порожні комірки, щоб утворилась правильна рівність?

1) $2^5 \cdot 2^{\square} = 2^{12}$; 3) $5^{\square} \cdot 5 = 5^{13}$; 5) $7^{20} : \square^6 = 7^{14}$;

2) $\square^{12} \cdot 9^6 = 9^{18}$; 4) $3^{16} : 3^{\square} = 3^{11}$; 6) $4^{\square} : 4 = 4^9$.

4.2 Запишіть у вигляді добутку двох однакових степенів степінь:

1) a^4; 2) b^6; 3) c^8; 4) 4^{10}; 5) 7^{12}; 6) 10^{20}.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$7^3 \cdot 7^4 = (7 \cdot 7)^{3+4}$;

$7^2 \cdot 7^5 = 7^{2 \cdot 5} = 7^{10}$;

$7^6 : 7^2 = 7^{6:2} = 7^3$.

4.3 Обчисліть:

1) $64 : (2^2 \cdot 2^5)$; 3) $\dfrac{5^7 \cdot 625}{5^9}$; 5) $\dfrac{8^2 \cdot 4^4}{16^2}$;

2) $243 : (3^2 \cdot 3)$; 4) $\dfrac{4^5 \cdot 4^3}{256}$; 6) $\dfrac{216^7}{36^8 \cdot 6^2}$.

4.4 Спростіть вираз і порівняйте його значення з нулем.

1) $(-1)^6 \cdot (-1)^7$; 3) $(-2)^3 \cdot (-2)^5 \cdot (-2)^7$;

2) $(-3)^{12} \cdot (-3)^{16}$; 4) $(-4)^6 \cdot (-4)^9 \cdot (-4)$.

4.5 Порівняйте значення виразів:

1) $(-7)^6 \cdot (-7)^3$ і $(-7)^8$; 3) $(-1)^4$ і $(-2)^3 \cdot (-2)^4$;

2) $(-5)^3 \cdot (-5)^7$ і $(-5)^{11}$; 4) $(-1)^5$ і $(-3)^2 \cdot (-3)^5$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Усі властивості можна використовувати як у прямому, так і у зворотному порядку.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$a^m : a^n = a^{m-n}$, $a^{m-n} = a^m : a^n$, де $m > n$;

$(a^m)^n = a^{mn}$, $a^{mn} = (a^m)^n$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$, $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

$(a : b)^n = a^n : b^n$, де $b \neq 0$,

$a^n : b^n = (a : b)^n$, де $b \neq 0$.

4.6 Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 : \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$; 4) $\left(-5\dfrac{1}{3}\right)^{16} : \left(-5\dfrac{1}{3}\right)^{15}$;

2) $\left(2\dfrac{2}{3}\right)^4 : \left(2\dfrac{2}{3}\right)^2$; 5) $(-0{,}2)^{10} : (-0{,}2)^6$;

3) $\left(-1\dfrac{1}{2}\right)^6 : \left(-1\dfrac{1}{2}\right)^4$; 6) $(-0{,}25)^{10} : (-0{,}25)^7$.

4.7 Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $a^2 \cdot (a^2)^3$; 3) $(b^4)^5 \cdot b$; 5) $c \cdot (c^8)^2 : c^{16}$;

2) $(a^3)^6 : a^9$; 4) $(b^7)^3 : b$; 6) $(c^9)^3 : c^{26} : c$.

4.8 Розв'яжіть рівняння:

1) $5^7 : x = 5^5$; 3) $x : 7 = 7^2$; 5) $7^{10} : x = (7^2)^4$;

2) $x : 2^4 = 2^2$; 4) $3^9 : x = (3^2)^4$; 6) $x : (2^6)^3 = (2^5)^2$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$a : x = b \rightarrow x = a : b$

$x : b = a \rightarrow x = a \cdot b$

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

Проект підручника Видавництва "Ранок"

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$\left(-a^2\right)^4 = \left((-1)\cdot a^2\right)^4 = (-1)^4\cdot a^8 = a^8$$

4.9 Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $\left((-a)^2\right)^3$; 3) $\left((-c)^4\right)^5$; 5) $\left(-a^4\right)^4$; 7) $\left(-c^3\right)^4$;

2) $\left((-b)^3\right)^4$; 4) $\left((-d)^5\right)^5$; 6) $\left(-b^2\right)^3$; 8) $\left(-d^7\right)^5$.

4.10 Знайдіть найбільш раціональним способом значення виразу:

1) $5^4\cdot 20^4$; 3) $(-2)^8\cdot 0{,}5^8$; 5) $\left(\frac{1}{8}\right)^4\cdot 5^4\cdot 16^4$;

2) $0{,}1^5\cdot 10^5$; 4) $(-0{,}25)^7\cdot 8^7$; 6) $25^3\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^3\cdot 28^3$.

4.11 Подайте у вигляді степеня з показником 3 вираз:

1) a^3b^3; 2) c^6d^6; 3) x^9y^{12}; 4) $1000m^3n^3$; 5) $0{,}008a^{12}b^{27}$.

$$121a^6b^8 = \underbrace{11\cdot 11}_{2}\cdot\underbrace{a^3\cdot a^3}_{2}\cdot\underbrace{b^4\cdot b^4}_{2} = 11^2\cdot\left(a^3\right)^2\cdot\left(b^4\right)^2 = \left(11a^3b^4\right)^2$$

4.12 Подайте кожний вираз у вигляді степеня:

- з показником 2;
- з показником 4.

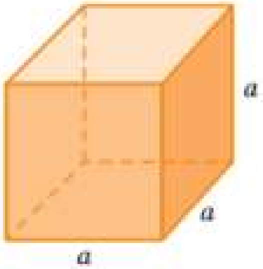
1) a^4b^4; 2) c^8d^8; 3) x^4y^{12}; 4) $256m^{16}n^{16}$; 5) $0{,}0001a^4b^{20}$.

4.13 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 = 64$; 3) $(5x)^3 = 1000$; 5) $(7-x)^3 = 0{,}001$;

2) $x^5 = 32$; 4) $(0{,}2x)^7 = 1$; 6) $(x-10)^5 = \frac{1}{243}$.

MATH FOR LIFE



4.14 ***Геометрія.*** Об'єм куба знаходять за формулою $V = a^3$, де a — довжина ребра куба.

1) Запишіть вираз для знаходження об'єму куба, якщо:

а) $a = 2x$; б) $a = 4x$; в) $a = \frac{1}{2}x$.

2) Обчисліть значення виразу, отриманого в попередньому пункті, якщо $x = 2$ см.

Префікс	Множник
кілометр	10^3 метрів
мегаметр	10^6 метрів
гігаметр	10^9 метрів
тераметр	10^{12} метрів
петаметр	10^{15} метрів
ексаметр	10^{18} метрів
зетаметр	10^{21} метрів
йотаметр	10^{24} метрів

4.15 ***Вимірювання.*** Для зручності запису великих відстаней використовують спеціальні одиниці, назви яких пов'язані зі степенями числа 10. За допомогою таблиці знайдіть відповіді на запитання:

1) скільки метрів у петаметрі?
2) скільки кілометрів у зетаметрі?
3) скільки мегаметрів в ексаметрі?
4) скільки тераметрів у йотаметрі?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

4.16 Обчисліть значення виразів 1–3.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $\frac{12^9}{2^{16}\cdot 3^8}=\frac{12^9}{\left(2^2\right)^8\cdot 3^8}=\frac{12^9}{4^8\cdot 3^8}=\frac{12^9}{(4\cdot 3)^8}=\frac{12^9}{12^8}=12^{9-8}=12$ $a^{mn}=\left(a^m\right)^n$ $\quad$ $a^n b^n=(ab)^n$	2) $\frac{15^8}{3^8\cdot 5^8}$; 3) $\frac{2^{12}\cdot 5^{12}}{10^{12}}$

4.17 Порівняйте значення виразів:

1) $2^3\cdot 2^7$ і $(2\cdot 2)^{10}$;
2) $3^4\cdot 3^4$ і $(3\cdot 3)^8$;
3) $5^3\cdot 5^5$ і $(5\cdot 5)^4$;
4) $4\cdot 5$ і $(4\cdot 5)^{10}$;
5) $(7\cdot 2)^2$ і $7\cdot 2\cdot 2$;
6) $(7\cdot 9)^2$ і $\left(7^9\right)^2$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Запишіть по три вирази, які після спрощення тотожно дорівнюватимуть виразам:
1) $a^6\cdot b^6$; 2) $x^4:y^8$.
Обміняйтесь записами і перевірте результати одне одного.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Обчисліть $(-4)^3$.

А	Б	В	Г
−64	−12	12	64

2 Обчисліть $0{,}1^3\cdot 10^2$.

А	Б	В	Г
10	1	0,1	0,01

3 Подайте у вигляді степеня вираз $m\cdot m^2\cdot m^5$.

А	Б	В	Г
m^{10}	m^{11}	m^7	m^8

4 Обчисліть $\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot 5^3$.

А	Б	В	Г
5	1	$\frac{1}{5}$	25

5 Об'єм інформації на диску A дорівнює 2^{32} байтів, а на диску B — удвічі більше, ніж на диску A. Який об'єм інформації (у байтах) на диску B?

А	Б	В	Г
2^{33}	2^{64}	2^{34}	2^{31}

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) та тотожно рівним йому виразом (А–Г), якщо $a\neq 0$.

1	$a^2\cdot a^8$	А	a^4
2	$\left(a^8\right)^2$	Б	a^6
3	$\frac{a^8}{a^2}$	В	a^{10}
		Г	a^{16}

7 Не виконуючи обчислень, розташуйте числові вирази $(-3)^{16}$, $(-5)^{17}$, 0^{18} за зростанням їхніх значень.

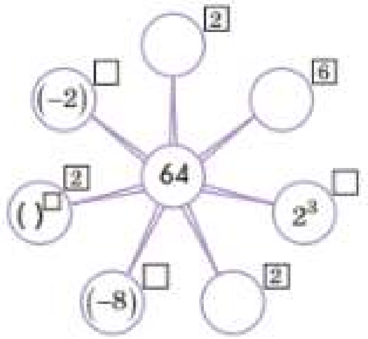
8 Обчисліть найбільш раціональним способом: $\frac{2^{12}\cdot 7^{13}}{14^{12}}$.

Проєкт підручника видавництва "Ранок"

Завдання 4.18, 4.19 → Розминки 1–3
Завдання 4.20 → Практикум, 4.5
Завдання 4.21 → Приклад 1
Завдання 4.22 → Приклад 2
Завдання 4.23 → Приклад 3
Завдання 4.24 → Приклад 4
Завдання 4.25 → Актуальна задача

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Заповніть порожні комірки на схемі, подавши число 64 у вигляді степеня з натуральним показником.



Зробіть аналогічну схему з порожніми комірками для числа 128.

BE SMART

Учені з'ясували, що:

- головний мозок людини містить близько $9 \cdot 10^{10}$ нейронів;
- загальна ємність пам'яті людини складає близько одного петабайта (10^3 терабайтів).

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

4.18 Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $a^4 \cdot a^6$; 4) $d \cdot d^7 \cdot d^2$; 7) $c^6 : c$; 10) $\left(b^6\right)^6$;

2) $b^5 \cdot b^5$; 5) $a^{10} : a^3$; 8) $d^{30} : d^{15}$; 11) $\left(\left(c^2\right)^4\right)^5$;

3) $c \cdot c^8$; 6) $b^9 : b^8$; 9) $\left(a^3\right)^7$; 12) $\left(\left(d^3\right)^3\right)^3$.

4.19 Обчисліть значення виразу:

1) $(-2)^3 \cdot (-2)^4$; 4) $(-10) \cdot (-10)^3$; 7) $(-4)^5 : (-4)$;

2) $(-3)^3 \cdot (-3)^3$; 5) $(-2)^6 : (-2)^2$; 8) $(-0{,}1)^7 : (-0{,}1)^4$.

3) $(-0{,}1)^3 \cdot (-0{,}1)^4$; 6) $(-10)^7 : (-10)^6$;

4.20 Порівняйте значення виразів:

1) $(-8)^5 \cdot (-8)^7$ і $(-8)^{13}$; 3) $(-1)^6$ і $(-9)^3 \cdot (-9)^6$;

2) $(-2)^4 \cdot (-2)^9$ і $(-2)^{12}$; 4) $(-1)^3$ і $(-7)^8 \cdot (-7)^4$.

4.21 Подайте у вигляді степеня з основою a вираз:

1) $4 \cdot 64$, якщо $a = 4$; 3) $5^5 \cdot 625^2$, якщо $a = 5$;

2) $27 \cdot 3^6$, якщо $a = 3$; 4) $\left(7^4\right)^3 \cdot 49^3$, якщо $a = 7$.

4.22 Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{8^5}{8^4}$; 2) $\dfrac{4^6}{2^{12}}$; 3) $\dfrac{27^8 \cdot 3^5}{3^{28}}$; 4) $\dfrac{25^{14}}{125^4 \cdot 5^9}$.

4.23 Спростіть вираз ($x \neq 0$):

1) $\dfrac{x \cdot x^5}{x^4}$; 2) $\dfrac{x^8 \cdot x^5}{\left(x^2\right)^6}$; 3) $\dfrac{x^4 \cdot \left(x^7\right)^2}{\left(x^5\right)^3}$; 4) $\dfrac{x^5 \cdot \left(x^8\right)^7 : \left(x^5\right)^6}{\left(x^3\right)^9}$.

4.24 Обчисліть найбільш раціональним способом:

1) $0{,}1^8 \cdot 10^8$; 2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 \cdot 15^3$; 3) $\left(\dfrac{5}{24}\right)^{13} \cdot 4{,}8^{13}$; 4) $0{,}2^{15} \cdot 5^{14}$.

4.25 Дайте відповіді на запитання Актуальної задачі. Знайдіть інформацію щодо об'єму оперативної пам'яті ПК, виготовлених у 2020 році, і порівняйте ці значення з даними 2005 року.

Бонусне завдання

4.26 Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{2^{15} \cdot 3^{29}}{18^{14}}$; 2) $\dfrac{50^{16}}{2^{15} \cdot 5^{30}}$.

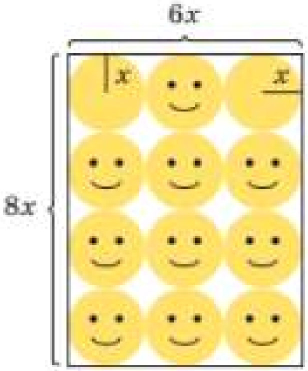
§5 ОДНОЧЛЕНИ. МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНІВ. ПІДНЕСЕННЯ ОДНОЧЛЕНА ДО СТЕПЕНЯ

ВЧОРА	Ви застосовували властивості степенів для спрощення цілих виразів
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся, які цілі вирази називаються одночленами, та навчитеся виконувати дії з ними
ЗАВЖДИ	Ви зможете розв'язувати задачі в загальному вигляді, а потім підставляти необхідні значення змінних

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

СМАЙЛИКИ

Щоб розважити молодших дітей, вам треба вирізати з прямокутного аркуша картону 12 смайликів — кругів радіуса x см кожний (див. рисунок).



1. Якими мають бути розміри прямокутного аркуша? ($6x$ і $8x$.)
2. Запишіть вираз для знаходження площі аркуша. $\left(S = 6x \cdot 8x = 48x^2.\right)$
3. Використовуючи формулу площі круга $S = \pi r^2$, запишіть вираз для обчислення площі одного круга; площі 12 кругів. (πx^2; $12\pi x^2$.)
4. Яка площа частини аркуша, що не використовується? $\left(48x^2 - 12\pi x^2.\right)$

Серед отриманих виразів зі змінними можна виокремити такі, що є добутками чисел, змінних та степенів змінних — $6x$, $8x$, $48x^2$, πx^2, $12\pi x^2$. Такі вирази називаються одночленами.

ДОСЛІДЖУЄМО!

Чи можна вирізати більше, ніж 12 кругів, з аркуша розмірами 12 см на 16 см? Яким у цьому випадку може бути радіус круга? Намалюйте схему і поясніть свою відповідь.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Розглянемо вирази в таблиці.

Одночлени	**НЕ Є** одночленами	
17, $5ab$	$x+17$, $5(a+b)$	— містять дію додавання
a, $15x^2y$	$a-b$, $15(x^2-y)$	— містять дію віднімання
$\frac{2}{5}ab^4$, $-x^2y^3$	$\frac{2a}{5b^4}$, $-x^2:y^3$	— містять дію ділення на змінну

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- одночлен (*monomial*)
- коефіцієнт (*coefficient*)
- стандартний вигляд (*standard form*)
- степінь одночлена (*degree of a monomial*)
- множення одночленів (*multiply by monomials*)

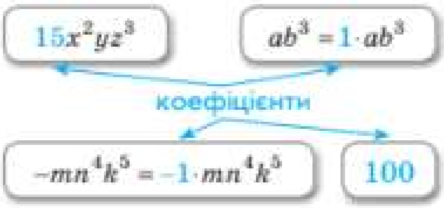
Одночлени стандартного вигляду

$7a$; $-\frac{1}{3}m^3n$, оскільки містять у своєму записі лише один числовий множник, відмінний від нуля, записаний на першому місці, і степені з різними основами.

НЕ Є одночленами стандартного вигляду

$12b\cdot 3c^2$ — містить два числові множники;

$x\cdot x^2\cdot\left(-25x^3\right)$ — числовий множник не стоїть на першому місці, інші множники — степені з однією основою.


$15x^2yz^3$

$ab^3 = 1\cdot ab^3$

$-mn^4k^5 = -1\cdot mn^4k^5$

100

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Якщо одночлен НЕ МІСТИТЬ числового множника, то його коефіцієнт дорівнює 1 або −1.

Наприклад: $x^2y^5 = 1\cdot x^2y^5$,

$-ab^7 = -1\cdot ab^7$.

Цілі вирази — числа, змінні, степені та їхні добутки називають **одночленами**.

З одночленами виконують дії додавання, віднімання, множення, ділення й піднесення до степеня.

Для спрощення виконання дій з одночленами їх зводять до *стандартного вигляду*.

Одночлен стандартного вигляду містить у своєму записі:
1) **один** відмінний від нуля числовий множник, записаний на **першому місці**;
2) інші множники — степені **з різними основами**.

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називається **коефіцієнтом одночлена.**

Для кожного одночлена можна визначити його **степінь.** Для цього:

- визначають *показники степенів* кожної зі змінних, що входять до одночлена;
- знаходять *суму* цих показників.

Суму показників степенів усіх змінних, які містить одночлен, називають **степенем одночлена**.

Якщо одночлен є **числом**, відмінним від нуля, його степінь вважають **рівним 0**.

Одночлен	Степінь одночлена	Читаємо правильно
5	0	Степінь одночлена дорівнює нулю
$x = x^1$ $13x = 13x^1$	$1 = 1$	Одночлен першого степеня
$-ab^3 = -a^1b^3$	$1+3=4$	Одночлен четвертого степеня
$3x^2y^4z^5$	$2+4+5=11$	Степінь одночлена дорівнює 11

РОЗМИНКА 1

① Чи є наведений вираз одночленом?

1) b^8+c; 2) $2c\cdot 3d^3$; 3) $5k:21m$; 4) $7b-8c^2$; 5) $\left(3m^3\right)^7$.

② Назвіть коефіцієнт та знайдіть степінь одночлена:

1) 6; 2) $5c$; 3) $-11mn^2$; 4) $a^2b^2c^2$; 5) $5^2x^{10}y^2$; 6) $-x^3y^5z$.

③ Чи є заданий одночлен одночленом стандартного вигляду?

1) $12a^5b^4$; 2) $8cc^2\cdot c^7$; 3) $-5c\cdot 2d^3$; 4) $-b^3c$; 5) $10m\cdot\left(-n^6\right)$.

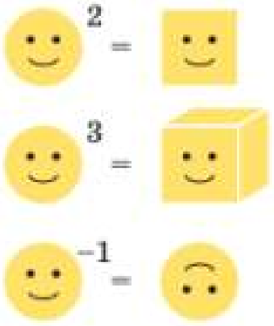
Множення одночленів. Піднесення одночлена до степеня

Для зведення одночленів до стандартного вигляду, спрощення та обчислення значень виразів застосовують множення одночленів і піднесення їх до степеня.

При множенні одночленів використовують:

- переставну і сполучну властивості множення $ab=ba$, $(ab)c=a(bc)=abc$;
- властивість множення степенів з однаковими основами $a^na^m=a^{n+m}$.

Степеневі смайлики



Алгоритм множення одночленів

1. Знайти добуток коефіцієнтів.
2. Знайти добуток змінних.
3. Записати добуток отриманих множників.

$$-4x^3\cdot 12x^5=-48x^8$$

$$-4\cdot 12=-48 \qquad x^3\cdot x^5=x^{3+5}=x^8$$

Для піднесення одночлена до степеня застосовують властивість піднесення добутку до степеня $(ab)^n=a^nb^n$, $(abc)^n=a^nb^nc^n$.

Алгоритм піднесення одночлена до степеня

1. Піднести до цього степеня кожний множник одночлена.
2. Записати добуток отриманих множників.

$$\left(-5a^5b^6\right)^3=(-5)^3\cdot\left(a^5\right)^3\cdot\left(b^6\right)^3=$$
$$=-125a^{5\cdot 3}b^{6\cdot 3}=$$
$$=-125a^{15}b^{18}$$

Результатом добутку одночленів є одночлен.
Результатом піднесення одночлена до степеня є одночлен.

РОЗМИНКА 2

① Виконайте множення:

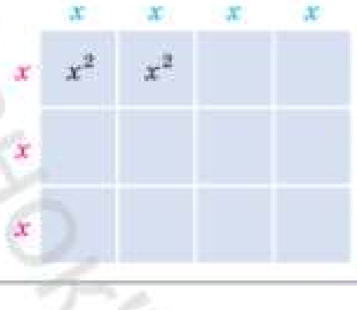
1) $3x\cdot 4x$;
2) $4y^2\cdot\left(-5y^3\right)$;
3) $2a^3\cdot 3b^2$;
4) $-5a^4\cdot 2b$;
5) $7c^5d\cdot 5cd^3$;
6) $cd^7\cdot\left(-8c^6d^3\right)$.

Геометрична ілюстрація

Площа прямокутника

$S=a\cdot b$

$3x\cdot 4x=12x^2$



② Зведіть одночлен до стандартного вигляду та вкажіть його коефіцієнт k:

1) $17x\cdot 2y$;
2) $0{,}5b\cdot 8c$;
3) $-4a^2b\cdot 10b^3a^5$;
4) $25xy^4\cdot(-8)x^4y$;
5) $22a^2ba^4b^5m$;
6) $x^8y^4\cdot(-11)xy^4z$.

③ Виконайте піднесення до степеня:

1) $\left(a^2\right)^3$;
2) $\left(a^5\right)^2$;
3) $\left(2a^4\right)^3$;
4) $\left(3a^7\right)^2$;
5) $\left(a^8b\right)^5$;
6) $\left(ab^6\right)^4$;
7) $\left(a^4b^{10}\right)^6$;
8) $\left(a^9b^2\right)^3$.

Проєкт підручника видавництва "Ранок"

ПРИГАДАЙТЕ!

$a^{mn}=\left(a^m\right)^n=\left(a^n\right)^m$

$a^nb^n=(ab)^n$

$a^nb^nc^n=(abc)^n$

ПРИКЛАД 1

Зведіть одночлен $-10ab^2\cdot0{,}2a^2b^3$ до стандартного вигляду та знайдіть його значення, якщо $a=0{,}1$, $b=10$.

Розв'язання

$-10ab^2\cdot0{,}2a^2b^3=$ .... Переставна властивість $ab=ba$.

$=-10\cdot0{,}2\cdot a\cdot a^2\cdot b^2\cdot b^3=$ .... Знайдемо добуток коефіцієнтів.

$=-2\cdot a^{1+2}\cdot b^{2+3}=-2a^3b^5$; .... Властивість $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

$-2a^3b^5=-2\cdot(0{,}1)^3\cdot10^5=$ .... Підставляємо значення $a=0{,}1$ і $b=10$.

$=-2\cdot0{,}001\cdot100\,000=-200$ .... Обчислюємо значення виразу.

Відповідь: -200.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Зведіть заданий одночлен до стандартного вигляду та знайдіть його значення, якщо $a=-1$, $b=1$:

1) $2a\cdot3a^2$;
2) $4a^3\cdot5a$;
3) $\frac{1}{14}a^2\cdot7a^3$;
4) $\frac{1}{24}a^2\cdot8a^2$;
5) $0{,}6ab^4\cdot70a^3b^2$;
6) $0{,}4a^3b^7\cdot30a^2b$;
7) $-4a^2b^3\cdot0{,}25a^6b^4$;
8) $-0{,}5a^7b^4\cdot2a^2b^6$.

ПРИКЛАД 2

Виконайте піднесення до степеня: $\left(-1\frac{1}{2}a^2b^7\right)^3$.

Розв'язання

$\left(-1\frac{1}{2}a^2b^7\right)^3=\left(-1\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(a^2\right)^3\cdot\left(b^7\right)^3=$ .... Піднесемо до степеня кожен із множників, використовуючи властивості $(abc)^n=a^nb^nc^n$, $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$.

$=\left(-\frac{3}{2}\right)^3\cdot a^{2\cdot3}\cdot b^{7\cdot3}=$ .... Перетворили коефіцієнт у неправильний дріб; використаємо властивість $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

$=-\frac{27}{8}\cdot a^6\cdot b^{21}=-3\frac{3}{8}a^6b^{21}$ .... Записуємо відповідь у вигляді добутку, перетворюємо неправильний дріб у мішане число.

Відповідь: $-3\frac{3}{8}a^6b^{21}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Виконайте піднесення до степеня:

1) $\left(2a^2\right)^4$;
2) $\left(3a^3\right)^5$;
3) $\left(-2a^6\right)^6$;
4) $\left(-3a^{15}\right)^3$;
5) $\left(-\frac{4}{5}a^9\right)^3$;
6) $\left(-\frac{6}{7}a^8\right)^2$;
7) $\left(1\frac{1}{3}ab^3\right)^2$;
8) $\left(1\frac{1}{4}a^{15}b\right)^2$.

ПРИКЛАД 3

Подайте одночлен $64a^6b^{12}$ у вигляді:
1) квадрата одночлена; 2) куба одночлена.

Розв'язання

1) $64a^6b^{12} = \underbrace{8\cdot 8}_{2}\cdot\underbrace{a^3\cdot a^3}_{2}\cdot\underbrace{b^6\cdot b^6}_{2} = 8^2\cdot\left(a^3\right)^2\cdot\left(b^6\right)^2 \xrightarrow{a^nb^n=(ab)^n} \left(8a^3b^6\right)^2$ ……… Подаємо кожний множник у вигляді квадрата одночлена.

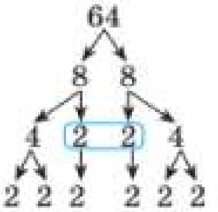
2) $64a^6b^{12} = \underbrace{4\cdot 4\cdot 4}_{3}\cdot\underbrace{a^2\cdot a^2\cdot a^2}_{3}\cdot\underbrace{b^4\cdot b^4\cdot b^4}_{3} = 4^3\cdot\left(a^2\right)^3\cdot\left(b^4\right)^3 \xrightarrow{a^nb^n=(ab)^n} \left(4a^2b^4\right)^3$ … Подаємо кожний множник у вигляді куба одночлена.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Подайте заданий одночлен у вигляді квадрата одночлена; куба одночлена.

1) x^6; 3) $x^{24}y^{12}$; 5) $5^6x^{48}y^{24}$; 7) $64x^{60}y^{42}$;

2) x^{12}; 4) $x^{18}y^6$; 6) $7^6x^{30}y^{54}$; 8) $729x^{96}y^{108}$.



$=8\cdot 8=8^2$

$=4\cdot 4\cdot 4=4^3$

$=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=2^6$

ПРИКЛАД 4

Спростіть вираз $\left(1\frac{2}{5}x^2y^3\right)^2\cdot\left(-5x^4y^7\right)^3$.

Розв'язання

$$\left(1\frac{2}{5}x^2y^3\right)^2\cdot\left(-5x^4y^7\right)^3 \xrightarrow{(ab)^n=a^nb^n} \left(1\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(x^2\right)^2\cdot\left(y^3\right)^2\cdot(-5)^3\cdot\left(x^4\right)^3\cdot\left(y^7\right)^3 \xrightarrow{\left(a^m\right)^n=a^{mn}} \left(\frac{7}{5}\right)^2\cdot x^{2\cdot 2}\cdot y^{3\cdot 2}\cdot(-5)^3\cdot x^{4\cdot 3}\cdot y^{7\cdot 3} \xrightarrow{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}} \frac{49}{25}\cdot x^4\times$$

$$\times y^6\cdot(-125)\cdot x^{12}\cdot y^{21}=\frac{49}{25}\cdot(-125)\cdot\left(x^4\cdot x^{12}\right)\cdot\left(y^6\cdot y^{21}\right) \xrightarrow{a^ma^n=a^{m+n}} 49\cdot(-5)\cdot x^{4+12}\cdot y^{6+21}=-245x^{16}y^{27}$$

Відповідь: $-245x^{16}y^{27}$.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Спростіть вираз:

1) $\left(5x^6\right)^2\cdot xy$; 5) $\left(-0{,}2x^7y^3\right)^2\cdot\left(10x^2y^5\right)^3$;

2) $\left(3y^5\right)^2\cdot xy$; 6) $\left(-0{,}1x^6y^4\right)^2\cdot\left(10x^5y^8\right)^3$;

3) $\left(\frac{1}{7}x^3y^4\right)^2\cdot 49xy^2$; 7) $\left(1\frac{1}{2}x^8y^3\right)^2\cdot\left(-2x^6y^2\right)^3$;

4) $\left(\frac{1}{8}x^5y^6\right)^2\cdot 64x^3y$; 8) $\left(1\frac{3}{4}x^9y^2\right)^2\cdot\left(-4x^5y^4\right)^3$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Порядок виконання дій

1. Піднесення до степеня
2. Множення (зліва направо)

Підручника Проект майбутнього видавництва "Ранок"

ПРАКТИКУМ

5.1 Подайте одночлен у стандартному вигляді. Укажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $13ab\cdot 5a^2b$; 3) $4a^2c\cdot(-25ab)$; 5) $14a^2bc\cdot\left(-10cba^5\right)$;

2) $-7x^3y\cdot 6xy$; 4) $-9xy\cdot\left(-2x^2z\right)$; 6) $-50x^2y^9z\cdot\left(-zxy^7\right)$.

5.2 Спростіть вираз:

1) $(4x\cdot 5y)\cdot\left(xy^2\right)\cdot(0{,}5)$; 4) $\left(-1000xy^5\right)\cdot(-0{,}02xy)$;

2) $(3x\cdot 4y)\cdot\left(x^3y\right)\cdot(-4)$; 5) $\left(5a\cdot 0{,}2b^3c\right)\cdot\left(-8a^2c\cdot 10c^4b\right)$;

3) $\left(-0{,}25a^3b\right)\cdot(40\,000ab)$; 6) $\left(-2a\cdot 3a^2b\right)\cdot\left(10a^3b\cdot 0{,}1ab^7\right)$.

5.3 Дано добуток двох одночленів: $81a^{10}b^9$. Запишіть другий одночлен, якщо перший дорівнює:

1) $9a^5b^4$; 3) $27a^9b^9$; 5) $81a^{10}b^8$;

2) $-3a^8b^7$; 4) $-9a^2b^3$; 6) $-81a^{10}b^9$.

5.4 Піднесіть одночлен до степеня n:

1) $2x^2y$, $n=6$; 4) $-0{,}1a^6b^4$, $n=4$;

2) $-2ab^2$, $n=7$; 5) $-xy^9z^{11}$, $n=9$;

3) $10x^3y^7$, $n=5$; 6) $-a^{20}b^{30}c$, $n=10$.

5.5 Виконайте піднесення одночлена до квадрата; до куба:

1) $20a$; 3) $500x^2y$; 5) $0{,}2a^3b^3$; 7) $0{,}05x^3y^7$;

2) $-30b$; 4) $-400xy^2$; 6) $-0{,}3a^5b^5$; 8) $-0{,}04x^6y^4$.

5.6 Квадратом якого виразу є одночлен $64a^8b^6$?

1) $8a^6b^4$; 2) $32a^4b^3$; 3) $8a^4b^3$; 4) $32a^6b^4$.

5.7 Кубом якого виразу є одночлен $27a^6b^{12}$?

1) $9a^2b^4$; 2) $3a^3b^9$; 3) $9a^3b^9$; 4) $3a^2b^4$.

5.8 Подайте у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $9a^4b^4$; 2) $25a^{10}b^{20}$; 3) $10\,000a^{18}b^2$; 4) $0{,}01a^8b^6c^{12}$.

5.9 Подайте у вигляді куба одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $27a^6b^6$; 3) $1000a^{18}b^3$;

2) $-343a^{15}b^{21}$; 4) $-0{,}008a^{27}b^{30}c^{33}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$(ab)c=a(bc)=abc$$
$$ab=ba$$
$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

По черзі записуйте пари одночленів, добуток яких дорівнює $128a^{12}b^{15}$.

Виграє той, хто запише більшу кількість пар

$$(\ldots)\cdot(\ldots)=128a^{12}b^{15}.$$

$$64a^8b^6=(\ldots)^2$$
$$27a^6b^{12}=(\ldots)^3$$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Розгляньте послідовність одночленів:

$3a$; $-6a^2$; $12a^3$; $-24a^4$; … .

Запишіть три наступні члени цієї послідовності.

підручника. Проект майбутнього видавництва "Ранок"

5.10 Виконайте дії:

1) $\left(\frac{2}{3}a^3\right)^5$; 3) $\left(2\frac{1}{2}ab^7\right)^2$; 5) $\left(3\frac{3}{4}a^{12}b^{15}\right)^2$;

2) $\left(-\frac{4}{5}b^5\right)^3$; 4) $\left(-3\frac{1}{3}a^7b\right)^3$; 6) $\left(-2\frac{3}{5}a^{10}b^{13}\right)^2$.

5.11 Спростіть вираз:

1) $(-4x^5)^3$; 2) $(-0{,}5x^6)^2$; 3) $(-x^7y)^7$; 4) $(-x^4y^4)^6$.

5.12 Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $2a\left(\frac{1}{2}ab\right)^3$; 3) $(2a)^4\cdot\left(\frac{1}{2}ab\right)^4$; 5) $(2a^2b^3)^5\cdot\left(\frac{1}{2}a^3b^4\right)^4$;

2) $4b\left(\frac{1}{4}ab\right)^2$; 4) $(3b)^3\cdot\left(\frac{1}{3}ab\right)^3$; 6) $\left(\frac{1}{4}a^4b^6\right)^5\cdot(4a^2b^3)^6$.

5.13 Визначте порядок дій і спростіть вираз:

1) $\left((a^2)^7b^{14}\right)^5$; 3) $\left((x^3)^3(y^2)^2\right)^5$;

2) $\left(-c^6(d^3)^2\right)^4$; 4) $\left((-m^4)^3(-n^3)^4\right)^5$.

MATH FOR LIFE

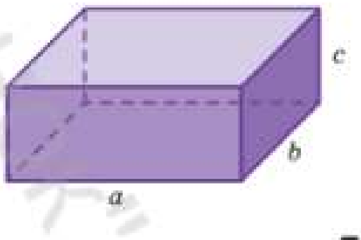
5.14 ***Хімія.*** Об'єм озера Світязь, найбільшого озера України, становить близько $1{,}8\cdot10^8$ кубічних метрів води. В одному кубічному метрі води міститься приблизно $3{,}33\cdot10^{29}$ молекул. Скільки молекул води містить озеро Світязь?

5.15 ***Бізнес.*** На зйомки першої серії фільму про наших захисників і захисниць витратили n г. о., другої серії — у k разів більше, ніж на зйомки першої, а третьої — у 4 рази більше, ніж на зйомки другої.

1) Яку суму (у г. о.) витратили на зйомки другої серії; третьої серії фільму? Запишіть відповідні вирази.
2) Знайдіть значення одержаних у попередньому пункті виразів, якщо $n=25\cdot10^4$, $k=2$.

5.16 ***Геометрія.*** Об'єм прямокутного паралелепіпеда знаходять за формулою $V=abc$, де a, b, c — довжини ребер паралелепіпеда.

1) Запишіть вираз для знаходження об'єму паралелепіпеда як одночлен стандартного вигляду, якщо:
а) $a=3x$, $b=2x$, $c=x$; б) $a=1000x$, $b=100x$, $c=10x$.
2) Обчисліть значення отриманого виразу, якщо:
а) $x=3$ см; б) $x=0{,}1$ см.



ПОМІРКУЙТЕ

Який із наведених виразів неможливо подати у вигляді квадрата одночлена?

1) $81x^8y^4$; 3) $121x^{16}y^8$;
2) $36x^{10}y^2$; 4) $x^{25}y^{50}$.

Який із наведених виразів неможливо подати у вигляді куба одночлена?

1) $64x^9y^3$; 3) $125x^{10}y^6$;
2) $27x^{12}y^{18}$; 4) $x^{27}y^{15}$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$3x^6\cdot3x^3=3x^{6+3}=3x^9$;

$x^4\cdot y^4=(xy)^{4+4}=(xy)^8$

Підручник Проєкт Майбутнього видавництва "Ранок"

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Треба запакувати гуманітарну допомогу у дві коробки. Довжина першої коробки удвічі, а ширина — утричі більші за висоту. Нарисуйте цю коробку. Запишіть вираз для обчислення її об'єму.

Об'єм другої коробки удвічі більший за об'єм першої, а висоти обох коробок однакові. Якою може бути друга коробка? Нарисуйте можливі варіанти.

Інший варіант роботи в електронному додатку

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

5.17 Відомо, що $2a^2c^6=5$. Знайдіть значення виразу:

1) $-3c^6a^2$; 2) $6a^2c^6$; 3) $9a^4c^{12}$; 4) $-27a^6c^{18}$.

5.18 Подайте одночлен A у вигляді добутку одночленів: $B\cdot C^2$.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $A=240a^8b^3$, $B=15ba^2$. $240a^8b^3=(15a^2b)\cdot\left(4^2(a^3)^2b^2\right)=$ $=(15a^2b)\cdot(4a^3b)^2$. $240:15=16=4^2$ $a^8:a^2=a^{8-2}=a^6=(a^3)^2$ $b^3:b=b^3:b^1=b^{3-1}=b^2$	2) $A=3a^6b^4$, $B=3b^4$; 3) $A=9a^2b^5$, $B=9b^3$; 4) $A=25a^6b^{12}$, $B=a^4b^6$; 5) $A=160a^{13}b^{16}$, $B=10a^3b^2$

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Серед наведених виразів укажіть одночлен.

А	Б	В	Г
$m^2:c$	m^2-c	$c+m^2$	cm^2

2 Укажіть одночлен, записаний у стандартному вигляді.

А	Б	В	Г
$5abb$	$-5ab^2$	$5bab$	$a\cdot(-5)b^2$

3 Обчисліть $5x^2\cdot3x$.

А	Б	В	Г
$8x^3$	$8x^2$	$15x^3$	$15x^2$

4 Виконайте піднесення до степеня: $(2a^2)^3$.

А	Б	В	Г
$8a^6$	$8a^5$	$6a^6$	$6a^5$

5 Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, висота якого становить c см, ширина дорівнює висоті, а довжина дорівнює 4 см.

А	Б	В	Г
$4+c^2$ см³	$4+2c$ см³	$4c^2$ см³	$4c^3$ см³

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г), якщо $a=2$.

1	$6a^2$	А	36
2	$3a\cdot\frac{1}{3}a^2$	Б	24
3	$(3a)^2$	В	12
		Г	8

7 Запишіть одночлен $\frac{1}{4}a^4b^2\cdot(-0{,}5)ab^4$ у стандартному вигляді та знайдіть його значення, якщо $a=-1$, $b=2$.

8 Подайте вираз $0{,}09x^{14}y^{20}$ у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

5.19 Укажіть коефіцієнт і знайдіть степінь одночлена:

1) $5x^2y^3$; 2) $-3a^3b^3$; 3) $2xy$; 4) $-4ab^6c^4$; 5) mnk^8.

5.20 Виконайте множення одночленів:

1) $(30a^2)\cdot(6a)$; 3) $\left(\frac{1}{5}x^4y\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x^3y\right)$;

2) $(0{,}04a^2b^5)\cdot(0{,}2ab^4)$; 4) $(100x^6y^{18})\cdot(10x^{13}y^6)$.

5.21 Зведіть заданий одночлен до стандартного вигляду та знайдіть його значення, якщо $a=-1$, $b=1$:

1) $2a^4\cdot 5a$; 3) $0{,}7a^4b^3\cdot 40ab^7$;

2) $\frac{1}{36}a^2\cdot 9a^2$; 4) $-0{,}2a^9b^4\cdot 5a^2b^8$.

5.22 Дано добуток двох одночленів: $64a^{12}b^{15}$. Запишіть другий одночлен, якщо перший дорівнює:

1) $2a^5b^4$; 2) $-8a^8b^7$; 3) $16a^{12}b^{13}$; 4) $-64a^{11}b^{14}$.

5.23 Виконайте піднесення до степеня:

1) $(2a^4)^9$; 2) $(-4a^{17})^3$; 3) $\left(-\frac{8}{9}a^{11}\right)^2$; 4) $\left(1\frac{1}{6}a^{13}b^4\right)^2$.

5.24 Спростіть вираз:

1) $(-10x^3)^3$; 3) $(-x^5y)^5$; 5) $(-x^3y^7)^7$;

2) $(-0{,}1x^4)^2$; 4) $(-xy^7)^8$; 6) $(-x^9y^4)^4$.

5.25 Подайте заданий одночлен:

1) x^{18}; 2) $x^{12}y^6$; 3) $10^6x^{42}y^{30}$; 4) $64x^{66}y^{48}$

у вигляді: а) квадрата одночлена; б) куба одночлена.

5.26 Спростіть вираз:

1) $(6x^4)^2\cdot xy$; 3) $(-0{,}3x^2y^9)^2\cdot(10x^3y^5)^3$;

2) $\left(\frac{1}{9}x^7y^2\right)^2\cdot 81xy^3$; 4) $\left(1\frac{3}{7}x^3y^8\right)^2\cdot(-7x^5y^2)^3$.

5.27 Знайдіть значення виразів, які є відповідями до п. 1–3 Актуальної задачі, якщо: 1) $x=5$ см; 2) $x=10$ см.

Бонусне завдання

5.28 Подайте одночлен A у вигляді добутку одночленів B і C^2, якщо: 1) $A=36a^5b^{13}$, $B=ab^5$; 2) $A=45a^{17}b^{20}$, $B=5a^9b^8$.

Завдання 5.19, 5.20	→ Розминки 1–2
Завдання 5.21	→ Приклад 1
Завдання 5.22	→ Практикум, 5.4
Завдання 5.23	→ Приклад 2
Завдання 5.24	→ Практикум, 5.5
Завдання 5.25	→ Приклад 3
Завдання 5.26	→ Приклад 4
Завдання 5.27	→ Актуальна задача
Завдання 5.28	→ Інтелектуальний фітнес, 5.18

IQ

BE SMART

Піраміда Хеопса, найбільша з єгипетських пірамід, сьоме диво світу, складена з 2^{21} блоків глинястого вапняку. Середня маса одного блока становить близько 2^{11} кілограмів. Знайдіть масу піраміди в кілограмах. Подайте знайдену величину в тоннах.

За однією з гіпотез, розміри піраміди та її окремих елементів пов'язані з безліччю важливих математичних величин — числом π, трикутниками зі сторонами 3, 4 і 5 тощо, а пропорції піраміди підпорядковані співвідношенням «золотого перетину».

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 1–5

1 Ви познайомилися з новими поняттями, зокрема поняттям виразу.

Алгебраїчними виразами називають числові вирази та вирази зі змінними. Алгебраїчні вирази, які містять лише дії додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня й ділення, називають **раціональними виразами**.

Тотожними, або **тотожно рівними**, називаються **вирази**, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, що входять до них.

2 Ви познайомилися з поняттям степеня з натуральним показником та дізналися про властивості степеня.

Степінь числа a з натуральним показником n, більшим за 1, — добуток n однакових множників, кожний із яких дорівнює a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n},\ n \in N,\ n > 1.$$

Окремі випадки степеня:

$$a^1 = a;\ 1^n = 1;$$
$$0^n = 0,\ n \geqslant 1.$$

Властивості степеня:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$
$$a^m : a^n = a^{m-n},\ a \neq 0;$$
$$\left(a^m\right)^n = a^{mn};\ (ab)^n = a^n \cdot b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0.$$

3 Ви познайомилися з іншою класифікацією виразів та дізналися про одночлени.

Цілі вирази — числа, змінні, степені та їхні добутки називають **одночленами**.

Суму показників степенів усіх змінних, які містить одночлен, називають **степенем одночлена**. Якщо одночлен є числом, відмінним від нуля, його степінь вважають рівним 0.

Одночлен стандартного вигляду містить у своєму записі:

1) один відмінний від нуля числовий множник, записаний на першому місці;

2) інші множники — степені з різними основами.

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називається **коефіцієнтом одночлена**.

Одночлени можна множити й підносити до степеня. Результатом добутку одночленів є одночлен. Результатом піднесення одночлена до степеня є одночлен.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

Варіант 2 контрольної роботи в електронному додатку

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Спростіть вираз $x-1-2x+6$.

А	Б	В	Г
$x-5$	$-x+5$	$x+5$	$-x-5$

2 Обчисліть $1^4+(-1)^3$.

А	Б	В	Г
-1	0	1	2

3 Спростіть вираз $6a^4\cdot 2a$.

А	Б	В	Г
$12a^5$	$12a^4$	$8a^5$	$8a^4$

4 Спростіть вираз $\frac{(y^4)^3}{y^2}$.

А	Б	В	Г
y^{14}	y^5	y^6	y^{10}

5 Знайдіть значення виразу $10+x^2$, якщо $x=-3$.

А	Б	В	Г
1	4	16	19

6 На перший комп'ютер установили m програм, на другий — у m разів більше, ніж на перший. Скільки програм установили на другий комп'ютер?

А	Б	В	Г
$2m$	$2m^2$	m^2	m^m

7 Подайте вираз $0{,}027x^{21}y^{30}$ у вигляді куба одночлена стандартного вигляду.

8 Доведіть тотожність
$$a(b+3a)-5(b+a^3)=b(a-5)+a^2(3-5a).$$

9 Спростіть вираз $1\frac{1}{9}a^3b^2\cdot(-0{,}1)a^5b^2$ та знайдіть його значення, якщо $a=-1$, $b=3$.

10 Обчисліть найбільш раціональним способом значення виразу $\frac{3^{21}\cdot 5^{11}}{45^{10}}$.

Бонусне завдання

Порівняйте значення виразів 3^{300} і 28^{100}.

> *Кожна невдала спроба — це ще один крок уперед*
>
> Томас Едісон

Підручник Проект Майбутнього видавництва "Ранок"

§6 МНОГОЧЛЕНИ. СТЕПІНЬ МНОГОЧЛЕНА. ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

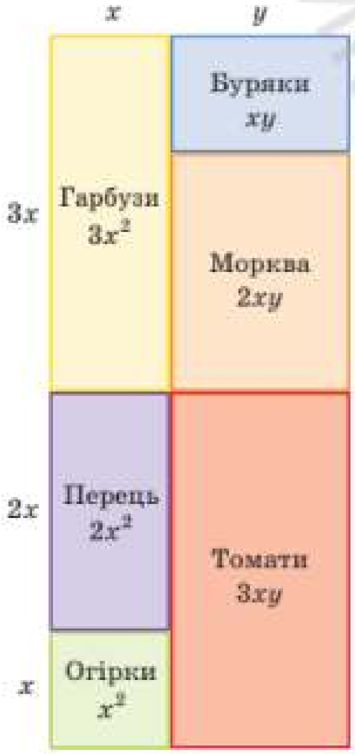
ВЧОРА Ви виконували дії множення й піднесення до степеня одночленів

СЬОГОДНІ Ви дізнаєтеся, які вирази називаються многочленами та навчитеся додавати й віднімати многочлени

ЗАВЖДИ Ви зможете виконувати необхідні розрахунки для ведення фермерського господарства

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ПЛАН МАЙБУТНЬОГО ВРОЖАЮ



У фермерському господарстві висадики овочеві культури за планом, зображеним на рисунку, де x, y — довжини. Перевірте, чи є правильними відповіді на такі запитання.

1. Яку площу займатиме кожна овочева культура? (Див. план.)
2. Запишіть двома способами вираз для обчислення загальної площі ділянки.

   (Спосіб 1: $3x^2+xy+2xy+2x^2+x^2+3xy$; спосіб 2: $6x(x+y)$.)
3. Запишіть двома способами вираз для обчислення площ, які мають займати разом томати, перець і огірки. (Спосіб 1: $3xy+x^2+2x^2$; спосіб 2: $3x(x+y)$.)
4. На скільки площа, запланована для висадки гарбузів, більша за площу, відведену під моркву? ($3x^2-2xy$.)

Вирази для обчислення площ, відведених під овочеві культури, є *одночленами*.

Окрім множення та піднесення до степеня, можна виконувати дії *додавання* і *віднімання* одночленів.

Виконуючи множення одночленів і піднесення одночлена до степеня з натуральним показником, ми отримуємо одночлени.

Виконуючи додавання і віднімання одночленів, ми отримуємо вирази, які називаються многочленами.

Наприклад, вираз $3x^2-xy$, який є сумою одночленів $3x^2$ і $-xy$, — многочлен. Вирази $x(x+y)$ і $3x(x+y)$ НЕ Є многочленами, бо є добутками одночлена і многочлена.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Многочлен. Подібні члени многочлена

Означення. **Многочленом** називають *суму* кількох одночленів.

Доданки, із яких складається многочлен, називають **членами многочлена.** Одночлен вважають окремим випадком многочлена.

Назва многочлена залежить від *кількості* доданків, із яких він складається. Якщо многочлен складається:

- з *одного* доданка, то його називають **одночленом**;
- з *двох* доданків — **двочленом**;
- з *трьох* доданків — **тричленом**.

Назва	Кількість членів	Приклад	Члени многочлена
Одночлен	1	$-3x$	$-3x$
Двочлен	2	$5y-6$	$5y$; -6
Тричлен	3	$a^3-4ab+3b^4$	a^3; $-4ab$; $3b^4$
Многочлен	5	$x^4-x^3+x^2-x-1$	x^4; $-x^3$; x^2; $-x$; -1

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- многочлен (*polynomial*)
- двочлен (*binomial*)
- тричлен (trinomial)
- подібні члени (*like terms*)

РОЗМИНКА 1

1 Укажіть вирази, які є многочленами, та назвіть їх члени:

1) x^2y+3xy^3+2x; 3) $2a^3b^4:c-d$; 5) $a^2b(a-b)$;
2) $x^4y^2-2x^2y-3y$; 4) $-3a^7bc^4+d$; 6) $(a+b)ab^4$.

2 Класифікуйте многочлени за назвою:

1) $7a^3$; 3) $5x^4-4x^3y+3x^2y^2-2$; 5) 10;
2) $9+4b-c^2$; 4) c^2-d^2; 6) $-x$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Назва виразу визначається початковим записом виразу, а не виразом, до якого його можна звести.

У записі многочлена окремі доданки можуть бути подібними. Такі доданки називають *подібними членами многочлена*.

Означення. **Подібні члени многочлена** — це подібні доданки многочлена.

Подібні члени	НЕ Є подібними членами
$12a$ і $-3a$	$12a$ і $12b$
$-2b^3$ і $4b^3$	$-2b^3$ і $4b^5$
$7c^4d^2$ і $-c^4d^2$	$7c^4d^2$ і $-c^2d^4$

ПРИГАДАЙТЕ!

Доданки, що мають *однакову буквену частину*, називають **подібними доданками**.

Для спрощення і приведення многочлена до стандартного вигляду подібні доданки многочлена зводять.

Зведення подібних доданків многочлена називають **зведенням подібних членів многочлена**.

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ПРИГАДАЙТЕ!

Зводимо подібні члени:

- *визначаємо* подібні члени;
- *групуємо* подібні члени;
- *додаємо* коефіцієнти;
- *множимо результат* на спільну буквену частину.

РОЗМИНКА 2

1 Визначте подібні члени многочлена:

1) $2a+b-a-3b$; 2) $a^2b+3-3a^2b-1$; 3) $ab^2c-abc+5ab^2c+5$.

2 Зведіть подібні члени многочлена:

1) $4x^2-x^2$;
3) $-3xy-2xy$;
5) $6xy^3-5xy^3$;
2) x^3-5x^3;
4) $-7x^2y+x^2y$;
6) $5x^4y-6x^4y$.

ПРИКЛАД 1

1) Зведіть подібні члени многочлена $2yx+2x^3-4xy+5x^3+4$.

2) Знайдіть значення многочлена, якщо $x=-1$, $y=2$.

Розв'язання

1) $2yx+2x^3-4xy+5x^3+4=$

$yx=xy$

$=(2yx-4xy)+(2x^3+5x^3)+4=$ ...... Зводимо подібні члени.

$=-2xy+7x^3+4$;

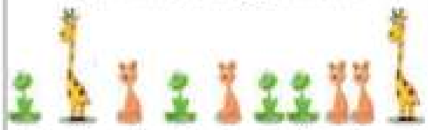
2) $-2xy+7x^3+4=$ ...... Підставимо значення: $x=-1$, $y=2$.

$=-2\cdot(-1)\cdot2+7(-1)^3+4=$

$=-4-7+4=1$ ...... Обчислюємо значення виразу.

Відповідь: $-2xy+7x^3+4$; 1.

1. Подібні члени зручно підкреслювати *різними* рисками:
$\underline{x^2}+\underline{\underline{2x^3}}+\underline{3xy}+\underline{3x^2}+\underline{2xy}+\underline{\underline{x^3}}$.
2. Не можна додавати доданки, які не є подібними!



$x^2+y^7+z^4+x^2+z^4=2x^2+2z^4+y^7$

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Зведіть подібні члени многочлена та знайдіть його значення, якщо $x=-1$:

1) $2x+2x^2-2x^2$;
5) $24x-3x^2-10x+3x^2+6$;
2) $3x+3x^2-3x^2$;
6) $18x-2x^2-14x+2x^2+5$;
3) $4x^2+12x-12x+x^2$;
7) $x^2-0{,}5x-2x^2+1+\frac{1}{2}x$;
4) $5x^2+10x-x^2-10x$;
8) $x^2+0{,}25x-3x^2+9-\frac{1}{4}x$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Одночлен стандартного вигляду містить:

- один числовий множник, відмінний від нуля і записаний на першому місці;
- усі інші множники — степені різних змінних.

Наприклад: $5a^3bc^7$.

Стандартний вигляд многочлена

Розглянемо многочлен, отриманий після зведення подібних членів: $2yx+2x^3-4xy+5x^3+4=-2yx+7x^3+4$.

Кожний із його членів: $-2yx$, $7x^3$ і 4 — *одночлен стандартного вигляду*. Серед цих одночленів немає подібних доданків. Такий многочлен називають **многочленом стандартного вигляду**.

Підручник. Проєкт. Майбутнього видавництва "Ранок"

Означення. **Многочлен стандартного вигляду** — многочлен, усі члени якого є одночленами стандартного вигляду, серед яких немає подібних членів.

Многочлен, який містить *одну* змінну, у стандартному вигляді упорядковують за порядком спадання (або зростання) показників степенів змінної зліва направо, *наприклад:*

$$-2y^5+4y^4+y^3+7y^2+2 \text{ або } 2+7y^2+y^3+4y^4-2y^5$$

Многочлени стандартного вигляду

- усі одночлени — стандартного вигляду;
- немає подібних членів.

Наприклад: $6ab+8c$,
$x^2-4xy+2y^2$

НЕ Є многочленами стандартного вигляду

$3a\cdot 2b+4\cdot 2c$ — члени многочлена НЕ Є одночленами *стандартного вигляду;*

$x^2-2xy+y^2-2xy+y^2$ — присутні *подібні члени*

РОЗМИНКА 3

1. Укажіть многочлени стандартного вигляду. Поясніть свій вибір:

1) $x^4y-xy+xy^4+2$; 3) $x^3y-x^2y^2-xy-5$; 5) $\frac{2c}{d}+4c+7d$;
2) $ab-2a^2b+3ab$; 4) $ab-aab+aa+15$; 6) $-\frac{z^3}{3}-5z-9$.

2. Упорядкуйте многочлен за спаданням показників степенів змінної a:

1) a^2-a+a^3; 2) $2a^3+3a^7+1-4a^5$.

Степінь многочлена

Означення. **Степінь многочлена стандартного вигляду** — *найбільший зі степенів* одночленів, із яких він складається.

Наприклад, визначимо степінь многочлена $2x^2y^3+3xy-y^3+4$.

Степені членів: $\underbrace{2x^2y^3}_{2+3=5}+\underbrace{3x^1y^1}_{1+1=2}-\underbrace{y^3}_{3}+\underbrace{4}_{0}$

Найбільший зі степенів дорівнює 5. Отже, даний многочлен — многочлен 5-го степеня.

ПРИГАДАЙТЕ!

Степінь одночлена — сума показників степенів усіх змінних, які містить одночлен. Вважають, що степінь числа, відмінного від нуля, дорівнює **0**.

Наприклад:

$$\begin{array}{c} 0+3+4+1=8 \\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\ 2a^3b^4c \end{array}$$

Степінь одночлена дорівнює 8.

Алгоритм знаходження степеня многочлена

1. Звести многочлен до стандартного вигляду.
2. Знайти степені всіх одночленів — членів многочлена.
3. Визначити найбільший із цих степенів.

1) Записуємо многочлен у *стандартному вигляді*	2) Знаходимо *степені всіх членів* многочлена	3) Визначаємо *найбільший зі степенів*
$3a^2+4b$	2, 1	2
$x^4y^4+2xy+y^3$	8, 2, 3	8
$7c-5$	1, 0	1

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Запишіть по 5 многочленів. Обміняйтесь записами. Класифікуйте многочлени й визначте їх степені.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ПРИКЛАД 2

Зведіть многочлен $2ab-4a\cdot 3ab+b\cdot(-3a)+13a^2b$ до стандартного вигляду та визначте його степінь.

$2ab-4a\cdot 3ab+b\cdot(-3a)+13a^2b=$	Запишемо всі члени у стандартному вигляді.
$=\underline{2ab}-\underline{12a^2b}-\underline{3ab}+\underline{13a^2b}=$	Визначаємо подібні члени.
$=(2ab-3ab)+(-12a^2b+13a^2b)=$	Групуємо подібні члени, зводимо подібні члени.
$=-\underbrace{ab}_{1+1=2}+\underbrace{a^2b}_{2+1=3}.$	Визначаємо степінь кожного члена. Маємо: найбільший зі степенів дорівнює 3.

Відповідь: $-ab+a^2b$ — многочлен 3-го степеня.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Визначте степінь многочлена:

1) $7ab+5a\cdot(-b)$;
2) $6ab+2b\cdot(-a)$;
3) $2a\cdot 5b+a-8ab$;
4) $3a\cdot 7b+b-15ab$;
5) $16ab-3a\cdot 8ab+b\cdot(-7a)-6a^2b$;
6) $14ab-5a\cdot 4ab+b\cdot(-9a)-8a^2b$;
7) $12a\cdot\frac{1}{3}b-8b\cdot 2ab+b\cdot(-13a)-4ab^2$;
8) $20a\cdot\frac{1}{4}b-6b\cdot 3ab+b\cdot(-11a)-5ab^2$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Многочлени можна додавати й віднімати у стовпчик.

Додавання многочленів

1. Записати перший многочлен.
2. Записати під ним другий многочлен так, щоб подібні члени було розміщено один під одним.
3. Виконати додавання подібних членів.

Наприклад:

$$\begin{array}{r} -9b^3+6b^2-7b+8\\ +\quad 2b^3-2b^2-5b+3\\ \hline -7b^3+4b^2-12b+11 \end{array}$$

Додавання та віднімання многочленів

! Сума та різниця будь-яких многочленів є многочленом.

Алгоритм додавання многочленів

1. Записати суму многочленів: (... ...)+(... ...).
2. Розкрити дужки.
3. Визначити подібні члени утвореного многочлена.
4. Звести подібні члени.
5. Записати у відповідь многочлен стандартного вигляду.

ПРИКЛАД 3

Знайдіть суму многочленів $3m^2+4n-2$ і $4-2m^2-7n$.

$(3m^2+4n-2)+(4-2m^2-7n)=$	Записуємо суму многочленів.
$=3m^2+4n-2+4-2m^2-7n=$	Розкриваємо дужки, визначаємо подібні члени.
$=(3m^2-2m^2)+(4n-7n)+(-2+4)=$	Групуємо подібні члени.
$=m^2-3n+2$	Зводимо подібні члени.

Відповідь: m^2-3n+2.

Проєкт підручника майбутнього видавництва "Ранок"

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Знайдіть суму многочленів:

1) $15-2n$ і $2n-15$;
2) $3n-14$ і $14-3n$;
3) n^2+6n-4 і n^2-6n+3;
4) $8n-n^2+7$ і n^2-7n-5;
5) $12m-3n^2+3$ і $3n^2-2m+1$;
6) $4n^2-10m+7$ і $10m-3n^2-2$;
7) $m^2-6mn+4n^2$ і $5mn-2n^2-5m^2$;
8) $8mn-5n^2-9m^2$ і $4m^2-10mn+6n^2$.

Алгоритм віднімання многочленів

1. Записати різницю многочленів: $(\dots\ \dots)-(\dots\ \dots)$.
2. Розкрити дужки.
3. Визначити подібні члени утвореного многочлена.
4. Звести подібні члени.
5. Записати у відповідь многочлен стандартного вигляду.

РОЗМИНКА 4

Розкрийте дужки:

1) $-(5+n)$; 3) $-(n^2-4)$; 5) $-(-n^3-7)$; 7) $-(n^3-2n-9)$;

2) $-(n+2)$; 4) $-(6-n^2)$; 6) $-(-8-n^3)$; 8) $-(5-4n-n^3)$.

ПРИКЛАД 4

Знайдіть різницю многочленів $3a^2+4b-5$ і $(2a^2-5-5b)$.

Розв'язання

$(3a^2+4b-5)-(2a^2-5-5b)=$ ...... Записуємо різницю многочленів.

$=3a^2+4b-5-2a^2+5+5b=$ ...... Розкриваємо дужки, змінюємо знаки на протилежні.

$=3a^2+4b-5-2a^2+5b+5=$ ...... Визначаємо подібні доданки.

$=(3a^2-2a^2)+(4b+5b)+(5-5)=$ ... Групуємо подібні доданки.

$=a^2+9b$ ...... Зводимо подібні доданки.

Відповідь: a^2+9b.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Спростіть вираз:

1) $6x+7-(5x+7)$;
2) $7x+3-(6x+3)$;
3) $(8x+1)-(x-1)$;
4) $(5x+3)-(2x-3)$;
5) $(x-8y+11)-(2y-15x+11)$;
6) $(17x-y-9)-(4y-3x-9)$;
7) $(x^2-6y-20)-(3x^2-5y-18)$;
8) $(2x^2-3y-24)-(5x^2-8y-21)$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$$\begin{array}{r} 2b^4-6b^3+7b^2-5 \\ + \;\; 3b^4+2b^3-5b+4 \\ \hline 5b^4-4b^3+2b^2-1 \end{array}$$

ПРИГАДАЙТЕ!

Многочлен B	Протилежний многочлен $-B$
a	$-a$
$-a$	a
$x+y$	$-(x+y)=-x-y$
$x-y$	$-(x-y)=-x+y$
$-x-y$	$-(-x-y)=x+y$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Віднімання многочленів у стовпчик

Наприклад, знайдемо $A-B$, де $A=10b^3-8b^2+5b-2$,
$B=2b^3-2b^2-5b+3$.

$A-B=A+(-B)$.

1. Записати многочлен $-B$, **протилежний** до многочлена B, — *змінити* знак кожного доданка на *протилежний*:
$-B=-(2b^3-2b^2-5b+3)=$
$=-2b^3+2b^2+5b-3$
2. Виконати додавання подібних членів:

$$\begin{array}{r} 10b^3-8b^2+5b-2 \\ + \;\; -2b^3+2b^2+5b-3 \\ \hline 8b^3-6b^2+10b-5 \end{array}$$

$A-B=8b^3-6b^2+10b-5$

Підручник проект майбутнього видавництва "Ранок"

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть невідомий вираз:

Сума сторін многокутника

Периметр

$(12a^2+3a-4)-(2a^2-4)$

?

ПРАКТИКУМ

6.1 Складіть многочлен з одночленів:

1) $2a$ і $-4a^3$; 2) $-xy$, -5 і $4y^2$; 3) $-5ab$, $2a$, $-6b^2$ і 1.

6.2 Запишіть многочлен у стандартному вигляді та знайдіть його значення:

1) $4y^5+y^2+y^3-2y^5-1$, якщо $y=1$;
2) $2-x^4+x^2+3x^4+x$, якщо $x=-1$;
3) $2ab-a^2-4ab+3+2ab$, якщо $a=3$, $b=-1$.
4) $a^3-4ab+1-2a^3+4ab$, якщо $a=2$, $b=-1$.

6.3 Зведіть многочлен до стандартного вигляду та визначте його степінь:

1) $2x^2-2x^2y+4x^2+5x^2y-10$;
2) $8x^3+3xy^3-5x^3-9xy^3+6$;
3) $-2ab-5a^4\cdot(-b)+a\cdot(-2b)-5a^4b-1$;
4) $a^5b-8\cdot(-a)\cdot b^2+4-a^5b+2a\cdot(-b^2)$.

6.4 Запишіть по два приклади многочленів:

1) першого степеня; 4) четвертого степеня;
2) другого степеня; 5) п'ятого степеня;
3) третього степеня; 6) нульового степеня.

6.5 Знайдіть суму та різницю многочленів:

1) $5x^2+10x$ і $4x^2-11$; 3) $8a^3-2a+4$ і $3a^3+5a+7$;
2) y^3-4 і $5y+2y^3$; 4) $6b^2+3b-2$ і $8b^2-7b+9$;
5) $0{,}2ab+10a-0{,}6b^3$ і $-12a+0{,}4b^3-0{,}8ab$;
6) $0{,}5x^4-8xy+1{,}1y$ і $0{,}9y-2{,}5x^4+12xy$.

6.6 Визначте, який многочлен потрібно вписати замість пропусків, щоб утворилась тотожність:

1) $3{,}9x^3+x-(\ldots)=4x^3+10x$;
2) $x^5-y-(\ldots)=0{,}2x^5-11y$;
3) $0{,}2a+1{,}3a^3b-2+(\ldots)=a+3a^3b+20$;
4) $(\ldots)+7{,}2a^4-2{,}9ab+8=10a^4+0{,}1ab-10$.

6.7 Подайте многочлен $-5a^7b+4ab^4-12ab^2+3ab-5$ у вигляді:

1) суми двох многочленів; 3) суми трьох многочленів;
2) різниці двох многочленів; 4) різниці трьох многочленів.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Дії додавання й віднімання виконуємо:

зліва → направо

$10a-6a-2a\neq10a-4a$

$20b-7b+3b\neq20b-10b$

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Подайте многочлен $6x^3-3x^2-2x+7$ у вигляді різниці двох двочленів.

Виграє той, хто запише найбільшу кількість варіантів.

6.8 Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-5)+(3x+8)=83$;
2) $(8x+4)-(4x-6)=90$;
3) $\left(4x^2-2x\right)+\left(x^2+7x\right)=5x^2-100$;
4) $\left(x^3+x\right)-\left(x^3-6x\right)=15x+80$.

6.9 Спростіть вираз та знайдіть його значення:

1) $\left(6a^3-2a\right)-\left(-3a+6a^3\right)+1$, якщо $a=5$;
2) $\left(1\frac{2}{9}x^4+2\frac{4}{7}x^5-6\right)+\left(2\frac{3}{7}x^5-\frac{2}{9}x^4\right)+6$, якщо $x=-1$.

6.10 Спростіть вираз, звівши його до многочлена стандартного вигляду:

1) $5x-\left(a+(3x-a)\right)$;
3) $18x^2-2ax-\left(6a^2-x^2+\left(3x^2-2ax\right)\right)$;
2) $8x-\left(a+(2x-a)\right)$;
4) $15x^2-3ax-\left(8a^2-x^2+\left(7x^2-3ax\right)\right)$;
5) $9x^2-7a^2+5ax-\left(6x^2-4a^2-\left(3a^2+x^2\right)\right)$;
6) $11x^2-8a^2+4ax-\left(3x^2-2a^2-\left(6a^2+x^2\right)\right)$.

6.11 Запишіть у вигляді многочлена число:

1) $\overline{ab}$; 2) $\overline{ab}+\overline{ba}$; 3) $\overline{abc}+\overline{cba}$; 4) $\overline{abcd}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то, розкриваючи дужки, ЗНАК кожного доданка НЕ ЗМІНЮЄМО.
Якщо перед дужками стоїть знак «−», то, розкриваючи дужки, ЗНАК кожного доданка ЗМІНЮЄМО НА ПРОТИЛЕЖНИЙ.

ПРИГАДАЙТЕ!

$\overline{abc}=100a+10b+c$

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

6.12 Доведіть, що при будь-яких значеннях змінної вираз:

1) $\left(x^6+5x^7\right)-\left(-2x^6+5x^7\right)+100$ набуває лише додатних значень;
2) $\left(-x^4-2x^3\right)-\left(-2x^3+7x^8\right)-100$ набуває лише від'ємних значень.

6.13 Розставте дужки так, щоб отримати правильну рівність:

1) $a^2-4b+2-a^2-4b-2=0$;
2) $a^2-4b+2-a^2-4b-2=-4$;
3) $a^2-4b+2-a^2-4b-2=4$.

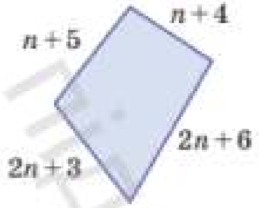
6.14 Доведіть твердження 1–2.

Аналізуємо	Виконуємо
1) Різниця чисел $\overline{abc}-\overline{cab}$ ділиться націло на 9. $\overline{abc}-\overline{cab}=(100a+10b+c)-(100c+10a+b)=$ $=100a+10b+c-100c-10a-b=$ $=(100a-10a)+(10b-b)+(c-100c)=$ $=90a+9b-99c=9(10a+b-11c)\,\vdots\,9$	2) Сума чисел $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ ділиться націло на 111.

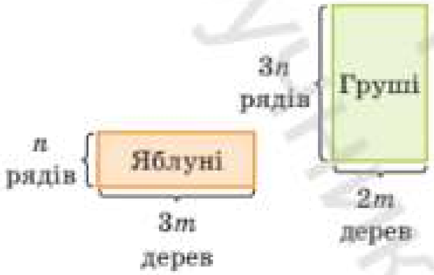
ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$\left(a^2-4a+2\right)-\left(a^2+2a+3\right)=$
$=a^2-4a+2-a^2+2a+3=$
$=a^2-a^2-4a+2a+2+3=$
$=-2a+5$

MATH FOR LIFE



6.15 ***Геометрія.*** На рисунку зображено план-схему території музею сну, яка має форму чотирикутника. Визначте периметр цього чотирикутника.



6.16 ***Садівництво.*** У саду на двох ділянках висаджені яблуні та груші рядами (див. рисунок). У межах окремої ділянки в кожному ряду — однакова кількість дерев.

1) Скільки в саду висаджено:
а) яблунь; б) груш; в) яблунь і груш разом?

2) Скільки всього дерев у саду, якщо $n=10,\ m=20$?

3) Скільки кілограмів вапняної побілки треба купити, якщо для обробки кожного дерева потрібно 300 г побілки?

Інший варіант роботи в електронному додатку

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Який із наведених виразів є многочленом?

А	Б	В	Г
$3x^2:(x-2)$	$2x^3(4+y)$	$2x^3y+y$	$2xy:x+y$

2 Зведіть подібні члени многочлена $-3m^4n+m^4n+2$.

А	Б	В	Г
-1	$-2m^4n+2$	0	m^4n

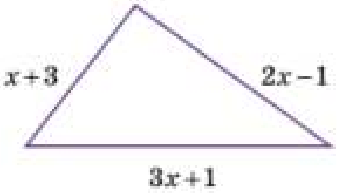
3 Запишіть многочлен $4a\cdot(-5b)+5b$ у стандартному вигляді.

А	Б	В	Г
$-20ab+5b$	$4a$	$-ab+5b$	$-4a$

4 Укажіть степінь многочлена $5ab^2+2a^3b$.

А	Б	В	Г
4	2	3	5

5 Визначте периметр трикутника, зображеного на рисунку.



А	Б	В	Г
$8x$	$5x+3$	$6x+6$	$6x+3$

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) і тотожно рівним йому виразом (А–Г).

1	$(3x+7y)+(3x-7y)$	А	0
2	$(3x+7y)-(3x-7y)$	Б	$6x+14y$
3	$(3x+7y)-(-3x-7y)$	В	$6x$
		Г	$14y$

7 Знайдіть суму многочленів $7y+11-5y^2$ і $y^2-9y+4+5y^3$.

8 Спростіть вираз $12b^2-10a^2-2ab-\left(5b^2-2ab+25a-10a^2\right)$, звівши його до многочлена стандартного вигляду. Знайдіть значення многочлена, якщо $a=2,\ b=-3$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

6.17 Укажіть вирази, які є многочленами, та запишіть їхні члени:

1) $9a^3b^2c$;
3) $2a^3+2a^2-2a$;
5) $\frac{a}{b}-2a+12$;
2) $x(x-y)$;
4) $4x^4:(2x-1)$;
6) $-\frac{x^2}{2}-2x-3$.

6.18 Класифікуйте многочлен за назвою, знайдіть його степінь:

1) $x^2y^3+4y^6$;
3) $4x^2-3xy+6y^4$;
5) $9x^{10}$;
2) $a+16b$;
4) $-3a^3+2a^2b^2+b$;
6) a^3b^2c.

6.19 Зведіть подібні члени многочлена та знайдіть його значення, якщо $x=-10$:

1) $4x+4x^2-4x^2$;
3) $40x-5x^2-30x+5x^2+9$;
2) $3x^2+6x-x^2-6x$;
4) $3x^2+0,5x-5x^2+7-\frac{1}{2}x$.

6.20 Зведіть многочлен до стандартного вигляду та визначте його степінь:

1) $5ab+3a\cdot(-b)$;
3) $15ab-2a\cdot 7ab+b\cdot(-8a)-6a^2b$;
2) $2a\cdot 9b+a-12ab$;
4) $20a\cdot\frac{1}{5}b-9b\cdot 4ab+b\cdot(-13a)-7ab^2$.

6.21 Знайдіть суму й різницю многочленів:

1) $9x+2$ і $8x+2$;
5) $x-4y-12$ і $y-8x-12$;
2) $11-3n$ і $3n-11$;
6) $6n^2-14m+9$ і $14m-3n^2-7$;
3) $6x^2+7$ і $3x^2-7$;
7) $4x^2-9y-28$ і $6x^2-y-23$;
4) $9n-n^2$ і n^2-8n;
8) $2mn-5n^2-m^2$ і n^2+5m^2-2mn.

6.22 Спростіть вираз та знайдіть його значення:

1) $-(8x^2+3x)-(2x^2+7x)$, якщо $x=10$;
2) $\left(3\frac{5}{8}x^3-3\frac{2}{5}x^2+9\right)-\left(1\frac{5}{8}x^3-5\frac{3}{5}x^2+12^4\right)-2$, якщо $x=-2$.

6.23 Запишіть як многочлен стандартного вигляду вираз для обчислення площі всієї ділянки, призначеної для висаджування овочевих культур (див. Актуальну задачу). Знайдіть його значення, якщо $x=20$ м, $y=30$ м. Скільки кілограмів органічних добрив знадобиться фермеру, якщо на кожен квадратний метр рекомендується вносити 5 кг добрив?

Бонусне завдання

6.24 Подайте тричлен у вигляді суми або різниці двох двочленів:

1) a^2+9a+4;
2) b^3-3b-5;
3) c^4-c^2+7.

Завдання 6.17, 6.18	→ Розминка 1
Завдання 6.19	→ Приклад 1
Завдання 6.20	→ Приклад 2
Завдання 6.21	→ Приклади 3, 4
Завдання 6.22	→ Практикум, 6.9
Завдання 6.23	→ Актуальна задача

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Заповніть порожні клітинки квадрата так, щоб сума двочленів у кожному стовпчику, рядку і діагоналі дорівнювала $3a^2+12b$.

a^2+b		a^2+3b
	a^2+4b	

Складіть самостійно магічний квадрат із двочленами.

BE SMART

Многочлен, або **полі**ном;
одночлен, або **мо**ном;
двочлен, або **бі**ном;
тричлен, або **три**ном.

Порівняйте з назвами многочленів слова:

- політехнічний, поліклініка;
- монолог, монотонний;
- біатлон, біполярний;
- трилогія, триплан.

Знайдіть інші слова з префіксами *полі-*, *моно-*, *бі-*, *три-* і поясніть їхні значення.

§7 МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН. МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

ВЧОРА	Ви множили одночлени та виконували дії додавання і віднімання з многочленами
СЬОГОДНІ	Ви навчитеся множити многочлени різними способами
ЗАВЖДИ	Ви зможете скористатися секретами «ментальної математики»

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

МЕНТАЛЬНА МАТЕМАТИКА

Чи хочете ви навчитися усно перемножувати два числа, у яких число десятків однакове, а сума одиниць дорівнює 10?

Наприклад, 12 і 18, 23 і 27, 307 і 303, 906 і 904?

Проаналізуйте алгоритм множення і заповніть таблицю:

Алгоритм	1. Множимо число десятків заданих чисел на наступне число (більше на 1)	2. Множимо одиниці заданих чисел	3. Записуємо результат першої дії і приписуємо праворуч результат другої дії
$14\cdot16=$	$1\cdot(1+1)=2$	$4\cdot6=24$	224
$42\cdot48=$	$4\cdot(4+1)=?$	$2\cdot8=?$	$?$
$307\cdot303=$	$30\cdot(30+1)=930$	$7\cdot3=21$	93021
$206\cdot204=$	$20\cdot(20+1)=?$	$6\cdot4=?$	$?$

Наведений алгоритм базується на тотожності:

$$\underbrace{(10a+b)\cdot(10a+c)}_{\substack{\text{добуток}\\ \textit{двох двочленів}}}=\underbrace{100a\cdot(a+1)}_{\substack{\text{добуток}\\ \textit{одночлена на двочлен}}}+bc,\ \text{якщо}\ b+c=10.$$

Для того щоб розкрити секрети «ментальної математики», треба вміти *множити многочлени*.

При множенні многочленів застосовують *переставну* й *розподільну* властивості множення та *властивості степенів*.

Розглянемо різні випадки і способи множення многочленів.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Починаючи з 2004 року, серед дорослих і дітей проводяться Чемпіонати світу з усної лічби (Mental Calculation World Cup).
- Щороку понад 30 000 осіб беруть участь у змаганнях «Прангліміне» з усної лічби, які проходять у країнах Балтії, у Словенії та Україні.
- За допомогою онлайн-тренажера «Прангліміне Міксіке» ви можете провести тренування та взяти участь у цих змаганнях.

ПРИГАДАЙТЕ!

1) $3(a+4)=3\cdot a+3\cdot4=$
$=3a+12;$

2) $2\left(x^2-4x+3\right)=$
$=2\cdot x^2+2\cdot(-4x)+2\cdot3=$
$=2x^2-8x+6.$

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Множення одночлена на многочлен

Правило множення одночлена на многочлен

Щоб помножити одночлен на многочлен, треба помножити цей одночлен на **кожний член** многочлена й додати знайдені добутки.

Наприклад:

Множимо

$$5x^2\left(4x^3-x\right)=5x^2\cdot 4x^3+5x^2\cdot(-x)=5\cdot 4\cdot x^{2+3}+5\cdot(-1)\cdot x^{2+1}=20x^5-5x^3,$$

Додаємо

$a\cdot b=b\cdot a$ $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ $-x=(-1)\cdot x^1$

Застосовуємо властивості

або

$$5x^2\left(4x^3-x\right)=5x^2\cdot 4x^3-5x^2\cdot x=20x^5-5x^3$$

У результаті множення одночлена на многочлен отримуємо **многочлен.**

РОЗМИНКА 1

Розкрийте дужки:

1) $9(1+x)$;
2) $5(y-2)$;
3) $x(3-x)$;
4) $y(y-4)$;
5) $-5x(x+y)$;
6) $-9y(y-x)$;
7) $x\left(x^2-7\right)$;
8) $y\left(8-y^2\right)$.

ПРИКЛАД 1

Виконайте множення одночлена на многочлен:

$$3x^2\left(0{,}5x^3+2x-5\right).$$

Розв'язання:

$3x^2\left(0{,}5x^3+2x-5\right)=$ ……… Використаємо розподільну властивість $a(b+c+d)=ab+ac+ad$.

$=3x^2\cdot 0{,}5x^3+3x^2\cdot 2x^1+3x^2\cdot(-5)=$ ……… Множимо одночлен на кожний член многочлена, враховуючи його знак.

$=3\cdot 0{,}5x^{2+3}+3\cdot 2x^{2+1}+3\cdot(-5)x^2=$ ……… Множимо одночлени, скориставшись властивостями $a\cdot b=b\cdot a$ і $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.

$=1{,}5x^5+6x^3-15x^2$ ……… Додаємо добутки.

Відповідь: $1{,}5x^5+6x^3-15x^2$.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

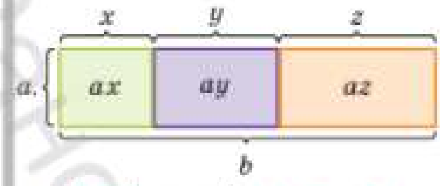
- многочлен (*polynomial*)
- одночлен (*monomial*)
- множення многочленів (*multiply monomials*)
- розподільна властивість (*distributive property*)

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$$15a^2-2a(5a-1)=$$
$$=15a^2-10a^2+1=$$
$$=5a^2+1$$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Розподільний закон множення відносно додавання, на якому засновано правило множення одночлена на многочлен, давньогрецький математик Евклід у III ст. до н. е. доводив мовою «геометричної алгебри»: якщо одна зі сторін прямокутника є сумою декількох відрізків, то площу всього прямокутника можна знайти як суму площ його частин.



$ab=a(x+y+z)=ax+ay+az$

Підручник видавництва "Ранок"

ПРИГАДАЙТЕ!

$a(b+c)=ab+ac$

$a(b-c)=ab-ac$

$a(b+c+d)=ab+ac+ad$

$a-b=a+(-b)$

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Виконайте множення:

1) $3(x^2+x+2)$;
2) $4(x^2+x+3)$;
3) $2x(x^2-5x+1)$;
4) $3x(x^2-6x+1)$;
5) $8x^2\left(x^3+\frac{1}{4}x^2-3\right)$;
6) $9x^2\left(x^3+\frac{1}{3}x-2\right)$;
7) $(2x^4-14x^3+4x^2-8)\cdot\frac{1}{2}x$;
8) $(3x^4-12x^2+6x-24)\cdot\frac{1}{3}x$.

СЛІД ЗНАТИ!

$a(b-c)=ab-ac$,

$a(b+c)=ab+ac$,

$a^1\cdot a^n=a^{1+n}$

РОЗМИНКА 2

Зведіть подібні доданки:

1) $12+x-12$;
2) $-5x+6+5x$;
3) $-4x^2+7x+4x^2$;
4) $2x^3+8x-2x^3$;
5) $2x+10x^2-3x^2$;
6) $3x^2+9x-2x$.

ПРИКЛАД 2

Спростіть вираз $5a(a^2-b)-b(2b+5a)$.

Розв'язання:

$5a(a^2-b)-b(2b+5a)=A-B$, …… Подаємо заданий вираз у вигляді різниці $A-B$.

де $A=5a(a^2-b)$, $B=b(2b+5a)$

$A=5a(a^2-b)=5a\cdot a^2-5a\cdot b=5a^3-5ab$; …… Спрощуємо вирази A та B окремо.

$B=b(2b+5a)=b\cdot 2b+b\cdot 5a=2b^2+5ab$

$A-B=(5a^3-5ab)-(2b^2+5ab)=$ …… Знаходимо різницю $A-B$.

$=5a^3-5ab-2b^2-5ab=5a^3-10ab-2b^2$ …… Зводимо подібні члени.

Відповідь: $5a^3-10ab-2b^2$.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Спростіть вираз:

1) $a(3a+b)-3a^2$;
2) $a(2a+b)-2a^2$;
3) $a(a-5b)+5(ab+1)$;
4) $a(a-4b)+4(ab+1)$;
5) $6a(a^2-b)-b(3b+4a)$;
6) $4a(a^2-b)-b(7b+3a)$;
7) $2a(a-4ab)-4b(3b-2a^2)+7b^2$;
8) $5a(a-6ab)-3b(2b-10a^2)+8b^2$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

У відповідь записуємо многочлен стандартного вигляду.

РОЗМИНКА 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $2x=0$;
2) $-3x=21$;
3) $x+2=10$;
4) $x-7=-17$.

Проект підручника видавництва "Ранок"

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $2x(x-1)+3x(-x+5)=26-x^2$.

Розв'язання:

$2x(x-1)+3x(-x+5)=26-x^2$ .... Розкриємо дужки.

$2x\cdot x-2x\cdot 1+3x\cdot(-x)+3x\cdot 5=26-x^2$ ... Спрощуємо вираз.

$2x^2-2x-3x^2+15x=26-x^2$ .... Перенесемо доданок зі змінною в ліву частину рівняння.

змінюємо знак

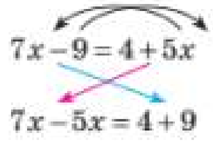
$2x^2-2x-3x^2+15x+x^2=26$ .... Зведемо подібні доданки.

$13x=26;\ x=2$ .... Розв'язуємо рівняння.

Відповідь: 2.

ПРИГАДАЙТЕ!

При перенесенні доданків з однієї частини рівняння до іншої знак доданка змінюємо на протилежний:



$$7x-9=4+5x$$

$$7x-5x=4+9$$

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $3(x+1)+2(4-x)=0$;
2) $4(x+1)+3(2-x)=0$;
3) $2x(x+4)-2x^2=72$;
4) $7x(x-1)+7x^2=84$;
5) $5(x+6)+3x(x-1)=3x^2$;
6) $6(x+3)+4x(x-1)=4x^2$;
7) $2x(x-3)+5x(-x+2)=24-3x^2$;
8) $3x(x-5)+4x(-x+6)=63-x^2$.

Множення многочленів

Правило множення многочленів

Щоб помножити многочлен на многочлен, треба **кожний член** першого многочлена помножити на **кожний член** другого многочлена і додати знайдені добутки.

Розглянемо різні способи множення многочленів.

ПРИКЛАД 4

Виконайте множення многочленів, застосувавши розподільну властивість множення: $(x+3)(x+2)$.

$(x+3)(x+2)=x(x+2)+3(x+2)=$ .... Двічі застосуємо розподільну властивість.

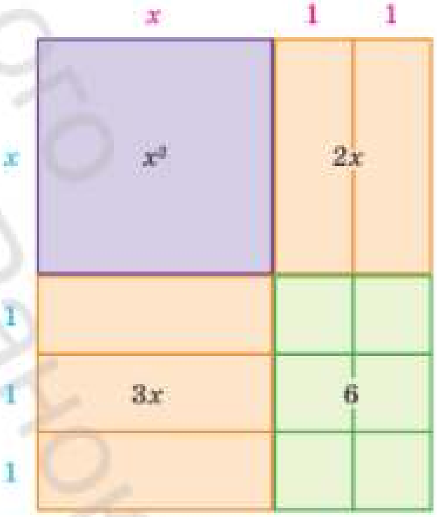
$=x\cdot x+x\cdot 2+3\cdot x+3\cdot 2=$

$=x^2+2x+3x+6=x^2+5x+6$ .... Зводимо подібні члени.

Відповідь: x^2+5x+6.

Геометрична ілюстрація

$(x+3)(x+2)=x(x+2)+3(x+2)=$
$=x^2+2x+3x+6=x^2+5x+6$



ТРЕНУЄМОСЯ 4

Виконайте множення:

1) $(x+3)(x+1)$;
2) $(x+2)(x+1)$;
3) $(x-3)(x-4)$;
4) $(x-2)(x-5)$;
5) $(2x+1)(-x-1)$;
6) $(3x+1)(-x-2)$;
7) $(-x-8)(3-2x)$;
8) $(-x-7)(1-4x)$.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ДОСЛІДЖУЄМО!

Порівняйте степінь добутку многочленів і степені многочленів-множників у Прикладах 4, 5.

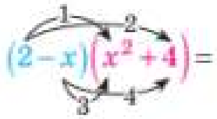
З'ясуйте, чи є правильним висновок: **степінь добутку многочленів дорівнює сумі степенів многочленів-множників**.

Застосовуйте цей висновок для самоконтролю!

ПРИКЛАД 5

Виконайте множення многочленів, застосувавши **правило множення** (*спосіб фонтану*): $(2-x)(x^2+4)$.

Розв'язання:



$(2-x)(x^2+4)=$ — Визначаємо порядок множення. **Кожний член** першого многочлена множимо на **кожний член** другого.

$=2\cdot x^2+2\cdot 4+(-x)\cdot x^2+(-x)\cdot 4=$ …… Додаємо добутки, спрощуємо.

$=2x^2+8-x^3-4x=-x^3+2x^2-4x+8$ … Записуємо у стандартному вигляді.

Відповідь: $-x^3+2x^2-4x+8$.

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Виконайте множення:

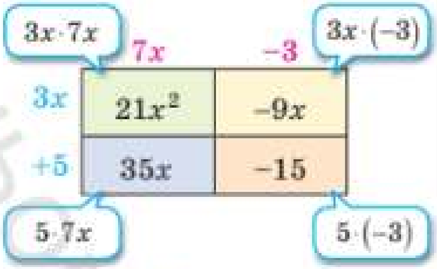
1) $(x+1)(x^2+4)$;
2) $(x+2)(x^2+1)$;
3) $(6-x)(x^2+5)$;
4) $(3-x)(x^2+7)$;
5) $(-4-x)(x^2-6)$;
6) $(-2-x)(x^2-7)$;
7) $(2x-9)(6-x^3)$;
8) $(3x-4)(8-x^3)$.

ПРИКЛАД 6

Виконайте множення многочленів **табличним способом** (*спосіб коробки*): $(3x+5)(7x-3)$.

Розв'язання:

1. Будуємо таблицю, що містить 2 рядки і 2 стовпчики (таблицю 2×2).
2. Записуємо члени двочленів уздовж сторін таблиці (перший — ліворуч, другий — зверху).
3. **Кожний член** першого многочлена множимо на **кожний член** другого многочлена.
4. Результати множення записуємо у відповідні клітинки таблиці.
5. Записуємо суму всіх добутків.
6. Зводимо подібні члени, записуємо відповідь.



$21x^2+35x-9x-15=$
$=-21x^2+26x-15$

Відповідь: $-21x^2+26x-15$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Кількість рядків і стовпців таблиці залежить від кількості членів у многочленах. Так, для двочлена і тричлена має бути таблиця 2×3.

ТРЕНУЄМОСЯ 6

Виконайте множення:

1) $(2x-1)(5x+1)$;
2) $(3x+1)(4x-1)$;
3) $(4x-3)(-3x-2)$;
4) $(-5x-1)(2x-6)$;
5) $(7x+3y)(2x+y)$;
6) $(4x+y)(2x+8y)$;
7) $(5x-2y)(4x-3y)$;
8) $(9x-4y)(3x-5y)$.

ПРАКТИКУМ

7.1 Перетворіть добуток у многочлен:

1) $3x(x^2-4x+8)$; 4) $5xy(-x+3y-11)$;

2) $2x(x^2+5x-9)$; 5) $(-4x+y^3-12)(-3x^2y)$;

3) $4xy(3x-6y-10)$; 6) $(3x^2-7y-15)(-2xy^3)$.

7.2 Доведіть тотожність:

1) $a(4-2a+a^2)+a^2(2-a)=4a$;

2) $a(9+5a-a^2)+a^2(a-5)=9a$;

3) $b(a-4b+10)+b(4b-a)=10b$;

4) $2a(-a^2+ab-9b)+ab(18-2a)=-2a^3$.

7.3 Подайте у вигляді многочлена:

1) $a(7a^2-b+1)+3a(b-4a^2-2)$;

2) $4b(b^3+2a-5)+2b(6-a+6b^3)$;

3) $2a(a-4ab)-4b(3b-2a^2)+7b^2$;

4) $5a(a-6ab)-3b(2b-10a^2)+8b^2$.

7.4 Спростіть вираз і знайдіть його значення, якщо $a=-2$:

1) $1{,}2a(5a-4)-0{,}2a$; 3) $\frac{4}{3}a\left(\frac{3}{2}a-\frac{3}{4}a^2+6\right)-a(2a+7)$;

2) $2{,}5a(2a-3)-2{,}5a$; 4) $\frac{2}{5}a\left(\frac{5}{2}a-\frac{15}{2}a^2+10\right)+a(3a^2-5)$.

7.5 Розв'яжіть рівняння:

1) $2x(x+9)+75=x(3+2x)$;

2) $x(3x+4)=3x(x+4)+56$;

3) $2x^2(x+4)-x^3=x^2(x-2)+5x^2$;

4) $x(x^2-3x)+6x^2=2x^2(x+1)-x^3$;

5) $4x(x^2+0{,}5)-3x^3=-x(-x^2-5)+3$;

6) $2x(1{,}5-x^2)+x^3=-x(x^2-1)+4$.

7.6 Розкрийте дужки:

1) $(2x-y)(x+y+1)$; 4) $(4x+y)(x-y^2-6)$;

2) $(3x+y)(y-x+2)$; 5) $(3x-2y)(1-5x^2-4y)$;

3) $(x+5y)(x^2-y-4)$; 6) $(2x-5y)(1-3y^2-6x)$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Многочлени можна не тільки додавати і віднімати, а й множити у стовпчик.

$$\begin{array}{r} \times\quad 2a^2-3ab+b^2 \\ 4a-b \\ \hline -2a^2b+3ab^2-b^3 \\ +\;8a^3-12a^2b+4ab^2\quad \\ \hline 8a^3-14a^2b+7ab^2-b^3 \end{array}$$

множимо на $-b$

множимо на $4a$

Спробуйте перемножити цим способом многочлени і перевірте результат, виконавши множення іншим способом:

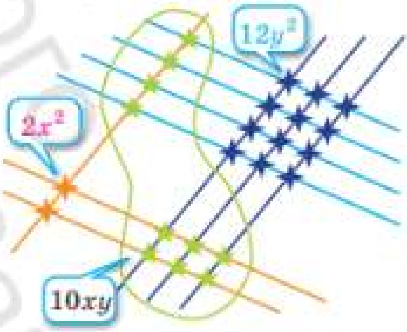
1) $(x^2+3x-5)(2x+4)$;

2) $(y^2-4y+1)(3y-2)$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Розгляньте стародавній японський спосіб графічного множення.

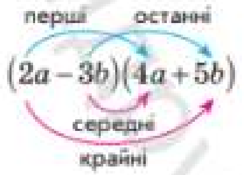
$(x+3y)(2x+4y)=2x^2+10xy+12y^2$



Спробуйте навести графічне розв'язання множення многочленів $(x+2y)(x+3y)$.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

Для множення многочленів зручно користуватися **мнемонічним правилом.**



Мнемонічне правило:
«Перші, крайні, середні, останні»

7.7 Доведіть, що для будь-якого значення змінної c значення виразу:

1) $(c+7)c-(c+2)(c+5)$ дорівнює -10;
2) $(c-3)(c+9)-c(c+6)$ дорівнює -27.

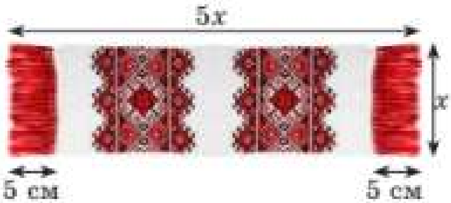
7.8 Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+3)(x+1)-x^2=0$;
2) $(x+1)(x+2)-x^2=0$;
3) $(x-4)(x+6)=x^2$;
4) $(x+4)(x-2)=x^2$;
5) $(x-5)(2x-1)=2x^2$;
6) $(3x-2)(x-4)=3x^2$.

7.9 Спростіть вираз:

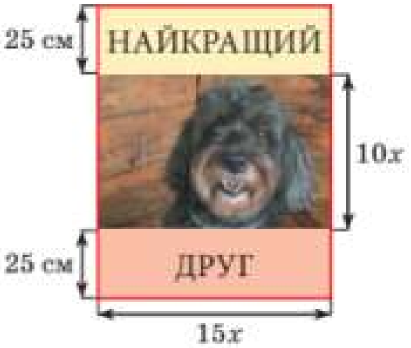
1) $(x+3)(x+1)(x+9)$;
2) $(x+1)(x+2)(x+8)$;
3) $(x-1)(x+4)(x-7)$;
4) $(x-2)(x+5)(x-3)$;
5) $(x+3y)(x-2)(y+1)$;
6) $(2x+y)(x-4)(y+3)$.

MATH FOR LIFE



7.10 ***Рукоділля.*** Довжина рушника разом із китицями у 5 разів більша за ширину.

1) Запишіть вираз для обчислення площі полотна для вишивання (без китиць), якщо довжина китиць становить 5 см. Відповідь подайте у вигляді многочлена стандартного вигляду.
2) Визначте зазначену площу, якщо $x=20$ см.



7.11 ***Маркетинг.*** Для виготовлення рекламного постера треба замовити аркуш картону певного розміру. Потім — збільшити в x разів фотографію розміром 10 см на 15 см і розмістити її на картоні, як показано на рисунку.

1) Запишіть вирази для знаходження:
   а) розмірів аркуша;
   б) площі аркуша.
2) Знайдіть площу аркуша картону, якщо $x=10$.
3) Скільки коштуватиме аркуш, якщо ціна за 1 квадратний метр картону становить 100 г. о., а фотографію треба збільшити в 10 разів?

7.12 ***Школа чарівництва.*** На уроці числомагії учні Гогвартса мають визначити вік трьох відомих чаклунів. Відомо, що їх вік виражається трьома послідовними числами, а квадрат віку молодшого на 299 менше, ніж добуток віку двох інших. Допоможіть учням розв'язати задачу.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

7.13 Використайте табличний спосіб множення многочленів і знайдіть значення невідомих виразів:

1)

	$-7a$	4
a	$-7a^2$	?
-2	?	?

2)

	$3b$	-5
?	$-12b^2$	$20b$
-1	?	5

3)

	?	-9
$-6c$	$6c^2$	$54c$
?	$-8c$	-72

СЛІД ЗНАТИ!

- У результаті множення многочленів отримуємо многочлен.
- Якщо перший многочлен має m доданків, а другий — n доданків, то **до зведення подібних доданків** добуток многочленів містить $m \cdot n$ доданків.

7.14 Доведіть тотожності 1–2.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)=a^5-1$ $(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)=$ $=a(a^4+a^3+a^2+a+1)-1\cdot(a^4+a^3+a^2+a+1)=$ $=a^5+a^4+a^3+a^2+a-a^4-a^3-a^2-a-1=a^5-1$	2) $(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)=a^5+1$

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Спростіть вираз $a(3a-b)+ab$.

А	Б	В	Г
$3a$	$3a^2$	$3a+ab$	$3a^2+2ab$

2 Спростіть вираз $x^2(7+x^4)$.

А	Б	В	Г
$7x^2+x^6$	$7x^2+x^8$	$7x^2+x^4$	$7+x^6$

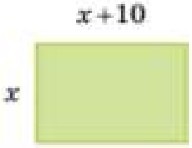
3 Виконайте множення: $(x+6)(x+1)$.

А	Б	В	Г
x^2+6	x^2+6x+6	x^2+x+6	x^2+7x+6

4 Спростіть вираз $x(x-y)+y(x+y)$.

А	Б	В	Г
$x+y$	$2x+2y$	x^2+y^2	$x-y$

5 На рисунку зображено план паркової зони, що має форму прямокутника. Визначте площу прямокутника.



А	Б	В	Г
$2x+10$	$4x+20$	x^2+10	x^2+10x

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) і тотожно рівним йому виразом (А–Г).

1	$2x(1-2x)$	А	$4x^2-2x$
2	$2x(2x+1)$	Б	$4x^2-2$
3	$x(4x-2)$	В	$4x^2+2x$
		Г	$2x-4x^2$

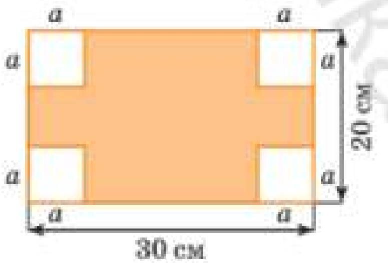
7 Доведіть тотожність $a(3a+5b-14)+a(14-5b)=3a^2$.

8 Розв'яжіть рівняння $(x-3)(4x-1)=4x^2$.

Проєкт макету підручника видавництва "Ранок"

Завдання 7.15 → Приклад 1
Завдання 7.16 → Приклад 2
Завдання 7.17 → Приклад 3
Завдання 7.18 → Практикум, 7.4
Завдання 7.19 → Приклад 4
Завдання 7.20 → Приклади 5, 6
Завдання 7.21 → Практикум, 7.8
Завдання 7.22 → Math for life, 7.12

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



З аркуша паперу потрібно зробити коробку висотою a, довжиною b і шириною c.

1) Запишіть вираз, за яким можна обчислити об'єм коробки $V = a \cdot b \cdot c$ (a — змінна). Подайте його у стандартному вигляді.
2) Знайдіть об'єми коробки для двох різних значень a і порівняйте результати.

BE SMART

Опанувати прості методи, які дозволяють блискавично виконувати обчислення — множення, ділення, додавання й віднімання чисел, операції з дробами, вам допоможе книга Білла Хендлі «Швидка математика: секрети усної лічби».

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

7.15 Виконайте множення:

1) $2(x^2+x+4)$;
2) $5x(x^2-6x+1)$;
3) $6x^2\left(x^3+\frac{1}{2}x^2-5\right)$;
4) $(3x^4-21x^3+9x-18)\cdot\frac{1}{3}x$.

7.16 Спростіть вираз:

1) $a(4a+b)-4a^2$;
2) $a(a-3b)+3(ab+1)$;
3) $7a(a^2-b)-b(5b+2a)$;
4) $3a(a-4ab)-2b(8b-6a^2)+9b^2$.

7.17 Розв'яжіть рівняння:

1) $5(x+1)+4(2-x)=0$;
2) $9x(x-6)-9x^2=108$;
3) $3x(x-2)+6x(-x+4)=72-3x^2$;
4) $7x(1-x)-5x(x-3)=4x(5-3x)+68$.

7.18 Спростіть вираз і знайдіть його значення, якщо $b=-0{,}1$:

1) $2{,}5b(4b-2)-5b$;
2) $\frac{6}{7}b\left(\frac{7}{2}b-\frac{7}{6}b^2+7\right)-b(3b-b^2)$.

7.19 Виконайте множення многочленів:

1) $(x+4)(x+1)$;
2) $(x+2)(x+5)$;
3) $(x-5)(x-6)$;
4) $(x-2)(x-7)$;
5) $(4x+1)(-x-2)$;
6) $(5x+1)(-x-3)$;
7) $(-x-9)(2-4x)$;
8) $(-x-6)(1-5x)$.

7.20 Виконайте множення:

1) $(x+3)(x^2+2)$;
2) $(5-x)(x^2+8)$;
3) $(-1-x)(x^2-9)$;
4) $(3x-7)(6-x^3)$;
5) $(3x-1)(2x+1)$;
6) $(2x-3)(-6x-1)$;
7) $(4x+5y)(3x+2y)$;
8) $(7x-8y)(2x-5y)$.

7.21 Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+4)(x+1)-x^2=0$;
2) $(x-6)(x+4)=x^2$;
3) $(x-3)(2x-4)=2x^2$;
4) $(5x-2)(-x-1)=x(3-5x)$.

7.22 Добуток двох послідовних чисел на 26 менший, ніж добуток наступних двох послідовних чисел. Знайдіть ці чотири числа.

7.23 Доведіть тотожність $(10a+b)(10a+c)=100a(a+1)+bc$, наведену в Актуальній задачі, якщо $b+c=10$.

Бонусне завдання

7.24 Доведіть тотожність
$(a+b+c)(a+b+c)=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$.

§ 8 РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ВИНЕСЕННЯ СПІЛЬНОГО МНОЖНИКА ЗА ДУЖКИ ТА СПОСОБОМ ГРУПУВАННЯ

ВЧОРА	Ви розкладали числа на прості множники, множили многочлени
СЬОГОДНІ	Ви навчитеся розкладати многочлени на множники різними способами
ЗАВЖДИ	Ви зможете перетворити складне завдання на декілька простіших і знайти їхні розв'язання

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ЗАМОВЛЕННЯ КОНТЕЙНЕРА

1. Пряма задача	2. Обернена задача
Для перевезення морозива замовили контейнер, висота, ширина і довжина якого дорівнюють x см, $(x+2)$ см і $(x+5)$ см відповідно. *Який об'єм морозива можна перевезти в контейнері таких розмірів? Відповідь запишіть у вигляді многочлена.*	Для перевезення морозива, об'єм якого становить (x^3+7x^2+10x) см³, треба замовити контейнер. *Якими мають бути довжина і ширина контейнера, якщо його висота дорівнює x см?*

$$V = a \cdot b \cdot x$$

Розв'язання задачі 1

Множимо одночлен і многочлени.

$$V = x(x+2)\cdot(x+5) = x(x^2+2x+5x+10) = x(x^2+7x+10) = x^3+7x^2+10x\ .$$

Відповідь: $V = x^3+7x^2+10x$ (см³).

Розв'язання задачі 2

Розкладаємо многочлен на множники.

Розглянемо розв'язання задачі 1 справа наліво.

$$V = x^3+7x^2+10x = x(x^2+7x+10) = x(\underbrace{x^2+2x}_{x^2+2x=x(x+2)}+\underbrace{5x+10}_{5x+10=5(x+2)}) = x(x+2)(x+5)\ .$$

Відповідь: розміри контейнера x см, $(x+2)$ см, $(x+5)$ см.

Для розв'язування багатьох задач і рівнянь необхідно вміти *розкладати многочлени на множники.*

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- спільний множник (*common factor*)
- винесення спільного множника (*removing a common factor*)
- розкладання на множники (*factorization*)
- спосіб групування (*grouping method*)

Для розкладання многочленів на множники застосовують:
- розкладання числа на прості множники;
- правило знаходження найбільшого спільного дільника (НСД);
- винесення спільного множника за дужки;
- зведення подібних членів;
- властивості додавання, множення, степенів.

ПРИГАДАЙТЕ!

Розкладання числа на прості множники

105	5
21	3
7	7
1	

$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

Знаходження найбільшого спільного дільника

1) Розкладаємо числа на *прості множники.*
2) Знаходимо *спільні множники.*
3) Знаходимо НСД — *добуток спільних множників.*

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;
$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
НСД $(60, 42, 54) = 2 \cdot 3 = 6$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

- Спільний числовий множник — це найбільший спільний дільник (НСД) коефіцієнтів усіх членів.
- Спільний буквений множник — це спільна змінна (або добуток змінних) з найменшим показником степеня.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Розкладання многочлена на множники — це тотожне перетворення многочлена в **добуток кількох множників.**
Кожний множник може бути як одночленом, так і многочленом.

Розглянемо деякі способи **розкладання многочленів на множники.**

Винесення спільного множника за дужки

Спосіб винесення спільного множника за дужки застосовують до многочленів, які МАЮТЬ спільний множник для ВСІХ членів многочлена.

Для знаходження *спільного множника* треба:

1. Розкласти кожний член многочлена на множники.
2. Визначити *спільні* множники.
3. Записати добуток спільних множників.

Наприклад, знайдемо спільні множники одночленів:
1) $12x^3$ і $42x^2$; 2) $-12a^2b^2$, $-30a^3b$ і $-42ab^3$.

1. Розкладаємо на множники	2. Визначаємо спільні множники	3. Записуємо добуток
1) $12x^3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x$ $42x^2 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot x \cdot x$	$2, 3, x, x$	$2 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 6x^2$
2) $-12a^2b^2 = -1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$ $-30a^3b = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b$ $-42ab^3 = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$	$-1, 2, 3, a, b$	$-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = -6ab$

РОЗМИНКА 1

1 Розкладіть на множники одночлен:

1) $8x^2$;
2) $45xy^2$;
3) $-36x^3y$;
4) $-11xy$;
5) x^2y^2z;
6) $-xyz^2$.

2 Знайдіть спільний множник:

1) $2a$ і $6a^2$;
2) $9b^3$ і $12b^2$;
3) $5ab^2$ і $7a^3b$;
4) $-14a^3$ і $-21b^3$;
5) $4x^3y$ і $11yx^2$;
6) $27xy^2$ і $45xy$;
7) $9x^3$, $12x^2$ і $4x$;
8) xy^3, yz^2 і x^2y^2z.

Алгоритм розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки

1. Визначити спільний множник усіх членів многочлена.
2. Записати кожний член многочлена у вигляді добутку двох множників, один із яких є спільним для всіх членів многочлена.
3. Записати многочлен як добуток спільного множника і відповідного многочлена (члени якого не містять спільних множників).

Наприклад, розкладемо на множники многочлен

$$26xy+12xy^2-22x^2yz.$$

$26xy$ $\qquad$ $12xy^2$ $\qquad$ $-22x^2yz$

1. $2\cdot 13\cdot x\cdot y$ $\qquad$ $2\cdot 2\cdot 3\cdot x\cdot y\cdot y$ $\qquad$ $-1\cdot 2\cdot 11\cdot x\cdot x\cdot y\cdot z$
2. $26xy=2xy\cdot 13$ $\qquad$ $12xy^2=2xy\cdot 6y$ $\qquad$ $-22x^2yz=2xy(-11xz)$
3. $26xy+12xy^2-22x^2yz=2xy(13+6y-11xz)$

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $8a^3-10a^2+2a=$
$=2a(4a-5a+a)$;

2) $-12a^3b^3-9a^2b+3ab^2=$
$=-3ab(9ab-3a+b)$.

ПРИКЛАД 1

Розкладіть на множники двочлен $2ab^4-4a^3b^2$.

Розв'язання:

$2ab^4=2\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b$	Розкладаємо на множники кожний член многочлена.
$4a^3b^2=2\cdot 2\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b$	
$2\cdot a\cdot b\cdot b=2ab^2$	Знаходимо їх спільний множник.
$2ab^4-4a^3b^2=$ $=2ab^2\cdot b^2-2ab^2\cdot 2a^2=$	Записуємо кожний одночлен у вигляді добутку двох множників, один із яких є спільним для всіх членів многочлена.
$=2ab^2(b^2-2a^2)$	Виносимо спільний множник за дужки.

Відповідь: $2ab^4-4a^3b^2=2ab^2(b^2-2a^2)$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Правильність розкладання многочлена на множники можна перевірити множенням.

Наприклад:

$2ab^2(b^2-2a^2)=$

$=2ab^2\cdot b^2-2ab^2\cdot 2a^2=$

$=2ab^4-4a^3b^2$

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Розкладіть на множники многочлен:

1) a^2-a; 3) a^4+a^3b; 5) $7a^4b-a^2b^2$; 7) $12a^4b+4a^2b^4$;
2) $a+a^3$; 4) a^4-a^2b; 6) $a^3b^4+11a^2b^5$; 8) $5a^5b^2-10a^2b^4$.

Спільний множник, який можна винести за дужки при розкладанні виразу на множники, може бути не лише одночленом, але й многочленом, який містить два та більше доданків.

РОЗМИНКА 2

Укажіть спільний множник виразів:

1) $4(x+1)+2(x+1)$; 3) $x(5x-y)-2(y-5x)$.
2) $4(2x+3y)-y(3y+2x)$;

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Запишіть невідомий вираз.

АЛГЕБРА	$96a^5b^7c^3$
БРАУНІ	$72a^9b^4c^3$
БРА	?

ПРИКЛАД 2

Запишіть у вигляді добутку $3(2x-3)-b(2x-3)+2b(3-2x)$.

Розв'язання:

$3(2x-3)-b(2x-3)+2b(3-2x)=$ …… Подаємо: $3-2x=-(2x-3)$.

$=3(2x-3)-b(2x-3)-2b(2x-3)=$ …… Визначаємо спільний множник $2x-3$.

$=(2x-3)(3-b-2b)=(2x-3)(3-3b)=$ …… Виносимо $2x-3$ за дужки, зводимо подібні доданки.

$=(2x-3)(3\cdot1-3\cdot b)=$ …… Визначаємо спільний множник 3 і виносимо

$=3(2x-3)(1-b)$ його за дужки.

Відповідь: $3(2x-3)(1-b)$.

$$ab+ac=a(b+c)$$
$$ab+ac+ad=a(b+c+d)$$
$$a-b=-(b-a)$$

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Запишіть у вигляді добутку вираз:

1) $a(x+1)+3(x+1)$;
2) $x(a+2)+4(a+2)$;
3) $6(a-4)-x(a-4)$;
4) $8(x-5)-a(x-5)$;
5) $a^2(3x+4)-10(4+3x)$;
6) $12(6+5a)-x^3(5a+6)$;
7) $y(x-4y)-2(x-4y)+8(4y-x)$;
8) $x(6x-y)-9(6x-y)+2(y-6x)$.

Розв'язування рівнянь

Розкладання многочленів на множники застосовують для **розв'язування рівнянь,** використовуючи правило рівності добутку нулю.

ДОСЛІДЖУЄМО!

1. Чи зможете ви розв'язати рівняння $x^3-2x-8x=0$?
2. Знайдіть добуток $x(x-4)(x+2)$.
3. Чи зможете ви розв'язати рівняння $x(x-4)(x+2)=0$? Застосуйте правило рівності добутку нулю.

$$x(x-4)(x+2)=0$$
$x=0$ або $x-4=0$ або $x+2=0$
$x=0$ $x=4$ $x=-2$

Відповідь: -2; 0; 4.

Правило рівності добутку нулю

Добуток декількох множників дорівнює нулю, якщо **хоча б один** із множників дорівнює нулю:

$a\cdot b\cdot c=0$, якщо $a=0$ або $b=0$, або $c=0$.

Алгоритм розв'язування рівнянь способом розкладання на множники

1. Перенести всі доданки в ліву частину рівняння.
2. Розкласти отриманий многочлен на множники.
3. Прирівняти кожний множник до нуля (застосувати *правило рівності добутку нулю*).
4. Розв'язати отримані рівняння.
5. Записати відповідь.

РОЗМИНКА 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-2)(x-3)=0$;
2) $(y+1)(y+4)=0$;
3) $x(x-5)=0$;
4) $(7-y)(7+y)=0$.

Підручник Продукція видавництва "Ранок"

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $2x^2-8x=0$.

Розв'язання:

$2x^2-8x=0$ .... Розкладемо ліву частину на множники.
$2x\cdot x-2x\cdot 4=0$ .... Визначаємо спільний множник.
$2x\cdot(x-4)=0$ .... Виносимо за дужки $2x$.
$2x=0$ або $x-4=0$ ... Застосовуємо правило рівності добутку
$x=0$ або $x=4$ нулю: $ab=0$, якщо $a=0$ або $b=0$.

Відповідь: 0; 4.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-2x=0$;
2) $x^2+3x=0$;
3) $6x^2+15x=0$;
4) $4x^2-6x=0$;
5) $(x+8)^2+2(x+8)=0$;
6) $(x+9)^2+3(x+9)=0$;
7) $(3x-7)^2-11(3x-7)=0$;
8) $(6x-1)^2-23(6x-1)=0$.

Спосіб групування

Спосіб групування застосовують до многочленів, які НЕ МАЮТЬ спільного множника для ВСІХ членів многочлена.

ДОСЛІДЖУЄМО!

Розгляньте розкладання многочлена на множники та дайте відповіді на запитання 1–3.

1	Чи існує спільний множник для всіх членів многочлена?	$3ab+6b+4a+8$
2	Чи мають згруповані доданки спільні множники?	$(3ab+2\cdot 3b)+(4a+4\cdot 2)$
3	Який спільний множник можна винести за дужки?	$3b(a+2)+4(a+2)$

Алгоритм розкладання многочлена на множники способом групування

1. Групуємо члени многочлена так, щоб доданки кожної групи мали спільний множник.
2. У кожній групі виносимо за дужки спільний множник у вигляді одночлена.
3. У кожній групі виносимо за дужки спільний множник у вигляді многочлена.

Спосіб 1

$$ax+ay+bx+by=(ax+ay)+(bx+by)=a(x+y)+b(x+y)=(a+b)(x+y)$$

Групуємо Спільні множники Спільний множник $(x+y)$

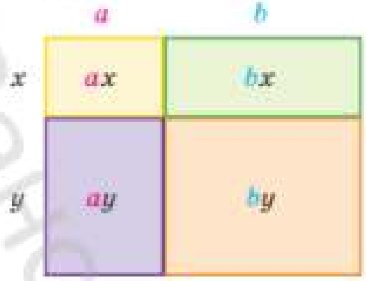
Спосіб 2

$$ax+ay+bx+by=(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b)=(x+y)(a+b)$$

Групуємо Спільні множники Спільний множник $(a+b)$

Геометрична ілюстрація

Два способи знаходження площі прямокутника



$(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by$

ПРИКЛАД 4

Запишіть у вигляді добутку многочлен $2xy+5y^2-6x-15y$.

Розв'язання:

$2xy+5y^2-6x-15y=$ .... Розкладемо кожний член на
$=2\cdot x\cdot y+5y\cdot y-2\cdot3\cdot x-3\cdot5y=$ множники, згрупуємо доданки.
$=(2\cdot x\cdot y-2\cdot3\cdot x)+(5y\cdot y-3\cdot5y)=$ ... Виносимо за дужки спільний
$=2x(y-3)+5y(y-3)=$ множник у кожному доданку.
$=(y-3)(2x+5y)$ .... Виносимо за дужки спільний множник $(y-3)$.

Відповідь: $(y-3)(2x+5y)$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

У виразі $3a-4a+7$ розставте дужки так, щоб отримати вираз:

1) $-9a+21$;
2) $3a^2-17a-28$.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Запишіть у вигляді добутку многочлен:

1) $(x^2-6x)+2(x-6)$;
2) $(x^2+9x)-4(x+9)$;
3) $xy-x^2+5(y-x)$;
4) $xy+y^2+4(x+y)$;
5) $3x^2-x^2y+30-10y$;
6) $y^2-xy^2+12-12x$;
7) $3x^2-8y+2xy-12x$;
8) $4xy+15y-3y^2-20x$.

Для того щоб способом групування розкласти на множники многочлен, який містить непарне число доданків, його перетворюють на многочлен із парним числом доданків.

ДОСЛІДЖУЄМО!

Розгляньте запис многочленів у таблиці та знайдіть закономірність.

$a^2+7a+10=a^2+2a+5a+10$	$7=2+5$	$10=2\cdot5$
$b^2+2b-15=b^2+5b-3b-15$	$2=5+(-3)$	$-15=5\cdot(-3)$
$d^2-d-2=d^2-2d+1d-2$	$-1=-2+1$	$-2=(-2)\cdot1$

ПРИКЛАД 5

Розкладіть на множники многочлен a^2+5a+6.

Розв'язання:

$5a=2a+3a$ $6=2\cdot3$

Виносимо *спільні множники* за дужки в кожному доданку

$$a^2+5a+6=a^2+2a+3a+2\cdot3=(a^2+2a)+(3a+2\cdot3)=a(a+2)+3(a+2)=(a+2)(a+3)$$

Групуємо

Виносимо *спільний множник* за дужки

Відповідь: $a^2+5a+6=(a+2)(a+3)$.

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^2-a-4a+4$;
2) $a^2-2a-5a+10$;
3) $a^2-10a+5a-50$;
4) $a^2-4a+11a-44$;
5) $a^2-3a-18$;
6) $a^2+3a-28$;
7) a^2-3a-4;
8) a^2-5a-6.

Підручника видавництва "Ранок"

ПРАКТИКУМ

8.1 Винесіть спільний множник за дужки:

1) $2x^3+3x^2+5x$;
2) $4x^5-7x^3-3x^2$;
3) $3x^6-6x^4+12x^2$;
4) $4x^4+12x^2-8x$;
5) $-14x-21x^2-63x^6$;
6) $-27x+18x^5-45x^{10}$.

8.2 Розкладіть многочлен на множники:

1) $7a^3b+3ab^2$;
2) $9ab^2-5a^3b$;
3) $12a^3b^3-4ab^5$;
4) $2a^6b+18a^3b^4$;
5) $6ab^2-9a^2b+15ab$;
6) $4a^3b+20b^2a-8ab$.

8.3 Які вирази треба вписати в порожні комірки, щоб отримати правильну рівність?

1) $10ab^4-35b^2=\square\left(2ab^2-7\right)$;
2) $8ax-20ax^6=4ax\left(\square-\square\right)$;
3) $22xy^4+11y^2x^2=\square\left(2y^2-\square\right)$;
4) $36yx^4-12y^3x^3=\square\left(\square-y^2\right)$.

8.4 Розкладіть на множники вираз:

1) $10x(x-3)+20(x-3)$;
2) $16(x+4)+32x(x+4)$;
3) $3y(2x+1)-y(2x+1)$;
4) $y(3-4y)+6y(3-4y)$;
5) $(x-3y)(x+4)-(x-3y)(7-x)$;
6) $(3x-1)(x+y)-(x+y)(x+4)$.

8.5 Знайдіть спільний множник виразів і винесіть його за дужки:

1) $a(x-5)+b(5-x)$;
2) $c(y-7)-d(7-y)$;
3) $2a(x-1)+3(1-x)$;
4) $4(2-y)-3b(y-2)$;
5) $c(2x-7y)+(7y-2x)$;
6) $(4x-3y)-(3y-4x)$.

8.6 Подайте степінь у вигляді добутку й розкладіть вираз на множники:

1) $2(a+b)+(a+b)^2$;
2) $(c+d)^2-3(c+d)$;
3) $3(a+b)^2+2a(a+b)$;
4) $5(c+d)^2-4d(c+d)$;
5) $(a+b)^3-b(a+b)^2$;
6) $(a-b)^3+a(a-b)^2$.

8.7 Розв'яжіть рівняння:

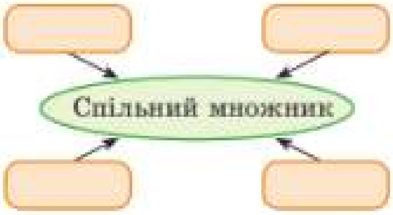
1) $(x-5)(x-7)=0$;
2) $(y+4)(y+1)=0$;
3) $x(6-x)=0$;
4) $(7+y)y=0$;
5) $(2x-8)(3x+9)=0$;
6) $(15-3y)(10+2y)=0$.

8.8 Розв'яжіть рівняння:

1) $3x(x+2)-30(x+2)=0$;
2) $7x(x-5)-14(x-5)=0$;
3) $4x(x-3)+12(3-x)=0$;
4) $6x(4-x)+24(x-4)=0$;
5) $x+10-2x(x+10)=0$;
6) $2x(x-6)+x-6=0$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

1. Запишіть одночлен, який містить числовий коефіцієнт і різні степені двох змінних a і b.
2. Обміняйтесь записами.
3. Запишіть по 4 вирази, для яких заданий одночлен є спільним множником.



$$(a-b)=-(b-a)$$
$$-(a-b)=-a+b=b-a$$

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$$
$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)$$
$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$$
$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2$$

Пілотний проект майбутнього видавництва "Ранок"

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Ви навчилися розкладати многочлени на множники й розв'язувати рівняння за допомогою цього способу. Отже, вам стане в нагоді наслідок з основної теореми алгебри: многочлен n-го степеня має n коренів. Ця тема була об'єктом вивчення багатьох математиків, зокрема А. Жирара, Р. Декарта, К. Маклорена, Л. Ейлера, Ж. Д'Аламбера, К. Гаусса тощо.
Дізнайтеся, хто першим надав повне доведення вказаного твердження.

8.9 Розкладіть многочлен на множники способом групування:

1) $a^3+4a^2+4a+16$;
2) $a^2-ab-3a+3b$;
3) $12ax-6bx+2ay-by$;
4) $10ay-4by-5a+2b$;
5) $7ay-3by-7ax+3bx$;
6) $5ax-8by-8ay+5bx$.

8.10 Запишіть у вигляді добутку многочлен:

1) $4xy^2-2xy+y^2(2y-1)$;
2) $x^3(4-3x)+4x^2-3x^3$;
3) $10xy+y^2-10x-y$;
4) $11x^3+11xy-x^2-y$;
5) $3x^2+5xy-6x-10y$;
6) $2xy+7y^2-6x-21y$.

8.11 Розкладіть вираз на множники та знайдіть його значення:

1) $8x-y^2+y-8xy$, якщо $x=0{,}1$, $y=0{,}2$;
2) $x^2-3xy+2x-6y$, якщо $x=0{,}9$, $y=0{,}3$;
3) $x^3+6x^2y-xy-6y^2$, якщо $x=-2$, $y=4$;
4) $x^3-4x^2y+xy-4y^2$, якщо $x=3$, $y=-10$.

8.12 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-7x+5x-35=0$;
2) $x^2+8x-4x-32=0$;
3) $x^3-9x-x^2-9=0$;
4) $x^2-16+x^3-16x=0$;
5) $x^2-x-2=0$;
6) $x^2+x-6=0$.

MATH FOR LIFE

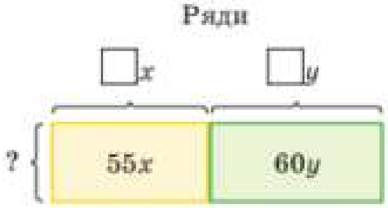
Номінації,
кількість учасників / учасниць:

- діти віком 5–7 років — $24a$;
- діти віком 7–13 років — $72b$;
- підлітки віком 14–16 років — $32c$;
- молодь віком 17–18 років — $16d$.

$\boxed{?}\cdot(\dots a+\cdots b+\cdots c+\cdots d)$

8.13 ***Конкурс.*** У конкурсі української пісні за чотирма номінаціями взяла участь певна кількість учасників.

1) На яку найбільшу кількість однакових груп можна розподілити всіх учасників шоу так, щоб представники кожної номінації розподілились по групах порівну?
2) Скільки всього учасників буде в кожній групі? Запишіть відповідь у вигляді многочлена.
3) Знайдіть значення цього многочлена, якщо $a=7$, $b=3$, $c=5$, $d=11$.



8.14 ***Громадянська активність.*** До Дня української писемності та мови колективи двох шкіл запланували провести святкову ходу колоною з однаковою кількістю учасників у кожному ряду за умови залучення всіх учасників. Від першої школи мало бути $55x$ учасників, від другої — $60y$.

1) Скільки учасників має бути в кожному ряду колони?
2) Скільки рядів утвориться з учасників кожної школи?
3) Скільки всього рядів буде в колоні, якщо $x=5$, $y=3$?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

8.15 Розкладіть на множники многочлен:

1) $2x^2y-3x+4xy^2+yx+2y^2-6y$;

2) $6x-xy-2y+3xy^2+x^2-9x^2y$.

8.16 Подайте у вигляді добутку вирази 1–4.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $4^n+4^{2n}=4^n+\left(4^n\right)^2=1\cdot 4^n+4^n\cdot 4^n=4^n\left(1+4^n\right)$; 2) $a^{n+1}-a^n=a^n\cdot a-a^n=a^n\cdot a-1\cdot a^n=a^n(a-1)$	3) $3^{2n}-3^{3n}$; 4) $2^{n+2}+4^{n+3}$

ПРИГАДАЙТЕ!

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$

8.17 Доведіть, що значення виразу:

1) 17^5+17^4 ділиться націло на 18;

2) 25^7-5^{13} ділиться націло на 20.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Перетворіть вираз c^5+c.

А	Б	В	Г
c^6	$c\left(c^5+1\right)$	$c\left(c^4+c\right)$	$c\left(c^4+1\right)$

2 Запишіть у вигляді добутку вираз $x(y-4)+3(y-4)$.

А	Б	В	Г
$3x(y-4)$	$(y-4)(x+3)$	$(y-4)(x-3)$	$(x-4)(y+3)$

3 Розкладіть многочлен $2a^2+6ab$ на множники.

А	Б	В	Г
$a(a+6b)$	$2(a+3b)$	$2a(a+3b)$	$2a^2(1+3b)$

4 Розкладіть на множники многочлен $\left(a^2-17a\right)-5(a-17)$.

А	Б	В	Г
$5a(a-17)$	$-4(a-17)$	$(a-17)(a+5)$	$(a-17)(a-5)$

5 У першому містечку m будиночків, кожен із яких розрахований на a місць. У другому містечку n будиночків, кожен із яких розрахований на a місць. Скільки всього внутрішньо переміщених осіб проживають у цих двох містечках, якщо всі будиночки зайняті?

А	Б	В	Г
$a(m+n)$	amn	$a+m+n$	$a+mn$

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) і тотожно рівним йому виразом (А–Г).

1	a^2+5a	А	$a(5a+1)$
2	$5a^2+5a$	Б	$5a(a+5)$
		В	$a(a+5)$
3	$5a^2+a$	Г	$5a(a+1)$

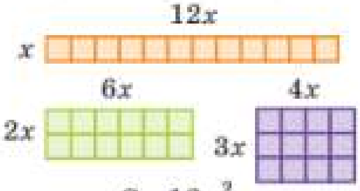
7 Розв'яжіть рівняння $9x^2+63x=0$.

8 Запишіть у вигляді добутку многочлен $a^2-3ab+4a-12ab$. Знайдіть його значення, якщо $a=-4$, $b=57$.

Завдання 8.18 → Розминка 1
Завдання 8.19 → Приклад 1
Завдання 8.20 → Приклад 2
Завдання 8.21 → Приклад 3
Завдання 8.22 → Приклад 4
Завдання 8.23 → Приклад 5
Завдання 8.24 → Актуальна задача
Завдання 8.25 → Math for life, 8.13

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Вам треба створити з квадратних мотивів прямокутне полотно площею $24y^2$ см². За підказкою намалюйте можливі схеми розміщення мотивів. Визначте загальну довжину швів у кожному випадку.



$S = 12x^2$

BE SMART

Розкладання многочленів на множники використовується в цифровому шифруванні інформації.
Щоб обмінюватися секретами з друзями, ви можете кожній букві присвоїти певний номер, помножити його на заздалегідь обумовлений «ключ» і скласти повідомлення. Щоб розшифрувати його, достатньо поділити кожне число на секретний «ключ».

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

8.18 Знайдіть спільний множник виразів:

1) $5xy$ і $10y$; 3) $3x^4y$ і $9yx^6$; 5) $15x^5$, $20x^3$ і $4x$;
2) $6x$ і $2xy$; 4) $18xy$ і $72xy^3$; 6) xy^5, y^2z^4 і x^4y^3z.

8.19 Розкладіть на множники многочлен:

1) $3ab-9b$; 3) $a-a^2$; 5) $13a^2b^5-a^3b^4$;
2) $8a+4ab$; 4) a^4+a^2b; 6) $6a^5b^2+12a^3b^4$.

8.20 Запишіть у вигляді добутку вираз:

1) $a(x+3)+2(x+3)$; 4) $y(x-6y)-5(6y-x)$;
2) $7(a-5)-x(a-5)$; 5) $x(5x-y)-7(5x-y)+3(y-5x)$;
3) $a^3(1-9x)-13(9x-1)$; 6) $xy(2y-x+6)-a^2(6+2y-x)$.

8.21 Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^2-4x=0$; 3) $4x^2-10x=0$; 5) $12(x-5)+(x-5)^2=0$;
2) $x^2+x=0$; 4) $6x+18x^2=0$; 6) $(3x-2)^2-19(3x-2)=0$.

8.22 Запишіть у вигляді добутку многочлен:

1) $(x^2-7x)+3(x-7)$; 4) $x^2-10x+6x-60$;
2) $xy-y^2+8(x-y)$; 5) $5x^2-x^2y+20-4y$;
3) $y^2-5y-5+y$; 6) $5xy+8y-4y^2-10x$.

8.23 Розкладіть на множники вираз:

1) $a^2+13a-4a-52$; 2) $a^2+7a-2a-14$; 3) a^2-6a+5.

8.24 Фундамент будинку має форму прямокутника, його площу можна виразити формулою $(25x^2-30x)$ м². Знайдіть довжину фундаменту, якщо його ширина дорівнює $5x$ м.

8.25 Маючи стрічки різної довжини: $30x$ м жовтого кольору, $42y$ м синього та $66z$ м білого, ви збираєтесь нарізати їх на шматочки однакової довжини для виготовлення «фенечок».

1) Якою має бути найбільша довжина такого шматочка, щоб усі стрічки були використані без остачі?
2) Скільки буде шматочків кожного кольору, якщо $x=5$, $y=3$, $z=2$?

Бонусне завдання

8.26 Розкладіть на множники вираз: 1) $b^{4n}+b^{6n}$; 2) $b^{n+1}-b^{n+4}$.

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 6–8

1 Ви дізналися про многочлени.

Многочленом називають *суму* кількох одночленів.

Доданки, із яких складається многочлен, називають **членами многочлена**. Одночлен вважають окремим випадком многочлена.

Многочлен стандартного вигляду — многочлен, усі члени якого є одночленами стандартного вигляду, серед яких немає подібних членів.

Степінь многочлена стандартного вигляду — найбільший зі степенів одночленів, із яких він складається.

2 Ви дізналися, що многочлени можна додавати й віднімати, множити на одночлен та на многочлен, підносити до степеня, та познайомилися з алго-ритмами та правилами виконання цих дій.

Сума та різниця будь-яких многочленів є многочленом.

У результаті множення одночлена на многочлен або многочлена на многочлен отримуємо **многочлен**.

3 Ви навчилися розкладати многочлени на множники двома способами.

Розкладання многочлена на множники — це тотожне перетворення многочлена в **добуток кількох множників**. Кожний множник може бути як одночленом, так і многочленом.

Способи розкладання многочленів на множники:

- спосіб винесення спільного множника за дужки;
- спосіб групування.

Варіант 2 контрольної роботи в електронному додатку

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3*

ВАРІАНТ 1

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Розкладіть на множники вираз ab^2+2ab.

А	Б	В	Г
$ab(b+2)$	$b(ab+2)$	$ab(a+2)$	$a(b^2+2)$

2 Виконайте множення: $(x-4)(x+5)$.

А	Б	В	Г
x^2-20	x^2-x-20	x^2+x-20	x^2+20

3 Зведіть подібні члени многочлена $-5m^3n^2+m^3n^2$.

А	Б	В	Г
$-5m^9n^4$	-5	$-5m^6n^4$	$-4m^3n^2$

4 Виконайте множення: $a^2(2-a^6)$.

А	Б	В	Г
$2a^2-a^{12}$	$2a^2-a^8$	$2-a^8$	$2-a^{12}$

5 Спростіть вираз $x(x+9y)-9y(x-y)$.

А	Б	В	Г
x^2+9	x^2+9y^2	x^2-9y^2	x^2-9

6 У першій майстерні відремонтувала m пікапів, кожен із яких може перевезти a кг вантажу. У другій майстерні відремонтувала n пікапів, кожен із яких також може перевезти a кг вантажу. Скільки всього кілограмів вантажу можуть перевезти всі пікапи, відремонтовані двома майстернями?

А	Б	В	Г
$a+m+n$	amn	$a(m+n)$	$a+mn$

7 Доведіть тотожність $b(3a+b-9)+3b(3-a)=b^2$.

8 Розв'яжіть рівняння $5x-x^2+15-3x=0$, розклавши його ліву частину на множники.

9 Спростіть вираз

$$14b^2+8a^2-7ab-(14b^2-8ab-300a+8a^2),$$

подайте його як многочлен стандартного вигляду. Знайдіть значення многочлена, якщо $a=0{,}5$, $b=4$.

10 Запишіть у вигляді добутку многочлен $a^2-2ab+7a-14b$. Знайдіть його значення, якщо $a=93$, $b=45$.

Бонусне завдання

Доведіть, що вираз a^6-2a^3+1 набуває невід'ємних значень при будь-якому значенні a.

---

* Ця контрольна робота призначена для проведення лише в тих класах, для яких навчальне навантаження курсу алгебри складає 3 або 4 години на тиждень.

§9 ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ. КВАДРАТ ДВОЧЛЕНА

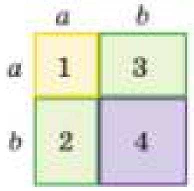
ВЧОРА	Ви множили многочлени різними способами
СЬОГОДНІ	Ви навчитеся виконувати скорочене множення двочленів за допомогою спеціальних формул — формул квадрата двочлена
ЗАВЖДИ	Ви зможете заощадити свій час, виконуючи обчислення раціональним способом

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

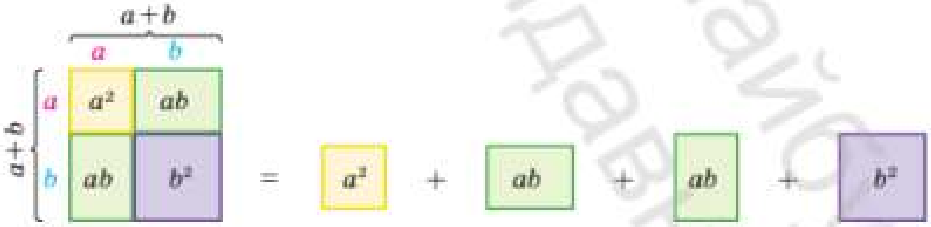
РЕАБІЛІТАЦІЙНИЙ ЦЕНТР

Роздивіться план реабілітаційного центру.

1) Запишіть вираз для знаходження площі тренажерного залу; кожного спортивного майданчика; басейну?
2) Запишіть двома способами вираз для знаходження площі всього реабілітаційного центру.



1 — тренажери;
2, 3 — спортивні майданчики;
4 — басейн.



$$(a+b)(a+b) = a^2 + \underbrace{ab + ab}_{2ab} + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Перевірте свої міркування, розглянувши геометричне доведення тотожності $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, яке запропонував давньогрецький філософ Евклід у III ст. до нашої ери.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Перетворення квадрата двочлена у многочлен

Для спрощення множення двох однакових двочленів застосовують спеціальні формули — *формули квадрата двочлена.*

ДОСЛІДЖУЄМО!

Розгляньте множення двочленів. Що є спільним і чим відрізняються отримані формули?

Квадрат суми $(a+b)^2$	Квадрат різниці $(a-b)^2$	
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$	Записуємо квадрат двочлена у вигляді добутку.
$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 =$	$(a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 =$	Виконуємо множення.
$= a^2 + 2ab + b^2$	$= a^2 - 2ab + b^2$	Зводимо подібні доданки.
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Записуємо формулу квадрата двочлена.

Підручник Проект майбутнього видавництво "Ранок"

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- двочлен (*binomial*)
- квадрат суми (*square of a sum*)
- квадрат різниці (*square of a difference*)

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого виразу на другий вираз плюс квадрат другого виразу.

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого виразу на другий вираз плюс квадрат другого виразу.

Формула квадрата суми **двох виразів**	**Формула** квадрата різниці **двох виразів**
квадрат першого виразу; квадрат другого виразу $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ квадрат суми; подвоєний добуток першого виразу на другий	квадрат першого виразу; квадрат другого виразу $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ квадрат різниці; подвоєний добуток першого виразу на другий
Наприклад: $(x+5)^2=x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2=x^2+10x+25.$	*Наприклад:* $(7-y)^2=7^2-2\cdot 7\cdot y+y^2=49-14y+y^2.$

СЛІД ЗНАТИ!

Формули квадрата двочлена — це **формули скороченого множення**.

За допомогою формул квадрата двочлена можна одразу, без виконання множення, записати тричлен. Тому ці формули називають *формулами скороченого множення*.

Формули скороченого множення в деяких випадках застосовують для спрощення обчислень.

Наприклад:

$$61^2=(60+1)^2=60^2+2\cdot 60\cdot 1+1^2=3600+120+1=3721;$$

$$59^2=(60-1)^2=60^2-2\cdot 60\cdot 1+1^2=3600-120+1=3481.$$

ПРИГАДАЙТЕ!

Читаємо правильно

Квадрат суми $(a+b)^2$

↑

Квадрат двочлена

↓

Квадрат різниці $(a-b)^2$

РОЗМИНКА 1

1 Виконайте піднесення до квадрата:

1) 5^2; 3) $\left(\frac{1}{6}\right)^2$; 5) $(2x)^2$; 7) $\left(\frac{2}{3}x\right)^2$;

2) $(-7)^2$; 4) $\left(-\frac{1}{8}\right)^2$; 6) $(-3y)^2$; 8) $\left(-\frac{4}{5}y\right)^2$.

2 Подайте вираз у вигляді тричлена за допомогою відповідної формули:

1) $(2+a)^2$; 3) $(c+d)^2$; 5) $(x+1)^2$;

2) $(b-3)^2$; 4) $(k-n)^2$; 6) $(1-y)^2$.

Видавництво "Ранок"

За допомогою формул квадрата двочлена можна підносити до квадрата суму чисел, змінних, виразів зі змінними.

ПРИКЛАД 1

Перетворіть квадрат двочлена у тричлен: $(4x-3y)^2$.

Розв'язання:

$$\left(\underbrace{4x}_{a}-\underbrace{3y}_{b}\right)^2=\underbrace{(4x)^2}_{a^2}-\underbrace{2\cdot 4x\cdot 3y}_{2ab}+\underbrace{(3y)^2}_{b^2}=16x^2-24xy+9y^2.$$

Відповідь: $16x^2-24xy+9y^2$.

Застосовуємо формулу квадрата різниці:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Перетворіть квадрат двочлена у многочлен:

1) $(1+x)^2$; 3) $(3x-y)^2$; 5) $(5x-2y)^2$; 7) $\left(2x+\frac{1}{4}y\right)^2$;

2) $(x+2)^2$; 4) $(x-4y)^2$; 6) $(4x+3y)^2$; 8) $\left(\frac{1}{3}x-6y\right)^2$.

Квадратом двочлена є **тричлен**:

$(a+b)^2\neq a^2+b^2$;

$(a-b)^2\neq a^2-b^2$.

РОЗМИНКА 2

Виконайте піднесення до квадрата:

1) $(a^3)^2$; 3) $(5a^5)^2$; 5) $\left(\frac{1}{2}a^7\right)^2$;

2) $(-b^2)^2$; 4) $(-7b^4)^2$; 6) $\left(-\frac{1}{3}b^8\right)^2$.

ПРИКЛАД 2

Піднесіть вираз до квадрата: $\left(3m^4+\frac{1}{2}n^5\right)^2$.

Розв'язання:

$$\left(\underbrace{3m^4}_{a}+\underbrace{\frac{1}{2}n^5}_{b}\right)^2=\underbrace{(3m^4)^2}_{a^2}+\underbrace{2\cdot 3m^4\cdot\frac{1}{2}n^5}_{2ab}+\underbrace{\left(\frac{1}{2}n^5\right)^2}_{b^2}=9m^8+3m^4n^5+\frac{1}{4}n^{10}.$$

Відповідь: $9m^8+3m^4n^5+\frac{1}{4}n^{10}$.

Застосовуємо формулу квадрата суми

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

і формули

$$(ab)^n=a^nb^n,$$

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Піднесіть вираз до квадрата:

1) $(2+n^3)^2$; 4) $(m^5-n^2)^2$; 7) $\left(\frac{1}{2}n^7-4m^3\right)^2$;

2) $(n^2+3)^2$; 5) $(2n^3+m^5)^2$; 8) $\left(\frac{1}{3}n^8-6m^4\right)^2$.

3) $(m^2-n^4)^2$; 6) $(3n^4+m^6)^2$;

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ДОСЛІДЖУЄМО!

Перевірте доведення тотожностей:

1) $(-a-b)^2=(a+b)^2$;

2) $(b-a)^2=(a-b)^2$.

Доведення:

1) $(-a-b)^2=(-(a+b))^2=$
$=(-1)^2(a+b)^2=(a+b)^2$;

2) $(b-a)^2=b^2-2ba+a^2=$
$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

РОЗМИНКА 3

Укажіть, які з наведених виразів є тотожно рівними:

1) $(b+a)^2$; 2) $-(a-b)^2$; 3) $(-a-b)^2$; 4) $-(b-a)^2$.

ПРИКЛАД 3

Спростіть вираз $2(x-3y)^2+(-x-3y)^2-(3y-x)^2$.

Розв'язання:

$2(x-3y)^2+(-x-3y)^2-(3y-x)^2=$ ...... Подаємо: $(-x-3y)^2=(x+3y)^2$
$=2(x-3y)^2-(x-3y)^2+(x+3y)^2=$ і $(3y-x)^2=(x-3y)^2$.
$=2(x-3y)^2-(x-3y)^2+(x+3y)^2=$ ...... Зведемо подібні члени.
$=(x-3y)^2+(x+3y)^2=$ ...... Використовуємо формули
$=x^2-6xy+9y^2+x^2+6xy+9y^2=$ квадрата двочлена.
$=x^2-6xy+9y^2+x^2+6xy+9y^2=$ ...... Зведемо подібні члени.
$=2x^2+18y^2$ ...... Записуємо відповідь.

Відповідь: $2x^2+18y^2$.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Спростіть вираз:

1) $(x-14)^2-(14-x)^2$;
2) $(15-x)^2-(x-15)^2$;
3) $(-x-5)^2-5(2x+5)$;
4) $(-6-x)^2-12(x+3)$;
5) $4(x-2y)^2-3(2y-x)^2$;
6) $5(3x-y)^2-4(y-3x)^2$;
7) $7(5x-y)^2+(-5x-y)^2-8(y-5x)^2$;
8) $9(x-4y)^2+(-x-4y)^2-8(4y-x)^2$.

Розкладання многочлена на множники за допомогою формул квадрата двочлена

Формули квадрата двочлена зручно використовувати й у зворотному порядку (справа наліво) для розкладання многочленів на множники: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

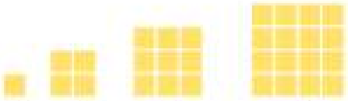
Алгоритм розкладання многочлена на множники

1. Визначити вирази, які було піднесено до квадрата (a^2 і b^2).
2. Перевірити, чи є в записі подвоєний добуток цих виразів $(2\cdot a\cdot b)$.
3. Записати відповідь за допомогою формул квадрата двочлена, враховуючи знак.

Наприклад:

$$\underset{(3x)^2}{\overset{a^2}{9x^2}}+\underset{2\cdot 3x\cdot 5}{\overset{2\cdot a\cdot b}{30x}}+\underset{5^2}{\overset{b^2}{25}}=(3x+5)^2;\quad \underset{(4x^2)^2}{\overset{a^2}{16x^4}}-\underset{2\cdot 4x^2\cdot 9y^3}{\overset{2\cdot a\cdot b}{72x^2y^3}}+\underset{(9y^3)^2}{\overset{b^2}{81y^6}}=(4x^2-9y^3)^2$$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



$1^2+2^2+3^2+4^2=?$

З давніх-давен відома формула для обчислення суми послідовних натуральних чисел:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Існує також формула для обчислення суми квадратів послідовних натуральних чисел:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

Із їх доведенням ви ознайомитесь у наступних класах.

РОЗМИНКА 4

1 Подайте вираз у вигляді подвоєного добутку двох виразів:

1) $10ab$; 2) $14cd$; 3) $-36cd$; 4) $26a^2b^3$; 5) $-8c^5d$.

2 Запишіть вираз у вигляді квадрата двочлена:

1) $x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2$; 2) $x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2$; 3) $x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Деякі вирази можна подати у вигляді подвоєного добутку різними способами. Наприклад:

$$72a^2b^3=$$
$$=2\cdot 36a^2\cdot b^3=$$
$$=2\cdot 4ab^2\cdot 9ab=$$
$$=2\cdot 18a\cdot 2ab^3=$$
$$=2\cdot 9a^2b\cdot 4b^2=$$
$$=2\cdot ab\cdot 36ab^2=\ldots$$

ПРИКЛАД 4

Перетворіть у квадрат двочлена вираз $m^4+6m^2n+9n^2$.

Розв'язання:

$6m^2n=2\cdot m^2\cdot 3n$

Застосовуємо формулу $a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2$

$$m^4+6m^2n+9n^2=\left(m^2\right)^2+2\cdot m^2\cdot 3n+(3n)^2=\left(m^2+3n\right)^2.$$

Відповідь: $\left(m^2+3n\right)^2$.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Перетворіть у квадрат двочлена вираз:

1) $x^2-2ax+a^2$;
2) $b^2+2by+y^2$;
3) $m^2+2m\cdot 2n+4n^2$;
4) $m^2-2m\cdot 3n+9n^2$;
5) $m^2-10mn+25n^2$;
6) $m^2+8mn+16n^2$;
7) $36m^2-12mn^2+n^4$;
8) $49m^2+14mn^3+n^6$.

РОЗМИНКА 5

Розв'яжіть рівняння:

1) $x-8=0$; 2) $(x-11)^2=0$; 3) $(x+16)^2=0$; 4) $(2x+18)^2=0$.

ПРИКЛАД 5

Розв'яжіть рівняння $4x^2-12x+9=0$, використовуючи формулу квадрата двочлена.

Розв'язання:

$4x^2-12x+9=0$ .... Перетворимо вираз у лівій частині
$(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2=0$ рівності у квадрат різниці.
$(2x-3)^2=0$ .... Якщо $a^2=0$, то $a=0$.
$2x-3=0$; $2x=3$; $x=1{,}5$. ... Розв'язуємо рівняння.

Відповідь: $x=1{,}5$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Якщо $a^2=0$, то $a=0$.

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Розв'яжіть рівняння:

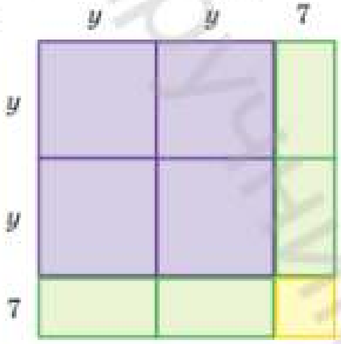
1) $x^2-2x+1=0$;
2) $x^2+4x+4=0$;
3) $x^2+6x+9=0$;
4) $x^2-8x+16=0$;
5) $x^2-10x+25=0$;
6) $x^2+12x+36=0$;
7) $9x^2+12x+4=0$;
8) $25x^2-20x+4=0$.

Підручник Проект майбутнього видавництва "Ранок"

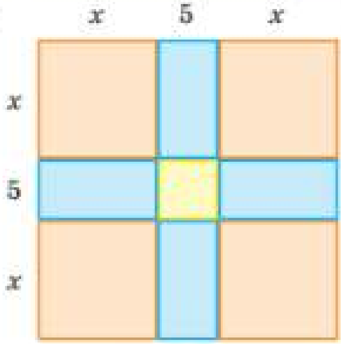
ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Запишіть двома способами вираз для знаходження загальної площі наведеної фігури.

1)



2)



Обміняйтесь записами. Перевірте правильність виконання завдання за допомогою формули квадрата суми.

СЛІД ЗНАТИ!

$$(-a-b)^2=(a+b)^2$$
$$(b-a)^2=(a-b)^2$$

ПРАКТИКУМ

9.1 Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $5(2-4x)^2$; 3) $-a(-a+4b)^2$; 5) $(2a-8)^2(a+1)$;
2) $4(3a+2)^2$; 4) $-b(a-6b)^2$; 6) $(1-b)(4+3b)^2$.

9.2 Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(9a+1)^2$; 3) $(0{,}3a^2-2b)^2$; 5) $(a^3b-4ab^2)^2$;
2) $(8a-1)^2$; 4) $(4a+0{,}2b^3)^2$; 6) $(3a^2b+ab^4)^2$.

9.3 Заповніть порожні комірки, щоб утворилась правильна рівність:

1) $(2x+y)^2=\square+4xy+y^2$;
2) $(x-3y)^2=x^2-6xy+\square$;
3) $(6a-\square)^2=36a^2-\square ab+16b^2$;
4) $(5a+2b)^2=\square+\square ab+4b^2$;
5) $(0{,}1x+10y)^2=\square x^2+\square+\square y^2$;
6) $(10x-0{,}2y)^2=\square x^2-\square+\square y^2$.

9.4 Спростіть вираз:

1) $(4x+2y)(4x+2y)-16xy$;
2) $(5x-3y)(5x-3y)+30xy$;
3) $(-2x-5y)^2+3(-4x-y)(4x+y)$;
4) $(-3x-2y)^2+4(-5x-y)(5x+y)$;
5) $(2x+7y)^2-(x+4y)(2y-x)$;
6) $(3x-y)(x+4y)-(3x-4y)^2$.

9.5 Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(x+60)^2-120x$, якщо $x=4$;
2) $(x-50)^2+100x$, якщо $x=3$;
3) $(x+y)^2-(x-y)^2$, якщо $x=3$, $y=\frac{1}{3}$;
4) $(x-y)^2-(x+y)^2$, якщо $x=7$, $y=\frac{1}{7}$;
5) $(x-5y)^2+x(10y-x)$, якщо $x=11$, $y=-1$;
6) $(3x-y)^2+y(6x-y)$, якщо $x=-1$, $y=12$.

Підручника Проєкт майбутнього видавництва "Ранок"

9.6 Користуючись формулою квадрата двочлена, обчисліть:

1) 101^2; 3) 99^2; 5) $5{,}2^2$;
2) 201^2; 4) 49^2; 6) $9{,}8^2$.

9.7 Перетворіть у квадрат двочлена вираз:

1) $x^4+2x^2y^2+y^4$; 5) $25x^6+30x^3y^4+9y^4$;
2) $x^6-2x^3y^3+y^6$; 6) $9x^4-30x^2y^6+25y^{12}$;
3) $4x^6-4x^3y^2+y^4$; 7) $36x^8-2\frac{2}{5}x^4y^9+\frac{1}{25}y^{18}$;
4) $x^4+4x^2y^3+4y^6$; 8) $16x^{14}+2\frac{2}{3}x^7y^5+\frac{1}{9}y^{10}$.

9.8 Обчисліть зручним способом:

1) $68^2+2\cdot68\cdot2+4$; 4) $75^2-2\cdot75\cdot5+25$;
2) $37^2+2\cdot37\cdot3+9$; 5) $99^2+2\cdot99+1$;
3) $54^2-2\cdot54\cdot6+36$; 6) $201^2-2\cdot201+1$.

9.9 Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена:

1) $-a^2-8a-16$; 4) $-36d^2+12d-1$;
2) $-b^2-2b-1$; 5) $-30ab-25a^2-9b^2$;
3) $-9+12c-4c^2$; 6) $-49c^2-1+14c$.

9.10 Спростіть вираз:

1) $(4-7a)(7a-4)+49a^2$; 4) $-(a-9)(9-a)+18a$;
2) $(6a-5)(5-6a)+36a^2$; 5) $\left(-a-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-a\right)-0{,}25$;
3) $(-8-a)(a+8)+16a$; 6) $\left(-\frac{1}{5}-a\right)\left(-a-\frac{1}{5}\right)-0{,}04$.

9.11 Доведіть, що при всіх значеннях змінної a вираз:

1) $a^2+14a+50$ набуває додатних значень;
2) $a^2-16a+70$ набуває додатних значень;
3) $-a^2+12a-37$ набуває від'ємних значень;
4) $-a^2+18a-85$ набуває від'ємних значень.

9.12 Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-3)^2-4x^2=0$; 4) $x(x+4)-(x-2)^2=0$;
2) $(2-3x)^2-9x^2=0$; 5) $(x-5)^2=2x-11$;
3) $(x+4)^2-x(x-8)=0$; 6) $(8+x)^2=x+17$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$2\frac{2}{5}=\frac{12}{5}=\frac{2\cdot6}{5}=2\cdot6\cdot\frac{1}{5}$$

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$$(c+4)^2=c^2+16;$$
$$(3-b)^2=9-3b+b^2;$$
$$(-a-2)^2=-a^2-4a-4.$$

ПРИГАДАЙТЕ!

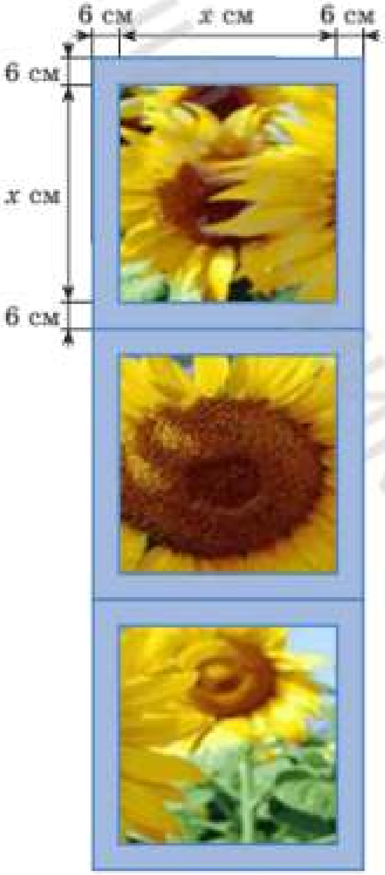
$$(a-b)=-(b-a)$$
$$(-a-b)(a+b)=-(a+b)^2$$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть невідомий вираз:

25	625
$11a^2b^3c$	$121a^4b^6c^2$
$3x^3-2y^2$	?

MATH FOR LIFE



9.13 ***Авіаційний музей.*** В авіаційному музеї літаки розставлені на полі рядами: усього $(m+7)$ рядів, по $(m+7)$ літаків у кожному ряду. Скільки всього літаків на полі?

9.14 ***Математична магія.*** Загадайте число.

1) Піднесіть це число до квадрата. Додайте число, удвічі більше за задумане. Додайте ще одиницю.
2) Запишіть число, квадрат якого дорівнює отриманій сумі.
3) Відніміть задумане число. Ви отримали 1?
4) Позначте задумане число через a. Запишіть у вигляді виразу результат перетворень кроку 1. Квадратом якого двочлена є отриманий вираз?
5) Спробуйте пояснити фокус.

9.15 ***Дизайн.*** На рисунку зображено схему розміщення трьох картин на виставці. Сторона кожної картини становить x см, а ширина рами 6 см. Яку загальну площу займатиме композиція? Відповідь подайте у вигляді многочлена.

9.16 ***Геометрія.*** Площа квадрата дорівнює $(9x^2+24x+16)$ см². Знайдіть:

1) сторону квадрата; 2) периметр квадрата.

Запишіть відповідні вирази.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

9.17 Доведіть тотожності 1–2.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$. $(a-b+c)^2=((a-b)+c)^2=(a-b)^2+2(a-b)c+c^2=$ $=a^2-2ab+b^2+2ac-2bc+c^2$	2) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$$
$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2$$

ПРИГАДАЙТЕ!

$(a+b)^2\geqslant 0$; $(a-b)^2\geqslant 0$

9.18 Доведіть тотожність:

1) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$; 2) $(a-b)^3=a^3-b^3+3ab(b-a)$.

9.19 Доведіть, що вираз набуває невід'ємних значень при будь-якому значенні a:

1) a^2+2a+1;
2) a^2+4a+4;
3) a^2-6a+9;
4) $a^2-8a+16$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

9.20 Перетворіть у тричлен квадрат двочлена:

1) $(3+x)^2$; 2) $(2x-y)^2$; 3) $(3x+5y)^2$; 4) $\left(4x-\frac{1}{2}y\right)^2$.

9.21 Піднесіть вираз до квадрата:

1) $\left(1+n^3\right)^2$; 2) $\left(m^2-n^6\right)^2$; 3) $\left(5n^3+m^4\right)^2$; 4) $\left(\frac{1}{2}n^5-8m^7\right)^2$.

9.22 Спростіть вираз:

1) $(x-12)^2-(12-x)^2$; 3) $6(4x-y)^2-5(y-4x)^2$;

2) $(-7-x)^2-7(2x+7)$; 4) $3(x-6y)^2+(-x-6y)^2-4(6y-x)^2$.

9.23 Користуючись формулою квадрата двочлена, обчисліть:

1) 51^2; 2) 1001^2; 3) 199^2; 4) 999^2; 5) $10{,}1^2$; 6) $9{,}9^2$.

9.24 Перетворіть у квадрат двочлена вираз:

1) $x^2+2bx+b^2$; 3) $m^2+12mn+36n^2$;

2) $m^2-2m\cdot 4n+16n^2$; 4) $9m^2-6mn^3+n^6$.

9.25 Запишіть у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $-x^4+2x^2y^2-y^4$; 3) $-25x^{12}+30x^6y^3-9y^6$;

2) $-x^6-6x^3y^2-9y^4$; 4) $-9x^{16}-1\frac{1}{2}x^8y^7-\frac{1}{16}y^{14}$.

9.26 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+2x+1=0$; 3) $x^2+10x+25=0$;

2) $x^2-6x+9=0$; 4) $16x^2-24x+9=0$.

9.27 Загадайте число. Піднесіть його до квадрата. Відніміть від результату число, удвічі більше за задумане. Додайте одиницю. Запишіть число, квадрат якого дорівнює отриманій сумі. Відніміть задумане число. Ви отримали −1. Поясніть фокус за допомогою формули квадрата різниці.

9.28 Периметр квадрата дорівнює $(8y-20)$ см. Знайдіть:

1) сторону квадрата; 2) площу квадрата.

Запишіть відповідні вирази.

Бонусне завдання

9.29 Поміркуйте, чи має корені рівняння:

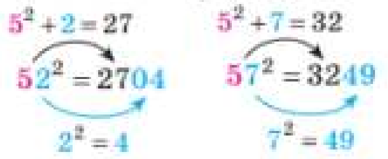
1) $x^2-10x+26=0$; 2) $x^2+14x+51=0$.

Завдання 9.20 → Приклад 1
Завдання 9.21 → Приклад 2
Завдання 9.22 → Приклад 3
Завдання 9.23 → Практикум, 9.6
Завдання 9.24 → Приклад 4
Завдання 9.25 → Практикум, 9.7
Завдання 9.26 → Приклад 5
Завдання 9.27, 9.28 → Math for life, 9.14, 9.16

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Формула квадрата суми стане вам у нагоді при усному обчисленні квадратів двозначних чисел, що мають 5 десятків.

1. Розгляньте приклади:



Цей спосіб множення базується на тотожності

$$(50+a)^2=100\cdot(25+a)+a^2.$$

2. Доведіть цю тотожність.

BE SMART

Вам потрібно розсадити за столом 4 представників декількох команд так, щоб гравці однієї команди не сиділи поруч одне з одним. Скільки варіантів такої розсадки існує? Відповідь дає многочлен

$$x(x-1)^2+x(x-1)(x-2)^2,$$

де x — кількість команд.

Знайдіть кількість варіантів розсадки гравців 2 команд; 3 команд.

§10 ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ. РІЗНИЦЯ КВАДРАТІВ

ВЧОРА	Ви використовували формули квадрата суми та квадрата різниці
СЬОГОДНІ	Ви ознайомитеся зі ще однією формулою скороченого множення — формулою різниці квадратів — та дізнаєтесь нові секрети раціональних обчислень
ЗАВЖДИ	Ви зможете розповісти молодшим школярам про піфагорійців і показати цікаві математичні фокуси

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Давньогрецький філософ Піфагор помітив, що сума послідовних непарних чисел дорівнює квадрату певного числа:

$$1+3=2^2;$$
$$1+3+5=3^2;$$
$$1+3+5+7=4^2.$$

Із кожної такої тотожності можна отримати різницю квадратів:

$$2^2-1^2=3;$$
$$3^2-2^2=5;$$
$$4^2-3^2=7;$$
$$5^2-4^2=11.$$

Піфагор припустив, що кожне непарне число $(2n+1)$, крім одиниці, є різницею квадратів: $(n+1)^2-n^2=2n+1$.

Спробуйте довести тотожність Піфагора.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- добуток суми і різниці (*product of a sum and a difference*)
- різниця квадратів (*difference of two squares*)

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

УЧИТЕЛЬ-ЧАРІВНИК

1. Задумайте два одночлени з різними змінними або з різними степенями однієї змінної.	$\triangle$ і $\square$
2. Запишіть суму й різницю цих одночленів.	$(\triangle+\square)$ і $(\triangle-\square)$
3. Знайдіть добуток отриманих двочленів.	$(\triangle+\square)\cdot(\triangle-\square)$
4. Спростіть одержаний вираз.	$\triangle\cdot\triangle-\triangle\cdot\square+\triangle\cdot\square-\square\cdot\square$
5. Назвіть отриманий результат учителю.	$(\triangle)^2-(\square)^2$

Учитель назве одночлени, які ви задумали (за умови, що ви правильно виконали всі дії 🙂).

Опанувати цей фокус допоможе ще одна *формула скороченого множення* — **формула різниці квадратів**.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Знайдемо добуток різниці та суми двох виразів:

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2.$$

У такий спосіб отримали ще одну формулу скороченого множення:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Наприклад: $(x-3)(x+3)=x^2+3x-3x-3^2=x^2-3^2=x^2-9$. Отже, якщо у відповіді Актуальної задачі ви отримали вираз x^2-3^2, то були задумані одночлени x і 3.

Перетворення добутку різниці й суми двох виразів у многочлен

Добуток різниці й суми двох виразів дорівнює різниці квадратів цих виразів.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$\underbrace{(a-b)}_{\text{різниця двох виразів}}\underbrace{(a+b)}_{\text{сума двох виразів}}=\underbrace{a^2-b^2}_{\text{різниця квадратів виразів}}$$

РОЗМИНКА 1

Перетворіть наведені вирази за формулою $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

1) $(x-y)(x+y)$; 3) $(c-5)(c+5)$; 5) $(a-1)(1+a)$;

2) $(m+n)(m-n)$; 4) $(4-d)(4+d)$; 6) $(b+2)(2-b)$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a+b)(b-a)=b^2-a^2$$

ПРИКЛАД 1

Перетворіть у многочлен добуток:

1) $(0{,}2x-y)(0{,}2x+y)$; 2) $(5y+3x)(3x-5y)$.

Розв'язання:

1) $(0{,}2x-y)(0{,}2x+y)=\overset{a^2}{(0{,}2x)^2}-\overset{b^2}{y^2}=0{,}04x^2-y^2$;

2) $\overset{b+a=a+b}{(5y+3x)}(3x-5y)=(3x+5y)(3x-5y)=\overset{a^2}{(3x)^2}-\overset{b^2}{(5y)^2}=9x^2-25y^2$.

Відповідь: 1) $0{,}04x^2-y^2$; 2) $9x^2-25y^2$.

Застосовуємо формулу

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Перетворіть у многочлен добуток:

1) $(3x-y)(3x+y)$; 5) $(5x+6y)(5x-6y)$;

2) $(x-2y)(x+2y)$; 6) $(7x+3y)(7x-3y)$;

3) $(x-0{,}1y)(x+0{,}1y)$; 7) $(8y+0{,}6x)(0{,}6x-8y)$;

4) $(0{,}4x-y)(0{,}4x+y)$; 8) $(0{,}3y+9x)(9x-0{,}3y)$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $(a-1)(a+1)=a^2+1$;
2) $(x-5)(x+5)=x-25$;
3) $(0{,}1-a)(0{,}1+a)=0{,}2-a^2$;
4) $(x+0{,}2)(0{,}2-x)=x^2-0{,}04$.

ПРИКЛАД 2

Перетворіть добуток $((4x-y)+3)((4x-y)-3)$ у многочлен.

Розв'язання:

$$\overset{a+b}{((4x-y)+3)}\overset{a-b}{((4x-y)-3)}=\overset{a^2-b^2}{(4x-y)^2-3^2}=16x^2-8xy+y^2-9.$$

Відповідь: $16x^2-8xy+y^2-9$.

Застосовуємо формули

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Підручник-проект майбутнє видавництва "Ранок"

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Перетворіть у многочлен добуток:

1) $(10y-3)(10y+3)$;
2) $(20y+1)(20y-1)$;
3) $((y+n)-4)((y+n)+4)$;
4) $((y-n)+5)((y-n)-5)$;
5) $((2y-n)-5)((2y-n)+5)$;
6) $((3y+n)+4)((3y+n)-4)$;
7) $(7-(y-3n))(7+(y-3n))$;
8) $(6+(y+5n))(6-(y+5n))$.

ПРИКЛАД 3

Обчисліть раціональним способом значення виразу $10\frac{7}{9}\cdot 9\frac{2}{9}$.

Розв'язання:

$$10\frac{7}{9}\cdot 9\frac{2}{9}=\left(10+\frac{7}{9}\right)\cdot\left(9+\frac{2}{9}\right)=\left(10+\frac{7}{9}\right)\cdot\left(10-\frac{7}{9}\right)=10^2-\left(\frac{7}{9}\right)^2=100-\frac{49}{81}=99\frac{32}{81}.$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$\frac{7}{9}+\frac{2}{9}=1$, тому

$9+\frac{2}{9}=9+1-\frac{7}{9}=10-\frac{7}{9}$

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Обчисліть раціональним способом:

1) $(100+1)(100-1)$;
2) $(64+36)(64-36)$;
3) $(5+0{,}1)(5-0{,}1)$;
4) $\left(10+\frac{2}{5}\right)\left(10-\frac{2}{5}\right)$;
5) $1001\cdot 999$;
6) $83\cdot 117$;
7) $8{,}1\cdot 7{,}9$;
8) $9\frac{3}{7}\cdot 10\frac{4}{7}$.

Розкладання многочлена на множники. Різниця квадратів двох виразів

Формулу *добутку різниці й суми двох виразів* зручно використовувати й у зворотному порядку (справа наліво) для розкладання *різниці квадратів двох виразів* на множники.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Формула різниці квадратів

$$\underbrace{a^2-b^2}_{\text{різниця квадратів двох виразів}}=\underbrace{(a-b)}_{\text{різниця двох виразів}}\underbrace{(a+b)}_{\text{сума двох виразів}}$$

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на їх суму.

Формулу різниці квадратів двох виразів застосовують для спрощення обчислень, розв'язування рівнянь тощо.

Наприклад:

1) $61^2-51^2=(61\overset{\boxed{10}}{-}51)\cdot(61+51)=10\cdot 112=1120$;

2) $134^2-133^2=(134\overset{\boxed{1}}{-}133)\cdot(134+133)=1\cdot 267=267$;

3) $97^2-98^2=(97\overset{\boxed{-1}}{-}98)\cdot(97+98)=-1\cdot 195=-195$.

ДОСЛІДЖУЄМО!

1. Проаналізуйте наведені обчислення.
2. Виконайте обчислення, не застосовуючи формулу різниці квадратів двох виразів.
3. Зробіть висновки щодо раціональності способу виконання обчислень.

Алгоритм розкладання різниці квадратів двох виразів на множники

1. Записати кожний вираз (зменшуване і від'ємник) у вигляді квадрата.
2. Розкласти різницю квадратів на множники за допомогою формули $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

- Читати числовий вираз розпочинають із назви дії, яку виконують останньою.
- Слід розрізняти:

Різниця квадратів:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Квадрат різниці:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

РОЗМИНКА 2

1 Розкладіть на множники за формулою $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$:

1) 5^2-4^2; 4) 13^2-b^2; 7) $c^2-\frac{1}{16}$;

2) c^2-d^2; 5) $x^2-0{,}25$; 8) $\frac{1}{9}-d^2$.

3) a^2-12^2; 6) $1{,}21-y^2$;

2 Подайте у вигляді квадрата вираз:

1) $9a^2$; 3) $0{,}01c^{10}$; 5) $\frac{16}{25}a^4b^{12}$;

2) $64b^8$; 4) $1{,}21d^6$; 6) $2\frac{7}{9}c^2d^2$.

$$9a^2=(\ldots)^2$$

ПРИКЛАД 4

Розкладіть на множники многочлен $4q^2-\frac{25}{81}b^6$.

Розв'язання:

$$\overset{(2q)^2}{4q^2}-\overset{\left(\frac{5}{9}b^3\right)^2}{\frac{25}{81}b^6}=\overset{a^2}{(2q)^2}-\overset{b^2}{\left(\frac{5}{9}b^3\right)^2}=\left(2q-\frac{5}{9}b^3\right)\left(2q+\frac{5}{9}b^3\right).$$

Відповідь: $\left(2q-\frac{5}{9}b^3\right)\left(2q+\frac{5}{9}b^3\right)$.

Застосовуємо формулу

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2-(12t)^2$; 4) x^2-81t^2; 7) $\frac{36}{49}x^2-25t^{10}$;

2) $(13x)^2-t^2$; 5) $x^6-\frac{t^2}{16}$; 8) $100x^2-\frac{9}{4}t^2$.

3) $64x^2-t^2$; 6) $\frac{x^2}{9}-t^8$;

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть невідомий вираз:

120	$2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5$
$22a^2b^3c$	$2\cdot11\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\cdot c$
$(x-2)^2-x^2$	?

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ПРИКЛАД 5

Перетворіть у добуток многочлен $(2m-3)^2-16$.

Розв'язання:

$$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)} \quad \text{Розкриваємо дужки}$$

$$(2m-3)^2-16=(2m-3)^2-4^2=((2m-3)-4)((2m-3)+4)=(2m-7)(2m+1).$$

Відповідь: $(2m-7)(2m+1)$.

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Перетворіть у добуток многочлен:

1) $(n+15)^2-15^2$;
2) $(n-16)^2-16^2$;
3) $(n-7)^2-49$;
4) $(n+6)^2-36$;
5) $(n+11)^2-64$;
6) $(n-17)^2-81$;
7) $(3n-2)^2-16$;
8) $(2n+1)^2-9$.

ПРИКЛАД 6

Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники.

1) $x^2-0{,}16=0$;
2) $(2x-3)^2-9=0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$a\cdot b=0$,
якщо $a=0$ або $b=0$

Розв'язання:

Рівняння	1) $x^2-0{,}16=0$	2) $(2x-3)^2-9=0$
Розкладаємо ліву частину рівняння на множники	$(x-0{,}4)(x+0{,}4)=0$	$((2x-3)-3)((2x-3)+3)=0$; $(2x-6)\cdot 2x=0$
Користуємось правилом: $a\cdot b=0$, якщо $a=0$ або $b=0$	$x-0{,}4=0$ або $x+0{,}4=0$ $x=0{,}4$ $\quad$ $x=-0{,}4$	$2x-6=0$ або $2x=0$ $x=3$ $\quad$ $x=0$

Відповідь: 1) $x=-0{,}4$; $x=0{,}4$; 2) $x=0$; $x=3$.

ТРЕНУЄМОСЯ 6

Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники.

1) $x^2-64=0$;
2) $x^2-36=0$;
3) $x^2-0{,}25=0$;
4) $x^2-0{,}49=0$;
5) $(3x-6)^2-15^2=0$;
6) $(4x-1)^2-19^2=0$;
7) $121-(9-2x)^2=0$;
8) $100-(8-5x)^2=0$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Якщо рівняння має два різні корені, то відповідь можна записати так: $x_1=0$; $x_2=3$ або 0; 3.

Проєкт підручника майбутнього видавництва "Ранок"

ПРАКТИКУМ

10.1 Перетворіть у многочлен добуток:

1) $\left(x^2-y\right)\left(x^2+y\right)$;
2) $\left(x-y^3\right)\left(x+y^3\right)$;
3) $\left(2x-y^4\right)\left(2x+y^4\right)$;
4) $\left(x^5-3y\right)\left(x^5+3y\right)$;
5) $\left(4x^6+5y^5\right)\left(4x^6-5y^5\right)$;
6) $\left(7x^7+6y^7\right)\left(7x^7-6y^7\right)$.

10.2 Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)$;
2) $\left(\frac{2}{9}c-\frac{3}{5}d\right)\left(\frac{2}{9}c+\frac{3}{5}d\right)$;
3) $\left(x^7-\frac{y}{6}\right)\left(x^7+\frac{y}{6}\right)$;
4) $\left(\frac{x}{7}-y^6\right)\left(\frac{x}{7}+y^6\right)$.

10.3 Заповніть порожні комірки, щоб утворилась правильна рівність:

1) $(3a-7b)(3a+7b)=9a^2-\square$;
2) $(7a-5b)(7a+5b)=\square-25b^2$;
3) $(0{,}1a-0{,}3b)\left(0{,}1a+\square\right)=\square-0{,}09b^2$;
4) $\left(\frac{2}{7}a-\frac{3}{4}b\right)\left(\frac{2}{7}a+\frac{3}{4}b\right)=\square a^2-\frac{9}{16}\square$.

10.4 Обчисліть значення виразу:

1) $(90-36)(90+36)+36^2$;
2) $(80+24)(80-24)+24^2$;
3) $157\cdot243+43^2$;
4) $246\cdot354+54^2$;
5) $1{,}75\cdot2{,}25+0{,}25^2$;
6) $0{,}86\cdot1{,}14+0{,}14^2$.

10.5 Спростіть вираз:

1) $(m-3)(m+3)+3^2$;
2) $(m-4)(m+4)+4^2$;
3) $(m+5)(m-5)+(m+5)^2$;
4) $(m+2)(m-2)+(m+2)^2$;
5) $(-m-6)(6-m)-(m-6)^2$;
6) $(-m-7)(m-7)-(m-7)^2$.

10.6 Спростіть вираз:

1) $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$;
2) $(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)$;
3) $(x+5y)(x-5y)\left(x^2+25y^2\right)$;
4) $(4x+y)(4x-y)\left(16x^2+y^2\right)$;
5) $\left(x^2-3y\right)\left(x^2+3y\right)\left(9y^2+x^4\right)$;
6) $\left(2x-y^3\right)\left(2x+y^3\right)\left(y^6+4x^2\right)$.

10.7 Розв'яжіть рівняння:

1) $(7x-1)(7x+1)+x=49x^2$;
2) $(3+8x)(8x-3)+x=64x^2$;
3) $(4x-5)(4x+5)-15=x(16x+4)$;
4) $6x(9-6x)-29=(5-6x)(6x+5)$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

1. Обчисліть за допомогою калькулятора значення виразу $29\cdot30\cdot31$. Обчисліть усно значення виразу 30^3-30. Порівняйте результати.
2. Доведіть тотожність $(x-1)\cdot x\cdot(x+1)=x^3-x$.

Для того щоб помножити три послідовних натуральних числа, треба:

- піднести до куба середнє число;
- відняти від отриманого добутку середнє число.

3. Користуючись цим правилом, обчисліть добутки:
   1) $7\cdot8\cdot9$;
   2) $19\cdot20\cdot21$;
   3) $99\cdot100\cdot101$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$-a-b=-(a+b);$$
$$a+b=b+a;$$
$$-(a-b)=b-a.$$

Наприклад:

$$(-x-5)(5-x)=$$
$$=-(x+5)(5-x)=$$
$$=-(5+x)(5-x)=$$
$$=-\left(25-x^2\right)=x^2-25$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Формулу різниці квадратів двох виразів використовуємо двічі.

10.8 Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(3a-5b)(3a+5b)-(3a-5b)^2+50b^2$, якщо $a=0{,}02$, $b=100$;
2) $(10a+b)^2-(b-10a)(b+10a)-200a^2$, якщо $a=0{,}1$, $b=200$.

10.9 Розкладіть на множники многочлен:

1) $121a^2-49$;
2) $169-36b^2$;
3) $0{,}16a^2-0{,}25b^2$;
4) $0{,}64b^2-0{,}81a^2$;
5) $\frac{9}{25}a^4-\frac{49}{289}b^6$;
6) $\frac{4}{81}b^8-\frac{36}{225}a^6$.

10.10 Знайдіть значення виразу:

1) 225^2-125^2;
2) 786^2-214^2;
3) $\frac{29^2-19^2}{10}$;
4) $\frac{38^2-18^2}{56}$;
5) $\frac{84^2-60^2}{98^2-46^2}$;
6) $\frac{74^2-42^2}{86^2-54^2}$.

10.11 Перетворіть у добуток вираз:

1) $y^2-(0{,}1x+y)^2$;
2) $(x-0{,}2y)^2-x^2$;
3) $(3x+y)^2-9x^2$;
4) $4y^2-(x-2y)^2$;
5) $\left(6x^2-3y\right)^2-\left(6x^2+3y\right)^2$;
6) $\left(8x+5y^2\right)^2-\left(8x-5y^2\right)^2$.

10.12 Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+19)^2=21^2$;
2) $23^2-(x-17)^2=0$;
3) $\left(x^2+2x+1\right)-100=0$;
4) $81-\left(x^2-2x+1\right)=0$.

BE SMART

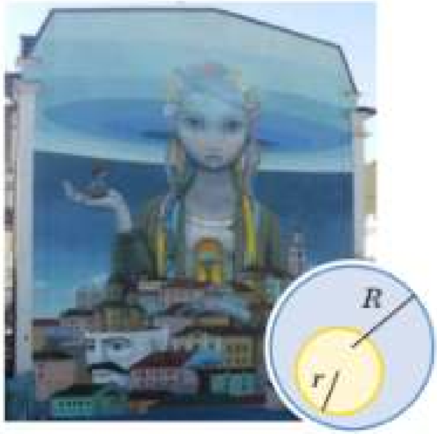
У 1643 р. французький математик П'єр Ферма запропонував алгоритм факторизації (розкладання на множники) непарного цілого числа n. Цей метод дозволяє знайти цілі числа x і y, які задовольняють тотожність $x^2-y^2=n$, тобто $n=(x-y)(x+y)$. Зараз алгоритми факторизації застосовуються для шифрування даних (криптографії та криптоаналізу).

MATH FOR LIFE

10.13 ***Поштові сови Гогвартсу.*** Квадрат віку поштової сови Ероли менше, ніж квадрат віку сови Гедвіги, на 101 рік. Скільки років Ероли, якщо Гедвіга старша за неї на 1 рік?

10.14 ***Створення муралу.*** Елемент муралу складається з двох кругів (див. рисунок). Радіус R більшого круга на 2 м більший за радіус r меншого круга.

1) Запишіть вираз для обчислення площі фігури блакитного кольору.
2) Розкладіть отриманий вираз на множники.
3) Знайдіть значення цього виразу, якщо радіус меншого круга дорівнює 4 м.
4) Визначте, скільки балончиків блакитної фарби знадобиться, якщо одного балончика вистачає на фарбування 1 м² стіни?



Підручник. Проєкт майбутнього видавництва "Ранок"

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

10.15 Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

1) $(2n+7)^2-(1+2n)^2$ ділиться націло на 6;

2) $(4n-8)^2-(n-2)^2$ ділиться націло на 15.

ПОМІРКУЙТЕ

Для змінних x і y справедлива рівність $x^2-y^2=72$. Якім числам можуть дорівнювати сума й різниця цих змінних? Запишіть можливі варіанти.

10.16 Розв'яжіть рівняння 1–3.

Аналізуємо	Виконуємо
1) $x^8-256=0$. $x^8-256=(x^4)^2-16^2=(x^4-16)(x^4+16)=\left((x^2)^2-4^2\right)(x^4+16)=$ $=(x^2-4)(x^2+4)(x^4+16)=(x^2-2^2)(x^2+4)(x^4+16)=(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$; $x^2+4>0$ $\quad$ $x^4+16>0$ $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)=0$; $(x-2)(x+2)=0$; $x=2$ або $x=-2$	2) $x^4-1=0$; 3) $x^4-625=0$.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 7

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Подайте у вигляді многочлена вираз $(x-p)^2$.

А	Б	В	Г
x^2-p^2	x^2+p^2	$x^2-2xp+p^2$	$x^2+2xp+p^2$

2 Перетворіть у квадрат двочлена вираз $q^2+2qn+n^2$.

А	Б	В	Г
$(q+n)^2$	$(q-n)^2$	$(qn)^2$	q^2+n^2

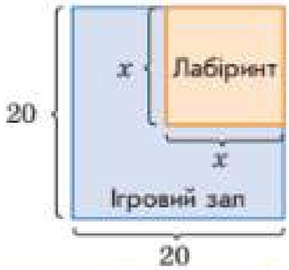
3 Перетворіть многочлен $16-n^2$ у добуток.

А	Б	В	Г
$(8-n)(8+n)$	$(4-n)(4+n)$	$(4-n)^2$	$(8-n)^2$

4 Перетворіть добуток $(a-5b)(a+5b)$ у многочлен.

А	Б	В	Г
a^2+25b^2	a^2+10b^2	a^2-10b^2	a^2-25b^2

5 Усередині квадратного ігрового залу розташований лабіринт (див. рисунок). Визначте площу ігрового залу без лабіринту.



А	Б	В	Г
$40-x^2$	$400+x^2$	$400-x^2$	$40-2x$

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) і тотожно рівним йому виразом (А–Г).

1	a^2-4a+4	А	$(a-2)^2$
		Б	$(2a-1)^2$
2	a^2+4a+4	В	$(2a+1)^2$
3	$4a^2+4a+1$	Г	$(a+2)^2$

7 Перетворіть у многочлен вираз:

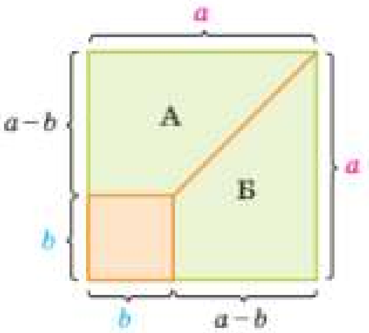
1) $(5n+m^3)^2$; $\qquad$ 2) $(7n-m^4)(7n+m^4)$.

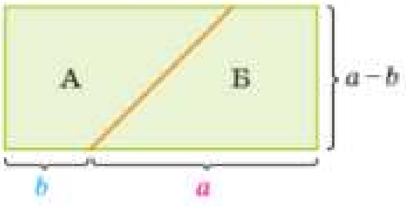
8 Розв'яжіть рівняння $81-(1-2x)^2=0$.

Завдання 10.17 → Приклад 1
Завдання 10.18 → Практикум, 10.1
Завдання 10.19 → Приклад 2
Завдання 10.20 → Приклад 3
Завдання 10.21 → Практикум, 10.5
Завдання 10.22 → Приклад 4
Завдання 10.23 → Приклад 5
Завдання 10.24 → Приклад 6
Завдання 10.25 → Актуальна задача
Завдання 10.26 → Math for life, 10.14

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

1. Виріжте з паперу квадрат зі стороною a (a — число на ваш вибір).
2. Із цього квадрата виріжте квадрат зі стороною b, де $b < a$ (див. рисунок).
3. Розріжте отриману фігуру по діагоналі.
4. Складіть фігури А і Б, як показано на рисунках.
5. Запишіть вирази, за якими можна знайти площу зафарбованої фігури $(\text{А}+\text{Б})$ на обох рисунках.





ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

10.17 Перетворіть у многочлен добуток:

1) $(4x-y)(4x+y)$;
2) $(x-0,3y)(x+0,3y)$;
3) $(2x+5y)(2x-5y)$;
4) $(7y+0,1x)(0,1x-7y)$.

10.18 Перетворіть у многочлен добуток:

1) $\left(x^3-y\right)\left(x^3+y\right)$;
2) $\left(3x-y^2\right)\left(3x+y^2\right)$;
3) $\left(x^5-\frac{y}{4}\right)\left(x^5+\frac{y}{4}\right)$;
4) $\left(\frac{x^4}{5}-0,3y^6\right)\left(\frac{x^4}{5}+0,3y^6\right)$.

10.19 Перетворіть у многочлен добуток:

1) $(10y-1)(10y+1)$;
2) $((y+n)-3)((y+n)+3)$;
3) $((3y-n)+5)((3y-n)-5)$;
4) $(8-(y-4n))(8+(y-4n))$.

10.20 Обчисліть раціональним способом:

1) $101\cdot 99$; 2) $85\cdot 115$; 3) $9,1\cdot 8,9$; 4) $9\frac{1}{5}\cdot 10\frac{4}{5}$.

10.21 Спростіть вираз:

1) $(m-2)(m+2)+2^2$;
2) $(m+3)(m-3)+(m+3)^2$;
3) $(-m-5)(m-5)-(m-5)^2$;
4) $\left(-\frac{m}{2}-4\right)\left(4-\frac{m}{2}\right)-(0,5m-4)^2$.

10.22 Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2-(14t)^2$; 2) $49x^2-t^2$; 3) $x^4-\frac{t^2}{25}$; 4) $\frac{4}{81}x^2-36t^{14}$.

10.23 Перетворіть у добуток многочлен:

1) $(n+12)^2-12^2$;
2) $(n-5)^2-25$;
3) $(n+13)^2-100$;
4) $(5n-1)^2-4$.

10.24 Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $x^2-25=0$;
2) $x^2-0,09=0$;
3) $(5x-3)^2-43^2=0$;
4) $144-(2-4x)^2=0$.

10.25 Покажіть фокус, описаний в Актуальній задачі, своїм батькам або друзям.

10.26 Виконайте завдання 10.14 за умови, що радіус r меншого кола на 4 м менший, ніж радіус R більшого кола.

Бонусне завдання

10.27 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^8-1=0$; 2) $x^4=81$; 3) $2x^4-32=0$.

§11 ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ. СУМА ТА РІЗНИЦЯ КУБІВ

ВЧОРА	Ви використовували формулу різниці квадратів
СЬОГОДНІ	Ви ознайомитеся ще з двома формулами скороченого множення — формулами суми й різниці кубів
ЗАВЖДИ	Ви зможете створити проєкт свого особистого будинку в стилі мінімалізму

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

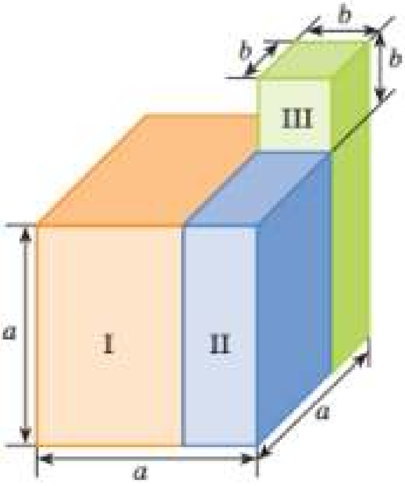
АРХІТЕКТУРНИЙ ПРОЄКТ

За проєктом, поданим на рисунку, планується побудувати музей математичних відкриттів. Об'єм будівлі, що складається з трьох секцій, можна обчислити двома способами.

Спосіб 1: $V = a^3 + b^3$. Спосіб 2: $V = V_{\text{I}} + V_{\text{II}} + V_{\text{III}}$.

1. Запишіть вирази для знаходження об'ємів кожної секції; об'єму всієї будівлі як суми об'ємів трьох секцій.

2. Перетворіть вираз для знаходження об'єму всієї будівлі в добуток.



Розв'язання:

1. $\boxed{V_{\text{I}} = a \cdot a \cdot (a-b)}$; $\boxed{V_{\text{II}} = a \cdot b \cdot (a-b)}$; $\boxed{V_{\text{III}} = b \cdot b \cdot (a+b)}$.

2. $V = a^3 + b^3 = \underbrace{a \cdot a \cdot (a-b) + a \cdot b \cdot (a-b)}_{} + b \cdot b \cdot (a+b) =$

$= a(a-b)(a+b) + b^2(a+b) =$ … Групуємо доданки, виносимо спільний множник $a(a-b)$ за дужки.

$= (a+b)\left(a(a-b) + b^2\right) =$ …… Виносимо спільний множник $(a+b)$ за дужки.

$= (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ …… Спрощуємо вираз.

Ми отримали нову формулу скороченого множення — **формулу суми кубів:** $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Перетворення добутку двох виразів у многочлен

Перетворимо добутки $(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$ і $(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$ у многочлени:

$$(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 - \underline{\underline{a^2b}} + \underline{ab^2} + \underline{\underline{ba^2}} - \underline{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3;$$

$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 + \underline{\underline{a^2b}} + \underline{ab^2} - \underline{\underline{ba^2}} - \underline{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3.$$

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- сума кубів (*sum of two cubes*)
- різниця кубів (*difference of two cubes*)

Підручник у проєкті майбутнього видавництва "Ранок"

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Квадрат суми:

$(a+b)^2=a^2+\boxed{2ab}+b^2.$

Неповний квадрат суми:

$(a+b)^2\neq a^2+\boxed{ab}+b^2.$

Квадрат різниці:

$(a-b)^2=a^2-\boxed{2ab}+b^2.$

Неповний квадрат різниці:

$(a-b)^2\neq a^2-\boxed{ab}+b^2$

Формула суми кубів	**Формула різниці кубів**
$\underbrace{(a+b)}_{\text{сума двох виразів}}\underbrace{(a^2-ab+b^2)}_{\text{неповний квадрат різниці двох виразів}}=\underbrace{a^3+b^3}_{\text{сума кубів двох виразів}}$	$\underbrace{(a-b)}_{\text{різниця двох виразів}}\underbrace{(a^2+ab+b^2)}_{\text{неповний квадрат суми двох виразів}}=\underbrace{a^3-b^3}_{\text{різниця кубів двох виразів}}$
Добуток суми двох виразів і неповного квадрата їх різниці дорівнює сумі кубів цих виразів.	Добуток різниці двох виразів і неповного квадрата їх суми дорівнює різниці кубів цих виразів.

Наприклад, перевіримо, чи можна перетворити добуток виразів у многочлен за допомогою формули різниці кубів.

1) Перевіряємо, чи є перший доданок квадратом першого виразу; другий — добутком першого і другого виразів; третій — квадратом другого виразу.

$25x^2=(5x)^2$ $\quad 30xy=5x\cdot 6y$ $\quad 36y^2=(6y)^2$

$$(5x-6y)(25x^2+30xy+36y^2)=(5x)^3-(6y)^3=125x^3-216y^3$$

2) Перевіряємо знаки: $(\ldots-\ldots)(\ldots+\ldots+\ldots)=(\ldots)^3-(\ldots)^3.$

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3+y^3;$
2) $(x+4)(x^2+4x+16)=x^3+64;$
3) $(p+q)(p^2-2pq+q^2)=p^3+q^3;$
4) $(a-3)(a^2+6a+9)=a^3-27;$
5) $(a+5)(a^2-5a+25)=a^3+5.$

РОЗМИНКА 1

Перетворіть вирази за формулами суми або різниці кубів.

1) $(m+n)(m^2-mn+n^2);$
2) $(m+1)(m^2-m+1);$
3) $(n+0{,}2)(n^2-0{,}2n+0{,}04);$
4) $(x-y)(x^2+xy+y^2);$
5) $(x-1)(x^2+x+1);$
6) $(y-1{,}5)(y^2+1{,}5y+1{,}25).$

ПРИКЛАД 1

Подайте у вигляді многочлена добуток:

1) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2);$ 2) $(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2).$

Розв'язання:

1) Використовуємо формулу $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$

$$(x+2y)(x^2-\overset{x\cdot 2y}{2xy}+\overset{(2y)^2}{4y^2})=(x+2y)(x^2-x\cdot 2y+(2y)^2)=\overset{a^3}{x^3}+\overset{b^3}{(2y)^3}=x^3+8y^3.$$

2) Використовуємо формулу $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$

$$(3x-4y)(\overset{(3x)^2}{9x^2}+\overset{3x\cdot 4y}{12xy}+\overset{(4y)^2}{16y^2})=(3x-4y)((3x)^2+3x\cdot 4y+(4y)^2)=\overset{a^3}{(3x)^3}-\overset{b^3}{(4y)^3}=27x^3-64y^3.$$

Відповідь: 1) x^3+8y^3; 2) $27x^3-64y^3$.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Подайте у вигляді многочлена:

1) $(2x+y)\left((2x)^2-2x\cdot y+y^2\right)$;
3) $(x-5y)\left(x^2+5xy+25y^2\right)$;
2) $(x+3y)\left(x^2-x\cdot 3y+(3y)^2\right)$;
4) $(4x-y)\left(16x^2+4xy+y^2\right)$;
5) $(7x+2y)\left(49x^2-14xy+4y^2\right)$;
6) $(5x-6y)\left(25x^2+30xy+36y^2\right)$;
7) $\left(0{,}25x^2+50xy+100y^2\right)\left(\frac{1}{2}x-10y\right)$;
8) $\left(100x^2-2xy+0{,}04y^2\right)\left(10x+\frac{1}{5}y\right)$.

Розкладання многочленів на множники за допомогою формул суми та різниці кубів

Формули *суми* та *різниці кубів* зручно використовувати у зворотному порядку (справа наліво) для розкладання *суми* й *різниці кубів двох виразів* на множники, спрощення обчислень, розв'язування рівнянь тощо.

Запишемо та прочитаємо отримані формули скороченого множення справа наліво.

Сума кубів	Різниця кубів
$\underbrace{a^3+b^3}_{\text{сума кубів двох виразів}}=\underbrace{(a+b)}_{\text{сума двох виразів}}\underbrace{\left(a^2-ab+b^2\right)}_{\text{неповний квадрат різниці двох виразів}}$	$\underbrace{a^3-b^3}_{\text{різниця кубів двох виразів}}=\underbrace{(a-b)}_{\text{різниця двох виразів}}\underbrace{\left(a^2+ab+b^2\right)}_{\text{неповний квадрат суми двох виразів}}$

Читаємо правильно:

- сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів на неповний квадрат їх різниці: $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$;
- різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на неповний квадрат їх суми: $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Алгоритм розкладання суми (різниці) кубів двох виразів на множники

1. Записати кожний вираз у вигляді куба.
2. Розкласти суму (різницю) кубів на множники за допомогою формул:
$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ і $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Наприклад, розкладемо на множники многочлен $0{,}008x^3+729y^3$.

$0{,}008x^3=(0{,}2x)^3$

$729y^3=(9y)^3$

Сума виразів

Неповний квадрат різниці

$$\underbrace{0{,}008x^3+729y^3=(0{,}2x)^3+(9y)^3}_{\text{Записуємо кожний вираз у вигляді куба}}=(0{,}2x+9y)\left(\underbrace{(0{,}2x)^2-0{,}2x\cdot 9y+(9y)^2}_{\text{Спрощуємо}}\right)=$$

$$=(0{,}2x+9y)\left(0{,}04x^2-1{,}8xy+81y^2\right).$$

$27a^3=(\ldots)^3$

! СЛІД ЗНАТИ!

$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

РОЗМИНКА 2

1 Подайте у вигляді куба вираз:

1) $27a^3$; 2) $-0{,}001c^9$; 3) $\frac{8}{125}a^3b^{15}$; 4) $-\frac{216}{343}c^3d^3$.

2 Розкладіть вираз на множники:

1) x^3+6^3; 3) $x^3+\frac{1}{64}$; 5) 11^3-b^3; 7) $-y^3+125$;

2) $512+b^3$; 4) $\frac{1}{27}+q^3$; 6) $-x^3+343$; 8) $0{,}064-q^3$.

ПРИКЛАД 2

Розкладіть на множники многочлен $0{,}001x^3+1000y^3$.

Розв'язання:

$(0{,}1x)^3$ $(10y)^3$ $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$

$$0{,}001x^3+1000y^3=(0{,}1x+10y)\left((0{,}1x)^2-0{,}1x\cdot10y+(10y)^2\right)=$$

$$=(0{,}1x+10y)\left(0{,}01x^2-xy+100y^2\right).$$

Відповідь: $(0{,}1x+10y)\left(0{,}01x^2-xy+100y^2\right)$.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Розкладіть на множники многочлен:

1) $(9x)^3-y^3$; 4) x^3+125y^3; 7) $343x^3+0{,}001y^3$;

2) $x^3-(8y)^3$; 5) $x^3-\frac{1}{8}y^3$; 8) $0{,}008x^3+216y^3$.

3) $64x^3+y^3$; 6) $\frac{1}{27}x^3-y^3$;

ПРИКЛАД 3

Обчисліть $\frac{20^3-11^3}{9}$.

Розв'язання:

$$\frac{20^3-11^3}{9}=\frac{(20-11)\left(20^2+20\cdot11+11^2\right)}{9}=\frac{9\cdot(400+220+121)}{9}=\frac{9\cdot741}{9}=741.$$

Відповідь: 741.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Обчисліть:

1) $\frac{31^3-21^3}{31^2+31\cdot21+21^2}$; 3) $\frac{17^3+13^3}{17^2-221+13^2}$; 5) $\frac{81+63+49}{9^3-7^3}$;

2) $\frac{35^3-24^3}{35^2+35\cdot24+24^2}$; 4) $\frac{12^3+15^3}{12^2-180+15^2}$; 6) $\frac{81+72+64}{9^3-8^3}$.

ПРАКТИКУМ

11.1 Запишіть у вигляді многочлена добуток:

1) $\left(x^2-3\right)\left(x^4+3x^2+9\right)$;
3) $\left(y^7-x\right)\left(y^{14}+y^7x+x^2\right)$;
2) $\left(2+x^3\right)\left(4-2x^3+x^6\right)$;
4) $\left(y+x^5\right)\left(y^2-yx^5+x^{10}\right)$;
5) $\left(0{,}3x^3+10y^2\right)\left(0{,}09x^6-3x^3y^2+100y^4\right)$;
6) $\left(20y^4-0{,}2x^6\right)\left(400y^8+4y^4x^6+0{,}04x^{12}\right)$.

11.2 Які вирази треба вписати в порожні комірки, щоб отримати правильну рівність?

1) $\left(a+\frac{1}{4}b\right)\left(a^2-\frac{1}{4}ab+\frac{1}{16}b^2\right)=a^3+\square b^3$;
2) $\left(\frac{1}{5}a-b\right)\left(\frac{1}{25}a^2+\frac{1}{5}ab+b^2\right)=\square a^3-b^3$;
3) $(8x-2y)\left(64x^2+16xy+8y^2\right)=512x^3-\square$;
4) $(3x+6y)\left(9x^2-18xy+36y^2\right)=\square-216y^3$;
5) $\left(0{,}2a-\square\right)\left(0{,}04a^2+0{,}02ab+0{,}01b^2\right)=\square-0{,}001b^3$;
6) $\left(\square+0{,}7b\right)\left(0{,}09a^2-0{,}21ab+0{,}49b^2\right)=0{,}027a^3-\square$.

11.3 Спростіть вираз:

1) $(2+m)\left(4-2m+m^2\right)-m^3$;
3) $(3-m)\left(m^2+3m+9\right)+m^3+13$;
2) $(m-1)\left(m^2+m+1\right)-m^3$;
4) $(m+4)\left(16-4m+m^2\right)-m^3-14$.

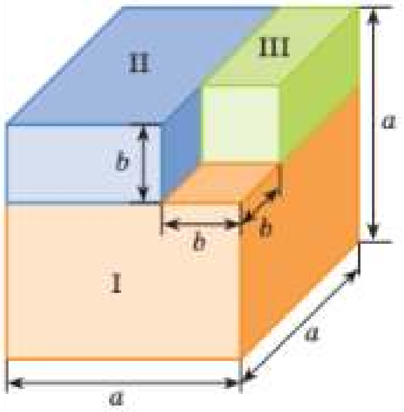
11.4 Спростіть вираз та знайдіть його значення:

1) $(1-2m)\left(1+2m+4m^2\right)+4m\left(2m^2-1\right)$, якщо $m=9$;
2) $(3m+1)\left(9m^2-3m+1\right)-9m\left(1+3m^2\right)$, якщо $m=8$;
3) $(4m-7)\left(16m^2+28m+49\right)+2m\left(m-32m^2\right)$, якщо $m=-10$;
4) $(5-6m)\left(25+30m+36m^2\right)+12m\left(18m^2-5m\right)$, якщо $m=-2$.

11.5 Розв'яжіть рівняння:

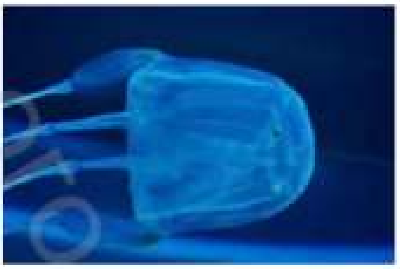
1) $(x-0{,}2)\left(x^2+0{,}2x+0{,}04\right)-x\left(x^2-4\right)=0$;
2) $x\left(3+x^2\right)-(0{,}3+x)\left(0{,}09-0{,}3x+x^2\right)=0$;
3) $x^2(x-1)=(1-x)\left(1+x+x^2\right)$;
4) $(x-4)\left(x^2+4x+16\right)=x^2(x+1)$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ



Об'єм V фігури (див. рисунок) можна записати так: $V=a^3-b^3$. Користуючись розв'язанням Актуальної задачі, запишіть вираз для знаходження об'єму фігури як суми об'ємів фігур I, II і III. Подайте цей вираз у вигляді добутку.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Дивовижна істота кубомедуза отримала назву через свою кубічну форму. Деякі види кубомедуз смертельно небезпечні для людини. Кубомедуз можна зустріти в тропічних та субтропічних водах з океанічною солоністю.

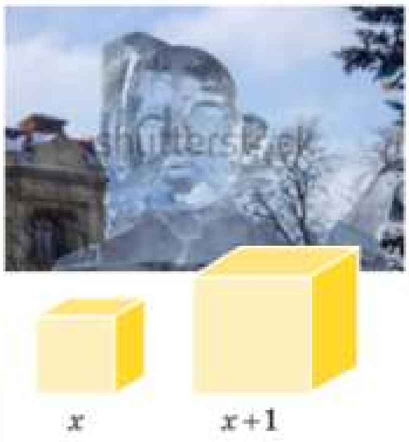
ПЕРЕВРА НА ЛОГІКУ

Різниця кубів двох послідовних чисел дорівнює 331. Знайдіть ці числа.

$$\boxed{n+1}^3-\boxed{n}^3=331$$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У багатьох містах України, зокрема у Львові, Полтаві, Кам'янці-Подільському, щорічно проводилися фестивалі льодових скульптур.



$a^{3n}=\left(a^{n}\right)^{3}$;
$b^{12n}=\left(b^{4n}\right)^{3}$

11.6 Розкладіть на множники вираз:

1) $a^6b^6-0{,}001$; 3) $\frac{1}{64}a^{12}b^3-1$; 5) $-x^9y^{18}+x^{18}y^9$;

2) $0{,}027+a^9b^9$; 4) $8+\frac{1}{27}a^6b^{15}$; 6) $-x^{12}y^6-x^6y^{12}$.

11.7 Запишіть у вигляді добутку вираз:

1) $(a-1)^3+4^3$; 3) $(x-2)^3+x^3$; 5) $(x-5y)^3+125y^3$;

2) $3^3-(b-3)^3$; 4) $y^3+(y+6)^3$; 6) $216x^3-(6x+y)^3$.

MATH FOR LIFE

11.8 ***Фестиваль льодових скульптур.*** Для створення льодових скульптур завезли дві глиби льоду, які мають форму кубів. Довжина ребра першої глиби дорівнює x, а довжина ребра другої — на 1 більша.

1) Запишіть вираз, за яким можна визначити:
а) об'єм першої глиби льоду;
б) об'єм другої глиби льоду;
в) загальний об'єм двох глиб;

2) На скільки об'єм першої глиби менший від об'єму другої?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

11.9 Доведіть, що значення виразу:

1) 127^3+123^3 ділиться націло на 250;
2) 329^3-129^3 ділиться націло на 200;
3) 98^3+8 ділиться націло на 100;
4) $2\cdot1001^3-2$ ділиться націло на 2000;

11.10 Якими цифрами закінчуються значення різниць 1–4?

Аналізуємо	Виконуємо
1) 187^3-87^3. $187^3-87^3=(187-87)\left(187^2+187\cdot87+87^2\right)=100\cdot(\ldots)$. Добуток натурального числа і числа 100 закінчується цифрою **0**.	2) 164^3-64^3; 3) 713^3-27; 4) 594^3-64

11.11 Подайте у вигляді добутку вираз:

1) x^3-y^{3n}; 3) $a^{3n}-b^{3n}$; 5) $8a^{15n}-b^{6n}$;

2) $x^{3n}+y^3$; 4) $a^{3n}+b^{3n}$; 6) $a^{12n}+27b^{9n}$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

11.12 Подайте у вигляді многочлена добуток:

1) $(3x+y)\left((3x)^2-3x\cdot y+y^2\right)$;

2) $(x-4y)\left(x^2+4xy+16y^2\right)$;

3) $(5x+7y)\left(25x^2-35xy+49y^2\right)$;

4) $\left(0{,}04x^2+2xy+100y^2\right)\left(\frac{1}{5}x-10y\right)$.

11.13 Спростіть вираз:

1) $(3+m)\left(9-3m+m^2\right)-m^3$;

2) $(4-m)\left(16+4m+m^2\right)+m^3+26$.

11.14 Спростіть вираз та знайдіть його значення:

1) $(2m-1)\left(1+2m+4m^2\right)+2m\left(1-4m^2\right)$, якщо $m=7$;

2) $(6-4m)\left(36+24m+16m^2\right)+16m\left(4m^2-m\right)$, якщо $m=-5$.

11.15 Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^3-(7y)^3$;

2) $216x^3+y^3$;

3) $\frac{1}{8}x^3-y^3$;

4) $0{,}027x^3+125y^3$.

11.16 Обчисліть:

1) $\frac{34^3-21^3}{34^2+34\cdot 21+21^2}$;

2) $\frac{16^3+14^3}{34^2-224+14^2}$;

3) $\frac{81+45+25}{9^3-5^3}$;

4) $\frac{10^3+6^3}{16}$.

11.17 За умовою задачі 11.8, вважаючи, що довжини ребер кубів подані в метрах, а маса 1 м³ льоду становить m кг, визначте (у кг):

1) масу першої глиби льоду;
2) масу другої глиби льоду;
3) загальну масу двох глиб льоду.

Бонусне завдання

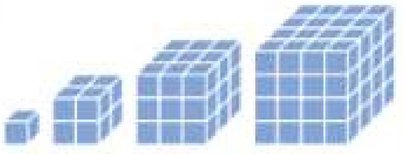
11.18 Доведіть, що значення виразу:

1) 153^3-27 ділиться націло на 150;

2) $3\cdot 999^3+3$ ділиться націло на 3000.

Завдання 11.12 → Приклад 1
Завдання 11.13 → Практикум, 11.3
Завдання 11.14 → Практикум, 11.4
Завдання 11.15 → Приклад 2
Завдання 11.16 → Приклад 3
Завдання 11.17 → Math for life, 11.8

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ



$1^3+2^3 \quad + \quad 3^3 \quad + \quad 4^3 \quad =?$

Спробуйте переконатися у правильності формули суми кубів послідовних натуральних чисел:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{6}.$$

Візьміть декілька чисел і обчисліть окремо значення лівої частини тотожності та значення її правої частини.

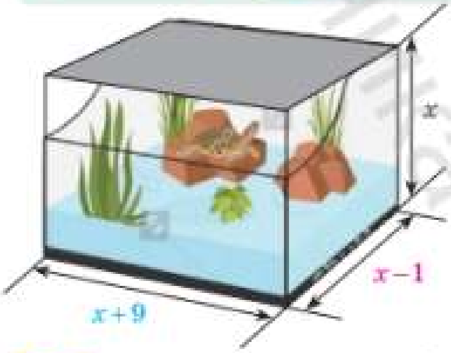
BE SMART

Наразі існує три способи подати число 3 у вигляді суми кубів трьох чисел. Один із них такий: $3=1^3+1^3+1^3$.
Спробуйте знайти другий спосіб: $3=(\ldots)^3+(\ldots)^3+(\ldots)^3$.
У вересні 2019 р. Е. Букер і Е. Сазерленд винайшли третій спосіб. Дізнайтеся, який саме.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

§12 РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДЕКІЛЬКОХ СПОСОБІВ

ВЧОРА	Ви використовували різні способи розкладання многочлена на множники
СЬОГОДНІ	Ви навчитеся розробляти стратегії із застосуванням декількох способів розкладання многочленів на множники
ЗАВЖДИ	Ви зможете застосовувати інтуїцію і нестандартні підходи для розв'язування завдань



АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

АКВАТЕРАРІУМ ДЛЯ ЧЕРЕПАХ

Об'єм акватераріума для черепах дорівнює 72 м³. Користуючись рисунком, знайдіть розміри акватераріума.

Розв'язання:

$V=x(x-1)(x+9)$	Записали формулу об'єму паралелепіпеда.
$x(x-1)(x+9)=72$	За умовою задачі склали рівняння.
$x^3+8x^2-9x=72$	Розкрили дужки, звели подібні доданки.
$x^3+8x^2-9x-72=0$	Перенесли 72 у ліву частину рівняння, змінили знак.
$(x^3+8x^2)-(9x+72)=0$	Згрупували доданки.
$x^2(x+8)-9(x+8)=0$	Винесли за дужки *спільні множники* x^2 і 9.
$(x+8)(x^2-9)=0$	Винесли за дужки *спільний множник* $(x+8)$.
$(x+8)(x-3)(x+3)=0$	Застосували *формулу різниці квадратів*.
$x+8=0$ або $x-3=0$ або $x+3=0$	Розв'язуємо рівняння.
$x=-8$ $\quad x=3$ $\quad x=-3$	Розміри не можуть бути від'ємними числами, отже, корені −8 і −3 не задовольняють умову задачі.
$x=3$ м; $x-1=3-1=2$ м; $x+9=3+9=12$ м.	Знаходимо розміри акватераріума.

Відповідь: 2 м, 3 м, 12 м.

ДОСЛІДЖУЄМО!

Проаналізуйте розв'язання задачі й назвіть способи розкладання многочлена на множники, які були використані для розв'язування рівняння.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Розміри акваріума, у якому житимуть черепахи, залежать від розмірів і кількості цих черепах. Для однієї черепахи потрібен акваріум, об'єм якого дорівнює:

- 50 л — для маленької, завдовжки 3–10 см;
- 50–80 л — для середньої, завдовжки 11–16 см;
- 80–150 л — для великої, завдовжки 17–25 см.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Розкладання многочленів на множники різними способами

Для розкладання многочленів на множники ви вже застосовували:

- винесення спільного множника за дужки;
- групування;
- формули скороченого множення.

Ви знаєте, що, залежно від кількості членів многочлена, зазвичай використовують такі способи розкладання його на множники.

Кількість членів многочлена	Способи розкладання на множники	Формули, приклади
Два	Використання формул: • різниці квадратів; • суми кубів; • різниці кубів	 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
Три	Використання формул: • квадрата суми; • квадрата різниці	 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
Декілька	• Винесення спільного множника за дужки. • Групування	$a^2b+ab^4-a^3b^3=$ $=ab(a+b^3-a^2b^2)$ $ax+ay+bx+by=$ $=a(x+y)+b(x+y)=$ $=(a+b)(x+y)$

Під час розкладання многочленів на множники в окремих випадках доводиться застосовувати *декілька способів*.

РОЗМИНКА 1

1 Винесіть спільний множник за дужки:

1) $2a-2x$; 3) $ab-bc$; 5) x^3-x; 7) $2x^3+6x^2$;
2) $3y+3n$; 4) $xn+xm$; 6) x^4+4x; 8) $12x^4-16x^6$.

2 Застосуйте формулу різниці квадратів:

1) x^2-36; 3) $16x^2-36y^2$; 5) x^4-y^4;
2) $25-y^2$; 4) $0{,}09x^2-9y^2$; 6) x^8-x^6.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- винесення спільного множника (*removing a common factor*)
- розкладання на множники (*factorization*)
- спосіб групування (*grouping method*)
- квадрат суми (*square of a sum*)
- квадрат різниці (*square of a difference*)
- різниця квадратів (*difference of two squares*)
- сума кубів (*sum of two cubes*)
- різниця кубів (*difference of two cubes*)

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Задумайте число від 1 до 10.

1) Виконайте дії:
   - помножте його на себе;
   - додайте до результату одиницю;
   - додайте до суми подвоєне задумане число.
2) Обміняйтесь отриманими результатами.
3) Спробуйте за допомогою алгебри відгадати, яке число задумав ваш однокласник чи однокласниця.

Стратегія

1) Винесення спільного множника за дужки.

2) Застосування формули різниці квадратів: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

ПРИКЛАД 1

Розкладіть многочлен $0,3y^2-2,7y^6$ на множники.

Розв'язання:

$0,3y^2\cdot 9y^4$ $\quad (3y^2)^2 \quad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$0,3y^2-2,7y^6=0,3y^2\left(1-9y^4\right)=0,3y^2\left(1^2-\left(3y^2\right)^2\right)=0,3y^2\left(1-3y^2\right)\left(1+3y^2\right).$$

Відповідь: $0,3y^2\left(1-3y^2\right)\left(1+3y^2\right)$.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Розкладіть на множники многочлен:

1) $6x^2-6$; 3) $4x-x^3$; 5) $50x^5-2x^3$; 7) $1,8x^4-12,8x^{10}$;
2) $5-5x^2$; 4) x^3-9x; 6) $3x^2-108x^4$; 8) $2,7x^{13}-1,2x^3$.

РОЗМИНКА 2

① Винесіть спільний множник за дужки:

1) $2a+2x+2$; 3) $mn-5n-tn$; 5) x^3-5x^2+x;
2) $3b-3y+3$; 4) $3b+ab+xb$; 6) x^3+4x^2-x.

② Застосуйте формулу квадрата різниці:

1) $x^2-8x+16$; 3) $49x^2-70x+25$;
2) $25y^2-10y+1$; 4) $-81y^2+36y-4$.

Стратегія

1) Винесення спільного множника за дужки.

2) Застосування формули квадрата різниці: $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

ПРИКЛАД 2

Запишіть у вигляді добутку кількох множників многочлен $-36c^3+24c^2-4c$.

Розв'язання:

$-4c\cdot 9c^2$ $\quad -4c\cdot(-6c)$ $\quad 2\cdot 3c\cdot 1$ $\quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$$-36c^3+24c^2-4c=-4c\left(9c^2-6c+1\right)=-4c\left((3c)^2-2\cdot 3c\cdot 1+1^2\right)=-4c(3c-1)^2.$$

Відповідь: $-4c(3c-1)^2$.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Запишіть у вигляді добутку кількох множників многочлен:

1) x^3+4x^2+4x; 5) $-24x^3+24x^2-6x$;
2) x^3-6x^2+9x; 6) $-45x^3-30x^2-5x$;
3) $2x^3-20x^2+50x$; 7) $-2,5x^5-x^4-0,1x^3$;
4) $4x^3+48x^2+144x$; 8) $-7,2x^5+2,4x^4-0,2x^3$.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ПРИКЛАД 3

Запишіть у вигляді добутку двох множників многочлен $9-x^2+4xy-4y^2$.

Розв'язання:

$9-x^2+4xy-4y^2=$ .... Згрупуємо доданки, винесемо знак «мінус» за дужки.

$=9-\left(x^2-4xy+4y^2\right)=$ .... Застосуємо формулу квадрата різниці.

$=9-(x-2y)^2=3^2-(x-2y)^2=$ .... Записуємо вираз як різницю квадратів, застосовуємо формулу.

$=\left(3-(x-2y)\right)\left(3+(x-2y)\right)=$ .... Розкриваємо дужки, враховуючи знаки.

$=(3-x+2y)(3+x-2y)$

Відповідь: $(3-x+2y)(3+x-2y)$.

Стратегія

1) Групування доданків.

2) Винесення знака «−» за дужки (у дужках змінюємо знаки на протилежні!).

3) Застосування формули квадрата двочлена:

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2;$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$

4) Застосування формули різниці квадратів:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

5) Розкриття внутрішніх дужок:

$+(\ldots)$ — знаки не змінюються;

$-(\ldots)$ — знаки змінюються на протилежні.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Запишіть у вигляді добутку двох множників многочлен:

1) $20^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)$;
2) $30^2-\left(x^2+2xy+y^2\right)$;
3) $25-\left(x^2+4xy+4y^2\right)$;
4) $36-\left(4x^2-4xy+y^2\right)$;
5) $100-9x^2+6xy-y^2$;
6) $64-x^2-6xy+9y^2$;
7) $0{,}09-x^2+xy-\frac{1}{4}y^2$;
8) $0{,}01-\frac{1}{4}x^2+xy-y^2$.

ПРИКЛАД 4

Обчисліть значення виразу $\dfrac{109^2-2\cdot109\cdot61+61^2}{36^2-12^2}$.

Розв'язання:

Квадрат різниці

Обчислюємо

$$\frac{109^2-2\cdot109\cdot61+61^2}{36^2-12^2}=\frac{(109-61)^2}{(36-12)(36+12)}=\frac{48^2}{24\cdot48}=\frac{48\cdot\cancel{48}}{24\cdot\cancel{48}}=\frac{48}{24}=2.$$

Різниця квадратів

Скорочуємо

Відповідь: 2.

Стратегія

1) Застосування формул скороченого множення.

2) Обчислення.

3) Скорочення дробу.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{17\cdot23}{20^2-3^2}$;
2) $\dfrac{90\cdot28}{29^2-1}$;
3) $\dfrac{12^2-2\cdot12\cdot60+60^2}{54^2-18^2}$;
4) $\dfrac{31^2+2\cdot31\cdot25+25^2}{42^2-14^2}$;
5) $\dfrac{18^2-36}{49^2-2\cdot49\cdot25+25^2}$;
6) $\dfrac{21^2-49}{64^2-2\cdot64\cdot36+36^2}$.

Проект підручника майбутнього видавництва "Ранок"

РОЗМИНКА 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $(y-5)^2=0$; 3) $y(y+2)^2=0$; 5) $(y-4)(y+6)^2=0$;

2) $(y-3)^2=0$; 4) $y(y-7)^2=0$; 6) $(y-8)(y+5)^2=0$.

ПРИКЛАД 5

Розв'яжіть рівняння $5x^5-40x^3+80x=0$, розклавши його ліву частину на множники.

Розв'язання:

$5x^5-40x^3+80x=0$	Винесемо спільний множник $5x$ за дужки.
$5x\left(x^4-8x^2+16\right)=0$	Запишемо вираз у дужках як квадрат різниці.
$5x\left(\left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot 4+4^2\right)=0$	Застосуємо формулу квадрата різниці.
$5x\left(x^2-4\right)^2=0$	Розкладемо многочлен x^2-4 на множники за формулою різниці квадратів.
$5x\left((x-2)(x+2)\right)^2=0$	Застосуємо властивість степенів $(ab)^n=a^nb^n$.
$5x(x-2)^2(x+2)^2=0$	Користуємось правилом рівності добутку нулю: $abc=0$, якщо $a=0$ або $b=0$, або $c=0$.

$5x=0$ або $(x-2)^2=0$ або $(x+2)^2=0$

$x_1=0$ $x-2=0$ $x+2=0$

$x_1=0$ $x_2=2$ $x_3=-2$

Відповідь: -2; 0; 2.

Стратегія

1) Винесення спільного множника за дужки.

2) Застосування формули квадрата різниці $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

3) Застосування формули різниці квадратів $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

4) Застосування правила рівності добутку нулю: $abc=0$, якщо $a=0$ або $b=0$, або $c=0$.

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Розв'яжіть рівняння.

1) $x^3-2x^2+x=0$;

2) $x^3-4x^2+4x=0$;

3) $5x^3-45x=0$;

4) $3x^3-48x=0$;

5) $6x^5-12x^3+6x=0$;

6) $2x^5-36x^3+162x=0$;

7) $0{,}1x^5-0{,}8x^3+1{,}6x=0$;

8) $0{,}9x^5-1{,}8x^3+0{,}9x=0$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

1) Відповідь можна записати, пронумерувавши корені: $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

2) Запис ±2 дає можливість об'єднати корені $x_2=2$ і $x_3=-2$.

Виділення квадрата двочлена

Розглянемо ще один спосіб розкладання виразу на множники — за допомогою виділення квадрата двочлена, або виділення повного квадрата.

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

Алгоритм виділення квадрата двочлена

1. Знаходимо в записі квадрат першого виразу.
2. Записуємо подвоєний добуток першого виразу на другий вираз.
3. Визначаємо другий вираз.
4. Додаємо й віднімаємо квадрат другого виразу.
5. Застосовуємо формули квадрата двочлена.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

Наприклад:

Квадрат першого виразу

$3y$ — другий вираз

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$\underbrace{x^2}_{}+6xy=x^2+\underbrace{2\cdot x\cdot 3y}_{\text{Подвоєний добуток першого виразу на другий}}=x^2+2\cdot x\cdot 3y\underbrace{+(3y)^2-(3y)^2}_{\text{Додаємо й віднімаємо квадрат другого виразу}}=(x+3y)^2-9y^2.$$

РОЗМИНКА 4

Виділіть повний квадрат у виразі:

1) $x^2+2\cdot x\cdot 5$;
2) $y^2-2\cdot y\cdot 6$;
3) x^2+8x;
4) y^2-6y;
5) x^2+18xy;
6) y^2-20xy.

ПРИКЛАД 6

Виділіть квадрат двочлена у виразі x^2-6x+5 і розкладіть вираз на множники.

Розв'язання:

$2\cdot x\cdot 3$

Застосовуємо формулу різниці квадратів

$$x^2-6x+5=\overbrace{\left(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2\right)}^{\text{Виділяємо повний квадрат двочлена}}-3^2+5=\underbrace{(x-3)^2}_{\text{Записуємо квадрат різниці}}-2^2=(x-3-2)(x-3+2)=$$
$$=(x-5)(x-1).$$

Відповідь: $(x-5)(x-1)$.

Стратегія

↓

1) Виділення квадрата двочлена.

↓

2) Застосування формул квадрата двочлена:
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

↓

3) Застосування формули різниці квадратів
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

↓

4) Спрощення виразу (обчислення).

ТРЕНУЄМОСЯ 6

Виділіть квадрат двочлена й розкладіть вираз на множники:

1) $x^2-14x+49-121$;
2) $x^2+16x+64-144$;
3) $x^2+10x+21$;
4) x^2+6x+8;
5) $x^2-4x-12$;
6) x^2-2x-8;
7) $x^2+8x-20$;
8) $4x^2+4x-35$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $4a^3+100a=$
$=4a\left(a^2+25\right)=$
$=-4a(a-5)(a+5);$

2) $-3b^3-24b^2-12b=$
$=-3b\left(b^2-8b+4\right)=$
$=-3b(b-2)^2.$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть три вирази, якщо їх сума дорівнює $3x$, а добуток x^3-25x.

🟨 + 🟦 + 🟩 = $3x$

🟨 · 🟦 · 🟩 = x^3-25x

ПРАКТИКУМ

12.1 Розкладіть на множники вираз:

1) a^5-a^3;
3) $a^{10}-36a^8$;
5) $98a^5-2ab^2$;
2) a^5-a^7;
4) $25a^7-a^9$;
6) $45a^4b-5b^3$.

12.2 Розкладіть вираз на множники та знайдіть його значення:

1) $y^2(x-3)+2y(x-3)+(x-3)$, якщо $x=203$, $y=-0{,}9$;
2) $x^2(y+21)-6x(y+21)+9(y+21)$, якщо $x=3{,}2$, $y=39$;
3) $y^2(x-5)+8y(x-5)+16x-80$, якщо $x=1005$, $y=-4{,}3$;
4) $y^2(x+3)-10y(x+3)+25x+75$, якщо $x=9997$, $y=5{,}4$.

12.3 Запишіть у вигляді добутку многочлен:

1) $(x+12)^2-(x+y)^2$;
4) $(x+15)^2-\left(4b^2-4bx+x^2\right)$;
2) $(13-x)^2-(x+y)^2$;
5) $(m+8)^2-m^2+6mn-9n^2$;
3) $(x-9)^2-\left(x^2+4xa+4a^2\right)$;
6) $(m-10)^2-9n^2-6nm-m^2$.

12.4 Розкладіть на множники:

1) $x^2-2xy+5x-10y$;
4) $x^3-x^2y-9x+9y$;
2) $x^2+4x-3xy-12y$;
5) $xy^2+y^3+2y^2-x^3-x^2y-2x^2$;
3) $x^3+x^2y-4x-4y$;
6) $x^3-x^2y+3x^2-xy^2+y^3-3y^2$.

12.5 Розкладіть на множники:

1) $(a+5)a^2-(a+5)$;
3) $a-7+(7-a)a^2$;
5) $4+(a-1)a^2-4a$;
2) $(8-a)-(8-a)a^2$;
4) $a-3+(3-a)a^2$;
6) $18+(a-2)a^2-9a$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

12.6 Доведіть, що значення виразу:

1) 13^6+2^9 ділиться націло на 129;
2) 10^9-1 ділиться націло на 999.

12.7 Доведіть тотожність:

1) $a^6-b^6=(a-b)(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$;
2) $a^6-b^{12}=\left(a-b^2\right)\left(a+b^2\right)\left(a^2+ab^2+b^4\right)\left(a^2-ab^2+b^4\right)$.

12.8 Розкладіть на множники вирази 1–3.

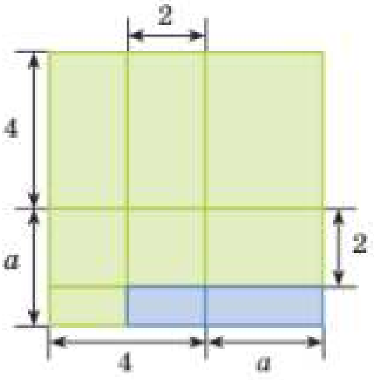
Аналізуємо	Виконуємо
1) $a^4+64=\underbrace{a^4+2\cdot a^2\cdot 8+8^2}-2\cdot a^2\cdot 8=$	2) b^4+4;
$=\left(a^2+8\right)^2-(4a)^2=\left(a^2+8-4a\right)\left(a^2+8+4a\right)$	3) c^8+64

MATH FOR LIFE

12.9 ***Математичний конкурс.*** Під час проведення математичного конкурсу команди мають обчислити значення виразу $a^2(b-7)+10a(b-7)+25b-175$, якщо $a=-15$, $b=6{,}8$. Допоможіть зробити це найбільш раціональним способом.

12.10 ***Ландшафтний дизайн.*** На квадратній ділянці запланували влаштувати басейн, а на решті території — створити газон (див. рисунок).

1) Запишіть вираз, за яким можна знайти площу:
   а) усієї ділянки; б) басейну; в) газону.
   Якщо можна, спростіть отримані вирази.
2) Визначте, скільки квадратних метрів рулонного газону треба замовити, якщо $a=15$ м.



ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 8

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Розкладіть на множники вираз $3a^2-ab$.

А	Б	В	Г
$a(3-b)$	$a(3a-b)$	$a(3-ab)$	$a(3a-ab)$

2 Розкладіть на множники вираз $100-m^{10}$.

А	Б
$(10-m)(10+m)$	$(50-m^5)(50+m^5)$
В	**Г**
$(10-m^5)(10+m^5)$	$(50-m)(50+m)$

3 Розв'яжіть рівняння $x^3-25x=0$.

А	Б	В	Г
$x=0$	$x=5$	$x_1=0,\ x_2=5$	$x_1=0,\ x_2=-5,\ x_3=5$

4 Розкладіть на множники многочлен $-c^3+6c^2-9c$.

А	Б	В	Г
$-c(c-3)^2$	$c(c-3)^2$	$-c(c+3)^2$	$c(c+3)^2$

5 Об'єм 3D-об'єкта обчислюють за формулою $V=x^3-125$. За якою ще формулою можна обчислити об'єм цього 3D-об'єкта?

А	Б
$V=(x-5)(x^2+5x+25)$	$V=(x-5)(x^2-5x+25)$
В	**Г**
$V=(x-5)(x^2+10x+25)$	$V=(x-5)(x^2-10x+25)$

6 Установіть відповідність між виразом (1–3) і тотожно рівним йому виразом (А–Г).

1	x^3-x	А	$x^2(1-x)(1+x)$
2	$x-x^3$	Б	$x^2(x-1)(x+1)$
		В	$x(1-x)(1+x)$
3	x^4-x^2	Г	$x(x-1)(x+1)$

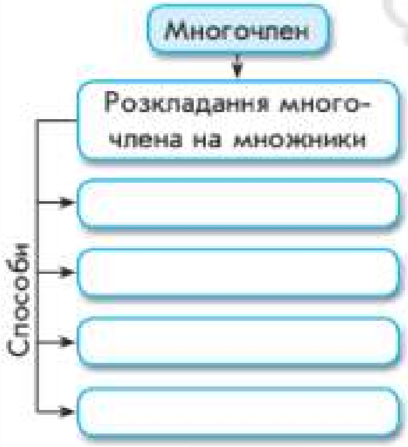
7 Запишіть у вигляді добутку многочлен $(a-1)^2-(25x^2-10xy+y^2)$.

8 Знайдіть значення виразу $\dfrac{39^2-13^2}{87^2-2\cdot87\cdot35+35^2}$.

Завдання 12.11 → Приклад 1
Завдання 12.12 → Приклад 2
Завдання 12.13 → Приклад 3
Завдання 12.14 → Приклад 4
Завдання 12.15 → Приклад 5
Завдання 12.16 → Приклад 6
Завдання 12.17 → Актуальна задача
Завдання 12.18 → Math for life, 12.9

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Доповніть схему.



BE SMART

Перша наукова публікація всесвітньо відомого українського математика Георгія Вороного, присвячена розкладанню многочлена на множники, вийшла друком, коли авторові було лише 16 років! Розробки Г. Вороного широко застосовуються сьогодні в комп'ютерній графіці, геометричному моделюванні, розпізнаванні образів, створенні штучного інтелекту, астрофізиці, екології тощо.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

12.11 Розкладіть на множники многочлен:

1) $3x^2-3$; 2) $16x-x^3$; 3) $2x^2-98x^4$; 4) $2{,}8x^{17}-6{,}3x^3$.

12.12 Запишіть у вигляді добутку кількох множників многочлен:

1) x^3-2x^2+x;
3) $-28x^3-28x^2-7x$;
2) $3x^3+30x^2+75x$;
4) $-5x^5+2x^4-0{,}2x^3$.

12.13 Запишіть у вигляді добутку двох множників многочлен:

1) $40^2-\left(x^2-2xy+y^2\right)$;
3) $81-x^2+6xy-9y^2$;
2) $49-\left(4x^2+4xy+y^2\right)$;
4) $0{,}04-x^2-xy-\frac{1}{4}y^2$.

12.14 Обчисліть значення виразу, використовуючи різні способи розкладання на множники:

1) $\frac{46\cdot 34}{40^2-6^2}$;
3) $\frac{41^2+2\cdot 41\cdot 23+23^2}{48^2-16^2}$;
2) $\frac{100\cdot 26}{23^2-9}$;
4) $\frac{24^2-64}{81^2-2\cdot 81\cdot 49+49^2}$.

12.15 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3+2x^2+x=0$;
3) $3x^5-24x^3+48x=0$;
2) $2x^3-72x=0$;
4) $0{,}5x^5-9x^3+40{,}2x=0$.

12.16 Виділіть квадрат двочлена й розкладіть на множники вираз:

1) $x^2-2x+1-16$;
3) $x^2-8x+15$;
5) $x^2+6x-16$;
2) $x^2-16x+64-169$;
4) $x^2-2x-35$;
6) $9x^2+6x-8$.

12.17 Об'єм акваріума для черепах дорівнює 12 м³. Його висота на 1 м більша за ширину й на 4 м менша від довжини. Знайдіть розміри акваріума. Визначте, скільки великих черепах можна утримувати в цьому акваріумі (див. с. 116).

12.18 Програміст написав програму для обчислення значення виразу $a^2(b+4)-12a(b+4)+36b+144$ при $a=26$, $b=-3{,}7$. Запропонуйте найбільш раціональний спосіб обчислення та знайдіть результат виконання програми (значення виразу при заданих a і b).

Бонусне завдання

12.19 Доведіть, що значення виразу:

1) 7^6-3^6 ділиться націло на 40;
2) 11^6+4^9 ділиться націло на 185.

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 9—12

1 Ви дізналися про формули скороченого множення, які спрощують множення многочленів.

Формули скороченого множення:

Квадрат двочлена:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Різниця квадратів:

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Сума та різниця кубів:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

2 Ви дізналися про ще один спосіб розкладання многочленів на множники та навчилися його використовувати.

Третій спосіб розкладання многочленів на множники:

- застосування формул скороченого множення.

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

3 Ви навчилися застосовувати формули скороченого множення для спрощення обчислень.

Ви переконалися, що формули скороченого множення «працюють» в обох напрямках — і для розкладання многочлена на множники, і для перетворення добутку на многочлен.

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

Варіант 2 контрольної роботи в електронному додатку

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4*

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Подайте у вигляді многочлена вираз $(s+t)^2$.

А	Б	В	Г
$s^2+2st+t^2$	s^2+t^2	$s^2-2st+t^2$	s^2-t^2

2 Розкладіть на множники: 12^2-x^2.

А	Б
$(12+x)(12+x)$	$(12-x)(12-x)$
В	**Г**
$(12-x)(12+x)$	$2(12-x)$

3 Перетворіть добуток у многочлен: $\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)$.

А	Б	В	Г
$a^2-\frac{1}{2}$	$a^2-\frac{1}{4}$	$a^2-\frac{1}{8}$	$a^2-\frac{1}{16}$

4 Перетворіть многочлен у квадрат двочлена: $m^2+10m+25$.

А	Б	В	Г
$(m+25)^2$	$(m+5)^2$	$(m+10)^2$	$(m^2+5)^2$

5 Розкладіть на множники: y^4-9y^2.

А	Б
$y(y-3)^2$	$y^2(y-3)(y+3)$
В	**Г**
$y^2(y-3)^2$	$y(y-3)(y+3)$

6 На морському узбережжі рядами встановили вітрогенератори. Усього було $(n+2)$ рядів, а в кожному ряду — $(n+2)$ вітрогенератори. Скільки всього було встановлено вітрогенераторів?

А	Б	В	Г
n^2+4	n^2+2n+4	n^2+4n+4	n^2+2

7 Розкладіть на множники многочлен $-p^3+16p^2-64p$.

8 Перетворіть квадрат двочлена у многочлен: $\left(\frac{1}{2}x^5-3y^8\right)^2$.

9 Обчисліть значення виразу $\frac{33^2-11^2}{44^2-2\cdot44\cdot22+22^2}$, використовуючи різні способи розкладання на множники.

10 Запишіть у вигляді добутку многочлен $(x-4)^2-a^2+12ab-36b^2$.

Бонусне завдання

Розв'яжіть рівняння $(x^3-14x^2+49x)(121-x^2)=0$.

---

* Ця контрольна робота призначена для проведення лише в тих класах, для яких навчальне навантаження курсу алгебри складає 3 або 4 години на тиждень. Обидва варіанти контрольної роботи для проведення в класах, для яких навчальне навантаження курсу алгебри складає 2 години на тиждень, наведені в електронному додатку.

2 ФУНКЦІЇ

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

У цьому розділі ви дізнаєтеся, що функція — це залежність однієї величини від іншої, інакше кажучи, відображення взаємозв'язку між двома величинами. Усе, що нас оточує, пов'язане одне з одним. Отже, ми живемо у світі функцій. Наприклад, функцією є залежність маси немовляти від віку, залежність температури повітря від часу, залежність суми, сплаченої за спожиту воду, від витраченого об'єму води тощо.

Опанувавши цей розділ, ви навчитеся:

- встановлювати зв'язки, яким підпорядковуються реальні процеси;
- визначати найкращий спосіб задання функції;
- отримувати інформацію за графіками реальних процесів;
- прогнозувати перебіг процесів, які описуються лінійними функціями

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

Теми навчальних проєктів:

- Функції навколо нас
- Чарівний світ лінійної функції
- Як графіки допомагають розв'язувати задачі
- Графіки залежностей між величинами, які описують реальні процеси

> “ *Навчання — це не час. Навчання — це зусилля».* ”
>
> З пам'ятки для мотивації студентів Гарвардського університету

§ 13 ФУНКЦІЯ, СПОСОБИ ЇЇ ЗАДАННЯ. ФУНКЦІОНАЛЬНА ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ВЕЛИЧИНАМИ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

ВЧОРА	Ви розв'язували задачі за допомогою формул, обчислювали значення виразів зі змінною
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтесь, яка залежність називається функцією
ЗАВЖДИ	Використовуючи функціональні залежності, ви зможете заздалегідь розрахувати результат та створити математичну модель реальної ситуації

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

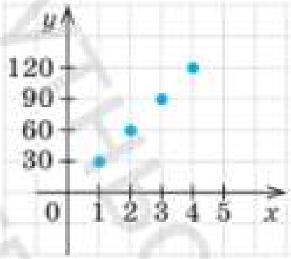
ХАРЧУВАННЯ ПАНДИ

Готуючи презентацію про харчування панди, зоологи підготували дані щодо кількості бамбука, необхідного панді на 4 дні. Спеціалісти запропонували такі способи подання інформації.

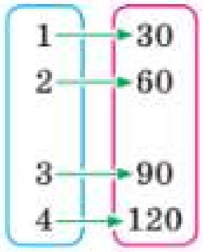
Таблиця

Кількість днів x	Кількість їжі (кг) y
1	30
2	60
3	90
4	120

Графічне зображення



Діаграма відображення



Опис

Кожного дня доросла панда з'їдає 30 кг пагонів і листя бамбука

Упорядковані пари

(1; 30); (2; 60); (3; 90); (4; 120)

Дайте відповіді на запитання.

1. Скільки кілограмів бамбука необхідно панді на 1 день?

2. Скільки кілограмів бамбука необхідно панді на 4 дні?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Велика панда є символом Всесвітнього фонду дикої природи (WWF).
Маса великої панди становить від 100 до 150 кілограмів. Понад 12 год на добу панда зайнята харчуванням. Маса їжі, яку вона споживає щодня, дорівнює приблизно 12–15 % маси самої панди. Маса новонародженої панди складає лише $\frac{1}{800}$ маси її матері.

3. Чи можна визначити кількість їжі для панди на 7 днів за допомогою поданої таблиці?

4. Нехай y — кількість бамбука (у кг), що з'їдає панда за x днів. Виразіть y через x — запишіть відповідну рівність.

5. Необхідно обчислити кількість їжі для панди на 10 днів. Як це зробити зручніше?

6. Який спосіб подання інформації, на Вашу думку, найбільш наочний ?

Розв'язуючи Актуальну задачу, ми отримали формулу $y = 30x$, яка виражає залежність маси y їжі для панди від кількості днів x. Змінюючи значення змінної x, ми отримуватимемо нові значення змінної y.

Зауважимо, що ***кожному значенню*** змінної x буде відповідати ***єдине значення*** змінної y. Така залежність однієї змінної від іншої називається ***функціональною***.

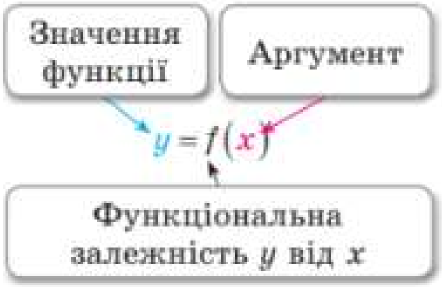
КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- функція (*function*)
- незалежна змінна (*independent variable*)
- залежна змінна (*dependent variable*)
- залежність (*relation*)
- правило (*rule*)
- таблиця (*table*)
- упорядковані пари (*ordered pairs*)
- діаграма відображення (*mapping diagram*)

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Функція — це залежність однієї змінної від іншої, при якій **кожному** значенню незалежної змінної ставиться у відповідність **єдине** значення залежної змінної.

Незалежну змінну називають **аргументом**, а залежну — **значенням функції** або **функцією** від цього аргумента.



Функцію записують так: $y = f(x)$ або $y(x)$.

Для функції $y = f(x)$ незалежна змінна x — це **аргумент**, залежна змінна y — це **функція**.

Правило f, що задає функцію, зазвичай подають у вигляді формули, *наприклад:*

$$f(x) = x - 3 \text{ або } y = x - 3, \; f(x) = x^2 \text{ або } y = x^2.$$

Найчастіше аргумент позначають через x, а функцію — через y або $f(x)$. Проте можна використовувати й інші літери, якщо цього потребує умова завдання.

Наприклад:

- $s(t)$ — залежність пройденої відстані від часу руху;
- $m(\rho)$ — залежність маси тіла від його густини.

Для певного значення аргумента x відповідне значення $f(x)$ або y називають **значенням функції**.

Наприклад, запис $f(2)$ означає, що значення функції знаходять для значення аргумента, що дорівнює 2, тобто для $x = 2$.

СЛІД ЗНАТИ!

Функція

Називають:

x — аргумент;

y — залежна змінна / функція;

Записують:

$y = f(x)$ — функціональна залежність y від x.

Читають:

«y дорівнює f від x».

ДОСЛІДЖУЄМО!

Ви вже зустрічалися із залежностями (відповідностями) під час розв'язування задач і в повсякденному житті. Розгляньте приклади залежностей й виконайте завдання 1–4.

У першому рядку таблиці подані приклади залежностей.

1. Назвіть незалежні й залежні змінні.

2. Заповніть таблицю значень для залежної змінної.

3. Скільки значень залежної змінної ставиться у відповідність кожному значенню незалежної змінної?

4. Переконайтеся, що вами зроблено правильний висновок.

5. Наведіть приклад залежності зі свого досвіду.

<table>
<tr><td>Залежність, відповідність</td><td>1) Периметр квадрата P залежить від довжини його сторони a</td><td>2) Відстань s, що велосипедист проїхав по прямій зі швидкістю 15 км/год, залежить від часу подорожі t</td><td>3) Вартість y покупки м'ячів за ціною 100 г. о. залежить від кількості x куплених м'ячів</td></tr>
<tr><td>Формула</td><td>$P=4a$</td><td>$s=15t$</td><td>$y=100x$</td></tr>
<tr><td>Незалежна змінна</td><td>Довжина сторони квадрата</td><td>Час подорожі</td><td>Кількість м'ячів</td></tr>
<tr><td>Залежна змінна</td><td>Периметр квадрата</td><td>Відстань</td><td>Вартість покупки</td></tr>
<tr><td>Таблиця значень</td><td><table><tr><td>a</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>t</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>s</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>2</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Висновок</td><td colspan="3">Кожному значенню незалежної змінної ставиться у відповідність єдине значення залежної змінної</td></tr>
</table>

Способи задання функції

Функцію вважають *заданою*, якщо *встановлено правило*, за яким за кожним значенням незалежної змінної (аргумента) можна знайти значення залежної змінної (функції), тобто встановлена відповідність між змінними.

Ця відповідність може бути встановлена різними способами, зокрема:

- аналітично — за допомогою формули;
- таблично — за допомогою таблиці;
- описово — за допомогою словесного опису;
- графічно — за допомогою графіка;
- схематично — за допомогою діаграми відображення;
- за допомогою упорядкованих пар

тощо.

СЛІД ЗНАТИ!

Основні **способи задання функції**:

- аналітичний
- табличний
- описовий
- графічний

Розглянемо докладно *аналітичний*, *табличний* та *описовий способи задання функцій*.

Графічний спосіб розберемо в наступному параграфі.

Аналітичний спосіб — це спосіб завдання функції за допомогою формули (правила, закону тощо). *Наприклад:*

1) Об'єм куба V розраховується залежно від довжини його ребра a за формулою:

Значення функції
Аргумент

$$V = a^3$$

2) Залежність значення F температури за шкалою Фаренгейта від значення C температури за шкалою Цельсія розраховується за формулою:

Значення функції
Аргумент

$$F = 1{,}8C + 32$$

2) Сума, яку належить сплатити за холодну воду y (у грн) залежить від кількості спожитої води x (у м³) і розраховується за формулою (дані для Києва на січень 2024 р.):

Значення функції
Аргумент

$$y = 30{,}384x + 39{,}19$$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Переваги аналітичного способу

- За допомогою формули можна знайти значення функції для будь якого значення аргумента;
- за допомогою формули можна скласти таблицю значень і побудувати графік функції;
- властивості функцій, заданих аналітично, можна досліджувати

Якщо функцію задано аналітично, то за поданими значеннями *аргумента* можна знайти *значення функції*, підставивши відповідні значення у формулу, якою задано функцію.

Табличний спосіб — це спосіб задання функції за допомогою таблиці, яка містить значення незалежної змінної x (аргумента) і відповідні їм значення залежної змінної y (функції).

Табличний спосіб застосовується для збору й аналізу експериментальних даних у прикладних науках, інженерії, статистиці тощо.

У випадку *задання функції за допомогою таблиці* певним значенням аргумента *вже поставлені у відповідність* значення функції (їх не потрібно знаходити). *Наприклад*

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Переваги табличного способу

- Для будь-якого значення аргумента, внесеного до таблиці, відразу можна визначити значення функції;
- зручно використовувати для невеликої кількості змінних

1) У таблиці наведено дані щодо вікового складу учнів 7 класів певного закладу освіти. Ця відповідність є функцією — кожному значенню віку учнів відповідає лише одне числове значення їх кількості. Вік учня є аргументом, а кількість учнів — значенням функції.

Вік учня, роки	12	13	14
Кількість учнів	84	75	89

2) Для конструювання одягу використовують стандартні таблиці розмірів. Ця відповідність теж є функцією — кожному значенню віку (аргументу) відповідає лише одне числове значення зросту (значення функції).

Вік у роках	12	13	14
Зріст у см	152	155	161

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Перевага описового способу

- Можливість задати ті функції, які складно виразити аналітично

Якщо значення аргумента змінюються на ту саму величину в кожній наступній комірці, то застосовують термін «крок». Наприклад: «Аргумент задано в межах від A до B із кроком С». У щойно розглянутих таблицях аргумент задано в межах від 12 до 14 включно із кроком 1.

Описовий спосіб — це спосіб задання функції описом, словесно.

Наприклад, описово задані функції:

1) Кожному натуральному числу поставлене у відповідність значення квадрата цього числа.

2) Кожному громадянину України, якому виповнилося 14 років, ставиться у відповідність номер його паспорта.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Функція — це залежність, у якій **кожному** значенню аргумента відповідає **єдине** значення функції.

Не кожна залежність є функцією!

! Розглянутими способами можна задавати різні залежності, проте не кожна із залежностей є функцією.

ПРИКЛАД 1

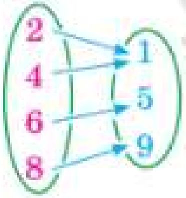
Визначте, чи є подані залежності функціями.

Розв'язання (пояснення)

1)

x	y
−1	2
0	5
4	8

3)



5)

(1; 7), (2; 7), (3; 7)

7)

Залежність між людиною та датою її народження.

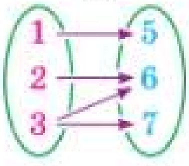
У випадках 1, 3, 5, 7 *кожному* значенню незалежної змінної відповідає *єдине* значення залежної змінної, отже, ці залежності є функціями.

2)

x	y
−3	1
−3	4
5	6

Значенню −3 незалежної змінної відповідають *два* значення залежної змінної, 1 і 4, отже, залежність не є функцією.

4)



Значенню 3 незалежної змінної відповідають *два* значення залежної змінної, 6 і 7, отже, залежність не є функцією.

6)

(9; 5), (9; 7), (9; 5)

Значенню 9 незалежної змінної відповідають *три* значення залежної змінної, 5, 7 і 9, отже, залежність не є функцією.

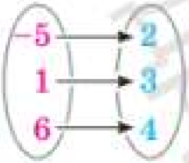
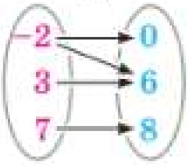
8)

Залежність між користувачами інтернету та їхніми електронними адресами: деякі користувачі мають більш ніж одну адресу електронної пошти.

Окремим значенням незалежної змінної «користувач» відповідають *кілька* значень залежної змінної «адреса електронної пошти», отже, залежність не є функцією.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Визначте, чи є подані залежності функціями.

1)	3)	5)	7)
	x y 1 4 2 5 3 6	Кожній учительці або вчителю, які викладають у вашому класі, поставлені у відповідність усі учні класу.	(11; −1), (25; 8), (30; 8)
2)	**4)**	**6)**	**8)**
	x y 1 3 2 2 2 1	Кожній учениці й кожному учню поставлене у відповідність його свідоцтво навчальних досягнень.	(1; 15), (9; 3), (9; 6)

ПОМІРКУЙТЕ

Як ви вважаєте, які недоліки кожного способу задання функції?

Перевірте себе, звернувшися до електронного додатка до підручника

ПРИКЛАД 2

Функцію задано аналітично: $y = 4x - 7$.

1) Знайдіть значення функції, якщо $x = -2$; 4.

2) Знайдіть значення аргумента, для яких значення функції дорівнюють 1; 5.

Розв'язання:

Щоб знайти значення функції, треба підставити у формулу значення аргумента й виконати обчислення.

Щоб знайти значення аргумента, треба підставити у формулу значення функції і розв'язати рівняння відносно аргумента.

	Аргумент x		Функція $y = 4x - 7$		Значення функції y
1)	$x = -2$	→	$y = 4\cdot(-2) - 7$	→	−15
	$x = 4$	→	$y = 4\cdot 4 - 7$	→	9
2)	2	←	$4x - 7 = 1$	←	$y = 1$
	3	←	$4x - 7 = 5$	←	$y = 5$

Відповідь: 1) −15; 9; 2) 2; 3.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Поняття функції не обмежується математикою. Існують:

- функції спілкування
- функції ютуба
- функції грошей
- функції держави
- функції у програмуванні
- функції у фізіології

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Функцію задано аналітично, за допомогою певної формули. Знайдіть значення функції за даними значеннями аргумента; значення аргумента для заданих значень функції.

1) $y=5x$. Знайдіть y, якщо $x=-4;\ 10$.
Знайдіть x, якщо $y=45;\ 100$.

2) $y=15-2x$. Знайдіть y, якщо $x=-1;\ 3$.
Знайдіть x, якщо $y=-3;\ 21$.

3) $y=-4x-3$. Знайдіть y, якщо $x=0;\ 8$.
Знайдіть x, якщо $y=-7;\ 17$.

4) $y=7x+1$. Знайдіть y, якщо $x=-2;\ 5$.
Знайдіть x, якщо $y=-20;\ 15$.

ПРИКЛАД 3

Функцію задано аналітично: $y=2-x$, її аргумент визначено в межах від -3 до 3 включно із кроком 2.

1) Складіть таблицю значень x і y.

2) За таблицею назвіть y, якщо $x=-1$; x, якщо $y=5$.

3) Запишіть відповідні значення аргумента і функції у вигляді впорядкованих пар чисел. Побудуйте на координатній площині точки, координатами яких є ці пари чисел.

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо в умові завдання сказано «з кроком», це означає, що змінна набуває значень, які відрізняються одне від одного на величину «кроку»

Розв'язання:

1)

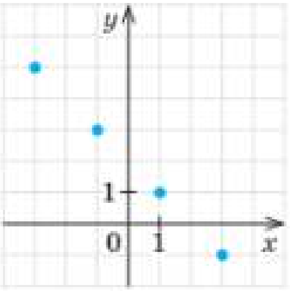
	x	$y=2-x$	y
	-3	$y=2-(-3)$	5
+2	-1	$y=2-(-1)$	3
+2	1	$y=2-1$	1
+2	3	$y=2-3$	-1

2)

x	-3	-1	1	3
y	5	3	1	-1

За даними таблиці маємо:
якщо $x=-1$, то $y=3$,
якщо $y=5$, то $x=-3$.

3) $(-3;5)$, $(-1;3)$, $(1;1)$, $(3;-1)$.



ТРЕНУЄМОСЯ 3

1 Заповніть порожні комірки таблиці значень аргумента й функції, якщо відповідну функцію задано формулою.

1) $f(x)=4+x$.

x	5	-1		
$f(x)$			4	-6

2) $f(x)=\frac{x}{5}$.

x	0	-10		
$f(x)$			1	-3

3) $f(x)=10-6x$.

x	$\frac{1}{3}$	-2			$x+1$
$f(x)$			16	-32	

4) $f(x)=\frac{2}{3}x-12$.

x	1,5	-27			$x-3$
$f(x)$			8	-14	

2 Складіть таблицю значень функції $f(x)=4x$, якщо аргумент задано в межах від 0 до 3 включно із кроком 1. За таблицею:

1) назвіть значення функції, які відповідають значенням аргумента $x=0$; 2; 3;
2) назвіть значення аргумента, при яких значення функції дорівнюють 4; 8; 12;
3) запишіть відповідні значення аргумента й функції у вигляді впорядкованих пар чисел та побудуйте на координатній площині точки, координатами яких є ці пари чисел.

3 Складіть таблицю значень функції $f(x)=2x-5$, якщо аргумент задано в межах від -2 до 6 включно із кроком 2. За таблицею:

1) назвіть значення функції, які відповідають значенням аргумента $x=0$; 4; 6;
2) назвіть значення аргумента, при яких значення функції дорівнюють -9; -1; 7;
3) запишіть відповідні значення аргумента й функції у вигляді впорядкованих пар чисел та побудуйте на координатній площині точки, координатами яких є ці пари чисел.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Знаючи формулу, якою задана функція, можна скласти таблицю відповідних значень аргумента й функції. За такою таблицею зручно будувати графік функції.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Функція — одне з основних математичних понять. Слово «функція» походить від латинського *functio* — виконання, здійснення. У математиці цей термін першим застосував у XVII ст. Г. В. Лейбніц, але самі функціональні залежності вивчалися людьми ще в давнину.

ПРИКЛАД 4

У таблиці наведено дані щодо витрат лайнером пального протягом польоту.

Час польоту лайнера x (год)	1	2	3	4
Витрати пального y (л)	3000	6000	9000	12 000

1) Скільки тисяч літрів пального витрачає лайнер за 2 год польоту?
2) За скільки годин польоту лайнер витрачає 12 000 л пального?
3) Спираючись на дані таблиці, виразіть y через x. Вважайте, що витрати пального щогодини не змінюються.
4) Визначте за формулою, скільки тисяч літрів пального витрачає лайнер за 5 год польоту.
5) Визначте за формулою, за який час лайнером буде витрачено 18 000 л пального.

Розв'язання:

1) За даними таблиці: якщо $x = 2$, то $y = 6000$.

2) За даними таблиці: якщо $y = 12\,000$, то $x = 4$.

Час польоту лайнера x (год)	1	2 ↓	3	4 ↑
Витрати пального y (л)	3000	6000	9000	12 000

3) Знаходимо залежність $y(x)$, дослідивши закономірність зміни витрат пального із часом.

$1 \to 3000$,
$2 \to 6000$,
$3 \to 9000$,
$4 \to 12\,000$,
$x \to 3000x$.
Отже, $y = 3000x$

4) Підставляємо у формулу значення аргумента і знаходимо значення функції.

$x = 5 \to y = 3000 \cdot 5$; $y = 15\,000$

5) Підставляємо у формулу значення функції і знаходимо значення аргумента.

$y = 18\,000 \to 3000x = 18\,000$; $x = 6$

Відповідь: 1) 6000 л; 2) за 4 год; 3) $y = 3000x$; 4) 15 000 л; 5) за 6 год.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

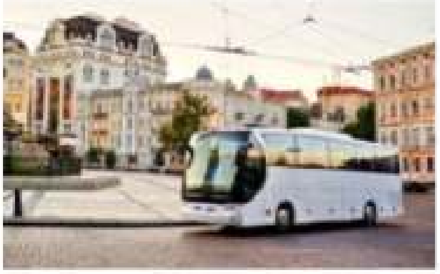
ТРЕНУЄМОСЯ 4

1 У таблиці наведено дані щодо віку й маси крокодила.

Вік x (роки)	2	3	3	6	7
Маса y (кг)	220	350	380	670	810

1) Яка маса крокодила віком 6 років?
2) Яка маса крокодилів віком 3 роки?
3) Запишіть відповідні значення аргумента й функції у вигляді впорядкованих пар чисел $(x; y)$.
4) Чи є подана залежність y від x функцією?

2 У таблиці наведено дані щодо витрат рейсовим автобусом пального протягом подорожі.



Відстань, яку долає автобус x (км)	1	2	3	4
Витрати пального y (л)	0,3	0,6	0,9	1,2

1) Скільки літрів пального витратив автобус, проїхавши 3 км?
2) Яку відстань може подолати автобус, витративши 0,6 л пального?
3) Спираючись на дані таблиці, виразіть y через x. Вважайте, що витрати пального постійні протягом подорожі.
4) Визначте за формулою, скільки літрів пального витратить автобус на 10 км шляху.
5) Визначте за формулою, яку відстань може подолати автобус, витративши 4,5 л пального.

3 Під час ходьби людина витрачає 2 ккал за хвилину.

1) Складіть таблицю значень x і y, якщо x визначено в межах від 1 до 5 хв включно із кроком 1 хв.
2) Задайте формулою залежність (функцію) кількості y витрачених кілокалорій від часу x (у хв).
3) Визначте, скільки хвилин треба йти, щоб «спалити» 300 ккал.

4 Ціна оренди автомобіля за 1 добу складає 25 г. о., додатково треба надати 300 г. о. застави.

1) Задайте формулою залежність вартості оренди y (у г. о.) від часу x (у добах), протягом якого ви плануєте орендувати автомобіль.
2) Складіть таблицю значень x і y, якщо $x = 1$; 3; 5 діб.
3) Протягом скількох діб ви можете орендувати автомобіль, якщо плануєте витратити на це 475 г. о.?

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

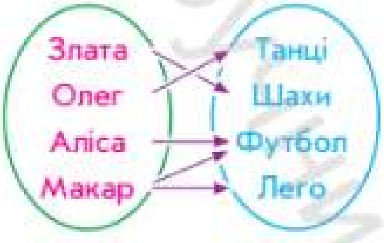
Складено таблицю значень функції, що задана формулою $y = x - 3$.

Чи правильно виконане завдання?

x	−3	−2	−1	0
y	0	1	2	3

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

Олена вважає, що залежність є функцією.

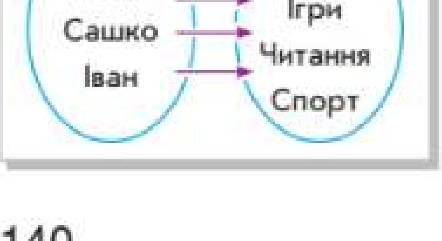


ПРИГАДАЙТЕ!

1 км = 1000 м
1 кг = 1000 г
1 год = 60 хв
1 хв = 60 с
1 год = 3600 с

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Складіть відповідність між вашими друзями й подругами та їхніми захопленнями. Обміняйтеся записами. Визначте, чи є відповідність функцією.



ПРАКТИКУМ

13.1 У наведених функціональних залежностях укажіть аргумент і функцію від цього аргумента:

1) $y = 3x + 4$;
2) $s = -t + 2t^2$;
3) $S = a^2$;
4) $n = 2k + 1$;
5) $p = 4a$;
6) $L = 2\pi r$.

13.2 Чи є наведена залежність функціональною?

1) Кожному цілому числу поставлено у відповідність протилежне йому число.
2) Залежність вартості солі від кількості пачок солі.
3) Залежність силі тяжіння, що діє на тіло, від маси тіла.
4) Кожному пасажиру літака поставлено у відповідність місце в салоні.
5) Залежність часу від положення стрілок на циферблаті механічного годинника протягом доби.

13.3 Виразіть за допомогою функції одну одиницю через іншу:

1) y см через x м;
2) y діб через x тижнів;
3) y кг через x г;
4) y год через x діб;
5) y с через x хв;
6) y м/с через x км/год.

13.4 Функцію задано аналітично: $y = \frac{1}{2}x + 7$. Знайдіть значення:

1) функції, якщо $x = 4; 10; 35$;
2) аргумента, для яких значення функції дорівнює 5; 18; 25,5.

13.5 Функцію задано аналітично: $y = 19 - 3x$, її аргумент визначено в межах від -4 до 4 включно із кроком 1.

1) Складіть таблицю значень x і y.
2) За таблицею назвіть y, якщо $x = -2$; x, якщо $y = 10$.
3) Запишіть відповідні значення аргумента й функції у вигляді впорядкованих пар чисел. Побудуйте на координатній площині точки, координатами яких є ці пари чисел.

13.6 Під час змагань біатлоністка має пройти дистанцію в 7,5 км, але за кожний невлучний постріл дистанція збільшується на 150 м. Запишіть формулу, що виражає залежність шляху s, який доведеться подолати біатлоністці, від кількості n невлучених пострілів.

13.7 Робот-прибиральник за 10 хв прибирає 5 столиків у кафе.

1) Скільки столиків прибере цей робот за 6 хв?
2) Запишіть формулу, що виражає залежність кількості g прибраних столиків від часу t (у хв).
3) Знайдіть значення t, при якому $g=12$.

13.8 У ботанічному саду висадили рідкісне дерево заввишки 1,5 м. Упродовж першого року воно виросло на 0,2 м, а кожного наступного року його висота збільшувалась на 0,3 м.

1) Знайдіть залежність висоти y дерева від x — кількість років з моменту його посадки. Запишіть відповідну формулу та спростіть її.
2) Визначте, якою буде висота дерева через: 2 роки, 5 років, 10 років після посадки.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

13.9 Функцію y задано певною формулою. Складіть таблицю значень функції для значень аргумента $x=-2$; -1; 0; 1; 2, якщо:

1) $y=|x|$;
2) $y=-|x|$;
3) $y=|x|+1$;
4) $y=3-|x|$;
5) $y=|x-2|$;
6) $y=|4-x|$.

13.10 У таблиці записано кілька відповідних значень x і y для певної функції. Відновіть формулу, якою задана ця функція. Вважайте, що поведінка функції не зміниться і поза межами таблиці.

1)

x	0	1	2	3
y	0	2	4	6

2)

x	0	1	2	3
y	−5	−4	−3	−2

3)

x	0	1	2	3
y	−1	2	5	8

4)

x	0	1	2	3
y	1	−1	−3	−5

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

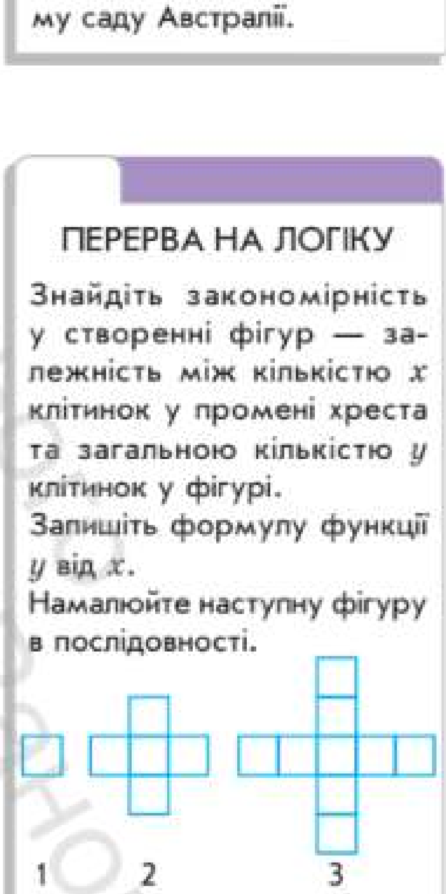
Жакаранда — інакше фіалкове або палісандрове дерево — вічнозелене дерево заввишки до 20–30 метрів, яке росте в зазвичай у тропіках. За австралійською легендою богиня мудрості роздавала людям знання, сидячи під кроною жакаранди. І тепер це дерево росте в кожному університетському саду Австралії.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть закономірність у створенні фігур — залежність між кількістю x клітинок у промені хреста та загальною кількістю y клітинок у фігурі.

Запишіть формулу функції y від x.

Намалюйте наступну фігуру в послідовності.



MATH FOR LIFE

13.11 ***Рекорди Ярослави Магучіх.*** Багаторазова чемпіонка світу і Європи, бронзова призерка Олімпійських ігор 2020 року зі стрибків у висоту досягла таких результатів. Чи є функцією залежність висоти від року, подана в таблиці? Поясніть свою думку.

Рік	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Висота (см)	175	184	190	199	202	206	202	202

13.12 ***Хімія.*** У лабораторії нагрівають розчин за законом, який описується функцією $y=5x+2$, де x — час (у хв), y — температура (у °C).

1) Якою була початкова температура розчину $(x=0)$?
2) Якою була температура розчину через 6 хв після початку нагрівання?
3) Через скільки який час після початку нагрівання температура розчину становила 57 °C?

13.13 ***Здоров'я.*** О 7:00 годині ранку вода в термальному басейні мала температуру 25 °C. Упродовж дня температура води щогодини підвищувалася на 2 °C.

1) Запишіть формулу, що виражає залежність температури води від часу t, рахуючи від 7:00.
2) Якою була температура води в момент часу $t=0{,}4$; 1; 2; 3,5 год, рахуючи від 7:00?
3) О котрій годині температура води дорівнювала 27 °C, 29 °C, 35 °C, 42 °C?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

На Закарпатті відомо понад 50 термальних джерел. Про лікувальні властивості термальних вод було відомо ще за часів Римської імперії. Сьогодні вони застосовуються для лікування серцево-судинних та нервових захворювань, а також захворювань опорно-рухового апарату та органів дихання.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Завдання 13.14 → Приклад 1
Завдання 13.15 → Приклад 2
Завдання 13.16 → Приклад 3
Завдання 13.17 → Приклад 3
Завдання 13.18 → Приклад 3
Завдання 13.19 → Приклад 4
Завдання 13.20 → Приклад 4
Завдання 13.21 → Приклад 4
Завдання 13.22 → Інтелектуальний фітнес, 13.10

13.14 Чи є наведена залежність функціональною?

1) $y=x-2$.
2) $x=3$.
3) Кожному учню та кожній учениці вашого класу після написання ними контрольної роботи поставлена у відповідність одержана оцінка.
4) Кожному мобільному телефону учня та учениці вашого класу поставлений у відповідність рік випуску цього мобільного телефону.

Підручник. Презентація видавництва "Ранок"

13.15 Функцію задано аналітично $y=\frac{1}{6}x-11$. Знайдіть значення:

1) функції, якщо $x=-3;\ 6;\ 9$;

2) аргумента, для яких значення функції дорівнюють $-8;\ 0;\ 4$.

13.16 Заповніть порожні комірки таблиці значень аргумента і функції, якщо відповідну функцію задано формулою.

1) $f(x)=x+3$.

x	2	-4		
$f(x)$			9	-5

2) $f(x)=\frac{x}{4}$.

x	0	-20		
$f(x)$			3	-6

3) $f(x)=18-5x$.

x	$\frac{1}{5}$	-4			$x-2$
$f(x)$			23	-27	

4) $f(x)=\frac{4}{5}x-23$.

x	1,25	-35			$x+5$
$f(x)$			17	-31	

13.17 На тренінгу в дискусійному клубі всіх присутніх об'єднали в 6 груп із різною кількістю людей.

Номер групи	1	2	3	4	5	6
Кількість людей	3	4	5	6	7	8

1) Скільки людей було в першій, другій, останній групі?

2) Запишіть формулу, що виражає функціональну залежність кількості людей у групі від номера групи.

13.18 Складіть таблицю значень функції $f(x)=3x-11$, якщо аргумент задано в межах від -6 до 6 включно із кроком 2. За таблицею визначте:

1) значення функції, які відповідають значенням аргумента $x=-4;\ 0;\ 2$;

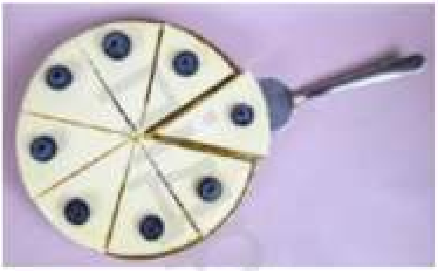
2) значення аргумента, при яких значення функції дорівнюють $-29;\ -17;\ 1$;

3) запишіть відповідні значення аргумента й функції у вигляді впорядкованих пар чисел та побудуйте на координатній площині точки, координатами яких є ці пари чисел.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Внесіть у таблицю дані щодо обсягу електроенергії, спожитої за 5 днів у вашому домі (квартирі, помешканні), та її вартості. Виконайте розрахунки, скориставшись формулою $y=2{,}64x$. Зробіть висновок, чи ощадливо витрачається електроенергія у вашій оселі.

Електроенергія	Дні				
	1	2	3	4	5
Кількість (квт·год), x					
Вартість (грн), y					



x	1	2	3	4
y	2	4	6	8

13.19 Торт розрізають на шматки, причому кількість шматків y залежить від числа розрізів x. У таблиці наведено дані щодо x і y.

1) Скільки шматків торта отримали, якщо зробили 3 розрізи?
2) Скільки розрізів потрібно зробити, щоб отримати 8 шматків?
3) Складіть формулу залежності y від x.
4) Визначте за формулою, скільки розрізів потрібно зробити, щоб отримати 24 шматки торта.
5) Визначте за формулою, скільки шматків торта отримали, якщо зробили 10 розрізів.

13.20 Їдучи на велосипеді, людина витрачає 400 ккал за 10 хв.

1) Складіть таблицю значень x і y, якщо x визначено в межах від 10 до 40 хв включно із кроком 10 хв.
2) Задайте формулою залежність (функцію) кількості y витрачених кілокалорій від часу x (у хв).
3) Визначте, скільки хвилин треба їхати на велосипеді, щоб «спалити» 2400 ккал?

13.21 Ціна оренди велосипеда за 1 год складає 15 г. о., додатково треба надати 200 г. о. застави.

1) Задайте формулою залежність вартості оренди y (у г. о.) від часу x (у год), протягом якого ви плануєте орендувати велосипед.
2) Складіть таблицю значень x і y, якщо $x=1$; 2; 4 год.
3) Протягом скількох годин ви можете користуватися орендованим велосипедом, якщо плануєте витратити на це 275 г. о.?

Бонусне завдання

13.22 У таблиці записано кілька відповідних значень x і y для функції $y=f(x)$. Відновіть формулу, якою задана ця функція. Вважайте, що поведінка функції не зміниться і поза межами таблиці.

1)

x	2	3	4	5
y	10	15	20	25

2)

x	−5	−4	−3	−2
y	9	7	5	3

# BE SMART

Катерина Пожарська, наукова співробітниця відділу теорії функцій Інституту математики Національної Академії Наук України, здобула міжнародну премію з математики «Joseph F. Traub Information-Based Complexity Young Researcher Award 2023». Ця премія щороку присуджується єдиній у світі молодій людині (до 35 років), яка займається математикою, за значний внесок у теорію інформаційної складності.

Проєкт електронного підручника видавництва "Ранок"

§ 14 ГРАФІК ФУНКЦІЇ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ.

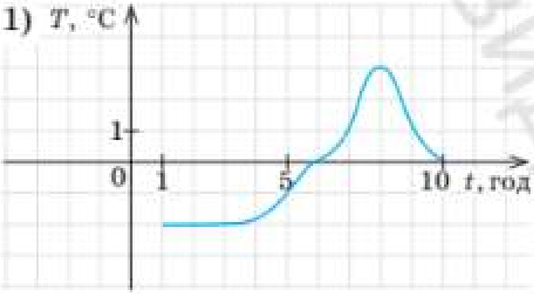
ГРАФІКИ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ МІЖ ВЕЛИЧИНАМИ, ЯКІ ОПИСУЮТЬ РЕАЛЬНІ ПРОЦЕСИ

ВЧОРА	Ви познайомилися з функціями та деякими способами задання функцій
СЬОГОДНІ	Ви навчитеся працювати з графіком функції, зокрема визначати значення функції, знаючи значення аргумента, і навпаки
ЗАВЖДИ	Ви зможете дізнатися багато цікавого за графіками реальних процесів

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

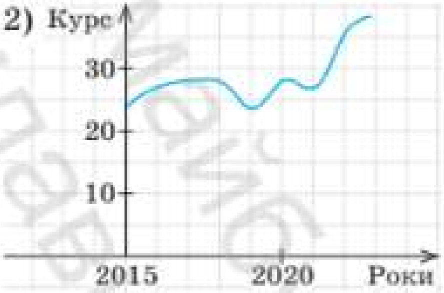
ГРАФІКИ НАВКОЛО НАС

1)



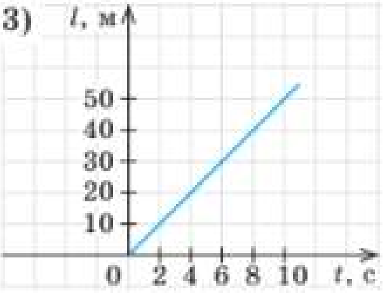
Графік зміни температури протягом 9 годин

2)



Графік зміни курсу долара за даними НБУ

3)



Графік шляху

Розгляньте графіки й визначте:

1) якою була найвища температура протягом 9 год;

2) яким був курс долара у 2015 році;

3) який шлях пройшло тіло за 6 с;

4) чи можна сказати, що наведені графіки ілюструють функціональні залежності.

Чи вдалося вам виконати завдання?

Ви вже неодноразово стикалися з графіками функціональних залежностей між величинами — і на уроках математики, і в реальному житті. Графіки будуть поряд із вами протягом усього навчання — ви працюватимете з ними, вивчаючи фізику, географію, економіку тощо. За допомогою графіків ви розв'язуватимете різноманітні задачі, і з деякими з них познайомитеся сьогодні.

Але перш за все треба навчитися будувати графіки функцій.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- графік функції (*function graph*)
- значення аргумента (*value of argument*)
- значення функції (*value of function*)

ДОСЛІДЖУЄМО!

Розгляньте побудову графіка функції $y = x^2$. Зробіть висновки. Дайте відповідь на запитання.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Якщо скласти таблицю відповідних значень аргумента й функції та позначити на координатній площині (у системі координат) точки, координати яких записані в цій таблиці, то отримаємо фігуру, яку називають **графіком функції**.

Складемо таблиці відповідних значень x і y у межах від -2 до 2 включно з різними кроками. Побудуємо на координатній площині точки, координатами яких є пари чисел $(x; y)$. Для випадку 1 використаємо рожевий колір, для випадку 2 — блакитний, для випадку 3 — зелений.

1) Крок дорівнює 2.

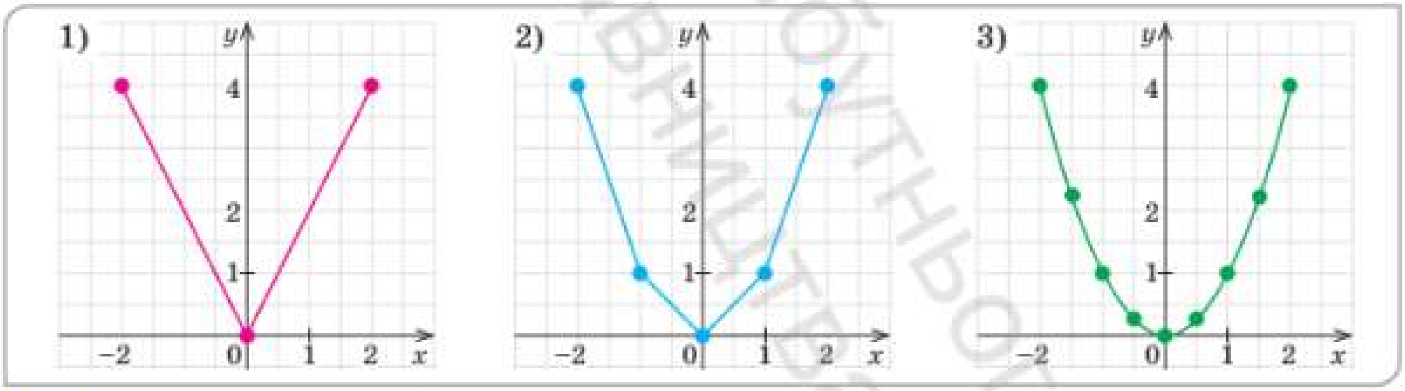
x	-2	0	2
y	4	0	4

2) Крок дорівнює 1.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

3) Крок дорівнює 0,5.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4



ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Графік функції, заданої таблично, складається з окремих точок, а графік функції, заданої аналітично, але побудований за допомогою складання таблиці відповідних значень аргумента і функції, — це лінія.

1) Сполучимо точки відрізками відповідного кольору. Які фігури отримали?

2) Чи є кожна з ліній графіком функції $y = x^2$? Поясніть свою думку.

3) Яка з ліній, на вашу думку, точніше відтворює графік функції $y = x^2$?

4) Чи згодні ви з таким твердженням: «Чим більше візьмемо точок, які належать графіку заданої функції, тим точнішим буде побудований за ними графік»?

Означення. Графіком функції називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргумента, а ординати — відповідним значенням функції.

Проте фігура, побудована на координатній площині, не обов'язково є графіком функції.

Для того щоб визначити, чи є фігура графіком функції, застосовують тест вертикальної прямої.

Тест вертикальної прямої

Якщо ви зможете знайти вертикальну пряму, що перетинає фігуру **більш ніж в одній точці**, то ця фігура **не є графіком функції**.

В іншому випадку фігура **є графіком** функції.

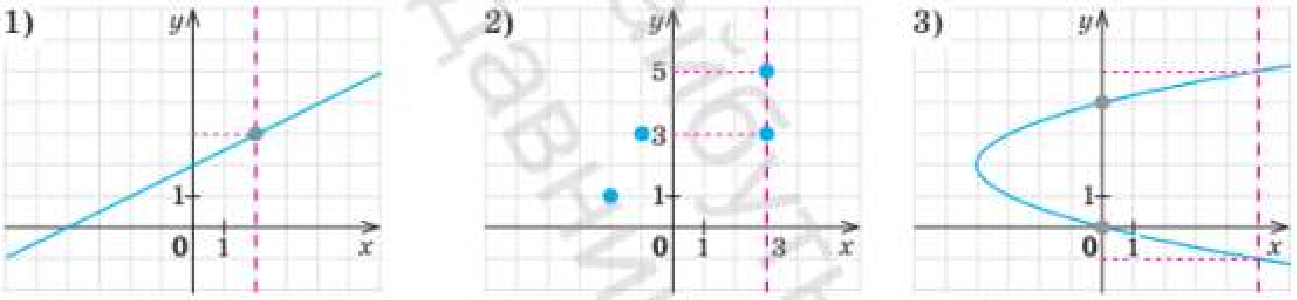
СЛІД ЗНАТИ!

Одному значенню аргумента завжди відповідає **одне** значення функції, але **одному** значенню функції може відповідати **декілька** значень аргумента.

ПРИКЛАД 1

Чи є зображені на рисунках фігури графіками функції? Поясніть свою відповідь.

Розв'язання (пояснення):



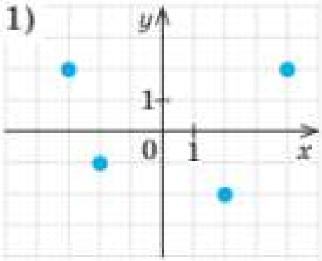
Кожному значенню x відповідає одне значення y, отже, фігура є графіком функції

Існують значення x, яким відповідають більш ніж одне значення y, отже, фігура не є графіком функції.

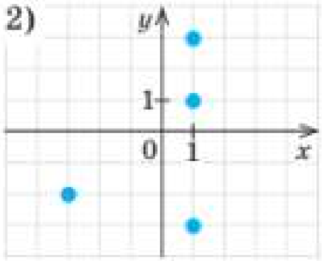
ТРЕНУЄМОСЯ 1

Чи є фігури 1–4 графіками функцій? Поясніть свою відповідь.

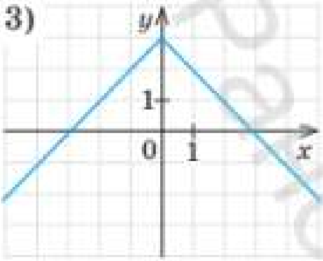
1)



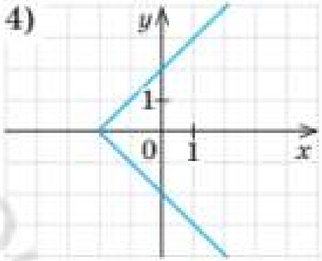
2)



3)



4)



Підручник Проект майбутнього видавництва "Ранок"

СЛІД ЗНАТИ!

У наступних класах ви дізнаєтеся про:
- проміжки зростання і спадання функції;
- нулі функції;
- максимальне й мінімальне значення функції;
- проміжки знакосталості функції тощо

Ви вже знаєте, що таке функція, та вмієте будувати її графік. У наступних класах ви навчитеся досліджувати властивості функцій аналітично й за графіками. І ці знання допоможуть вам розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту.

Ви вмієте для певного значення аргумента знаходити відповідне значення функції, якщо функція задана аналітично (формулою), і навпаки, за даним значенням функції знаходити значення аргумента.

Відповідні значення функції та аргумента можна знайти також у випадку, коли функція задана графічно (тобто за допомогою графіка).

ПРИКЛАД 2

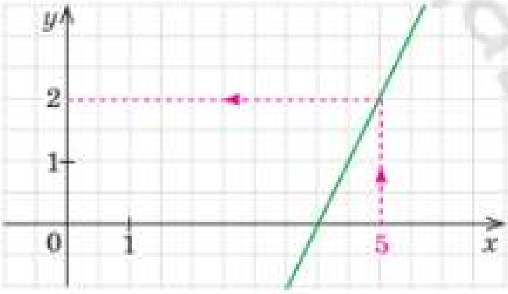
За поданим графіком функції знайдіть:

1) значення функції, якщо задано значення аргумента;

2) значення аргумента, якщо задано значення функції.

Розв'язання:

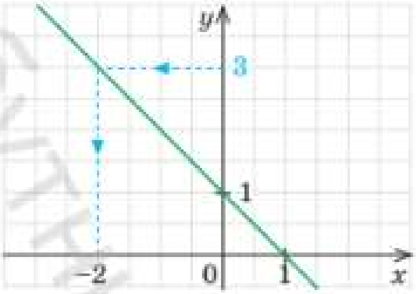
1) За значенням аргумента $x = 5$ знайдіть значення функції y



Алгоритм

1. На осі Ox позначаємо точку з абсцисою 5.
2. Проводимо через цю точку пряму, паралельну осі Oy, до перетину з графіком функції.
3. З одержаної точки перетину проводимо пряму, паралельну осі Ox, до перетину з віссю Oy.
4. Ордината цієї точки є шуканим значенням функції: $y = 2$.
5. *Відповідь:* якщо $x = 5$, то $y = 2$.

2) За значенням функції $y = 3$ знайдіть значення аргумента x



Алгоритм

1. На осі Oy позначаємо точку, ордината якої дорівнює 3.
2. Проводимо через цю точку пряму, паралельну осі Ox, до перетину з графіком функції.
3. З одержаної точки перетину проводимо пряму, паралельну осі Oy, до перетину з віссю Ox.
4. Абсциса цієї точки є шуканим значенням аргумента: $x = -2$.
5. *Відповідь*: якщо $y = 3$, то $x = -2$.

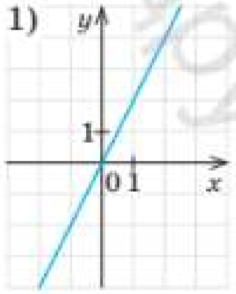
ТРЕНУЄМОСЯ 2

За поданим графіком функції знайдіть:

а) значення функції, якщо задано значення аргумента;

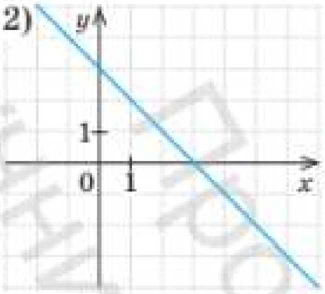
б) значення аргумента, якщо задано значення функції.

1)



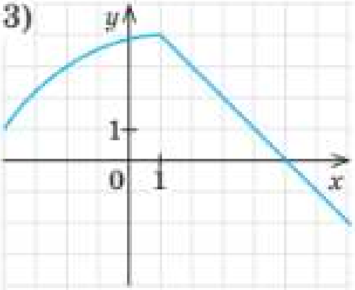
$x = -1;\ 2;\ y$ — ?
$y = -2;\ 2;\ x$ — ?

2)



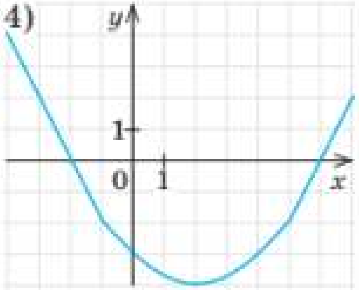
$x = -1;\ 5;\ y$ — ?
$y = -3;\ 2;\ x$ — ?

3)



$x = -2;\ 3;\ y$ — ?
$y = -1;\ 1;\ x$ — ?

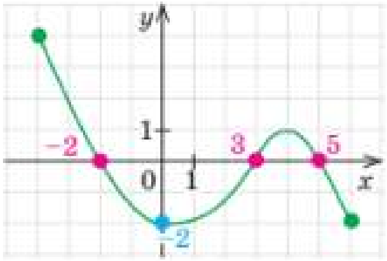
4)



$x = -3;\ 5;\ y$ — ?
$y = -3;\ -2;\ x$ — ?

Користуючись графіком функції, ви можете знайти координати точок перетину графіка з осями координат. За цими точками зручно будувати графіки прямої.

Точки перетину графіка з віссю Ox	Точки перетину графіка з віссю Oy
Координати цих точок мають вигляд $(x; 0)$. *Відповідь:* $(-2; 0)$; $(3; 0)$; $(5; 0)$.	Координати цих точок мають вигляд $(0; y)$. *Відповідь:* $(0; -2)$.

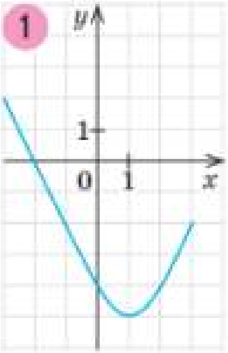


Точок перетину графіка функції з віссю Ox може бути декілька, а точка перетину з віссю Oy — тільки одна.
Це випливає з означення функції.

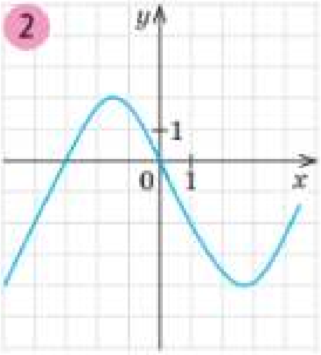
РОЗМИНКА 2

Визначте координати точок перетину графіків з осями координат.

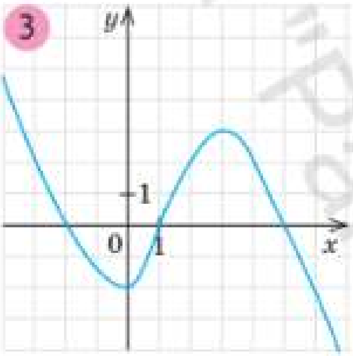
1



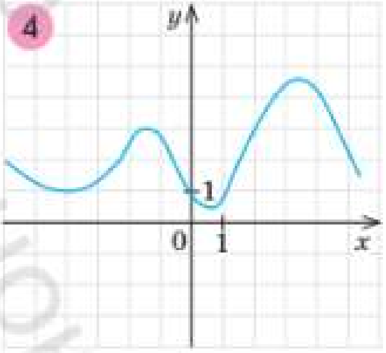
2



3



4



ПРИГАДАЙТЕ!

Функція — це залежність однієї змінної від іншої, при якій **кожному** значенню незалежної змінної ставиться у відповідність **єдине** значення залежної змінної. Незалежну змінну називають **аргументом**, а залежну — **значенням функції** або **функцією** від цього аргумента.

Область визначення, область значень функції

Розглянемо ще два дуже важливих поняття, пов'язаних із функцією — область визначення і область значень функції.

!

Усі значення, яких може набувати незалежна змінна (аргумент), утворюють **область визначення функції**, її позначають $D(y)$.

Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція) при всіх значеннях аргумента *з області визначення*, утворюють **область значень функції**, її позначають $E(y)$.

Якщо функція задана таблично, то область визначення — це всі наведені в таблиці значення аргумента, а область значень — це всі наведені в таблиці значення функції. Тобто і областю визначення, і областю значень є окремі числа.

Якщо функція задана аналітично (за допомогою формули), то область визначення — це всі значення аргумента, **при яких формула має зміст**.

Область визначення і область значень функції зазвичай можна знайти за допомогою графіка.

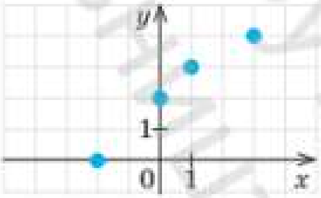
ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть відповідність між числами й літерами й заповніть другу таблицю.

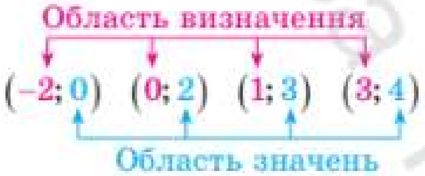
4	21	1	25	12	15
Г	Р	А	Ф	І	К

25	24	18	15	27	12	33

Наприклад:



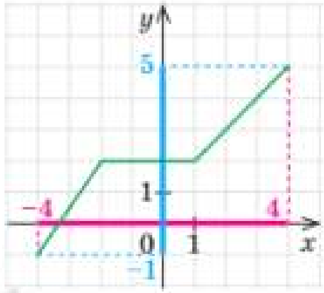
Записуємо пари точок, що відповідають графіку:



Відповідь.

Область визначення: −2; 0; 1; 3.

Область значень: 0; 2; 3; 4



Визначаємо за графіком відповідні значення аргумента і функції, як показано на рисунку.

Відповідь.

Область визначення: $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

Область значень: $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Усі числа, які належать відрізку числової прямої від числа a до числа b включно, можна записати у вигляді подвійної нерівності $a \leqslant x \leqslant b$.

ПРИКЛАД 3

За графіком функції, поданим на рисунку, знайдіть:

1) область визначення функції;

2) область значень функції;

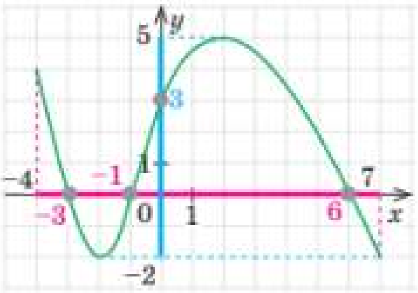
3) координати точок перетину графіка функції з осями координат.

Розв'язання:

1) Графік функції побудований для всіх значень аргумента x таких, що $-4 \leqslant x \leqslant 7$, отже, областю визначення $D(y)$ і буде вказаний відрізок — від −4 до 7, включаючи числа −4 і 7.

2) Функція набуває значень, які не менші від −2 і не більші за 5, тобто $-2 \leqslant x \leqslant 5$, отже, областю значень $E(y)$ і буде вказаний відрізок — від −2 до 5, включаючи числа −2 і 5.

3) Точки перетину графіка з віссю Ox мають координати $(x;0)$; точка перетину графіка з віссю Oy має координати $(0;y)$



$(-3;0)$; $(-1;0)$; $(6;0)$ — точки перетину з віссю Ox;

$(0;3)$ — точка перетину з віссю Oy

Відповідь: 1) $D(y)$: $-4 \leqslant x \leqslant 7$; 2) $E(y)$: $-2 \leqslant x \leqslant 5$; 3) $(-3;0)$; $(-1;0)$; $(6;0)$; $(-3;0)$.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Функції 1–8 задані різними способами. Знайдіть:

а) область визначення функції;

б) область значень функції;

в) координати точок перетину графіка функції з осями координат, якщо такі точки існують.

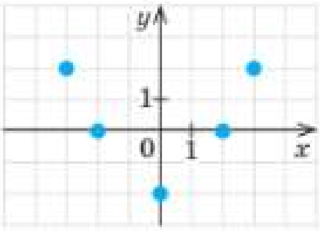
1)

x	y
4	2
3	4
5	6
7	8

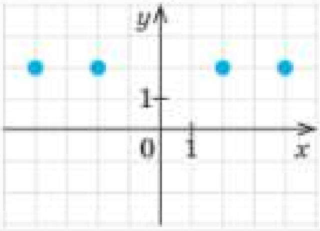
2)

x	y
4	7
5	7
8	7
9	7

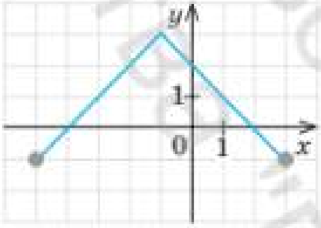
3)



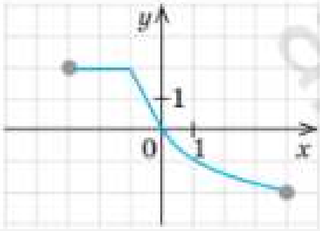
4)



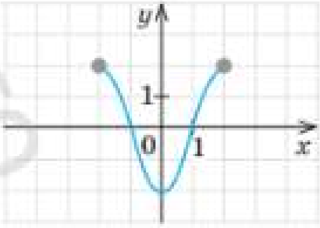
5)



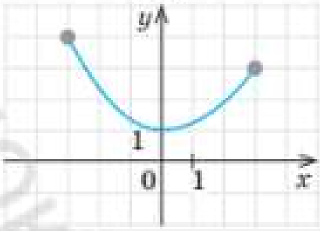
6)



7)



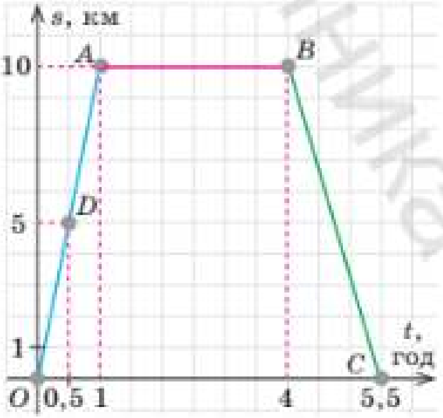
8)



Проєкт майбутнього
підручника видавництва "Ранок"

Ви вже познайомилися з деякими властивостями функцій. Але їх набагато більше. У функцій можуть бути найбільші й найменші значення — максимуми й мінімуми; функції можуть зростати і спадати, набувати додатних і від'ємних значень тощо. Усі ці властивості функцій допомагають розв'язувати конкретні прикладні задачі, однак спочатку потрібно виділити загальні властивості функцій та вивчити їх. Але все це згодом.

ПРИКЛАД 4



Богдан виїхав з дому до волонтерського центру і через деякий час повернувся. На рисунку зображено графік його руху: по осі t відкладено час (у год), а по осі s — відстань між Богданом і його домом (у км). За графіком дайте відповіді на запитання.

1) Скільки часу (у год) Богдан їхав від свого будинку до волонтерського центру?

2) Протягом якого часу (у год) Богдан перебував у волонтерському центрі?

3) Скільки часу (у год) витратив Богдан на дорогу додому?

4) На якій відстані (у км) від будинку Богдана розташований волонтерський центр?

5) Через який час (у год) після виїзду Богдана до волонтерського центру відстань між ним та його будинком *вперше* дорівнювала 5 км?

Розв'язання:

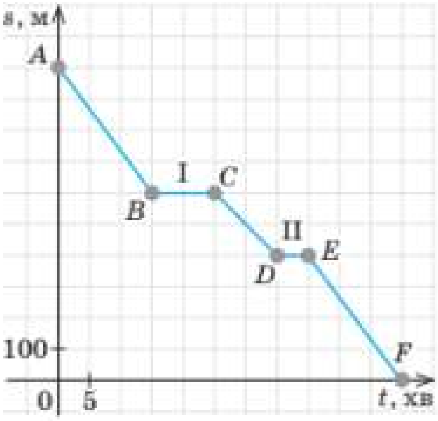
1) Рух хлопця від будинку до волонтерського центру позначений на графіку ланкою OA, оскільки величина s збільшувалася з віддаленням Богдана від будинку.	Абсциси (час t) точок O та A дорівнюють 0 та 1 відповідно. Отже, хлопець був у дорозі $\mathbf{1-0=1}$ (год).
2) Перебування Богдана у волонтерському центрі позначено на графіку ланкою AB, оскільки у той час, як хлопець перебував у центрі, відстань між ним і його будинком не змінювалася.	Абсциси (час t) точок A і B дорівнюють 1 і 4 відповідно. Отже, хлопець був у центрі протягом $\mathbf{4-1=3}$ (год).
3) Рух хлопця від волонтерського центру до будинку позначений на графіку ланкою BC, оскільки величина s зменшувалася з наближенням Богдана до будинку.	Абсциси (час t) точок B і C дорівнюють 4 і 5,5 відповідно. Отже, хлопець витратив на дорогу додому $\mathbf{5{,}5-4=1{,}5}$ (год).
4) Перебування хлопця у волонтерському центрі позначено на графіку ланкою AB.	Ордината (відстань s) кожної точки відрізка AB дорівнює 10. Отже, відстань від волонтерського центру до будинку Богдана дорівнює 10 км.

5) Шукаємо на графіку точку, ордината якої (відстань s) дорівнює 5. Таких точок дві, але за умовою обираємо точку на ланці OA.

Це точка D, її абсциса (час t) дорівнює 0,5. Отже, через 0,5 год після свого виїзду відстань між Богданом та його будинком дорівнювала 5 км.

Відповідь: 1) 1 год; 2) 3 год; 3) 1,5 год; 4) 10 км; 5) через 0,5 год.

ТРЕНУЄМОСЯ 2



Марія вийшла зі школи (точка A) й поїхала додому (точка F). На рисунку зображено графік руху дівчини: s — відстань (у м) між Марією та її будинком, t — час (у хв), протягом якого їхала дівчина. По дорозі Марія зустрілася й поспілкувалася із двома подругами (ланки BC та DE).

1) Скільки часу (у хв) тривала вся подорож Марії від школи додому?

2) Яку загальну відстань (у м) проїхала дівчина?

3) Яку відстань (у м) проїхала Марія до зустрічі з першою подругою?

4) Скільки часу (у хв) Марія спілкувалася з першою подругою?

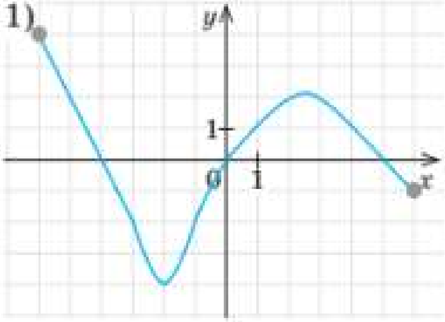
5) З першою чи другою подругою Марія спілкувалася довше?

6) На якій відстані (у м) від школи відбулася зустріч Марії з її другою подругою?

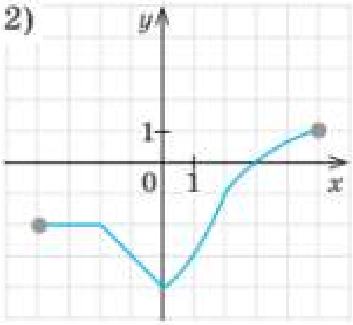
ПРАКТИКУМ

14.1 За графіками функцій 1–4 знайдіть область визначення, область значень функцій і координати точок перетину їх графіків з осями координат.

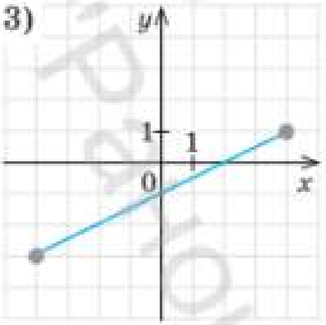
1)



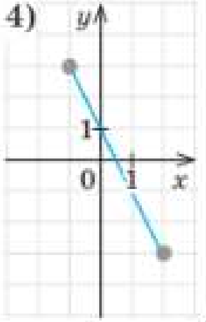
2)



3)



4)



14.2 Графіком функції є ламана ABC. Побудуйте графік цієї функції, якщо:

1) $A(-3;1)$, $B(-1;-1)$, $C(3;1)$;
2) $A(-1;3)$, $B(0;1)$, $C(2;-1)$;
3) $A(-2;-1)$, $B(1;2)$, $C(2;0)$;
4) $A(-2;0)$, $B(-1;-2)$, $C(2;0)$;
5) $A(-4;-1)$, $B(-1;2)$, $C(1;2)$;
6) $A(-2;-1)$, $B(2;-1)$, $C(4;1)$.

Використовуючи побудований графік, укажіть:
а) область визначення функції;
б) область значень функції;
в) координати точок перетину графіка функції з осями координат, якщо такі точки існують.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Знаходимо координати точок перетину графіка функції:

- З віссю Ox — точка з координатами $(x;\ 0)$
  - підставляємо у формулу значення $y = 0$;
  - знаходимо значення x.
- З віссю Oy — точка з координатами $(0;\ y)$
  - підставляємо у формулу значення $x = 0$;
  - знаходимо значення y.

14.3 Не виконуючи побудови графіка функції, визначте координати точок його перетину з осями координат.

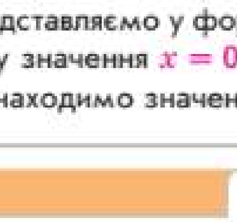
1) $y = 36 + 3x$;
2) $y = 2x + 18$;
3) $y = 8 + x$;
4) $y = 7 - x$;
5) $y = \frac{x}{4} - 3$;
6) $y = \frac{x}{5} + 2$.

14.4 Залежність значення функції від значення аргумента підпорядкована закону $y = 2x - 1$.

1) Область визначення цієї функції містить лише чотири точки: −1; 0; 2; 3. Знайдіть область значень цієї функції.
2) Область визначення цієї функції містить лише чотири точки: −7; −3; 1; 5. Знайдіть область значень цієї функції.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Чи є подана залежність функцією?
Поясніть одне одному свою думку. Задайте цю функцію різними способами. Обміняйтеся записами. Хто запропонував більше способів? Виграє той, хто напише більшу кількість способів.



ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

14.5 Побудуйте графік функції, якщо задані її область визначення та область значень.

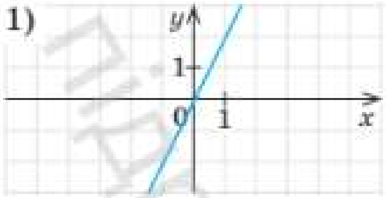
1) Область визначення — відрізок від −1 до 4 включно, область значень — усі числа, які належать відрізку від −2 до 1 включно;
2) Область визначення — відрізок від −3 до 1 включно, область значень — лише число 2;

14.6 Функції 1 і 2 задано графічно.

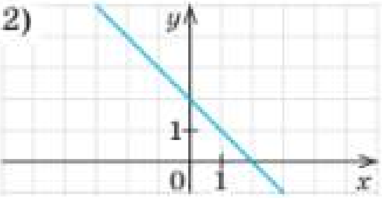
а) Складіть таблицю значень аргумента й функції (4 пари).

б) Задайте функцію формулою.

1)



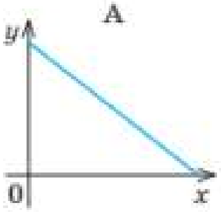
2)



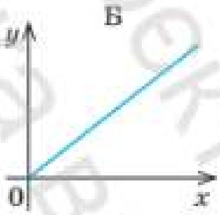
14.7 Установіть відповідність між процесом (1–3) і графіком (А–Г), який описує залежність об'єму води в басейні y (у м³) від часу x (у год).

1. Порожній басейн наповнюють водою
2. Повний басейн спорожнюють
3. Повний басейн спочатку спорожнюють, а потім наповнюють водою

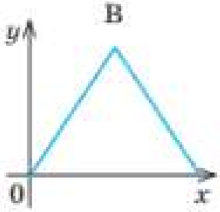
А



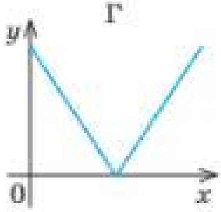
Б



В



Г



Аналізуємо

1. Якщо порожній басейн наповнюватиметься водою, то зі збільшенням часу x збільшуватиметься об'єм y води в басейні. Таку залежність ілюструє графік Б.
2. Якщо повний басейн спорожнюватиметься, то зі збільшенням часу x зменшуватиметься об'єм y води в басейні. Таку залежність ілюструє графік А.
3. Якщо повний басейн спочатку спорожнюватиметься, а потім наповнюватиметься водою, то зі збільшенням часу x об'єм y води в басейні спочатку зменшуватиметься, а потім збільшуватиметься. Таку залежність ілюструє графік Г.

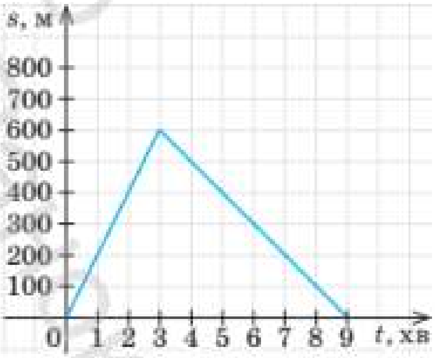
Відповідь: 1–Б, 2–А, 3–Г.

Виконуємо Опишіть процес, відсутній в умові (наповнення басейну водою, його спорожнення тощо), такий, щоб він відповідав би графіку В.

MATH FOR LIFE

14.8 ***Квадрокоптер.*** На рисунку зображено залежність відстані s (у м) між квадрокоптером і місцем його старту від часу польоту t (у хв) квадрокоптера.

1) На якій відстані від місця старту був квадрокоптер через 2 хв і через 6 хв після запуску?
2) Скільки всього часу (у хв) летів квадрокоптер?
3) На яку максимальну відстань віддалився квадрокоптер від місця старту? У який момент часу це відбулося?



ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 9

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

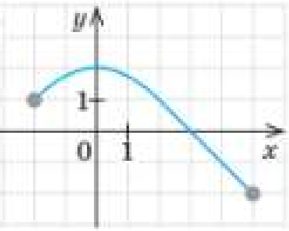
1 Функцію задано аналітично: $y=\frac{x}{20}$. Знайдіть значення функції, якщо $x=100$.

А	Б	В	Г
15	25	5	100

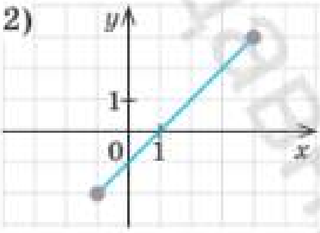
2 За графіком 1 знайдіть область визначення функції $y(x)$.

А	Б	В	Г
$-2\leqslant x\leqslant 2$	$-2\leqslant x\leqslant 5$	$-2\leqslant x\leqslant 3$	$0\leqslant x\leqslant 2$

1)



2)



3 За графіком 1 визначте область значень функції.

А	Б	В	Г
$-2\leqslant y\leqslant 2$	$-2\leqslant y\leqslant 5$	$-2\leqslant y\leqslant 3$	$0\leqslant y\leqslant 2$

4 За рис. 1 знайдіть координати точки перетину графіка функції з віссю Oy.

А	Б	В	Г
$(2;0)$	$(3;0)$	$(0;3)$	$(0;2)$

5 У відкритий ґрунт висадили росток бамбука заввишки 5 см. Кожної наступної години його висота ставала на 4 см більшою. Задайте формулою залежність висоти бамбука h (у см) від часу t (у год) після посадки, ураховуючи висоту рослини в момент її посадки у відкритий ґрунт.

А	Б	В	Г
$h=4t$	$h=4t+5$	$h=5t+4$	$h=5t$

6 За графіком 2 установіть відповідність між характеристиками (1–3) функції та їх числовими значеннями (А–Г).

1	Значення функції, якщо $x=3$.	А	1
2	Значення аргумента, якому відповідає значення функції $y=-2$.	Б	−2
		В	−1
3	Абсциса точки перетину графіка функції з віссю Ox	Г	2

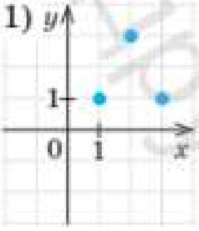
7 Не виконуючи побудови графіка функції $y=\frac{2x}{5}-6$, визначте координати точок його перетину з осями координат.

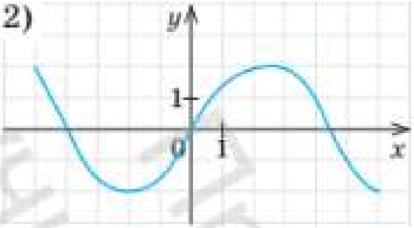
8 Задано функцію $y=|7-x|$. Складіть таблицю значень функції для значень аргумента $x=6$; 7; 8.

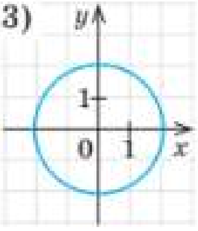
ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Завдання 14.9	→ Приклад 1
Завдання 14.10	→ Приклад 2
Завдання 14.11	→ Приклад 3
Завдання 14.12	→ Приклад 4
Завдання 14.13	→ Практикум, 14.4
Завдання 14.14	→ Інтелектуальний фітнес, 14.5
Завдання 14.15	→ Інтелектуальний фітнес, 14.6

14.9 Чи є фігури 1–3 графіками функцій? Поясніть свою відповідь.

1)


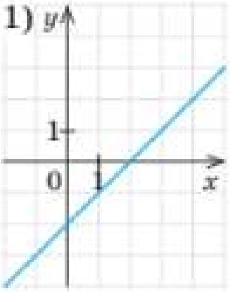
2)


3)


14.10 За поданим графіком функції знайдіть:

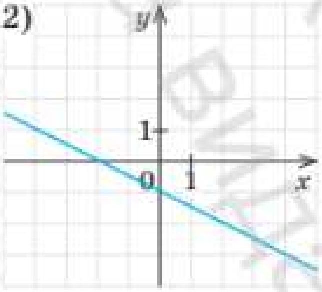
а) значення функції, якщо задано значення аргумента;

б) значення аргумента, якщо задано значення функції.

1)


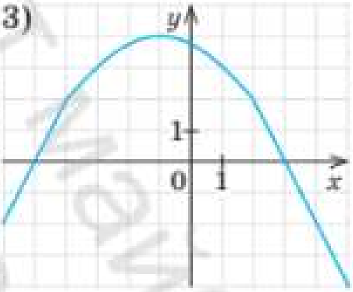
$x = 1;\ 3;\ y$ — ?

$y = -2;\ 2;\ x$ — ?

2)


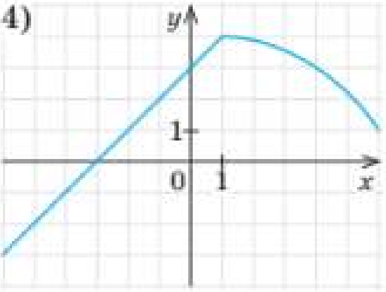
$x = -4;\ 2;\ y$ — ?

$y = -3;\ 1;\ x$ — ?

3)


$x = -5;\ 4;\ y$ — ?

$y = -2;\ 2;\ x$ — ?

4)


$x = -5;\ 1;\ y$ — ?

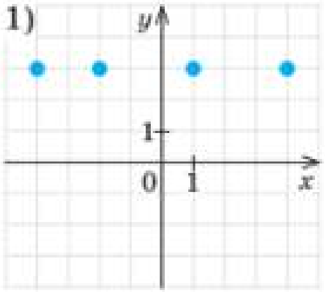
$y = -2;\ 1;\ x$ — ?

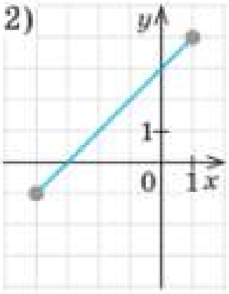
14.11 За поданими графіками функцій знайдіть:

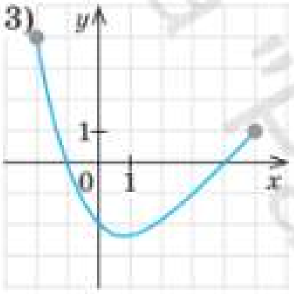
а) область визначення функції;

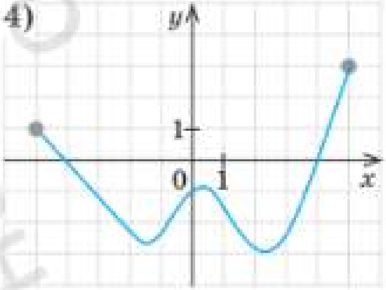
б) область значень функції;

в) координати точок перетину графіка функції з осями координат, якщо такі точки існують.

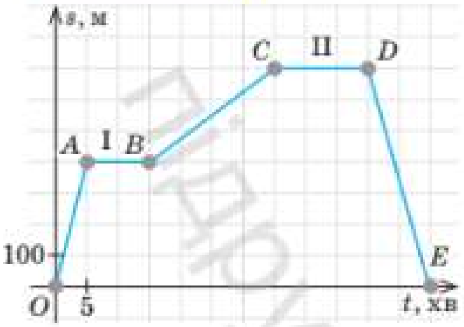
1)


2)


3)


4)


Проект "Майбутнього
підручника видавництва "Ранок"



14.12 Олена вивела з дому на прогулянку свого песика (точка O). На рисунку зображено графік руху дівчини: s — відстань (у м) між Оленою та її будинком; t — час (у год), протягом якого вона вигулювала песика. Під час прогулянки Олена зі своїм улюбленцем два рази зупинялися.

1) Скільки часу (у хв) тривала прогулянка?
2) На яку найбільшу відстань (у м) відійшла дівчина від свого будинку?
3) Скільки метрів пройшла Олена з песиком до першої зупинки?
4) Скільки часу (у хв) тривала перша зупинка?
5) Яка зупинка — перша чи друга — тривала довше й на скільки хвилин?
6) На якій відстані від будинку Олена зупинилася вдруге?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Спробуйте побудувати графіки, що відображають:
- ваш шлях від дому до школи;
- зворотній шлях зі школи додому;
- прогулянку з друзями

14.13 Область визначення деякої функції містить лише чотири точки: 1; 3; 7; 11. Знайдіть область значень цієї функції, якщо залежність значення функції від значення аргумента підпорядкована закону:

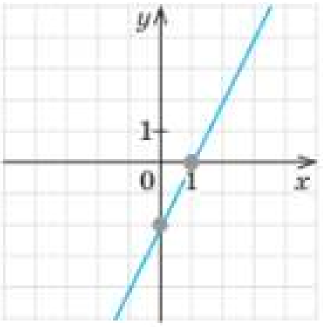
1) $y = 3x$; 2) $y = 2x + 1$.

14.14 Побудуйте графік функції, якщо задані її область визначення та область значень.

1) Область визначення — відрізок від 0 до 6 включно, область значень — усі числа, які належать відрізку від −3 до 0 включно;
2) Область визначення — відрізок від −2 до 4 включно, область значень — лише число −1.

Бонусне завдання

14.15 Функцію задано графічно.



а) Складіть таблицю значень аргумента і функції (4 пари).
б) Задайте функцію формулою.

§ 15 ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ

ВЧОРА	Ви дізналися про функції
СЬОГОДНІ	Ви докладніше вивчатимете окремий вид функцій — лінійну функцію
ЗАВЖДИ	Ви зможете прогнозувати перебіг процесів, які описуються лінійними функціями

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

КРАПЕЛЬНИЙ ПОЛИВ

При крапельному поливі вода подається безпосередньо до рослин малими порціями. Цей метод дозволяє отримати значну економію води. У господарстві, де застосували крапельний полив, вода з резервуара рівномірно й безперервно надходила до рослин. Залежність об'єму води в резервуарі y (у м^3) від часу x (у год) описується функцією $y = 400 - 8x$. На рисунку зображено графік цієї функції.

1. Скільки води було в резервуарі в початковий момент часу $(x = 0)$?

2. Скільки води залишилося в резервуарі через 10 год після початку поливу $(x = 10)$?

3. Через скільки годин після початку поливу вода в резервуарі закінчилася?

Розв'язання

1. Підставимо у формулу $y = 400 - 8x$ значення $x = 0$. Отримаємо: $y = 400 - 8 \cdot 0$; $y(0) = 400$ м^3.

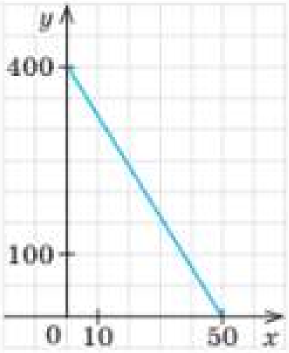
2. Підставимо у формулу $y = 400 - 8x$ значення $x = 10$. Отримаємо: $y = 400 - 8 \cdot 10$; $y(10) = 320$ м^3.

3. Запишемо твердження «вода в резервуарі закінчилася» математичною мовою: $y = 0$. Підставимо у формулу $y = 400 - 8x$ значення $y = 0$. Отримаємо: $0 = 400 - 8x$, звідки $x = 50$. Це значення x можна визначити й за графіком. Обома способами одержимо той самий результат: 50 год.

Відповідь: 1. 400 м^3. 2. 320 м^3. 3. 50 год.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- лінійна функція (*linear function*)
- графік лінійної функції (*graph of a linear function*)
- пряма (*line*)

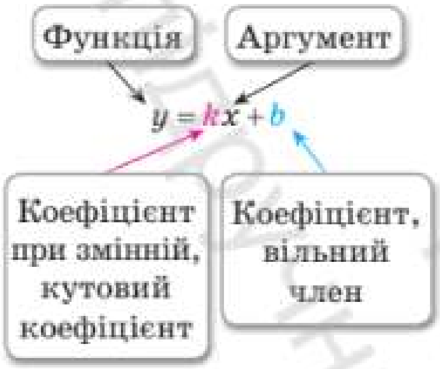


?

ПОМІРКУЙТЕ

Чи можна стверджувати, що об'єм води в резервуарі під час поливу тільки зменшувався?

ГОЛОВНА ІДЕЯ



Означення. Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — аргумент (незалежна змінна), k і b — деякі числа, називають **лінійною функцією**.

Числа k і b називають **коефіцієнтами**. Коефіцієнт k ще називають **кутовим коефіцієнтом**.

РОЗМИНКА 1

Які з наведених функцій є лінійними функціями? Назвіть їхні коефіцієнти k і b.

1) $y = 4x + 6$;
2) $y = -2x$;
3) $y = \frac{3}{x} + 2$;
4) $y = -\frac{3}{4}x + 1$;
5) $y = 8x^2 - 3$;
6) $y = 10x$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- Щоб знайти значення функції, треба підставити у формулу значення аргумента й виконати обчислення.
- Щоб знайти значення аргумента, треба підставити у формулу значення функції і розв'язати рівняння відносно аргумента.
- Щоб перевірити, **чи належить точка графіку функції**, її координати треба підставити у формулу, якою задана функція. Якщо в результаті отримують правильну рівність, то ця точка належить графіку.

ПРИКЛАД 1

Лінійну функцію задано формулою $y = 4x - 8$.

1) Знайдіть значення функції, якщо значення аргумента дорівнює 0; 5;

2) Знайдіть значення аргумента, для якого значення функції дорівнює −16; 0.

3) З'ясуйте, чи належить точка $B(1; -7)$ графіку заданої функції.

Розв'язання:

	Аргумент x		Функція $y = 4x - 8$		Значення функції y
1)	$x = 0$ $x = 5$	→ →	$y = 4 \cdot 0 - 8$ $y = 4 \cdot 5 - 8$	→ →	-8 12
2)	-2 2	← ←	$4x - 8 = -16$ $4x - 8 = 0$	← ←	$y = -16$ $y = 0$

	$(x; y)$	x	y	$y = 4x - 8$	Висновок
3)	$(1; -7)$	1	−7	$-7 = 4 \cdot 1 - 8$ $-7 = -4$	Рівність неправильна. Точка $(1; -7)$ не належить графіку функції

Відповідь: 1) $y(0) = -8$, $y(5) = 12$; 2) $x = -2$, $x = 2$; 3) ні.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Для заданої формулою лінійної функції 1–8:

а) знайдіть значення функції, якщо значення аргумента дорівнює 0; 3;

б) знайдіть значення аргумента, для якого значення функції дорівнює −1; 0;

в) з'ясуйте, чи належить точка B графіку функції.

1) $y=x+1,\ B(2;3)$;

2) $y=x-2,\ B(5;3)$;

3) $y=\frac{x}{4},\ B(1;4)$;

4) $y=-\frac{x}{3},\ B(3;1)$;

5) $y=2x-6,\ B(1;-4)$;

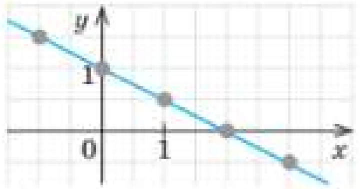
6) $y=10-5x,\ B(4;-10)$;

7) $y=9-0{,}1x,\ B(10;-1)$;

8) $y=8+0{,}4x,\ B(-5;6)$.

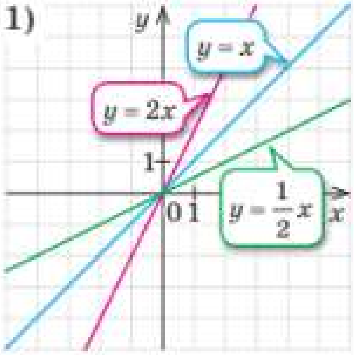
Побудуємо графік лінійної функції, наприклад $y=-0{,}5x+1$. Складемо таблицю значень функції для вибраних значень аргумента. Позначимо в системі координат отримані точки і сполучимо їх (див. рисунок). Графіком лінійної функції є пряма. Щоб побудувати пряму, достатньо знати координати тільки двох точок.

x	−1	0	1	2	3
y	1,5	1	0,5	0	−0,5

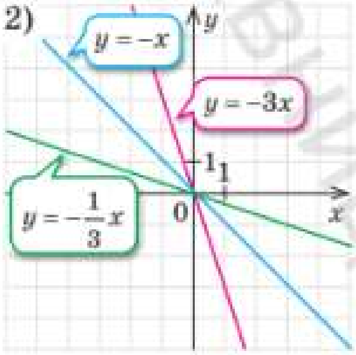


Розглянемо графіки лінійних функцій.

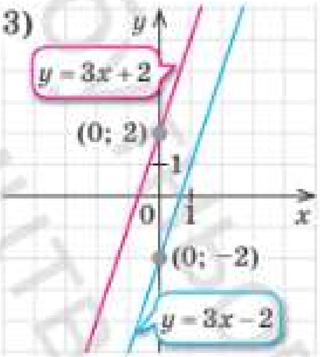
1)



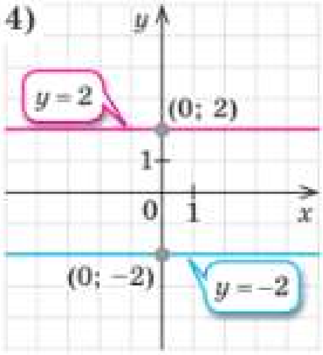
2)



3)



4)



1. Назвіть кутові коефіцієнти функцій.

2. У яких координатних чвертях розташований графік кожної функції?

3. Проаналізуйте рис. 1, 2 і доповніть твердження:

- якщо $k>0$, то графік функції розташований у … і … координатних чвертях;
- якщо $k<0$, то графік функції розташований у … і … координатних чвертях.

ДОСЛІДЖУЄМО!

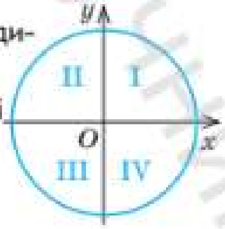
Виконайте завдання 1–6 за рисунками. Порівняйте результати з даними таблиці окремих випадків лінійної функції $y=kx+b$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- $D(y)$ — область визначення функції y;
- $E(y)$ — область значень функції y

СЛІД ЗНАТИ!

Координатні чверті



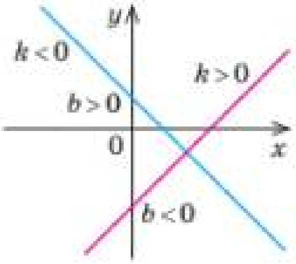
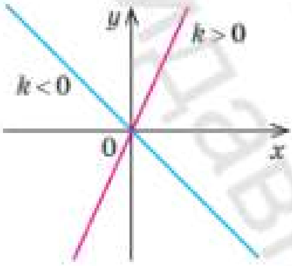
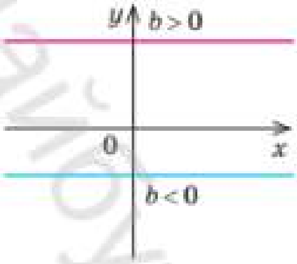
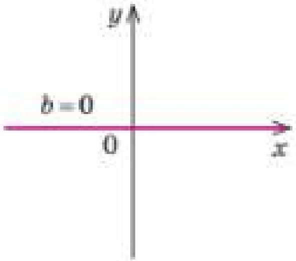
4. Порівняйте кутові коефіцієнти k прямих на рис. 3, 4. Який висновок можна зробити щодо їх взаємного розташування?

5. Проаналізуйте рис. 4 і доповніть твердження:

- якщо $b>0$, то графік функції розташований у ... і ... координатних чвертях;
- якщо $b<0$, то графік функції розташований у ... і ... координатних чвертях.

6. Порівняйте коефіцієнти b прямих на рис. 3, 4 з ординатами точок перетину цих прямих із віссю Oy. Який висновок можна зробити?

Розглянемо окремі випадки лінійної функції $y=kx+b$.

$k\neq 0,\ b\neq 0$	$k\neq 0,\ b=0$	$k=0,\ b\neq 0$	$k=0,\ b=0$
$y=kx+b$	$y=kx$	$y=b$	$y=0$
			
$D(y)$ — усі числа			
$E(y)$ — усі числа		$E(y)=b$	$E(y)=0$
Графік — пряма, що проходить через точку з координатами $(0;b)$	Графік — пряма, що проходить через початок координат $(0;0)$	Графік — пряма, паралельна осі Ox, яка проходить через точку з координатами $(0;b)$	Графік — вісь Ox

СЛІД ЗНАТИ!

Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат, точку (0; 0)

Означення. Функція, виду $y=kx$, де $k\neq 0$, називається **прямою пропорційністю.**

Якщо $k>0$, то графік прямої пропорційності розміщений у I і III координатних чвертях, а якщо $k<0$, то у II і IV координатних чвертях.

ПРИКЛАД 2

Побудуйте графік функції $y = \frac{2}{3}x + 4$.

Розв'язання:

Аргумент x	Функція $y = \frac{2}{3}x + 4$	Значення функції y
$x = 0$ →	$y = \frac{2}{3} \cdot 0 + 4$ →	$y = 4$
$x = -3$ →	$y = \frac{2}{3} \cdot (-3) + 4$ →	$y = 2$

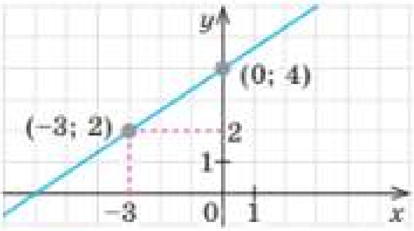
ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Для побудови графіка лінійної функції
1) достатньо 2 точок;
2) доцільно підставляти такі цілі значення аргумента, для яких значення функції буде також цілим.

Можна скласти таблицю значень x і y.

Записуємо координати точок, через які проходить пряма: $(0; 4)$, $(-3; 2)$.

Будуємо знайдені точки в системі координат на площині та проводимо через них пряму. Ця пряма і буде шуканим графіком функції.



СЛІД ЗНАТИ!

Зручним записом даних є таблиця значень x і y.

x	0	−3
y	4	2

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Побудуйте графік функції:

1) $y = 2$;
2) $y = -1$;
3) $y = -x$;
4) $y = 2x$;
5) $y = 3 + x$;
6) $y = 1 - x$;
7) $y = 2x - 4$;
8) $y = 6 - 3x$.

ПРИКЛАД 3

Задано рівняння $5x - 2y = 4$. Запишіть його у вигляді лінійної функції та побудуйте її графік.

Розв'язання:

$5x - 2y = 4$ .... Виражаємо змінну y через змінну x.

$2y = 5x - 4 \,|:2$

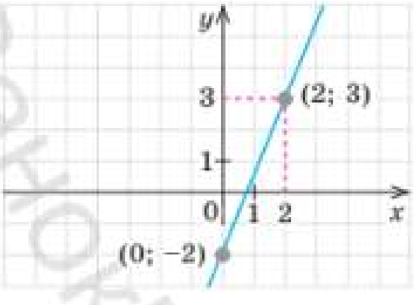
$y = \frac{5}{2}x - 2$ .... Записуємо рівняння у вигляді лінійної функції $y = kx + b$.

x	0	2
y	−2	3

.... Складаємо таблицю значень аргумента й функції для побудови графіка функції.

$(0; -2)$, $(2; 3)$ .... Записуємо координати точок, через які проходить пряма.

Будуємо ці точки в системі координат та проводимо через них пряму. Вона і буде шуканим графіком функції.



Підручник Проєкт майбутнього видавництва "Ранок"

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Виразіть із заданої рівності змінну y через змінну x. Побудуйте графік отриманої функції.

1) $y-3x=0$; 3) $4y+x=0$; 5) $x-2y=2$; 7) $2x+5y=4$;
2) $y+2x=0$; 4) $5y-x=0$; 6) $x+3y=3$; 8) $3x-4y=6$.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Запишіть кілька прикладів лінійної функції. Обміняйтесь записами із сусідом або сусідкою по парті. Чи є серед прикладів пряма пропорційність?

ПРИКЛАД 4

Знайдіть значення k, якщо графік функції $y=kx-2{,}5$ проходить через точку $A(-2;4{,}5)$.

Розв'язання:

$y=kx-2{,}5$, ……… Підставляємо у формулу, якою задана функція, координати точки A. Оскільки за умовою точка належить графіку функції, її координати мають перетворити формулу в правильну рівність.
$A(-2;4{,}5)$
$4{,}5=k\cdot(-2)-2{,}5$

$-2k-2{,}5=4{,}5$ …… Розв'язуємо одержане рівняння відносно k.
$-2k=7$; $k=-3{,}5$

Відповідь: $k=-3{,}5$.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Функція задана формулою $y=kx+b$, точка A належить її графіку. Знайдіть значення невідомого коефіцієнта, якщо:

1) $y=x+b$, $A(1;4)$;
2) $y=x+b$, $A(-2;3)$;
3) $y=x+b$, $A\left(-\frac{1}{2};-11\right)$;
4) $y=x+b$, $A\left(-14;-\frac{1}{5}\right)$;
5) $y=kx$, $A(-5;20)$;
6) $y=kx$, $A(24;-4)$;
7) $y=kx+6{,}5$, $A(3;-8{,}5)$;
8) $y=kx-9{,}5$, $A(2;14{,}5)$.

ФІЗКУЛЬТХВИЛИНКА
«Танцювальна математика»

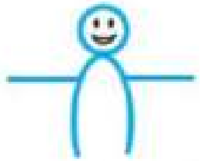
Зробіть вправи:

$y=x$

$y=-x$

$y=|x|$

$y=-|x|$


$y=C$ (число)

ПРАКТИКУМ

15.1 Порівняйте значення:

1) $y(0)$ і $y(3)$, якщо $y=2x-5$;
2) $y(0)$ і $y(5)$, якщо $y=3x-4$;
3) $y(-3)$ і $y(6)$, якщо $y=1-4x$;
4) $y(-6)$ і $y(2)$, якщо $y=3-5x$;
5) $y(-1)$ і $y(0)$, якщо $y=0{,}8-\frac{5x}{3}$;
6) $y(-2)$ і $y(0)$, якщо $y=\frac{2x}{7}-0{,}3$.

15.2 Не виконуючи побудови графіка функції $y=y(x)$, визначте точки перетину цього графіка з осями координат.

1) $y=x+11$; 3) $y=4x-60$; 5) $y=-8-\frac{x}{2}$;

2) $y=14-x$; 4) $y=70+5x$; 6) $y=-\frac{x}{3}-6$.

15.3 Складіть рівняння лінійної функції, якщо:

1) функціональна залежність змінної y від змінної x є прямою пропорційністю, а її графік проходить через точку $B(2;10)$;
2) функціональна залежність змінної y від змінної x є прямою пропорційністю, а її графік проходить через точку $B(-12;3)$;
3) її графік проходить через точку $C(-4;3)$ паралельно осі абсцис;
4) її графік проходить через точку $C(2;-1)$ паралельно осі абсцис.

15.4 У яких координатних чвертях розташовані графіки функцій?

1) $y=5x$; 4) $y=8x$; 7) $y=x+1$;

2) $y=-8x$; 5) $y=-1{,}5x$; 8) $y=2x-3$.

3) $y=2$; 6) $y=-4$;

15.5 Не виконуючи побудови графіків функцій, визначте, чи є серед наведених функцій такі, графіки яких паралельні. Якщо є, укажіть усі такі пари прямих.

1) $y=7x+2$; 4) $y=4x-5$; 7) $y=0$;

2) $y=-7x+2$; 5) $y=-4x-5$; 8) $y=5x-4$.

3) $y=8$; 6) $y=7x-4$;

15.6 Побудуйте в одній системі координат графіки заданих функцій та визначте координати точки їх перетину.

1) $y=2,\ y=-x$; 4) $y=-\frac{x}{3},\ y=2x+7$;

2) $y=-1,\ y=x$; 5) $y=x-2,\ y=-3x-6$;

3) $y=\frac{x}{2},\ y=-2x+5$; 6) $y=2-x,\ y=\frac{1}{4}x-3$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Щоб знайти точку перетину графіка функції з віссю абсцис Ox (з віссю ординат Oy) необхідно формулу, якою задано функцію, підставити значення $y=0$ ($x=0$) і знайти значення x (значення y). Координати точки перетину графіка:

- з віссю Ox — $(x;\ 0)$;
- з віссю Oy — $(0;\ y)$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- $y=kx$ — пряма пропорційність, графік проходить через точку $(0;0)$.
- $y=b$ — графік проходить через точку $(0;b)$ паралельно осі Ox.

СЛІД ЗНАТИ!

Лінійні функції задані формулами $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$.

Прямі, що є графіками цих функцій:

- паралельні, якщо $k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$;
- збігаються, якщо $k_1=k_2$, $b_1=b_2$;
- перетинаються, якщо $k_1\neq k_2$

Підручник-проєкт майбутнього видавництва "Ранок"

Інший варіант роботи в електронному додатку

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 10

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Укажіть лінійну функцію.

А	Б	В	Г
$y=\frac{4}{x}$	$y=4x$	$y=4x^2$	$y=x^3+4$

2 Визначте значення функції $y=\frac{x}{5}$, якщо значення аргумента дорівнює 20.

А	Б	В	Г
4	15	25	100

3 Визначте значення аргумента, для якого значення функції $y=9-2x$ дорівнює 1.

А	Б	В	Г
−5	5	4	−4

4 Укажіть точку, яка належить графіку функції $y=\frac{x}{3}-2$.

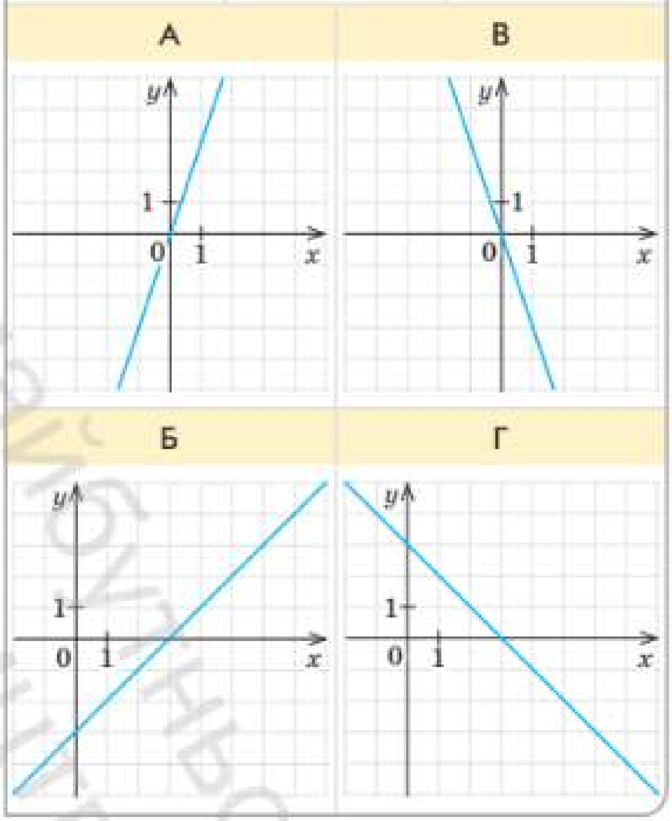
А	Б	В	Г
$A(-1;3)$	$B(3;1)$	$C(0;2)$	$D(6;0)$

5 Залежність ціни попкорну y (у г. о.) від ціни кукурудзи, з якої його виготовлено x (у г. о.), можна описати функцією $y=2{,}5x+10$. Визначте ціну попкорну y (у г. о.), якщо ціна кукурудзи $x=20$ г. о.

А	Б	В	Г
4	60	50	70

6 Установіть відповідність між функцією, заданою формулою (1–3), та її графіком (А–Г).

1	2	3
$y=3x$	$y=x-3$	$y=3-x$



7 Виразіть із рівності $0{,}5x+y=1$ змінну y через змінну x. Побудуйте графік отриманої функції.

8 Знайдіть значення коефіцієнта k, якщо графік функції $y=kx+7{,}5$ проходить через точку з координатами $(1;4{,}5)$.

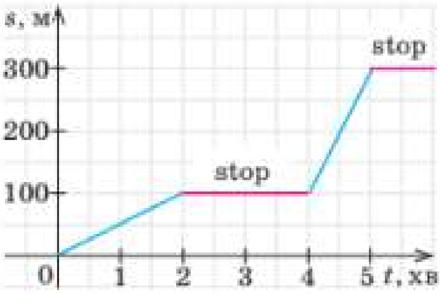
Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

MATH FOR LIFE

15.7 ***Виробництво.*** Залежність ціни паркету y (у г. о.) від ціни деревини для його виробництва x (у г. о.) можна описати функцією $y = 5x + 12$. Визначте:

1) ціну паркету y, якщо ціна деревини $x = 130$ г. о.;
2) ціну деревини x, якщо ціна паркету $y = 117$ г. о.

15.8 ***За результатами випробування*** безпілотного автобуса було побудовано графік залежності $s(t)$ (див. рисунок), де s — відстань (у м), яку подолав автобус по прямій від точки старту, t — час його руху (у хв).



1) Яку відстань від точки старту проїхав автобус до першої зупинки?
2) Скільки хвилин тривала перша зупинка автобуса?
3) Яку відстань проїхав автобус від першої зупинки до другої?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

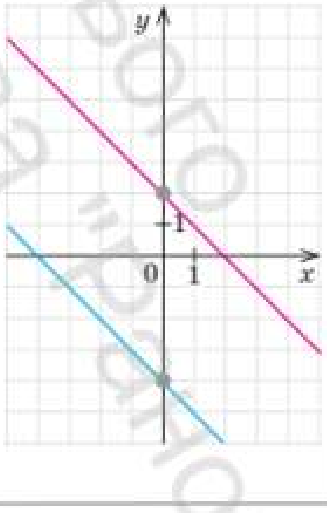
15.9 Побудуйте в одній системі координат графіки двох лінійних функцій. Порівняйте кутові коефіцієнти графіків. Зробіть висновок про взаємне розміщення одержаних прямих.

1) $y = -x + 2$ і $y = -x - 4$; 2) $y = -x + 2$ і $y = 2x + 1$.

Аналізуємо

1) $y = -x + 2$ і $y = -x - 4$.

1. В одній системі координат будуємо графіки функцій, заданих формулами (див. Приклад 2). Обидві функції лінійні, тому одержуємо дві прямі. Досліджуючи рисунок, робимо *висновок*: побудовані прямі паралельні.



2. Визначаємо кутові коефіцієнти прямих:

$$y = -x + 2 \rightarrow k_1 = -1;$$
$$y = -x - 4 \rightarrow k_2 = -1.$$

3. Порівнюємо кутові коефіцієнти: $k_1 = k_2$.
4. Робимо висновок: якщо кутові коефіцієнти k_1 і k_2 прямих рівні, то прямі паралельні (за умови $b_1 \neq b_2$)

Виконуємо

2) $y = -x + 2$,
$y = 2x + 1$

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

Завдання 15.10 → Приклад 1
Завдання 15.11 → Приклад 2
Завдання 15.12 → Приклад 3
Завдання 15.13 → Приклад 4
Завдання 15.14 → Math for life, 15.7
Завдання 15.15 → Math for life, 15.8

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

15.10 Для заданої формулою лінійної функції:

а) знайдіть значення функції, якщо значення аргумента дорівнює 0; 2;

б) знайдіть значення аргумента, для якого значення функції дорівнює −3; 0;

в) з'ясуйте, чи належить точка B графіку заданої функції.

1) $y = x + 3$, $B(5; 8)$;
3) $y = 6 - 4x$, $B(-1; 10)$;
2) $y = -\frac{x}{2}$, $B(2; 1)$;
4) $y = 7 + 0{,}2x$, $B(-5;\ 6)$.

15.11 Побудуйте графік функції:

1) $y = -2$; 2) $y = x$; 3) $y = 2 - x$; 4) $y = 3x - 6$.

15.12 Виразіть із заданої рівності змінну y через змінну x. Побудуйте графік отриманої функції.

1) $y + 3x = 0$; 2) $5y + x = 0$; 3) $x - 4y = 4$; 4) $3x - 5y = 4$.

15.13 Функція задана формулою $y = kx + b$, її графік проходить через точку A. Знайдіть значення невідомого коефіцієнта, якщо:

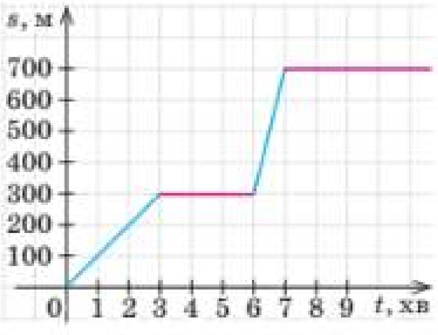
1) $y = x + b$, $A(-1; 6)$;
3) $y = kx$, $A(42; -7)$;
2) $y = x + b$, $A\left(-15; -\frac{1}{4}\right)$;
4) $y = kx + 17{,}5$, $A(3; -15{,}5)$.

15.14 Залежність ціни ламінату y (у г. о.) від ціни сировини для його виробництва x (у г. о.) можна описати функцією $y = 3x + 10$. Визначте:

1) ціну ламінату y, якщо ціна сировини $x = 142$ г. о.
2) ціну сировини x, якщо ціна ламінату $y = 172$ г. о.

15.15 За результатами випробування безпілотного тролейбуса було побудовано графік залежності $s(t)$ (див. рисунок), де s — відстань (у м), яку подолав тролейбус по прямій від точки старту, t — часу його руху (у хв).

1) Яку відстань від точки старту проїхав тролейбус до першої зупинки?
2) Скільки хвилин тривала перша зупинка тролейбуса?
3) Яку відстань проїхав тролейбус від першої зупинки до другої?



ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Прислів'я можуть бути математичними «портретами» функцій.

Ось прислів'я, що можуть «проілюструвати» властивості прямої пропорційності.

- Хто багато читає, той багато знає.
- Багато снігу — багато хліба.

Пригадайте ще кілька схожих прислів'їв.

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 13–15

1 Ви познайомилися з особливою математичною залежністю — функцією.

Функція — це залежність однієї змінної від іншої, при якій кожному значенню незалежної змінної ставиться у відповідність **єдине** значення залежної змінної.

Незалежну змінну називають **аргументом**, а залежну — **значенням функції**, або **функцією** від цього аргумента.

Усі значення, яких може набувати незалежна змінна (аргумент), утворюють **область визначення функції**, її позначають $D(y)$. Усі значення, яких може набувати залежна змінна (функція), утворюють **область значень функції**, її позначають $E(y)$.

2 Ви дізналися про те, як можна задавати функцію.

Виділяють такі **способи задання функції:**

- аналітичний;
- табличний;
- описовий;
- графічний.

3 Ви навчилися будувати графік функції та використовувати його під час виконання завдань.

Графіком функції називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргумента, а ординати — відповідним значенням функції.

4 Ви познайомилися з окремим видом функції — лінійною функцією, а також із її окремим випадком — прямою пропорційністю.

Графіком лінійної функції є пряма.

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — аргумент (незалежна змінна), k і b — деякі числа, називають **лінійною функцією**. Числа k і b називають **коефіцієнтами**.

Функція, виду $y = kx + b$, де $k \neq 0$, називається **прямою пропорційністю**.

Пряма пропорційність — окремий випадок лінійної функції, тому її графіком теж є пряма, але пряма особлива, вона проходить через початок координат — точку з координатами (0; 0).

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 5

Варіант 2 контрольної роботи в електронному додатку

ВАРІАНТ 1

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

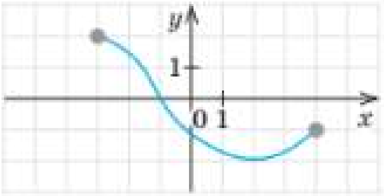
1 Функцію задано формулою $y = x + 4$. Знайдіть значення функції, якщо $x = -2$.

А	Б	В	Г
0	2	6	−2

2 Знайдіть значення аргумента, для якого значення функції $y = 2x - 7$ дорівнює 3.

А	Б	В	Г
5	2	−1	−5

3 Знайдіть область визначення функції, графік якої зображено на рисунку.



А	Б	В	Г
$-2 \leqslant x \leqslant -1$	$-2 \leqslant x \leqslant 2$	$-3 \leqslant x \leqslant 4$	$-1 \leqslant x \leqslant 4$

4 Знайдіть область значень функції, графік якої зображено на рисунку до завдання 3.

А	Б	В	Г
$-2 \leqslant y \leqslant -1$	$-2 \leqslant y \leqslant 2$	$-3 \leqslant y \leqslant 4$	$-1 \leqslant y \leqslant 3$

5 На рисунку до завдання 3 зображено графік функції. Визначте координати точки перетину графіка з віссю Ox.

А	Б	В	Г
$(4; -1)$	$(-3; 2)$	$(0; -1)$	$(-1; 0)$

6 Укажіть функцію, графік якої проходить через точку $(-3; 8)$.

А	Б	В	Г
$y = 3x - 21$	$y = 9 + \frac{x}{3}$	$y = 21 - 3x$	$y = 9 - \frac{x}{3}$

7 Задано функцію $y = 1 - 3x$.

Знайдіть значення функції, якщо значення аргумента $x = -2$. Знайдіть значення аргумента для значення функції $y = 4$.

8 Побудуйте графік функції $y = 2x - 4$.

9 У ветеринарній клініці кошеняті поставили крапельницю. Залежність об'єму y (у мл) розчину у флаконі від часу x (у хв) проведення процедури описується функцією $y = 30 - 2x$, де $x \geqslant 0$.

1) Який об'єм розчину залишиться у флаконі через 6 хв після початку процедури?
2) Через який час після початку процедури флакон із розчином спорожніє?

10 Графік функції $y = -7x + b$ проходить через точку з координатами $(3; -2)$. Знайдіть значення b.

Бонусне завдання

Задана рівність $y(x-2) + 6 = x(y+4)$.

1) Виразіть змінну y через змінну x.
2) Визначте нуль отриманої функції.

3 ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

Лінійні рівняння та їх системи використовуються для розв'язування задач, пов'язаних із фізикою, хімією, технікою тощо. Вони широко застосовуються в економіці, зокрема для моделювання та вирішення проблем, пов'язаних з оптимізацією виробництва, управлінням фінансами та аналізом економічних явищ. Опанувавши цей розділ, ви навчитеся:

- встановлювати зв'язки, яким підпорядковуються реальні процеси;
- створювати схеми реальних об'єктів;
- описувати реальні ситуації математичною мовою, тобто будувати математичні моделі задач;
- «читати» інформацію, подану в графічному вигляді;
- зводити розв'язування системи кількох лінійних рівнянь до розв'язування лише одного рівняння.

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

Теми навчальних проєктів:

- Лінійні рівняння з однією змінною: від витоків до застосування сьогодні
- Лінійні рівняння та задачі з реального життя
- Розв'язування прикладних задач за допомогою систем лінійних рівнянь
- Великий математик Діофант Александрійський
- Аналітичне та графічне розв'язування лінійних рівнянь, що містять модулі

> *«Життя — це не тільки навчання, але якщо ти не зможеш пройти навіть через цю його частину, як дізнаєшся, на що здатний?»*
>
> З пам'ятки для мотивації студентів Гарвардського університету

§16 ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ЯК МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РЕАЛЬНИХ СИТУАЦІЙ

ВЧОРА	Ви обчислювали значення виразів зі змінними, розв'язували рівняння за допомогою властивостей рівнянь
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся, які рівняння називаються лінійними, та удосконалите вміння розв'язувати рівняння, що зводяться до лінійних
ЗАВЖДИ	Ви зможете описати реальну ситуацію математичною мовою, тобто створити математичну модель задачі

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- лінійні рівняння (*linear equations*)
- розв'язати рівняння (*solve an equation*)
- розв'язок рівняння (*solution of equation*)
- модуль (*absolute value*)
- математичне моделювання (*mathematical simulation*)

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Щодня учень витрачає на комп'ютерні ігри втричі більше часу, ніж на розв'язування завдань з алгебри. Якщо він буде грати на 30 хв менше, а навчатися — на 40 хв більше, то час, витрачений на розваги, дорівнюватиме часу, приділеному навчанню. Скільки часу хлопчик навчається?

Розв'язування:

1. Позначимо час (у хв), який хлопчик витрачає на виконання завдань з алгебри, через x.

2. За умовою задачі заповнимо таблицю.

	Час, який витрачає (хв)		Час, який буде витрачати (хв)
Гра	$3x$	На 30 менше	$3x-30$ Однаковий
Навчання	x	На 40 більше	$x+40$

3. З огляду на те, що час, витрачений на розваги, буде *дорівнювати* часу, приділеному навчанню, складемо **рівняння:** $3x-30=x+40$.

4. Розв'яжемо рівняння:

$3x-30=x+40$ Перенесемо доданки, які містять змінну, у ліву частину, а ті, що не містять змінної — у праву, змінивши знаки доданків, які переносимо, на протилежні.

$3x-x=40+30$ Зведемо подібні доданки.

$2x=70$

$x=70:2$ .... Ділимо обидві частини рівняння на 2.

$x=35$ .... Робимо висновок.

Відповідь: 35 хв.

? ПОМІРКУЙТЕ

Які властивості рівнянь застосовано для спрощення і розв'язування рівняння в Актуальній задачі?

Пригадайте поняття, пов'язані з рівняннями, і основні властивості рівнянь, знайомі вам із курсу математики 6 класу.

ДОСЛІДЖУЄМО!

Як зобразити розв'язок лінійного рівняння з однією змінною у прямокутній системі координат? Поясніть свою думку.

! **Рівняння** — рівність, що містить **змінну**.

Розв'язок рівняння (корінь рівняння) — значення **змінної**, при якому рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

Розв'язати рівняння означає знайти **всі його корені** або довести, що **їх немає**.

Властивості рівнянь

Властивість 1. Якщо до обох частин рівняння **додати** (або **відняти**) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке *має такі самі корені*, що й дане.

Якщо $x-a=b$, то $x-a+a=b+a$

Наприклад:

$x-7=13;$

$x-7+7=13+7;$

$x=20$

Якщо $x+a=b$, то $x+a-a=b-a$

Наприклад:

$x+9=2;$

$x+9-9=2-9;$

$x=-7$

Із цієї властивості отримаємо таку властивість.

Властивість 2. Якщо в рівнянні **перенести** доданок з однієї частини рівняння в іншу, **змінивши** його знак **на протилежний**, то отримаємо рівняння, яке має такі самі корені, що й дане.

$x+a=b$

$x+a-a=b-a$

$x=b-a$

Наприклад: $+ \curvearrowright -$

$x+12=2;$

$x=2-12$

$x-a=b$

$x-a+a=b+a$

$x=b+a$

Наприклад: $- \curvearrowright +$

$x-7=13;$

$x=13+7$

Властивість 3. Якщо обидві частини рівняння **помножити** (або **поділити**) на одне й те саме **відмінне від нуля** число, то отримаємо рівняння, яке має такі самі корені, що й дане.

Якщо $ax=b$ і $c\neq 0$, то $a\cdot c\cdot x=b\cdot c$

Наприклад:

$\frac{2}{3}x=12;$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{3}{2}\cdot 12;$

$x=18$

Якщо $ax=b$ і $c\neq 0$, то $\frac{ax}{c}=\frac{b}{c}$

Наприклад:

$-3x=63;$

$\frac{-3x}{-3}=\frac{63}{-3};$

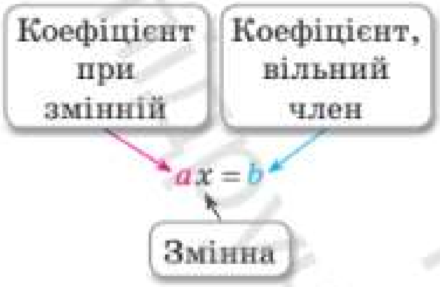
$x=-21$

РОЗМИНКА 1

Розв'яжіть рівняння:

1) $x+4=14;$ 2) $x-11=-5;$ 3) $-2x=1{,}8;$ 4) $\frac{x}{7}=-7.$

ГОЛОВНА ІДЕЯ



Означення. Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають **лінійним рівнянням з однією змінною.**

Числа a і b — **коефіцієнти рівняння.** Коефіцієнт b має ще іншу назву — вільний член.

Наприклад:

Лінійні рівняння	Рівняння, які не є лінійними, але **зводяться до лінійних**	Рівняння, які **не є лінійними**
$5x = -0{,}1$ $-\frac{2}{3}x = -6$ $7x = 0$	$3x - 1 = 5$ $(x+3)(4x-1) = 0$ $\lvert x-3 \rvert = 5$	$x^2 + 1 = 0$ $4 - \frac{3}{x} = 1$ $x^3 + 3x + 1 = 0$

ДОСЛІДЖУЄМО!

Проаналізуйте розв'язання лінійних рівнянь 1–4. Скільки коренів мають ці рівняння? Зробіть висновки щодо того, як значення коефіцієнтів a і b впливають на кількість коренів лінійного рівняння. Порівняйте свої висновки зі схемою.

РОЗМИНКА 2

Визначте, чи є наведене рівняння лінійним рівнянням з однією змінною. Якщо так, назвіть коефіцієнти a і b.

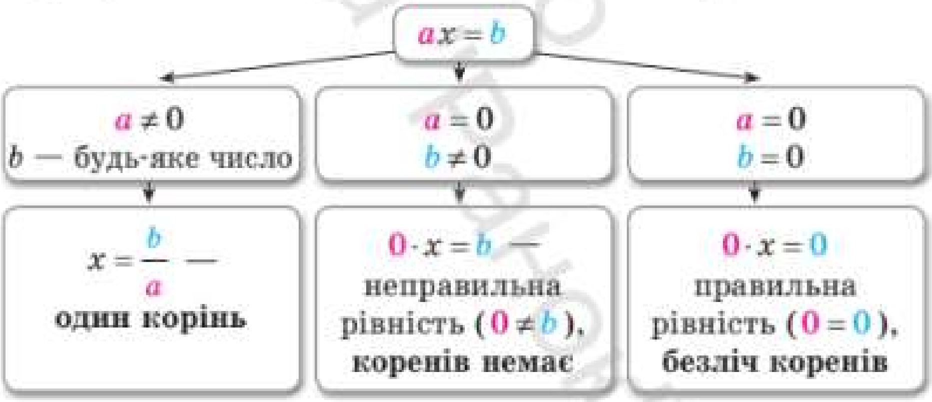
1) $-4x + 1 = 0$; 2) $6x = 4y$; 3) $2x^2 = 2$; 4) $3x = 2$.

Кількість коренів лінійного рівняння

Кількість коренів лінійного рівняння залежить від значень коефіцієнтів a і b

1) $4x = 20$; $x = \frac{20}{4}$; $x = 5$. Рівняння має **один** корінь	2) $7x = 0$; $x = \frac{0}{7}$; $x = 0$. Рівняння має **один** корінь	3) $0x = 6$; $0 = 6$ — рівність неправильна. Рівняння **не має** коренів	4) $0x = 0$; $0 = 0$ — рівність правильна при будь-якому значенні x. Рівняння має **безліч** коренів

Лінійне рівняння з однією змінною може мати *один* корінь, *не мати* коренів або мати *безліч* коренів.


$ax = b$
$a \neq 0$
b — будь-яке число
$a = 0$
$b \neq 0$
$a = 0$
$b = 0$
$x = \frac{b}{a}$ — один корінь
$0 \cdot x = b$ — неправильна рівність ($0 \neq b$), коренів немає
$0 \cdot x = 0$ правильна рівність ($0 = 0$), безліч коренів

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Скільки коренів має рівняння?

1) $4x = 16$;
2) $(3-3)x = 5$;
3) $x - 4 = x - 2$;
4) $3x - 3x = 0$.

Обміняйтеся записами. Перевірте одне одного.

Розв'язування рівнянь, що зводяться до лінійних

Під час розв'язування рівнянь, що зводяться до лінійних, застосовують їх **тотожні перетворення** та користуються **властивостями рівнянь**.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть рівняння:

1) $12-(8-24x)=24x$; 2) $8(x-5)=5(x-8)+3x$.

Розв'язання:

Рівняння	1) $12-(8-24x)=24x$	2) $8(x-5)=5(x-8)+3x$
Розкрили дужки, звели подібні доданки	$12-8+24x=24x$ $4+24x=24x$	$8x-40=5x-40+3x$ $8x-40=8x-40$
Перенесли доданки, змінивши їх знаки	$24x-24x=-4$	$8x-8x=-40+40$
Звели подібні доданки. Аналізуємо отримане рівняння	$0\cdot x=-4$ — отримали неправильну рівність	$0\cdot x=0$ — отримали правильну рівність (тотожність)
Записали відповідь	**Коренів немає**	**x — будь-яке число**

Відповідь: 1) коренів (розв'язків) немає;
2) x — будь-яке число.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Розв'яжіть рівняння:

1) $7x-11=2x+9$;
2) $13-4x=10-4x$;
3) $6(x-1)-5x=x-6$;
4) $8(2-x)+3x=16-5x$;
5) $12-(3-17x)=13x-39$;
6) $31-(5-21x)=19x+84$;
7) $9(x-4)-2x=4(x-9)+3x$;
8) $6x-(3-15x)=4(x-9)+17x$;

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть рівняння $\frac{8-6x}{3}+x=9-\frac{4x+8}{6}$.

Розв'язання:

$$\frac{8-6x}{3}+x=9-\frac{4x+8}{6}$$

$$6\cdot\frac{8-6x}{3}+6\cdot x=6\cdot 9-6\cdot\frac{4x+8}{6}$$

Помножимо обидві частини рівняння на найменше спільне кратне знаменників дробів — число 6.

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Укажіть найменше спільне кратне чисел:
1) 2, 4, 6   3) 5, 7;
2) 3, 9, 18;   4) 2, 3, 11.
Обміняйтеся записами. Перевірте результати одне одного.

Проєкт підручника майбутнього видавництва "Ранок"

$2(8-6x)+6x=54-(4x+8)$ ...... **Зведемо** рівняння до лінійного, використовуючи властивості рівнянь.

$16-12x+6x=54-4x-8$

$16-6x=46-4x$

$-6x+4x=46-16$

$-2x=30$ ...... **Розв'яжемо** утворене лінійне рівняння.

$x=30:(-2)$

$x=-15$

Відповідь: $x=-15$ (інший запис: -15).

ПРИГАДАЙТЕ!

Якщо $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b\neq 0,\ d\neq 0)$, то $a\cdot d=b\cdot c$

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{19-x}{2}$;
2) $\frac{3x-7}{5}=\frac{8+2x}{5}$;
3) $\frac{5x+28}{6}=\frac{x-7}{3}$;
4) $\frac{4x+38}{2}=\frac{3x+1}{4}$;
5) $\frac{x-23}{5}+x=1+\frac{9x-5}{10}$;
6) $\frac{7-12x}{4}+3x=\frac{3x+69}{8}-2$;
7) $\frac{1}{7}-\frac{3-7x}{14}=\frac{3x+1}{2}-x$;
8) $\frac{17-5x}{10}-3x=\frac{3-7x}{2}+\frac{1}{5}$.

ДОСЛІДЖУЄМО!

Складіть **алгоритм розв'язування рівнянь**, що зводяться до лінійних рівнянь з однією змінною, пронумерувавши кроки в правильному порядку.

Алгоритм розв'язування рівнянь

КРОК ___
Множимо обидві частини рівняння на найменше спільне кратне знаменників дробів (якщо вони є).

КРОК ___
Записуємо відповідь.

КРОК ___
Спрощуємо вирази в кожній частині рівняння (розкриваємо дужки, якщо вони є).

КРОК ___
Переносимо доданки, які містять змінну, у ліву частину рівняння, а доданки, які не містять змінної — у праву, змінюючи знаки доданків, які переносимо, на протилежні.

КРОК ___
Застосовуємо властивості множення (ділення) рівнянь для розв'язування рівняння.

КРОК ___
Зводимо подібні доданки в кожній частині рівняння.

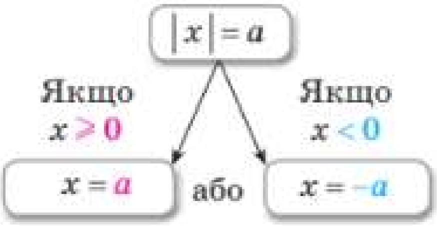
КРОК ___
Аналізуємо кількість розв'язків (коренів) рівняння:
1) якщо отримали числову тотожність, то рівняння має безліч розв'язків (коренів);
2) якщо отримали неправильну числову рівність, то рівняння не має розв'язків (коренів).

Рівняння з модулем

Рівняння з модулем можна звести до лінійних рівнянь.

Кількість розв'язків (коренів) рівняння $|x| = a$ залежить від значення a.

$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
Два розв'язки $x = a$ або $x = -a$	**Один** розв'язок $x = 0$	Розв'язків **немає**
Наприклад: 1) $|x| = 11$; $x = 11$ або $x = -11$	*Наприклад:* 2) $|x| = 0$; $x = 0$	*Наприклад:* 3) $|x| = -10$. Розв'язків немає



РОЗМИНКА 3

1 Скільки коренів має рівняння:

1) $|x| = 3$; 2) $|x| = 0$; 3) $|x| = -5$; 4) $-|x| = -8$?

2 Скориставшись означенням модуля числа, запишіть лінійні рівняння, до яких можна звести рівняння з модулем:

1) $|x-4| = 5$; 2) $|3-x| = 3$; 3) $|7-x| = 0$; 4) $|2x| = 4$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Якщо модуль числа x дорівнює a, то саме це число дорівнює a або $-a$.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $|4-3x| = 7$.

Розв'язання:

$|4-3x| = 7$. За означенням модуля:

$4-3x = 7$ або $4-3x = -7$.

Розв'яжемо кожне з отриманих рівнянь:

$-3x = 7-4$;	$-3x = -7-4$;
$-3x = 3$;	$-3x = -11$;
$x = 3:(-3)$;	$x = (-11):(-3)$;
$x = -1$	$x = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$

Відповідь: $x = -1$; $x = 3\frac{2}{3}$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ!

Оскільки $7 > 0$, задане рівняння зводиться до розв'язування **двох** лінійних рівнянь з однією змінною і має **два корені**.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| - 4 = 0$;
2) $|x| - 2 = 0$;
3) $|2x| = 12$;
4) $|3x| = 15$;
5) $|x+5| - 11 = 0$;
6) $|x+6| - 17 = 0$;
7) $|1-4x| = 31$;
8) $|2-5x| = 28$.

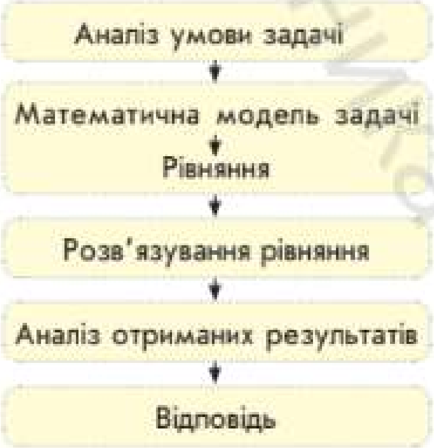
Проект підручника майбутнього видавництва "Ранок"

Лінійні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій

Розв'язуючи прикладну текстову задачу математичними методами, спочатку створюють її математичну модель.

! **Математична модель** — це опис реальної ситуації математичною мовою, тобто мовою математичних понять, формул, рівнянь, таблиць, графіків тощо.

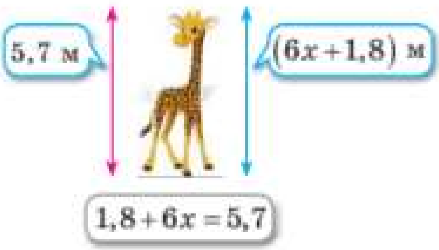
Працюючи з текстовою задачею, виокремлюють кілька етапів її розв'язування. Створення математичної моделі є ключовим серед них.



Алгоритм розв'язування текстової задачі

1. *Проаналізувати* умову задачі (основні величини, зв'язки між ними, вимоги задачі).
2. *Створити* математичну модель (у вигляді таблиці, рисунка, графіка, схеми тощо).
3. *Скласти* рівняння до задачі.
4. *Розв'язати* отримане рівняння.
5. *Проаналізувати* отримані результати з огляду на умову задачі.
6. *Записати* відповідь.

РОЗМИНКА 4



1 Зріст новонародженої жирафи становив 1,8 м. Щороку зріст жирафи збільшувався на x м і через 6 років дорівнював 5,7 м.

1) Запишіть рівняння, за яким можна визначити x.
2) Знайдіть x.

2 У певній області зараз працюють 5 сміттєпереробних заводів, кожен із яких щомісяця утилізує 20 т сміття. Для задоволення потреб області заплановано побудову ще кількох таких заводів — x заводів щороку. Через 6 років усі заводи в цій області мають утилізовувати щомісяця 1060 т сміття.

1) Запишіть рівняння, за яким можна визначити x.
2) Знайдіть x.

3 На банківській карті в Олени було 5000 грн. За декілька покупок вона заплатила 2000 грн. За кожну покупку на її рахунок було повернуто 35 грн. Скільки покупок зробила дівчина, якщо після всіх операцій на її картці залишилося 3140 грн?

ПРИКЛАД 4

Сума трьох чисел дорівнює 135. Знайдіть найменше із цих чисел, якщо друге число на 3 більше, ніж перше, а третє в 4 рази більше, ніж сума першого та другого чисел.

Розв'язання:

1) x .... Позначаємо перше число змінною.

2) I число x
II число на 3 більше, ніж
III число у 4 рази більше, ніж
} 135 Складаємо схему

3) I — x
II — $(x+3)$
III — $4\cdot(x+x+3)$
} 135 .... Записуємо зв'язки між числами математичною мовою.

4) $x+(x+3)+4\cdot(x+x+3)=135$ Складаємо рівняння.

5) $x+x+3+4(2x+3)=135$ ... Розв'язуємо рівняння

$2x+3+8x+12=135$

$10x+15=135$

$10x=120$

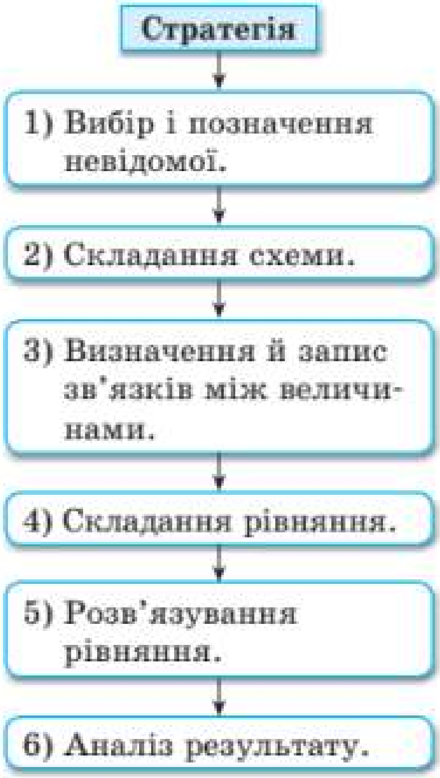
$x=12$

6) Найменшим числом є значення виразу x (див. схему), тобто 12. .... Аналізуємо отриманий результат

Відповідь: 12.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Для створення математичної моделі задач такого типу доцільно складати **схему**.



Стратегія

1) Вибір і позначення невідомої.

2) Складання схеми.

3) Визначення й запис зв'язків між величинами.

4) Складання рівняння.

5) Розв'язування рівняння.

6) Аналіз результату.

ПРИКЛАД 5

Катер пройшов за течією річки певну відстань за 1 год 15 хв, а назад повернувся за 1 год 45 хв. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки складає 2 км/год, а власна швидкість катера позначена через x.

Розв'язання:

1)

	t, год	v, км/год	s, км
За течією	$1\frac{1}{4}$	$x+2$	$1\frac{1}{4}(x+2)$
			Однаковий
Проти течії	$1\frac{3}{4}$	$x-2$	$1\frac{3}{4}(x-2)$

Складаємо таблицю, урахувавши, що

1 год 15 хв $=1\frac{1}{4}$ год,

1 год 45 хв $=1\frac{3}{4}$ год.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Для створення математичної моделі задач такого типу доцільно складати **таблицю**.

Проєкт майбутнього
Підручника видавництва "Ранок"

Стратегія

1) Складання таблиці.
2) Складання рівняння.
3) Розв'язування рівняння.
4) Аналіз результату.

2) $1\frac{1}{4}(x+2)=1\frac{3}{4}(x-2)$ .... **Складаємо** рівняння

3) $\frac{5}{4}(x+2)=\frac{7}{4}(x-2)\,\Big|\cdot 4$ .... **Розв'язуємо** рівняння

$5(x+2)=7(x-2)$

$5x+10=7x-14$

$2x=24$

$x=12$

4) Оскільки x — власна швидкість катера, то корінь $x=12$ задовольняє умову задачі. ...... **Аналізуємо** отриманий результат

Відповідь: 12 км/год.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$5x=15;$

$5x\cdot 0=15\cdot 0;$

$0=0.$

Корінь рівняння — будь-яке число або коренів немає.

ПРАКТИКУМ

16.1 Поясніть, чому наведене рівняння не має коренів.

1) $7x+3=7x-3;$
2) $5-8x=4-8x;$
3) $6(x+1)=2+6x;$
4) $3(4-x)=4-3x;$
5) $\frac{x+3}{2}+0{,}5x=8+x;$
6) $\frac{3x-1}{4}+0{,}25x=1+x.$

16.2 Поясніть, чому наведене рівняння має безліч коренів і коренем є будь-яке число.

1) $x-5=x-5;$
2) $7-3x=7-3x;$
3) $5(x+4)=20+5x;$
4) $2(1-x)=2-2x;$
5) $\frac{x+8}{2}+0{,}5x=4+x;$
6) $\frac{x-12}{4}+0{,}75x=x-3.$

16.3 Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}6x-5=1{,}2x;$
2) $0{,}6x+8=0{,}9x;$
3) $\frac{1}{4}x-30=\frac{1}{3}x;$
4) $\frac{1}{2}x-42=\frac{1}{5}x;$
5) $\frac{2}{3}(x-6)=4+\frac{x}{6};$
6) $\frac{4}{5}(x+15)=\frac{x}{2}-3.$

16.4 Знайдіть корені рівняння:

1) $-2x-5=-31-x;$
2) $-2x-21=-9-3x;$
3) $-4(-x-2)=-x-32;$
4) $-5(-2x-1)=-8x-43;$
5) $-3-\frac{1}{6}(-x-1)=-x;$
6) $-1-\frac{1}{3}(-x-2)=-2x.$

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Складіть лінійні рівняння, коренями яких є числа:

1) 5; 2) –7; 3) –0,5; 4) $\frac{1}{7}$.

Обміняйтесь записами. Перевірте, чи правильно складені рівняння.

16.5 При якому значенні y значення виразу:

1) $6y+17$ на 10 більше за значення виразу $4y-11$;
2) $7y-13$ на 20 менше від значення виразу $9y+5$;
3) $5y+24$ удвічі більше за значення виразу $y+15$;
4) $y+6$ утричі менше від значення виразу $7y-42$;
5) $5y+y^2-26$ в y разів більше за значення виразу $y+3$;
6) $y+1$ в y разів менше від значення виразу $3y+y^2-12$?

16.6 За умовою задачі складіть рівняння для визначення x.

1) Число x помножили на 5, отримали 120.
2) У результаті зменшення числа x на 20 отримали 50.
3) Перше додатне число дорівнює x, а друге у 3 рази менше. Сума цих чисел дорівнює 48.
4) Перше додатне число дорівнює x, а друге на 18 більше. Сума цих чисел дорівнює 46.
5) Відстань 88 км велосипедист долає за 8 год, рухаючись зі швидкістю x км/год.
6) Відстань 150 км автомобіль долає за x год, рухаючись зі швидкістю 100 км/год.

16.7 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+x^2}{4}=\frac{0,5x^2+9}{2}$;
2) $\frac{0,5x^2-7}{3}=\frac{x+x^2}{6}$;
3) $\frac{2x^2+11}{2}=\frac{x(2+3x)}{3}$;
4) $\frac{x(2-5x)}{5}=\frac{4-3x^2}{3}$;
5) $\frac{x(1-2x)(1+2x)}{4}=\frac{3-5x^3}{5}$;
6) $\frac{x(1-3x)(1+3x)}{9}=\frac{5-2x^3}{2}$.

16.8 Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{3x^2-x}{3}-x^2=\frac{1}{5}$;
2) $x^2-\frac{4x^2-x}{4}=\frac{1}{10}$;
3) $\frac{5x-2x^2}{2}+x^2-\frac{x}{3}=2$;
4) $\frac{x+6x^2}{6}-x^2-\frac{x}{4}=1$;
5) $\frac{8x^2-5x+3}{8}-x^2+x-7=0$;
6) $\frac{5x^2+x+13}{5}-x^2-x+2=0$.

16.9 Скориставшись властивістю рівності добутку нулю, розв'яжіть рівняння:

1) $(x-6)(2x+3)=0$;
2) $(x+7)(2x-5)=0$;
3) $x(x-9)(4x+26)=0$;
4) $x(x+8)(4x-30)=0$;
5) $(x^2-25)(10x+64)=0$;
6) $(10x-81)(x^2-49)=0$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Софізм: $4=5$.

Доведення:

Маємо рівняння

$$12x+28=15x+35.$$

Винесемо спільні множники за дужки:

$$4(3x+7)=5(3x+7).$$

Поділимо обидві частини рівняння на один і той самий вираз $3x+7$, отримаємо: $4=5$.

Застосуйте логіку і знайдіть неправильний крок.

ПРИГАДАЙТЕ!

Якщо $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(b\neq 0,\ d\neq 0)$, то $a\cdot d=b\cdot c$

ПРИГАДАЙТЕ!

$ab=0$, якщо

$$a=0 \quad \text{або} \quad b=0$$

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ПРИГАДАЙТЕ!

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$ab+ac=a(b+c)$$

16.10 Скориставшись способом розкладання на множники, розв'яжіть рівняння:

1) $(x+9)^2=5(x+9)$;
2) $(x-8)^2=3(x-8)$;
3) $x^2-2x+1=6(x-1)$;
4) $x^2+4x+4=7(x+2)$;
5) $x^2+6x+9=11x+33$;
6) $x^2-8x+16=15x-60$.

16.11 Розв'яжіть відносно x рівняння:

1) $3a+2x=x+a$;
2) $4a+6x=7x-3$;
3) $6(x-1)=4x+10a$;
4) $9(x+8)=7x-12a$;
5) $x(x+4)=x^2+20(1-a)$;
6) $x(3-x)=15(a+2)-x^2$.

Інший варіант роботи в електронному додатку

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 11

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Укажіть лінійне рівняння.

А	Б	В	Г
$\frac{6}{x}=5$	$x^2+5=6$	$5+6=x^2$	$\frac{x}{5}=6$

2 Укажіть корінь рівняння $x+3=2x+7$.

А	Б	В	Г
4	−4	−7	7

3 Розв'яжіть рівняння $2(1-x)-3x+1=0$.

А	Б	В	Г
$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{3}$	2	−2

4 Розв'яжіть рівняння $\frac{x+1}{2}=\frac{x-1}{3}$.

А	Б	В	Г
1	5	−5	−1

5 Число x збільшили на 28 і отримали 60. Складіть рівняння за цією умовою.

А	Б	В	Г
$x+28=60$	$x\cdot28=60$	$x-28=60$	$x:28=60$

6 Установіть відповідність між рівнянням (1–3) і твердженням (А–Г).

1	$2x-1=3$	А	Рівняння має лише один корінь $x=1$.
		Б	Рівняння має лише один корінь $x=2$.
2	$2(x+3)=6+2x$	В	Коренем рівняння є довільне число.
3	$2(x-1)=2x+2$	Г	Рівняння не має коренів.

7 Роз'вяжіть задачу за допомогою рівняння. Два човни одночасно вирушили із центра озера у протилежних напрямках. Перший рухався зі швидкістю 0,5 м/с, а другий — зі швидкістю 1 м/с. Через скільки секунд відстань між човнами становитиме 30 м?

8 Розв'яжіть рівняння $|x+7|-15=0$.

Проєкт макету підручника видавництва "Ранок"

Проект макету підручника видавництва "Ранок"

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

16.12 Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x|-34=0$;
2) $|-3x|-72=0$;
3) $||x+1|-4|=6$;
4) $||x-2|-3|=1$;
5) $|6x-1|+6=0$;
6) $|2(-3-x)+2x|-6=0$.

16.13 При якому значенні b мають спільний корінь рівняння:

1) $3x-14=16$ і $2x-4=b$;
2) $19+5x=-61$ і $4x+20=8b$;
3) $8x-3=b$ і $4x+3=b$;
4) $6x-5=b$ і $12x+7=b$;
5) $2(x-b)=5-2b$ і $x+5b=5b+1$;
6) $3(x+b)=1+3b$ і $x-b=2-b$?

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

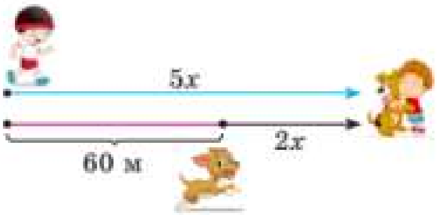
Якщо рівняння містить два знака модуля, ці модулі розкриваються послідовно. Приклад розв'язування рівняння з двома модулями наведено в інтернет-підтримці підручника.

MATH FOR LIFE

Розв'язуємо задачі за допомогою рівнянь!

Задачі на рух в одному напрямку

16.14 Хлопчик, перебуваючи на відстані 60 м від свого щеняти, побіг до нього зі швидкістю 5 м/с. У той самий час щеня почало тікати від хлопчика зі швидкістю 2 м/с. Через скільки секунд господар наздожене щеня?

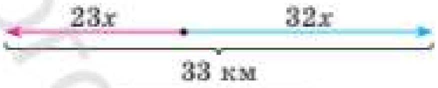


$5x-2x=60$

16.15 Квадрокоптер наздоганяє автомобіль, що рухається в тому ж напрямку, та має сісти на його дах. Швидкості квадрокоптера й автомобіля 80 км/год і 75 км/год відповідно, початкова відстань між ними 1 км. Через скільки хвилин від початку руху відбудеться «контакт»?

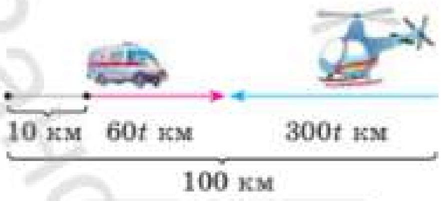
Задачі на рух в різних напрямках

16.16 Два катери одночасно вийшли з однієї бухти. Перший пішов на схід зі швидкістю 32 км/год, а другий — на захід зі швидкістю 23 км/год. Через скільки годин відстань між катерами становитиме 33 км?



$23x+32x=33$

16.17 Диспетчерка «Швидкої допомоги» зв'язалася зі службою порятунку і запросила гелікоптер для транспортування постраждалого. Відстань між місцем аварії і гелікоптером становить 100 км. Гелікоптер і автомобіль «Швидкої допомоги» рухаються назустріч зі швидкостями 300 км/год і 60 км/год відповідно. Через який час вони зустрінуться, якщо автомобіль встиг проїхати 10 км до моменту зльоту рятівників?



$(10+60t)+300t=100$

Задачі з невідомими в обох частинах рівняння

16.18 Два парки атракціонів пропонують ціни, наведені в таблиці. Ви хочете побувати в обох парках, у кожному витратити однакову суму грошей і відвідати однакову кількість атракціонів.

1) Скільки атракціонів у кожному парку ви можете відвідати за таких умов?
2) Чи вистачить вам 600 грн для розваг в одному парку?

$200+30x=300+20x$

	Ціна вхідного квитка (грн)	Відвідування одного атракціону (грн)	Кількість атракціонів	Вартість відвідування
Парк «Зоряний»	200	30	x	$200+30x$
Парк «Океанічні дива»	300	20	x	$300+20x$

16.19 У понеділок кур'єр отримав на 20 % більше замовлень, ніж у вівторок. Скільки замовлень отримав кур'єр у понеділок та вівторок разом, якщо у вівторок він отримав на 3 замовлення менше, ніж у понеділок?

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

x — кількість замовлень.

$1{,}2x=x+3$

Задачі на тотожні перетворення рівнянь і розкриття дужок

16.20 Тест складається з 30 завдань. За кожну правильну відповідь дають 4 бали, за кожну неправильну віднімають 2 бали. Юра виконав усі завдання тесту і отримав 36 балів. Скільки завдань він розв'язав правильно?

$4x-2(30-x)=36$

Кількість завдань у тесті	30	Кількість балів за одне завдання	Кількість балів за виконання завдань	Кількість нарахованих балів
Розв'язав правильно	x	$+4$	$4x$	36
Розв'язав неправильно	$30-x$	-2	$-2(30-x)$	

16.21 У спортивному комплексі видають напрокат ролики по 40 грн за день і ковзани по 30 грн за день. У неділю роликів було видано на 24 пари більше, ніж ковзанів. Скільки пар роликів та ковзанів разом було видано, якщо пункт прокату отримав за цей день 4460 грн?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Чай із м'яти й ромашки не тільки зігріє вас, але й заспокоїть нервову систему, покращить травлення та забезпечить глибокий та спокійний сон.

Суміші

16.22 Сушену ромашку продають за ціною 50 грн за 100 г, а сушену м'яту — за ціною 40 грн за 100 г. Скільки грамів м'яти треба додати до 400 г ромашки, щоб 100 г утвореної суміші для чаю коштували 48 грн?

Проєкт підручника видавництва «Ранок»

	Ціна за 100 г (у грн)	Ціна за 1 г (у грн)	Вага (у г)	Вартість
Ромашка	50	0,5	400	$0{,}5\cdot 400$
М'ята	40	0,4	x	$0{,}4x$
Суміш	48	0,48	$400+x$	$0{,}48(400+x)$

$\boxed{0{,}48(400+x)=0{,}5\cdot 400+0{,}4x}$

16.23 Бісер продається за ціною 25 грн за 100 г, а стрази — за ціною 30 грн за 100 г. Скільки грамів стразів потрібно додати до 200 г бісеру, щоб утворений мікс для рукоділля продавати по 28 грн за 100 г?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Завдання 16.24	→ Практикум, 16.1
Завдання 16.25	→ Практикум, 16.2
Завдання 16.26	→ Приклад 1
Завдання 16.27	→ Приклад 2
Завдання 16.28	→ Практикум, 16.3
Завдання 16.29	→ Практикум, 16.4
Завдання 16.30	→ Практикум, 16.5
Завдання 16.31	→ Приклад 3
Завдання 16.32	→ Розминка 4
Завдання 16.33–16.36	→ Math for life, 16.14– 16.23

16.24 Поясніть, чому наведене рівняння не має коренів.

1) $4x-9=4x-8$;
3) $\frac{3}{7}x+\frac{4}{7}x=x+2$;
2) $2(5-x)=8-2x$;
4) $\frac{x-6}{2}+0{,}5x=2+x$.

16.25 Поясніть, чому наведене рівняння має безліч коренів і коренем є будь-яке число.

1) $4x-1=4x-1$;
3) $\frac{1}{9}x+\frac{8}{9}x=x$;
2) $3(7-x)=21-3x$;
4) $\frac{3x+20}{4}+0{,}25x=x+5$.

16.26 Розв'яжіть рівняння:

1) $2x+3=25$;
4) $14-(8-15x)=12x-54$;
2) $23-9x=32-9x$;
5) $11(x-5)-x=5(x-11)+5x$;
3) $7(x-1)-6x=x-7$;
6) $3x-(15-x)=9(x-2)-5x$.

16.27 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x-1}{3}=\frac{22+3x}{3}$;
3) $\frac{3x+4}{5}-x=9+\frac{2-x}{10}$;
2) $\frac{x+18}{2}=\frac{3-x}{4}$;
4) $\frac{2}{5}-\frac{3-5x}{15}=\frac{4x+7}{3}-x$.

16.28 Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}1x-9=1{,}6x$;
3) $\frac{1}{3}x-24=\frac{1}{4}x$;
2) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{10}x=\frac{1}{5}x$;
4) $\frac{2}{3}(x-9)=\frac{x}{2}-10$.

BE SMART

Фокус

Якщо загадати число, додати до нього 8, потім відняти від суми 3 і додати до різниці 5, то за результатом можна визначити, яке число було загадано.

Запишіть рівняння за описом фокуса, позначивши змінною загадане число, та спробуйте розгадати фокус.

Проект майбутнього видавництва "Ранок"

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Після виконання фізичних вправ частота пульсу людини не повинна перевищувати певного значення, яке обчислюють за допомогою виразу $0{,}8(220-x)$, де x — вік людини в роках.

1) Максимальний пульс людини після виконання фізичних вправ дорівнює 164. Знайдіть її вік.
2) Обчисліть максимальну частоту пульсу для вашого віку, віку членів вашої родини чи знайомих.
3) Порахуйте частоту свого пульсу після фізичного навантаження на уроці фізкультури і порівняйте її з максимальним значенням пульсу для вашого віку.

16.29 Розв'яжіть рівняння:

1) $-5x-8=-27-4x$; 3) $-5(-x-6)=-3x-22$;

2) $-11x-x=-6x-7x$; 4) $-4-\frac{1}{5}(-x-10)=-x$.

16.30 При якому значенні x значення виразу:

1) $2x-13$ дорівнює 47;
2) $3x+12$ дорівнює 72;
3) $2(x+5)$ дорівнює значенню виразу $3x-25$;
4) $3(x-1)$ дорівнює значенню виразу $4x+37$;
5) $10x-4$ у три рази більше за значення виразу $2x+18$;
6) $5x+17$ на 35 більше за значення виразу $3x+61$?

16.31 Розв'яжіть рівняння:

1) $|x|-6=0$; 2) $|3x|=24$; 3) $|x+7|-13=0$; 4) $|3-2x|=21$.

16.32 Триває побудова містечка для внутрішньо переміщених осіб. Зараз побудовано 12 будинків, через 4 роки їх загальна кількість має становити 80, причому щороку планується здавати x таких будинків. Знайдіть x, склавши рівняння.

16.33 Автострадою в одному напрямку рухаються два автомобілі зі швидкостями 130 км/год та 100 км/год. Через скільки хвилин один автомобіль наздожене інший, якщо початкова відстань між ними дорівнює 1,2 км?

16.34 Двоє велосипедистів одночасно виїхали назустріч один одному з населених пунктів, відстань між якими становить 13 км. Швидкість першого велосипедиста дорівнює 15 км/год, швидкість другого — 11 км/год. Через скільки годин відбудеться їхня зустріч?

16.35 У першому районі міста встановлено на 10 % більше камер відеоспостереження, ніж у другому. Скільки камер відеоспостереження встановлено в кожному із цих двох районів міста, якщо в другому районі їх на 42 менше, ніж у першому?

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Позначте кількість камер відеоспостереження, встановлених у другому районі міста, через x.

$$\boxed{1{,}1x=x+42}$$

16.36 100 г цукерок «Блакитна волошка» коштують 24 грн, а 100 г цукерок «Смачний горішок» — 16 грн. Скільки грамів цукерок «Блакитна волошка» потрібно додати до 300 г цукерок «Смачний горішок», щоб утворену суміш цукерок продавати по 20 грн за 100 г?

§ 17 РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ ТА ЙОГО ГРАФІК. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ ТА ЙОГО ГРАФІК

ВЧОРА	Ви розв'язували рівняння з однією змінною
СЬОГОДНІ	Ви навчитеся знаходити розв'язки лінійних рівнянь із двома змінними та будувати графіки таких рівнянь
ЗАВЖДИ	Ви зможете знайти різні варіанти розв'язування задач із реального життя

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ГУМАНІТАРНА ДОПОМОГА

Щоб упакувати 540 кг гуманітарної допомоги, заплановано використати x малих та y великих коробок. Мала коробка розрахована на 5 кг вантажу, а велика — на 10 кг.

1. Складіть рівняння за умовою задачі.

2. Визначте, скільки потрібно великих коробок, якщо надали 38 малих коробок.

3. Знайдіть необхідну кількість малих коробок, якщо надали 20 великих коробок.

4. З'ясуйте, чи можна упакувати 540 кг гуманітарної допомоги в 60 малих і 24 великих коробки.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- лінійне рівняння з двома змінними (*linear equation with two variables*)
- розв'язок рівняння (*solution of the equation*)
- графік рівняння з двома змінними (*graph of an equation with two variables*)

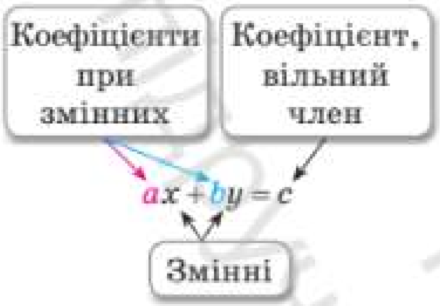
Маса вантажу в одній коробці	Кількість коробок	1) Складаємо рівняння	2) Підставляємо значення x	3) Підставляємо значення y	4) Перевіряємо, чи правильною є рівність
 5 кг	x	$5x+10y=540$	38	$5x+10\cdot 20=540$ $x=68$	$5\cdot 60+10\cdot 24=540$ $540=540$
 10 кг	y		$5\cdot 38+10y=540$ $y=35$	20	

Відповідь: **1.** $5x+10y=540$. **2.** 35. **3.** 68. **4.** Так.

Для розв'язування задачі ми склали рівняння $5x+10y=540$. Такі рівняння (або рівняння такого виду) називаються лінійними рівняннями **з двома змінними**.

Підручник-проект [illegible] видавництва "Ранок"

ГОЛОВНА ІДЕЯ



Означення. Рівняння виду $ax+by=c$, де x і y — змінні, a, b і c — деякі числа, називають **лінійним рівнянням із двома змінними.** Числа a, b і c називають **коефіцієнтами рівняння**, Коефіцієнт c має ще іншу назву — **вільний член**.

Якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, то рівняння $ax+by=c$ називають **рівнянням першого степеня з двома змінними.**

Наприклад:

Лінійні рівняння з двома змінними	Коефіцієнти рівнянь
$2x+3y=4$	$a=2;\ b=3;\ c=4$
$-5x-4y=0$	$a=-5;\ b=-4;\ c=0$
$0x-2y=-6$	$a=0;\ b=-2;\ c=-6$
$x+0y=1$	$a=1;\ b=0;\ c=1$

Рівняння, які **не є лінійними рівняннями з двома змінними**
$5x+4=10$ (не містить другої змінної)
$x+9y^2=-2$
$(x-3y)^3=1$
$(x-2)^2+(y-3)^2=4$

РОЗМИНКА 1

Укажіть серед наведених рівнянь лінійні рівняння з двома змінними та назвіть коефіцієнти a, b і c:

1) $x+2y=5$;
2) $-4x+y=1$;
3) $5x-7y^2=0$;
4) $3xy+9y=0$;
5) $0x+3y=0$;
6) $6x+0y=10$.

Означення. Розв'язком рівняння з двома змінними називають пару значень змінних x та y (пару чисел), яка перетворює це рівняння в правильну рівність.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Розв'язок рівняння зазвичай записують у вигляді пар чисел.

На першому місці в дужках пишуть значення змінної x, а на другому — значення змінної y.

Наприклад, відповідь рівняння $x+2y=12$ можна записати так: $x=2$ і $y=5$ або $(2;5)$.

ПРИКЛАД 1

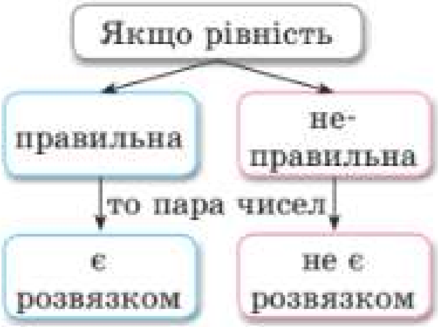
Визначте, які з пар чисел $(2;-1)$, $(1;0)$ є розв'язками рівняння з двома змінними $3x+2y=4$.

Розв'язання:

1. Підставляємо значення x і y в рівняння.
2. Робимо висновок:
   - якщо рівність правильна, пара чисел є розв'язком рівняння;
   - якщо рівність не є правильною, пара чисел не є розв'язком рівняння.

x	y	$3x+2y=4$	Висновок
2	-1	$3\cdot 2+2\cdot(-1)=4$ $4=4$	Рівність правильна. Пара чисел $(2;-1)$ розв'язком рівняння
1	0	$3\cdot 1+2\cdot 0=4$ $3\neq 4$	Рівність не є правильною. Пара чисел $(1;0)$ не є розв'язком рівняння

Відповідь: пара чисел $(2;-1)$ є розв'язком даного рівняння, а пара чисел $(1;0)$ — ні.



ТРЕНУЄМОСЯ 1

Визначте, чи є пара чисел розв'язком заданого рівняння:

1) $(1;2)$, $2x+y=4$;
2) $(3;1)$, $x+2y=5$;
3) $(-5;0)$, $4x-3y=15$;
4) $(0;-3)$, $5x-2y=-15$;
5) $(4;-1)$, $0{,}5x-7y=9$;
6) $(-1;5)$, $8x-0{,}2y=-7$.

Рівняння	Розв'язки рівняння, $(x;y)$				Кількість розв'язків
$x-y=0$	$(5;5)$	$(-2;-2)$	$(0;0)$	?	?
$x+2y=5$	$(3;1)$	$(-5;5)$	?	?	?

ДОСЛІДЖУЄМО!

У таблиці записані розв'язки двох рівнянь. Спробуйте записати ще декілька розв'язків. Поміркуйте, скільки таких пар можна записати.

Означення. Розв'язати рівняння з двома змінними — означає знайти всі його розв'язки або довести, що їх немає.

Алгоритм пошуку розв'язків рівняння з двома змінними

1. *Підставити* в рівняння довільне значення однієї змінної.
2. *Розв'язати* одержане рівняння з однією змінною — знайти значення іншої змінної.
3. У відповідь *записати* пару чисел, яка задовольняє рівняння.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Рівняння з двома змінними можуть мати безліч розв'язків.

ПРИКЛАД 2

Знайдіть будь-які два розв'язки рівняння $6x-2y=4$.

Розв'язання:

Підставляємо в рівняння $6x-2y=4$ довільне значення однієї змінної	Нехай $x=2$, тоді $6\cdot 2-2y=4$	Нехай $y=10$, тоді $6x-2\cdot 10=4$
Розв'язуємо одержане рівняння з однією змінною	$12-2y=4;$ $-2y=4-12;$ $-2y=-8;$ $y=4$	$6x-20=4;$ $6x=4+20;$ $6x=24;$ $x=4$
Записуємо відповідь	$(2;4)$	$(4;10)$

Відповідь: $(2;4)$, $(4;10)$.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $5x-7=2x+14;$
$5x+2x=14+7;$
$7x=21;$
$x=3.$

2) $3(4x+4)=4(3x+3);$
$12x+12=12x+12;$
$12x-12x=12-12;$
$0=0.$
Розв'язків немає

ТРЕНУЄМОСЯ 2

У завданнях 1–4 запишіть розв'язок рівняння:

1) $x+3y=5$, якщо $y=0$;
3) $2x-5y=9$, якщо $y=1$;
2) $4x+y=9$, якщо $x=0$;
4) $-7x+2y=1$, якщо $x=1$.

У завданнях 5–8 визначте будь-які два розв'язки рівняння та виконайте перевірку.

5) $10x-3y=30$;
7) $-2x-13y=52$;
6) $-4x+20y=40$;
8) $-17x-4y=68$.

ПРИКЛАД 3

Виразіть змінну y через змінну x у рівнянні $6x-2y=4$. Знайдіть будь-які три розв'язки рівняння.

Розв'язання:

$6x-2y=4$

$-2y=4-6x$ Переносимо в праву частину рівняння доданок $6x$, змінюємо знак.

$\frac{-2}{-2}y=\frac{4-6x}{-2}$ Ділимо обидві частини рівняння на -2.

$y=3x-2$

1. Обираємо три значення змінної x.

2. Знаходимо відповідні значення змінної y.

3. Записуємо пари чисел $(x;y)$.

x	$y=3x-2$	y	$(x;y)$
2	$y=3\cdot2-2$	4	$(2;4)$
0	$y=3\cdot0-2$	-2	$(0;-2)$
-6	$y=3\cdot(-6)-2$	-20	$(-6;-20)$

Відповідь: $(2;4)$, $(4;10)$, $(-6;-20)$.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

У завданнях 1–4 виразіть змінну y через змінну x і заповніть таблицю.

1) $2x+y=5$

x	0	1	-1
y			

3) $3x+3y=6$

x	0	1	-1
y			

2) $-3x+y=7$

x	0	1	-1
y			

4) $-2x+2y=12$

x	0	1	-1
y			

ПРИГАДАЙТЕ!

Властивості рівнянь

1. У будь-якій частині рівняння можна розкрити дужки та звести подібні доданки.
2. Будь-який член рівняння можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.
3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.

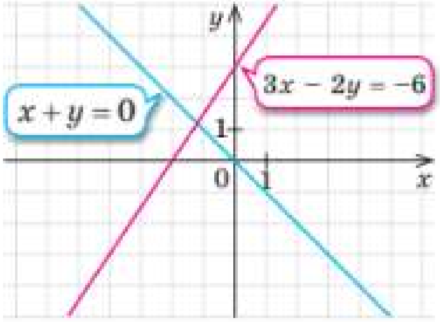
Проєкт підручника видавництва "Ранок"

У завданнях 5–8 виразить змінну y через змінну x і запишить три розвязки рівняння.

5) $4x-2y=14$;	7) $-7x-5y=10$;
6) $-6x+3y=12$;	8) $-4x-3y=15$.

Графік рівняння з двома змінними

Якщо всі пари чисел — розв'язки рівняння з двома змінними — зобразити на координатній площині у вигляді точок з відповідними координатами, то отримаємо графік рівняння.



Означення. Графік рівняння з двома змінними — це фігура, що складається з усіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками даного рівняння.

Якщо точка належить графіку рівняння, то її координати задовольняють це рівняння — перетворюють рівняння в правильну числову рівність.

Розглянемо, як побудувати графік лінійного рівняння з двома зминними. Для цього можна:

1) виразити змінну y через змінну x.

2) скласти таблицю відповідних значень x та y;

3) побудувати на координатній площині графік рівняння, використавши дані таблиці.

Ураховуючи, що лінійне рівняння з двома змінними можна записати у вигляді лінійної функції, графіком якої є пряма, можна скласти таблицю відповідних значень x та y лише для двох точок.

СЛІД ЗНАТИ!

Лінійне рівняння з двома змінними $ax+by=c$ можна записати у формі лінійної функції:

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}, \text{ якщо } b\neq 0.$$

Графіком лінійної функції є пряма, отже, графіком лінійного рівняння з двома змінними також є пряма.

Алгоритм побудови графіка лінійного рівняння з двома змінними

1. *Знайти* два розв'язки рівняння, записати дві пари чисел $(x; y)$.
2. *Позначити* на координатній площині точки, координатами яких є знайдені пари чисел.
3. *Провести* через ці точки пряму.

Будуючи графік лінійного рівняння з двома змінними, зручно шукати такі розв'язки рівняння, для яких $x=0$ або $y=0$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

x	0	?
y	?	0

ПРИКЛАД 4

Побудуйте графік лінійного рівняння з двома змінними $2x-3y=6$ та перевірте, чи належить точка $A(-3;-4)$ цьому графіку. Користуючись графіком, запишіть координати двох точок, які не є розв'язками заданого рівняння.

Розв'язання:

1) Складаємо таблицю розв'язків рівняння, для яких $x=0$ або $y=0$.

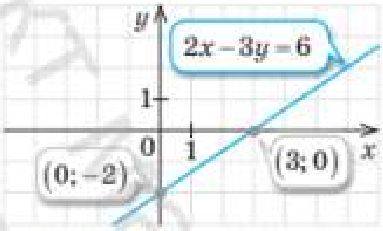
Якщо $x=0$, то $2\cdot 0-3y=6$. Звідси $y=-2$.
Якщо $y=0$, то $2x-3\cdot 0=6$. Звідси $x=3$.

x	0	3
y	−2	0

2) Записуємо координати точок, через які проходить пряма.

$(0;-2)$; $(3;0)$

3) Позначаємо знайдені точки на координатній площині та проводимо через них пряму. Ця пряма й буде шуканим графіком рівняння $2x-3y=6$.



4) Перевіряємо, чи належить точка $A(-3;-4)$ графіку заданого рівняння, підставивши її координати в це рівняння замість змінних x та y.

$2x-3y=6$
$2\cdot(-3)-3\cdot(-4)=6$
$6=6$

Утворена рівність є правильною, тому точка $A(-3;-4)$ належить графіку рівняння.

5) Позначаємо на координатній площині дві будь-які точки, які не належать графіку заданого рівняння. Записуємо їх координати.

Наприклад, точки $B(-2;4)$ і $C(5;-2)$.
Оскільки точки B і C не належать графіку, то пари чисел, що відповідають координатам точок, не є розв'язками рівняння.

Відповідь: точка $A(2;13)$ належить графіку заданого рівняння.

ТРЕНУЄМОСЯ 4

Побудуйте графік лінійного рівняння з двома змінними та перевірте, чи належить точка A цьому графіку.

1) $x+y=2$, $A(1;1)$;
2) $x+y=3$, $A(1;2)$;
3) $-3x+y=6$, $A(0;6)$;
4) $-2x+y=4$, $A(0;4)$;
5) $4x-y=8$, $A(2;1)$;
6) $5x-y=10$, $A(3;5)$;
7) $-3x-2y=6$, $A(-4;3)$;
8) $-2x-5y=10$, $A(-3;-1)$.

Проект підручника видавництва "Ранок"

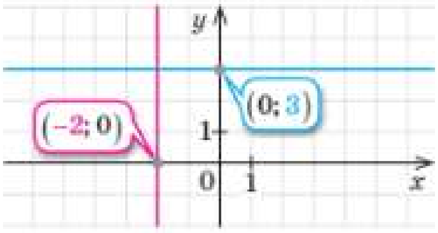
Визначимо, який вигляд має графік лінійного рівняння з двома змінними $ax+by=c$ в окремих випадках:

1) $a=0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$; 2) $a\neq 0,\ b=0,\ c\neq 0$.

1) $a=0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$	2) $a\neq 0,\ b=0,\ c\neq 0$
$by=c,\ y=\frac{c}{b}$	$ax=c,\ x=\frac{c}{a}$
Графік — пряма, паралельна осі Ox	Графік — пряма, паралельна осі Oy
Наприклад:	
$0x+2y=6$ $y=3$ Графік рівняння: • проходить через точку з координатами $(0;3)$ • паралельно осі Ox	$3x+0y=-6$ $x=-2$ Графік рівняння: • проходить через точку з координатами $(-2;0)$ • паралельно осі Oy

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Запишіть декілька пар значень змінних x і y, що перетворюють рівняння $6-2y=5$ у правильну рівність. Виграє той, хто запише більшу кількість пар.

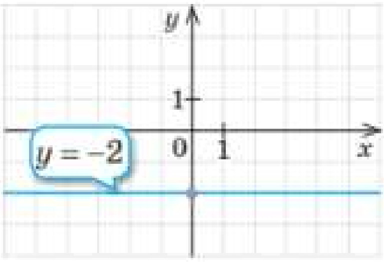
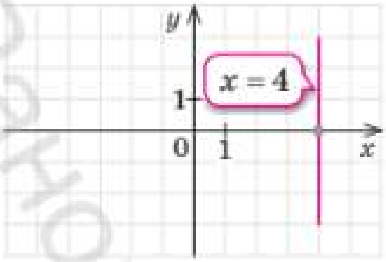


ПРИКЛАД 5

Побудуйте графік рівняння:

1) $4y+8=0$; 2) $6(y+2)=3x+6y$.

Розв'язання:

Спрощуємо рівняння	1) $4y+8=0$ $4y=-8$; $y=-2$	2) $6(y+2)=3x+6y$ $6y+12=3x+6y$; $6y-3x-6y=-12$; $-3x=-12$; $x=4$
Визначаємо вид графіка	$y=-2$ пряма паралельна осі Ox, проходить через точку $(0;-2)$	$x=4$ пряма паралельна осі Oy, проходить через точку $(4;0)$
Будуємо графік рівняння		

Проект підручника майбутнього видавництва "Ранок"

ТРЕНУЄМОСЯ 5

Побудуйте графік рівняння:

1) $x=-1$;
2) $y=5$;
3) $x-3=0$;
4) $y+1=0$;
5) $3y-6=0$;
6) $2x-6=0$;
7) $4x+5y=4(5+x)$;
8) $6x+5y=5(y+6)$.

ПРАКТИКУМ

17.1 Запишіть по три лінійних рівняння з двома змінними та вкажіть їх коефіцієнти a, b і c.

17.2 Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел:

1) $(1;2)$;
2) $(3;1)$;
3) $(1;0)$;
4) $(0;2)$;
5) $(-1;5)$;
6) $(2;-1)$;
7) $(-2;-1)$;
8) $(-4;-2)$.

17.3 У кожному з наведених рівнянь виразіть:

а) змінну x через змінну y;
б) змінну y через змінну x.

1) $x-y=12$;
2) $y+x=10$;
3) $x-5y=20$;
4) $6x+3y=18$;
5) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=2$;
6) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y=1$.

17.4 Виразіть y через x та знайдіть два будь-які розв'язки рівняння:

1) $4x-y=6$;
2) $y-3x=8$;
3) $6x-2y=14$;
4) $8x+2y=16$;
5) $5x-4y-18=0$;
6) $2x+5y+11=0$.

17.5 Укажіть рівняння, графіки яких збігаються із графіком рівняння $y-12x=4$:

1) $y=12x-4$;
2) $2y-12x=8$;
3) $0{,}5y-6x=4$;
4) $y=4(1+3x)$.

17.6 Визначте невідому координату точки A, яка належить графіку заданого рівняння:

1) $A(1;y)$, $5x+y=0$;
2) $A(x;1)$, $x-6y=0$;
3) $A(x;2)$, $x-3y=1$;
4) $A(4;y)$, $2x+y=10$;
5) $A(-3;y)$, $5x-2y=19$;
6) $A(x;-6)$, $3x-2y=15$.

ПРИГАДАЙТЕ!

1. Як розкривати дужки.
2. Як зводити подібні доданки.

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

Дівчинка вважає, що пара чисел $(-2;-1)$ є розв'язком рівняння $2x-5y=1$, а хлопчик каже, що ні. Хто з них правий?

Дівчинка

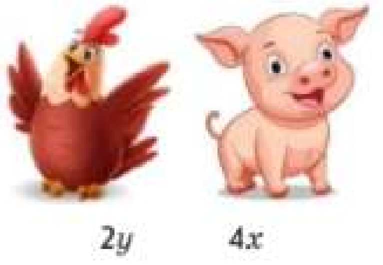
$$2x-5y=1;$$
$$2\cdot(-2)-5\cdot(-1)=1;$$
$$-4+5=1;$$
$$1=1$$

Хлопчик

$$2x-5y=1;$$
$$2\cdot(-1)-5\cdot(-2)=1$$
$$-2+10=1$$
$$8\neq1$$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

У фермера є курки і поросята. Всього в них 20 лап. Скільки курок і скільки поросят може бути у фермера?



17.7 Визначте координати точок перетину з осями координат графіків функцій:

1) $2x+5y=20$; 3) $4x-0{,}5y=8$; 5) $-\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y=4$;

2) $7x+3y=42$; 4) $3x-0{,}1y=6$; 6) $-\frac{2}{5}x-\frac{1}{4}y=2$.

17.8 Побудуйте графік рівняння:

1) $-0{,}5x=1{,}5$; 3) $\frac{1}{3}y+2=0$; 5) $7y=14x$;

2) $0{,}2x=-1{,}4$; 4) $-\frac{1}{5}y-1=0$; 6) $5y=20x$.

17.9 Побудуйте графік рівняння:

1) $x-y-2=0$; 4) $5y-4(x+y)=4$;

2) $x+y-1=0$; 5) $2(x-y)+2(y+x)=12$;

3) $3(x-y)+4y=3$; 6) $5(x+y)-5(x-y)=30$.

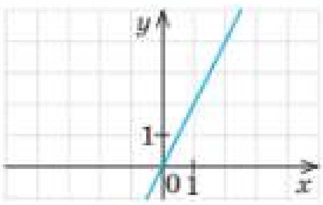
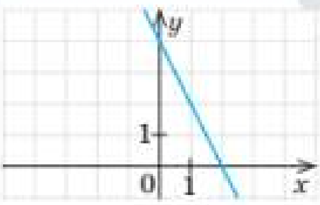
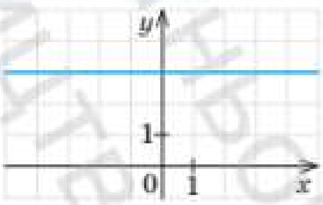
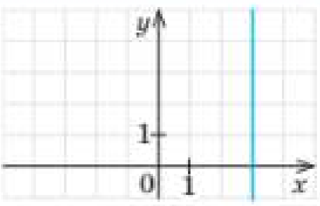
ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Старовинна задача

Шехерезада має розповісти всемогутньому правителю 1001 казку. Красуня планує розповідати по 3 казки кожної з x ночей та по 5 казок кожної з y ночей. Запропонуйте Шехерезаді декілька пар $(x; y)$, щоб вона розповіла всі казки згідно з планом. Урахуйте, що дівчина може здійснити свій план 67 варіантами.

17.10 Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та їх графіками (А–Г).

1	2	3
$y-2x=0$	$x=3$	$3y+6x=12$

А	Б	В	Г
			

MATH FOR LIFE

17.11 ***Технологія.*** Підприємство виготовило x роботів-пилососів першого типу та y роботів-пилососів другого. На кожний пилосос першого типу встановили 3 голосові пакети, на кожний пилосос другого — 5. Складіть рівняння за умовою задачі, якщо відомо, що всього було встановлено 235 голосових пакетів. Покажіть, що пара чисел $(45; 20)$ є розв'язком складеного рівняння.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Художники, які створюють мультфільми, займаються різними справами залежно від масштабу фільму. Якщо фільм маленький, то один художник може виконати всі технологічні завдання. Великі проєкти вимагають командної роботи, де кожний художник спеціалізується на певній операції. Сьогодні процес створення мультфільмів суттєво полегшують сучасні комп'ютерні програми.

17.12 ***Мультиплікація.*** Над створенням фільму працювали x художників-мультиплікаторів та y художниць-аніматорок. Кожний мультиплікатор створив 7 ескізів, а кожна аніматорка — 6. Складіть рівняння за умовою задачі, якщо всього було створено 142 ескізи. Яка з пар чисел $(12; 10)$, $(10; 12)$ є розв'язком складеного рівняння?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

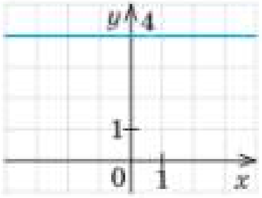
17.13 Знайдіть координати точок перетину графіка рівняння:

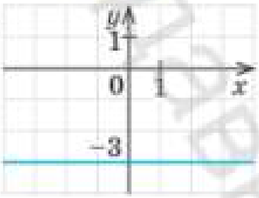
1) $3x - 7y = 21$ з віссю Ox; 2) $-5x + 2y = 20$ з віссю Oy.

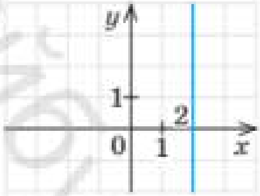
17.14 Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графіком якого є пряма, що проходить через початок координат і точку:

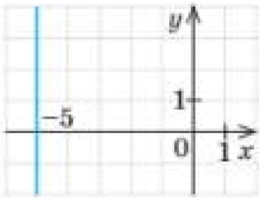
1) $M(5; -1)$; 2) $N(-6; 3)$.

17.15 Графік якого рівняння зображено на рисунку?

1)


2)


3)


4)


17.16 Побудуйте графік рівняння:

1) $5(x - 3y) = 5x$; 2) $7(2y - x) = 14y$.

17.17 Визначте, при якому значенні a графік наведеного в завданнях 1–4 рівняння проходить через точку M.

Аналізуємо	Виконуємо
4) $5x + 2y = 1$, $M(-3; a)$. • Підставляємо в рівняння значення координат точки M: $5 \cdot (-3) + 2 \cdot a = 1$. • Спрощуємо рівняння. Знаходимо значення a: $-15 + 2 \cdot a = 1$; $2 \cdot a = 16$; $a = 8$. *Відповідь:* при $a = 8$.	1) $5x - 2y = a$, $M(-1; -1)$; 2) $-3x + 8y = a$, $M(-2; 3)$; 3) $2x - 3y = 1$, $M(a; 1)$;

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 12

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Укажіть лінійне рівняння з двома змінними.

А	Б	В	Г
$x-y^2=1$	$x-2y=1$	$x^2-y=1$	$x^2-y^2=2$

2 Укажіть рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $(1;3)$.

А	Б	В	Г
$5x-y=3$	$x+5y=8$	$5x+y=8$	$x-5y=3$

3 Визначте розв'язок рівняння $3x-5y=15$, якщо $x=0$.

А	Б	В	Г
$(0;3)$	$(5;0)$	$(-5;0)$	$(0;-3)$

4 Виразіть у рівнянні $-6x+y=2$ змінну y через змінну x.

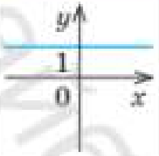
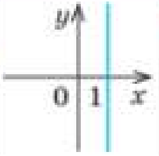
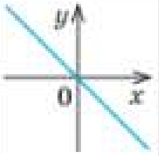
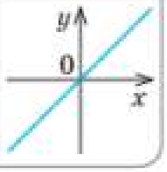
А	Б	В	Г
$y=2+6x$	$y=2-6x$	$y=-2-6x$	$y=6x-2$

5 На уроку з орігамі було x хлопців та y дівчат. Кожному хлопцю було видано 4 аркуші паперу, а кожній дівчині — 5, усього 48 аркушів. Укажіть рівняння, що відповідає умові задачі.

А	Б	В	Г
$20xy=48$	$5x+4y=48$	$4x+5y=48$	$9+xy=48$

6 Установіть відповідність між рівнянням (1–3), та його графіком (А–Г).

1	2	3
$y=-x$	$y-x=0$	$x=1$

А	Б	В	Г
			

7 Побудуйте графік рівняння $-2x-y=6$. Перевірте, чи належить точка $A(-1;-4)$ графіку цього рівняння.

8 Побудуйте графік рівняння $8(x-1)=8x-4y$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

17.18 Визначте, чи є пара чисел розв'язком заданого рівняння:

1) $(1;4)$, $x+2y=9$;

2) $(0;-5)$, $3x-4y=-20$;

3) $(-1;4)$, $9x-0,5y=-11$;

4) $(-8;-4)$, $-\frac{x}{4}-6y=26$.

Завдання 17.18 → Приклад 1
Завдання 17.19 → Приклад 2
Завдання 17.20 → Приклад 3
Завдання 17.21 → Приклад 4
Завдання 17.22 → Приклад 5
Завдання 17.23 → Math for life, 17.11
Завдання 17.24 → Math for life, 17.12

Підручник Проект
Матеріали видавництва "Ранок"

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

Допоможіть волонтерам

Один волонтер витрачає на пакування гуманітарної допомоги в малу та велику коробки 3 хв та 5 хв відповідно. Скільки волонтерів можуть спакувати 60 малих та 24 великі коробки за 30 хвилин?

17.19 У завданнях 1–2 запишіть розв'язок рівняння:

1) $x+5y=8$, якщо $y=0$; 2) $-7x+3y=14$, якщо $x=1$.

У завданнях 3–4 визначте будь-які два розв'язки рівняння та виконайте перевірку.

3) $10x-5y=50$; 4) $-6x-11y=66$.

17.20 У завданнях 1–2 виразіть змінну y через змінну x і заповніть таблицю.

1) $3x+y=8$

x	0	1	−1
y			

2) $-2x+2y=10$

x	0	1	−1
y			

У завданнях 3–4 запишіть будь-які три розв'язки рівняння.

3) $6x-2y=8$; 4) $-5x-3y=18$.

17.21 Побудуйте графік лінійного рівняння з двома змінними та перевірте, чи належить точка A цьому графіку.

1) $x+y=1$, $A(1;0)$; 3) $2x-y=8$, $A(5;1)$;

2) $-3x+y=9$, $A(0;9)$; 4) $-5x-2y=10$, $A(-4;5)$.

17.22 Побудуйте графік рівняння.

1) $x=2$; 3) $4x-8=0$;

2) $y+3=0$; 4) $5x+3y=5(x-3)$.

17.23 Для безперервної роботи фабрики ввімкнули x генераторів першого типу та y генераторів другого. Кожний генератор першого типу витратив 45 л пального, а кожний генератор другого — 60 л. Складіть рівняння за умовою задачі, якщо відомо, що всього було витрачено 390 л пального. Покажіть, що пара чисел $(2;5)$ є розв'язком складеного рівняння.

17.24 У турнірі з кіберспорту взяли участь x учнів та y учениць. Кожний учень виконав 2 квести, а кожна учениця — 3. Складіть рівняння за умовою задачі, якщо відомо, що всього було виконано 170 квестів. Яка з пар чисел $(40;30)$, $(25;40)$ є розв'язком складеного рівняння?

Бонусне завдання

17.25 Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точку $D(-3;6)$ паралельно:

1) осі абсцис Ox; 2) осі ординат Oy.

# BE SMART

Тип рівнянь із цілими коефіцієнтами, у яких невідомі змінні можуть набувати тільки цілих значень, носить ім'я «діофантові рівняння» — на честь грецького математика Діофанта Александрійського (приблизно III ст. н. е.).

Діофантові рівняння вперше докладно досліджувалися у збірнику задач Діофанта «Арифметика», що складався з 13 книг і містив 189 задач з розв'язуваннями і поясненнями.

Знайдіть задачі, складені Діофантом, і спробуйте розібрати їх розв'язування.

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 16–17

1 Ви пригадали, що таке рівняння та його розв'язок, що означає розв'язати рівняння, а також дізналися, що ті рівняння, які ви розв'язували раніше, мають спеціальну назву — лінійні рівняння з однією змінною.

Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають **лінійним рівнянням з однією змінною.** Числа a і b — **коефіцієнти рівняння**.

Лінійне рівняння з однією змінною може мати *один* корінь, *не мати* коренів або мати *безліч* коренів.

2 Ви познайомилися з математичним моделюванням і дізналися, що лінійні рівняння можуть бути математичними моделями текстових задач.

Математична модель — це опис реальної ситуації математичною мовою, тобто мовою математичних понять, формул, рівнянь тощо.

Алгоритм розв'язування текстової задачі:

1. Проаналізувати умову задачі.
2. Створити математичну модель (відтворити умову задачі у вигляді таблиці, рисунка тощо, скласти рівняння до задачі).
3. Розв'язати отримане рівняння.
4. Проаналізувати отримані результати з огляду на умову задачі.
5. Записати відповідь.

3 Ви познайомилися з новим видом рівнянь — рівняннями з двома змінними — та окремим випадком цих рівнянь — лінійними рівняннями з двома змінними; дізналися про алгоритм пошуку розв'язків цих рівнянь.

Лінійним рівнянням із двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де x і y — змінні, a, b і c — деякі числа. Числа a, b і c називають **коефіцієнтами рівняння**, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Розв'язком рівняння з двома змінними називають пару значень змінних (пару чисел), яка перетворює це рівняння в правильну рівність (задовольняє рівняння).

4 Ви познайомилися з поняттям графіка рівняння з двома змінними, зокрема лінійного рівняння з двома змінними.

Графік рівняння з двома змінними — це фігура, що складається з усіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками даного рівняння.

Графіком лінійного рівняння з двома змінними, у якому хоча б один із коефіцієнтів a або b відмінний від нуля, є пряма.

Варіант 2 контрольної роботи в електронному додатку

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 6

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Укажіть корінь рівняння $\frac{x}{3}=6$.

А	Б	В	Г
0,5	2	3	18

2 Розв'яжіть рівняння $x-6+3x=4x-6$.

А	Б	В	Г
Коренів немає	6	x — довільне число	−6

3 Розв'яжіть рівняння $5(x-1)=3x-2$.

А	Б	В	Г
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	x — довільне число	Коренів немає

4 Розв'яжіть рівняння $\frac{3x-1}{3}=\frac{2x+1}{2}$.

А	Б	В	Г
Коренів немає	5	x — довільне число	−1

5 Визначте розв'язок рівняння $2x-y=11$, якщо $x=1$.

А	Б	В	Г
(1; 5)	(1; 6)	(1; −9)	(1; 9)

6 На першому катері було x дайверів, а на другому — y. Усі дайвери з першого катера знайшли по 6 старовинних монет, а всі дайвери з другого — по 8. Укажіть рівняння, що відповідає умові задачі, якщо всього було знайдено 34 старовинні монети.

А	Б	В	Г
$8x+6y=34$	$14+xy=34$	$14xy=34$	$6x+8y=34$

7 У певному місті вже побудовано 23 сучасні спортивні майданчики. Через 3 місяці їх загальна кількість має становити 65. Щомісяця планується будувати x таких майданчиків.

1) Складіть рівняння за умовою задачі.

2) Визначте x.

8 Розв'яжіть рівняння $|2-5x|=28$.

9 Побудуйте графік рівняння $4x-y=2$. Перевірте, чи належить точка $A(-1;-6)$ графіку цього рівняння.

10 Побудуйте графік рівняння $9(x+y)=9y+27$.

Бонусне завдання

При якому значенні a рівняння $ax-8=4x+a$ не має коренів?

Підручник "Проект майбутнього" видавництва "Ранок"

§18

СИСТЕМИ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ ГРАФІЧНИМ СПОСОБОМ

ВЧОРА Ви будували графіки лінійних рівнянь із двома змінними

СЬОГОДНІ Ви дізнаєтеся, як визначати точку перетину графіків лінійних рівнянь із двома змінними

ЗАВЖДИ Ви зможете визначити оптимальний шлях до мети подорожі

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

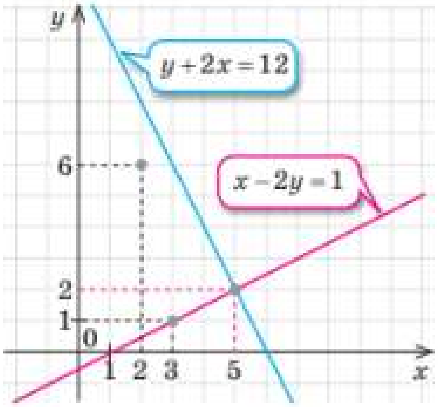
АВТОМАГІСТРАЛІ

На рисунку зображено схему, на якій дві автомагістралі позначено графіками рівнянь $x-2y=1$ і $y+2x=12$, побудованими в прямокутній системі координат.

1. Визначте координати точки перетину цих автомагістралей.

2. Графік якого рівняння позначає автомагістраль, що проходить через населений пункт, розташований у точці з координатами $(3;1)$?

3. Архітектурна пам'ятка розташована в точці з координатами $(2;6)$. Яка з автомагістралей проходить найближче до цієї пам'ятки? Укажіть відповідне рівняння.



Математичною моделлю Актуальної задачі є не одне, а два лінійних рівняння з двома змінними. Причому, точка перетину графіків цих рівнянь (5; 2) визначає пару чисел, що є розв'язком обох рівнянь одночасно.

У такому випадку кажуть, що рівняння утворюють *систему*, а пара (5; 2) є розв'язком системи рівнянь.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Систему двох лінійних рівнянь із двома змінними записують за допомогою фігурної дужки $\{$, так:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$$

де a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — коефіцієнти рівнянь (нагадаємо, c_1 і c_2 ще називають вільними членами).

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- система лінійних рівнянь із двома змінними (*system of linear equation with two variables*)
- графічний спосіб (*graphical method*)
- пара чисел (*pair of numbers*)
- розв'язок системи (*solution of a linear system*)
- точка перетину (*point of intersection*)

В ОДИН КЛІК

Пропонуємо скористатись онлайн-калькулятором Desmos, який можна використовувати для побудови графіків функцій та рівнянь, дослідження функцій, розв'язування систем рівнянь графічним способом тощо. Працюючи з онлайн-калькулятором Desmos, пам'ятайте:

- у лівій частині панелі розташовано поле для введення даних, у правій частині — область побудов;
- сервіс дозволяє будувати декілька графіків в одній координатній площині;
- вводити символи можна з клавіатури комп'ютера або вбудованої клавіатури, встановивши англійську мову введення.

Якщо хочете дізнатися більше, зверніться до електронного додатку.

РОЗМИНКА 1

Укажіть, які з наведених систем рівнянь є системами двох лінійних рівнянь із двома змінними:

1) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ x+4y=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y=4, \\ x+7y=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy-10=0, \\ 11+2y=0; \end{cases}$

Означення. **Розв'язком системи рівнянь із двома змінними** називають пару значень змінних, які задовольняють кожне з рівнянь, тобто перетворюють їх у правильну рівність.

Означення. **Розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними** означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

РОЗМИНКА 2

Укажіть системи рівнянь, розв'язком яких є пара чисел $(0;0)$.

1) $\begin{cases} 2x=0, \\ x-y=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y+4=4, \\ x+y=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y+1=x, \\ x-2y=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=-x, \\ x+y=2. \end{cases}$

ПРИКЛАД 1

Визначте, яка з пар чисел: $(16;6)$, $(8;3)$, $(6;2)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x-5y=2, \\ x-2y=4. \end{cases}$

Розв'язання:

Пара чисел	$2x-5y=2$		$x-2y=4$		Висновок
$(16;6)$	$2\cdot16-5\cdot6=2$ $2=2$ Рівність правильна	Пара чисел $(16;6)$ є розв'язком рівняння	$16-2\cdot6=4$ $4=4$ Рівність правильна	Пара чисел $(16;6)$ є розв'язком рівняння	Пара чисел $(16;6)$ є розв'язком системи
$(6;2)$	$2\cdot6-5\cdot2=2$ $2=2$ Рівність правильна	Пара чисел $(6;2)$ є розв'язком рівняння	$6-2\cdot2=4$ $2\neq4$ Рівність неправильна	Пара чисел $(6;2)$ не є розв'язком рівняння	Пара чисел $(6;2)$ не є розв'язком системи

Пара чисел	$2x-5y=2$		$x-2y=4$	Висновок
$(8;3)$	$2\cdot8-5\cdot3=2$ $1\neq2$ Рівність неправильна	Пара чисел $(8;3)$ не є розв'язком рівняння	Оскільки пара чисел не задовольняє перше рівняння системи, перевіряти, чи є вона розв'язком другого рівняння системи, немає потреби	Пара чисел $(8;3)$ не є розв'язком системи

Відповідь: пара чисел $(16;6)$ є розв'язком заданої системи рівнянь, а решта пар чисел — ні.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

З'ясуйте, чи є вказана пара чисел розв'язком заданої системи рівнянь.

1) $(1;0)$, $\begin{cases}x-1=0,\\x+y=1;\end{cases}$

2) $(0;-3)$, $\begin{cases}y+3=0,\\x+y=-3;\end{cases}$

3) $(1;4)$, $\begin{cases}2y=8,\\x-y=-3;\end{cases}$

4) $(3;-1)$, $\begin{cases}3x=9,\\-x+y=-4;\end{cases}$

5) $(4;-3)$, $\begin{cases}x+y=1,\\2x-y=5;\end{cases}$

6) $(6;-1)$, $\begin{cases}x+y=5,\\x-3y=3;\end{cases}$

7) $(-3;-2)$, $\begin{cases}-x+3y=-3,\\4x-5y=-2;\end{cases}$

8) $(-3;-4)$, $\begin{cases}-5x+2y=7,\\x-3y=9.\end{cases}$

СЛІД ЗНАТИ!

Чи є пара чисел розв'язком системи рівнянь!

- Якщо пара чисел задовольняє обидва рівняння системи, то вона є розв'язком системи рівнянь.
- Якщо пара чисел не задовольняє хоча б одне з рівнянь, то вона не є розв'язком системи рівнянь

Існують різні способи розв'язування систем лінійних рівнянь. Розглянемо графічний спосіб.

СЛІД ЗНАТИ!

Існує декілька способів розв'язування систем лінійних рівнянь із двома змінними: *аналітичні* (за допомогою перетворень) і *графічний* (за допомогою побудови графіків)

Алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь із двома змінними графічним способом

1. Побудувати в одній системі координат графіки обох рівнянь.
2. Знайти координати точки перетину графіків.
3. Перевірити, чи є знайдена пара чисел розв'язком системи рівнянь.
4. Записати відповідь.

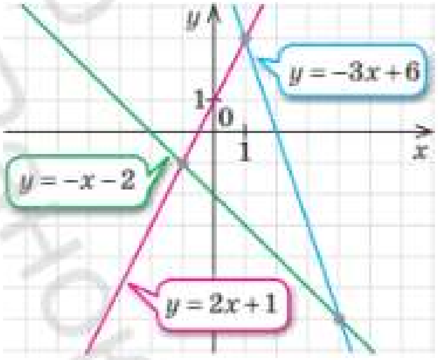
РОЗМИНКА 3

Знайдіть за рисунком координати точок перетину графіків функцій:

1) $y=2x+1$ і $y=-3x+6$;

2) $y=2x+1$ і $y=-x-2$;

3) $y=-3x+6$ і $y=-x-2$.



Підручник проєкту видавництва "Ранок"

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь $\begin{cases}3x-y=1,\\4x+y=6.\end{cases}$

Розв'язання:

Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь.

1) **Виражаємо** в кожному рівнянні змінну y через змінну x

$3x-y=1,$ $y=3x-1$

$4x+y=6,$ $y=-4x+6$

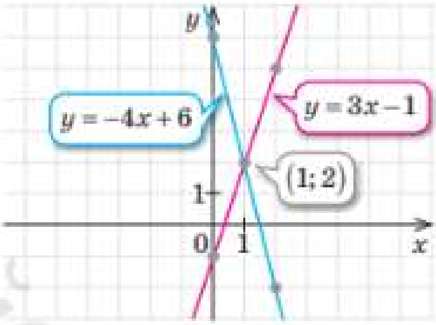
2) **Складаємо** таблицю відповідних значень x та y для двох точок, що належать графіку

x	0	2
y	-1	5

x	0	2
y	6	-2

3) **Проводимо** прямі через точки з координатами:
- $(0;-1)$, $(2;5)$ та
- $(0;6)$, $(2;-2)$

4) **Знаходимо** координати точки перетину графіків рівнянь.



5) **Перевіряємо** чи є пара чисел $(1;2)$ розв'язком заданої системи рівнянь.

$3x-y=1$
$3\cdot1-(-1)=4$
$4=4$

$4x+y=6$
$4\cdot1+(-1)=3$
$3=3$

6) **Робимо** висновок.

Кожна з рівностей є правильною.

Отже, пара чисел $(1;2)$ є розв'язком системи

Відповідь: $(1;2)$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Лінійне рівняння з двома змінними $ax+by=c$ можна записати у формі лінійної функції:

$$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}, \text{ якщо } b\neq0.$$

Графіком лінійної функції є пряма, отже, графіком лінійного рівняння з двома змінними також є пряма.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь:

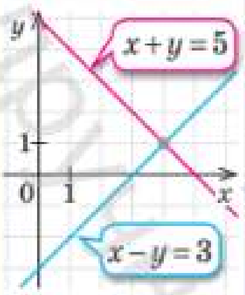
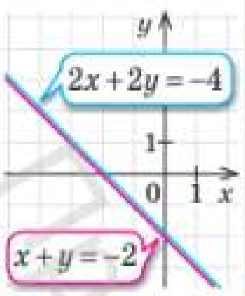
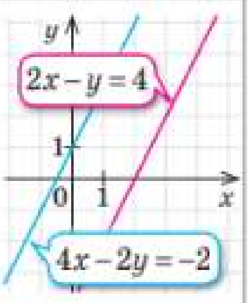
1) $\begin{cases}x=2,\\y=x+1;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}y=x,\\y=2x-2;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}-x+y=4,\\2x+y=1;\end{cases}$ 7) $\begin{cases}-3x+y=1,\\4x-y=-2;\end{cases}$

2) $\begin{cases}y=1,\\y=x-2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}y=-x,\\y=x-4;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}-2x+y=8,\\x+y=-1;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}-2x+y=5,\\3x-y=-8.\end{cases}$

Графічним способом не завжди можна знайти точні розв'язки системи рівнянь, тому спосіб є зручним для знаходження **кількості розв'язків** системи рівнянь.

Проект майбутнього
підручника видавництва "Ранок"

Кількість розв'язків системи рівнянь

Системи рівнянь	1) $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=3 \end{cases}$	2) $\begin{cases} x+y=-2, \\ 2x+2y=-4 \end{cases}$	3) $\begin{cases} 2x-y=4, \\ 4x-2y=-2 \end{cases}$
Графіки рівнянь			
Розташування прямих	перетинаються	збігаються	паралельні
Кількість розв'язків	один	безліч	розв'язків немає

Ураховуючи, що графіком кожного з рівнянь системи лінійних рівнянь із двома змінними є пряма, можна зробити висновок, що *кількість розв'язків такої системи залежить від взаємного розміщення цих прямих*.

Розглянемо випадки, коли системи лінійних рівнянь із двома змінними не мають розв'язків або мають їх безліч.

ПРИКЛАД 3

Визначте графічним способом кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x+y=2, \\ 2x+y=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+y=2, \\ 4x+2y=4. \end{cases}$

Розв'язання:

Виконуємо завдання за алгоритмом розв'язування системи лінійних рівнянь із двома змінними графічним способом.

ДОСЛІДЖУЄМО!

Проаналізуйте системи рівнянь, подані в таблиці. Скільки коренів має кожна система? Зробіть висновки, як кількість розв'язків системи двох лінійних рівнянь залежить від взаємного розташування їх графіків. Порівняйте свої висновки з даними останнього рядка таблиці

СЛІД ЗНАТИ!

Системи лінійних рівнянь із двома змінними можуть:
- мати один розв'язок;
- не мати розв'язків;
- мати безліч розв'язків

ПРИГАДАЙТЕ!

Будуючи графік лінійного рівняння з двома змінними, зручно шукати такі розв'язки рівняння, для яких $x=0$ або $y=0$.

x	0	?
y	?	0

1. Будуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь:
- виражаємо в кожному рівнянні обох систем змінну y через змінну x; (якщо потрібно);
- складаємо таблиці відповідних значень x та y для двох зручних точок, що належать кожному графіку.

1) $2x+y=2$
$y=-2x+2$

x	0	1
y	2	0

$2x+y=4$
$y=-2x+4$

x	0	2
y	4	0

2) $2x+y=2$
$y=-2x+2$

x	0	1
y	2	0

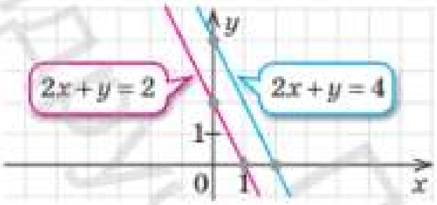
$4x+2y=4$
$2y=-4x+4$

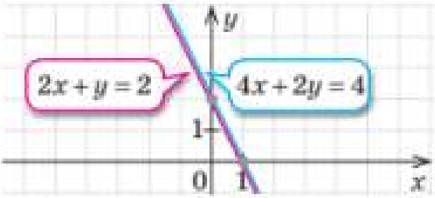
x	0	1
y	2	0

2. Проводимо прямі через точки з координатами:

- $(0;2)$, $(1;0)$ та $(0;4)$, $(2;0)$
- $(0;2)$, $(1;0)$ та $(0;2)$, $(1;0)$

Знаходимо координати точки перетину графіків рівнянь, якщо такі точки існують.





3. Робимо висновок про кількість розв'язків системи рівнянь.

Побудовані прямі паралельні, отже, задана система рівнянь **не має розв'язків**

Побудовані прямі збігаються, отже, задана система рівнянь **має безліч розв'язків**

Відповідь: система рівнянь $\begin{cases}2x+y=2,\\2x+y=4\end{cases}$ не має розв'язків; система рівнянь $\begin{cases}2x+y=2,\\4x+2y=4\end{cases}$ має безліч розв'язків.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Кількість розв'язків системи лінійних рівнянь із двома змінними можна визначати не лише графічним, але й *аналітичним шляхом*. Ця кількість залежить від відношення коефіцієнтів рівнянь, що складають систему.

Дізнайтеся про це більше з електронного додатка до підручника

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

Система двох лінійних рівнянь із двома змінними

$$\begin{cases}y-|x|=0,\\x-2y=-3\end{cases}$$

має два розв'язки: $(-1;\ 1)$ і $(3;3)$. Але ж система двох лінійних рівнянь із двома змінними може мати один, безліч або не мати розв'язків. У чому помилка?

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Визначте графічним способом кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases}y=x-3,\\y=3;\end{cases}$

2) $\begin{cases}y=x+2,\\y=-1;\end{cases}$

3) $\begin{cases}y=2x,\\2y-4x=0;\end{cases}$

4) $\begin{cases}y=-3x,\\2y+6x=0;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x+y=0,\\3x+3y=12;\end{cases}$

6) $\begin{cases}-x+y=0,\\-2x+2y=10;\end{cases}$

7) $\begin{cases}2x-y=5,\\-6x+3y=-15;\end{cases}$

8) $\begin{cases}-3x+y=6,\\6x-2y=-6.\end{cases}$

ПРАКТИКУМ

18.1 Визначте значення a і b, за яких запропонована пара чисел є розв'язком заданої системи рівнянь.

1) $(1;0)$ $\begin{cases}ax+5y=-2,\\bx+6y=4;\end{cases}$

2) $(0;1)$ $\begin{cases}-3x+ay=9,\\8x+by=5;\end{cases}$

3) $(1;-1)$ $\begin{cases}9x+ay=7,\\bx-4y=10;\end{cases}$

4) $(-1;1)$ $\begin{cases}4x+ay=16,\\x-by=13;\end{cases}$

5) $(3;-2)$ $\begin{cases}5x-y=a,\\-x+6y=b;\end{cases}$

6) $(-5;2)$ $\begin{cases}x+3y=a,\\-2x+6y=b.\end{cases}$

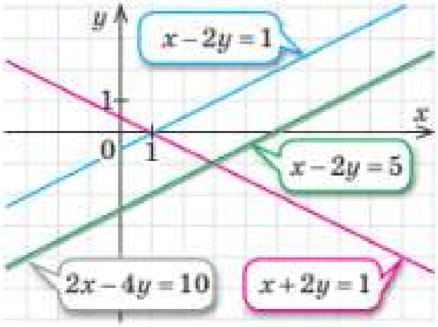
18.2 Виконайте завдання за рисунком, на якому зображені графіки чотирьох рівнянь.

1) Визначте кількість спільних точок прямих, заданих рівняннями:

а) $x-2y=1$ і $x+2y=1$; б) $x-2y=1$ і $2x-4y=10$; в) $x-2y=5$ і $2x-4y=10$.

2) Запишіть систему рівнянь, яка:

а) має єдиний розв'язок $(1;0)$; б) не має жодного розв'язку; в) має безліч розв'язків.



18.3 Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y=-2, \\ -x+y=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=0, \\ -x+y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+3y=6, \\ 2x-y=5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=3, \\ x+y=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2x+y=0, \\ x+y=-3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x+y=-1, \\ x-3y=10. \end{cases}$

18.4 Визначте кількість розв'язків кожної системи рівнянь. Якщо система рівнянь має єдиний розв'язок, то знайдіть його.

1) $\begin{cases} x-2y=1, \\ x+2y=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-5y=-4, \\ 2x-5y=4; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 6x-15y=9, \\ 2x-5y=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x+y=1, \\ 3x+y=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x+3y=8, \\ -x+3y=7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} -3x+7y=1, \\ 6x-14y=-2. \end{cases}$

MATH FOR LIFE

18.5 Розташування двох підводних кабелів, що з'єднують морські вітрогенератори із суходолом, можна описати графіками рівнянь $y-3x=0$ і $y+x=4$.

1) Побудуйте графіки цих рівнянь у прямокутній системі координат xOy.
2) Визначте координати точки перетину цих кабелів.
3) Місце, де споруджується новий вітрогенератор, розташоване в точці з координатами $(5;0)$. Який із кабелів проходить найближче до цього місця? Укажіть відповідне рівняння.

18.6 Траєкторії польоту двох лайнерів можна описати графіками рівнянь $y+x=2$ і $y+x=5$.

1) Побудуйте графіки цих рівнянь у прямокутній системі координат xOy.
2) З'ясуйте, чи перетинаються ці траєкторії. Якщо так, то визначте координати точки їх перетину.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Зараз усі країни ЄС, що мають вихід до Північного й Балтійського морів, приділяють величезну увагу розвитку вітроенергетики й будують вітрогенератори прямо в морі. Чому? Тому що у відкритому морі вітри завжди сильніші, а вітроелектричні установки можна зробити більш потужними, установивши на них більші лопаті.

Інший варіант роботи в електронному додатку

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 13

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

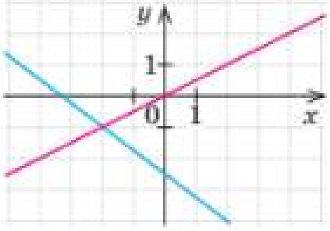
1 Укажіть систему лінійних рівнянь із двома змінними.

А	Б	В	Г
$\begin{cases} x+y=8, \\ 10-xy=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+6y=-4, \\ x-y^2=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y=9, \\ x-y=5 \end{cases}$	$\begin{cases} 7x+y=-1, \\ x-4y=2 \end{cases}$

2 Укажіть пару чисел, яка є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} y-3=0, \\ x+y=5. \end{cases}$

А	Б	В	Г
$(5;3)$	$(1;3)$	$(2;3)$	$(3;2)$

3 На рисунку подано графічне розв'язання системи лінійних рівнянь із двома змінними. Укажіть розв'язок цієї системи.

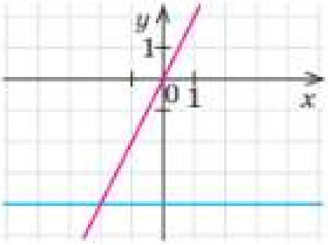


А	Б	В	Г
$(-2;1)$	$(-2;-1)$	$(-1;-2)$	$(1;-2)$

4 Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x-2y=3, \\ 2x-4y=6? \end{cases}$

А	Б	В	Г
Жодного	Лише один	Лише два	Безліч

5 Траєкторії польоту двох дронів можна описати графіками рівнянь $y=2x$ і $y=-4$ у прямокутній системі координат xOy. Ці графіки зображено на рисунку. Укажіть координати точки, у якій перетинаються траєкторії польоту дронів.



А	Б	В	Г
$(-2;-4)$	$(-4;-2)$	$(-2;4)$	$(2;-4)$

6 Установіть відповідність між системою рівнянь (1–3) та її розв'язком (А–Г).

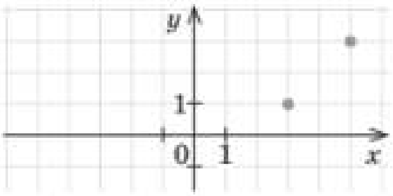
1	$\begin{cases} 2x+y=3, \\ x-2y=-1 \end{cases}$	А	$(-1;1)$
2	$\begin{cases} 2x-y=3, \\ x-y=2 \end{cases}$	Б	$(1;-1)$
3	$\begin{cases} 2x+y=-1, \\ -x-2y=-1 \end{cases}$	В	$(-1;-1)$
		Г	$(1;1)$

7 Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь $\begin{cases} x+y=0, \\ -2x+y=6. \end{cases}$

8 Знайдіть значення a, за якого пара чисел $(-2;10)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x+y=8, \\ 5x+3y=a. \end{cases}$

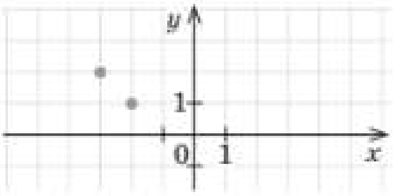
Проект підручника видавництва "Ранок"

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС



18.7 Система лінійних рівнянь має безліч розв'язків. Користуючись рисунком, на якому точками зображено два розв'язки системи:

1) знайдіть ще два розв'язки цієї системи;
2) з'ясуйте, чи є пара чисел $(1; -1)$ розв'язком системи.



18.8 Система лінійних рівнянь має безліч розв'язків. Користуючись рисунком, на якому точками зображено два розв'язки системи:

1) знайдіть ще два розв'язки цієї системи;
2) з'ясуйте, чи є пара чисел $(-4; 3)$ розв'язком системи.

18.9 Чи існує таке значення a, за якого:

1) система рівнянь $\begin{cases} y = -3x, \\ y = ax \end{cases}$ має безліч розв'язків? Якщо так, то знайдіть його;
2) система рівнянь $\begin{cases} y = 2x, \\ y = ax \end{cases}$ не має розв'язків? Якщо так, то знайдіть його.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Завдання 18.10 → Приклад 1
Завдання 18.11 → Приклад 2
Завдання 18.12 → Приклад 3
Завдання 18.13 → Інтелектуальний фітнес, 18.9
Завдання 18.14 → Math for life,
18.15 → 18.5, 18.6
Завдання 18.16 → Практикум, 18.2

18.10 З'ясуйте, чи є вказана пара чисел розв'язком заданої системи рівнянь.

1) $(-2; 0)$, $\begin{cases} x + 2 = 0, \\ x + y = -2; \end{cases}$
2) $(1; 5)$, $\begin{cases} 2y = 10, \\ x - y = -4; \end{cases}$
3) $(3; -1)$, $\begin{cases} x + y = 2, \\ 3x - y = 8; \end{cases}$
4) $(-4; -5)$, $\begin{cases} -x + 3y = -11, \\ 2x - 5y = 17. \end{cases}$

18.11 Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = 2, \\ y = x - 3; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y = x, \\ y = 2x + 2; \end{cases}$
3) $\begin{cases} -x + y = 5, \\ 3x + y = -3; \end{cases}$
4) $\begin{cases} -4x + y = 1, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$
5) $\begin{cases} -\dfrac{x}{3} + y = 1, \\ \dfrac{2x}{3} + y = 4; \end{cases}$
6) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + y = -1, \\ 2x - y = 10. \end{cases}$

18.12 Визначте графічним способом кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x - 4, \\ y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -x + y = 0, \\ -3x + 3y = 6; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} - y = 2, \\ 0{,}5x - 2y = -4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = -2x, \\ 2y + 4x = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + y = 6, \\ -6x - 2y = -12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + y = 1, \\ 0{,}4x + 2y = 2. \end{cases}$

18.13 Чи існують такі значення a, за яких:

1) система рівнянь $\begin{cases} y = ax \\ y = -9x \end{cases}$ не має розв'язків?

2) система рівнянь $\begin{cases} y = 4ax \\ y = 12x \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

Якщо так, то знайдіть їх.

18.14 Розташування двох ліній метрополітену в Києві можна описати графіками рівнянь $y - 2x = 0$ і $y + 2x = 4$.

1) Побудуйте графіки цих рівнянь у прямокутній системі координат xOy.
2) Визначте координати точки перетину цих ліній.
3) Музей «Експериментаріум» розташований у точці з координатами $(1{,}5; 4)$. Яка із ліній метрополітену проходить найближче до цього музею? Укажіть відповідне рівняння.

18.15 Траєкторії руху двох морських танкерів можна описати графіками рівнянь $y - x = 1$ і $y - x = 4$.

1) Побудуйте графіки цих рівнянь.
2) З'ясуйте, чи перетинаються ці траєкторії. Якщо так, визначте координати точки їх перетину.
3) У точці з координатами $(2; 2)$ було виявлено острів. Траєкторія руху якого з танкерів проходить найближче до нього? Укажіть відповідне рівняння.

18.16 Виконайте завдання за рисунком, на якому зображені графіки чотирьох рівнянь.

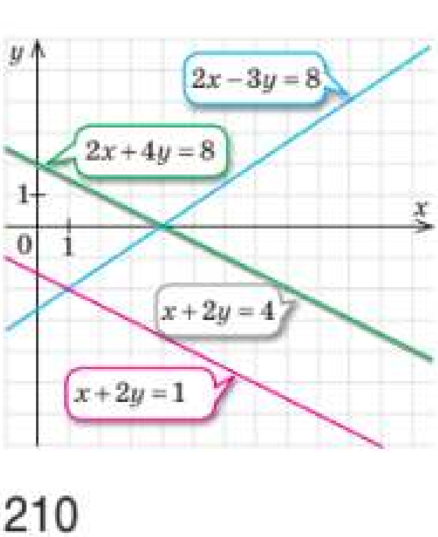
1) Визначте кількість спільних точок прямих, заданих рівняннями: а) $x + 2y = 4$ і $x + 2y = -3$; б) $x + 2y = 4$ і $2x + 4y = 8$; в) $2x - 3y = 8$ і $2x + 4y = 8$.

2) Запишіть систему рівнянь, яка: а) має єдиний розв'язок $(1; -2)$; б) не має жодного розв'язку; в) має безліч розв'язків.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Слово коефіцієнт походить від латинських *co* — спільно, разом і *efficients* — той, що виробляє і позначає в математиці сталий або відомий множник при іншій, зазвичай невідомій величині. Але це не єдиний зміст цього терміну. Інше значення — відносна величина, що визначає певну властивість. Тобто поняття коефіцієнт пов'язане з порівнянням. Коефіцієнти зустрічаються в різних сферах життя:

- коефіцієнт активності речовини в хімії;
- коефіцієнт корисної дії у фізиці;
- коефіцієнт зайнятості населення в соціології;
- коефіцієнт ануїтету в економіці;
- дихальний коефіцієнт у медицині;
- коефіцієнт інтелекту IQ тощо.



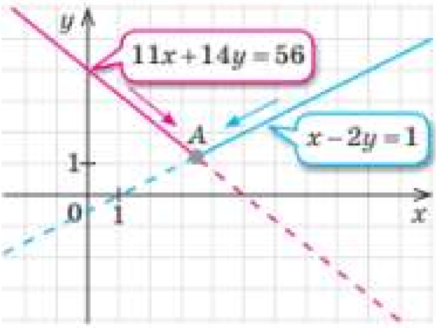
§19 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ПІДСТАНОВКИ

ВЧОРА	Ви знаходили розв'язки систем лінійних рівнянь із двома змінними графічним способом
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся, як розв'язувати такі системи рівнянь способом підстановки
ЗАВЖДИ	Ви зможете виділяти «зручну» змінну в лінійному рівнянні з двома змінними

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

СПЕЦПРИЗНАЧЕНЦІ

На рисунку зображено схему, на якій два маршрути пересування спецзагонів до точки зустрічі A позначено графіками рівнянь $x-2y=1$ і $11x+14y=56$, побудованими в прямокутній системі координат. Визначте координати точки A.



Розв'язання.

1. Запишемо систему рівнянь за умовою задачі:

$$\begin{cases} x-2y=1, \\ 11x+14y=56. \end{cases}$$

2. Розв'яжемо цю систему рівнянь графічним способом.

1) Будуємо в одній системі координат графіки двох рівнянь $x-2y=1$ і $11x+14y=56$.

2) Знаходимо координати точки перетину цих графіків: $A(x; y)$.

Поміркуйте й дайте відповіді на запитання.

- Чи вдалося вам знайти координати точки A?
- Якщо вдалося, чи впевнені ви, що визначили розв'язки системи рівнянь точно?
- Чи завжди можна знайти точні розв'язки, якщо розв'язувати системи рівнянь графічним способом?

ПРИГАДАЙТЕ!

Існує декілька способів розв'язування систем лінійних рівнянь із двома змінними: *графічний* (за допомогою побудови графіків) і *аналітичні* (за допомогою перетворень).

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Для визначення точних розв'язків системи рівнянь використовують різні *аналітичні способи*. У цьому параграфі ми розглянемо один із них — спосіб підстановки.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- спосіб підстановки (*substitution method*)
- виразити змінну (*to express variable*)

Алгоритм розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки

1. *Виразити* одну змінну через іншу з одного з рівнянь системи.
2. *Підставити* отриманий вираз замість відповідної змінної у друге рівняння системи.
3. *Розв'язати* отримане рівняння з однією змінною.
4. *Підставити* знайдений корінь рівняння у вираз, отриманий у п. 1, та *знайти* відповідне значення іншої змінної.
5. *Перевірити*, чи є знайдена пара чисел $(x; y)$ розв'язком заданої системи рівнянь.
6. *Записати* відповідь.

Розв'яжемо кілька систем двох лінійних рівнянь із двома змінними, діючи за алгоритмом.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} 9x - 2y = 15, \\ y = 3x. \end{cases}$

Розв'язання:

$\begin{cases} 9x - 2y = 15, \\ y = 3x \end{cases} \to 9x - 2 \cdot 3x = 15$	Підставляємо в перше рівняння системи замість y вираз $3x$.
$9x - 6x = 15$ $3x = 15$ $x = 5$	Розв'язуємо одержане рівняння.
$y = 3x \to y = 3 \cdot 5$ $y = 15$	Знаходимо відповідне значення змінної y із другого рівняння заданої системи рівнянь.
$\begin{matrix} x = 5, \\ y = 15 \end{matrix} \to \begin{cases} 9 \cdot 5 - 2 \cdot 15 = 15, \\ 15 = 3 \cdot 5; \end{cases} \begin{cases} 15 = 15, \\ 15 = 15 \end{cases}$	Перевіряємо, чи є знайдена пара чисел $(5; 15)$ розв'язком заданої системи рівнянь. Робимо висновок.

Відповідь: $(5; 15)$.

Перевірка потрібна, щоб переконатися, що знайдена пара чисел дійсно є розв'язком заданої системи рівнянь. Завдяки самоперевірці ви будете впевнені в результатах розв'язування систем лінійних рівнянь (і не тільки) на відповідальних тестуваннях у майбутньому.

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x = 4, \\ x + y = 9; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x = y, \\ x + 3y = 12; \end{cases}$
7) $\begin{cases} 2x + 7y = 19, \\ x = 3 - 4y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = 8, \\ x + y = 2; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 16x - 3y = 70. \\ y = 2x; \end{cases}$
8) $\begin{cases} 16x + 3y = -12, \\ y = 1 - 5x. \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x, \\ x + 2y = 15; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 4x - 9y = 24, \\ x = 3y; \end{cases}$

РОЗМИНКА 1

Виразіть у рівнянні одну змінну через іншу. Поясніть, яку саме змінну виразити зручніше й чому.

1) $y + x = 8$; 3) $x + 3y = -5$; 5) $2x = -y$; 7) $y - 3x = 4$;
2) $x - y = 9$; 4) $2y - x = -1$; 6) $-5x = y$; 8) $4x - y = 7$.

ПРИКЛАД 2

Виразіть з одного рівняння системи $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 3x + 2y = -15 \end{cases}$ одну змінну через іншу та знайдіть розв'язки системи рівнянь.

Розв'язання:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 3x + 2y = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4, \\ 3x + 2y = -15 \end{cases}$$

Виражаємо з першого рівняння змінну y через змінну x. Це зручніше: коефіцієнт при змінній y дорівнює -1.

$$3x + 2(2x - 4) = -15$$

Підставляємо отриманий вираз замість змінної y в друге рівняння системи.

$$3x + 4x - 8 = -15$$
$$7x = -15 + 8$$
$$7x = -7$$
$$x = -1$$

Розв'язуємо утворене рівняння з однією змінною.

$$y = 2x - 4 \rightarrow y = 2 \cdot (-1) - 4$$
$$y = -6$$

Підставляємо знайдений корінь рівняння у вираз для y та знаходимо значення змінної y.

$$\begin{matrix} x = -1, \\ y = -6 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot (-1) - (-6) = 4, \\ 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-6) = -15; \end{cases} \begin{cases} 4 = 4, \\ -15 = -15 \end{cases}$$

Виконуємо перевірку.
Робимо висновок.

Відповідь: $(-1; -6)$.

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо в системі рівнянь із двома змінними:

- значення однієї змінної вже відомо, то шукаємо тільки значення другої змінної;
- значення обох змінних невідомі, але одна змінна вже виражена через іншу, підставляємо цей вираз у друге рівняння і розв'язуємо рівняння з однією змінною.

Проєкт майбутнього
підручника видавництва "Ранок"

ДОСЛІДЖУЄМО!

Як доцільніше вибрати змінну, яку слід виразити через іншу?

- Вибрати будь-яку змінну з першого рівняння системи;
- вибрати будь-яку змінну з другого рівняння системи;
- вибрати будь-яку змінну з простішого рівняння системи;
- вибрати з будь-якого рівняння системи ту змінну, коефіцієнт при якій дорівнює 1 або –1.

ПРИГАДАЙТЕ

Властивості рівнянь

- Якщо до обох частин рівняння додати (відняти) одне й те саме число;
- якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний;
- якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число,

то отримаємо рівняння, яке має такі самі корені, що й дане.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Виразіть з одного з рівнянь системи одну змінну через іншу та знайдіть розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=8, \\ 2x+4y=-2; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 4x-y=-3, \\ 5(x+1)+2y=11; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=7, \\ 3x+y=9; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x-5y=16, \\ x+2y=9; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x-y=8, \\ 6(x-3)+2y=6. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=6, \\ 4x+3y=10; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x-7y=25, \\ x+3y=6; \end{cases}$

РОЗМИНКА 2

З якого рівняння заданої системи рівнянь зручно виразити одну змінну через іншу? Яку змінну виразити зручніше?

1) $\begin{cases} 3x-2y=-12, \\ 5x+y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-8y=2, \\ -3x+5y=-6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0,3x+0,1y=2, \\ -x+0,25y=5. \end{cases}$

Розв'язуючи системи рівнянь, ми виражали через іншу ту змінну, коефіцієнт при якій дорівнює 1 або –1. Але часто коефіцієнти при змінних відмінні від одиниці. Зазвичай, перш ніж виражати одну змінну через іншу, треба виконати перетворення вибраного рівняння або обох рівнянь системи на основі властивостей рівнянь.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{7}{12}, \\ \dfrac{y}{2}+\dfrac{x}{5}=1. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=\dfrac{7}{12}, & \Big| \cdot 12 \\ \dfrac{y}{2}+\dfrac{x}{5}=1; & \Big| \cdot 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x-3y=7, \\ 5y+2x=10 \end{cases}$$

Перетворюємо кожне рівняння системи на лінійне рівняння із цілими коефіцієнтами, домноживши ліву та праву частини рівняння на *найменший спільний знаменник*.

$$5y+2x=10 \rightarrow x=\frac{10-5y}{2}$$

Виражаємо з другого рівняння змінну x через змінну y.

$4x-3y=7$

Підставляємо отриманий вираз замість змінної x у перше рівняння системи.

$4\cdot\frac{10-5y}{2}-3y=7$

$2(10-5y)-3y=7$

Розв'язуємо утворене рівняння з однією змінною.

$20-13y=7$

$-13y=-13$

$y=1$

$x=\frac{10-5y}{2}\ \to\ x=\frac{10-5\cdot 1}{2}$

Підставляємо знайдений корінь рівняння у вираз для x та знаходимо значення змінної x.

$x=2{,}5$

$\begin{matrix}x=2{,}5,\\ y=1\end{matrix}\ \to\ \begin{cases}\frac{2{,}5}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12},\\ \frac{1}{2}+\frac{2{,}5}{5}=1;\end{cases}\ \begin{cases}\frac{7}{12}=\frac{7}{12},\\ 1=1\end{cases}$

Виконуємо перевірку.

Робимо висновок.

Відповідь: $(2{,}5;1)$.

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x-\frac{y}{4}=0,\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=5;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{x}{6}-y=0,\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{3}=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=0,\\ \frac{x}{4}+\frac{y}{4}=-5;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=0,\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{3}=4;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\frac{x}{4}-\frac{y}{8}=3,\\ -\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=-4;\end{cases}$

6) $\begin{cases}\frac{x}{9}-\frac{y}{3}=-2,\\ -\frac{x}{6}+\frac{y}{6}=-1;\end{cases}$

7) $\begin{cases}\frac{x}{2}-\frac{y}{7}=\frac{6}{7},\\ \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=-2;\end{cases}$

8) $\begin{cases}\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=2,\\ \frac{x}{8}+\frac{y}{9}=\frac{3}{4}.\end{cases}$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Перш ніж скористатися способом підстановки, треба виконати перетворення, використовуючи властивості рівнянь

ПРАКТИКУМ

19.1 Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}2x-y=6,\\ 5x=y;\end{cases}$

2) $\begin{cases}-x+3y=8,\\ 7y=x;\end{cases}$

3) $\begin{cases}2y=10-4x,\\ 5x+3y=14;\end{cases}$

4) $\begin{cases}3x=9-6y,\\ 2x+7y=9;\end{cases}$

5) $\begin{cases}5x-7y=-21,\\ 4y=12-6x;\end{cases}$

6) $\begin{cases}8x-9y=16,\\ 6x=12-3y.\end{cases}$

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Скористаємося правилами розкриття дужок і зведення подібних доданків, а потім — властивостями рівнянь.

19.2 Виразіть з одного з рівнянь системи одну змінну через іншу та знайдіть розв'язки системи рівнянь.

1) $\begin{cases} x+y=1, \\ 2(x-3)+3y=-10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7(x-3)+2(y+2)=15, \\ x-y=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=1, \\ 3x+5(y+2)=-1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} -x+3y=-3, \\ 9(x-5)-4(y+1)=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3(x-1)+6(y+1)=24, \\ x-y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} -x+4y=9, \\ 6(x-1)-4(y-2)=-12. \end{cases}$

19.3 Не виконуючи побудови, визначте координати точки перетину графіків рівнянь:

1) $y=1-3x,\ 4x+3y=13;$ 4) $7x-y=3,\ -2x+5y=18;$

2) $y=1+2x,\ -x+5y=-4;$ 5) $3x+5y=29,\ -x+4y=-4;$

3) $6x-y=9,\ 4x+3y=-5;$ 6) $2x-7y=11,\ -x+6y=-3.$

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

$$\begin{cases} x+3y=9, \\ 2x+y=5; \end{cases}$$

1) $x=9-3y$

2) $(9-3y)+3y=9$

$9-3y+3y=9$

$9=9$

19.4 Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x=3y, \\ 4x-5y=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5y=4+3x, \\ 2x-4y=-6; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} -5x+6y=20, \\ 7x-4y=-28; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2y=5x, \\ 3x-4y=-42; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x=9+7y, \\ -3x+5y=-7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-8y=8, \\ -5x+2y=-2. \end{cases}$

19.5 Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{12}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{x+3y}{9}=\dfrac{5}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x+5}{3}+\dfrac{y}{4}=2, \\ \dfrac{x+5}{9}+\dfrac{y}{2}=4; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y-2}{3}=3, \\ \dfrac{x-1}{3}+\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{10}{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{5x+y}{10}=\dfrac{9}{5}, \\ \dfrac{7x-y}{14}=\dfrac{9}{7}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+\dfrac{y-6}{5}=-2, \\ \dfrac{x}{8}+\dfrac{y-6}{10}=-1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{4}+\dfrac{y-1}{5}=2, \\ \dfrac{x-3}{5}+\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{27}{20}. \end{cases}$

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо точки $A(1;5)$ і $B(3;7)$ належать графіку функції $y=kx+b$, то, підставивши координати цих точок у рівняння, отримаємо систему рівнянь для визначення k і b:

$$\begin{cases} 5=k\cdot 1+b, \\ 7=k\cdot 3+b. \end{cases}$$

19.6 Графік лінійної функції $y=kx+b$ проходить через точки A і B. Визначте значення коефіцієнтів k і b. Запишіть рівняння функції, якщо:

1) $A(1;2),\ B(5;2);$ 4) $A(3;1);\ B(-1;5);$

2) $A(0;-1);\ B(3;-1);$ 5) $A(1;5);\ B(-2;11);$

3) $A(7;1);\ B(-3;-9);$ 6) $A(-2;-2);\ B(1;-11).$

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

19.7 Знайдіть значення a, якщо воно існує, при якому пара чисел $(x; y)$ є розв'язком заданої системи рівнянь.

1) $(2; 7)$, $\begin{cases} -x + y = a, \\ 2x - y = -3; \end{cases}$

2) $(3; -4)$, $\begin{cases} 3x - y = 13, \\ x + 5y = a; \end{cases}$

3) $(-2; 5)$, $\begin{cases} -2x + ay = 19, \\ x - 6y = -32; \end{cases}$

4) $(1; -2)$, $\begin{cases} 7x + 3y = 1, \\ ax - 5y = 6; \end{cases}$

5) $(3; -3)$, $\begin{cases} 4x - 8y = a + 3, \\ 3x + 5y = 24; \end{cases}$

6) $(4; -1)$, $\begin{cases} 7x - 3y = 25, \\ 2x + 9y = a - 2. \end{cases}$

19.8 Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 5x - 10 = 0, \\ -x + 3y = 1, \\ 2x - y + 4z = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3y + 12 = 0, \\ 2x - 5y = 22, \\ x + y + -z = -5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2z = 1, \\ y + z = -1, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

MATH FOR LIFE

19.9 ***Благодійний аукціон.*** На благодійному аукціоні було представлено 65 учнівських робіт: x із першої школи та y — із другої. Кожна робота з першої школи була оцінена експертами в 5 балів, а з другої — у 4 бали, разом усі роботи одержали 285 балів. Складіть за умовою задачі систему рівнянь та розв'яжіть її.

19.10 ***Фестиваль ліхтарів.*** Квиток на «Фестиваль ліхтарів» для дорослого коштує 8 г. о., а для дитини — 3 г. о. Протягом неділі було продано x дорослих та y дитячих квитків на загальну суму 1680 г. о. Визначте значення x та y, якщо відомо, що дорослих відвідувачів фестивалю того дня було удвічі менше, ніж дітей.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

19.11 Розв'яжіть систему рівнянь.

1) $\begin{cases} y = 5, \\ x + y = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = y, \\ x + 4y = 35; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 17x - 5y = 16, \\ y = 3x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x + 13y = -17, \\ x = 5 - 2y. \end{cases}$

5) $\begin{cases} -6x + 2y = -4, \\ y = 2,5x; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 3y = 8, \\ x = 1 + 0,5y. \end{cases}$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Щоб розв'язати систему трьох лінійних рівнянь із трьома змінними, спочатку виражаємо з будь-якого рівняння системи одну змінну через інші. Потім підставляємо знайдений вираз у решту рівнянь і розв'язуємо одержану систему двох лінійних рівнянь із двома змінними за алгоритмом.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Юні художниці й художники — учасники творчого дитячого проєкту «З Україною в серці», започаткованого батьками маленької Соломії з Білогородки, спочатку лише дарували свої роботи бійцям і волонтерам. Потім найкращі малюнки стали переносити на футболки та виставляти їх на благодійних аукціонах.

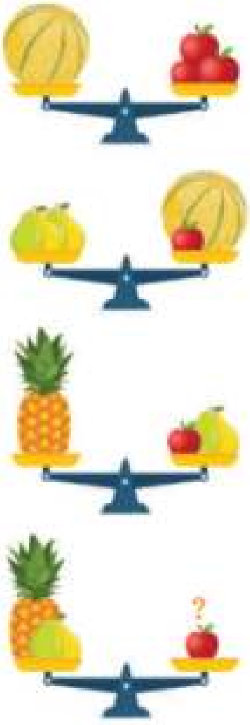
Завдання 19.11 → Приклад 1
Завдання 19.12 → Приклад 2
Завдання 19.13 → Приклад 3
Завдання 19.14 → Прапктикум, 19.6
Завдання 19.15 → Math for life, 19.9
Завдання 19.16 → Math for life, 19.10

BE SMART

Найдавніший у світі опис розв'язування систем лінійних рівнянь, про який нам відомо, міститься у китайській бамбуковій книзі Chu Chang Suan Shu (Чу Чанг Суань Шу). Її вік становить приблизно 2000 років.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

1. Позначте вагу ананаса, груші, яблука та дині змінними a, b, c, d відповідно.
2. Складіть рівняння за першими трьома рисунками.
3. Скористайтеся методом підстановки й визначте кількість яблук на четвертому рисунку.



19.12 Виразіть з одного з рівнянь системи одну змінну через іншу та знайдіть розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=4, \\ 2x+y=9; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x-7y=23, \\ x+3y=5; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 2x+5y=-20, \\ x+\dfrac{y}{2}=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=6, \\ 8x+3y=4; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 3x-y=-5, \\ 4(x-2)+3y=7; \end{cases}$
6) $\begin{cases} y-\dfrac{2x}{5}=-7, \\ 4x-5y=25. \end{cases}$

19.13 Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x-\dfrac{y}{6}=0, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=7; \end{cases}$
2) $\begin{cases} \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{5}=0, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=-5; \end{cases}$
3) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{6}=6, \\ -\dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{9}=-1. \end{cases}$

19.14 Графік лінійної функції $y=kx+b$ проходить через точки A і B. Визначте значення коефіцієнтів k і b. Запишіть рівняння функції, якщо:

1) $A(0;7)$, $B(1;9)$;
3) $A(-2;-5)$, $B(-3;-8)$;
2) $A(2;-4)$, $B(5;-1)$;
4) $A(4;-3)$, $B(-2;9)$.

19.15 На благодійному показі мод було представлено 32 роботи двох дизайнерок: x від першої та y — від другої. Кожна робота першої дизайнерки одержала 20 схвальних відгуків, а кожна робота другої — 15, а всього було отримано 565 схвальних відгуків. Складіть за умовою задачі систему рівнянь та розв'яжіть її.

19.16 Звичайний квиток у музей порцелянових фігурок коштує 9 г. о., а квиток зі студентською знижкою — 5 г. о. Протягом суботи було продано x звичайних квитків та y студентських на загальну суму 2064 г. о. Визначте значення x та y, якщо відомо, що студентських квитків у цей день було продано утричі більше, ніж звичайних.

Бонусне завдання

19.17 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+2y=7, \\ x+y+z=4, \\ 2x+y-z=9. \end{cases}$

§20 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ДОДАВАННЯ

ВЧОРА	Ви додавали многочлени і зводили подібні доданки
СЬОГОДНІ	Ви будете додавати рівняння
ЗАВЖДИ	Ви зможете звести розв'язування системи кількох лінійних рівнянь до розв'язування лише одного рівняння

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ДОПОМОЖЕМО АРХІМЕДУ

Архімед дізнався, що під час виготовлення царської корони до золота додали срібло. Маса золотої корони 704 г, об'єм — 46 см³. Скільки грамів срібла у складі корони, якщо густина золота близько 19 г/см³, а густина срібла — 10,5 г/см³?

Розв'язання.

1. Складемо таблицю за умовою задачі.

	Об'єм складових (см³)	Об'єм корони (см³)	Густина (г/см³)	Маса складових (г)	Загальна маса корони (г)
Золото	x	46	19	$19x$	704
Срібло	y		10,5	$10{,}5y$	

2. Складемо систему рівнянь за даними таблиці:

$$\begin{cases} x+y=46, \\ 19x+10{,}5y=704. \end{cases}$$

3. Розв'яжемо систему рівнянь у такий спосіб.

1) Помножимо перше рівняння системи на −19;

$$\left.\begin{cases} x+y=46, \\ 19x+10{,}5y=704; \end{cases}\right| \cdot(-19) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -19x-19y=-874, \\ 19x+10{,}5y=704. \end{cases}$$

2) Виконаємо почленне додавання рівнянь системи: ліву частину першого рівняння додамо до лівої частини другого; а праву частину першого рівняння — до правої частини другого.

$$\frac{\left.\begin{cases} -19x-19y=-874, \\ 19x+10{,}5y=704; \end{cases}\right| +}{0x-8{,}5y=-170}$$

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- спосіб додавання (*method of addition*)
- метод лінійних комбінацій (*linear combinations method*)
- почленне додавання (*term-wise addition*)

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Згідно з легендою, цар Сиракуз Гієрон II мав одержати корону із чистого золота, але в нього виникла підозра, що майстер додав до золота срібло. Славнозвісний Архімед довів, що цар правий, визначивши густину матеріалу корони. Масу корони він знав, а об'єм знайшов завдяки своїй спостережливості. Приймаючи ванну, Архімед зрозумів, що будь-яке тіло, занурене у воду, витісняє об'єм води, що дорівнює об'єму тіла.

3) Розв'яжемо отримане рівняння: $-8{,}5y=-170$;
$y=20$.

4) Знайдемо масу срібла у сплаві:
$10{,}5y=10{,}5\cdot 20=210$ (г).

Відповідь: 210 г срібла.

Поміркуйте й дайте відповіді на запитання.

- Чи зручно було б вам розв'язувати цю систему рівнянь графічним способом? Чому?
- Чи раціонально було б застосовувати спосіб заміни змінної? Чому?
- Як ви вважаєте, чому перше рівняння системи помножували на -19?

Системи рівнянь не завжди зручно розв'язувати графічним способом або способом підстановки. Тоді застосовують ще один спосіб — *спосіб додавання*, або *метод лінійних комбінацій*.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}7x+y=-1,\\2x-y=-8.\end{cases}$$

Розв'язання:

$\left.\begin{cases}7x+y=-1,\\2x-y=-8;\end{cases}\right\vert +$ $9x+0y=-9$	Додаємо почленно ліві й праві частини рівнянь системи.
$9x=-9$ $x=-1$	Розв'язуємо отримане рівняння.
$7\cdot(-1)+y=-1$ $-7+y=-1$ $y=6$	Підставляємо знайдене значення $x=-1$ у перше рівняння системи та знаходимо відповідне значення змінної y.
$\begin{matrix}x=-1,\\y=6\end{matrix}\rightarrow\begin{cases}7\cdot(-1)+6=-1,\\2\cdot(-1)-6=-8;\end{cases}\begin{cases}-1=-1,\\-8=-8\end{cases}$	Перевіряємо, чи є знайдена пара чисел $(-1;6)$ розв'язком заданої системи рівнянь. Робимо висновок.

Відповідь: $(-1;6)$.

ТРЕНУЄМОСЯ 1

Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=10, \\ -x+3y=6; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} -3x+5y=43, \\ -3x-y=-5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=4, \\ -x+y=2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} -3x+y=10, \\ 5x+y=-6; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} -3x-2y=-11, \\ 9x-2y=-23. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-y=8, \\ x+y=7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-2y=13, \\ x+4y=-17; \end{cases}$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

У випадках, коли в рівняннях системи коефіцієнти при будь-якій змінній є однаковими, треба домножити одне з рівнянь на −1, а потім почленно додати рівняння.

РОЗМИНКА 1

Укажіть число, на яке потрібно домножити одне з рівнянь системи, щоб отримати два рівняння з протилежними коефіцієнтами при одній зі змінних.

1) $\begin{cases} 2x-3y=1, \\ 4x+y=2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x+2y=4, \\ 2x-3y=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+5y=7, \\ 0{,}5x-4y=2. \end{cases}$

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} -5y+x=-4, \\ 4x-3y=18 \end{cases}$ способом додавання.

Розв'язання:

$\begin{cases} -5y+x=-4, \\ 4x-3y=18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-5y=-4, \\ 4x-3y=18; \end{cases}$ .... **Записуємо** систему рівнянь, розмістивши подібні доданки (доданки з однаковими змінними) один під одним.

$\begin{cases} x-5y=-4, \\ 4x-3y=18; \end{cases} \Big| \cdot(-4) \rightarrow \begin{cases} -4x-5\cdot(-4)y=(-4)\cdot(-4), \\ 4x-3y=18; \end{cases}$ ... **Множимо** перше рівняння системи на −4.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -4x+20y=16, \\ 4x-3y=18; \end{cases} \Big| + \\ \hline 0x+17y=34 \end{array}$$
.... **Додаємо почленно** рівняння системи.

$17y=34$ .... **Розв'язуємо** отримане рівняння.

$y=2$

$x-5\cdot 2=-4$ .... Підставляємо $y=2$ в перше рівняння системи та знаходимо значення x.

$x=-4+10$

$x=6$

$\begin{array}{l} x=6, \\ y=2 \end{array} \rightarrow \begin{cases} 6-5\cdot 2=-4, \\ 4\cdot 6-3\cdot 2=18; \end{cases} \begin{cases} -4=-4, \\ 18=18 \end{cases}$ .... **Виконуємо перевірку.** **Робимо висновок.**

Відповідь: $(6; 2)$.

Підручник (проект) видавництва "Ранок"

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Щоб уникнути помилок у ході почленного додавання рівнянь системи доцільно спочатку переставити доданки в одному з рівнянь так, щоб подібні доданки обох рівнянь були б записані один під одним.

ТРЕНУЄМОСЯ 2

Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання.

1) $\begin{cases}-x+3y=-7,\\2x-y=4;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x-4y=-2,\\-3x+y=-5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-3y=-10,\\-2x+5y=17;\end{cases}$

4) $\begin{cases}6x-5y=13,\\2x+y=7;\end{cases}$

5) $\begin{cases}4x+y=21,\\7y+3x=22;\end{cases}$

6) $\begin{cases}8x+7y=20,\\5y+x=19;\end{cases}$

7) $\begin{cases}-x-7y=20,\\-4y-0{,}5x=11;\end{cases}$

8) $\begin{cases}-9x-0{,}5y=13,\\-y-4x=12.\end{cases}$

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}2x-3y=-13,\\4y+3x=6\end{cases}$ способом додавання.

Розв'язання:

$\begin{cases}2x-3y=-13,\\4y+3x=6\end{cases} \rightarrow \begin{cases}2x-3y=-13,\\3x+4y=6\end{cases}$	Записуємо систему рівнянь, розмістивши подібні доданки один під одним.
$\left\{\begin{array}{l}2x-3y=-13,\\3x+4y=6;\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\cdot(-3)\\\cdot 2\end{array}\right. \rightarrow \begin{cases}2\cdot(-3)x-3\cdot(-3)y=-13\cdot(-3),\\3\cdot 2x+4\cdot 2y=6\cdot 2\end{cases}$	Множимо перше рівняння системи на -3, а друге на 2.
$\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}-6x+9y=39,\\6x+8y=12;\end{array}\right\|+\\\hline\qquad 17y=51\end{array}$	Додаємо почленно рівняння системи.
$17y=51$ $y=3$	Розв'язуємо отримане рівняння.
$2x-3\cdot 3=-13$ $2x=-13+9$ $x=-2$	Підставляємо $y=3$ в перше рівняння системи та знаходимо значення x.
$\begin{array}{l}x=-2,\\y=3\end{array} \rightarrow \begin{cases}2\cdot(-2)-3\cdot 3=-13,\\3\cdot(-2)+4\cdot 3=6;\end{cases} \begin{cases}-13=-13,\\6=6\end{cases}$	Виконуємо перевірку. Робимо висновок.

Відповідь: $(-2; 3)$.

Проект майбутнього підручника видавництва "Ранок"

ТРЕНУЄМОСЯ 3

Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання.

1) $\begin{cases}2x+3y=10,\\-3x+2y=-15;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}3x+4y=1,\\-4x-3y=1;\end{cases}$ 7) $\begin{cases}0{,}5x+7y=9,\\9y+2x=17;\end{cases}$

2) $\begin{cases}-3x+4y=8,\\4x+3y=6;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}3y+8x=-13,\\4x+5y=-3;\end{cases}$ 8) $\begin{cases}5x+2y=19,\\0{,}5y+8x=25.\end{cases}$

3) $\begin{cases}-5x-3y=-2,\\2x+5y=-3;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}6y+5x=13,\\8x+3y=1;\end{cases}$

Алгоритм розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання

1. Записати систему рівнянь, розмістивши подібні доданки один під одним.
2. Домножити (за потреби) одне чи обидва рівняння системи на таке число, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами.
3. Додати почленно отримані рівняння.
4. Розв'язати отримане рівняння з однією змінною.
5. Підставити знайдений корінь рівняння в будь-яке рівняння заданої системи та знайти відповідне значення іншої змінної.
6. Перевірити, чи є знайдена пара чисел $(x; y)$ розв'язком заданої системи рівнянь.
7. Записати відповідь.

ПРАКТИКУМ

20.1 Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання.

1) $\begin{cases}0{,}2x+y=-1,\\0{,}8x-y=11;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}0{,}2x+0{,}9y=6{,}5,\\-0{,}4x+0{,}9y=0{,}5;\end{cases}$

2) $\begin{cases}-x+0{,}9y=13,\\x+0{,}1y=-3;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}0{,}8x-0{,}3y=5{,}8,\\0{,}8x+0{,}5y=1.\end{cases}$

20.2 Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання.

1) $\begin{cases}x+\dfrac{y}{3}=3,\\-x+\dfrac{y}{2}=2;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{6}=5,\\-\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{6}=-3;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{5}=2,\\\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}=4;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\dfrac{x}{2}-y=-9,\\\dfrac{x}{5}+y=2;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}-\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{3}=-5,\\\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{4}=-2;\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{9}=-3,\\\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{9}=-4.\end{cases}$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Система двох лінійних рівнянь розв'язана методом Крамера:

$$\begin{cases}2x-3y=3,\\3x+2y=11;\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-3\\3&2\end{vmatrix}=$$
$$=2\cdot2-(-3)\cdot3=13\neq0$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}3&-3\\11&2\end{vmatrix}=$$
$$=3\cdot2-(-3)\cdot11=39$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}2&3\\3&11\end{vmatrix}=$$
$$=2\cdot11-3\cdot3=13$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{39}{13}=3$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{13}{13}=1$$

Відповідь: $(3;1)$.

Чи зможете ви самостійно опанувати метод відомого швейцарського математика Габрієля Крамера?

ПРАЦЮЄМО В ПАРАХ

Розв'яжіть трьома способами систему рівнянь

$$\begin{cases} x-y=24, \\ x+y=80. \end{cases}$$

Обміняйтеся записами й перевірте розв'язання одне одного. Яким способом найзручніше розв'язувати цю систему рівнянь?

20.3 Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання.

1) $\begin{cases} -5x+5y=-5, \\ 2x+3y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -2x+4y=10, \\ 5x+3y=-12; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 7x+14y=21, \\ 10x+5y=15; \end{cases}$

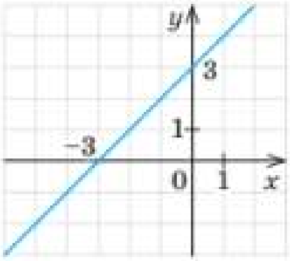
2) $\begin{cases} 3x+4y=11, \\ 6x-6y=-6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x+2y=-11, \\ 6x-3y=3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 12x+6y=6, \\ 8x+16y=-8. \end{cases}$

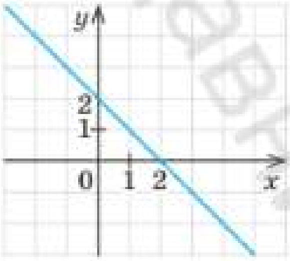
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

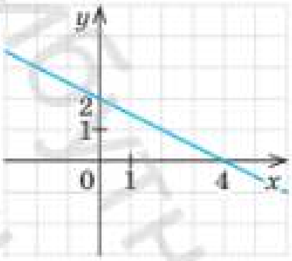
20.4 Не виконуючи побудови, перевірте, чи перетинаються графіки трьох заданих рівнянь в одній точці. Якщо так, визначте координати цієї точки.

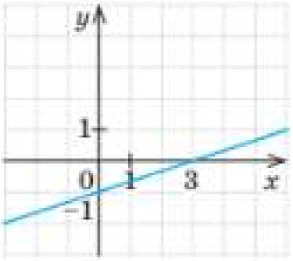
1) $3x-2y=3$, $x+5y=1$, $-x+y=2$;
2) $x-y=2$, $x+2y=5$, $4x+5y=7$;
3) $5x-4y=6$, $x+4y=6$, $3x-y=5$;
4) $7x-2y=13$, $-x-5y=14$, $x+3y=-8$;
5) $3x-0{,}5y=8$, $3x+y=11$, $-4x-5y=-22$;
6) $9x+2y=-8$, $0{,}5x+2y=9$, $-4x+7y=43$.

20.5 Запишіть рівняння, графік якого зображено на рисунку.

1)


2)


3)


4)


MATH FOR LIFE

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Українські підлітки Леонід Ходоровський і Гордій Діган власноруч розробили комп'ютерну гру Snake, яку затвердив AppStore, і завдяки цьому зібрали 25 000 грн. Гроші хлопці передали на потреби ЗСУ — для купівлі дрона «Терміт».

20.6 ***Виробництво.*** Підприємство, працюючи цілодобово, випускає дрони: удень по x, а вночі — по y штук. За 4 дні й 3 ночі було виготовлено 170 дронів, а за 3 дні й 4 ночі — 180. Складіть за умовою задачі систему рівнянь та визначте значення x і y.

20.7 ***Поїздка автомобілем.*** Під час їзди містом на 100 км шляху автомобіль витрачає x л пального, а за містом — y л. Одного дня на поїздку 150 км містом і 200 км за містом було витрачено 54 л пального. Іншого дня на поїздку 200 км містом і 50 км за містом було витрачено 46 л пального. Визначте значення x і y.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Інший варіант роботи в електронному додатку

САМОСТІЙНА РОБОТА № 14

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 З рівняння $7x+y=-8$ виразіть змінну y через змінну x.

А	Б	В	Г
$y=8-7x$	$y=8+7x$	$y=-8+7x$	$y=-8-7x$

2 Використовуючи метод підстановки для системи рівнянь $\begin{cases} x=3, \\ x+y=12, \end{cases}$ визначте значення y.

А	Б	В	Г
$y=9$	$y=6$	$y=15$	$y=4$

3 Якщо до системи рівнянь $\begin{cases} x-3y=10, \\ 5x+3y=8 \end{cases}$ застосувати метод додавання, то отримаємо рівняння...

А	Б	В	Г
$6y=18$	$6y=2$	$6x=18$	$6x=2$

4 Визначте розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x-y=1, \\ x+2y=4 \end{cases}$ методом підстановки. Чому дорівнює значення суми $x+y$?

А	Б	В	Г
4	3	5	2

5 Щомісяця перший учитель готував x відеоуроків, а другий — y відеоуроків. Кожного місяця обидва вчителі разом готували 8 відеоуроків, причому другий готував на 2 відеоуроки менше, ніж перший. Складіть систему рівнянь за умовою задачі.

А	Б	В	Г
$\begin{cases} x+y=2, \\ y-x=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=8 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=8, \\ y-x=2 \end{cases}$

6 Установіть відповідність між системою рівнянь (1–3) та її розв'язком (А–Г).

1	$\begin{cases} x=6y, \\ x-2y=4 \end{cases}$	А	$(1;6)$
2	$\begin{cases} 2x+y=8, \\ -2x+y=4 \end{cases}$	Б	$(6;6)$
3	$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1, \\ 2x-y=6 \end{cases}$	В	$(6;1)$
		Г	$(1;1)$

7 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 4x-7y=13, \\ x+7y=12 \end{cases}$ способом додавання.

8 Розв'яжіть систему $\begin{cases} \frac{x}{6}-\frac{y}{6}=1, \\ 4x-3y=36 \end{cases}$ способом підстановки.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Завдання 20.8	→	Приклад 1
Завдання 20.9	→	Приклад 2
Завдання 20.10	→	Приклад 3
Завдання 20.11	→	Інт. фітн., 20.5
Завдання 20.12	→	Math for life, 20.6
Завдання 20.13	→	Math for life, 20.7

20.8 Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання.

1) $\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+4y=23, \\ -x+y=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -5x+y=22, \\ 2x+y=-6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} -2x+5y=32, \\ -2x-3y=-16; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 0{,}5x-3y=20, \\ 0{,}5x+2y=-10; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 6x-1{,}5y=21, \\ 5x-1{,}5y=18. \end{cases}$

ЗНАЙДІТЬ ПОМИЛКУ

1) $\begin{cases} x+y=1, \\ 3x+2y=18; \end{cases} \Big| \cdot(-3)$

$\begin{cases} -3x+3y=-3, \\ 3x+2y=18; \end{cases} \Big| +$

$5y=15$

$y=3$

2) $\begin{cases} 5x-2y=3, \\ 2x+y=5; \end{cases} \Big| \cdot 2$

$\begin{cases} 5x-2y=3, \\ 4x+2y=10; \end{cases} \Big| +$

$x=13$

20.9 Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання.

1) $\begin{cases} x-2y=4, \\ -3x+y=-7; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 6x+5y=-14, \\ 4y+x=-15; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 8x-\frac{y}{3}=15, \\ y+3x=9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x+y=-8, \\ 5x-4y=-19; \end{cases}$
4) $\begin{cases} -7x-y=13, \\ -0{,}5y-9x=12; \end{cases}$
6) $\begin{cases} \frac{x}{4}-7y=30, \\ 5y+x=-12. \end{cases}$

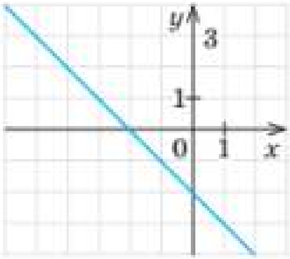
20.10 Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання.

1) $\begin{cases} -3x+2y=-12, \\ 2x+3y=8; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 4y+7x=1, \\ 3x+8y=13; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 0{,}2x-3y=10, \\ 5y+2x=-5; \end{cases}$

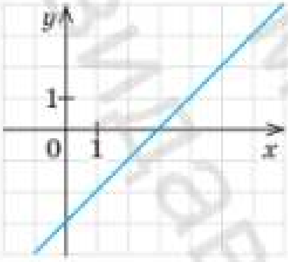
2) $\begin{cases} 5x+2y=7, \\ -2x-5y=-7; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 5y+2x=19, \\ 0{,}5x+6y=19; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 8x+0{,}4y=2, \\ -3y+2x=16. \end{cases}$

20.11 Запишіть рівняння, графік якого зображено на рисунку.

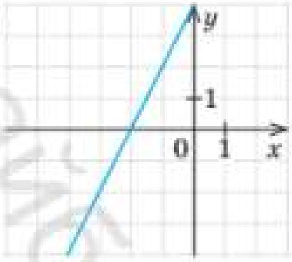
1)



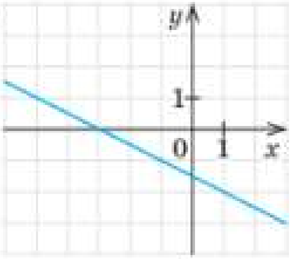
2)



3)



4)



BE SMART

Якщо алгебра стане вашою улюбленою дисципліною, ви навчитеся розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь різними методами, зокрема:

- Матричним методом
- Методом Гаусса
- Методом Гаусса — Жордана
- Методом Крамера
- LU-розкладанням
- Методом ітерації

тощо

20.12 За годину Антон витрачає *x* калорій, якщо йде пішки, та *y* калорій, якщо їде на велосипеді. Хлопець ішов пішки протягом 2 год, потім 5 год їхав на велосипеді й «спалив» за цей час 2860 калорій. А коли він їхав на велосипеді протягом 2 год, а потім 5 год ішов пішки, то «спалив» 2740 калорій. Визначте значення *x* і *y*.

20.13 За 1 год роботи перший генератор споживає *x* л пального, а другий — *y* л. Перший генератор працював протягом 2,5 год, другий — 3 год, і разом вони спожили 15 л пального. Іншого разу перший працював протягом 4 год, другий — 1,5 год, і разом вони спожили 27 л пального. Визначте значення *x* і *y*.

Бонусне завдання

20.14 Розв'яжіть системи рівнянь 1–3 із завдання 20.10 методом Крамера. Порівняйте відповіді, отримані при розв'язуванні різними способами.

Підручника Проєкт видавництва Майбутнього "Ранок"

§21 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ ЯК МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ РЕАЛЬНИХ СИТУАЦІЙ

ВЧОРА	Ви моделювали реальні ситуації за допомогою одного рівняння
СЬОГОДНІ	Ви будете моделювали реальні ситуації за допомогою системи двох рівнянь
ЗАВЖДИ	Ви зможете описувати реальні ситуації математичною мовою

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

ДОПОМОГА УКРАЇНСЬКИМ ВІЙСЬКОВИМ

Для потреб інженерних підрозділів на прикордонних територіях України необхідно придбати 12 одиниць техніки — броньованих автомобілів та роботів-саперів, на загальну суму 30 млн. г. о. Один броньований автомобіль коштує 3,2 млн. г. о., а один робот-сапер — 2 млн. г. о. Скільки броньованих автомобілів та скільки роботів-саперів можна придбати, виконавши зазначені умови?

Розв'язання

① **Аналізуємо умову задачі**

Основні величини: кількість броньованих автомобілів, кількість роботів-саперів, загальна кількість одиниць техніки, загальна вартість техніки, ціна броньованого автомобіля, ціна робота-сапера.

Аналіз взаємозв'язків між величинами: нехай x — кількість броньованих автомобілів, y — кількість роботів-саперів. Тоді вартість усіх броньованих автомобілів становить $3{,}2x$ млн. г. о., а всіх роботів-саперів — $2y$ млн. г. о.

② **Створюємо математичну модель задачі: складаємо систему рівнянь**

	Кількість (шт.)	Загальна кількість (шт.)	Вартість (млн. г. о.)	Загальна вартість (млн. г. о.)
Броньований автомобіль	x	12	$3{,}2x$	30
Робот-сапер	y		$2y$	

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- математична модель задачі (*mathematical model of a problem*)
- система лінійних рівнянь із двома змінними (*system of linear equation with two variables*)
- графічний спосіб (*graphical method*)
- спосіб підстановки (*substitution method*)
- спосіб додавання (*method of addition*)
- метод лінійних комбінацій (*linear combinations method*)

За умовою задачі складаємо два рівняння: $x+y=12$ і $3{,}2x+2y=30$. Обидва рівняння мають виконуватися одночасно, тому потрібно скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y=12, \\ 3{,}2x+2y=30. \end{cases}$$

③ Розв'язуємо отриману систему рівнянь

Це можна зробити, наприклад, способом підстановки. У результаті отримаємо $x=5$, $y=7$.

④ Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь

Шукані числа мають бути додатними й цілими, отже, знайдені числа задовольняють умову задачі. Для потреб інженерних підрозділів необхідно придбати 5 броньованих автомобілів і 7 роботів-саперів.

Відповідь: 5 броньованих автомобілів і 7 роботів-саперів.

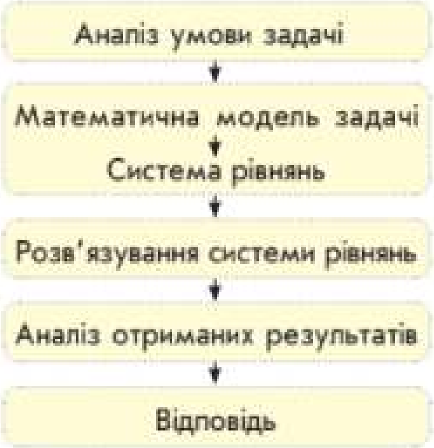
ПРИГАДАЙТЕ!

Математичне моделювання — це процес побудови й вивчення математичних моделей, тобто процес розв'язування деякої нематематичної задачі чи проблеми математичними методами.

Математична модель — це опис реальної ситуації математичною мовою, тобто мовою математичних понять, формул, рівнянь тощо.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви вже знаєте, що рівняння можна розглядати як математичну модель реальної ситуації, відтвореної в текстовій задачі. Вам відомий **алгоритм розв'язування текстової задачі** за допомогою рівняння. Сьогодні ми ознайомимося майже з таким самим алгоритмом, але математичною моделлю в ньому виступатиме система лінійних рівнянь із двома змінними.



Аналіз умови задачі
Математична модель задачі
Система рівнянь
Розв'язування системи рівнянь
Аналіз отриманих результатів
Відповідь

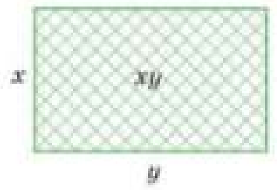
Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи лінійних рівнянь із двома змінними

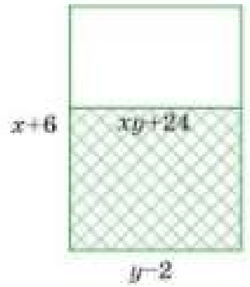
1. *Проаналізувати* умову задачі (основні величини, зв'язки між ними, вимоги задачі).
2. *Створити* математичну модель (відтворити умову задачі у вигляді таблиці, рисунка тощо, скласти систему рівнянь до задачі).
3. *Розв'язати* отриману систему рівнянь.
4. *Проаналізувати* отримані результати з огляду на умову задачі.
5. *Записати* відповідь.

Проєкт підручника видавництва "Ранок"

Задачі геометричного змісту

ПРИКЛАД 1





Маскувальна сітка має форму прямокутника (див. рисунок), периметр якого дорівнює 28 м. Якщо ширину прямокутника збільшити на 6 м, а а довжину зменшити на 2 м, то площа цієї сітки збільшиться на 24 м². Визначте початкові довжини сторін прямокутника.

Розв'язання:

① **Аналізуємо умову задачі**

Основні величини: довжини сторін, периметр і площа прямокутника.

Аналіз взаємозв'язків між величинами: нехай x м — ширина прямокутника, y м — довжина. Тоді після зміни довжин сторін вони дорівнюватимуть $(x+6)$ м і $(y-2)$ м.

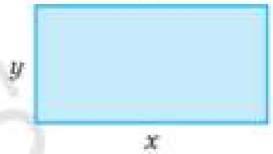
② **Створюємо математичну модель задачі: складаємо систему рівнянь**

Прямокутник	Початкові значення (м)	Початковий периметр (м)	Початкова площа (м²)	Змінені значення (м)	Нова площа (м²)
Ширина	x	$2(x+y)$	xy	$x+6$	$(x+6)(y-2)$
Довжина	y			$y-2$	

За умовою задачі складаємо два рівняння. Початковий периметр прямокутника дорівнює 28 м, тому $2(x+y)=28$. Площа сітки збільшиться на 24 м², тому $(x+6)(y-2)-xy=24$. Обидва рівняння мають виконуватися одночасно, тому потрібно скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases}2(x+y)=28,\\(x+6)(y-2)-xy=24.\end{cases}$$

ПРИГАДАЙТЕ!



Периметр: $P=2x+2y$;
площа: $S=xy$

③ **Розв'язуємо отриману систему рівнянь**

Перш ніж розв'язувати систему рівнянь, виконаємо перетворення обох рівнянь — розкриємо дужки, зведемо подібні доданки, розділимо обидві частини рівняння на спільний множник.

$$\begin{cases}2(x+y)=28,\\(x+6)(y-2)-xy=24;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=14,\\6y-2x=36;\end{cases}\quad\begin{cases}y+x=14,\\3y-x=18.\end{cases}$$

Систему рівнянь доцільно розв'язати способом додавання. У результаті отримаємо $x=6$, $y=8$.

Проєкт підручника видавництва "Ранок"

④ Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь

Шукані числа мають бути додатними, отже, знайдені числа задовольняють умову задачі. Початкова ширина прямокутника дорівнювала 6 м, а довжина — 8 м.

Відповідь: 6 м, 8 м.

Задачі на відсотки

ПРИКЛАД 2

ПРИГАДАЙТЕ!

n % від x визначають так:

$$x \cdot \frac{n}{100}$$

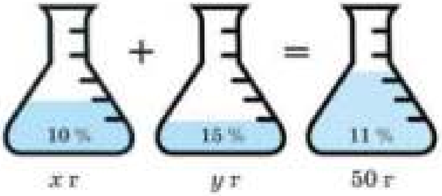
У фармацевтки є готові розчини лимонної кислоти: 10 %-й та 15 %-й. Скільки грамів кожного розчину має взяти фармацевтка для приготування 50 г 11 %-го розчину лимонної кислоти?

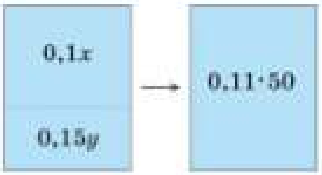
Розв'язання:

① Аналізуємо умову задачі

Основні величини: маса кожного з двох розчинів, їх загальна маса, відсотковий вміст лимонної кислоти в кожному розчині й суміші.

Аналіз взаємозв'язків між величинами: нехай x г — маса 10 %-го розчину, y г — 15 %-го розчину. Тоді в 10 %-му розчині міститься $0{,}1x$ г сухої лимонної кислоти, у 15 %-му — $0{,}15y$ г, а в 11 %-му — $0{,}11 \cdot 50 = 5{,}5$ (г).





② Створюємо математичну модель задачі: складаємо систему рівнянь

	Маса розчину (г)		Маса сухої лимонної кислоти (г)	
10 %-й розчин	x	50	$0{,}1x$	5,5
15 %-й розчин	y		$0{,}15y$	

За умовою задачі складаємо два рівняння: $x + y = 50$ і $0{,}1x + 0{,}15y = 5{,}5$. Обидва рівняння мають виконуватися одночасно, тому потрібно скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ 0{,}1x + 0{,}15y = 5{,}5. \end{cases}$$

③ Розв'язуємо отриману систему рівнянь

Перш ніж розв'язувати систему рівнянь, спростимо друге рівняння.

$$\begin{cases} x + y = 50, \\ 0{,}1x + 0{,}15y = 5{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 50, \\ 2x + 3y = 110. \end{cases}$$

Систему рівнянь можна розв'язати або способом підстановки, або способом додавання. У результаті отримаємо $x = 40$, $y = 10$.

4 Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, знаходимо решту шуканих величин, записуємо відповідь

Шукані числа мають бути додатними, отже, знайдені числа задовольняють умову задачі.

Отже, фармацевтка має взяти 40 г 10%-го розчину лимонної кислоти і 10 г 15%-го розчину.

Відповідь: 40 г, 10 г.

Задачі економічного змісту

ПРИКЛАД 3

За оренду двох велосипедів і двох шоломів заплатили 1800 грн. Після того як оренда велосипеда подорожчала на 50 %, а оренда шолома подешевшала на 10 %, за оренду одного велосипеда й одного шолома заплатили 1290 грн. Визначте вартість оренди:

1) одного велосипеда й одного шолома до зміни цін (у грн.).

2) одного велосипеда після зміни цін (у грн.).

Розв'язання:

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини: ціни оренди одного велосипеда й одного шолома до і після зміни.

Аналіз взаємозв'язків між величинами: нехай x грн і y грн — початкова ціна оренди велосипеда і шолома. Тоді після зміни цін вони дорівнюватимуть $x\left(1+\frac{1}{2}\right)=1{,}5x$ грн і $y\left(1-\frac{1}{10}\right)=0{,}9y$ грн.

2 Створюємо математичну модель задачі: складаємо систему рівнянь

Об'єкт оренди	Початкова ціна (грн)	Кількість (шт.)	Загальна вартість (грн)	Ціна після зміни (грн)	Загальна вартість (грн)
Велосипед	x	2	1800	$1{,}5x$	1290
Шолом	y	2		$0{,}9y$	

ПРИГАДАЙТЕ!

Якщо число a збільшити на n %, то отримаємо число $a\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)$.

Якщо число a зменшити на n %, то отримаємо число $a\cdot\left(1-\frac{n}{100}\right)$.

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

За умовою задачі складаємо два рівняння:

$$2(x+y)=1800 \text{ і } 1{,}5x+0{,}9y=1290.$$

Обидва рівняння мають виконуватися одночасно, тому потрібно скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases}2(x+y)=1800,\\1{,}5x+0{,}9y=1290.\end{cases}$$

ПРИГАДАЙТЕ!

$1{,}5x+0{,}9y=1290 \;\big|\cdot 10$

$15x+9y=12900 \;\big|:3$

$5x+3y=4300$

або

$\frac{3}{2}x+\frac{9}{10}y=1290 \;\Big|\cdot\frac{10}{3}$

$\frac{3\cdot 10}{2\cdot 3}x+\frac{9\cdot 10}{10\cdot 3}y=1290 \;\Big|\cdot\frac{10}{3}$

$5x+3y=4300$

③ Розв'язуємо отриману систему рівнянь

Перш ніж розв'язувати систему рівнянь, виконаємо перетворення обох рівнянь.

$$\begin{cases}2(x+y)=1800,\\1{,}5x+0{,}9y=1290;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=900,\\5x+3y=4300.\end{cases}$$

Систему рівнянь можна розв'язати або способом підстановки, або способом додавання. У результаті отримаємо $x=800$, $y=100$.

④ Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, знаходимо решту шуканих величин, записуємо відповідь

Шукані числа мають бути додатними, отже, знайдені числа задовольняють умову задачі.

Знаходимо вартість оренди одного велосипеда й одного шолома на 2 доби до зміни цін: $800+100=900$ (грн).

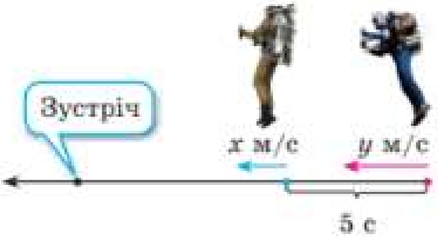
Знаходимо вартість оренди одного велосипеда на 2 доби після зміни цін: $1{,}5\cdot 800=1200$ (грн).

Відповідь: 900 грн, 1200 грн.

Задачі на рух

ПРИКЛАД 4

Перший випробувач реактивного ранця вилетів з точки старту зі швидкістю x м/с. Через 5 с із тієї самої точки в тому ж напрямку вилетів другий випробувач зі швидкістю y м/с і наздогнав першого через 10 с після свого вильоту. Відомо, що перший випробувач за 1 хв пролітає на 60 м більше, ніж другий — за пів хвилини. Складіть за умовою задачі систему рівнянь і розв'яжіть її.



Розв'язання:

① **Аналізуємо умову задачі**

Основні величини: швидкості руху обох випробувачів, співвідношення між цими швидкостями, час руху.

Аналіз взаємозв'язків між величинами: уже задано, що x м/с і y м/с — швидкості руху першого і другого випробувачів відповідно. Відстань, яку подолав кожний випробувач, знаходимо як добуток швидкості на час руху.

ПРИГАДАЙТЕ!

$s = v \cdot t$,

де s — шлях,

v — швидкість,

t — час

② **Створюємо математичну модель задачі: складаємо систему рівнянь**

В умові задачі наведено два твердження щодо руху випробувачів. Урахуємо їх окремо.

	Випробувач	Швидкість руху (м/с)	Час руху (с)	Пройдений шлях (м)
1	I	x	5 + 10	$15x$ — *Однаковий*
	II	y	10	$10y$
2	I	x	60	$60x$, на 60 м більше, ніж
	II	y	30	$30y$

За таблицею складаємо два рівняння: $15x = 10y$, $60x - 30y = 60$. Обидва рівняння мають виконуватися одночасно, тому потрібно скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases} 15x = 10y, \\ 60x - 30y = 60. \end{cases}$$

③ **Розв'язуємо отриману систему рівнянь**

Перш ніж розв'язувати систему рівнянь, зведемо перше рівняння до лінійного і спростимо обидва рівняння.

$$\begin{cases} 15x = 10y, \\ 60x - 30y = 60; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 0, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Систему рівнянь можна розв'язати будь-яким із відомих вам способів. У результаті отримаємо $x = 4$, $y = 6$.

ПОМІРКУЙТЕ

Розв'яжіть систему рівнянь графічним і аналітичним способами. Порівняйте результати.

④ **Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь**

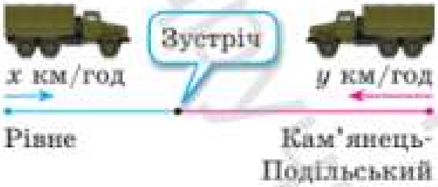
Шукані числа мають бути додатними, отже, знайдені числа задовольняють умову задачі. Швидкість першого випробувача 4 м/с, а другого — 6 м/с.

Відповідь: 4 м/с, 6 м/с.

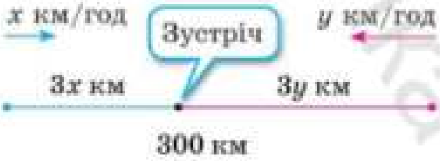
Проект підручника майбутнього видавництва "Ранок"

ПРИКЛАД 5

Довжина маршруту, прокладеного між містами Рівне та Кам'янець-Подільський, дорівнює 300 км. Із цих міст одночасно виїхали назустріч одна одній за цим маршрутом дві автоколони й зустрілися через 3 год після початку руху. Якби автоколона з Рівного вирушила на 1 год раніше від автоколони з Кам'янця-Подільського, то вони зустрілися б через 2,4 год після виходу автоколони з Кам'янця-Подільського. З якими швидкостями рухалися автоколони? Вважайте, що рух відбувався зі сталими швидкостями протягом всього маршруту без зупинок.

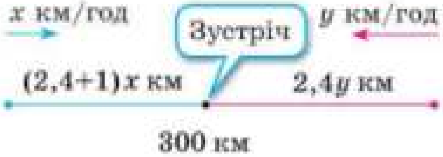


Розв'язання:



1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини: швидкості руху автоколон, відстань між населеними пунктами й час руху автоколон до зустрічі; інший час руху автоколон до зустрічі, якщо вони вирушили не одночасно.



Аналіз взаємозв'язків між величинами: нехай x км/год — швидкість автоколони, що вирушила з Рівного, y км/год — швидкість автоколони, що вирушила з Кам'янця-Подільського. Пройдений кожною колоною шлях знаходимо як добуток швидкості на час руху.

2 Створюємо математичну модель задачі: складаємо систему рівнянь

Колона	Швидкість руху (км/год)	Час руху (год)	Пройдений шлях (км)	Час руху (год)	Пройдений шлях (км)	Пройдений шлях (км)
з Рівного	x	3	$3x$	$2{,}4+1$	$3{,}4x$	300
з Кам'янця-Подільського	y	3	$3y$	2,4	$2{,}4y$	

Оскільки загальний шлях відомий, складаємо два рівняння: $3x+3y=300$ і $3{,}4x+2{,}4y=300$. Обидва рівняння мають виконуватися одночасно, тому потрібно скласти систему рівнянь:

$$\begin{cases}3x+3y=300,\\3{,}4x+2{,}4y=300.\end{cases}$$

3 Розв'язуємо отриману систему рівнянь

Перш ніж розв'язувати систему рівнянь, спростимо обидва рівняння.

$$\begin{cases}3x+3y=300,\\3{,}4x+2{,}4y=300;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=100,\\17x+12y=1500.\end{cases}$$

Систему рівнянь доцільно розв'язати способом підстановки. У результаті отримаємо $x=60$, $y=40$.

4 Аналізуємо отримані результати з огляду на умову задачі, записуємо відповідь

Шукані числа мають бути додатними, отже, знайдені числа задовольняють умову задачі. Отже, швидкість автоколони з Рівного 60 км/год, із Кам'янця-Подільського — 40 км/год.

Відповідь: 60 км/год, 40 км/год.

ПРАКТИКУМ

21.1 Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 144 см. Визначте довжини його сторін, якщо бічна сторона трикутника в 4 рази більша за його основу.

21.2 Перша трав'яна суміш містить 25 % м'яти, а друга — лише 5 %. Скільки грамів кожної суміші потрібно взяти, щоб отримати 80 г трав'яного чаю, що містить 10 % м'яти?

21.3 Два 3D-принтери за день мали разом надрукувати 42 корпуси для ліхтариків. Коли перший 3D-принтер виконав половину свого завдання, а другий — третину свого, виявилося, що перший 3D-принтер надрукував на 1 корпус більше, ніж другий. Скільки корпусів для ліхтариків мав надрукувати кожний 3D-принтер за день?

21.4 У двох каністрах разом було 72 л дизельного пального. Після того як третину пального з першої каністри перелили в другу, пального в другій каністрі стало в 5 разів більше, ніж у першій. Скільки літрів дизельного пального було в кожній каністрі спочатку?

21.5 Два бізнес-партнери перерахували кошти на потреби армії. Усього вони задонатили 143 тис. г. о., причому перший — на 31 тис. г. о. менше, ніж другий. Яку суму перерахував кожний партнер?

21.6 Перед змаганнями провели зважування двох борців сумо. Маса першого борця була на 30 кг менша від маси другого, а загальна маса обох борців становила 390 кг. Знайдіть масу кожного борця.

BE SMART

Математика приховує багато дивних речей. Чи відомо вам, що існують фрактальні дерева, трикутні колеса, стрічка, що має лише один бік? Про ці та інші цікавинки ви можете дізнатися, прочитавши книжку Анни Клейборн «Я можу бути математиком».

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Один із найтитулованіших борців сумо **Тайхо Кокі** є сином українця — уродженця Харківської області Маркіяна Боришка. У 2011 р. Тайхо отримав орден «За заслуги» III ступеня за значний особистий внесок у зміцнення міжнародного авторитету України та розвиток українсько-японських гуманітарних відносин.

Інший варіант роботи в електронному додатку

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 15

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 На першому рівні комп'ютерної гри треба перемогти n монстрів, а на другому рівні — на 10 монстрів більше. Скільки монстрів треба перемогти на другому рівні цієї гри? Укажіть правильний вираз.

А	Б	В	Г
$n-10$	$n+10$	$n\cdot 10$	$n:10$

2 На виставці скульптур італійські митці представили m робіт, а українські — на 20 % менше. Скільки робіт представили українські митці? Укажіть правильний вираз.

А	Б	В	Г
$m+20$	$m-20$	$1{,}2m$	$0{,}8m$

3 Яку відстань долає скат за 20 хв, рухаючись зі швидкістю 6 км/год?

А	Б	В	Г
1 км	1,2 км	2 км	3 км

4 Один катер наздоганяє інший, рухаючись по прямій. Швидкість першого катера 60 км/год, а другого — 40 км/год. На скільки кілометрів щогодини скорочується відстань між ними?

А	Б	В	Г
На 20 км	На 1,5 км	На 100 км	На 24км

5 Оренда одного автомобіля й одного велосипеда за добу коштує x грн та y грн відповідно. Скільки коштуватиме за добу оренда 1 автомобіля і 3 велосипедів? Укажіть правильний вираз.

А	Б	В	Г
$3x+y$	$x+3y$	$x+y$	$3x+3y$

6 Два однакові 3D-принтери друкують 48 ваз за 4 години. Установіть відповідність між запитанням (1–3) та правильною відповіддю на нього (А–Г).

1	За скільки годин один 3D-принтер надрукує 48 ваз?	А	18
2	Скільки ваз надрукують два 3D-принтери за 1 годину?	Б	12
3	Скільки ваз надрукує один 3D-принтер за 3 години?	В	8
		Г	6

7 Земельна ділянка для проведення змагань пластунів має форму прямокутника (див. рисунок), периметр якого дорівнює 50 м. Якщо ширину прямокутника збільшити на 1 м, а довжину зменшити на 2 м, то площа цієї ділянки зменшиться на 37 м^2. Розв'яжіть задачу, склавши систему рівнянь.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

21.7 Екскурсійний човен може йти під вітрилами або увімкнути електродвигун, але тоді його швидкість стане удвічі меншою. Човен ішов під вітрилами протягом 1,5 год і 2 год — на електродвигуні, усього подолавши 50 км. Із якою швидкістю він рухався під вітрилами і з якою — на електродвигуні?

21.8 Два експериментальні безпілотники вилетіли з пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 50 км. Якщо безпілотники рухатимуться назустріч один одному, то зустрінуться через 15 хв, а якщо в одному напрямі так, що більш швидкий опиниться позаду, то він наздожене того, що рухається повільніше, через 1 год 15 хв. Із якими швидкостями рухаються безпілотники?

21.9 Середнє арифметичне двох чисел дорівнює 52. Визначте ці числа, якщо одне з них в 7 разів більше за друге.

21.10 Якщо суму цифр двоцифрового числа A збільшити в 6 разів, то вона дорівнюватиме самому числу A. Якщо цифри числа A поміняти місцями, то воно зменшиться на 9. Знайдіть число A.

21.11 За 6 пар балістичних окулярів і 5 пар тактичних рукавичок заплатили 3500 г. о. Яка ціна пари балістичних окулярів і ціна пари тактичних рукавичок, якщо дві пари балістичних окулярів на 100 г. о. дорожчі за одну пару тактичних рукавичок?

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Книга відомого психолога, економіста, письменника, лауреата Нобелівської премії **Деніела Канемана** «Мислення швидке й повільне» стала світовим бестселером. У цій книзі наведено такий приклад помилки у сприйнятті навколишньої дійсності, зумовленої звичкою мислити шаблонно:

Бейсбольна бита і м'яч коштують разом 1 долар 10 центів.

Бита дорожча за м'яч на 1 долар.

Скільки коштує м'яч?

Спробуйте дати відповідь на це запитання.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

21.12 Якщо кожну зі сторін прямокутника збільшити на 0,2 м, то його площа збільшиться на 0,38 м^2. Якщо ширину прямокутника зменшити на 0,1 м, а довжину збільшити на 0,1 м, то його площа збільшиться на 0,02 м^2. Визначте довжини сторін прямокутника.

21.13 У ювеліра є два сплави: перший містить 20 % платини, а другий — 24 %. Скільки грамів кожного сплаву має взяти ювелір для виготовлення 80 г сплаву, вміст платини в якому становить 22,5 %?

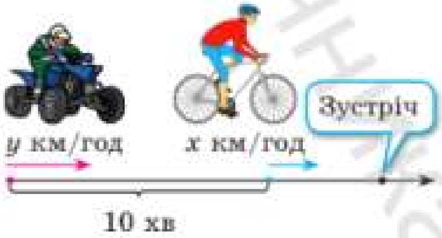
Завдання 21.12	→	Приклад 1
Завдання 21.13	→	Приклад 2
Завдання 21.14	→	Приклад 3
Завдання 21.15	→	Приклад 4
Завдання 21.16	→	Приклад 5
Завдання 21.17 21.18	→	Інтелектуальний фітнес, 21.11

Об'єкт оренди	Вартість оренди на 1 день	
	до зміни цін	після зміни цін
Сноубайк	x г. о.	
Шолом	y г. о.	

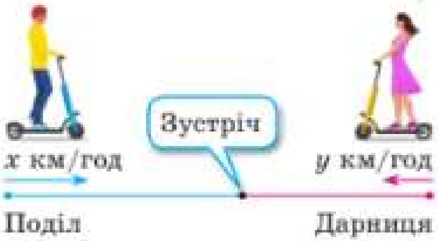
21.14 Оренда 3 сноубайків і 3 шоломів на 1 день становить 780 г. о. Після того як оренда сноубайка подешевшала на 20 %, а оренда шолома подорожчала на 10 %, оренда 1 сноубайка і 1 шолома на 1 день стала 238 г. о. Визначте вартість оренди:

1) 1 сноубайка і 1 шолома на 1 день до зміни цін;

2) 1 сноубайка на 1 день після зміни цін.



21.15 Із містечка виїхав велосипедист. Через 10 хв з того ж містечка в тому ж напрямку виїхала квадроциклістка і наздогнала велосипедиста через 5 хв після свого виїзду. Відомо, що квадроциклістка за пів години проїжджає на 6 км більше, ніж велосипедист проїжджає 1 год. Знайдіть швидкості велосипедиста і квадроциклістки.



21.16 Олена й Микола одночасно виїхали на електросамокатах назустріч одне одному та зустрілися через 1 год після початку руху. Якби Олена вирушила від свого будинку на 30 хв пізніше, ніж Микола від свого, то вони зустрілися б через 0,8 год після виїзду Олени. З якими швидкостями вони рухалися? Вважайте, що обидва рухалися зі сталими швидкостями протягом всього маршруту завдовжки 30 км без зупинок.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Українські діти не тільки вірять у перемогу, але й допомагають її наблизити. Малята й підлітки продають поробки та застосовують свої таланти, щоб зібрати кошти на потреби українських захисників.

21.17 За 8 бронепластин і 4 штурмових рюкзака заплатили 12 000 г. о. Яка ціна бронепластини й ціна штурмового рюкзака, якщо одна бронепластина коштує стільки ж, скільки два штурмових рюкзака?

21.18 Оля та Настя продавали власні поробки і збирали кошти для потреб військових. Усього дівчата зібрали 8350 грн, причому Оля — на 950 грн більше, ніж Настя. Скільки грошей зібрала кожна дівчинка?

Підручник Проєкт видавництва "Ранок"

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 18–21

1 Ви познайомилися з новим математичним поняттям — системою рівнянь.

Система рівнянь — це запис, у якому кілька рівнянь об'єднані фігурною дужкою. Сутність системи рівнянь: розв'язок (множина розв'язків) системи одночасно є розв'язком усіх її рівнянь.

Розв'язком системи рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, які задовольняють кожне з рівнянь, тобто перетворюють їх у правильну рівність.

Розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Система двох лінійних рівнянь із двома змінними може мати один, безліч або не мати розв'язків.

2 Ви дізналися про способи розв'язування систем лінійних рівнянь із двома змінними.

Способи розв'язування систем лінійних рівнянь із двома змінними:

- графічний спосіб;
- спосіб підстановки;
- спосіб додавання.

Графічний спосіб є зручним для знаходження *кількості* розв'язків системи рівнянь, оскільки є неточним. Розв'язки, знайдені цим способом, вимагають перевірки. Аналітичні способи (підстановки й додавання) дозволяють точно знайти розв'язки системи.

3 Ви дізналися, що системи лінійних рівнянь із двома змінними також можуть бути математичними моделями прикладних задач.

Математичне моделювання — це процес побудови й вивчення матема-тичних моделей, тобто процес розв'язування деякої нематематичної задачі чи проблеми математичними методами.

Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи ліній-них рівнянь із двома змінними аналогічний алгоритму розв'язування текстової задачі за допомогою лінійного рівняння з однією змінною, але дозволяє урахувати більшу кількість умов.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 7

Варіант 2 контрольної роботи в електронному додатку

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–5 виберіть одну правильну відповідь.

1 Укажіть пару чисел, яка є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=9. \end{cases}$

А	Б	В	Г
$(9;10)$	$(10;9)$	$(4;5)$	$(5;4)$

2 Застосуйте спосіб підстановки для розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} y=-2, \\ x+y=7. \end{cases}$ Укажіть одержане значення x.

А	Б	В	Г
$x=-9$	$x=9$	$x=5$	$x=-5$

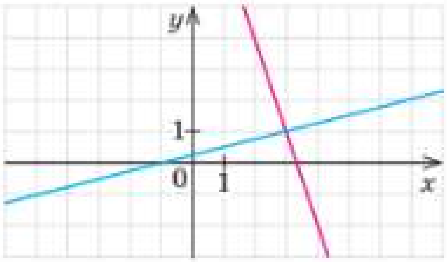
3 Укажіть рівняння, одержане в ході розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} x-9y=1, \\ 5x+9y=59 \end{cases}$ способом додавання.

А	Б	В	Г
$4y=58$	$6y=60$	$4x=58$	$6x=60$

4 З рівняння $x-3y=-11$ виразіть змінну x через змінну y.

А	Б	В	Г
$x=3y-11$	$x=3y+11$	$x=-3y-11$	$x=-3y+11$

5 Маршрути перельотів двох зграй лелек можна описати графіками рівнянь $3x+y=10$ і $-x+4y=1$ у прямокутній системі координат xOy. Ці графіки зображено на рисунку. Укажіть координати точки, у якій перетинаються маршрути перельотів.



А	Б	В	Г
$(2;3)$	$(3;2)$	$(3;1)$	$(1;3)$

6 Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x+y=0, \\ -x+y=-3. \end{cases}$

7 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 8x+2y=16, \\ -8x+y=-28 \end{cases}$ способом додавання.

8 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=-3, \\ 2x+5y=10 \end{cases}$ способом підстановки.

9 Зранку киянин протягом 30 хв їхав на електросамокаті, а потів 10 хв ішов пішки, усього подолавши 9800 м. Увечері він 5 хв ішов пішки, а потім 40 хв їхав на електросамокаті й подолав разом 12 400 м. Вважайте, що швидкість руху киянина на електросамокаті дорівнює x м/хв, а пішки — y м/хв.

1) Складіть систему рівнянь за умовою задачі.
2) Визначте x та y.

Бонусне завдання

Задано рівняння $2x+5y=80$, де x та y — натуральні числа. Запишіть два довільні розв'язки цього рівняння.

ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ЩО ВИВЧАВСЯ В 7 КЛАСІ

1. ЦІЛІ ВИРАЗИ

1 Знайдіть значення алгебраїчного виразу:

1) $2x+3$, якщо $x=1$; 5) $x-4y$, якщо $x=-3$, $y=5$;
2) $3x-2$, якщо $x=2$; 6) $6x-y$, якщо $x=8$, $y=-2$;
3) $\frac{x}{3}-5$, якщо $x=9$; 7) $0{,}5y-\frac{x}{4}$, якщо $x=-100$, $y=-4$;
4) $\frac{x}{2}+7$, якщо $x=6$; 8) $\frac{y}{5}-0{,}2x$, якщо $x=-10$, $y=-20$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Алгебраїчні вирази, які містять лише дії додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня й ділення, називають **раціональними виразами**.

2 Для дослідження ефективності реклами визначають рейтинг кліків CTR (клікабельність), який обчислюють за формулою $CTR=\frac{k}{n}\cdot 100\ \%$, де n — число показів певного оголошення, k — число кліків на це оголошення.

1) Визначте CTR, якщо:
   а) $n=30$, $k=6$;
   б) $n=74$, $k=37$.
2*) З'ясуйте, за якої умови значення CTR перевищить $100\ \%$.

3 Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $5a+5(1-a)$; 5) $0{,}5(14a-8)-(3a-4)$;
2) $6(2+a)-6a$; 6) $0{,}1(13-50a)-(1{,}3-6a)$;
3) $4(3a+2)-\frac{24a}{2}$; 7) $\frac{5}{11}(22a-11)-0{,}4(25a-12{,}5)$;
4) $\frac{90a}{15}+2(7-3a)$; 8) $\frac{3}{8}(16-4a)-0{,}2(30-7{,}5a)$.

Розкриття дужок

- Якщо перед дужками стоїть знак «+», то, розкриваючи дужки, знак кожного доданка не змінюємо.
- Якщо перед дужками стоїть знак «−», то, розкриваючи дужки, знак кожного доданка змінюємо на протилежний.

4 Микола бере участь у буккросингу. Хлопець планує в кожному з 3 парків залишити по a історичних романів, а в кожному із 4 кафе — по b детективів.

1) Скільки всього книжок Микола планує залишити:
   а) у парках;
   б) у кафе;
   в) у парках та кафе разом?
2*) Чи достатньо даних для відповіді на таке запитання: «У якому місці Микола залишить більше книжок — у 3 парках чи в 4 кафе?»

5 Обчисліть:

1) 1^3-4^2; 3) $(-2)^3\cdot 3$; 5) $\frac{(-3)^4}{10-1}$; 7) $\left(\frac{1}{4}-0,3\right)^2$;

2) 5^2-1^4; 4) $(-3)^3\cdot 2$; 6) $\frac{(-2)^4}{15+1}$; 8) $\left(\frac{1}{5}-0,21\right)^2$.

Властивості степеня

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$a^m:a^n=a^{m-n},\ a\neq 0$

$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$

$(ab)^n=a^n\cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\ b\neq 0$

6 ШІ протягом першої хвилини обробив 2 Гб інформації, а протягом кожної наступної хвилини обробляв удвічі більше інформації (у ГБ), ніж протягом попередньої.

1) Скільки гігабайтів інформації обробить ШІ протягом:
   а) третьої хвилини;
   б) п'ятої хвилини;
   в) сьомої хвилини;
   г) *m*-ї хвилини?

2*) Якщо швидкість обробки ШІ інформації не зміниться, чи настане такий момент часу, коли ШІ щохвилини оброблятиме більше 1 Тб інформації?

7 Обчисліть:

1) $\frac{4^{10}}{4^9}$; 3) $0,5^6\cdot 2^6$; 5) $\frac{2^{20}\cdot 3^{18}}{6^{18}}$; 7) $\frac{64^3\cdot 2^{15}}{4^{17}}$;

2) $\frac{3^{13}}{3^{11}}$; 4) $0,2^9\cdot 5^9$; 6) $\frac{2^{20}\cdot 5^{22}}{10^{20}}$; 8) $\frac{84^4\cdot 3^{19}}{9^{16}}$.

8 У таблиці наведено інформацію про кількість зірок у трьох галактиках.

Дайте відповідь на запитання.

1) Скільки зірок налічує галактика *C*?

2) Яка з трьох галактик налічує найбільшу кількість зірок?

3) У скільки разів зірок у галактиці *A* більше, ніж у галактиці *C*?

4*) Оксана стверджує, що в галактиці *B* не більше 30 мільярдів зірок. Чи правильно вважає Оксана?

Галактика	Кількість зірок у галактиці
A	$3,8\cdot 10^{11}$
B	$2,1\cdot 10^{12}$
C	$7,6\cdot 10^{10}$

9 Зведіть одночлен до стандартного вигляду.

1) $9a\cdot 4a^7$; 4) $6a^7\cdot\frac{1}{3}a^9$; 7) $\left(-4ab^6\right)^3\cdot\frac{1}{8}a^3b^2$;

2) $6a^9\cdot 5a$; 5) $\left(2a^4\right)^3\cdot 0,25a^{11}$; 8) $\left(-3a^5b^2\right)^4\cdot\frac{1}{27}a^3b^4$.

3) $\frac{1}{2}a^{12}\cdot 10a^8$; 6) $\left(10a^5\right)^2\cdot 0,1a^4$;

Порядок дій

- піднесення степеня до степеня: $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$;
- множення степенів: $a^m a^n=a^{m+n}$.

10 Комп'ютерна програма виконує множення заданих одночленів, отриманий добуток підносить до третього степеня і подає результат як одночлен стандартного вигляду.

1) Відтворіть результат, який буде надано комп'ютерною програмою, якщо задані такі одночлени:

а) $7x^2y$ і $\frac{1}{7}x^4y^6$;
б) $-0,2x^{10}y^5$ і $5x^5y^{10}$;
в) $10xy$, $4x^2y^2$ і $0,125x^3y^3$.

2*) Поміркуйте, чи може наданий комп'ютерною програмою результат бути виразом:

а) m^{2025};
б) 216;
в) $1000\left(mn^4\right)^3$;
г) $\left(0,4m^{23}n^{57}\right)^3$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$a^{mn} = \left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m$$

$$a^nb^n = (ab)^n$$

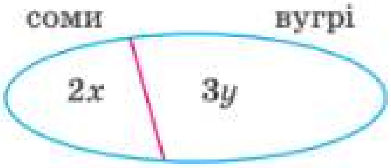
$$a^nb^nc^n = (abc)^n$$

11 Спростіть вираз:

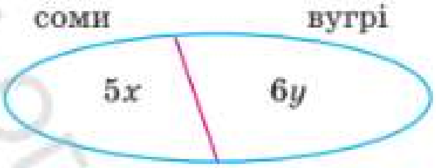
1) $3x-4-3x+9$;
2) $5-11x-4+11x$;
3) $8x+17-(8x-3)$;
4) $15-10x-(12-10x)$;
5) $(6x-2y+1)-(4x-2y+3)$;
6) $(x+9y-4)-(x-y+1)$;
7) $\left(3x^2-11y-7\right)-\left(-x^2-9y+5\right)$;
8) $\left(5x^2-y+14\right)-\left(-x^2+6y-3\right)$.

12 На рисунку зображено дві водойми із зазначеною кількістю сомів та вугрів, що мешкають в кожній із них (x і y — натуральні числа).

1) Скільки всього сомів та вугрів мешкає у двох водоймах? (Запишіть вираз та спростіть його.)
2) На скільки більше сомів та вугрів разом мешкає у водоймі B, ніж у водоймі A? (Запишіть вираз та спростіть його.)
3) За якого значення x кількість сомів у водоймі B на 450 рибин перевищуватиме кількість сомів у водоймі A?
4*) У скільки разів кількість сомів у водоймі B більша за кількість сомів у водоймі A?
5*) На скільки відсотків кількість вугрів у водоймі B більша за кількість вугрів у водоймі A?



Водойма A



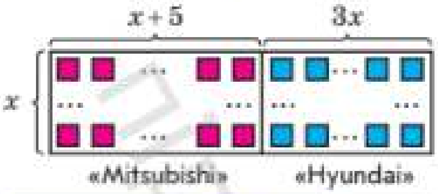
Водойма B

13 Виконайте множення:

1) $3x\left(x^2-6x+4\right)$;
2) $4x\left(x^2-7x-1\right)$;
3) $(6-x)(x-11)$;
4) $(x+9)(12-x)$;
5) $\left(x^2+3\right)(x-10)$;
6) $(x-14)\left(x^2+5\right)$;
7) $(x-1)\left(x^2+x-2\right)$;
8) $(x-2)\left(x^2-3x+1\right)$.

підручника видавництва "Ранок"

14 Автомобілі двох корпорацій «Mitsubishi» та «Hyundai» розставлені на стоянці рядами так, як показано на схемі. Кількість автомобілів у кожному ряду й кількість рядів зазначена на рисунку, x — натуральне число.



Визначте:

1) кількість автомобілів корпорацій «Mitsubishi» на стоянці;
2) кількість автомобілів корпорацій «Hyundai» на стоянці;
3) загальну кількість автомобілів на стоянці.
4*) Значення x, за якого кількість автомобілів корпорацій «Hyundai» на стоянці дорівнюватиме 600.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

«Mitsu bishi» з японської перекладається як «Три ромби»

ПРИГАДАЙТЕ!

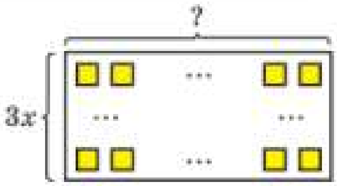
Способи розкладання на множники

1. Винесення спільного множника за дужки.
2. Групування.
3. Використання формул скороченого множення

15 Розкладіть на множники:

1) a^5+3a;
2) $5a-a^2$;
3) $4a^2b-ab$;
4) $ab+3ab^2$;
5) $5(a+8)-b(a+8)$;
6) $a(b-3)+2(b-3)$;
7) $a^3-a^2b+4a-4b$;
8) $ab^3+ab+3b^2+3$.

16 На рисунку зображено поле сонячної електростанції. Сонячні панелі розставлені рядами, як показано на схемі, загальна кількість панелей дорівнює $(30x^2+12x)$, де x — натуральне число.



1) Визначте кількість рядів.
2) За якого значення x кількість панелей у кожному ряду дорівнюватиме 74?

17 Перетворіть квадрат двочлена у многочлен:

1) $(2x+y)^2$;
2) $(x+3y)^2$;
3) $(x^3-7)^2$;
4) $(6-y^4)^2$;
5) $(x^5+y^2)^2$;
6) $(x^7+y^3)^2$;
7) $(4x^{10}-0,5y^6)^2$;
8) $(0,2x^9-10y^8)^2$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=$$
$$=(a+b)(a+b)$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=$$
$$=(a-b)(a-b)$$

18 Розкладіть многочлен на множники:

1) $3^2+2\cdot3\cdot x+x^2$;
2) $x^2-2\cdot1\cdot x+1^2$;
3) $m^2-2mn+n^2$;
4) $p^2+2pq+q^2$;
5) $y^2-12y+36$;
6) $49+14y+y^2$;
7) $25a^2+20a+4$;
8) $16a^2-80a+100$.

19 Для проведення тренування військові вишукувалися рядами. Кількість бійців у кожному ряду дорівнює кількості рядів. Загальна кількість військових, задіяних у тренуванні, дорівнює $4x^2+20x+25$, де x — натуральне число.

1) Скільки бійців стояло в кожному ряду під час тренування?

2) За якого значення x кількість рядів дорівнює 11?

3*) Початок тренування зафільмували з дрона. Яка геометрична фігура (круг, трикутник, квадрат) найточніше описує розташування військових на початку тренування?

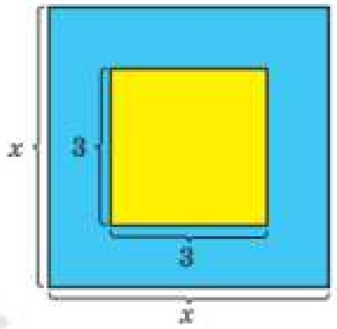
20 Розкладіть на множники:

1) $(6m)^2-n^2$; 4) $64m^2-25n^2$; 7) $0{,}36m^2-n^8$;

2) $m^2-(4n)^2$; 5) $\frac{n^2}{4}-121m^2$; 8) $m^{10}-0{,}16n^2$.

3) $81m^2-49n^2$; 6) $144n^2-\frac{m^2}{9}$;

21 На рисунку зображено схему патріотичної нашивки. У центральному квадраті зі стороною 3 см буде розміщено стилізований Герб України. За межами центрального квадрата, усередині більшого квадрата зі стороною x см, буде розміщено патріотичні написи.



1) Яка площа на майбутній вишивці виділена для патріотичних написів?

2*) За якого значення x площа, виділена для патріотичних написів, дорівнюватиме 16 см^2?

22 Розкладіть на множники:

1) $(11a)^3-b^3$; 4) a^3+27b^3; 7) $0{,}001a^3+\frac{1}{27}b^3$;

2) $a^3-(12b)^3$; 5) $15^3\cdot a^3-64b^3$; 8) $\frac{1}{8}a^3+0{,}216b^3$.

3) $8a^3+b^3$; 6) $125a^3-16^3\cdot b^3$;

23 На рисунку зображено дві пакувальні коробки, кожна має форму куба. Довжина ребра більшого куба дорівнює $5x$ м. Визначте довжину ребра меншого куба (у м), якщо різниця об'ємів цих коробок дорівнює $(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$.

Проєкт [illegible]
Підручника видавництва "Ранок"

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Архітектурна пам'ятка Харкова — Держпром, або Будинок Державної промисловості, побудований у 1925–1928 рр, став першим на той час 13-поверховим хмарочосом. Будівля має унікальну конструкцію, саме для її створення була розроблена технологія індустріального залізобетону.

24 Розв'яжіть рівняння:

1) $7x^2-7=0$;
2) $8-8x^2=0$;
3) $16x-x^3=0$;
4) $x^3-25x=0$;
5) $x^3+4x^2+4x=0$;
6) $x^3+6x^2+9x=0$;
7) $5x^5-40x^3+80x=0$;
8) $10x^5-20x^3+10x=0$.

25 Для визначення об'єму бетонної конструкції інженери запропонували використовувати дві формули. Одна із цих формул має вигляд $V=(x-7)(x^2+7x+49)$. Запишіть іншу формулу, запропоновану інженерами.

2. ФУНКЦІЇ

26 Кожні 10 хв на студії завантажують у хмарне сховище 120 відеоматеріалів.

1) Скільки відеоматеріалів завантажують у хмарне сховище за 1 хв, за 3 хв?
2) Задайте формулою залежність кількості N завантажених відеоматеріалів від часу t (у хв).
3) Знайдіть значення t, при якому $N=2400$.

27 Функція задана описово. Складіть відповідну формулу.

1) Залежність M від n така, що кожному натуральному числу n ставиться у відповідність число M, яке втричі більше за n.
2) Залежність y від x така, що кожному числу x ставиться у відповідність число y, яке на 8 менше від x.
3) Залежність T від t така: t — вік міста A (у роках), T — вік міста B (у роках) на сьогодні; місто B було засновано на 300 років раніше, ніж місто A.

28 Функцію задано різними способами. Виконайте завдання.

1) Функцію задано аналітично, формулою $y=7x$. Знайдіть:
   а) значення функції, якщо $x=-1$;
   б) значення аргумента, для якого значення функції дорівнює 35.

! СЛІД ЗНАТИ!

Основні **способи задання функції**:
- аналітичний
- табличний
- описовий
- графічний

2) Функцію задано аналітично, формулою $y = x^2 + 10x + 25$. Знайдіть:
   а) значення функції, якщо $x = 1$;
   б) значення аргумента, для якого значення функції дорівнює 0.

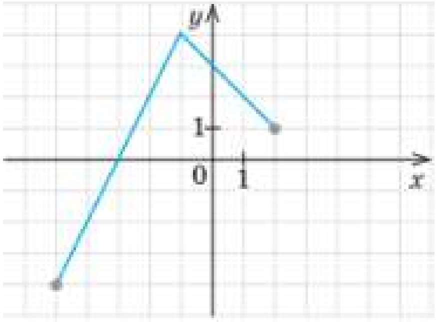
ПРИГАДАЙТЕ!

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$$

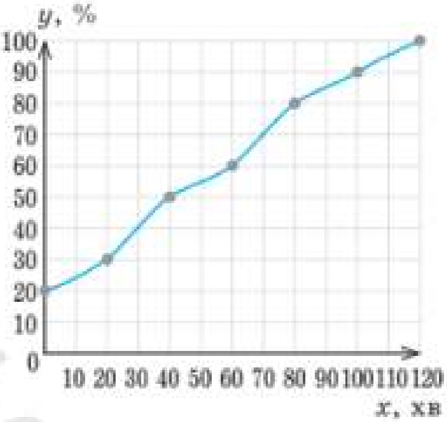
3) Функцію задано таблицею. Знайдіть:
   а) значення функції, якщо $x = 2$;
   б) аргумента, для якого значення функції дорівнює 7.

x	-3	0	1	2
y	7	1	-1	-3

29 За графіком, поданим на рисунку, знайдіть:
1) значення функції, якщо $x = 1$;
2) значення аргумента, якому відповідає значення функції $y = -2$;
3) область визначення функції;
4) область значень функції.



30 На рисунку зображено графік функціональної залежності заряду *y* акумуляторної батареї мобільного телефону від часу заряджання *x*.
1) Яким був заряд акумуляторної батареї, коли телефон поставили заряджатися $(x = 0)$?
2) Яким був заряд акумуляторної батареї через 20 хв після початку заряджання $(x = 20)$?
3) Через який час (у хв) після підключення до джерела живлення заряд акумуляторної батареї становив 50 %?
4) Через який час (у хв) після підключення до джерела живлення заряд акумуляторної батареї становив 100 %?



31 Функція задана формулою $y = kx + b$, її графік проходить через точку *A*. Знайдіть значення невідомого коефіцієнта, якщо:

1) $y = x + b$, $A(-2; 5)$;
2) $y = x + b$, $A(-1; 9)$;
3) $y = x + b$, $A(0{,}5; 12)$;
4) $y = x + b$, $(19; 0{,}2)$;
5) $y = kx$, $A(6; 30)$;
6) $y = kx$, $A(10; 40)$;
7) $y = kx + 7{,}3$, $A(5; -17{,}7)$;
8) $y = kx - 9{,}5$, $A(4; -29{,}5)$.

Проект підручника видавництва "Ранок"

3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

32 Розв'яжіть рівняння:

1) $3x-19=80$;
2) $2x+23=31$;
3) $33-11x=22-11x$;
4) $15x-30=15x-45$;
5) $4(x-5)-x=3x-20$;
6) $3(8-x)+9x=24+6x$;
7) $14-(3-5x)=3x-19$;
8) $33-(5-25x)=21x+84$.

33 За другу годину своєї роботи нейронний машинний перекладач отримав на 30 % більше звернень від користувачів, ніж за першу. Скільки звернень отримав перекладач за другу годину роботи, якщо за перші дві години він отримав 2070 звернень від користувачів?

34 Побудуйте графік лінійного рівняння з двома змінними та перевірте, чи належить точка A цьому графіку.

1) $-3x+y=0$, $A(1;3)$;
2) $2x+y=0$, $A(2;-4)$;
3) $x-y=-1$, $A(3;4)$;
4) $-x+y=-2$, $A(7;5)$;
5) $4x-y=-2$, $A(0;-2)$;
6) $3x-y=-6$, $A(2;12)$;
7) $-2x-3y=-6$, $A(3;0)$;
8) $-5x-2y=-10$, $A(0;-5)$.

35 Визначте графічним способом кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y=x-2, \\ y=1; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y=x+3, \\ y=-1; \end{cases}$
3) $\begin{cases} y=-2x, \\ 3y+6x=0; \end{cases}$
4) $\begin{cases} y=3x, \\ 3y-9x=0; \end{cases}$
5) $\begin{cases} x-y=0, \\ 5x-5y=5; \end{cases}$
6) $\begin{cases} -x+y=0, \\ -6x+6y=12; \end{cases}$
7) $\begin{cases} 5x-y=1, \\ -10x+2y=-2; \end{cases}$
8) $\begin{cases} -2x+y=6, \\ 12x-6y=36. \end{cases}$

36 Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} y=5+x, \\ 2x+y=77; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x=8-y, \\ x+5y=56; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x-y=6, \\ 2x+7y=3; \end{cases}$
4) $\begin{cases} -x+y=5, \\ 5x+3y=-1; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 11x-3y=5, \\ 4x+y=6; \end{cases}$
6) $\begin{cases} 9x-7y=-12, \\ x+5y=16; \end{cases}$
7) $\begin{cases} 2x-y=6, \\ 5(x-1)+3y=-1; \end{cases}$
8) $\begin{cases} -x+6y=5, \\ 5x+3(y+2)=14. \end{cases}$

! СЛІД ЗНАТИ!

Чи є пара чисел розв'язком системи рівнянь!

- Якщо пара чисел задовольняє обидва рівняння системи, то вона є розв'язком системи рівнянь.
- Якщо пара чисел не задовольняє хоча б одне з рівнянь, то вона не є розв'язком системи рівнянь

37 Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases}6x-y=23,\\ x+y=12;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x+y=11,\\ -x+9y=19;\end{cases}$

3) $\begin{cases}-5x+2y=5,\\ 5x-3y=-10;\end{cases}$

4) $\begin{cases}-6x+11y=-7,\\ 5x-11y=4;\end{cases}$

5) $\begin{cases}4x-9y=6,\\ -2x+7y=2;\end{cases}$

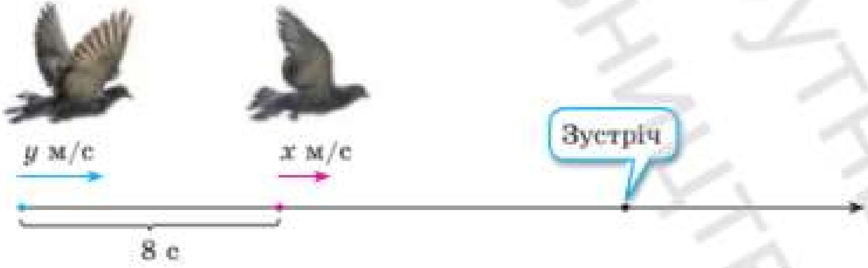
6) $\begin{cases}-3x+11y=-10,\\ 6x-5y=37;\end{cases}$

7) $\begin{cases}3x-0{,}5y=-8,\\ 12x-y=-22;\end{cases}$

8) $\begin{cases}x-11y=15,\\ 0{,}5x-13y=15.\end{cases}$

38 До x г вершків жирністю 30 % додали y г вершків жирністю 10 %. У результаті отримали 200 г вершків жирністю 12 %. Складіть систему рівнянь для знаходження x та y і розв'яжіть її.

39 На кожній руці дресирувальника сиділо по одному голубу. За командою перший голуб полетів зі швидкістю x м/с. Через 8 с за ним полетів другий голуб зі швидкістю y м/с, і наздогнав першого через 10 с після свого вильоту (див. схему). Відомо, що перший голуб за одну хвилину пролітає на 60 м більше, ніж другий — за пів хвилини. Складіть систему рівнянь для знаходження x та y і розв'яжіть її.



BE SMART

Книга «Чого не вчать у школі» допоможе вам стати самостійнішими, креативнішими, навчить успішно комунікувати з оточуючими, розуміти свої емоції і керувати ними, усвідомити цінність життя і здоров'я, а також дасть відповіді на безліч інших питань, які не висвітлюють шкільні вчителі.

> “Люди, не знайомі з алгеброю, не можуть уявити собі тих дивних речей, яких можна досягти за допомогою цієї науки.”
>
> Г. Лейбніц

Проєкт майбутнього підручника видавництва "Ранок"

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 8

Варіант 2 контрольної роботи в електронному додатку

ВАРІАНТ 1

У завданнях 1–6 виберіть одну правильну відповідь.

1 Знайдіть значення виразу $2+x$, якщо $x=-10$.

А	Б	В	Г
-98	-8	12	102

2 Перетворіть у многочлен добуток $\left(5-a^3\right)\left(5+a^3\right)$.

А	Б	В	Г
$25-a^6$	$25+a^6$	$10+a^9$	$10-a^9$

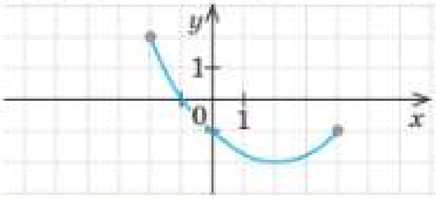
3 Спростіть вираз $\dfrac{\left(p^5\right)^6}{p^{10}}$.

А	Б	В	Г
p	p^3	p^{20}	p^{40}

4 Перетворіть у квадрат двочлена вираз $16-8u+u^2$.

А	Б	В	Г
$(4+u)^2$	$(4-u)^2$	$(8+u)^2$	$(8-u)^2$

5 Знайдіть область визначення функції $y(x)$, графік якої зображено на рисунку.



А	Б	В	Г
$-2\leqslant x\leqslant -1$	$-1\leqslant x\leqslant 4$	$-2\leqslant x\leqslant 2$	$-2\leqslant x\leqslant 4$

6 У школі дизайну на першому курсі навчаються x, а на другому — y студентів. Кожен першокурсник виконав 2 проєкти, а кожен другокурсник — 3, причому всього було виконано 180 проєктів. Укажіть рівняння, що відповідає умові задачі.

А	Б	В	Г
$2x+3y=180$	$3x+2y=180$	$5xy=180$	$5+xy=180$

7 Розв'яжіть рівняння $9x-x^2+18-2x=0$, розклавши його ліву частину на множники.

8 Побудуйте графік рівняння $2x+y=8$. Перевірте, чи належить точка $A(3;2)$ цьому графіку.

9 Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases}7x+10y=22,\\2x+5y=2.\end{cases}$$

10 За оренду 4 пікапів і 4 мопедів за добу заплатили 440 г. о. Після того як оренда пікапа подешевшала на 10 %, а оренда мопеда подорожчала на 20 % від попередньої вартості, вартість оренди 1 пікапа й 1 мопеда за добу склала 108 г. о. Визначте вартість оренди:

1) 1 пікапа й 1 мопеда за добу до зміни цін;
2) 1 пікапа після зміни цін.

Бонусне завдання

Визначте три останні цифри значення числового виразу 6935^3-935^3.

Проект макета підручника видавництва "Ранок"

ВІДПОВІДІ

Повторення матеріалу, що вивчався у 5—6 класах

1. 1) 400; 2) 300; 3) 5; 4) 10; 5) 60; 6) 180; 7) 470; 8) 8200. **2.** 1) 370; 2) 410; 3) 930; 4) 650; 5) 43,5; 6) 51,9; 7) 14; 8) 26. **3.** 1) 0; 2) 0; 3) $9b$; 4) $18c$; 5) $46y$; 6) $57a$; 7) $-10p$; 8) $-40n$. **4.** 1) 37; 2) −55; 3) 25; 4) 20; 5) 3; 6) 9; 7) 0; 8) 0. **5.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{6}$; 7) $\frac{31}{51}$; 8) $\frac{24}{67}$. **6.** 1) $3\frac{1}{2}$; 2) $4\frac{1}{3}$; 3) $7\frac{4}{5}$; 4) $6\frac{5}{6}$; 5) $\frac{7}{24}$; 6) $\frac{17}{21}$; 7) $3\frac{1}{14}$; 8) $7\frac{5}{6}$. **7.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{5}{6}$; 5) $2\frac{1}{2}$; 6) 5; 7) 0; 8) 0. **8.** 1) 1; 2) 1; 3) 10; 4) 12; 5) $\frac{1}{30}$; 6) $\frac{1}{14}$; 7) $\frac{1}{7}$; 8) 3. **9.** 1) 40; 2) 60; 3) 53; 4) 72; 5) 0,5; 6) 0,06; 7) 4720; 8) 2512. **10.** 1) 4; 2) 3; 3) 6; 4) 9; 5) 70; 6) 125; 7) 20; 8) 13. **11.** 1) 150; 2) 210; 3) 120; 4) 180; 5) 160; 6) 500; 7) 1000; 8) 1250. **12.** На 25 %. **13.** На 60 %. **14.** На 20 %. **15.** На 40 %. **16.** 1) 6; 2) 10; 3) 80; 4) 32; 5) 18; 6) 27; 7) 250; 8) 490. **17.** 100, 45, 95. **18.** 50, 84, 46. **19.** 1) $a=\frac{2b}{5}$; 2) $a=\frac{3}{b}$; 3) $a=\frac{4b}{7}$; 4) $a=\frac{4}{b}$; 5) $a=\frac{2b}{9}$; 6) $a=\frac{4b}{5}$; 7) $a=\frac{24}{b}$; 8) $a=\frac{7}{b}$. **20.** 1) 2; 2) 0; 3) 14; 4) 17; 5) 9; 6) 12; 7) 4,5; 8) 5,25. **21.** 1) −30; 2) −50; 3) 5; 4) −5; 5) −24; 6) −3; 7) 4; 8) 50. **22.** 1) −9; 2) −5; 3) 9; 4) 8; 5) 3; 6) 5; 7) 2; 8) 3. **23.** 1) $2x+2$; 2) $12+3x$; 3) $5x-10$; 4) $4x-24$; 5) $21a-7b$; 6) $8b-32a$; 7) $-14a+6b$; 8) $-24b+15a$. **24.** 1) 21; 2) 1; 3) −9; 4) −12; 5) −20; 6) −20; 7) 1; 8) 1. **25.** 1) $12{,}4>-34{,}1$; 2) $-5<0$; 3) $\frac{72}{9}=\frac{24}{3}$; 4) $\frac{16}{8}<\frac{12}{4}$; 5) $-\frac{2}{3}<-\frac{2}{5}$; 6) $-\frac{7}{4}>-\frac{7}{2}$; 7) $-3{,}602>-3{,}612$; 8) $-0{,}138>-0{,}831$. **26.** Через 2 год. **27.** Через 3 год.

РОЗДІЛ 1

§ 1

1.1. 1) 0,2; 2) 3,8; 3) 1,7; 4) −0,2. **1.3.** 1) −40; 2) 68; 3) −10; 4) 6. **1.4.** 1) Не має; 2) має; 3) не має. 1.5. 1 – В, 2 – Е, 3 – Д, 4 – Б, 5 – А, 6 – г. **1.6.** 1) 15; 2) 20; 3) 13; 4) 6; 5) −8; 6) 18. **1.7.** а) 4 км; б) 10 км; в) $x:3$ км. **1.9.** а) 6; б) 11; в) $x+1$. **1.10.** 1) а) $100\cdot2+50\cdot3$; б) $4(20\cdot2+10\cdot3)$; в) $t(20\cdot2+10\cdot3)$; 2) а) 350 грн; б) 280 грн; в) $70t$ грн. **1.11.** 1) $5(a+13)$; при $a=7$, $a=10$, $a=-3$; 2) $2a+5$; при $a=3$, $a=7$, $a=-1$. **1.12.** 2) 440; 3) 333 300. **1.13.** 1) 17; 2) 9; 3) −30; 4) 1,6. **1.14.** 1) $(a-b)\cdot4$; 32; 2) $(a+b)\cdot2$; −4; 3) a^2+b^2-2ab; 4; 4) $(a+b)^2-5$; −1. **1.15.** 1) 7; 2) 42; 3) 89; 4) 1. **1.16.** 1) 10; 2) 16. **1.17.** а) 1720 м; б) 3440 м; в) 6880 м. **1.19.** а) $100a+50b$; б) $4(20a+10b)$; в) $t(20a+10b)$.

§ 2

2.1. 1) $10a+10b$; 2) $25a+25b$; 3) $21c-b$; 4) $34m+k$; 5) $50a+11{,}5b+2$; 6) $30x-41y-8$. **2.2.** 1) $2a$; 2) $2b$; 3) $-2y$; 4) $2x$; 5) $-b+c$; 6) $2a+b-c$. **2.3.** 1) 150; 2) 120; 3) 10,5; 4) 2,5. **2.4.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) так. **2.7.** 2) $x+2-(x+2)=0$; 3) $-(x-y)+2x-y=x$. **2.8.** 1) $2a+3b$; $a+b+3c$; $8a+2b$; 2) 142 м; 90 м; 268 м. **2.9.** 1) $10\cdot90+12\cdot20+3\cdot300+1\cdot200$; 2) $3(10\cdot90+12\cdot20+3\cdot300+1\cdot200)$; 3) $n(10\cdot90+12\cdot20+3\cdot300+1\cdot200)$. **2.10.** 1) 0; 2) a; 3) $3a$; 4) $3a-5b$. **2.11.** 1) 15; 2) 10; 3) $28a$; 4) $26b$. **2.13.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) ні. **2.14.** 1) 34; 2) 855. **2.15.** 1) $5a+2b$, $3a+3b$; 2) 190 м, 1305 м. **2.16.** 1) $m(10\cdot90+12\cdot20+3\cdot300+1\cdot200)$; $mn(10\cdot90+12\cdot20+3\cdot300+1\cdot200)$; 2) 1 344 000 г. о.

§ 3

3.1. 1) −29; 2) 12; 3) 713; 4) 185; 5) 244; 6) 2,375. **3.2.** 1) 10^4; 2) $0{,}1^4$; 3) $(-10)^{10}$;

4) $(-0{,}1)^7$. **3.3.** 1) 10^2; 2) 10^3; 3) 10^6. **3.5.** 1) 1; 2) 0; 3) 1; 4) −1. **3.6.** 1) 12; 1200; 2) $\frac{1}{72}$; $\frac{81}{64}$; 3) 9; 24; 4) 0; 10000; 5) 10; 6) $\frac{3}{16}$. **3.8.** $2{,}5\cdot 10^6$. **3.9.** $2^5 = 32$; 2^{10}. **3.10.** n^2; $6n^2$; $10n^2$. **3.12.** 1) 1; 2) 2; 3) 8. **3.14.** 1) 16; 4; 1; 125; 2) 49; 1; −27; −1; 3) $\frac{1}{25}$; $\frac{27}{64}$; $\frac{1}{36}$; $-\frac{8}{125}$; 4) 0,64; 0,81; −0,08; −0,000 01. **3.15.** 1) −10; 2) −64; 3) −41; 4) $\frac{49}{16}$. **3.17.** 1) 38; 2) 50; 3) 73; 4) 51. **3.18.** 1) 1; 2) −2; 3) 0; 4) −2. **3.19.** 1) $3^4 > 4^3$; 2) $4^3 = 2^6$; 3) $5^3 < 3^5$; 4) $6^3 > 9^2$; 5) 1^{19}, 6^{17}, 6^{18}; 6) $(-7)^{13}$, 0^{15}, $(-7)^{14}$; 7) $-(-3)^2$, $(-2)^5$, 2^3. **3.21.** 1) 9; 27; 81; 3^n; 2) $3m^{n-1}$. **3.22.** 1) −10; 2) −22; 3) −3.

§ 4

4.1. 1) 7; 2) 9; 3) 12; 4) 5; 5) 7; 6) 10. **4.3.** 1) 0,5; 2) 9; 3) 25; 4) 1; 5) 64; 6) 216.

4.6. 1) $\frac{1}{9}$; 2) $7\frac{1}{9}$; 3) $2\frac{1}{4}$; 4) $-5\frac{1}{3}$; 5) $0{,}2^4$; 6) $(-0{,}25)^3$. **4.7.** 1) a^8; 2) a^9; 3) b^{21}; 4) b^{20}; 5) c; 6) 1. **4.8.** 1) 25; 2) 64; 3) 343; 4) 3; 5) 9; 6) 2^{28}. **4.9.** 1) a^6; 2) b^{12}; 3) c^{20}; 4) $-d^{25}$; 5) a^{16}; 6) $-b^8$; 7) $-c^{12}$; 8) $-d^{35}$. **4.13.** 1) 4; 2) 2; 3) 2; 4) 5; 5) 6,9; 6) $10\frac{1}{3}$. **4.16.** 2) 1; 3) 1. **4.19.** 1) −128; 2) 729; 3) $(-0{,}1)^7$; 4) 10 000; 5) 16; 6) −10; 7) 256; 8) $(-0{,}1)^3$. **4.22.** 1) 8; 2) 1; 3) 3; 4) 5. **4.23.** 1) x^2; 2) x; 3) x^3; 3) x^4. **4.24.** 1) 1; 2) 27; 3) 1; 4) 0,2.

§ 5

5.2. 1) $10x^2y^3$; 2) $-48x^4y^2$; 3) $-10\,000a^4b^2$; 4) $20x^2y^6$; 5) $-80a^3b^4c^6$; 6) $-60a^7b^9$. **5.3.** 1) $9a^5b^5$; 2) $-27a^2b^2$; 3) $3ab^6$; 4) $-9a^8b^6$; 5) b; 6) −1. **5.11.** 1) $-64x^{15}$; 2) $-0{,}25x^{12}$; 3) $-x^{49}y^7$; 4) $x^{24}y^{24}$. **5.15.** 1) nk; $4nk$; 2) 500 000 г. о.; 2 000 000 г. о. **5.18.** 2) $(3b^4)\cdot(a^3)^2$; 3) $(9b^3)\cdot(ab)^2$; 4) $(a^4b^6)\cdot(5ab^3)^2$; 5) $(10a^3b^2)\cdot(4a^5b^7)^2$. **5.21.** 1) $10a^5$; −10; 2) $\frac{1}{4}a^4$; $\frac{1}{4}$; 3) $28a^5b^{10}$; −28; 4) $-a^{11}b^{12}$; 1. **5.23.** 1) $512a^{36}$; 2) $-64a^{51}$; 3) $\frac{64}{81}a^{22}$; 4) $1\frac{13}{36}a^{26}b^8$. **5.25.** 1) а) $(x^9)^2$; б) $(x^6)^3$; 2) а) $(x^6y^3)^2$; б) $(x^4y^2)^3$; 3) а) $(1000x^{21}y^{15})^2$; б) $(100x^{14}y^{10})^3$; 4) а) $(8x^{33}y^{24})^2$; б) $(4x^{22}y^{16})^3$. **5.26.** 1) $36x^9y$; 2) $x^{15}y^7$; 3) $90x^{13}y^{33}$; 4) $-70x^{21}y^{22}$. **5.28.** 1) $(ab^5)\cdot(6a^2b^4)^2$; 2) $(5a^9b^8)\cdot(3a^4b^6)^2$.

§ 6

6.10. 1) $2x$; 2) $6x$; 3) $16x^2-6a^2$; 4) $9x^2-8a^2$; 5) $4x^2+5ax$; 6) $9x^2+4ax$. **6.16.** 1) а) $3mn$; б) $6mn$; в) $9mn$; 2) 1800 дерев; 3) 240 кг. **6.19.** 1) $4x$; −40; 2) $2x^2$; 200; 3) $10x+9$; −91; 4) $-2x^2+7$; −193. **6.20.** 1) $2ab$; 2; 2) $6ab+a$; 2; 3) $7ab-20a^2b$; 3; 4) $-9ab-43ab^2$; 3.

§ 7

7.1. 1) $3x^3-12x^2+24x$; 2) $2x^3+10x^2-18x$; 3) $12x^2y-24xy^2-40xy$; 4) $-5x^2y+15xy^2-55xy$; 5) $12x^3y-3x^2y^4+36x^2y$; 6) $-6x^3y^3+14xy^4+30xy^3$. **7.4.** 1) 34; 2) 40; 3) 6; 4) 6. **7.5.** 5) −1; 6) 2. **7.6** 1) $2x^2+xy-y^2+2x-y$; 2) $-3x^2+2xy+y^2+6x+2y$; 3) $x^3+5x^2y-5y^2-xy-4x-20y$; 4) $-y^3-4xy^2+4x^2+xy-24x-6y$; 5) $-15x^3+10x^2y+8y^2-12xy+3x-2y$; 6) $15y^3-6xy^2-12x^2+30xy+2x-5y$. **7.8.** 1) $-\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) 12; 4) 4; 5) $\frac{5}{11}$; 6) $\frac{4}{7}$. **7.9.** 1) $x^3+13x^2+39x+27$; 2) $x^3+11x^2+26x+16$; 3) $x^3-4x^2-25x+28$; 4) $x^3-19x+30$; 5) $x^2y+3xy^2+x^2-6y^2+xy-2x-6y$; 6) $2x^2y+xy^2+6x^2-4y^2-5xy-24x-12y$. **7.10.** 1) $x(5x-10)$; $5x^2-10x$; 2) 1800 см². **7.11.** 1) а) $(10x+50)$ см, $15x$ см; б) $15x(10x+50)$ см²; 2) 22 500 см²; 3) 225 г. о. **7.12.** 99, 100, 101 років. **7.15.** 1) $2x^2+2x+8$;

2) $5x^3-30x^2+5x$; 3) $6x^5+3x^4-30x^2$; 4) $x^5-7x^4+3x^2-6x$. **7.16.** 1) ab; 2) a^2+3; 3) $7a^3-9ab-5b^2$; 4) $3a^2-7b^2$. **7.17.** 1) -13; 2) -2; 3) 4; 4) 34. **7.19.** 1) x^2+5x+4; 2) $x^2+7x+10$; 3) $x^2-11x+30$; 4) $x^2-9x+14$; 5) $-4x^2-9x-2$; 6) $-5x^2-16x-3$; 7) $4x^2+34x-18$; 8) $5x^2+29x-6$. **7.20.** 1) x^3+3x^2+2x+6; 2) $-x^3+5x^2-8x+40$; 3) $-x^3-x^2+9x+9$; 4) $-3x^4+7x^3+18x-42$; 5) $6x^2+x-1$; 6) $-12x^2+16x+3$; 7) $12x^2+23xy+10y^2$; 8) $14x^2-51xy+40y^2$. **7.21.** 1) $-\frac{4}{5}$; 2) -12; 3) $\frac{6}{5}$; 4) $\frac{1}{3}$.

§ 8

8.1. 1) $x\left(2x^2+3x+5\right)$; 2) $x^2\left(4x^3-7x-3\right)$; 3) $3x^2\left(x^4-2x^2+4\right)$; 4) $4x\left(x^3+3x-2\right)$; 5) $-7x\left(2+3x+9x^5\right)$; 6) $-9x\left(3-2x^4+5x^9\right)$. **8.2.** 1) $ab\left(7a^2+3b\right)$; 2) $ab\left(9b^2-5a^2\right)$; 3) $4ab^3\left(3a^2-b^2\right)$; 4) $2a^3b\left(a^3+9b^3\right)$; 5) $3ab(2b-3a+5)$; 6) $4ab\left(a^2+5b-2\right)$. **8.4.** 1) $10(x-3)(x+2)$; 2) $16(x+4)(1+2x)$; 3) $2y(2x+1)$; 4) $7y(3-4y)$; 5) $(x-3y)(2x-3)$; 6) $(x+y)(2x-5)$. **8.6.** 1) $(a+b)(2+a+b)$; 2) $(c+d)(c+d-3)$; 3) $(a+b)(5a+3b)$; 4) $(c+d)(5c+d)$; 5) $a(a+b)^2$; 6) $(a-b)^2(2a-b)$. **8.8.** 1) -2; 10; 2) 2; 5; 3) -3; 3; 4) -4; 4; 5) -10; 0,5; 6) $-0{,}5$; 6. **8.10.** 1) $y(2y-1)(2x+y)$; 2) $x^2(4-3x)(x+1)$; 3) $(y-1)(10x+y)$; 4) $\left(x^2+y\right)(11x-1)$; 5) $(3x+5y)(x-2)$; 6) $(y-3)(2x+7y)$. **8.13.** 1) 8; 2) $3a+9b+4c+2d$; 3) 90. **8.14.** 1) 5 учасників; 2) $11x$; $12y$; 3) $11x+12y$; 91. **8.15.** 1) $(x+2y)(2xy+y-3)$. **8.16.** 3) $3^{2n}\left(1-3^n\right)$; 2) $2^{n+2}\left(1+2^{n+4}\right)$. **8.18.** 1) $5y$; 2) $2x$; 3) $3x^4y$; 4) $18xy$; 5) x; 6) y^2. **8.19.** 1) $3b(a-3)$; 2) $4a(2+b)$; 3) $a(1-a)$; 4) $a^2\left(a^2+b\right)$; 5) $a^2b^4(13b-a)$; 6) $6a^3b^2\left(a^2+2b^2\right)$. **8.20.** 1) $(x+3)(a+2)$; 2) $(a-5)(7-x)$; 3) $(1-9x)\left(a^3+13\right)$; 4) $(x-6y)(y+5)$; 5) $(5x-y)(x-10)$; 6) $(2y-x+6)\left(xy-a^2\right)$. **8.21.** 1) 0; 4; 2) -1; 0; 3) 0; 2,5; 4) $-\frac{1}{3}$; 0; 5) -7; 5; 6) $\frac{2}{3}$; 7. **8.22.** 1) $(x-7)(x+3)$; 2) $(x-y)(y+8)$; 3) $(y-5)(y+1)$; 4) $(x+6)(x-10)$; 5) $(5-y)\left(x^2+4\right)$; 6) $(y-2)(5x-4y)$. **8.23.** 1) $(a+13)(a-4)$; 2) $(a+7)(a-2)$; 3) $(a-5)(a-1)$. **8.24.** $(5x-6)$ м. **8.25.** 1) 6 м; 2) жовтого 25, синього 21, білого 22. **8.26.** 1) $b^{4n}\left(1+b^{2n}\right)$; 2) $b^{n+1}\left(1-b^3\right)$.

§ 9

9.5. 1) x^2+3600; 3616; 2) x^2-2500; -2491; 3) $4xy$; 4; 4) $-4xy$, -4; 5) $25y^2$; 25; 6) $9x^2$; 9. **9.7.** 1) $\left(x^2+y^2\right)^2$; 2) $\left(x^3-y^3\right)^2$; 3) $\left(2x^3-y^2\right)^2$; 4) $\left(x^2+2y^3\right)^2$; 5) $\left(5x^3+3y^4\right)^2$; 6) $\left(3x^2-5y^6\right)^2$; 7) $\left(6x^4-\frac{1}{5}y^9\right)^2$; 8) $\left(4x^7+\frac{1}{3}y^5\right)^2$. **9.10.** 1) $56a-16$; 2) $60a-25$; 3) $-a^2-64$; 4) a^2+81; 5) a^2+a; 6) $a^2+0{,}4a$. **9.15.** $3(x+12)^2=3x^2+72x+432$. **9.16.** 1) $(3x+4)$ см; 2) $(9x+12)$ см. **9.20.** 1) x^2+6x+9; 2) $4x^2-4xy+y^2$; 3) $9x^2+30xy+25y^2$; 4) $16x^2-4xy+\frac{1}{4}y^2$. **9.21.** 1) n^6+2n^3+1; 2) $m^4-2m^2n^6+n^{12}$; 3) $25n^6+10n^3m^4+m^8$; 4) $\frac{1}{16}n^{10}-4n^5m^7+64m^{14}$. **9.22.** 1) 0; 2) x^2; 3) $16x^2-8xy+y^2$; 4) $24xy$. **9.24.** 1) $(x+b)^2$; 2) $(m-4n)^2$; 3) $(m+6n)^2$; 4) $\left(3m-n^3\right)^2$. **9.25.** 1) $-\left(x^2-y^2\right)^2$; 2) $-\left(x^3+3y^2\right)^2$; 3) $-\left(5x^6-3y^3\right)^2$; 4) $-\left(3x^8+\frac{1}{4}y^7\right)^2$. **9.26.** 1) -1; 2) 3; 3) -5; 4) $\frac{3}{4}$. **9.28.** 1) $(2y-5)$ см; 2) $(2y-5)^2$ см². **9.29.** 1) $(x-5)^2=-1$, коренів немає; 2) $(x+7)^2=-2$, коренів немає.

§ 10

10.1. 1) x^4-y^2; 2) x^2-y^6; 3) $4x^2-y^8$; 4) $x^{10}-9y^2$; 5) $16x^{12}-25y^{10}$; 6) $49x^{14}-36y^{14}$. **10.2.** 1) $\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{9}b^2$; 2) $\frac{4}{81}c^2-\frac{9}{25}d^2$; 3) $x^{14}-\frac{y^2}{36}$; 4) $\frac{x^2}{49}-y^{12}$. **10.5.** 1) m^2; 2) m^2; 3) $2m^2+10m$; 4) $2m^2+4m$; 5) $12m-72$; 6) $14m-2m^2$. **10.12.** 1) -40; 2; 2) -6; 40; 3) -9; 7; 4) -8; 10. **10.13.** 50 років. **10.14.** 1) $\pi(r+2)^2-\pi r^2$; 2) $4\pi(r+1)$; 3) $20\pi\approx 62{,}8$ м²; 4) 63. 2) $49n^2-m^8$. **8.** $x=-4$ або $x=5$. **10.16.** 2) -1; 1; 3) -5; 5. **10.17.** 1) $16x^2-y^2$; 2) $x^2-0{,}09y^2$; 3) $4x^2-25y^2$; 4) $0{,}01x^2-49y^2$. **10.18.** 1) x^6-y^2; 2) $9x^2-y^4$; 3) $x^{10}-\frac{y^2}{16}$; 4) $\frac{x^8}{25}-0{,}09y^{12}$. **10.10.** 1) $100y^2-1$; 2) $y^2+2yn+n^2-9$; 3) $9y^2-6yn+n^2-25$; 4) $64-y^2+8yn-16n^2$. **10.20.** 1) 9999; 2) 9775; 3) 80,99; 4) $99\frac{9}{25}$. **10.21.** 1) m^2; 2) $2m^2+6m$; 3) $10m-2m^2$; 4) $4m-32$. **10.22.** 1) $(x-14t)(x+14t)$; 2) $(7x-t)(7x+t)$; 3) $\left(x^2-\frac{t}{5}\right)\left(x^2+\frac{t}{5}\right)$; 4) $\left(\frac{2}{9}x-6t^7\right)\left(\frac{2}{9}x+6t^7\right)$. **10.23.** 1) $n(n+24)$; 2) $n(n-10)$; 3) $(n+3)(n+23)$; 4) $(5n-3)(5n+1)$. **10.24.** 1) -5; 5; 2) $-0{,}3$; 0,3; 3) -8; 9,2; 4) $-2{,}5$; 3,5. **10.25.** 1) -1; 1; 2) -3; 3; 3) -2; 2.

§ 11

11.3. 1) 8; 2) -1; 3) 40; 4) 50.
11.4. 1) $1-4m$; -35; 2) $1-9m$; -71; 3) $-343+2m^2$; -143; 4) $125-60m^2$; -115. **11.7.** 1) $(a+3)(a^2-6a+21)$; 2) $(6-b)(9-3b+b^2)$; 3) $2(x-1)(x^2-2x+4)$; 4) $2(y+3)(y^2+6y+36)$; 5) $x(x^2-15xy+75y^2)$; 6) $-y(108x^2+18xy+y^2)$. **11.8.** 1) а) x^3; б) $(x+1)^3$; в) $x^3+(x+1)^3=2x^3+3x^2+3x+1$; 2) $(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$. **11.10.** 2) 0; 3) 0; 4) 0. **11.12.** 1) $27x^3+y^3$; 2) x^3-64y^3; 3) $125x^3+343y^3$; 4) $\frac{1}{125}x^3-1000y^3$. **11.13.** 1) 27; 2) 90. **11.14.** 1) $-1+2m$; 13; 2) $216-16m^2$; -184. **11.15.** 1) $(x-7y)(x^2+7xy+49y^2)$; 2) $(6x+y)(36x^2-6xy+y^2)$; 3) $\left(\frac{1}{2}x-y\right)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}xy+y^2\right)$; 4) $(0{,}3x+5y)(0{,}09x^2-1{,}5xy+25y^2)$. **11.16.** 1) 13; 2) 30; 3) 0,25; 4) 76. **11.17.** 1) mx^3; 2) $m(x+1)^3$; 3) $2mx^3+3mx^2+3mx+m$.

§ 12

12.1. 1) $a^3(a-1)(a+1)$; 2) $a^5(1-a)(1+a)$; 3) $a^8(a-6)(a+6)$; 4) $a^7(5-a)(5+a)$; 5) $2a(7a^2-b)(7a^2+b)$; 6) $5b(3a^2-b)(3a^2+b)$. **12.2.** 1) $(x-3)(y+1)^2$; 2; 2) $(y+21)(x-3)^2$; 2,4; 3) $(x-5)(y+4)^2$; 90; 4) $(x+3)(y-5)^2$; 1600. **12.3.** 1) $(12-y)(2x+12+y)$; 2) $(13-2x-y)(13+y)$; 3) $(-9-2a)(2x-9+2a)$; 4) $(2x+15-2b)(15+2b)$; 5) $(8+3n)(2m+8-3n)$; 6) $(-10-3n)(2m-10+3n)$. **12.4.** 1) $(x-2y)(x+5)$; 2) $(x-3y)(x+4)$; 3) $(x-2)(x+2)(x+y)$; 4) $(x-3)(x+3)(x-y)$; 5) $(y-x)(y+x)(x+y+2)$; 6) $(x-y)(x+y)(x-y+3)$. **12.5.** 1) $(a+5)(a-1)(a+1)$; 2) $(8-a)(1-a)(1+a)$; 3) $(a-7)(1-a)(1+a)$; 4) $(a-3)(1-a)(1+a)$; 5) $(a-1)(a-2)(a+2)$; 6) $(a-2)(a-3)(a+3)$. **12.8.** 2) $(b^2-2b+2)(b^2+2b+2)$; 3) $(c^4-4c^2+8)(c^4+4c^2+8)$. **12.9.** $(b-7)(a+5)^2$; -20. **12.10.** 1) а) $(4+a)^2$; б) $(a+2)(a-2)=a^2-4$; в) $(4+a)^2-(a+2)(a-2)=4(5+a)$; 2) 80 м². **12.11.** 1) $3(x-1)(x+1)$; 2) $3(4-x)(4+x)$; 3) $2x^2(1-7x)(1+7x)$; 4) $0{,}7x^3(2x^7-3)(2x^7+3)$. **12.12.** 1) $x(x-1)^2$; 2) $3x(x+5)^2$; 3) $-7x(2x+1)^2$; 4) $-0{,}2x^3(5x-1)^2$. **12.13.** 1) $(40-x+y)(40+x-y)$; 2) $(7-2x-y)(7+2x+y)$; 3) $(9-x+3y)(9+x-3y)$;

4) $\left(0,2-x-\frac{1}{2}y\right)\left(0,2+x+\frac{1}{2}y\right)$. **12.14.** 1) 1; 2) 5; 3) 2; 4) 0,5. **12.15.** 1) $x_1=0$, $x_2=-1$; 2) $x=0$, $x=\pm6$; 3) $x=0$, $x=\pm2$; 4) $x=0$, $x=\pm3$. **12.16.** 1) $(x-5)(x+3)$; 2) $(x+5)(x-21)$; 3) $(x-3)(x-5)$; 4) $(x+5)(x-7)$; 5) $(x-2)(x+8)$; 6) $(3x-2)(3x+4)$. **12.17.** 1 м, 2 м, 6 м; 80 черепах. **12.18.** $(b+4)(a-6)^2$; 120.

РОЗДІЛ 2

§ 13

13.2. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так; 5) ні.
13.6. $s=7,5+0,15n$. **13.7.** 1) 3; 2) $g=\frac{1}{2}t$; 3) 24 хв. 13.8. 1) $y=0,3x+1,4$; 2) 2 м, 2,9 м, 4,4 м. **13.10.** 1) $y=2x$; 2) $y=x-5$; 3) $y=3x-1$; 4) $y=-2x+1$. **13.12.** 1) 2 °C; 2) 32 °C; 3) через 11 хв. **13.13.** 1) $y=2t+25$. **13.14.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) так. **13.17.** 1) 3; 4; 8 людей; 2) $y=x+2$. **13.19.** 1) 6; 2) 4; 3) $y=2x$; 4) 12; 5) 20.

§ 14

14.1. 1) $-6\leqslant x\leqslant 6$; $-4\leqslant y\leqslant 4$; $(-4;0)$, $(0;0)$, $(5;0)$; 2) $-4\leqslant x\leqslant 5$; $-4\leqslant y\leqslant 1$; $(3;0)$, $(0;-4)$; 3) $-4\leqslant x\leqslant 4$; $-3\leqslant y\leqslant 1$; $(2;0)$, $(0;-1)$; 4) $-1\leqslant x\leqslant 2$; $-3\leqslant y\leqslant 3$; $(0,5;0)$, $(0;1)$.
14.3. 1) $(-12;0)$, $(0;36)$; 2) $(-9;0)$, $(0;18)$; 3) $(-8;0)$, $(0;8)$; 4) $(7;0)$, $(0;7)$; 5) $(12;0)$, $(0;-3)$; 6) $(-10;0)$, $(0;2)$. **14.4.** 1) -3; -1; 3; 5; 2) -15; -7; 1; 9. **14.7.** Порожній басейн наповнюють водою, а потім знов спорожнюють. **14.8.** 1) 400 м; 300 м; 2) 9 хв; 3) 600 м, 3 хв. **14.9.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **14.10.** 1) а) $y=-1$, $y=1$; б) $x=0$, $x=4$; 2) а) $y=1$, $y=-2$; б) $x=4$, $x=-4$; 3) а) $y=0$, $y=-2$; б) $x=-6$ або $x=4$; $x=-4$ або $x=2$; 4) а) $y=-2$, $y=4$; б) $x=-5$; $x=-2$ або $x=6$.
14.11. 1) а) -4; -2; 1; 4; б) 3; 2) а) $-4\leqslant x\leqslant 1$; б) $-1\leqslant y\leqslant 4$; в) $(-3;0)$, $(0;3)$; 3) а) $-2\leqslant x\leqslant 5$; б) $-2\leqslant x\leqslant 3$; в) $(-1;0)$; $(4;0)$; $(0;-2)$; 4) а) $-5\leqslant x\leqslant 5$; б) $-3\leqslant y\leqslant 3$; в) $(-4;0)$, $(4;0)$, $(0;-1)$. **14.12.** 1) 60 хв; 2) на 700 м; 3) 400 м; 4) 10 хв; 5) друга, на 5 хв; 6) 700 м. **14.13.** 1) 3; 9; 21; 33; 2) 3; 7; 15; 23. **14.15.** $y=2x-2$.

§ 15

15.1. 1) $y(0)<y(3)$; 2) $y(0)<y(5)$; 3) $y(-3)>y(6)$; 4) $y(-6)>y(2)$; 5) $y(-1)>y(0)$; 6) $y(-2)<y(0)$. **15.2.** 1) $(0;11)$, $(-11;0)$; 2) $(0;14)$, $(14;0)$; 3) $(0;-60)$, $(15;0)$; 4) $(0;70)$, $(-14;0)$; 5) $(0;-8)$, $(-16;0)$; 6) $(0;-6)$, $(-18;0)$.
15.3. 1) $y=5x$; 2) $y=-\frac{x}{4}$; 3) $y=3$; 4) $y=-1$.
15.4. 1) I, III; 2) II, IV; 3) I, II; 4) I, III; 5) II, IV; 6) III, IV; 7) I, II, III; 8) I, III, IV. **15.5.** 1 і 6; 3 і 7. **15.6.** 1) $(-2;2)$; 2) $(1;-1)$; 3) $(2;1)$; 4) $(-3;1)$; 5) $(-1;-3)$; 6) $(4;-2)$. **15.7.** 1) 662 г. о.; 2) 21 г. о. **15.8.** 1) 100м; 2) 2 хв; 3) 200 м; 4) 50 м/хв. **15.9.** Прямі перетинаються.
15.10. 1) а) 3; 5; б) -6; -3; в) так; 2) а) 0; -1; б) 6; 0; в) ні; 3) а) 6; -2; б) 2,25; 1,5; в) так; 4) а) 7; 7,4; б) -50; -35; в) ні. **15.12.** 1) $y=-3x$; 2) $y=-\frac{x}{5}$; 3) $y=\frac{x-4}{4}$; 4) $y=\frac{3x}{5}-\frac{4}{5}$.
15.13. 1) $b=7$; 2) $b=14,75$; 3) $k=-6$; 4) $k=-11$.
15.14. 1) 436 г. о.; 2) 54 г. о. **15.15.** 1) 300 м; 2) 3 хв; 3) 400 м; 4) 100 м/хв.

РОЗДІЛ 3

§ 16

16.3. 1) $x=-8\frac{1}{3}$; 2) $x=26\frac{2}{3}$; 3) $x=-360$; 4) $x=140$; 5) $x=16$; 6) $x=-50$. **16.4.** 1) $x=26$; 2) $x=12$; 3) $x=-8$; 4) $x=-\frac{8}{3}$; 5) $x=2\frac{3}{7}$; 6) $x=\frac{1}{7}$. **16.5.** 1) $y=-9$; 2) $y=1$; 3) $y=18$; 4) $y=15$; 5) $y=13$; 6) $y=6$.
16.6. 1) $5x=120$; 2) $x-20=50$; 3) $x+\frac{x}{3}=48$; 4) $x+(x+18)=46$; 5) $8x=88$; 6) $100x=150$.
16.7. 1) $x=18$; 2) $x=-14$; 3) $x=8,25$; 4) $x=3\frac{1}{3}$; 5) $x=2,4$; 6) $x=22,5$. **16.8.** 1) $x=-0,6$; 2) $x=0,4$; 3) $x=\frac{12}{13}$; 4) $x=-12$; 5) $x=17\frac{2}{3}$; 6) $x=5\frac{3}{4}$.
16.9. 1) $x_1=-1,5$; $x_2=6$; 2) $x_1=-7$; $x_2=2,5$; 3) $x_1=-6,5$; $x_2=0$; $x_3=9$; 4) $x_1=-8$; $x_2=0$; $x_3=7,5$; 5) $x_1=-6,4$; $x_2=-5$; $x_3=5$; 6) $x_1=-7$; $x_2=7$; $x_3=8,1$. **16.10.** 1) $x_1=-9$; $x_2=-4$; 2) $x_1=8$; $x_2=11$; 3) $x_1=1$; $x_2=7$; 4) $x_1=-2$;

$x_2=5$; 5) $x_1=-3$; $x_2=8$; 6) $x_1=4$; $x_2=19$. **16.11.** 1) $x=-2a$; 2) $x=4a+3$; 3) $x=5a+3$; 4) $x=-6a-36$; 5) $x=5-5a$; 6) $x=5a+10$. **16.12.** 1) $x_1=-17$; $x_2=17$; 2) $x_1=-34$; $x_2=34$; 3) $x_1=-11$; $x_2=9$; 4) $x_1=-2$; $x_2=0$; $x_3=4$; $x_4=6$; 5) коренів немає; 6) x — довільне число. **16.13.** 1) $b=16$; 2) $b=-5{,}5$; 3) $b=9$; 4) $b=-17$; 5) таких b не існує; 6) таких b не існує. **16.14.** Через 20 с. **16.15.** Через 12 хв. **16.16.** Через 0,6 год. **16.17.** Через 0,25 год = 15 хв. **16.18.** 1) 10 атракціонів; 2) вистачить. **16.19.** 33 замовлення. **16.20.** 16 завдань. **16.21.** 124 пари. **16.22.** 100 г. **16.23.** 300 г. **16.26.** 1) $x=11$; 2) коренів немає; 3) x — довільне число; 4) $x=-20$; 5) x — довільне число; 6) коренів немає. **16.27.** 1) $x=23$; 2) $x=-11$; 3) $x=-28$; 4) коренів немає. **16.28.** 1) $x=-6$; 2) $x=0$; 3) $x=288$; 4) $x=-24$. **16.29.** 1) $x=19$; 2) $x=0$; 3) $x=-6{,}5$; 4) $x=1\frac{2}{3}$. **16.30.** 1) 30; 2) 20; 3) 35; 4) −40; 5) 14,5; 6) 39,5. **16.31.** 1) $x_1=-6, x_2=6$; 2) $x_1=-8, x_2=8$; 3) $x_1=-20, x_2=6$; 4) $x_1=-9, x_2=12$. **16.32.** $12+4x=80$; $x=17$. **16.33.** Через 2,4 хв. **16.34.** Через 0,5 год. **16.35.** 462 та 420 камер. **16.36.** 300 г.

§ 17

17.3. а) 1) $x=y+12$; 2) $x=-y+10$; 3) $x=5y+20$; 4) $x=-0{,}5y+6$; 5) $x=-\frac{4}{3}y+8$; 6) $x=\frac{2}{5}y+2$; б) 1) $y=x-12$; 2) $y=10-x$; 3) $y=0{,}2x-4$; 4) $y=-2x+6$; 5) $y=-\frac{3}{4}x+6$; 6) $y=\frac{5}{2}x-5$. **17.4.** 1) $y=4x-6$; 2) $y=3x+8$; 3) $y=3x-7$; 4) $y=8-4x$; 5) $y=1{,}25x-4{,}5$; 6) $y=-0{,}4x-2{,}2$. **17.5.** 1), 4). **17.6.** 1) $y=-5$; 2) $x=6$; 3) $x=7$; 4) $y=2$; 5) $y=-17$; 6) $x=1$. **17.7.** 1) $(10;0)$, $(0;4)$; 2) $(6;0)$, $(0;14)$; 3) $(2;0)$, $(0;-16)$; 4) $(2;0)$, $(0;-60)$; 5) $(-8;0)$, $(0;-6)$; 6) $(-5;0)$, $(0;-8)$. **17.10.** 1–А, 2–Д, 3–Б. **17.11.** $3x+5y=235$. **17.12.** $7x+6y=142$; $(10;12)$. **17.13.** 1) $(7;0)$; 2) $(0;10)$. **17.14.** 1) $x+5y=0$; 2) $x+2y=0$. **17.15.** 1) $y=4$; 2) $y=-3$; 3) $x=2$; 4) $x=-5$. **17.16.** 1) Графіком рівняння є вісь абсцис; 2) графіком рівняння є вісь ординат. **17.17.** 1) −3; 2) 30; 3) 2. **17.18.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) так. **17.19.** 1) $(8;0)$; 2) $(1;7)$. **17.20.** 1) $y=8-3x$; 2) $y=5+x$. **17.21.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так. **17.23.** $45x+60y=390$. **17.24.** $2x+3y=170$, обидві пари. **17.25.** 1) $y=6$; 2) $x=-3$.

§ 18

18.1.
1) $a=-2$, $b=4$; 2) $a=9$, $b=5$; 3) $a=2$, $b=6$; 4) $a=20$, $b=-14$; 5) $a=17$, $b=-15$; 6) $a=1$, $b=22$. **18.2.** 1) а) одна; б) жодної; в) безліч; 2) а) $\begin{cases}x-2y=1,\\x+2y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-4y=10,\\x-2y=5;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-2y=1,\\x-2y=5.\end{cases}$

18.3. 1) $(-2;-2)$; 2) $(3;-3)$; 3) $(-1;2)$; 4) $(-1;-2)$; 5) $(3;1)$; 6) $(1;-3)$. **18.4.** 1) Один, $(1;0)$; 2) безліч; 3) жодного; 4) жодного; 5) безліч; 6) безліч. **18.5.** 2) $(1;3)$; 3) $y+x=4$. **18.6.** 2) Траєкторії не перетинаються. **18.7.** 1) Наприклад, $(6;4)$, $(0;-2)$; 2) так. **18.8.** 1) Наприклад, $(-1;0)$, $(1;-2)$; 2) так. **18.9.** 1) Так, $a=-3$; 2) ні. **18.10.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так. **18.11.** 1) $(5;2)$; 2) $(-2;-2)$; 3) $(-2;3)$; 4) $(-1;-3)$; 5) $(3;2)$; 6) $(4;-2)$. **18.12.** 1) Один; 2) безліч; 3) жодного; 4) безліч; 5) жодного, 6) безліч. **18.13.** 1) Ні; 2) так, $a\neq 3$. **18.14.** 2) $(1;2)$; 3) $y-2x=0$. **18.15.** 2) Траєкторії неперетинаються; 3) $y-x=1$. **18.16.** 1) а) жодної; б) безліч; в) одна; 2) а) $\begin{cases}x+2y=-3,\\2x-3y=8;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x+2y=4,\\x+2y=-3;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+2y=4,\\2x+4y=8.\end{cases}$

§ 19

19.1. 1) $(-2;-10)$; 2) $(-14;-2)$; 3) $(1;3)$; 4) $(1;1)$; 5) $(0;3)$; 6) $(2;0)$. **19.2.** 1) $(7;-6)$; 2) $(8;-7)$; 3) $(5;1)$; 4) $(4;2)$; 5) $(6;1)$; 6) $(-1;2)$. **19.3.** 1) $(-2;7)$; 2) $(-1;-1)$; 3) $(1;-3)$; 4) $(1;4)$; 5) $(8;1)$; 6) $(9;1)$. **19.4.** 1) $(6;4)$; 2) $(6;15)$; 3) $(7;5)$; 4) $(4;1)$; 5) $(-4;0)$; 6) $(0;-1)$. **19.5.** 1) $(12;1)$;

2) $(3;3)$; 3) $(-5;8)$; 4) $(-8;6)$; 5) $(5;2)$; 6) $(1;6)$. **19.6.** 1) $y=2$; 2) $y=-1$; 3) $y=x-6$; 4) $y=-x+4$; 5) $y=-2x+7$; 6) $y=-3x-8$. **19.7.** 1) $a=5$; 2) $a=-17$; 3) $a=3$; 4) $a=-4$; 5) такого значення a не існує; 6) такого значення a не існує. **19.8.** 1) $x=2$, $y=1$, $z=-1$; 2) $x=1$, $y=-4$, $z=2$; 3) $x=3$, $y=-2$, $z=1$. **19.9.** $\begin{cases}x+y=65,\\5x+4y=285;\end{cases}$ $x=25$, $y=40$. **19.10.** $x=120$, $y=240$. **19.11.** 1) $(4;5)$; 2) $(7;7)$; 3) $(8;24)$; 4) $(99;-47)$; 5) $(4;10)$; 6) $(-2;-6)$. **19.12.** 1) $(5;-1)$; 2) $(2;-4)$; 3) $(8;-1)$; 4) $(0;5)$; 5) $(10;-8)$; 6) $(-5;-9)$. **19.13.** 1) $(3;18)$; 2) $(-20;10)$; 3) $(27;18)$. **19.14.** 1) $y=2x+7$; 2) $y=x-6$; 3) $y=3x+1$; 4) $y=5-2E$. **19.15.** $\begin{cases}x+y=32,\\20x+15y=565;\end{cases}$ $x=17$, $y=15$. **19.16.** $x=86$, $y=258$. 19.17. $(3;2;-1)$.

§ 20

20.1. 1) $(10;-3)$; 2) $(-4;10)$; 3) $(10;5)$; 4) $(5;-6)$. **20.2.** 1) $(1;6)$; 2) $(-10;4)$; 3) $(8;6)$; 4) $(7;-12)$; 5) $(-8;15)$; 6) $(-6;9)$. **20.3.** 1) $(2;1)$; 2) $(1;2)$; 3) $(-3;1)$; 4) $(-1;-3)$; 5) $(1;1)$; 6) $(1;-1)$. **20.4.** 1) Не перетинаються; 2) не перетинаються; 3) перетинаються в точці $(2;1)$; 4) перетинаються в точці $(1;-3)$; 5) перетинаються в точці $(3;2)$; 6) перетинаються в точці $(-2;5)$. **20.5.** 1) $y=x+3$; 2) $y=-x+2$; 3) $y=-0{,}5x+3$; 4) $y=\frac{1}{3}x-2$. **20.6.** $\begin{cases}4x+3y=180,\\3x+4y=170;\end{cases}$ $x=30$, $y=20$. **20.7.** $x=20$, $y=12$. **20.8.** 1) $(4;1)$; 2) $(3;5)$; 3) $(-4;2)$; 4) $(-1;6)$; 5) $(4;-6)$; 6) $(3;-2)$. **20.9.** 1) $(2;-1)$; 2) $(-3;1)$; 3) $(1;-4)$; 4) $(-1;-6)$; 5) $(2;3)$, 6) $(8;-4)$. **20.10.** 1) $(4;0)$; 2) $(1;1)$; 3) $(-1;2)$; 4) $(2;3)$; 5) $(5;-3)$, 6) $(0{,}5;-5)$. **20.11.** 1) $y=-x-2$; 2) $y=x-3$; 3) $y=2x+4$; 4) $y=-0{,}5x-3$. **20.12.** $x=380$, $y=420$. **20.13.** $x=6$, $y=2$.

§ 21

21.1. 16 см, 64 см та 64 см. **21.2.** 20 г і 60 г. **21.3.** Перший — 18 шт, другий — 24 шт. **21.4.** У першій 18 л, у другій 54 л. **21.5.** Перший 56 тис. г. о., другий 87 тис. г. о. **21.6.** 180 кг і 210 кг. **21.7.** 20 км/год, 10 км/год. **21.8.** 120 км/год і 80 км/год. **21.9.** 13 і 91. **21.10.** 54. **21.11.** Ціна пари балістичних окулярів 250 г. о., ціна пари тактичних рукавичок 400 г. о. **21.12.** 0,7 м; 1 м. **21.13.** 30 г 12%-го сплаву і 50 г 24%-го сплаву. **21.14.** 1) 260 г. о.; 2) 216 г. о. **21.15.** Швидкість квадроциклістки 36 км/год, велосипедиста — 12 км/год. **21.16.** Швидкість Олени 18 км/год, Миколи — 12 км/год. **21.17.** Ціна бронепластини 1200 г. о., ціна штурмового рюкзака 600 г. о. **21.18.** 4800 грн, 3850 грн.

Повторення матеріалу, що вивчався в 7 класі

1. 1) 5; 2) 4; 3) −2; 4) 10; 5) −23; 6) 50; 7) 23; 8) −2. **2.** 1) а) 20 %; б) 50 %; 2) $k>n$. **3.** 1) 5; 2) 12; 3) 8; 4) 14; 5) $4a$; 6) a; 7) 0; 8) 0. **4.** 1) а) $3a$; б) $4b$; в) $3a+4b$; 2*) не достатньо. **5.** 1) −63; 2) 24; 3) −24; 4) −54; 5) 9; 6) 1; 7) 0,0025; 8) 0,0001. **6.** 1) а) 8 Гб; б) 32 Гб; в) 128 Гб; г) 2^m Гб; 2) так, настане. **7.** 1) 4; 2) 9; 3) 1; 4) 1; 5) 4; 6) 25; 7) 0,5; 8) 27. **8.** 1) $7{,}6\cdot10^{10}$; 2) В; 3) 5; 4) неправильно. **9.** 1) $36a^8$; 2) $30a^{10}$; 3) $5a^{20}$; 4) $2a^{16}$; 5) $2a^{23}$; 6) $10a^{14}$; 7) $-8a^6b^{20}$; 8) $3a^{23}b^{12}$. **10.** 1) а) $x^{18}y^{21}$; б) $-x^{45}y^{45}$; в) $125x^{18}y^{18}$; 2) а) так, б) так, в) ні, г) ні. **11.** 1) 5; 2) 1; 3) 20; 4) 3; 5) $2x-2$; 6) $10y-5$; 7) $4x^2-2y-12$; 8) $6x^2-7y+17$. **12.** 1) $7x+9y$; 2) на $3x+3y$; 3) $x=150$; 4*) у 2,5 разу; 5*) на 100 %. **13.** 1) $3x^3-18x^2+12x$; 2) $4x^3-28x^2-4x$; 3) $-x^2+17x-66$; 4) $-x^2+3x+108$; 5) $x^3-10x^2+3x-30$; 6) $x^3-14x^2+5x-70$; 7) x^3-3x+2; 8) x^3-5x^2+7x-2. **14.** 1) $2x^2+10x$; 2) $6x^2$; 3) $8x^2+10x$; 4*) 10. **15.** 1) $a(a^4+3)$; 2) $a(5-a)$; 3) $ab(4a-1)$; 4) $ab(1+3b)$; 5) $(a+8)(5-b)$; 6) $(b-3)(a+2)$; 7) $(a-b)(a^2+4)$; 8) $(ab+3)(b^2+1)$. **16.** 1) $10x+4$; 2) 7. **17.** 1) $4x^2+4xy+y^2$;

2) $x^2+6xy+9y^2$; 3) x^6-14x^3+49; 4) $36-12y^4+y^8$; 5) $x^{10}+2x^5y^2+y^4$; 6) $x^{14}+2x^7y^3+y^6$; 7) $16x^{20}-4x^{10}y^6+0{,}25y^{12}$; 8) $0{,}04x^{18}-4x^9y^8+100y^{16}$.

18. 1) $(3+x)^2$; 2) $(x-1)^2$; 3) $(m-n)^2$; 4) $(p+q)^2$; 5) $(y-6)^2$; 6) $(7+y)^2$; 7) $(5a+2)^2$; 8) $(4a-10)^2$. **19.** 1) $2x+5$; 2) 3; 3*) квадрат. **20.** 1) $(6m-n)(6m+n)$; 2) $(m-4n)(m+4n)$; 3) $(9m-7n)(9m+7n)$; 4) $(8m-5n)(8m+5n)$; 5) $\left(\frac{n}{2}-11m\right)\left(\frac{n}{2}+11m\right)$; 6) $\left(12n-\frac{m}{3}\right)\left(12n+\frac{m}{3}\right)$; 7) $\left(0{,}6m-n^4\right)\left(0{,}6m+n^4\right)$; 8) $\left(m^5-0{,}4n\right)\left(m^5+0{,}4n\right)$. **21.** 1) x^2-9 см; 2*) 5 см. **22.** 1) $(11a-b)\left(121a^2+11ab+b^2\right)$; 2) $(a-12b)\left(a^2+12ab+144b^2\right)$; 3) $(2a+b)\left(4a^2-2ab+b^2\right)$; 4) $(a+3b)\left(a^2-3ab+9b^2\right)$; 5) $(15a-4b)\left(225a^2+60ab+16b^2\right)$; 6) $(5a-16b)\left(25a^2+80ab+256b^2\right)$; 7) $\left(0{,}1a+\frac{1}{3}b\right)\left(0{,}01a^2-\frac{1}{30}ab+\frac{1}{9}b^2\right)$; 8) $\left(\frac{1}{2}a+0{,}6b\right)\left(\frac{1}{4}a^2-0{,}3ab+0{,}36b^2\right)$.

23. $2y$ м. **24.** 1) −1; 1; 2) −1; 1; 3) 0; −4; 4; 4) 0; −5; 5; 5) 0; −2; 6) 0; −3; 7) 0; −2; 2; 8) 0; −1; 1. **25.** $V=x^3-343$. **26.** 1) 12; 36; 2) $N=12t$; 3) 200. **27.** 1) $M=3n$; 2) $y=x-8$; 3) $T=t+300$. **28.** 1) а) −7; б) 5; 2) а) 36; б) − 5; 3) а) −3; б) −3. **29.** 1) 2; 2) −4; 3) $-5\leqslant x\leqslant 2$; 4) $-4\leqslant y\leqslant 4$. **30.** 1) 20 %; 2) 30 %; 3) 40 хв; 4) 120 хв = 2 год. **31.** 1) $b=7$; 2) $b=10$; 3) $b=11{,}5$; 4) $b=-18{,}8$; 5) $k=5$; 6) $k=4$; 7) $k=-5$; 8) $k=-5$. **32.** 1) 33; 2) 4; 3) коренів немає; 4) коренів немає; 5) x — довільне число; 6) x — довільне число; 7) −15; 8) 14. **33.** 1170 звернень. **34.** 1) Належить; 2) належить; 3) належить; 4) належить; 5) не належить; 6) належить; 7) належить; 8) не належить. **35.** 1) Один розв'язок; 2) один розв'язок; 3) безліч розв'язків; 4) безліч розв'язків; 5) жодного розв'язку; 6) жодного розв'язку; 7) безліч розв'язків; 8) жодного розв'язку.

36. 1) $(24;29)$, 2) $(-4;12)$; 3) $(5;-1)$; 4) $(-2;3)$; 5) $(1;2)$; 6) $(1;3)$; 7) $(2;-2)$; 8) $(1;1)$. **37.** 1) $(5;7)$, 2) $(8;3)$; 3) $(1;5)$; 4) $(3;1)$; 5) $(6;2)$; 6) $(7;1)$; 7) $(-1;10)$; 8) $(4;-1)$. **38.** $\begin{cases}x+y=200,\\0{,}3x+0{,}1y=24;\end{cases}$ $x=20$, $y=180$. **39.** $\begin{cases}8x+10x=10y,\\60x=60+30y;\end{cases}$ $x=10$, $y=18$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аналітичний спосіб задання функції 133
Аргумент 131

Вираз алгебраїчний 17
— зі змінною (буквений) 17
— раціональний 18
— цілий раціональний 18
— числовий 17
Вирази тотожні 25
Властивості степеня 41–43, 45–46
Виділення квадрата двочлена 123
Віднімання многочленів 67
Властивості рівнянь 173

Графік лінійного рівняння з двома змінними 191
— рівняння з двома змінними 191
— функції 147
Графічний спосіб задання функції 148
— — розв'язування системи лінійних рівнянь із двома змінними 203

Доведення тотожностей 28
Додавання многочленів 66

Значення функції (функція) 131
Змінна 17

Кутовий коефіцієнт 160

Лінійна функція 160
Лінійне рівняння з двома змінними 188
— — з однією змінною 174

Математична модель 178, 228
Математичне моделювання 228
Многочлен 62
— стандартного вигляду 65
Множення многочленів 75
— одночлена на многочлен 73
— одночленів 53

Область визначення функції 150
— значень функції 150
Одночлен 52
— стандартного вигляду 52
Описовий спосіб задання функції 134

Піднесення одночлена до степеня 53
Подібні члени многочлена 63
Пряма пропорційність 162

Рівняння 173
— з модулем 177
Розв'язок рівняння 173
— — з двома змінними 188
— системи рівнянь із двома змінними 202
Розв'язування текстових задач за допомогою лінійних рівнянь з однією змінною 178
— — — — — системи лінійних рівнянь із двома змінними 228
Розкладання многочлена на множники 82, 85
— — — — за допомогою формул скороченого множення 96, 104, 113, 119
Розкриття дужок 27

Система лінійних рівнянь із двома змінними 201
Спосіб винесення спільного множника за дужки 82
— групування 85
— додавання розв'язування системи лінійних рівнянь із двома змінними 223
— підстановки розв'язування системи лінійних рівнянь із двома змінними 212
Способи задання функції 132–134, 148
— розв'язування систем лінійних рівнянь із двома змінними 203, 212, 223
Степінь 33
— многочлена стандартного вигляду 65
— одночлена 52

Табличний спосіб задання функції 133
Тотожне перетворення виразу 26
Тотожність 25
Точки перетину графіка з осями координат 149

Формули квадрата двочлена 92
— різниці квадратів 104
— скороченого множення 94, 104, 112
— суми та різниці кубів 113
Функція 131

АЛГЕБРА 7

Підручник відрізняє наявність таких матеріалів:

- Тексти і задачі для мотивації навчальної діяльності
- Приклади з докладним покроковим розв'язанням, алгоритми дій
- Тренувальні вправи, різнорівневі завдання
- Вправи на первинне закріплення вивченого матеріалу
- Задачі практичного змісту
- Логічні задачі
- Домашні завдання з порадами щодо виконання
- Тематичне узагальнення і систематизація матеріалу
- Приклади використання комп'ютерних програм для побудов та обчислень
- Корисні пам'ятки та підказки, цікаві факти

Електронний додаток містить:

- Самостійні та контрольні роботи в інтерактивній формі з автоматичною перевіркою
- Додатковий теоретичний матеріал для тих, хто цікавиться алгеброю