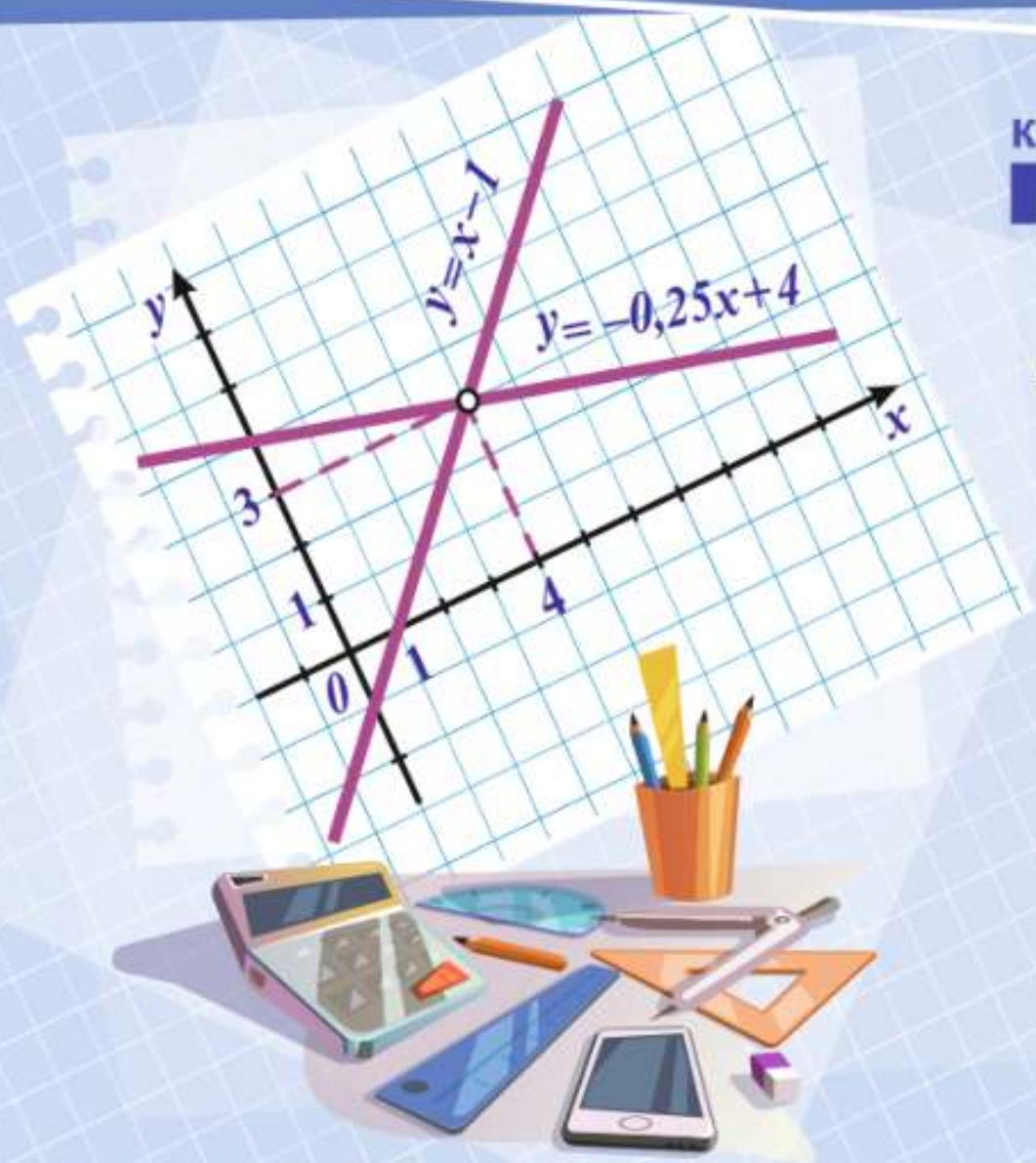
Василь Кравчук, Марія Підручна, Галина Янченко

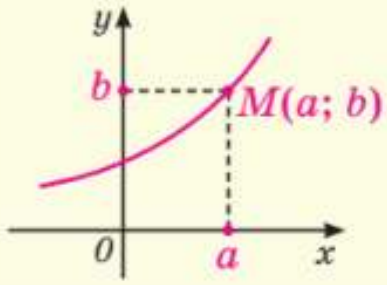
АЛГЕБРА

клас **7**



Видавництво «Підручники і посібники»

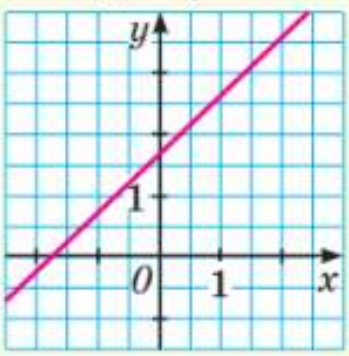
ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ



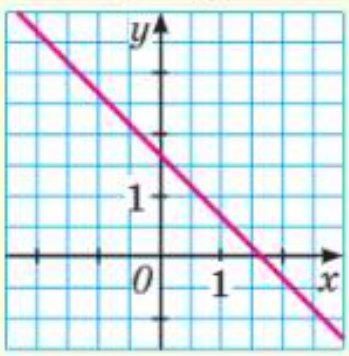
Точка $M(a; b)$ належатиме графіку функції тоді й тільки тоді, коли значення функції для $x = a$ дорівнює b.

$y = kx + b$ — лінійна функція

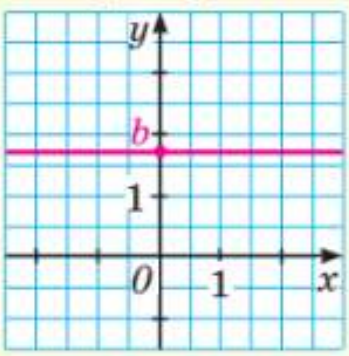
$k > 0$



$k < 0$



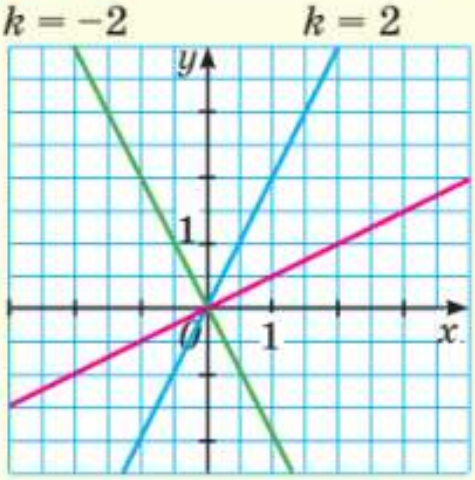
$k = 0$



Графіки — прямі

$y = kx$, $k \neq 0$ — пряма пропорційність

$k = -2$ $k = 2$



$k = 0{,}5$

Графіки — прямі

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ

$ax = b$ — лінійне рівняння

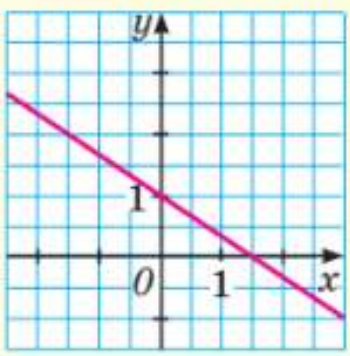
Кількість коренів лінійного рівняння

Рівняння	Коефіцієнти	Корені
$ax = b$	$a \neq 0$	$\frac{b}{a}$ — єдиний корінь
	$a = 0$ і $b \neq 0$	коренів немає
	$a = 0$ і $b = 0$	коренем є будь-яке число (рівняння має безліч коренів)

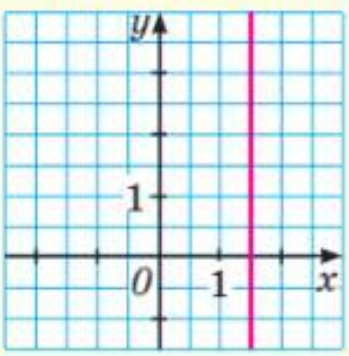
ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

$ax + by = c$ — лінійне рівняння із двома змінними

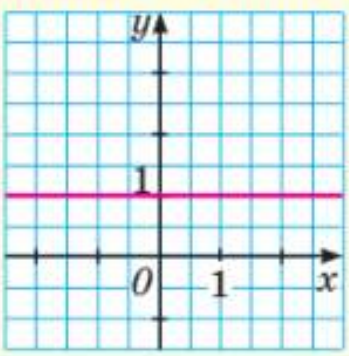
Якщо $a \neq 0$ або $b \neq 0$, то графіком рівняння є пряма



$2x + 3y = 3$

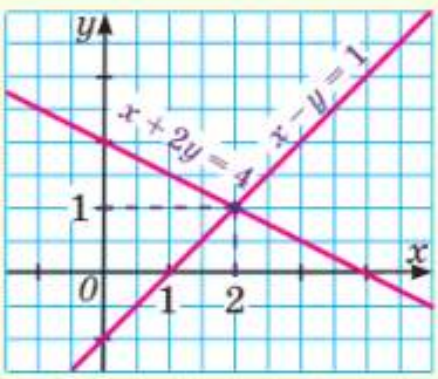


$2x + 0y = 3$



$0x + 3y = 3$

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ



$$\begin{cases} x + 2y = 4; \\ x - y = 1. \end{cases}$$

(2; 1) — розв'язок системи рівнянь.

Василь Кравчук
Марія Підручна
Галина Янченко

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Тернопіль
Видавництво «Підручники і посібники»
2024

УДК 51(075.3)
К77

Підручник створено за модельною навчальною програмою «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, М. П. Пихтар, Б. В. Рубльов, В. В. Семенов, М. С. Якір)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Кравчук В.
К77 Алгебра: підр. для 7 класу закл. загал. серед. освіти. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2024. — 256 с.
ISBN 978-966-07-4116-4

УДК 51(075.3)

ISBN 978-966-07-4116-4

© Кравчук В., Підручна М., Янченко Г., 2024

ШАНОВНІ СЕМИКЛАСНИКИ І СЕМИКЛАСНИЦІ!

Ви розпочинаєте вивчення однієї з основних математичних дисциплін — алгебри. Сподіваємося, що цей підручник допоможе вам не загубитися в лабіринтах цієї поки що не пізнаної науки.

Матеріал, який ви вивчатимете, об'єднано в три розділи, що містять шість параграфів, які складаються з пунктів.

Кожний пункт розпочинається викладом теоретичного матеріалу.

Цим значком виділено означення, твердження та правила пункту, які потрібно зрозуміти і запам'ятати.

Звертайте також особливу увагу на текст, наведений на зеленому тлі. Курсивом у теоретичному матеріалі виділено слова, які означають математичні терміни.

Деякі пункти містять додатковий матеріал, поданий під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше».

Щоб зрозуміти, запам'ятати й систематизувати матеріал, дайте відповіді на запитання, уміщені наприкінці теоретичної частини пункту.

Після теоретичного матеріалу розміщено рубрику ***«Приклади розв'язання вправ»***. Вона допоможе ознайомитися з основними видами вправ, способами їх розв'язування та навчить правильно записувати розв'язання. Початок і кінець розв'язання кожного завдання позначено значком (•).

Прочитавши теоретичний матеріал і поміркувавши над зразками розв'язань задач, варто спочатку розв'язати ***усні*** вправи та простіші задачі, а відтак переходити до складніших.

Значками ①, ②, ③ і ④ виділено завдання, які відповідають початковому, середньому, достатньому і високому рівням навчальних досягнень. Завдання для роботи в парі позначено значком , а для роботи в групі — значком .

Якщо під час розв'язування якоїсь задачі ви натрапите на труднощі, перегляньте матеріали рубрики «Приклади розв'язання вправ», а також скористайтеся схемами, підказками, порадами.

Для самостійної роботи вдома рекомендовано задачі, номери яких виділено синім кольором (наприклад, **175**).

Перевірити свої знання й уміння розв'язувати задачі можна за допомогою інтерактивних завдань. До такого завдання в пункті бажано звертатися тоді, коли опрацюєте ті задачі пункту, які йому передують.

Рубрика «Поміркуйте» пов'язана з особливим аспектом математичної підготовки. Основним для розв'язання задач цієї рубрики є вміння виходити з нестандартних ситуацій.

Завершує матеріал пункту рубрика «Вправи для повторення», яка допоможе періодично повторювати основні види вправ і готуватися до вивчення нових тем.

Деякі пункти містять рубрику «Цікаво знати», з якої ви можете дізнатися про походження математичних понять і термінів, а також про внесок українських учених у розвиток математичної науки.

Свої знання можна перевірити, розв'язавши ***завдання для самоперевірки***, уміщені наприкінці кожного параграфа.

Вивчайте алгебру із задоволенням.

Бажаємо успіхів!

Інтерактивне завдання 1

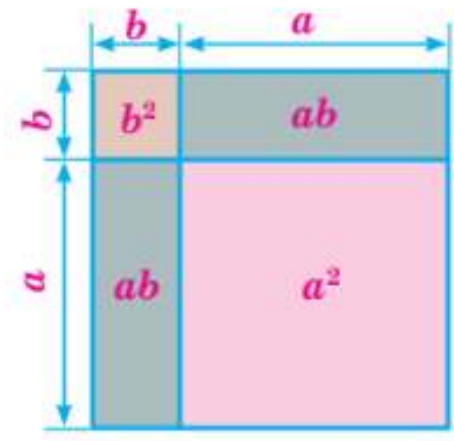
Повторення курсу математики 5 і 6 класів

Розділ I
ЦІЛІ ВИРАЗИ

Проводячи дослідження в різних галузях знань, часто звертаються до універсальної мови — мови математики. Елементами цієї мови є вирази, формули; їх використовують в усіх науках.

Із цього розділу ви дізнаєтеся:

- що таке вираз зі змінними, цілий вираз;
- як класифікують цілі вирази;
- що таке тотожність, тотожне перетворення виразу;
- на основі яких формул можна здійснювати перетворення виразів.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

§ 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ. ОДНОЧЛЕНИ

1 ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ. ЦІЛІ ВИРАЗИ

1. Вирази зі змінними. У попередніх класах ми поділяли вирази на числові та буквені. Розглянемо задачі, які приводять до таких виразів.

Задача 1. Довжина прямокутної ділянки дорівнює 12 м, а ширина — на 4 м менша. Записати у вигляді виразу площу ділянки.

Розв'язання. Ширина ділянки дорівнює $(12 - 4)$ м, а площа — $12 \cdot (12 - 4)$ м^2. •

$12 \cdot (12 - 4)$ — числовий вираз.

Числові вирази утворюють з чисел, знаків дій і дужок. → $7 + 3^2$; $1{,}5 : (-3)$; $\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right) \cdot 15$

Задача 2. Довжина прямокутної ділянки дорівнює 12 м, а ширина — на b м менша. Записати у вигляді виразу площу ділянки.

Розв'язання. Ширина ділянки дорівнює $(12 - b)$ м, а площа — $12(12 - b)$ м^2. •

$12(12 - b)$ — буквений вираз. Букві b можна надавати різні значення, b може дорівнювати 0,8; 5; 7,2; 10 тощо, тобто значення b можна *змінювати*. Тому b називають *змінною*, а вираз $12(12 - b)$ — *виразом зі змінною*.

Вирази зі змінними утворюють зі змінних, чисел, знаків дій і дужок. → $3x + 1$; $a(a - b)$; $-1{,}5mn^2$; $\frac{1}{k}$

Виразом зі змінною вважають й окремо взяту змінну.

Якщо у вираз $12(12 - b)$ замість змінної підставити певне число, наприклад число 7, то одержимо числовий вираз $12 \cdot (12 - 7)$, значення якого дорівнює:

$$12 \cdot (12 - 7) = 12 \cdot 5 = 60.$$

Одержане число 60 називають *значенням виразу* $12(12 - b)$ для значення змінної $b = 7$.

2. Цілі вирази. Порівняємо дві групи виразів:

1 група	2 група
$a+b,\ 3x^2,\ \frac{1}{3}(m-n),\ \frac{a-b}{5}$	$\frac{7}{a},\ x:y,\ b-\frac{a}{d+1},\ \frac{a+b}{c}$

Вирази першої групи не містять дії ділення на вираз зі змінними. Такі вирази називають *цілими*.

Вирази другої групи містять дію ділення на вираз зі змінними. Такі вирази називають *дробовими*, їх ми вивчатимемо у 8 класі.

3. Формули. Вирази зі змінними використовують для запису формул. Наприклад:

$S = ab$ — формула для обчислення площі прямокутника;

$V = abc$ — формула для обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда.

Формулою $n = 2k$, де k — ціле число, задають парні цілі числа, а формулою $n = 2k + 1$ — непарні.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати у вигляді виразу:

1) добуток числа a і суми чисел b та c;

2) частку різниці чисел m та n і числа 7;

3) різницю числа a і добутку чисел m та n.

• 1) $a(b+c)$; 2) $(m-n):7$; 3) $a-mn$. •

Примітка. Читаючи словами числові вирази чи вирази зі змінними, першою називають останню за порядком виконання дію, далі передостанню і т. д.

Вправа 2. Знайти значення виразу $a(a-b)$, якщо $a=30,\ b=7$.

• Якщо $a=30,\ b=7$, то

$$a(a-b)=30\cdot(30-7)=30\cdot 23=690.$$ •

Вправа 3. Записати у вигляді виразу число, яке має 9 сотень, c десятків, d одиниць.

• $9 \cdot 100 + c \cdot 10 + d = 900 + 10c + d$. •

1. З чого утворюють вирази зі змінними?
2. Як знайти значення виразу для певних значень змінних? Наведіть приклад.
3. Які вирази називають цілими виразами? Наведіть приклади цілих виразів.

Усно

1. Які з наведених записів є числовими виразами, виразами зі змінними та записами, що не є виразами:

1) $7{,}2 : 3$; 2) 5; 3) $2x = 3$; 4) $a - c$;

5) $0{,}5abx^2$; 6) $\frac{19-8}{5}$; 7) $-a$; 8) $(18 - 3) : 5 = 3$?

2. Прочитайте словами вирази зі змінними:

1) $5 + x$; 2) $y : 7$; 3) $2ab$; 4) $(abc - 2) : 4$;

5) $(a - 3) : a$; 6) $\frac{1}{4}z - 3{,}5$; 7) $\frac{b-c}{4}$; 8) $\frac{37}{x}$.

Які з наведених виразів є цілими виразами?

3. Знайдіть значення виразу:

1) $2 - m$, якщо $m = 4$; 2) $a^2 + b$, якщо $a = 3$; $b = 1$.

1 2

4. Використовуючи число 7 та змінні a і b, запишіть:

1) три цілих вирази; 2) не цілий вираз.

5. Запишіть три цілих вирази, використовуючи числа 4 і 5 та змінну x.

6. Запишіть у вигляді виразу:

1) суму чисел 12 і k; 2) частку чисел c і -7;

3) куб числа a; 4) різницю чисел $-a$ і b;

5) потроєний добуток чисел b і c;

6) добуток числа 3 і суми чисел a та c.

7. Запишіть у вигляді виразу:

1) різницю чисел b і 9; 2) добуток чисел 3 і $-a$;

3) квадрат числа x; 4) суму чисел m і $-n$;

5) подвоєну частку чисел a і c.

8. Знайдіть значення виразу:

1) $3x - 5$, якщо $x = 9$;
2) $3a + b$, якщо $a = -3$; $b = 8$;
3) $-1 + 4c^2$, якщо $c = 0{,}5$;
4) $kn - 2{,}4$, якщо $k = -0{,}4$; $n = -7$;
5) $2a + \frac{5}{8}$, якщо $a = \frac{3}{8}$;
6) $\frac{2}{5}b - 2c$, якщо $b = 10$; $c = \frac{1}{6}$.

9. Знайдіть значення виразу:

1) $-2a + 5$, якщо $a = -2$;
2) $2x - 3y$, якщо $x = 1{,}5$; $y = 2$;
3) $15 - s^2$, якщо $s = 4$;
4) $xy - \frac{1}{6}$, якщо $x = \frac{2}{9}$; $y = \frac{3}{4}$.

10. Заповніть таблицю:

x	5	7	−1	−2	−8	−10
y	1	−1	0	2	−0,5	−6
$x - 2y$						
	в	**о**	**д**	**у**	**ч**	**о**

«Розшифруйте» запис в останньому рядку таблиці, розташувавши знайдені значення в порядку зростання.

11. Заповніть таблицю:

b	1	0	5	10	−2,5
c	5	−10	−15	15	−10
$4b - c$					
	о	**с**	**ч**	**и**	**л**

«Розшифруйте» запис в останньому рядку таблиці, розташувавши знайдені значення в порядку спадання.

12. У магазин привезли n пакетів борошна по 5 кг у кожному. Запишіть у вигляді виразу масу всього борошна. Знайдіть значення цього виразу, якщо $n = 48$.

13. Тополя за добу виробляє 40 кг кисню. Запишіть у вигляді виразу масу кисню, яку виробляє тополя за k діб. Знайдіть значення цього виразу, якщо $k = 5$.

14. У потягу x плацкартних вагонів по 54 пасажирських місць у кожному та y купейних вагонів по 36 місць у кожному. Запишіть у вигляді виразу кількість усіх пасажирських місць у потягу.

15. Запишіть у вигляді виразу вартість покупки, якщо було куплено 2 пакети соку, по a грн кожний, і 6 тістечок, по b грн кожне.

«3

16. Знайдіть значення виразу:

1) $3ab - 4c^2$, якщо $a = -0{,}4$; $b = -25$; $c = 1{,}5$;

2) $8{,}5 \cdot (a - 3{,}7) + 4\frac{3}{8}b$, якщо $a = 6{,}3$; $b = -\frac{6}{7}$;

3) $\left(3\frac{2}{9} - m - n\right) \cdot 36$, якщо $m = -\frac{2}{3}$; $n = 1\frac{1}{6}$.

Математика — це мова, якою написана книга природи.
*Галілео Галілей**

17. Знайдіть значення виразу:

1) $4(a + bc) - 3{,}6$, якщо $a = 3{,}2$; $b = -2{,}4$; $c = 2{,}5$;

2) $0{,}5a + 3\frac{1}{2}\left(b - 1\frac{1}{7}\right)$, якщо $a = 3\frac{1}{5}$; $b = 2$.

18. За формулою шляху $s = vt$ знайдіть s (у кілометрах), якщо:
1) $v = 75$ км/год; $t = 20$ хв; 2) $v = 20$ м/с; $t = 2$ хв.

19. За формулою шляху $s = vt$ знайдіть s (у метрах), якщо $v = 150$ м/хв; $t = 10$ с.

20. Для яких значень b значення виразу $4 - 2b$ дорівнює 18?

21. Для яких значень a значення виразу $2a + 5$ дорівнює 10?

22. Для яких значень x значення виразу $3x - 12$ дорівнює значенню виразу $-4 - x$?

23. Запишіть у вигляді виразу число, яке має:
1) a десятків і b одиниць; 2) a сотень і c одиниць;
3) a сотень, 7 десятків і b одиниць;
4) a тисяч, b сотень і a одиниць.

24. Запишіть у вигляді виразу число, яке має:
1) a сотень і b десятків;
2) 5 сотень, a десятків і b одиниць.

25. Запишіть у вигляді виразу площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють a см, b см, 5 см.

26. Запишіть у вигляді виразу площу поверхні куба, ребро якого дорівнює k см.

27. Запишіть у вигляді виразу площу фігури, зображеної на рисунку 1.

* Галілео Галілей (1564–1642) — італійський філософ, астроном, математик і фізик.

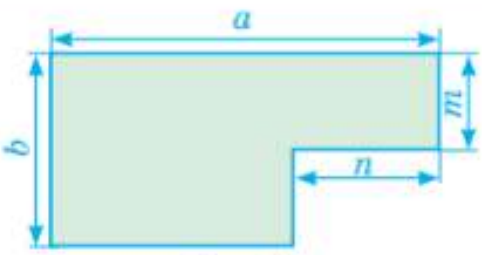


Рис. 1

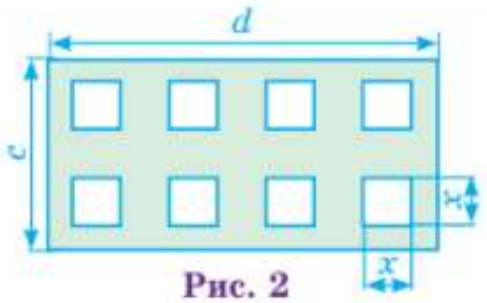


Рис. 2

28. Запишіть у вигляді виразу площу фігури, зображеної на рисунку 2.

29. Ціна першого смартфона k грн, другого — на 500 грн менша, ніж першого, а третього — на 10 % більша, ніж другого. Знайдіть ціну третього смартфона. Запишіть результат у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $k = 7500$.

30. У парку посадили m кленів, каштанів — на 10 більше, ніж кленів, а лип — на 40 % менше, ніж каштанів. Скільки лип посадили в парку? Запишіть результат у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $m = 45$.

Інтерактивне завдання 2
Вирази зі змінними. Цілі вирази

«« 4

31. Яких значень може набувати вираз $a^2 - b^2$, якщо:
1) $|a| = 1$; $|b| = 0$; 2) $|a| = |b|$?

32. Яких значень може набувати вираз $4m^2 - 1$, якщо $|m| = 0{,}5$?

33. Цілі числа, які при діленні на 5 дають в остачі 2, задають формулою $n = 5k + 2$, де k — ціле число. Які з чисел 28, −3, −28 при діленні на 5 дають в остачі 2?

34. Запишіть у вигляді виразу суму квадратів двох послідовних цілих чисел.

35. Запишіть у вигляді виразу добуток трьох послідовних цілих чисел.

36. У магазині на ряд товарів знизили ціни на те саме число відсотків, використавши формулу $y = 0{,}75x$, де x грн — початкова ціна товару, y грн — його ціна після знижки. На скільки відсотків знизили ціни на ці товари?

Вправи для повторення

37. Обчисліть зручним способом:

1) $0{,}25 \cdot (-11) \cdot 4$;
2) $2{,}4 \cdot 8 - 28 \cdot 2{,}4$;
3) $12 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$;
4) $1\frac{2}{7} \cdot 15 + \frac{5}{7} : \frac{1}{15}$.

38. Зведіть подібні доданки:

1) $3a - 7 + 5a - 10a$;
2) $4x + 9y + 2y - 5x$.

39. Розкрийте дужки:

1) $4(a + 2b - 0{,}5c)$;
2) $5(m - 1) - (n - k)$.

40. Для облаштування території новобудови на двох ділянках мають засіяти траву. Відомо, що площа першої ділянки в 1,7 раза, або на 350 м^2, більша за площу другої. Скільки потрібно кілограмів насіння, щоб засіяти обидві ділянки, якщо на 1 м^2 землі засівати 20 г насіння?

Поміркуйте

41. На дереві сидять 15 мавп так, що попарні відстані між ними є різними. Кожна мавпа дивиться на найближчу до себе мавпу. Чи обов'язково знайдуться дві мавпи, які дивляться одна на одну?

Цікаво знати

Записуючи вирази, рівняння, нерівності, ми користуємося математичними символами «+», «−», «=», «<», «a^2» та багатьма іншими. Така єдина система умовних знаків складалася в алгебрі поступово.

Значну роль у цьому процесі відіграв французький математик Франсуа Вієт, який уперше почав записувати рівняння за допомогою символів. Завдяки його працям алгебра стала наукою про рівняння, яка ґрунтується на використанні символів (букв).

Франсуа Вієт (1540–1603), французький математик. Першим увів єдину, послідовно проведену систему алгебраїчних символів

2 ТОТОЖНО РІВНІ ВИРАЗИ. ТОТОЖНОСТІ

1. Тотожно рівні вирази. Знайдемо значення виразів $5a - 5b$ і $5(a - b)$ для кількох значень a і b, поданих у таблиці.

a	b	$5a - 5b$	$5(a - b)$
1	0	5	5
4	2	10	10
3	−1	20	20
−2	−2	0	0

Для кожної з наведених пар значень a і b значення виразів дорівнюють одне одному. Так, якщо $a = 4$, $b = 2$, то значення обох виразів дорівнюють 10. З розподільної властивості множення відносно віднімання випливає, що відповідні значення виразів $5a - 5b$ і $5(a - b)$ дорівнюють одне одному для будь-яких значень змінних. Такі вирази називають *тотожно рівними*.

Означення. **Два вирази називають *тотожно рівними*, якщо для будь-яких значень змінних відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному.**

Розглянемо тепер вирази $5a + b$ і $a + 5b$. Якщо $a = 1$ і $b = 1$, то відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному:

$5a + b = 5 \cdot 1 + 1 = 6$; $\quad a + 5b = 1 + 5 \cdot 1 = 6$.

Якщо ж $a = 2$, $b = 1$, то відповідні значення цих виразів різні:

$5a + b = 5 \cdot 2 + 1 = 11$; $\quad a + 5b = 2 + 5 \cdot 1 = 7$.

Отже, значення виразів $5a + b$ і $a + 5b$ для одних значень змінних дорівнюють одне одному, а для інших — ні. Такі вирази не є тотожно рівними.

Щоб довести, що два вирази не є тотожно рівними, досить вказати хоча б один набір значень змінних, для якого відповідні значення виразів є різними.

2. Тотожності. Якщо два тотожно рівні вирази $5a - 5b$ і $5(a - b)$ сполучити знаком «=», то одержимо рівність $5a - 5b = 5(a - b)$, яка є правильною для будь-яких значень змінних. Таку рівність називають *тотожністю*.

Означення. **Рівність, яка є правильною для будь-яких значень змінних, називають *тотожністю*.**

Прикладами тотожностей є рівності, які виражають основні властивості додавання і множення чисел:

Переставна властивість	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Сполучна властивість	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Розподільна властивість	$a(b + c) = ab + ac$	

Тотожностями є також рівності, які виражають правила розкриття дужок:

$$a + (b + c) = a + b + c \qquad a - (b + c) = a - b - c$$

Тотожностями є й такі рівності:

$$a - b = a + (-b) \qquad a \cdot (-b) = -ab \qquad (-a) \cdot (-b) = ab$$
$$a + 0 = a \qquad a + (-a) = 0 \qquad a \cdot 0 = 0 \qquad a \cdot 1 = a$$

3. Тотожні перетворення виразів. У виразі $4b + 3b - 1$ зведемо подібні доданки $4b$ і $3b$:

$$4b + 3b - 1 = (4 + 3)b - 1 = 7b - 1.$$

Вираз $4b + 3b - 1$ замінили тотожно рівним йому виразом $7b - 1$.

Заміну одного виразу тотожно рівним йому виразом називають тотожним перетворенням виразу.

Тотожні перетворення використовують для спрощення виразів. Спростимо, наприклад, вираз $9a + 3 - 2(4a - 1)$:

$$9a + 3 - 2(4a - 1) = \underline{9a} + 3 - \underline{8a} + 2 = a + 5.$$

Спростивши вираз, ми одержали тотожно рівний йому вираз, який має коротший запис або, як кажуть, є «компактнішим».

Тотожні перетворення використовують і для доведення тотожностей.

Щоб довести, що деяка рівність є тотожністю, використовують один з таких способів:

1) одну частину рівності шляхом тотожних перетворень зводять до другої частини;

2) обидві частини рівності зводять до того самого виразу;
3) утворюють різницю лівої та правої частин рівності та показують, що вона тотожно дорівнює нулю.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Довести тотожність $a - 3 - (4a + 7) = -3a - 10$.

Розв'язання. Перетворюватимемо ліву частину рівності:

$$a - 3 - (4a + 7) = \underline{a} - \underline{3} - \underline{4a} - \underline{7} = -3a - 10.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву частину рівності звели до правої частини. Тому ця рівність є тотожністю. ●

Приклад 2. Довести тотожність $15 = (27 - 5m) - (12 - 3m - 2m)$.

Розв'язання. Перетворюватимемо праву частину рівності:

$$(27 - 5m) - (12 - 3m - 2m) = \underline{27} - \underline{5m} - \underline{12} + \underline{3m} + \underline{2m} = 15.$$

Шляхом тотожних перетворень праву частину рівності звели до лівої частини. Тому ця рівність є тотожністю. ●

Приклад 3. Довести тотожність $2c + 3 - 2(3 - 2c) = 3(2c - 3) + 6$.

Розв'язання. Перетворюватимемо окремо ліву та праву частини рівності:

$$2c + 3 - 2(3 - 2c) = \underline{2c} + \underline{3} - \underline{6} + \underline{4c} = 6c - 3;$$

$$3(2c - 3) + 6 = 6c - \underline{9} + \underline{6} = 6c - 3.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву та праву частини рівності звели до того самого виразу $6c - 3$. Тому ця рівність є тотожністю. ●

Приклад 4. Довести тотожність $10x - 2(2x - 3y) = 6(x + y)$.

Розв'язання. Утворимо різницю лівої та правої частин рівності та спростимо її:

$$10x - 2(2x - 3y) - 6(x + y) = \underline{10x} - \underline{4x} + \underline{6y} - \underline{6x} - \underline{6y} = 0.$$

Різниця лівої і правої частин рівності тотожно дорівнює нулю, тому ця рівність є тотожністю. ●

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Спростити вираз $a + (2a - 3b) - (2 - 4b)$.

• $a + (2a - 3b) - (2 - 4b) = \underline{a} + \underline{2a} - 3b - 2 + 4b = 3a + b - 2$. •

Вправа 2. Розв'язати рівняння $2(2x - 1) - (5 - x) = 3x + 2$.

• $4x - 2 - 5 + x = 3x + 2$; $5x - 7 = 3x + 2$;
$5x - 3x = 2 + 7$; $2x = 9$; $x = 4{,}5$.
Відповідь. 4,5. •

1. Які вирази називають тотожно рівними? Наведіть приклади тотожно рівних виразів.
2. Що називають тотожним перетворенням виразу?
3. Що називають тотожністю? Наведіть приклади тотожностей.
4. Як доводять тотожності?

«Усно

42. Чи є тотожно рівними вирази:
1) $5 + 6x$ і $6x + 5$; 2) $a - b$ і $b - a$?
Відповіді обґрунтуйте.

43. Чи є тотожністю рівність:
1) $ab - 2 = -2 + ab$; 2) $2(k - 3) = 2k - 3$?
Відповіді обґрунтуйте.

44. Назвіть кілька виразів, тотожно рівних виразу $x + 4x$.

45. Спростіть вираз:
1) $4a - 3 + 2a$; 2) $mn - (mn - 5)$.

«1 2

46. Зведіть подібні доданки:
1) $7a - 3a + 6$; 2) $-4 + 3z - 8z$;
3) $4b - 7 + 3b + 5$; 4) $6{,}5b - 7a + 5a$;
5) $-7{,}2x + 8y - 5x - 8y$; 6) $m - 3n + 1{,}6n + 2n$.

47. Зведіть подібні доданки:
1) $5k - 6k + 3k$; 2) $4c - 1 - 6c + 4$;
3) $-2x + 3y - 6x - 5y$; 4) $3b - a + 0{,}6a + 0{,}4a$.

48. Розкрийте дужки та зведіть подібні доданки:
1) $5(8m + 9) + (4m - 5)$; 2) $2(5b - 3a) - (1{,}5b - 2a)$;
3) $-4(2x + 1{,}5y) + 4(2x + 1)$; 4) $2(2x - 4y) - 3(2x + 5y + 2)$.

49. Розкрийте дужки та зведіть подібні доданки:
1) $3(4x - 2z) - (5z + 10x)$; 2) $-3(3a + 1) - 5(a - 3b)$.

50. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $7(a - 10) + a - 5$, якщо $a = 3$;
2) $-2{,}5b - (11 - 1{,}5b) + b$, якщо $b = 0{,}2$;
3) $2x - 3(1 - y) + 4y$, якщо $x = -2$; $y = 5$.

51. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $6 + 3(2k - 4) - 8k$, якщо $k = -1$;
2) $3(a + 6) - (a - 3b) - 4b$, якщо $a = 3$, $b = -3$.

52. Доведіть тотожність:
1) $(a + b) - (a - b) = 2b$; 2) $2b \cdot (-4) + 8b - 4 = -4$;
3) $2x - 5(1 - 2x) = 12x - 5$; 4) $2(3k - 4) + 14 - 6k = 6$;
5) $m - (4m - 3n) = 3(n - m)$; 6) $2c = 12c - 5(2c + 3) + 15$.

53. Доведіть тотожність:
1) $2b + 2(1 - b) = 2$; 2) $2m - (k + 2m) + k = 0$;
3) $3a - 6(3 - 2a) = 3(5a - 6)$; 4) $2x + 10 = 8x + 2(5 - 3x)$.

54. Розв'яжіть рівняння:
1) $7x - x - 3x = 12$; 2) $1{,}2y + 1 - 2{,}7y = 4$;
3) $5z + 2(3 - z) = 6$; 4) $-6x - (1 - 2x) = 2$.

55. Розв'яжіть рівняння:
1) $2{,}5x - 2x + 1{,}5x = -2$; 2) $6(x - 1) - 8x = 6$.

56. За першу хвилину Катя пробігла n м, а за другу — на 20 м менше. Скільки метрів пробігла Катя за дві хвилини?

57. На одній ділянці росте k яблунь, а на другій — на 12 яблунь більше. Скільки яблунь росте на обох ділянках разом?

58. Перший автомат за 1 хв розфасовує m кг борошна, а другий — на 5 кг більше. Запишіть у вигляді виразу масу борошна, яке розфасують обидва автомати за 10 хв.

59. Довжина майданчика прямокутної форми дорівнює a м, а ширина — на 3 м менша. Запишіть у вигляді виразу периметр майданчика.

60. Одна сторона трикутника дорівнює b см, а дві інші — вдвічі довші. Запишіть у вигляді виразу периметр трикутника.

61. Запишіть у вигляді тотожності твердження:

1) сума числа і протилежного йому числа дорівнює нулю;
2) добуток двох чисел дорівнює добутку протилежних їм чисел;
3) квадрат числа дорівнює квадрату модуля цього числа;
4) сума числа a й числа, протилежного числу b, дорівнює різниці чисел a і b.

62. Запишіть у вигляді тотожності твердження:

1) добуток будь-якого числа і нуля дорівнює нулю;
2) квадрат числа дорівнює квадрату протилежного йому числа.

63. Спростіть вираз:

1) $2(3c + 5) + 4(3 + 5c) + 2c$; 2) $0{,}2(x - 1) - 0{,}4(5 - 2x) - 2{,}3$;

3) $-(4x + y + 3z) - 2(x - 3z)$; 4) $1\frac{1}{3}(2a - 3b) - \frac{2}{3}(3b + a) + 2a$;

5) $4(2(x + 2) - 4x) + 2(x + 1)$; 6) $5(m + 3(n - 1) - 1) - 5m$.

64. Спростіть вираз:

1) $-(3a - 6) + 6(1 - a)$; 2) $0{,}9(a - 3b) - 0{,}2(5b - 3a)$;

3) $4(5n - 2(n - 1)) + 10$; 4) $\frac{2}{9}(2(x - y) - 4x) + \frac{2}{3}x$.

65. Знайдіть значення виразу $12{,}8a - 1{,}4b - 2(1{,}4a - 3{,}2b)$, якщо $a = -2{,}1$; $b = 7{,}2$.

66. Знайдіть значення виразу $78x - 52y - 4(7x + 12y)$, якщо $x = -1{,}04$; $y = -0{,}52$.

67. Доведіть, що значення виразу $3(1{,}5 - 0{,}2x) - 0{,}2(2x - 1) + x$ не залежать від значень x.

68. Доведіть, що значення виразу $a + 0{,}5(1 - 4a) - 2(0{,}1 - 0{,}5a)$ не залежать від значень a.

69. Доведіть, що вираз $-2(1 - 3k) - 3(2(k - 1) - 1)$ набуває лише одного значення. Чому дорівнює це значення?

70. Доведіть тотожність:
1) $2(a + b + c) - (a + b - c) - (a - b + c) = 2(b + c)$;
2) $3(10m - 5(m - k)) = 5(6k - 3(k - m))$.

71. Доведіть тотожність:
1) $2(a - b - 1) - (a + b - 1) - (a - b + 1) = -2(b + 1)$;
2) $1 - (1 - (1 - n)) = 2 - (3 - (2 - n))$.

72. Розв'яжіть рівняння:
1) $2(3x - 1) - 3(2 - x) = 1$; 2) $4y - 3(y - 1) = 5(y - 3)$.

73. Розв'яжіть рівняння:
1) $-3(1 - y) + 3(1 - 2y) = 9$; 2) $8x - 5 - 2(x - 1) = 4x$.

74. Шлях між двома містами автобус проїхав за 3 год. За першу годину він проїхав k км, що на 8 км більше, ніж за другу, і на 4 км менше, ніж за третю. Запишіть у вигляді виразу відстань між містами. Знайдіть значення цього виразу, якщо $k = 80$.

75. У першому пакеті було x яблук, а в другому — в 1,5 раза більше. З першого пакета взяли 7 яблук, а в другий поклали 3 яблука. Скільки яблук стало в обох пакетах разом?

76. На банківській картці було k грн, а після поповнення ця сума зросла на 60 %.
1) На скільки гривень поповнили рахунок?
2) Скільки гривень стало на картці?

Інтерактивне завдання 3
Тотожно рівні вирази. Тотожності

4

77. Доведіть, що сума і різниця двох непарних натуральних чисел є парними числами.

78. Натуральні числа a і b при діленні на 3 дають в остачі 1. Доведіть, що різниця цих чисел ділиться на 3.

79. Ціна товару n грн. Спочатку цю ціну знизили на 20 %, а згодом нову ціну підвищили на 20 %.
1) Знайдіть ціну товару після двох переоцінок.
2) На скільки гривень ця ціна менша від початкової?

80. Футболка коштує a грн. Якщо купувати дві футболки, то на другу магазин дає скидку 30 %. Скільки гривень доведеться заплатити, якщо купувати дві футболки?

Вправи для повторення

81. Обчисліть: 1) $15^2 - 6^3$; 2) $(1{,}2^2 - 1{,}84)^3$.

82. Ребро куба, виготовленого із пластмаси, дорівнює 5 см. Знайдіть масу куба, якщо 1 $см^3$ пластмаси має масу 2 г.

83. Український літак АН-225 («Мрія») — найбільший і найпотужніший у світі транспортний літак — увійшов до Книги рекордів Гіннеса, установивши низку рекордів. Один з них — перевезення найбільшого в історії авіації моновантажу (генератора), маса якого 174 т і становить 69,6 % маси літака. Знайдіть масу незавантаженого літака.

84. Рік тому пакет акцій фірми коштував 7500 грн, а сьогодні — 8100 грн. На скільки відсотків зросла вартість пакета акцій фірми за цей період?

Поміркуйте

85. Скільки можна виготовити різних намист, маючи 12 білих і 2 чорні перлини? (Одне з таких намист зображено на рисунку 3.)

Рис. 3

3 СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Нагадаємо, що добуток двох або трьох однакових множників, кожний з яких дорівнює a, — це відповідно квадрат або куб числа a. Наприклад:

$5 \cdot 5 = 5^2$; 5^2 — квадрат числа 5;

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$; 5^3 — куб числа 5.

Квадрат числа 5 називають ще другим степенем цього числа, а куб — третім степенем.

Відповідно добуток $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ позначають 5^4 і називають четвертим степенем числа 5. У виразі 5^4 число 5 називають *основою степеня*, число 4 — *показником степеня*, а весь вираз 5^4 називають *степенем*.

Означення. **Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.**
Степенем числа a з показником 1 називають саме число a.

Степінь з основою a й показником n записують так: a^n, читають: «a в степені n», або «n-ий степінь числа a».

Отже, за означенням

$$a^n = \underbrace{aa...a}_{n \text{ разів}}, \text{ якщо } n > 1, \quad a^1 = a.$$

Розглянемо приклади знаходження значень степенів:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ — піднесли число 3 до п'ятого степеня

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ — піднесли число -2 до третього степеня (до куба)

$0{,}5^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ — піднесли число 0,5 до другого степеня (до квадрата)

З'ясуємо знак степеня з натуральним показником.

1) **Якщо $a = 0$, то $a^n = 0$.** Справді, $0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{n \text{ разів}} = 0$.

Будь-який натуральний степінь числа 0 дорівнює 0.

2) **Якщо $a > 0$, то $a^n > 0$** (добуток n додатних чисел є додатним числом).

Будь-який натуральний степінь додатного числа є число додатне.

3) **Якщо $a < 0$ і n — парне, то $a^n > 0$** (добуток парної кількості від'ємних чисел є додатним числом).

Якщо $a < 0$ і n — непарне, то $a^n < 0$ (добуток непарної кількості від'ємних чисел є від'ємним числом).

Зазначимо, що значення степеня a^n дорівнює 0 тільки при $a = 0$. Тому рівняння $x^n = 0$, де n — натуральне число, має лише один корінь $x = 0$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Обчислити: $(-3)^5 + 100 \cdot 1{,}5^2$.

• Виконуючи обчислення, можна:
а) *записувати обчислення в рядок:*
$(-3)^5 + 100 \cdot 1{,}5^2 = -243 + 100 \cdot 2{,}25 = -243 + 225 = -18$;
б) *записувати кожну дію окремо:*
1) $(-3)^5 = -243$; 2) $1{,}5^2 = 2{,}25$;
3) $100 \cdot 2{,}25 = 225$; 4) $-243 + 225 = -18$.
Відповідь. -18. •

Вправа 2. Розв'язати рівняння $(2x - 1)^7 = 0$.

• $(2x - 1)^7 = 0$; $2x - 1 = 0$; $2x = 1$; $x = 1 : 2$; $x = 0{,}5$.
Відповідь. 0,5. •

1. Що називають степенем числа з натуральним показником?
2. Наведіть приклад степеня з натуральним показником і назвіть його основу й показник.
3. Який знак має степінь з натуральним показником залежно від знака основи?

«Усно

86. Прочитайте вирази, назвіть основи й показники степенів:

a^{12}; $(-3)^4$; $(-0{,}05)^{20}$; m^9; 3^m; $\left(\frac{1}{3}\right)^3$; $\left(-\frac{2}{5}\right)^7$.

87. Обчисліть: 0^{15}; 1^{15}; $(-1)^4$; $(-1)^5$; 2^4; $(-2)^4$; 3^3; $(-3)^3$; 10^4.

88. Значення яких із наведених степенів є додатними; від'ємними:
$(-7)^4$; $(-11)^3$; 15^6; $(-21)^2$; 3^3; 17^{31}; $(-1{,}5)^{20}$; $(-0{,}05)^{11}$?

89. Не виконуючи обчислень, порівняйте:
1) $(-5)^6$ і 0; 2) $(-5)^5$ і 0; 3) $(-5)^5$ і 5^5; 4) $(-5)^6$ і $(-6)^5$.

90. Запишіть у вигляді степеня добуток:

1) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$;

2) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{\text{10 разів}}$;

3) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ разів}}$;

5) $(-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b)$;

6) $(x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y)$.

91. Запишіть у вигляді степеня добуток:

1) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$;

2) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$;

3) $\underbrace{(-1{,}5) \cdot (-1{,}5) \cdot \ldots \cdot (-1{,}5)}_{\text{12 разів}}$;

4) $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$.

92. Запишіть у вигляді добутку степінь:

1) 9^6; 2) $(-7)^4$; 3) a^5; 4) $(bc)^4$.

93. Запишіть у вигляді добутку степінь:

1) 8^5; 2) $(-2x)^3$.

94. Знайдіть значення степеня:

1) 12^2; 2) 4^4; 3) $(-5)^4$; 4) $(-11)^3$;

5) $0{,}5^3$; 6) $(-0{,}1)^4$; 7) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$; 8) $\left(1\frac{2}{3}\right)^4$.

95. Знайдіть значення степеня:

1) 5^3; 2) 2^5; 3) $(-3)^4$; 4) $(-1)^5$;

5) $0{,}3^3$; 6) $(-0{,}3)^3$; 7) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; 8) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$.

96. Заповніть таблицю:

a	-3	-2	-1	0	1	2	3
a^3							
a^4							

97. Заповніть таблицю:

n	1	2	3	4	5
$(-3)^n$					
	с	**л**	**и**	**о**	**ч**

«Розшифруйте» запис в останньому рядку таблиці, розташувавши знайдені значення в порядку зростання.

98. Обчисліть:

1) $6 \cdot (-2)^4$; 2) $6 \cdot (-2^4)$; 3) $5 \cdot (-3)^3$; 4) $5 \cdot (-3^3)$;
5) $5^3 - 4 \cdot 5^2$; 6) $(-6 \cdot 0{,}5)^5$; 7) $0{,}1^3 - 0{,}1^2$; 8) $(15 - 16)^{10}$.

99. Обчисліть:

1) $(3 - 7)^4$; 2) $2 \cdot (-5^3)$; 3) $(-4 + 3)^9$; 4) $2^6 + 2 \cdot (-3)^3$.

100. Знайдіть значення виразів:

1) a^2; $(-a)^2$; $-a^2$, якщо $a = 3$; 2) a^3; $(-a)^3$; $-a^3$, якщо $a = 10$.

101. Знайдіть значення виразу:

1) $x^2 - 5$, якщо $x = 2{,}5$; 2) $(7 - b)^4$, якщо $b = 9$;
3) $a^2 + a^3$, якщо $a = 0{,}1$; 4) $a^2 - b^2$, якщо $a = 25$; $b = 15$.

102. Знайдіть значення виразу:

1) $a^3 + 1$, якщо $a = -2$; $a = 2$;
2) $(x + 1)^4$, якщо $x = -2$; $x = -0{,}8$.

103. Швидкість світла дорівнює $3 \cdot 10^5$ км/с. Задайте цю швидкість натуральним числом у кілометрах за секунду.

104. Площа Азовського моря дорівнює $3{,}9 \cdot 10^4$ км^2. Задайте цю площу натуральним числом у квадратних кілометрах.

3

105. Порівняйте значення виразів:

1) $(5 \cdot 2)^3$ і $5^3 \cdot 2^3$; 2) $(2 + 3)^4$ і $2^4 + 3^4$;
3) $1 : (-2)^4$ і $(-0{,}5)^4$; 4) $(-2)^5 \cdot (-3)^6 \cdot (-4)^7$ і 0^8.

106. Порівняйте значення виразів:

1) $(7 - 5)^2$ і $7^2 - 5^2$; 2) $(10 : 2)^4$ і $10^4 : 2^4$;
3) $(-3 \cdot 2)^3$ і $(-3)^3 \cdot 2^3$; 4) $(-5)^4 \cdot (-4)^5 \cdot (-3)^6$ і 0^7.

107. Залежність величини y від величини x задано формулою $y = x^4 + x^3 + x^2 + x$. Заповніть таблицю:

x	-2	-1	0	1	2
y					

108. За формулою $y = x^5 - x^4 + x^3$ знайдіть y, якщо $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$.

109. Запишіть числа 5, 125, 3125 у вигляді степенів числа 5.

110. Запишіть числа 16, 64, 256 у вигляді степенів числа 2.

111. Подайте у вигляді квадрата або куба числа:

$$27;\ 144;\ -125;\ 216;\ 0{,}125;\ 0{,}001;\ \frac{25}{81};\ 6\frac{1}{4};\ -3\frac{3}{8}.$$

112. Подайте у вигляді квадрата або куба числа:

$$64;\ 1000;\ -8;\ 6{,}25;\ 0{,}008;\ -\frac{27}{125};\ 1\frac{11}{25}.$$

113. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)^8 = 0$; 2) $(5x + 10)^3 = 0$; 3) $(1{,}2 - 3x)^6 = 0$.

114. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 5)^4 = 0$; 2) $(3x - 18)^9 = 0$; 3) $(-2x + 0{,}5)^3 = 0$.

Інтерактивне завдання 4

Степінь з натуральним показником

115. Знайдіть значення виразу, якщо $a = 0$; $a = 1$; $a = -1$:

1) $a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{99} + a^{100}$ (ця сума має 100 доданків, кожний з яких є степенем числа a; показники степенів — усі натуральні числа від 1 до 100 включно);

2) $a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{98} + a^{99}$.

116. Знайдіть найменше значення виразу:

1) $(b - 1)^2 + 1$; 2) $(2y + 1)^8 - 5$.

Для якого значення змінної значення виразу є найменшим?

117. Для якого значення a найбільшого значення набуває вираз:

1) $-(a + 5)^6$; 2) $2 - (3 - 6a)^4$?

118. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 + (2x)^2 = 0$; 2) $x^2 + |x + 1| = -1$.

119. Для яких значень змінних є правильною рівність:

1) $x^2 + (y + 1)^2 = 0$; 2) $(m - 2)^2 + (2n - 1)^8 = 0$?

120. Для яких значень a і b є правильною рівність $2a^4 + (b - 4)^2 = 0$?

Вправи для повторення

121. Обчисліть:

1) $0{,}025 \cdot 2{,}15 \cdot 40$; 2) $54 : (9{,}8 \cdot 4 - 4{,}8 \cdot 4)$.

122. Розв'яжіть рівняння:

1) $7x + 32 = 12x + 25$; 2) $2(x - 11) - 5(5 - 2x) = -23$.

123. Футбольна команда в 15 матчах набрала 23 очка, програвши 6 матчів. У скількох матчах команда здобула перемогу і скільки матчів зіграла внічию? (За перемогу команді нараховують 3 очка, за нічию — 1 очко, за поразку — 0 очок.)

124. Для дитячого садка мають купити 20 кг борошна в однакових пакетах. У таблиці наведено маси пакетів борошна, їх ціни та знижки під час акційного тижня. У пакетах якої маси вигідніше купувати борошно під час акційного тижня?

Маса	Ціна	Знижка
1 кг	22 грн	25 %
2 кг	40 грн	20 %
4 кг	72 грн	15 %

Поміркуйте

125. Є два букети троянд: у першому — 15 троянд, у другому — 17. Принц і Попелюшка грають у гру, роблячи ходи по черзі. За один хід потрібно розділити будь-який букет на два менші. Програє той, хто не зможе зробити хід (у кого залишаться «букети» з однієї троянди). Принц хоче, щоб перемогла Попелюшка, а Попелюшка — щоб переміг принц. Хто з них може досягти своєї мети, якщо перший хід робить Попелюшка?

Цікаво знати

Поняття степеня з натуральним показником виникло ще в античні часи у зв'язку з обчисленням площ і об'ємів. Тлумачення степенів a^2 і a^3 було геометричним: a^2 — це площа квадрата, сторона якого дорівнює a, a^3 — об'єм куба, ребро якого дорівнює a. Звідси й назви «квадрат» і «куб» для степенів a^2 і a^3, які використовують досі.

Сучасне позначення степеня з натуральним показником у вигляді a^n увів у XVII ст. французький математик **Рене Декарт** (1596–1650).

4 ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

1. Множення степенів з однаковими основами. Розглянемо вираз a^2a^4, який є добутком двох степенів з однаковими основами, і перетворимо його так:

$$a^2a^4 = (aa)\cdot(aaaa) = aaaaaa = a^6 = a^{2+4}.$$

Отже, $a^2a^4 = a^{2+4}$. У цьому прикладі добуток степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює сумі показників степенів. Таку властивість має добуток будь-яких степенів з однаковими основами.

Властивість 1. **Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n виконується рівність**

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Доведення. Врахувавши означення степеня, матимемо:

$$a^m a^n = \underbrace{(aa\ldots a)}_{m \text{ разів}}\cdot\underbrace{(aa\ldots a)}_{n \text{ разів}} = \underbrace{(aa\ldots a)}_{(m+n) \text{ разів}} = a^{m+n}. \bullet$$

Властивість 1 називають *основною властивістю степеня*. З неї випливає *правило множення степенів*:

Щоб перемножити степені з однаковими основами, потрібно основу залишити ту саму, а показники степенів додати.

Наприклад: $2^4\cdot 2 = 2^4\cdot 2^1 = 2^{4+1} = 2^5$; $m^7\cdot m^8 = m^{7+8} = m^{15}$.

Правило множення степенів поширюють на добуток трьох і більше степенів. Наприклад:

$5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 = 5^{2+4+6} = 5^{12}$; $b^5 \cdot b^3 \cdot b^7 \cdot b = b^{5+3+7+1} = b^{16}$.

2. Ділення степенів з однаковими основами. Розглянемо рівність $a^2a^4 = a^6$, де $a \neq 0$. З цієї рівності за означенням частки маємо: $a^6 : a^4 = a^2$. Рівність $a^6 : a^4 = a^2$ можна переписати так:

$$a^6 : a^4 = a^{6-4}.$$

У цьому прикладі частка степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою й показником, який дорівнює різниці показника степеня діленого й показника степеня дільника. У загальному випадку справджується така властивість.

Властивість 2. **Для будь-якого числа $a \neq 0$ та будь-яких натуральних чисел m і n, де $m > n$, виконується рівність**

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доведення. Оскільки $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, тобто $a^{m-n} \cdot a^n = a^m$, то за означенням частки маємо: $a^m : a^n = a^{m-n}$. ●

З доведеної властивості випливає *правило ділення степенів*:

Щоб поділити степені з однаковими основами, потрібно основу залишити ту саму, а від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника.

Наприклад: $3^7 : 3^2 = 3^{7-2} = 3^5$; $x^4 : x = x^4 : x^1 = x^{4-1} = x^3$.

3. Піднесення степеня до степеня. Піднесемо степінь a^2 до куба:

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3}.$$

Рівність $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3}$ можна прокоментувати так: щоб піднести квадрат числа до куба, потрібно основу залишити ту саму, а показники степенів перемножити. У загальному випадку справджується така властивість.

Властивість 3. **Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n виконується рівність**

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Доведення.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n \text{ разів}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ разів}}} = a^{mn}. \bullet$$

Із властивості 3 випливає *правило піднесення степеня до степеня*:

Щоб піднести степінь до степеня, потрібно основу залишити ту саму, а показники степенів перемножити.

Наприклад: $(4^3)^5 = 4^{3 \cdot 5} = 4^{15}$; $(k^6)^4 = k^{6 \cdot 4} = k^{24}$.

4. Піднесення добутку до степеня. Піднесемо добуток ab до куба:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3b^3.$$

Отже, $(ab)^3 = a^3b^3$, тобто куб добутку двох чисел дорівнює добутку кубів цих чисел. У загальному випадку справджується така властивість.

Властивість 4. **Для будь-яких чисел a і b та будь-якого натурального числа n виконується рівність**

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Доведення.

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n \text{ разів}} = \underbrace{aaa\ldots a}_{n \text{ разів}} \cdot \underbrace{bbb\ldots b}_{n \text{ разів}} = a^n b^n. \bullet$$

Маємо таке правило:

Щоб піднести до степеня добуток, досить піднести до цього степеня кожний множник і результати перемножити.

Це правило поширюють на добуток трьох і більше множників. Наприклад:

$$(5ab)^3 = 5^3a^3b^3 = 125a^3b^3; \qquad (abxy)^n = a^n b^n x^n y^n.$$

Зауваження. Доведені тотожності $a^m a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$ дозволяють не лише замінювати вирази, що стоять у їхніх лівих частинах, виразами, що стоять у правих частинах, а й навпаки:

$$a^{m+n} = a^m a^n; \quad a^{m-n} = a^m : a^n; \quad a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m; \quad a^n b^n = (ab)^n.$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Спростити вираз $(a^4a)^3 : (a^6)^2$.

• $(a^4a)^3 : (a^6)^2 = (a^5)^3 : a^{12} = a^{15} : a^{12} = a^3$. •

Вправа 2. Подати степінь 4^{18} у вигляді степеня з основою: 1) 4^6; 2) 16; 3) 2.

• 1) $4^{18} = 4^{6 \cdot 3} = (4^6)^3$; 2) $4^{18} = 4^{2 \cdot 9} = (4^2)^9 = 16^9$;
3) $4^{18} = (2^2)^{18} = 2^{36}$. •

Вправа 3. Знайти значення виразу:

1) $4^8 : 4^5 - 3^9 : 3^7$; 2) $2{,}5^5 \cdot 0{,}4^5 \cdot 2^6$; 3) $25^6 \cdot 0{,}2^{11}$.

• 1) $4^8 : 4^5 - 3^9 : 3^7 = 4^3 - 3^2 = 64 - 9 = 55$;

2) $2{,}5^5 \cdot 0{,}4^5 \cdot 2^6 = (2{,}5 \cdot 0{,}4)^5 \cdot 2^6 = 1^5 \cdot 2^6 = 1 \cdot 64 = 64$;

3) $25^6 \cdot 0{,}2^{11} = (5^2)^6 \cdot 0{,}2^{11} = 5^{12} \cdot 0{,}2^{11} = 5 \cdot 5^{11} \cdot 0{,}2^{11} =$
$= 5 \cdot (5 \cdot 0{,}2)^{11} = 5 \cdot 1^{11} = 5$. •

1. Сформулюйте основну властивість степеня.
2. Сформулюйте правила множення та ділення степенів з однаковими основами.
3. Сформулюйте правило піднесення добутку до степеня.
4. Сформулюйте правило піднесення степеня до степеня.

«Усно

126. Подайте у вигляді степеня добуток:
1) b^4b^3; c^3c; $7^2 \cdot 7^5$; $3^{10} \cdot 3$; 2) $a^2a^3a^4$; $2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$.

127. Подайте у вигляді степеня частку:
1) $a^6 : a^2$; $b^8 : b^3$; 2) $7^{20} : 7^{17}$; $11^8 : 11$.

128. Піднесіть до степеня:
1) $(pq)^2$; $(2b)^3$; $(abc)^4$; 2) $(m^3)^4$; $(n^{10})^2$; $(b^{15})^4$.

«1 2

129. Подайте у вигляді степеня добуток:
1) a^5a^2; 2) b^4b^6; 3) yy^7; 4) $x^2x^7x^3$;
5) $2^8 \cdot 2^{12}$; 6) $0{,}3^{15} \cdot 0{,}3$; 7) $5^3 \cdot 5 \cdot 5^4$; 8) $3^4 \cdot 3 \cdot 3^6 \cdot 3$.

130. Подайте у вигляді степеня добуток:

1) m^3m^6; 2) y^7y^5; 3) c^5c; 4) $b^5b^3b^2$;
5) $10^5 \cdot 10^{10}$; 6) $2{,}5 \cdot 2{,}5^3$; 7) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^7$; 8) $4^2 \cdot 4^4 \cdot 4 \cdot 4^5$.

131. Подайте у вигляді степеня частку:

1) $x^{10} : x^3$; 2) $a^{15} : a^5$; 3) $5^{28} : 5^{21}$; 4) $0{,}1^8 : 0{,}1^2$.

132. Подайте у вигляді степеня частку:

1) $c^{12} : c^9$; 2) $b^{26} : b^8$; 3) $4^{17} : 4^{15}$; 4) $0{,}7^{10} : 0{,}7^4$.

133. Подайте степінь c^{15} у вигляді добутку двох степенів з основою c, одним з яких є: c; c^2; c^4; c^7; c^{12}.

134. Подайте степінь x^{12} у вигляді добутку двох степенів з основою x, одним з яких є: x; x^3; x^6; x^{10}.

135. 1) Подайте у вигляді степеня з основою b: $(b^3)^3$; $(b^4)^5$; $(b^{25})^4$.
2) Подайте у вигляді степеня з основою ab: a^3b^3; a^5b^5.

136. 1) Подайте у вигляді степеня з основою k: $(k^5)^3$; $(k^2)^7$; $(k^5)^6$.
2) Подайте у вигляді степеня з основою mn: m^2n^2; m^7n^7.

137. Піднесіть до степеня:

1) $(ab)^5$; 2) $(4c)^2$; 3) $(-2x)^3$; 4) $(-0{,}1a)^2$;
5) $(3xz)^3$; 6) $(-2mn)^5$; 7) $(-mnk)^8$; 8) $(4abcd)^4$.

138. Піднесіть до степеня:

1) $(st)^7$; 2) $(-3b)^3$; 3) $(-mn)^4$; 4) $(5klm)^3$.

139. Знайдіть значення виразу:

1) $5^8 : 5^5$; 2) $0{,}2^9 : 0{,}2^7$; 3) $(3^2)^3 : 3^4$; 4) $(-2)^7 : (-2)^4$;
5) $8^7 : 8^5 - 3^2 \cdot 3$; 6) $(1{,}5^4 \cdot 1{,}5^5) : 1{,}5^7$.

140. Знайдіть значення виразу:

1) $4^{18} : 4^{15}$; 2) $(-3)^5 : (-3)^2$;
3) $0{,}5^8 : 0{,}5^6 + (2^2)^2$; 4) $(5^6 \cdot 5^4) : 5^8$.

3

141. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $2^4 \cdot 16$; 2) $3^7 : 27$; 3) $0{,}5^4 \cdot 0{,}25$; 4) $0{,}1^5 : 0{,}001$.

142. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $7^3 \cdot 49$; 2) $8 \cdot 2^5$; 4) $3^{10} : 81$; 4) $1{,}21 \cdot 1{,}1^4$.

143. Знайдіть значення виразу:

1) $2^4 \cdot 5^4 + (-10)^4$; 2) $0{,}5^9 \cdot (-2)^9 - 1$;
3) $\left(1\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3$; 4) $1{,}25^5 \cdot 2^5 \cdot 4^5$;

5) $(0{,}5^{18} : 0{,}5^{6}) \cdot (2^{16} : 2^{4})$;

6) $2^{15} : 16^{3}$;

7) $\left(\frac{9}{16}\right)^{5} \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^{10}$;

8) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{2} - \left(3\frac{1}{3}\right)^{8} : \left(3\frac{1}{3}\right)^{6}$.

144. Знайдіть значення виразу:

1) $5^{3} \cdot 2^{3} + (-10)^{3}$;

2) $(-8)^{4} \cdot 1{,}25^{4}$;

3) $0{,}25^{9} \cdot 2^{9} \cdot 2^{9}$;

4) $5^{8} : 25^{3}$;

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{3} : \left(\frac{2}{3}\right)^{7}$;

6) $\left(1\frac{3}{7}\right)^{5} : \left(1\frac{3}{7}\right)^{3} - \left(\frac{3}{7}\right)^{2}$.

145. 1) Подайте степінь z^{20} у вигляді степеня з основою z^{2}; z^{4}; z^{10}.

2) Подайте степінь 2^{20} у вигляді степеня з основою 4; 16; 32.

146. 1) Подайте степінь c^{12} у вигляді степеня з основою c^{2}; c^{4}; c^{6}.

2) Подайте степінь 3^{12} у вигляді степеня з основою 9; 27; 81.

147. Спростіть вираз:

1) $(a^{3}a^{4})^{5}$; 2) $(x^{7} : x)^{3}$; 3) $(k^{2})^{3} \cdot (k^{4})^{4}$; 4) $(a^{5})^{5} : (aa^{4})^{2}$.

148. Спростіть вираз:

1) $(c^{5}c^{6})^{2}$; 2) $(a^{8} : a^{5})^{5}$; 3) $(y^{4})^{2} \cdot (y^{2})^{4}$; 4) $(b^{6})^{3} : (b^{3})^{2}$.

149. Знайдіть значення виразу:

1) $(b^{5}b)^{2} : b^{9}$, якщо $b = 3$; $b = -3$;

2) $(a^{9} \cdot a^{3}) : (a^{8} \cdot a^{2})$, якщо $a = -1{,}5$; $a = 2\frac{1}{3}$.

150. Знайдіть значення виразу $(x^{15} : x^{3}) : (x^{4} \cdot x^{5})$, якщо $x = -3$; $x = \frac{1}{3}$.

Інтерактивне завдання 5
Властивості степеня з натуральним показником

4

151. Знайдіть значення виразу:

1) $16^{4} : (4^{12} : 8^{4})$;

2) $5^{25} \cdot 0{,}2^{24}$;

3) $100^{7} \cdot 0{,}1^{16}$;

4) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{8} : \left(1\frac{7}{9}\right)^{3} - \left(1\frac{1}{3}\right)^{9} \cdot \left(-\frac{27}{64}\right)^{3}$.

152. Знайдіть значення виразу:

1) $(27^8 : 9^5) : (9^4 \cdot 3^2)$; 2) $0{,}5^{18} \cdot 4^{10}$.

153. Якою цифрою закінчується запис числа n, якщо:

1) $n = 21^{23}$; 2) $n = 4^{20}$; 3) $n = 9^{15}$; 4) $n = 3^{24}$.

Розв'язання. 2) $n = 4^{20} = (4^2)^{10} = 16^{10}$ — запис числа n закінчується цифрою 6. (Якщо запис натурального числа закінчується цифрою 1, 5 або 6, то значення будь-якого натурального степеня цього числа закінчується тією ж цифрою.)

154. Доведіть, що значення виразу:

1) $6^{93} + 4$ ділиться на 10; 2) $3^{43} - 2$ ділиться на 5.

155. Доведіть, що значення виразу $4^{24} - 1$ ділиться на 5.

156. Доведіть, що куб натурального числа, кратного 3, ділиться на 27.

Вправи для повторення

157. Спростіть вираз:

1) $2x - 3 - (3x + 1)$; 2) $3(2a + 1) - 2(a - 2) - 9$.

158. Знайдіть значення виразу $10kn + 2k - 5n$, якщо $k = 5$, $kn = 1$.

159. За два дні сайт відвідали 4500 користувачів, до того ж першого дня в 1,25 раза менше, ніж другого. Скільки користувачів відвідали сайт першого дня?

160. У кімнаті завдовжки 4 м 20 см і завширшки 3 м 60 см хочуть викласти долівку однаковими плитками квадратної форми, не розрізаючи їх.

1) Який найбільший можливий розмір такої плитки?
2) Скільки потрібно плиток найбільшого розміру, щоб викласти ними долівку?
3) Скільки гривень потрібно заплатити за такі плитки, якщо одна плитка коштує 250 грн?

Поміркуйте

161. До деякого трицифрового числа Уляна дописала праворуч одну цифру, і від одержаного числа відняла початкове. Виявилося, що різниця ділиться на 9. Яку цифру дописала Уляна?

5 ОДНОЧЛЕНИ. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ОДНОЧЛЕНА

1. Одночлени. Розглянемо дві групи виразів:

$a,\ b^3,\ 5,\ 3^2,\ 9ab^2,\ -2x^4y^3,\ \frac{3}{7}m^2n$ → Дані вирази — це змінні, числа, їхні степені й добутки. Такі вирази називають *одночленами*.

Означення. ***Одночленом*** **називають вираз, що є добутком чисел, змінних та їх натуральних степенів.**

$3+2a,\ a-b,\ x^2+2x-3,\ m(1-n)$ → Вирази містять дії додавання або віднімання. Такі вирази не є одночленами.

Розглянемо одночлен $-4a^2b^3$. Він містить тільки один числовий множник, який стоїть на першому місці, та степені різних змінних. Такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*.

Означення. ***Одночленом стандартного вигляду*** **називають такий одночлен, який містить тільки один числовий множник, що стоїть на першому місці, та степені різних змінних.**

Числовий множник одночлена стандартного вигляду називають *коефіцієнтом* одночлена.

Так, коефіцієнт одночлена $-4a^2b^3$ дорівнює -4. Вважають, що коефіцієнти одночленів a^3 і $-bc$ відповідно дорівнюють 1 і -1, бо $a^3 = 1 \cdot a^3$ і $-bc = -1 \cdot bc$.

Одночлен $5a^3b^2a^4$ не є одночленом стандартного вигляду, бо містить два степені з основою a. Помноживши a^3 на a^4, цей одночлен можна записати у вигляді одночлена стандартного вигляду:

$$5a^3b^2a^4 = 5(a^3a^4)b^2 = 5a^7b^2.$$

2. Множення одночленів. Перемножимо одночлени $-3a^2b$ і $4ab^3$. Використовуючи властивості дії множення і властивості степенів, матимемо:

$$-3a^2b \cdot 4ab^3 = (-3 \cdot 4) \cdot (a^2a) \cdot (bb^3) = -12a^3b^4.$$

Отже, добутком одночленів $-3a^2b$ і $4ab^3$ є одночлен $-12a^3b^4$.

Узагалі, добутком будь-яких одночленів є одночлен.

3. Піднесення одночлена до степеня. Піднесемо одночлен $-5a^2b$ до куба. Використовуючи властивості степенів, матимемо:

$$(-5a^2b)^3 = (-5)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = -125a^6b^3.$$

Отже, кубом одночлена $-5a^2b$ є одночлен $-125a^6b^3$.

Узагалі, натуральним степенем будь-якого одночлена є одночлен.

4. Степінь одночлена. Розглянемо одночлен $3a^2bx^3$. У ньому сума показників степенів усіх змінних дорівнює $2 + 1 + 3 = 6$. Цю суму називають *степенем одночлена*, кажуть, що $3a^2bx^3$ — одночлен шостого степеня.

Означення. ***Степенем одночлена*** **називають суму показників степенів усіх змінних, які входять до нього.**

Наприклад: $-a^2b^7$ — одночлен дев'ятого степеня; $2a^2$ — одночлен другого степеня; $3x$ — одночлен першого степеня.

Якщо одночленом є число, відмінне від нуля, то вважають, що степінь такого одночлена дорівнює нулю. Наприклад, 2,5 — одночлен нульового степеня. Якщо одночленом є число 0, то степінь такого одночлена не визначений.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $6ab^2 \cdot (-4ab)$; 2) $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3$; 3) $(-x^2y \cdot 4xy^2)^3$.

• 1) $6ab^2 \cdot (-4ab) = (6 \cdot (-4)) \cdot (aa) \cdot (b^2b) = -24a^2b^3$.

Скорочений запис: $6ab^2 \cdot (-4ab) = -24a^2b^3$.

2) $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3 = (-3 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (a^3a^2) \cdot b \cdot (cc^3) = -36a^5bc^4$.

Скорочений запис: $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3 = -36a^5bc^4$.

3) $(-x^2y \cdot 4xy^2)^3 = (-4x^3y^3)^3 = -64x^9y^9$. •

Вправа 2. Подати одночлен $4a^4b^6$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
2) добутку двох одночленів, одним з яких є $2a^2b^2$;
3) квадрата одночлена стандартного вигляду.

• 1) $4a^4b^6 = 4a^2b^4 \cdot a^2b^2$;
(або $4a^4b^6 = 4a^4 \cdot b^6$, $4a^4b^6 = -2ab \cdot (-2a^3b^5)$ тощо);

2) $4a^4b^6 = 2 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^4 = 2a^2b^2 \cdot 2a^2b^4$;

3) $4a^4b^6 = (2a^2b^3)^2$. •

1. Що називають одночленом? Наведіть приклади одночленів.
2. Який одночлен називають одночленом стандартного вигляду? Наведіть приклади таких одночленів.
3. Що називають степенем одночлена?

Усно

162. Які з наведених виразів є одночленами:

1) $-3abc$; 2) $0{,}8x$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{1}{2}xy^5$;
5) $a + b$; 6) $3a^3b \cdot 2ab$; 7) m; 8) $-1{,}2?$

163. Серед наведених виразів укажіть одночлени стандартного вигляду та їхні коефіцієнти:

$2a^2ba$; $52xy$; $0{,}03ac^4$; $5ab \cdot 3cd$; x; $-z$; $-\frac{3}{8}km$; $4 \cdot 2a^2$.

164. Знайдіть степені одночленів:

$4a^2b^2$; xy^5; $0{,}1a^2b^3c$; $6a^2$; $-y^3$; $4a$; cd; $-2mnk$; 15.

165. Перемножте одночлени:

1) $2a$ і $3b$; 2) $4c^2$ і $2c$; 3) $5a^2x$ і ax; 4) $-xy^2$ і $2x$.

(1) (2)

166. Подайте одночлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь і коефіцієнт:

1) $4x^2x$; 2) $-5aba^3$; 3) $0{,}4x^2a^3x$;
4) $3mkmk$; 5) c^3dc^2d; 6) $-x^2yz^2xz^2$.

167. Подайте одночлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь і коефіцієнт:

1) $14yy^5$; 2) $-3cb^3c$; 3) $5aba^2b^3a^2$.

168. Виконайте множення одночленів:

1) $5a \cdot 4b$; 2) $3a^2 \cdot 5a^3$;

3) $7a^2b \cdot (-2ab)$; 4) $-4ax^2 \cdot 0{,}3bx^3$;

5) $\frac{2}{3}m^3n \cdot 3mn$; 6) $-8a^2bc^2 \cdot (-0{,}5bc)$;

7) $2x \cdot (-5x^2) \cdot 4x$; 8) $-3cd \cdot 2c^2d \cdot (-cd)$.

169. Виконайте множення одночленів:

1) $2m \cdot 12mn^5$; 2) $-cd \cdot 8c^4d$;

3) $2a^3b^2c \cdot 0{,}8abc^3$; 4) $-9n^3k \cdot \left(-\frac{2}{9}k\right)$;

5) $ab \cdot (-5ab^2) \cdot 2b$; 6) $1{,}5xy \cdot (-2x^2y^3) \cdot (-x^2y)$.

170. Піднесіть одночлен до степеня:

1) $(3a^3b)^3$; 2) $(-2mn^2)^5$; 3) $\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^3$; 4) $(-0{,}5mn^3k^4)^2$.

171. Піднесіть одночлен до степеня:

1) $(-5mn^2)^2$; 2) $(3a^3b^6)^3$; 3) $(-xy^2z^3)^5$; 4) $(2ab^4c^3)^4$.

172. Подайте одночлен $8x^2y^3$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів стандартного вигляду;

2) добутку двох одночленів, одним з яких є: $4x^2y^2$; $8xy$; $-2xy^3$.

173. Подайте одночлен $6b^3c^3$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів стандартного вигляду;

2) добутку двох одночленів, одним з яких є: $2bc$; $-3bc^3$.

174. Спростіть вираз:

1) $15a^3b^3 \cdot \left(-\frac{5}{6}a^4b^2\right)$; 2) $(3a^2b)^3 \cdot 0{,}01b^2$;

3) $8xy^3 \cdot 2{,}5x^3y^5 \cdot (-0{,}5x)$; 4) $(-4a^2b^3)^2 \cdot (-ab^3)^2$;

5) $\left(\frac{1}{3}mn^2\right)^4 \cdot (3m^3)^2 \cdot (-4{,}5)$; 6) $4(a^2bc)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}b^2c\right)^2 \cdot ac^2$.

175. Спростіть вираз:

1) $12m^3n \cdot \left(-\frac{2}{3}mn^2\right)$;
2) $-4p^3q \cdot 2{,}1pq^2 \cdot 0{,}25p$;
3) $(-a^2b)^3 \cdot (-3a^3b)^2$;
4) $\left(\frac{2}{3}xy^2z\right)^2 \cdot (-3x^2z)^3 \cdot xyz$.

176. Знайдіть значення виразу:

1) $(2a^2b)^2 \cdot ab^3$, якщо $a = 2$; $b = 5$;
2) $(xy^2z)^3 \cdot xzy^8$, якщо $x = \frac{1}{7}$; $y = -1$; $z = 7$;
3) $(a^2bc^2)^2 \cdot abc \cdot b^2$, якщо $a = 1\frac{1}{3}$; $b = -0{,}5$; $c = 3$.

177. Знайдіть значення виразу:

1) $(-mn^2)^3 \cdot 10m^4n$, якщо $m = 4$; $n = 0{,}25$;
2) $(2abc^4)^2 \cdot 0{,}25(ab)^6$, якщо $a = \frac{1}{7}$; $b = 14$; $c = -1$.

178. Для деяких значень змінних значення виразу m^2n^3 дорівнює 2. Знайдіть для тих самих значень змінних значення виразу:

1) $6m^2n^3$;
2) m^4n^6;
3) $4m^8n^{12}$;
4) $-3m^6n^9$.

179. Подайте одночлен $64a^6b^{18}$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
2) добутку двох одночленів, одним з яких є $-4a^4b^6$;
3) квадрата одночлена стандартного вигляду;
4) куба одночлена стандартного вигляду.

180. Подайте одночлен $16x^{12}y^8$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів, одним з яких є $-2x^3y^7$;
2) квадрата одночлена стандартного вигляду;
3) четвертого степеня одночлена стандартного вигляду.

181. Який одночлен стандартного вигляду потрібно записати у квадратик, щоб одержати тотожність:

1) $\square \cdot 3x^2y = 12x^3y^4$;
2) $\square \cdot (-m^2n^2) = 2m^5n^3$;
3) $-2a^2bc^3 \cdot \square = -6a^5b^3c^3$;
4) $\square \cdot 4bc^3 = -6a^2b^2c^3$?

182. Який одночлен стандартного вигляду потрібно записати у квадратик, щоб одержати тотожність:

1) $\square \cdot 2ab^4 = -2a^3b^6$;
2) $2x^2y^2 \cdot \square = 5x^4y^2z^3$?

183. Як зміниться об'єм куба, якщо його ребро збільшити вдвічі?

184. Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону збільшити втричі?

Інтерактивне завдання 6

Одночлени. Стандартний вигляд одночлена

4

185. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $(a^{n+1} \cdot b^{2n}) \cdot 2a^{2n} \cdot (2b)^2$; 2) $((x^4)^n)^3 \cdot 2(-x^{2n})^5$.

186. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $4((x^2)^3)^4 \cdot (-2(x^4)^3)^2$; 2) $(-a^n)^3 \cdot (-a^{n+1})^5$.

187. Знайдіть значення виразу $(5^k a^k b^{k+2})^2 \cdot (5ab)^k$, якщо $a = 0{,}1$; $b = -2$; $k = 21$.

188. Знайдіть значення виразу $(4xy^2)^{2n} \cdot (4x^3y^2)^{2n}$, якщо $x = -\frac{1}{4}$; $y = 2$; $n = 20$.

189. Мило має форму прямокутного паралелепіпеда. За тиждень користування всі його виміри зменшилися вдвічі. У скільки разів зменшився об'єм мила?

Вправи для повторення

190. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $(-2b + 4) - (4b - 1) + 6b$; 2) $-3x + 5 - (3 - x) - (2 + 2x)$.

191. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(x - 1) + 3 = 5$; 2) $3(x - 4) = 5x - 4$.

192. Щоб купити новий телевізор, тато взяв у банку кредит на 10 місяців. Для погашення кредиту потрібно щомісяця повертати банку ту саму суму грошей. Якби кредит був оформлений на 8 місяців, то щомісяця довелося б повертати банку на 300 грн більше. Скільки гривень кредиту взяв тато?

193. У саду ростуть яблуні, сливи та абрикоси, кількості яких відносяться як 8 : 3 : 2. Скільки слив росте в саду, якщо в ньому яблунь на 18 більше, ніж абрикосів?

Поміркуйте

194. На майданчику хлопці нашого двору грають у футбол. У кожному матчі беруть участь по 5 хлопців у кожній команді. За місяць було зіграно 15 матчів, у яких загалом зіграли 30 хлопців. Доведіть, що серед них є хлопець, який зіграв не більше ніж 5 матчів.

Завдання для повторення § 1

195. Запишіть у вигляді виразу:
1) різницю чисел 2,5 і a; 2) суму квадратів чисел m і n;
3) різницю числа a і добутку чисел b та c.

196. Довжина ділянки прямокутної форми дорівнює a м, а ширина — на 30 м менша. Запишіть у вигляді виразу площу ділянки. Знайдіть значення цього виразу, якщо $a = 50$.

197. У першій вазі є n квіток, що на 5 квіток більше, ніж у другій, і на 3 квітки менше, ніж у третій. Запишіть у вигляді виразу кількість квіток у трьох вазах разом.

198. З міста A в місто B виїхав автобус. Через 0,5 год назустріч йому з міста B виїхав автомобіль, який через t год руху зустрів автобус. Запишіть у вигляді виразу відстань між містами, якщо автобус рухався зі швидкістю 70 км/год, а автомобіль — 90 км/год.

199. Ціну на товар знизили на 20 % і він став коштувати n грн. Знайдіть початкову ціну товару.

200. Спростіть вираз:
1) $6a + 5(7 - 12a)$; 2) $5 + (5x - y) - 4x - (3y + 5)$;
3) $3b + 7 - 2(3 - 2(b + 1))$; 4) $0{,}3(x - 4) - 0{,}4(x - y) + 1{,}6y$.

201. Знайдіть значення виразу:
1) $\frac{2}{7}x - 3y$, якщо $x = 21$; $y = -1$;
2) $24(a - 2) - 4a$, якщо $a = 0{,}5$.

202. Для яких значень x значення виразу $5x - 8$ дорівнює 1?

203. Доведіть, що значення виразу $2(1 - 3x) - 3(1 - 2x)$ не залежать від значень x.

204. Доведіть тотожність:

1) $7(4 - a) - 3(-3a + 1) - 25 = 2a$;

2) $9{,}8b - 5 = 9b - 1{,}2b - 2(2{,}5 - b)$;

3) $5\frac{1}{3}\left(\frac{3}{8}a + b\right) - \left(\frac{1}{12}b - 0{,}125a\right) = 2{,}125a + 5{,}25b$.

205. Знайдіть значення степеня:

1) 10^5; 2) $(-3)^6$; 3) $(-2{,}5)^3$; 4) $\left(3\frac{1}{3}\right)^4$.

206. Знайдіть значення виразу:

1) $2^4 + (-2)^5$;
2) $(-4 \cdot 1{,}5 + 8)^5$;
3) $(-0{,}125 \cdot 2^3)^{15}$;
4) $(5^6 : 5^4)^2$;
5) $0{,}25^5 \cdot 2^5 \cdot 4^5$;
6) $81^2 : 3^7 + 8^5 \cdot 0{,}5^{14}$.

207. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^3a^5; 2) $b^9 : b^8$; 3) $(p^2)^5$; 4) a^5aa^4;
5) $(y^3)^8 : (y^3y)^5$;
6) $(ab^2)^4 \cdot (a^4b^2)^2$.

208. Заповніть таблицю:

Одночлен	Стандартний вигляд одночлена	Степінь одночлена	Коефіцієнт одночлена
$-2a^4ba$			
$4c \cdot (-3)$			
$-0{,}5b^2 \cdot (-2a^3b)$			

209. Подайте одночлен у стандартному вигляді:

1) $-3x^3 \cdot 2xy^2$;
2) $1{,}2a^2b^3 \cdot \left(-\frac{1}{6}a^3b^2\right)$;
3) $2{,}5xz \cdot (-4x^3z^3) \cdot x^2z$;
4) $(-4m^2n^5)^3 \cdot (-2mn^3)^2$.

210. Знайдіть значення виразу:

1) $(2x - 3)^4$, якщо $x = -1$; $x = 3$;

2) $(3x^2y)^3 \cdot y^3$, якщо $x = 2$; $y = 0{,}5$;

3) $(a^2bc)^2 \cdot 5abc^3$, якщо $a = 1\frac{1}{6}$; $b = -4$; $c = \frac{6}{7}$.

211. 1) Подайте у вигляді квадрата число: 169; 1,44; $\frac{49}{121}$; $7\frac{1}{9}$.

2) Подайте у вигляді куба число: 64; −27; 0,008; $-\frac{125}{216}$; $3\frac{3}{8}$.

212. 1) Подайте степінь a^{36} у вигляді степеня з основою a^3; a^9; a^{12}.
2) Подайте степінь 4^{18} у вигляді степеня з основою 2; 16; 8.

213. Подайте одночлен $49a^4b^{12}$ у вигляді:
1) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
2) добутку двох одночленів, одним з яких є $-7a^3b^7$;
3) квадрата одночлена стандартного вигляду.

214. Розв'яжіть рівняння:
1) $(4x - 2)^9 = 0$; 2) $(2x)^2 + (8x)^8 = 0$; 3) $x^6 + |3x| = -2$.

215. Якою цифрою закінчується значення степеня 3^{21}?

Інтерактивне завдання для самоперевірки 1
Цілі вирази. Одночлени

Завдання для самоперевірки № 1

Початковий рівень

1. Який з наведених записів є виразом зі змінними?
А 2,5 : 5 **Б** $3x = 9y$ **В** $y > 3$ **Г** $2a + 3ab$

2. Запишіть у вигляді виразу вартість покупки, якщо було куплено 10 однакових зошитів за ціною m грн і ручку за ціною k грн.
А $(m + k)$ грн **Б** $(10m + k)$ грн
В $(m + 10k)$ грн **Г** $(10m + 10k)$ грн

3. Чому дорівнює значення виразу $2x^4$, якщо $x = 2$?
А 4 **Б** 16 **В** 32 **Г** 64

4. Укажіть вираз, тотожно рівний виразу $3y + 5 - 7y$.
А $-4y$ **Б** $5 + 4y$ **В** $5 - 2y$ **Г** $5 - 4y$

5. Яка з наведених рівностей є неправильною?
А $2^4 \cdot 2^3 = 2^7$ **Б** $2^9 : 2^3 = 2^6$
В $(3^2)^3 = 3^5$ **Г** $3^6 \cdot 2^6 = 6^6$

6. Перемножте одночлени $2a^2b^3$ і $3a^4$.
А $6a^2b^7$ **Б** $6a^8b^3$ **В** $5a^6b^3$ **Г** $6a^6b^3$

Середній рівень

7. Обчисліть: $100 \cdot 0{,}3^2 + (-3)^4$.

А -72 **Б** -9 **В** 72 **Г** 90

8. Спростіть вираз $12k - 0{,}4(5k - 3) + 2$.

А $14k + 3{,}2$ **Б** $14k + 0{,}8$ **В** $10k + 3{,}2$ **Г** $10k + 0{,}8$

9. Подайте у стандартному вигляді одночлен $-0{,}3ab^3 \cdot 5a^4b^2$.

А $-1{,}5a^5b^5$ **Б** $1{,}5a^5b^5$ **В** $-1{,}5a^4b^5$ **Г** $-0{,}15a^5b^5$

10. Установіть відповідність між виразами (1–3) та їх записами у вигляді степеня (А–Д).

1 $b^{15} : b^3$	**А** b^{10}
2 $(b^3)^2 \cdot b^8$	**Б** b^{12}
3 $b^8 \cdot c^8$	**В** b^{14}
	Г $(bc)^8$
	Д $(bc)^{16}$

Достатній рівень

11. Обчисліть: 1) $(3^7 \cdot 5^7) : (-15)^5$; 2) $8^5 \cdot (-0{,}5)^{15}$.

12. Доведіть тотожність

$$0{,}3(a - 3) - 0{,}5(a - 1) = 0{,}2(a - 6) - 0{,}4(a - 2).$$

13. Знайдіть значення виразу $2(x^2yz^3)^2 \cdot x^2y^2$, якщо $x = \frac{2}{3}$; $y = -2$; $z = 1{,}5$.

14. Подайте одночлен $64a^{12}b^{18}$ у вигляді:
1) добутку двох одночленів, одним з яких є $-4a^5b^8$;
2) куба одночлена стандартного вигляду.

Високий рівень

15. Знайдіть значення виразу $0{,}2^{16} \cdot 125^6 - (-4)^9 \cdot 0{,}25^9$.

16. Розв'яжіть рівняння $(1 - 2x)^4 + (4x - 2)^8 = 0$.

17. Три екскаватори вирили траншею. Перший екскаватор вирив x м траншеї, або четверту частину всієї траншеї, другий — на 20 м більше, ніж перший. Скільки метрів траншеї вирив третій екскаватор?

18. Доведіть, що сума трицифрового числа і подвоєної суми його цифр ділиться на 3.

§ 2. МНОГОЧЛЕНИ

6 МНОГОЧЛЕНИ. СТЕПІНЬ МНОГОЧЛЕНА

1. Многочлени. Розглянемо вираз $2a^2 - 3ab + 5$, який є сумою одночленів $2a^2$, $-3ab$ і 5. Такий вираз називають *многочленом*.

Означення. ***Многочленом*** **називають суму кількох одночленів.**

Одночлени, які складають многочлен, називають *членами* цього *многочлена*. Так, членами многочлена $2a^2 - 3ab + 5$ є $2a^2$, $-3ab$ і 5.

Многочлен, який складається з двох членів, називають двочленом, многочлен, який складається з трьох членів, — тричленом і т. д. Наприклад:

$a^2 + b$, $2x - 3$ — двочлени

$a^2 - ab + b^2$, $x + 2y - 1$ — тричлени

Уважають, що кожний одночлен є многочленом, який складається з одного члена.

2. Многочлени стандартного вигляду. Розглянемо многочлен $4xy - 6 + y - 2xy + 3$. Два його члени $4xy$ і $-2xy$ є подібними доданками, бо відрізняються лише числовими множниками. Члени -6 і 3 не містять змінних. Вони також є подібними доданками. Подібні доданки многочлена називають *подібними членами* многочлена.

Зведемо в многочлені $4xy - 6 + y - 2xy + 3$ подібні члени:

$$4xy - 6 + y - 2xy + 3 = (4xy - 2xy) + y + (-6 + 3) = 2xy + y - 3.$$

Многочлен $2xy + y - 3$ вже не має подібних членів, і кожний його член є одночленом стандартного вигляду. Такий многочлен називають *многочленом стандартного вигляду*.

Означення. ***Многочленом стандартного вигляду*** **називають многочлен, складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних членів.**

Так, серед многочленів

$$a^2 + 4ab - 3b^2, \qquad x^2yx - 2, \qquad 4ab + 2b^2 - ab$$

лише перший є многочленом стандартного вигляду, а два інші — ні (перший член другого многочлена не є одночленом стандартного вигляду, а третій многочлен має подібні члени).

3. Степінь многочлена. Розглянемо многочлен $2x^2y^2 + y^3 - 2x$. Він має стандартний вигляд, і його членами є одночлени відповідно четвертого, третього і першого степенів. Найбільший із цих степенів називають *степенем* даного *многочлена*. Отже, $2x^2y^2 + y^3 - 2x$ — многочлен четвертого степеня.

Означення. ***Степенем многочлена*** **стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, які складають цей многочлен.**

За цим означенням

$2a + 1$, $3x - 4y + 3$ — многочлени першого степеня;

$x^2 - 2x + 3$, $ab - 3a^2 + b$ — многочлени другого степеня;

$-x^2y^4 + x^3 + 2y$ — многочлен шостого степеня.

Члени многочлена можна записувати в довільній послідовності. Для многочленів стандартного вигляду, що містять одну змінну, члени, як правило, упорядковують за спаданням або зростанням показників степенів змінної. Наприклад:

$5x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x + 2$; $\qquad 2 + 3x - 4x^2 + x^3 + 5x^4$.

Зазначимо, що кожний многочлен є цілим виразом. Однак не кожний цілий вираз є многочленом. Наприклад, цілі вирази $2(a + 5)$, $(a - b)^2$ — не многочлени, бо вони не є сумами одночленів.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Записати в стандартному вигляді многочлен:

1) $2x^2 + 3x - 4x^2 + 1 - x$; $\qquad$ 2) $4a^2b + 2 - 2aba - 5$.

• 1) $\underline{2x^2} + \underline{3x} - \underline{4x^2} + 1 - \underline{x} = -2x^2 + 2x + 1$;

2) $4a^2b + 2 - 2aba - 5 = \underline{4a^2b} + \underline{2} - \underline{2a^2b} - \underline{5} = 2a^2b - 3$. •

1. Що називають многочленом? Наведіть приклади многочленів.
2. Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду? Наведіть приклад такого многочлена.
3. Що називають степенем многочлена? Наведіть приклад многочлена другого степеня.

«Усно

216. Які з наведених виразів є многочленами?

1) $3x + 5$; 2) $m(m - 2)$; 3) $5a^3 + bc^2 - ab$;

4) $(b - c)^2$; 5) $a^2 + \frac{1}{2}a$; 6) $n^2 + \frac{1}{n}$.

217. Назвіть члени многочлена:

1) $y^3 - 2y^2 + 3y - 1$; 2) $a^2 - 2ab - 3b^2 + a^2b^2$.

218. Серед наведених многочленів укажіть многочлени стандартного вигляду та їхні степені:

1) $c^2 + 4c - 2$; 2) $x + y + 1$;

3) $a - a^2 + 5a + 2$; 4) $3b^2c - 2bc^2$;

5) $4y - y \cdot 2y$; 6) $km + 3$.

219. Назвіть подібні члени многочлена та подайте його в стандартному вигляді:

1) $4a - 3 - a + 2$; 2) $3x^2 + 4y - 2x^2 + y - 1$.

«1 2

220. Складіть многочлен з одночленів:

1) $2y^2$, $3y$ і -5; 2) a^2, $-2ab$ і b^2;

3) $-k$, $-m$, m^2 і $2m^3$; 4) xy, $-2x$, $2y$ і $-4y^2$.

221. Складіть многочлен з одночленів:

1) a^3, $-2a^2$, $2a$ і -1; 2) x^2, $-4xy$, $-y^2$ і $2x$.

222. Запишіть многочлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь:

1) $3x - 2 + 2x - 5$; 2) $1{,}2a + a + 3{,}5 - 2a - 4$;

3) $4m + 3 + n - 3 - 2n + 2m$; 4) $x^2 + 2x + x^2 - 3x + 3 - x$;

5) $3a^3 + 5a^2 - 5a^3 - 3a^2 + 7a$; 6) $5c^2 - 3bc + 6bc - 2c^2$.

223. Запишіть многочлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь:

1) $5a + 6 - 3a - 4$; 2) $10k + 5{,}5 - 2{,}5k - 4{,}5k$;

3) $2x^2 + 3x + x^2 - 3x - 3 + x$; 4) $ab^2 + 3ab + ab^2 - 3ab^2 - ab$.

224. Розташуйте члени многочлена за спаданням показників степенів змінної:

1) $5x - 4x^3 - 5 + x^2 + 3x^4$; 2) $a^6 + 5a - 7a^2 - 2a^4 - 2a^7 - 4$.

225. Розташуйте члени многочлена за зростанням показників степенів змінної:

1) $6b^3 - 2b + 1 + 3b^4 - b^2$; 2) $x^5 + 2x^6 - 3x - x^4 + 2 + 8x^8$.

226. Знайдіть значення многочлена:

1) $2c^2 + 3c - 2$, якщо $c = 2$;

2) $5ab - a^2 + 4$, якщо $a = -1$; $b = 4$;

3) $3x - x^2 - 1 + 2x^2 - 3x$, якщо $x = 1{,}2$.

227. Знайдіть значення многочлена:

1) $4x^2 + 5x + 2$, якщо $x = -2$;

2) $3bc + 8bc - 3 - 7bc$, якщо $b = 1{,}5$; $c = -4$.

«3

228. Запишіть многочлен у стандартному вигляді та знайдіть його степінь:

1) $7a^5b - 4b^5a + 8a^5b - 3a^5 - 5ab^5$;

2) $3x^2 \cdot 0{,}4x - 0{,}9x^3 + x \cdot 4y - 2xy$;

3) $1{,}2abc + \frac{1}{4}a^2b - 0{,}8abc - \frac{1}{2}aba$.

229. Запишіть многочлен у стандартному вигляді та знайдіть його степінь:

1) $-3{,}5ab - a^2b + 3 + ab + 1{,}5a^2b$;

2) $\frac{1}{4}c^3d - 2c^2dc + 4\frac{3}{8}c^3d - 1$.

230. Знайдіть значення многочлена:

1) $6x^4 - 4x^2 - 8x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 1$, якщо $x = -1{,}2$;

2) $4x^2y - 6x^2y - 3 + 1{,}5x^2y$, якщо $x = -4$; $y = 1{,}5$;

3) $-4a^2b^3 + 7ab^3 - ab^3a + b^2ab - 8ab^3$, якщо $a = -0{,}5$; $b = 2$.

231. Знайдіть значення многочлена:

1) $3a^7 - 3a^4 + 6 - 4a^7 + 5a^4 + a^7$, якщо $a = -3$;

2) $2m^4n^2 + 4m^2n^2m^2 - 8nm^4n + 4m^2n$, якщо $m = -0{,}5$; $n = 4$.

232. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду число, яке має a десятків тисяч, b тисяч, 8 сотень, a десятків і b одиниць.

233. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду число, яке має n тисяч, m сотень, m десятків і n одиниць.

Інтерактивне завдання 7
Многочлени. Степінь многочлена

4

234. Чотирицифрове число, яке має a тисяч, b сотень, c десятків і d одиниць, позначають через $\overline{abcd}$, тобто

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$$

Доведіть, що число $\overline{abba}$ ділиться на 11.

235. Доведіть, що число $\overline{mama}$ ділиться на 101.

Вправи для повторення

236. Розкрийте дужки:

1) $4a - (3b + 5 - 2c)$;
2) $3 + (-3x + 4y) - (2z - t)$.

237. Розв'яжіть рівняння:

1) $4 - 3y = 6y + 22$;
2) $0{,}5(9z + 2) = 7z + 2{,}5$.

238. Кавові зерна в процесі смаження втрачають 12 % своєї маси.

1) Скільки кілограмів смажених зерен вийде із 20 кг свіжих?
2) Скільки кілограмів свіжих зерен потрібно взяти, щоб отримати 22 кг смажених?

239. Катер пройшов 84 км за 4,5 год, до того ж протягом 2,5 год він ішов за течією річки, а решту часу — проти течії. Знайдіть швидкість катера у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2,4 км/год.

Поміркуйте

240. Кенгуру стрибає вздовж прямої. Довжина кожного стрибка дорівнює 1 м. Чи може кенгуру, перебуваючи в деякій точці прямої, за 101 стрибок знову повернутись у цю ж точку?

Цікаво знати

2002 року ЮНЕСКО (міжнародна організація ООН з питань освіти, науки і культури) внесла ім'я українського математика **Михайла Кравчука** до переліку найвидатніших людей світу.

Народився Михайло Кравчук на Волині в селі Човниці, закінчив Луцьку гімназію, Київський університет. З часу створення в Києві Інституту математики (1934 р.) очолював у ньому один з відділів, був організатором першої в Україні математичної олімпіади школярів (1935 р.).

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942)

Михайло Кравчук написав понад 180 наукових праць, які стосуються різних розділів математики, зокрема алгебри і теорії чисел. Його наукові доробки були використані під час створення першого комп'ютера, а запропоновані ним спеціальні многочлени зараз відомі як *многочлени Кравчука*.

7 ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

1. Додавання многочленів. Додамо многочлени $4a^2 - 6a$ і $-2a^2 + 3a + 5$:

$$(4a^2 - 6a) + (-2a^2 + 3a + 5) = \underline{4a^2} - \underline{\underline{6a}} - \underline{2a^2} + \underline{\underline{3a}} + 5 =$$
$$= 2a^2 - 3a + 5.$$

Розкривши дужки та звівши подібні члени, ми записали суму даних многочленів у вигляді многочлена. Отже, сумою многочленів $4a^2 - 6a$ і $-2a^2 + 3a + 5$ є многочлен $2a^2 - 3a + 5$.

У такий же спосіб додають три й більше многочленів.

Суму будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

2. Віднімання многочленів. Віднімемо від многочлена $4x^2 - 4x + 1$ многочлен $x^2 - 3x + 5$:

$$(4x^2 - 4x + 1) - (x^2 - 3x + 5) = \underline{4x^2} - \underline{\underline{4x}} + \underline{\underline{\underline{1}}} - \underline{x^2} + \underline{\underline{3x}} - \underline{\underline{\underline{5}}} = \\ = 3x^2 - x - 4.$$

Розкривши дужки та звівши подібні члени, ми записали різницю даних многочленів у вигляді многочлена. Отже, різницею многочленів $4x^2 - 4x + 1$ та $x^2 - 3x + 5$ є многочлен $3x^2 - x - 4$.

Різницю будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти суму многочленів:

1) $-5x^2 + 2xy - 4$ і $4x^2 - 6xy$; 2) $2a - 2$; $5a + 2b$ і $-3a + 6b$.

• 1) $(-5x^2 + 2xy - 4) + (4x^2 - 6xy) =$

$= -\underline{5x^2} + \underline{\underline{2xy}} - 4 + \underline{4x^2} - \underline{\underline{6xy}} = -x^2 - 4xy - 4;$

2) $(2a - 2) + (5a + 2b) + (-3a + 6b) =$

$= \underline{2a} - 2 + \underline{5a} + \underline{\underline{2b}} - \underline{3a} + \underline{\underline{6b}} = 4a + 8b - 2.$ •

Вправа 2. Знайти різницю многочленів $a^2 + 4ab - 1$ і $2a^2 - 3ab$.

• $(a^2 + 4ab - 1) - (2a^2 - 3ab) =$

$= \underline{a^2} + \underline{\underline{4ab}} - 1 - \underline{2a^2} + \underline{\underline{3ab}} = -a^2 + 7ab - 1.$ •

Вправа 3. Розв'язати рівняння $4x^3 - 2x - (4x + 9 + 4x^3) = 0$.

• $4x^3 - 2x - 4x - 9 - 4x^3 = 0$; $-6x - 9 = 0$; $-6x = 9$; $x = -1{,}5$.

Відповідь. $-1{,}5$. •

Вправа 4. Довести, що сума трьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 3.

• Нехай із трьох послідовних непарних чисел найменшим є $2n + 1$, де n — деяке натуральне число або 0. Тоді наступні непарні числа — $2n + 3$ і $2n + 5$. Знайдемо суму цих трьох чисел:

$$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 6n + 9.$$

У сумі $6n + 9$ кожний доданок ділиться на 3, тому й сума ділиться на 3 ●

1. Як знайти суму многочленів? Наведіть приклад.
2. Як знайти різницю многочленів? Наведіть приклад.

«Усно

241. Знайдіть суму многочленів:
1) $2a^2 - a$ і $a^2 - 3a$; 2) $4x + 3y$ і $2x - 2y + 4$.

242. Знайдіть різницю многочленів:
1) $3x^2 + 4x$ і $2x^2 + 2x$; 2) $5a + 4b + 4$ і $4a + 4b$.

«1 2

243. Дано многочлени: $3x^2 + 2x - 5$ і $2x^2 - 2x + 3$. Запишіть і подайте у вигляді многочленів стандартного вигляду:
1) суму цих многочленів;
2) різницю першого й другого многочленів;
3) різницю другого й першого многочленів.

244. Запишіть суму та різницю многочленів $6y^2 - 4y + 3$ і $5y^2 + 6y - 3$. Подайте суму та різницю у вигляді многочленів стандартного вигляду.

245. Знайдіть суму многочленів:
1) $2a^3 - 4a^2 + a$ і $a^3 + 3a^2 - 2a + 2$;
2) $-5x + 2$; $-x^2 + 7x - 3$ і $3x^2 - 4$;
3) $a^2 - 2ab + b^2$ і $a^2 + 2ab + b^2$;
4) $4mn - 6m$; $2m - 6mn$ і $-mn - m$.

246. Знайдіть суму многочленів:
1) $3x^4 + 5x^2 - 5$ і $x^4 - 3x^2 + 4$;
2) $-2b^2 - 3a$; $3b^2 + 2a$ і $-2b^2 + a$.

247. Знайдіть різницю многочленів:
1) $4a^2 - 8a + 5$ і $2a^2 - 2a - 5$;
2) $c^3 + 3c^2 - 4c + 1$ і $2c^3 - 3c^2 + c + 4$;
3) $5x^3 + 4x^2 + 3x - 4$ і $5x^3 - 4x^2 + 3x + 12$;
4) $-n^3 + 3n^2 + 3$ і $2n^4 - 3n^3 + 3n^2 - 5$.

248. Знайдіть різницю многочленів:

1) $4x^3 + 3x^2 + x - 4$ і $2x^3 - x^2 + 2x + 7$;

2) $-4m^3 + 4m^2 + m - 1$ і $-4m^3 + 4m^2 + m + 1$;

3) $5a^2 + 3a + 6$ і $8a^3 - 2a^2 + 6$.

249. Знайдіть суму та різницю многочленів:

1) $2a + b$ і $a - 2b$; 2) $2a - 3b$ і $3b - 2a$.

250. Знайдіть суму та різницю многочленів $x + y$ і $x - y$.

251. Спростіть вираз:

1) $4a - (5a^2 + 3a - 2)$;

2) $(4m^2 - 3m + n) - (-5m + m^2 - 3n)$;

3) $(7x^3 - 4yz) - (8yz - 3x^3) - (x^3 + 3yz)$;

4) $(4{,}5ab + 3a) + (-2{,}5ab - 2{,}9a)$.

252. Спростіть вираз:

1) $(-a + a^2) - (3a^2 - 2 + 2a)$;

2) $(x^2 + y) - (2x^2 - y) - (-3x^2 + y)$.

253. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 - 3x - (2x + 2x^2) = 5$; 2) $-5y^3 - 4 - (-4y - 5y^3 + 4) = 0$.

254. Розв'яжіть рівняння:

1) $5z + z^2 - (z + z^2) = -8$; 2) $3x^2 + 4x - (6x + 3x^2 - 2) = 0$.

Інтерактивне завдання 8

Додавання і віднімання многочленів

3

255. Спростіть вираз:

1) $(-2a^2b^3 + ab^3) - (a^2b^3 - 3ab^3) - (4ab^3 - 4a^2b^3)$;

2) $3x^5 + x^4 - (2x - 3x^4 + 12) - (3x^5 + 2x^4 - 3) - (3x^4 + 2)$;

3) $5xy - (x^2 + 4xy - (-x^2 + xy))$.

256. Спростіть вираз:

1) $6ab + 3b^2 - (1 + 2b^2) - (-2ab - 3b^2) + 1$;

2) $2n^2 + 4n - (3n^2 - 3n - 1 - (n - 1))$.

257. Дано вираз $4x^4 - 4x^2 + 6 - (-6x^2 + 3x^4) - (x^4 + 4)$. Знайдіть його значення, якщо $x = 2$; $x = -0{,}5$.

258. Дано вираз $7b^4 - (4b^2 - b^4 + 3b) - (-5b^2 + 8b^4 + 2b)$. Знайдіть його значення, якщо $b = 5$; $b = -0{,}2$.

259. Дано вираз $-(x^3 - 2y^2) + (x^3 + 3x) - (3x + 4y^2)$. Доведіть, що його значення не залежать від значень x.

260. Доведіть, що значення виразу $(a^3 + 2ab) - (b^2 + ab) + (b^2 - ab)$ не залежать від значень b.

261. Доведіть тотожність:

1) $-(2m^6 - 3m^7) - (2m^7 - 3m^5) - (-2m^6 + 3m^5) = m^7$;

2) $(a^2 + ab + b^2) - (a^2 - ac - c^2) - (b^2 - bc + c^2) = ab + ac + bc$.

262. Доведіть тотожність

$$(3ab - a) - (2ab - b) - (ab - a - b) = 2b.$$

263. Знайдіть такий многочлен P, для якого наведена рівність є тотожністю:

1) $P + (2x^2 + x - 2) = -x^2 + 1$;

2) $P - (x^2 - 3x + 3) = 3x - 1$;

3) $(4x^2 - 2x + 1) - P = x^2 - 2x + 1$.

264. Знайдіть многочлен, який у сумі з многочленом $2x^2 + x - 4$ дає многочлен $3x + 2$.

265. Розв'яжіть рівняння:

1) $4z^2 - 2 - (5z - 12 + z^2) = 3z^2$;

2) $-(x^4 + 2) - (-5x^4 + 2x) = 4x^4 + 2x + 5$.

266. Розв'яжіть рівняння:

1) $-(1 + 2x - x^2) - (3x + 5) = x^2$;

2) $2 - (-6 + y - 4y^3) = 4y^3 + y + 4$.

267. На трьох ділянках посадили яблуні: на першій ділянці — n яблунь, що на 20 яблунь більше, ніж на другій, і на 12 яблунь менше, ніж на третій. Скільки яблунь посадили на трьох ділянках разом?

268. За 1 хв перший автомат розфасовує m кг борошна, що на 7 кг менше, ніж другий, і на 5 кг більше, ніж третій. Скільки кілограмів борошна розфасовують за 1 хв три автомати разом?

269. Доведіть, що сума чотирьох послідовних натуральних чисел не ділиться на 4.

270. Доведіть, що сума трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3.

271. Доведіть, що сума трьох послідовних парних натуральних чисел ділиться на 6.

272. Доведіть, що різниця трицифрового числа та суми його цифр ділиться на 9.

273. Двоцифрове число, яке має a десятків і b одиниць, позначають через $\overline{ab}$, тобто $\overline{ab} = 10a + b$. Доведіть, що сума $\overline{ab} + \overline{ba}$ ділиться на 11.

Вправи для повторення

274. Обчисліть, використавши розподільну властивість множення:

1) $18 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$; 2) $24 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$; 3) $\left(0{,}5 - \frac{1}{3}\right) \cdot 30$.

275. Виконайте множення одночленів:

1) $5a^2 \cdot 3a^3$; 2) $4ax \cdot (-0{,}3ax^2)$; 3) $-2cd \cdot (-3c^4d)$.

276. Із цукрових буряків у процесі переробки одержують 16 % цукру. Скільки тонн буряків потрібно взяти, щоб отримати 4 т цукру?

277. Довжина всіх ходів печери Оптимістичної дорівнює 240 км, а печери Озерної — 134 км. (Обидві печери розташовані на Тернопільщині, першу з них занесено до Книги рекордів Гіннеса як найдовшу у світі гіпсову печеру.) На скільки відсотків довжина ходів печери Озерної менша від довжини ходів печери Оптимістичної? Результат округліть до десятих відсотка.

Печера Оптимістична

Поміркуйте

278. В одному класі кількість хлопців, які розв'язали дану задачу, виявилася такою самою, як і кількість дівчат, які її не розв'язали. Кого в тому класі більше: тих, хто розв'язав задачу, чи дівчат?

8 МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Помножимо одночлен $2a$ на многочлен $a^2 - 3a + 4$. Використовуючи розподільну властивість множення, матимемо:

$$2a(a^2 - 3a + 4) = 2a \cdot a^2 - 2a \cdot 3a + 2a \cdot 4 = 2a^3 - 6a^2 + 8a.$$

Отже, добутком одночлена $2a$ і многочлена $a^2 - 3a + 4$ є многочлен $2a^3 - 6a^2 + 8a$. Щоб знайти добуток, ми помножили одночлен на кожний член многочлена й одержані результати додали.

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен помножити на кожний член многочлена й одержані добутки додати.

За цим правилом можна множити й многочлен на одночлен. Наприклад:

$$(3x^2 - x + 2) \cdot 3x = 3x^2 \cdot 3x - x \cdot 3x + 2 \cdot 3x = 9x^3 - 3x^2 + 6x.$$

Добуток будь-якого одночлена й будь-якого многочлена завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виконати множення: $-2a^2b(-5b^2 + 2ab)$.

• $-2a^2b(-5b^2 + 2ab) = -2a^2b \cdot (-5b^2) + (-2a^2b) \cdot 2ab =$
$= 10a^2b^3 - 4a^3b^2.$

Скорочений запис: $-2a^2b(-5b^2 + 2ab) = 10a^2b^3 - 4a^3b^2.$ •

Вправа 2. Спростити вираз $2x(x^2 + 4x - 2) - 2x^2(x - 1)$.

• $2x(x^2 + 4x - 2) - 2x^2(x - 1) = \underline{2x^3} + \underline{8x^2} - 4x - \underline{2x^3} + \underline{2x^2} =$
$= 10x^2 - 4x.$ •

Вправа 3. Розв'язати рівняння $2x(2x + 3) - 7 = 4x^2 - 4$.

• $4x^2 + 6x - 7 = 4x^2 - 4$; $4x^2 + 6x - 4x^2 = 7 - 4$; $6x = 3$; $x = 0{,}5$.

Відповідь. 0,5. •

1. Як помножити одночлен на многочлен?

«Усно

279. Виконайте множення:

1) $a(a + 1)$; 2) $b(c - 2b)$; 3) $x(x^2 + x - 4)$;
4) $(m + 4) \cdot m$; 5) $(b + 2a) \cdot b$; 6) $(y^2 + 4y + 4) \cdot y$.

«1 2

280. Виконайте множення:

1) $x(2x - 5)$; 2) $2k^2(5k + 3)$;
3) $b(4b^2 - 3b + 1)$; 4) $-a^2(a^2 - 2a + 1)$;
5) $3ab(2a - 3b - 2)$; 6) $(x^2 - 5x) \cdot x^2$;
7) $(-y^3 + 5y^2) \cdot (-4y)$; 8) $(y^2 - x - 3) \cdot 2xy$.

281. Виконайте множення:

1) $a(2a + 3)$; 2) $3x(x^2 - 4x + 3)$;
3) $-2b(b^2 + 2b - 3)$; 4) $3xy(-2x + y - 3)$;
5) $(-3n^2 + 2n) \cdot 2n$; 6) $(2a - b) \cdot (-ab)$.

282. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1) $-x(4x - 3) + 3$; 2) $(5a + 2) \cdot (-4a) + 10a^2$;
3) $a^2(2a^3 + a) - 2a^3$; 4) $4x(2x - 3x^2) - 8x^2 - 2x$.

283. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1) $-3a^2(a - 1) - 2a^2$; 2) $2b(3b^2 - 2) - 2b^3 + 1$.

284. Спростіть вираз:

1) $b(2b + c) - bc$; 2) $a(a + b) - b(a - b)$;
3) $n^2(n + 1) - n(n + 1)$; 4) $2m(6m + 1) + 3(1 - 4m^2)$;
5) $2a(3a - 4b) + 8ab - 2a^2$; 6) $-x(2x - y) - (-3x^2 + xy)$.

285. Спростіть вираз:

1) $c(a^2 + 3c) - 3c^2$; 2) $m(k + m) + k(k - m)$;
3) $4y(2x - y) - 8xy + 2y^2$; 4) $-b(3b - 4) - (4b - 3b^2)$.

286. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(2x - 1) - x = 4$; 2) $-2(3z + 2) + 4z = 5$;
3) $12 - 5(y + 2) = -8$; 4) $4x(1 - 2x) + 8x^2 = 24$.

287. Розв'яжіть рівняння:

1) $3(2x - 3) - 4x = 5$; 2) $9 - 2(2y + 9) = 3$.

288. За 2 однакові ручки й 8 однакових зошитів Остап заплатив 64 грн. Знайдіть ціну ручки, якщо вона на 2 грн більша за ціну зошита.

289. У великому бутлі вміщується води на 4 л більше, ніж у малому. Скільки літрів води в малому бутлі, якщо у двох великих і трьох малих бутлях разом 38 л води?

290. Спростіть вираз:

1) $2a(2a^2 - 4a + 1) - 4(a^3 - 2a^2 - 2)$;
2) $5x^3(3x^3 - 2x + 1) - x^2(8x^2 + 5x)$;
3) $-8m^3n(mn^2 - mn - n^2) - (2mn)^3$;
4) $2ab(0{,}5c + 2a) - 4a(ab - 0{,}25bc)$;
5) $2xy^2 - \frac{1}{3}x(6x + 6y^2 - 1) + \frac{2}{3}x$.

> Математика вчить мислити й разом з тим вселяє віру в безмежні сили людського розуму. Вона виховує волю, характер.
> *Василь Сухомлинський**

291. Спростіть вираз:

1) $b^2(4 - 2b + b^2) - 2b(1 + 2b - b^2)$;
2) $4xy(2x - 1) - 2x(4xy - x - 2y)$;
3) $-2m^2n^3(5mn^2 - 8m^2n) - (4m^2n^2)^2$;
4) $\frac{2}{3}ab(6a^2 - 9ab) - 4a^3(a + b)$.

292. Доведіть, що значення виразу $x(x^2 + 2y) - y(y + x) + y(y - x)$ не залежать від значень y.

293. Доведіть, що значення виразу $x^2(x - 2) - x(x^2 - 2x + 2) + 2x$ не залежать від значень x.

294. Доведіть, що для будь-яких значень x, y та z значення виразу $x(x - y + z) + y(y - z + x) + z(z - x + y)$ є невід'ємним числом.

295. Доведіть тотожність:

1) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$;
2) $a(b^2 - bc + c^2) + ab(c - b) + ac(b - c) = abc$;
3) $x^4(x^3 - x^2) - x^3(x^4 - x^3) + x^2(x^5 - x^4) - x(x^6 - x^5) = 0$;
4) $ab(c - ab) + bc(a - bc) + ca(b - ca) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 3abc$.

296. Доведіть тотожність:

1) $a(a^4 - 2a^3 + 3a^2) - a^2(a^3 - a^2 + 2a) + a^3(a - 1) = 0$;
2) $x(x - yz) + y(y - zx) + z(z - xy) + 3xyz = x^2 + y^2 + z^2$.

* Василь Сухомлинський (1918–1970) — український педагог, письменник.

297. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(3 + 2x + 4x^2) - 2x^2(2x + 1) = 9$;
2) $5(3x - 6) + 4(3 - 2x) = 5x - 8$;
3) $6 + 4x - 2(1 - 2x) = 5(2x - 3)$;
4) $0{,}4(2x - 7) + 1{,}2(3x + 7) = 1{,}6x$.

298. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2(x + 1) - x(3x^2 + 3x + 1) = -1$;
2) $-5(4x - 3) + 3x = -12(x - 2)$;
3) $1{,}2x(x + 2) - 3(0{,}4x^2 + 1) = 0{,}6$.

299. У сквері росло кленів утричі більше, ніж лип. Після того як у ньому посадили 6 кленів і 7 лип, кленів стало вдвічі більше, ніж лип. Скільки кленів і скільки лип росло у сквері спочатку?

300. На двох яблунях росло порівну яблук. Після того як із першої яблуні зірвали 50 яблук, а з другої — 90, на першій яблуні стало яблук втричі більше, ніж на другій. Скільки яблук росло на кожній яблуні спочатку?

301. Автобус подолав шлях між двома містами за 1,5 год, а автомобіль — за 1,2 год. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 18 км/год більша за швидкість автобуса.

Інтерактивне завдання 9
Множення одночлена на многочлен

4

302. Спростіть вираз (n — натуральне число):

1) $a^{n+1}(a^{n+1} - 4) - a^n(a^{n+2} - 4a + 1)$;
2) $x^n(y^n - x) + y^n(x - x^n) + x(x^n - y^n)$.

303. Спростіть вираз $b^{n+2}(b^{n+3} - 1) - b^n(b^{n+5} - b^2)$, де n — натуральне число.

304. Доведіть, що для будь-яких натуральних значень m і n значення виразу $m^{2n}(m^2 + m + 1) - (m^{n+1})^2 - m(m^2)^n$ є додатним числом.

305. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1-x}{6} - \frac{2x+4}{9} = \frac{1}{9}$; 2) $\frac{4x+1}{36} = \frac{x-3}{12} + \frac{x+3}{18}$.

306. Розв'яжіть рівняння $\frac{1+3x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5-2x}{6}$.

307. Вікторія за певний час пройшла шлях від дому до школи. Якби вона йшла в 1,2 раза швидше, то час руху був би на 2 хв менший. Скільки хвилин Вікторія йшла до школи?

Вправи для повторення

308. Запишіть у вигляді виразу:

1) добуток двочленів $a - b$ і $2a + b$;

2) добуток суми виразів $2a$ і $3b$ та їх різниці.

309. Спростіть вираз:

1) $(4a^2b)^2 \cdot 0{,}25ab^2$; 2) $(-3xy^2)^3 \cdot 2(xy)^2$.

310. На рисунку 4.1) вказано ціну на товар і його нову ціну після знижки. Знайдіть невідомі числа на рисунках 2) – 4).

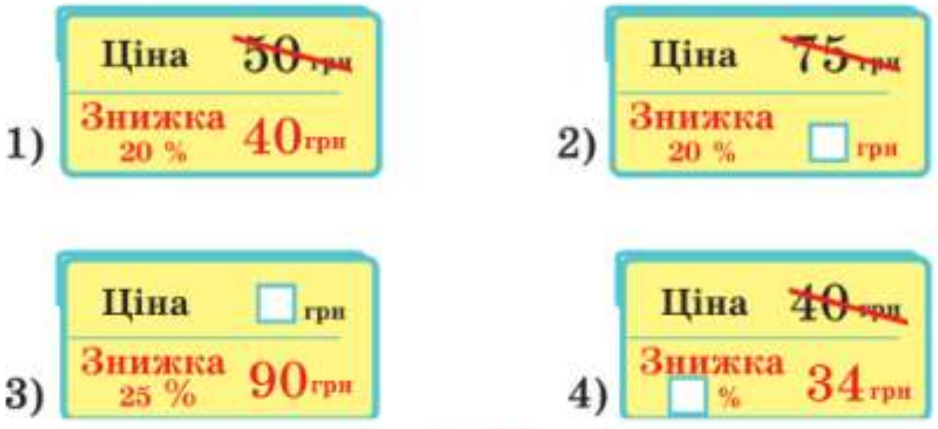


Рис. 4

311. Через першу трубу з басейна можна випустити воду за 6 год, а через другу — за 9 год. За скільки годин можна випустити всю воду, відкривши крани обох труб?

Поміркуйте

312. Чи можна в числі 123 456 789 переставити деякі цифри так, щоб одержати просте число?

9 МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Помножимо многочлен $a + b$ на многочлен $c + d$. Щоб звести множення цих многочленів до множення многочлена на одночлен, позначимо многочлен $c + d$ через x. Тоді:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)x = ax + bx.$$

Повернувшись до заміни $x = c + d$, матимемо:

$$ax + bx = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Отже, добутком многочлена $a + b$ і многочлена $c + d$ є многочлен $ac + ad + bc + bd$:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Вираз $ac + ad + bc + bd$ ми одержали б одразу, якби помножили a на c і d, потім b на c і d й одержані добутки додали. Можна сказати й так: добуток $ac + ad + bc + bd$ можна одержати, якщо помножити кожний член многочлена $a + b$ на кожний член многочлена $c + d$ й одержані добутки додати.

Маємо таке правило:

Щоб помножити многочлен на многочлен, достатньо кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена й одержані добутки додати.

Помножимо за цим правилом многочлен $2a^2 + b^2$ на многочлен $2a - b$:

$$(2a^2 + b^2)(2a - b) = 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot (-b) + b^2 \cdot 2a + b^2 \cdot (-b) =$$
$$= 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3.$$

Виконуючи множення многочленів, проміжні результати можна не записувати:

$$(2a^2 + b^2)(2a - b) = 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3.$$

У наведених прикладах добуток двох многочленів ми записували у вигляді многочлена.

Узагалі, добуток будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виконати множення:

1) $(2x^2 - xy + y^2)(x - 3y)$; 2) $(a + b)(a + 1)(b - 1)$.

• 1) $(2x^2 - xy + y^2)(x - 3y) = 2x^3 - \underline{6x^2y} - \underline{x^2y} + \underline{3xy^2} + \underline{\underline{xy^2}} - 3y^3 = 2x^3 - 7x^2y + 4xy^2 - 3y^3$.

2) Знайдемо добуток перших двох многочленів, а потім одержаний добуток помножимо на третій многочлен:

$(a + b)(a + 1)(b - 1) = (a^2 + a + ba + b)(b - 1) =$

$= a^2b - a^2 + \underline{ab} - a + b^2a - \underline{ba} + b^2 - b =$

$= a^2b - a^2 - a + ab^2 + b^2 - b$. •

Вправа 2. Розв'язати рівняння $(x - 2)(2x + 3) - x(2x + 4) = 3$.

• $2x^2 + 3x - 4x - 6 - 2x^2 - 4x = 3$; $-5x - 6 = 3$; $-5x = 9$; $x = -1{,}8$.

Відповідь. $-1{,}8$. •

1. Як помножити многочлен на многочлен?

«Усно

313. Виконайте множення:

1) $(a + 2)(b + 1)$; 2) $(a - b)(x + y - z)$.

«1 2

314. Перемножте многочлени:

1) $(x + 2)(y + z)$; 2) $(b + a)(c - 3)$;
3) $(m - 4)(n + k)$; 4) $(a - b)(x - y)$;
5) $(2a - 3b)(2c + 5)$; 6) $(4a + 6b)(3d - 2c)$;
7) $(x + y)(a - 5b + 2)$; 8) $(m - n + 1)(k - 1)$.

315. Перемножте многочлени:

1) $(a + b)(c + 3)$; 2) $(2x + y)(3 - z)$;
3) $(a - 2b)(3x - 4y)$; 4) $(5m - 2)(2a + 5)$;
5) $(a - 3)(b + c + 2)$; 6) $(2x - y - 1)(a - 3b)$.

316. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $(a + 3)(4a - 3)$; 2) $(5b - 4)(3b - 2)$;
3) $(2y + 1)(3 - y)$; 4) $(x - 2)(x^2 + 3x)$;

5) $(n - m)(n + 4m)$; 6) $(3a - 2b)(2a - b)$.

317. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $(a - 2)(a + 3)$; 2) $(3x + 2)(2 - x)$;
3) $(n - 3)(2n^2 - n)$; 4) $(a + 5b)(a - b)$.

318. Спростіть вираз:

1) $(y + 3)(y - 4) - y^2 + y$; 2) $(3a - 4)(2a + 1) + 5a$;
3) $9 + (2x - 3)(3 + 2x)$; 4) $(a^2 + a)(a + 3) - 4a^2$;
5) $(a + b)(a - 3b) + 2ab$; 6) $(x - 4y)(2x - y) - 2x^2 + 9xy$.

319. Спростіть вираз:

1) $(x + 2)(x + 3) - x^2$; 2) $(a - 4)(3a - 4) + 16a - 16$;
3) $(b - 2c)(b + 4c) + 8c^2$; 4) $mn + (m + n)(2m - 3n)$.

320. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 1)(x + 2) - x^2 = 3$; 2) $(2y - 1)(2 - y) + 2y^2 = 1$.

321. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)(x - 1) - x^2 = 5$; 2) $5x^2 + (1 - x)(5x + 2) = 5$.

Інтерактивне завдання 10

Множення многочлена на многочлен

322. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $(a - 2)(a^2 + 2a - 3)$; 2) $(x^2 - 2x + 1)(2x + 5)$;
3) $(-3b + 2)(4b^2 + b - 4)$; 4) $(y - 0{,}2)(y^2 + 0{,}2y - 0{,}5)$;
5) $(n^2 - n)(n^2 + 2n + 2)$; 6) $(c + 2)(c + 3)(c - 5)$.

323. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

1) $(a + 3)(a^2 - 4a + 2)$; 2) $(2b^2 - 3b + 1)(2b - 1)$;
3) $(n - 3)(n^2 - 1{,}5n - 4{,}5)$; 4) $(x - 2)(x + 5)(x - 4)$.

324. Перемножте многочлени:

1) $(a + b)(a^2 + 2ab - b^2)$; 2) $(2x^2 - 3xy + y^2)(2x - y)$;
3) $(n - m)(n + m)(n - 4m)$; 4) $(3a - b)(2a - b)(a + 2b)$.

325. Перемножте многочлени:

1) $(2x + y)(x^2 + 2xy - 2y^2)$; 2) $(a - b)(a + 2b)(a - 2b)$.

326. Спростіть вираз:

1) $(3a - 1)(2a + 5) + (2a - 5)(3a + 1)$;
2) $(x + 7)(8x - 1) - (2x + 3)(4x - 1)$;

3) $(a-2)(1-2a+2a^2)-2(a^3-3a^2-1)$;
4) $(a^2-2ab+4b^2)(a+2b)-a^3-b^3$;
5) $(3xy^2-7x^2y)(3xy^2-2x^2y)+(3xy)^3-(3xy^2)^2$.

327. Спростіть вираз:
1) $(4x-3)(3x+4)+(2x-3)(3x+1)$;
2) $(2b-7)(4b-1)-(8b-3)(b+1)$;
3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)-27y^3$;
4) $(a+b)(a+b-1)-a(a-1)-b(b-1)$.

328. Доведіть, що значення виразу $(x-3)(x^2-2x-6)-x^2(x-5)$ не залежать від значень x.

329. Доведіть, що значення виразу $(b+1)(b+4)-(b+2)(b+3)$ не залежать від значень b.

330. Доведіть, що для будь-якого натурального значення k значення виразу $(2k+1)(3k+2)-(2k-1)(3k-2)$ ділиться на 14.

331. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(3n+2)(4n-3)-(2n+3)(n-2)$ ділиться на 10.

332. Доведіть, що вираз $(a^2+3)(a^2-1)-(a^2+4)(a^2-2)$ набуває лише додатних значень.

333. Доведіть тотожність:
1) $(a+2)(a^2-2a-3)=(a-3)(a^2+3a+2)$;
2) $(a-b)(b-c)(c-a)=ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)$.

334. Доведіть тотожність:
1) $(x+3)(x^2-1)=(x^2+2x-3)(x+1)$;
2) $(a+b)(b-c)-(a-b)(b+c)=2(b^2-ac)$.

335. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x-1)(x-3)=(x-2)(x+3)$;
2) $(2y-1)(1-y)+(y+1)(2y-3)=0$;
3) $(x-7)(3x+2)=3x(x-3)-8$.

336. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x+3)(x-4)=(x-5)(x+2)$;
2) $(4z+1)(z-1)-(z+2)(4z-1)=6$.

4

337. Спростіть вираз $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-z)$, що є добутком 26 множників, у яких від змінної x віднімаються змінні, позначені всіма 26 буквами латинського алфавіту.

338. Одне натуральне число при діленні на 6 дає в остачі 2, а друге — в остачі 3. Доведіть, що добуток цих чисел ділиться на 6.

339. Натуральні числа a і b при діленні на 4 дають в остачі відповідно 2 і 3. Доведіть, що число $ab + 2$ ділиться на 4.

340. Розв'яжіть рівняння:

1) $(y - 2)(y^3 + 2y^2 + 4y + 8) = y(y^3 + 4)$;

2) $(0{,}5x - 3{,}5)(6x + 2) + 30x = 3x(x - 3) - 26$.

341. Розв'яжіть рівняння

$$(1 + x)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4) = x(1 + x^4).$$

342. Довжина кімнати в 1,5 раза більша за ширину. Якщо довжину кімнати збільшити на 1 м, а ширину зменшити на 1 м, то площа зменшиться на 3 м^2. Знайдіть довжину і ширину кімнати.

343. Довжина прямокутника на 4 см більша за ширину. Якщо довжину прямокутника зменшити на 1 см, а ширину збільшити на 2 см, то площа збільшиться на 10 см^2. Знайдіть довжину і ширину прямокутника.

344. Знайдіть три послідовні цілі числа, квадрат найменшого з яких на 11 менший від добутку двох інших чисел.

Вправи для повторення

345. Обчисліть зручним способом:

1) $37 \cdot 48 + 37 \cdot 52$; 2) $9{,}3 \cdot 5{,}6 - 9{,}3 \cdot 5{,}5$.

346. Запишіть одночлен $24a^3b^4$ у вигляді добутку двох одночленів, одним з яких є:

1) $3a^2b^2$; 2) $8b^3$; 3) $-4ab^4$; 4) $-12a^3$.

347. Після того як з банківської картки зняли 20 % усіх грошей, а згодом — ще 2000 грн, на ній залишилося 55 % початкової суми. Скільки гривень було на картці спочатку?

348. Два автомобілі одночасно виїхали з Вінниці до Києва, відстань між якими 256 км. Перший автомобіль рухався зі швидкістю 80 км/год, а другий — 75 км/год. На якій відстані від Києва перебував другий автомобіль на момент прибуття до нього першого автомобіля?

Поміркуйте

349. На столі стоять 6 чашок, як показано на рисунку 5. Дозволяється за один хід перевернути будь-які 2 чашки. Чи можна за кілька таких ходів поставити всі чашки дном донизу?

Рис. 5

10 РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ВИНЕСЕННЯ СПІЛЬНОГО МНОЖНИКА ЗА ДУЖКИ

1. Розкладання многочленів на множники. Ви знаєте, що складені натуральні числа можна розкласти на множники. Наприклад, $21 = 3 \cdot 7$, $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Розкладати на множники можна й многочлени. Наприклад,

$$ab + ac = a(b + c).$$

Записавши многочлен $ab + ac$ у вигляді добутку $a(b + c)$, кажуть, що многочлен $ab + ac$ *розкладено на два множники* a і $b + c$. Кожний із цих множників є многочленом (перший многочлен складається лише з одного члена).

Розкласти многочлен на множники означає подати його у вигляді добутку кількох многочленів.

Порівняйте

$a(b + c) = ab + ac$ — помножили одночлен на многочлен; результат — многочлен

$ab + ac = a(b + c)$ — розклали многочлен на множники; результат — добуток одночлена і многочлена

2. Винесення спільного множника за дужки. Розглянемо один зі способів розкладання многочленів на множники.

Виконаємо множення одночлена на многочлен:

$$x(x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x^2 + xy.$$

Перепишемо ці рівності у зворотному порядку:

$$x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y = x(x + y).$$

Многочлен $x^2 + xy$ розклали на два множники x та $x + y$. Для цього ми в його членах x^2 та xy виділили спільний множник x: $x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y$, а потім на основі розподільної властивості множення записали одержаний вираз у вигляді добутку многочленів x та $x + y$.

Описаний спосіб розкладання многочленів на множники називають *способом винесення спільного множника за дужки.*

Розкладемо на множники многочлен $12x^3y - 18x^2y^2$.

Спочатку знайдемо спільний числовий множник для коефіцієнтів 12 і −18. Якщо коефіцієнтами є цілі числа, то за спільний числовий множник беруть, як правило, найбільший спільний дільник модулів цих коефіцієнтів. У нашому випадку це число 6. Степені з основою x входять в обидва члени многочлена. Оскільки перший член містить $x^3 = x^2 \cdot x$, а другий — x^2, то спільним множником для степенів з основою x є x^2 (за дужки виносять змінну з меншим показником). У члени многочлена відповідно входять множники y і y^2, за дужки можна винести y. Отже, за дужки можна винести одночлен $6x^2y$:

$$12x^3y - 18x^2y^2 = 6x^2y \cdot 2x - 6x^2y \cdot 3y = 6x^2y(2x - 3y).$$

Щоб винести у многочлені спільний множник за дужки, ми кожний член многочлена подали у вигляді добутку, який містить спільний множник, і винесли його за дужки.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники многочлен $-2a^2b - 8a^2b^2 + 10ab^2$.

• $-2a^2b - 8a^2b^2 + 10ab^2 = -2ab(a + 4ab - 5b)$. •

Вправа 2. Розкласти на множники: $5b(a - c) + 3(a - c)$.

• Даний вираз є сумою двох доданків, для яких спільним множником є вираз $a - c$. Винесемо цей множник за дужки:

$$5b(a - c) + 3(a - c) = (a - c)(5b + 3).$$ •

Вправа 3. Розкласти на множники: $2x(m - n) + y(n - m)$.

• Доданки мають множники $m - n$ і $n - m$, які відрізняються тільки знаками: $n - m = -(m - n)$. Тому, записавши другий доданок у вигляді $-y(m - n)$, матимемо доданки зі спільним множником $m - n$. Отже,

$$2x(m - n) + y(n - m) = 2x(m - n) - y(m - n) = (m - n)(2x - y).$$ •

Вправа 4. Знайти значення виразу $8{,}5a^2 + a^3$, якщо $a = 1{,}5$.

• Розкладемо спочатку многочлен $8{,}5a^2 + a^3$ на множники:

$$8{,}5a^2 + a^3 = a^2(8{,}5 + a).$$

Якщо $a = 1{,}5$, то:

$$a^2(8{,}5 + a) = 1{,}5^2 \cdot (8{,}5 + 1{,}5) = 2{,}25 \cdot 10 = 22{,}5.$$ •

Вправа 5. Розв'язати рівняння $2x^2 + 5x = 0$.

• Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$x(2x + 5) = 0.$$

Добуток $x(2x + 5)$ дорівнює нулю лише тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю:

$$x = 0 \text{ або } 2x + 5 = 0, \text{ звідки } x = 0 \text{ або } x = -2{,}5.$$

Відповідь. $0; -2{,}5$. •

1. Що означає розкласти многочлен на множники?
2. Як розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки? Поясніть це на прикладі многочлена $2a^2 + 4ab$.

«Усно

350. Знайдіть спільний множник членів многочлена:

1) $4a + 4b$; 2) $15x - 10$; 3) $3a + 3ab$;
4) $y^2 - 2y$; 5) $2x^3 - 3x^2 + x^4$; 6) $4ab^3 + 6a^2b^2$.

351. Чи правильно розкладено многочлен на множники:

1) $6a + 6 = 6(a + 0)$; 2) $3b + 3 = 3(b + 1)$;
3) $mk - 2m = m(k - 2)$; 4) $-ax - 2a = -a(x + 2)$;
5) $b^2 + 5b = b(b^2 + 5)$; 6) $4xy - 2y = 2y(2x - 1)$?

352. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $3a + 3b$; 2) $4c + 8$; 3) $9a - 3b$;
4) $-6x + 6y$; 5) $-5k - 10$; 6) $12m + 8n$.

353. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $5m - 5$; 2) $5a + 15b$; 3) $8x - 2y$;
4) $20y - 15z$; 5) $-7k + 7m$; 6) $-4c - 12$.

354. Розкладіть на множники:

1) $ax + bx$; 2) $ym - yn$; 3) $-xz - yz$.

355. Розкладіть на множники:

1) $km + kn$; 2) $-xa + ya$; 3) $ta - tb$.

356. Розкладіть на множники та зробіть перевірку:

1) $2b - 8a$; 2) $6xy + 24x$; 3) $9mn - 6m$.

357. Розкладіть на множники:

1) $9ax - 9bx$; 2) $3ay - 6y$; 3) $-7ab + 14bc$;
4) $10x^2 - 15x^3$; 5) $32b^4 - 4b^2$; 6) $-8c^3 - 10c^4$.

358. Розкладіть на множники:

1) $5xy - 5y$; 2) $8ac - 6ab$; 3) $c^2 + 2c$;
4) $3x^2 + 9x$; 5) $15y^2 - 12y^4$; 6) $-24n - 8n^3$.

359. Розкладіть на множники:

1) $a^3 + 3a^2 - 10a$; 2) $4x^5 - 8x^3 + 4x^2$; 3) $9a^6 - 3a^3 - 12a^4$.

360. Розкладіть на множники:

1) $2x^4 - x^3 - x^2$; 2) $2c - 4c^2 + 8c^3$; 3) $5b^2 + 15b^4 - 10b$.

361. Знайдіть значення многочлена:

1) $x^3 - 1{,}5x^2$, якщо $x = 2{,}5$;
2) $xy + y^2$, якщо $x = -0{,}3$; $y = 10{,}3$.

362. Знайдіть значення многочлена:

1) $2{,}4a^2 - a^3$, якщо $a = 1{,}4$;
2) $m^2 + mn$, якщо $m = 2{,}8$; $n = 7{,}2$.

363. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x = 0$; 2) $5x^2 + 15x = 0$.

364. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 2x = 0$; 2) $2x^2 - 4x = 0$.

365. Розкладіть на множники:

1) $-9a^5 - 27a^3 + 18a^4$; 2) $60b^7 - 45b^8 + 30b^4$;

3) $36x^4y^5 - 48x^6y^4$; 4) $24a^2b^3 - 16a^3b^3 - 40a^3b^2$;

5) $-30m^4n^6 + 12m^5n^5 - 42m^5n^6$;

6) $8abc^2 + 20ab^2c - 12a^2bc$.

366. Розкладіть на множники:

1) $-5b^4 + 10b^2 + 5b^5$; 2) $2x^4z^3 + 4x^4z^4 - 4x^4z^5$;

3) $45a^4b^2 - 60a^3b^3 + 75a^2b^4$; 4) $-36k^2n^5 + 54k^3n^4 - 90k^2n^4$.

367. Розкладіть на множники:

1) $a(m + k) - b(m + k)$; 2) $2a(x - y) + 3(x - y)$;

3) $x(a - b + c) + y(a - b + c)$; 4) $m(a - b) + 3(b - a)$;

5) $a^2(n - 3) - 5(3 - n)$; 6) $(x - 2)^2 + 4(x - 2)$;

7) $2x(a - b) - (b - a)^2$; 8) $4x(a + b) + 2x(a + b)^2$.

368. Розкладіть на множники:

1) $m(x - k) - n(x - k)$; 2) $c(a + b + 2) + 3(a + b + 2)$;

3) $a(s - t) + b(t - s)$; 4) $2(a - b) - x(b - a)$;

5) $(m - 4)^2 - 5(m - 4)$; 6) $k(m - n) + 2(n - m)^2$.

369. Знайдіть значення многочлена:

1) $\frac{4}{5}xy^2 - \frac{2}{5}y^2$, якщо $x = 3$; $y = 0{,}5$;

2) $a^2 + 2ab - 8a$, якщо $a = \frac{3}{7}$; $b = \frac{2}{7}$.

370. Знайдіть значення многочлена:

1) $\frac{2}{9}m^2n + \frac{4}{9}m^2$, якщо $m = -0{,}5$; $n = 88$;

2) $2xy - y^2 + 3y$, якщо $x = \frac{1}{3}$; $y = \frac{2}{3}$.

371. Знайдіть значення виразу, використовуючи винесення спільного множника за дужки:

1) $78^2 + 22 \cdot 78$; 2) $9{,}3^2 - 10{,}3 \cdot 9{,}3$;

3) $9{,}4 \cdot 0{,}6^2 + 0{,}6^3$; 4) $24 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2^8$.

372. Обчисліть зручним способом:
1) $174^2 - 74 \cdot 174$; 2) $11{,}5 \cdot 1{,}5^2 - 1{,}5^3$.

373. Доведіть, що значення виразу:
1) $19^8 - 19^7$ ділиться на 18; 2) $3 \cdot 7^6 - 7^5$ ділиться на 20.

374. Доведіть, що значення виразу:
1) $24^9 + 24^8$ ділиться на 25; 2) $5^{12} - 7 \cdot 5^{10}$ ділиться на 18.

375. Розв'яжіть рівняння:
1) $4y - 0{,}2y^2 = 0$; 2) $\frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = 0$;
3) $x(x + 2) - 4(x + 2) = 0$; 4) $z(2z - 3) + 2(3 - 2z) = 0$.

376. Розв'яжіть рівняння:
1) $1{,}5x^2 + 0{,}3x = 0$; 2) $0{,}8y - 2y^2 = 0$;
3) $z(2z + 5) - 3(2z + 5) = 0$; 4) $x(x - 7) - 2(7 - x) = 0$.

Інтерактивне завдання 11
Винесення спільного множника за дужки

4

377. Знайдіть значення виразу:
1) $2 \cdot 3^{19} - 45 \cdot 9^8 - 27^6$; 2) $5^{20} - 1{,}5 \cdot 25^{10} + 0{,}1 \cdot 125^7$.

378. Знайдіть значення виразу $5 \cdot 2^{12} - 1{,}5 \cdot 4^7 + 8^4$.

379. Доведіть, що значення виразу $3 \cdot 2^{15} + 8^4 - 4^7$ ділиться на 21.

380. Доведіть, що значення виразу $17 \cdot 27^5 - 3^{17}$ ділиться на 8.

381. Доведіть:
1) якщо $a + b = 4$, то $a^3b^2 + a^2b^3 - 4a^2b^2 = 0$;
2) якщо $x + y + 2 = xy$, то $x^4y^4 - x^3y^4 - x^4y^3 = 2x^3y^3$.

382. Доведіть: якщо $a^2 + b^2 = 3ab$, то $a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 = 4a^3b^3$.

383. Розв'яжіть рівняння:
1) $(2x - 5)^2 + 3(5 - 2x) = 0$; 2) $x(x + 4) = 6x + 24$.

384. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x - 3)^2 + 6(x - 3) = 0$; 2) $x(x - 2) = 8 - 4x$.

Вправи для повторення

385. Візьміть у дужки два останні доданки, поставивши перед дужками знак «+»; знак «−»: 1) $a + b - 4$; 2) $x - y - 3$.

386. Перемножте многочлени:

1) $(5a - 7b)(4a - b)$; 2) $(y + 3)(y^2 - y + 4)$.

387. Обчисліть зручним способом:

1) $23 \cdot 2{,}8 + 3{,}3 \cdot 10{,}78 + 23 \cdot 7{,}2 - 3{,}3 \cdot 0{,}78$;

2) $7{,}7 \cdot 1{,}6 - 0{,}03 \cdot 500 + 1{,}8 \cdot 1{,}6 + 1{,}6 \cdot 0{,}5$.

388. Сквер має форму прямокутника. Дві доріжки завширшки 2 м розділяють його на 4 частини прямокутної форми (рис. 6). Сквер планують обгородити парканчиком по периметру, крім входів на доріжки. Скільки для цього потрібно метрів парканчика, якщо відомо, що загальна площа доріжок дорівнює 280 м^2?

Рис. 6

Поміркуйте

389. Чи можна в прямокутній таблиці розміру 5×10 (5 рядків і 10 стовпців) розставити деякі 50 чисел так, щоб сума чисел кожного рядка дорівнювала 30, а сума чисел кожного стовпця — 10?

11 РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ГРУПУВАННЯ

Вивчення цього способу розкладання многочленів на множники почнемо із прикладу на множення многочленів. Виконаємо множення двочлена $a - b$ на двочлен $x + y$ так:

$$(a - b)(x + y) = a(x + y) - b(x + y) = ax + ay - bx - by.$$

Проводячи перетворення у зворотному порядку, многочлен $ax + ay - bx - by$ можна розкласти на два множники $a - b$ та $x + y$:

$$ax + ay - bx - by = (ax + ay) + (-bx - by) =$$
$$= a(x + y) - b(x + y) = (x + y)(a - b).$$

Проаналізуємо останні перетворення. Маємо многочлен, члени якого можна групувати так, щоб кожна група мала спільний множник: для групи $ax + ay$ — спільний множник a, для групи $-bx - by$ — спільний множник $-b$. У кожній групі спільний множник виносимо за дужки. В утвореній різниці $a(x + y) - b(x + y)$ маємо спільний множник $x + y$. Виносимо його за дужки й одержуємо $(x + y)(a - b)$.

Описаний спосіб розкладання многочленів на множники називають *способом групування*.

Застосовуючи спосіб групування, потрібно:
1) утворити такі групи членів, щоб члени кожної групи мали спільний множник;
2) у кожній групі винести спільний множник за дужки (після цього має утворитися спільний множник для всіх груп);
3) винести за дужки спільний множник для всіх груп.

Порівняйте

$(a - b)(x + y) = ax + ay - bx - by$ — помножили многочлен на многочлен; результат — многочлен

$ax + ay - bx - by = (a - b)(x + y)$ — розклали многочлен на множники; результат — добуток многочленів

Зазначимо, що многочлен $ax + ay - bx - by$ можна розкласти на множники, групуючи його члени по-іншому:

$$ax + ay - bx - by = (ax - bx) + (ay - by) =$$
$$= x(a - b) + y(a - b) = (a - b)(x + y).$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники многочлен $3ax - 12x + 9a - 4x^2$.

• $3ax - 12x + 9a - 4x^2 = (3ax + 9a) - (4x^2 + 12x) =$
$= 3a(x + 3) - 4x(x + 3) = (x + 3)(3a - 4x).$ •

Вправа 2. Розкласти на множники тричлен $x^2 - 5x + 6$.

• Подамо другий член $-5x$ у вигляді $-3x - 2x$. Тоді:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = \\ = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2).$$ •

1. Як розкласти многочлен на множники способом групування?

Усно

390. Укажіть у многочлені групи членів, які мають спільний множник, та назвіть цей множник:

1) $ax + ay + 5x + 5y$; 2) $2a - bn - 2b + an$.

391. Поясніть кожний крок розкладання многочлена на множники:

$$2x + 2y - kx - ky = (2x - kx) + (2y - ky) = \\ = x(2 - k) + y(2 - k) = (2 - k)(x + y).$$

1 2

392. Розкладіть на множники:

1) $a(x + y) + 4x + 4y$; 2) $bx + by - 7(x + y)$;
3) $3a + 3c + ba + bc$; 4) $6m - 6n + am - an$;
5) $ma - na + m - n$; 6) $2a + 2b - xa - xb$.

393. Розкладіть на множники:

1) $ka - kb - 5(a - b)$; 2) $2a + 2b + ca + cb$;
3) $ma - mb + 3a - 3b$; 4) $bx + by - x - y$.

394. Продовжте розкладання на множники:

1) $na + 2b - nb - 2a = (na - nb) - (2a - 2b) = \ldots$;
2) $na + 2b - nb - 2a = (na - 2a) - (nb - 2b) = \ldots$.

395. Продовжте розкладання на множники:

1) $2x + 2y - 3xz - 3yz = (2x + 2y) - (3xz + 3yz) = \ldots$;
2) $2x + 2y - 3xz - 3yz = (2x - 3xz) + (2y - 3yz) = \ldots$.

396. Розкладіть на множники:

1) $ma + mb - nb - na$; 2) $2x - 2y - ax + ay$;
3) $5a - bx - 5b + ax$; 4) $ay + 3 - 3y - a$;
5) $a^3 + a^2 + a + 1$; 6) $x^3 - 4x^2 + 2x - 8$.

397. Розкладіть на множники:

1) $3x + 3y - ky - kx$; 2) $6c - ac - ab + 6b$;

3) $am - 2m - ax + 2x$; 4) $x^3 - 2x^2 + x - 2$.

398. Знайдіть значення многочлена $4x + 4y - kx - ky$, розклавши його на множники, якщо $x = 0{,}3$; $y = 1{,}7$; $k = 5$.

399. Знайдіть значення многочлена $ap - aq + 3p - 3q$, розклавши його на множники, якщо $a = 12$; $p = 7{,}5$; $q = 5{,}5$.

400. Розкладіть на множники:

1) $b^2 - ab - 2b + 2a$; 2) $10x + xy + 10y + x^2$;

3) $3a - ax + 3x - x^2$; 4) $a^2 + b^2 - a^3y - ab^2y$;

5) $3a^2c + 6a^2 - 10bc - 5bc^2$; 6) $12x^2 + 18y + 10x^3 + 15xy$;

7) $3x^2yz - x + 12xy^2z^2 - 4yz$;

8) $0{,}9ay + 1{,}2y^2 - 1{,}2ax - 1{,}6xy$.

401. Розкладіть на множники:

1) $a^2 + 2ab + 3a + 6b$; 2) $x^2 + 3xa - 2x - 6a$;

3) $x^2y^2 + 2y^3 - ax^2 - 2ay$; 4) $2a^2b + 2c - 4abc - a$;

5) $6x^3y + 12y^2z^2 + 9y^3 + 8x^3z^2$;

6) $0{,}2an^3 - 1{,}5a^2 + 0{,}6a^3n - 0{,}5n^2$.

402. Знайдіть значення виразу:

1) $p^3 + pq^2 - p^2q - q^3$, якщо $p = 1{,}5$, $q = 0{,}5$;

2) $2a^3 - 6ab + a^2b - 3b^2$, якщо $a = 8$, $b = 21$.

403. Знайдіть значення виразу $2a^2 + ac - 2ac^2 - c^3$, якщо $a = 17$, $c = 4$.

404. Знайдіть значення виразу:

1) $4{,}3 \cdot 3{,}6 - 2{,}9 \cdot 3{,}6 + 4{,}3 \cdot 6{,}4 - 2{,}9 \cdot 6{,}4$;

2) $3{,}7^2 - 3{,}7 \cdot 2{,}9 - 3{,}7 \cdot 8{,}7 + 8{,}7 \cdot 2{,}9$.

405. Знайдіть значення виразу

$$4{,}3 \cdot 3{,}2 + 4{,}3 \cdot 2{,}3 - 2{,}3 \cdot 3{,}2 - 2{,}3^2.$$

406. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x + 5(x - 4) = 0$; 2) $3y^2 + 6y - 1{,}5(y + 2) = 0$.

407. Розв'яжіть рівняння:

1) $z^2 + 3z - 4(z + 3) = 0$; 2) $2x^2 - 8x + 3(x - 4) = 0$.

Інтерактивне завдання 12
Розкладання многочленів на множники способом групування

4

408. Розкладіть на множники:
1) $xa - xb + xc + 3a - 3b + 3c$;
2) $ax^2 - ay^2 + 4az - 4bx^2 + 4by^2 - 16bz$;
3) $-5a - 5b + 3na + 3nb - ma - mb$;
4) $bn^2 + cn^2 - bp + bp^2 - cp + cp^2$.

409. Розкладіть на множники:
1) $ca - cb + c + ad - bd + d$;
2) $x^2y + x + xy^2 + y + 2xy + 2$;
3) $2a^3 + 2a^2b + 2ab + 2b^2 - a - b$.

410. Розкладіть на множники тричлен:
1) $a^2 - 7a + 10$; 2) $x^2 + 3xy + 2y^2$.

411. Розкладіть на множники тричлен:
1) $x^2 + 5x + 4$; 2) $a^2 - 7ab + 12b^2$.

412. Розв'яжіть рівняння:
1) $y^2 - 3y + 2 = 0$; 2) $2x^3 + 3x^2 + 6x + 9 = 0$.

413. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 + 6x + 8 = 0$; 2) $z^3 - 5z^2 + 2z - 10 = 0$.

414. Доведіть, що вираз $(x - 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$ набуває лише невід'ємних значень.

Вправи для повторення

415. Запишіть добуток суми виразів $2a$ і $5b$ та їх різниці.

416. Знайдіть значення виразу:
1) $4^5 \cdot 0{,}25^5 + 3^3 \cdot 9^3 - 27^3$; 2) $2^5(2^6 - 1) - 2^3(2^8 - 2^2)$.

417. За день автомобіль витратив 14 л бензину — 35 % усього бензину, що був у баку зранку. Скільки літрів бензину залишилося в баку?

418. Площа першої ділянки 80 га, а другої — 35 га. З першої ділянки зібрали картоплі вдвічі більше, ніж із другої. Знайдіть врожайність картоплі на кожній ділянці, якщо на першій вона на 4 т/га менша, ніж на другій.

Поміркуйте

419. На перерві кілька хлопців і дівчат 7 класу пішли в кафе. Кожен хлопець купив пиріжок, а кожна дівчина — тістечко. Якби кожна дівчина купила пиріжок, а кожен хлопець — тістечко, то вони разом витратили б на 15 грн менше. Пиріжок дорожчий від тістечка на 3 грн. Кого було більше — хлопців чи дівчат — і на скільки більше?

Завдання для повторення § 2

420. Запишіть многочлен у стандартному вигляді та знайдіть його степінь:

1) $4a^2 - 3a + 1 + a^2 - 5a + 7$; 2) $3aba - 2a^2b + b^2a + ab \cdot 4a$.

421. Знайдіть суму многочленів:

1) $5x^3 - 3x^2 + 2x$ і $x^3 + 3x$;

2) $2a^2 - 3ab + b^2$ і $a^2 + 2ab - b^2$;

3) $-x^2 - 2x + 3$; $2x^2 - 5$ і $-2x + 2$.

422. Знайдіть різницю многочленів:

1) $3c^2 - 4c + 1$ і $3c^2 + c - 5$; 2) $-ab + 3a^2b$ і $2ab - 5 + 3a^2b$.

423. Виконайте множення і результат запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1) $2b(b^2 + 5b - 2)$; 2) $(3c^2 + 3c - 2) \cdot (-2c^2)$;

3) $(a - 2)(3a - 4)$; 4) $(-ab^2 + 4a^3)(4a^2b + b^3)$;

5) $(n - 6)(2n^2 - n + 3)$; 6) $(x + 2)(3x - 1)(2x + 7)$.

424. Спростіть вираз:

1) $3b(b - 2) + (b - 3)(b + 9)$;

2) $(x - 2)(4 + 2x) - (2x - 8)(2 + x)$;

3) $1 + ab(2a - b - 1) - (2a - 1)(ab - 1)$.

425. Доведіть тотожність:

1) $(a + 1)(a^2 - 4) = (a^2 - a - 2)(a + 2)$;

2) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.

426. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(3n + 1)(2n - 1) + n + 7$ ділиться на 6.

427. Доведіть, що значення виразу $(5x + 1)(5x + 3) - 5x(5x + 4)$ не залежать від значень x.

428. Периметр прямокутника дорівнює 24 см. Якщо його довжину збільшити на 3 см, а ширину зменшити на 2 см, то площа зменшиться на 5 см^2. Знайдіть довжину і ширину прямокутника.

429. Розкладіть на множники:

1) $2ax - 2ay$;
2) $8bc^4 - 12b^2c^3$;
3) $-8a^3 - 12a^2 + 8a$;
4) $-0{,}6a^3b^4 + 0{,}4a^2b^3$;
5) $3x - 3y - ax + ay$;
6) $x^3 + 2x^2 + x + 2$;
7) $x - 2xy + 2y - 4y^2$;
8) $5a^2b + 10a^2 - 20bc - 10b^2c$.

430. Знайдіть значення виразу:

1) $bc + c^2 - 5b - 5c$, якщо $b = 3{,}6$; $c = 1{,}4$;
2) $m^2 - mn - 4m + 4n$, якщо $m = 12{,}5$; $n = 2{,}5$.

431. Доведіть, що значення виразу:

1) $3^{14} - 3^{12}$ ділиться на 8;
2) $49^8 + 3 \cdot 7^{15}$ ділиться на 10.

432. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x^2 - 1) - (2x^2 - 3x) = 5$;
2) $4y(2y + 1) - 8y^2 + 4 = 0$;
3) $(z + 3)(z - 1) + 6 = z^2$;
4) $(x - 1)(x - 4) = (x + 1)(x - 2)$;
5) $y^2 - 3y = 0$;
6) $8x^2 + 2x - 3(4x + 1) = 0$;
7) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
8) $y^3 - 2y^2 + 4y - 8 = 0$.

Інтерактивне завдання для самоперевірки 2
Многочлени

Завдання для самоперевірки № 2

Початковий рівень

1. Який з наведених виразів є многочленом другого степеня?

А $2c^2 - c^3$ **Б** $x^2y^2 - xy$ **В** $a^2 - 3b$ **Г** $n(m + k)$

2. Запишіть многочлен $x^2 + 3x - x + 1 + 2x^2 - 2$ у стандартному вигляді.

А $3x^2 + 2x + 1 - 2$ **Б** $3x^2 - 2x - 1$
В $3x^2 + 2x + 1$ **Г** $3x^2 + 2x - 1$

3. Знайдіть суму многочленів $2b + 5$ і $-3b + 1$.

А $5b + 4$ **Б** $-b + 6$ **В** $-b + 4$ **Г** $5b + 6$

4. Виконайте множення: $c(3c - 4)$.

А $3c^2 - 4$ **Б** $3c^2 - 4c$ **В** $3c - 4c$ **Г** $4c - 4$

5. Виконайте множення: $(a - 1)(b + c)$.

А $ab + ac - b + c$ **Б** $ab - c$

В $ab + ac - b - c$ **Г** $ab + ac + b + c$

6. Винесіть спільний множник за дужки у виразі $3x - 3xy$.

А $3x(x - y)$ **Б** $3x(1 - 3y)$ **В** $3x(x - 3y)$ **Г** $3x(1 - y)$

Середній рівень

7. Знайдіть різницю многочленів $5c^2 - 4c + 1$ і $3c^2 + c - 5$.

А $8c^2 - 3c - 4$ **Б** $2c^2 - 5c - 4$

В $2c^2 - 5c + 6$ **Г** $2c^2 - 3c + 6$

8. Виконайте множення: $-2m(m - 2n + 3)$.

А $-2m + 4mn^2 - 6m$ **Б** $-2m^2 + 4mn - 6m$

В $-2m^2 - 4mn + 6m$ **Г** $2m^2 - 4mn + 6m$

9. Розв'яжіть рівняння $2x^2 + 8x = 0$.

А -4 **Б** 0 **В** $-4; 0$ **Г** $-8; 0$

10. До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Д).

1 $(a - 2b)(a + 4b)$ **А** $a^2 - 2ab - 8b^2$

2 $(a + 2b)(a - 4b)$ **Б** $a^2 - 6ab - 8b^2$

3 $(a - 2b)(a - 4b)$ **В** $a^2 - 6ab + 8b^2$

Г $a^2 + 2ab - 8b^2$

Д $a^2 - 2ab + 8b^2$

Достатній рівень

11. Спростіть вираз $ab^2(2a - b - 1) - (2a^2b^2 - ab^2)$.

12. Розв'яжіть рівняння $(2x - 3)(x + 2) - 2x^2 = 0$.

13. Доведіть, що значення виразу $7^{18} - 3 \cdot 7^{15}$ ділиться на 10.

14. Розкладіть на множники многочлен $m^2 - mk - 3m + 3k$ і знайдіть його значення, якщо $m = 4{,}5$; $k = 2{,}5$.

Високий рівень

15. Доведіть тотожність $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

16. Доведіть, що для будь-якого натурального значення k значення виразу $(k + 5)(k^2 - k + 1) - 4k(k - 3) - k^3 + 3$ ділиться на 8.

17. Розкладіть на множники вираз $abm + x^2 - mx - abx$.

18. Розв'яжіть рівняння $(2x - 3)(3x + 2) = (2x + 3)(x - 2)$.

12 МНОЖЕННЯ РІЗНИЦІ ДВОХ ВИРАЗІВ НА ЇХ СУМУ

Помножимо різницю $a - b$ на суму $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Одержана тотожність дозволяє множити різницю двох виразів на їх суму не за правилом множення двох многочленів, а скорочено: відразу записувати добуток у вигляді $a^2 - b^2$. Тому доведену тотожність називають *формулою скороченого множення*. Формулюють її так:

Добуток різниці двох виразів та їх суми дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Помножимо за цим правилом різницю $2x - 3y$ на суму $2x + 3y$:

$$(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2.$$

З переставної властивості множення випливає, що й добуток суми двох виразів та їх різниці дорівнює різниці квадратів цих виразів:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Виконати множення:

1) $(3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3)$; 2) $(-k + 7)(k + 7)$;
3) $(-a - c)(a - c)$; 4) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$.

• 1) $(3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3) = (3a^2)^2 - (5b^3)^2 = 9a^4 - 25b^6$;
2) $(-k + 7)(k + 7) = (7 - k)(7 + k) = 49 - k^2$;
3) $(-a - c)(a - c) = -(a + c)(a - c) = -(a^2 - c^2) = c^2 - a^2$;
4) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x^2)^2 - 9^2 = x^4 - 81$. •

Вправа 2. Обчислити: $3{,}2 \cdot 2{,}8$.

• $3{,}2 \cdot 2{,}8 = (3 + 0{,}2)(3 - 0{,}2) = 3^2 - 0{,}2^2 = 9 - 0{,}04 = 8{,}96$. •

1. Чому дорівнює добуток різниці двох виразів та їх суми?
2. Як записують і читають відповідну формулу?

«Усно

433. Які з наведених множень виконано правильно:
1) $(m - 5)(m + 5) = m^2 + 25$; 2) $(m - 5)(m + 5) = m^2 - 25$;
3) $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 2b^2$; 4) $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 4b^2$?

«1 2

434. Перемножте многочлени:
1) $(k - n)(k + n)$; 2) $(m - 4)(m + 4)$;
3) $(1 - b)(1 + b)$; 4) $(c + 8)(c - 8)$;
5) $(2x - y)(2x + y)$; 6) $(4a + 5b)(4a - 5b)$.

435. Перемножте многочлени:
1) $(b - c)(b + c)$; 2) $(a + 10)(a - 10)$;
3) $(6 + n)(6 - n)$; 4) $(3y - 2z)(3y + 2z)$.

436. Спростіть вираз:
1) $(a + 9)(a - 9) + 81$; 2) $n^2 + (5 - n)(5 + n)$;
3) $(3x - 1)(3x + 1) - 9x^2$; 4) $25c^2 + (2a + 5c)(2a - 5c)$.

437. Спростіть вираз:
1) $(m - 7)(m + 7) + 49$; 2) $(a + 4b)(a - 4b) - a^2$.

438. Знайдіть значення виразу $(x - y)(x + y)$, якщо:
1) $x = 15$; $y = 2$; 2) $x = 7$; $y = 0{,}5$.

439. Знайдіть значення виразу $(a + b)(a - b)$, якщо:
1) $a = 10$; $b = 3$; 2) $a = 2$; $b = 0{,}7$.

440. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x + 2)(x - 2) + 2x - x^2 = 0$;
2) $y^2 + (6 - y)(6 + y) = -3y$.

441. Розв'яжіть рівняння $(5 + x)(5 - x) + x^2 + 5x = 0$.

«3

442. Обчисліть:
1) $99 \cdot 101$; 2) $198 \cdot 202$; 3) $53 \cdot 47$; 4) $85 \cdot 95$;
5) $10{,}2 \cdot 9{,}8$; 6) $7{,}7 \cdot 8{,}3$; 7) $1{,}02 \cdot 0{,}98$; 8) $4{,}95 \cdot 5{,}05$.

443. Обчисліть:
1) $105 \cdot 95$; 2) $49 \cdot 51$; 3) $20{,}5 \cdot 19{,}5$; 4) $5{,}03 \cdot 4{,}97$.

444. Перемножте многочлени:

1) $(b + a)(-a + b)$; 2) $(-1 + k)(1 + k)$;
3) $(-2 - y)(2 - y)$; 4) $(-m - n)(-m + n)$.

445. Запишіть у вигляді многочлена:

1) $(y^2 - 1)(y^2 + 1)$; 2) $(2 + b^3)(2 - b^3)$;
3) $(m - 3m^2)(m + 3m^2)$; 4) $(5 + 2ab)(2ab - 5)$;
5) $(4n^2 + k)(-4n^2 + k)$; 6) $(-a^2 - 3bc)(a^2 - 3bc)$;
7) $(2c - 1{,}5x)(2c + 1{,}5x)$; 8) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5}b\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5}b\right)$.

446. Запишіть у вигляді многочлена:

1) $(m + 2)(-m + 2)$; 2) $(b - c)(-b - c)$;
3) $(a^2 + 3)(a^2 - 3)$; 3) $(2x^3 - 7x)(2x^3 + 7x)$;
5) $(6 - 5zt)(5zt + 6)$; 6) $(-4x + 3y)(-4x - 3y)$;
7) $(2b - 0{,}5c)(2b + 0{,}5c)$; 8) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{7}\right)$.

447. Спростіть вираз:

1) $(a + 1)(a - 1) + (2 - a)(2 + a)$;
2) $(b + 3)(b - 3) - (b - 2)(b + 2)$;
3) $(5x - 2x^2)(5x + 2x^2) - 25x^2$;
4) $a^2(a^2 + 7)(a^2 - 7) + (7a)^2$;
5) $(-4 - 3b^2)(-4 + 3b^2) - (2 - 3b)(8 + 3b^3)$;
6) $(a + b)(a - b) + (b + c)(b - c) + (c + a)(c - a)$.

448. Спростіть вираз:

1) $(x + 3)(x - 3) - (x - 4)(x + 4)$;
2) $(5 - 2c)(5 + 2c) - 2c(1 - 2c)$;
3) $(3b - 4c^2)(3b + 4c^2) + (2c)^4$;
4) $(-a + 2b)(a + 2b) - (2b + 3a)(2b - 3a)$.

449. Запишіть у вигляді многочлена:

1) $(b + 1)(b - 1)(b^2 + 1)$; 2) $(2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)$;
3) $(y - 2z)(y + 2z)(y^2 + 4z^2)$; 4) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$.

450. Запишіть у вигляді многочлена:

1) $(3 - c)(3 + c)(9 + c^2)$; 2) $(4x + y)(4x - y)(16x^2 + y^2)$.

451. Доведіть, що для будь-якого цілого значення n значення виразу $(8n + 5)(8n - 5) - (7n - 5)(7n + 5)$ ділиться на 15.

452. Дано вираз $(4x + 3)(4x - 3) - (4x - 5)(4x + 5)$. Доведіть, що його значення не залежать від значень x.

453. Розв'яжіть рівняння:

1) $(y - 3)(y + 3) + y(2 - y) = 1$;

2) $(2 - 3y)(2 + 3y) = (9y - 2)(2 - y)$.

3) $(2x - 0{,}5)(2x + 0{,}5) = x(4x - 0{,}5)$;

4) $(-z^2 + 1)(z^2 + 1) = 1 - z(1 + z^3)$.

454. Розв'яжіть рівняння:

1) $4y - y^2 + (y - 9)(y + 9) = y$;

2) $x^2 + (4 - x)(4 + x) = 8(x + 1)$;

3) $(2z - 1)(8z + 3) = (4z - 1)(4z + 1)$.

Інтерактивне завдання 13

Множення різниці двох виразів на їх суму

455. Спростіть вираз:

1) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})$;

2) $\left(2\frac{1}{3}b + 1\frac{2}{3}\right)\left(2\frac{1}{3}b - 1\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{9}b^2 + 2\frac{7}{9}$.

456. Спростіть вираз $\left(\frac{1}{3}a^2 - 1\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}a^2 + 1\frac{1}{9}\right) + \frac{8}{9}a^4 + 1\frac{19}{81}$.

457. Знайдіть значення виразу:

1) $5^{20} \cdot 4^{20} - (20^{10} + 5)(20^{10} - 5)$;

2) $(24^5 - 4^2)(24^5 + 4^2) - 2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 4^{10}$;

3) $(9 - 1)(9 + 1)(9^2 + 1)(9^4 + 1)(9^8 + 1) - 9^{16}$.

458. Знайдіть значення виразу:

1) $(15^{15} - 25)(15^{15} + 25) - 3^{30} \cdot 5^{30}$;

2) $16^8 - (16 - 1)(16 + 1)(16^2 + 1)(16^4 + 1)$.

459. Розв'яжіть рівняння $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 + x$.

460. Перший господар обгородив сіткою ділянку квадратної форми, а другий — ділянку прямокутної форми (рис. 7). Довжина другої ділянки на a м біль-

ша за сторону першої, а ширина — на a м менша від сторони першої.

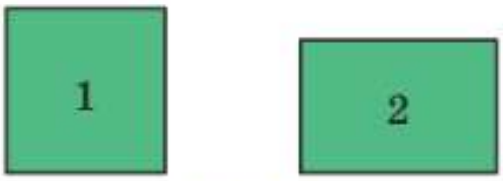


Рис. 7

1) Котрий господар обгородив свою ділянку сіткою більшої довжини?
2) Котрий господар обгородив ділянку більшої площі?

Вправи для повторення

461. Запишіть у вигляді виразу:
1) суму квадратів змінних x і y;
2) квадрат суми змінних m і n.

462. Замініть степінь добутком і запишіть одержаний добуток у вигляді многочлена: 1) $(a + 1)^2$; 2) $(5 - 2x)^2$.

463. Автомобіль проїхав деякий шлях за 1,5 год, рухаючись зі сталою швидкістю. Якби він їхав на 12 км/год швидше, то проїхав би цей шлях за 1,3 год. Скільки кілометрів проїхав автомобіль?

464. Вкладник вклав у банк 20 000 грн під певні відсотки річних, не проводив з грошима жодних операцій, і через рік на його рахунку стало 22 400 грн. Скільки відсотків річних нараховує банк?

Поміркуйте

465. Кожний із 7 гномів має не більше 5 цукерок. Чи обов'язково деякі два гноми мають цукерок порівну?

13 КВАДРАТ СУМИ І КВАДРАТ РІЗНИЦІ ДВОХ ВИРАЗІВ

1. Квадрат суми двох виразів. Піднесемо до квадрата суму $a + b$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Отже,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Одержану тотожність називають *формулою квадрата суми*. Вона є формулою скороченого множення, бо дозволяє підносити до квадрата суму довільних двох виразів не за правилом множення двох многочленів, а скорочено: відразу записувати квадрат у вигляді тричлена $a^2 + 2ab + b^2$. Формулюють формулу квадрата суми так:

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток цих виразів плюс квадрат другого виразу.

Піднесемо до квадрата суму $2x + 3y$:

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

Проміжні перетворення можна виконувати усно:

$$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

2. Квадрат різниці двох виразів. Піднесемо до квадрата різницю $a - b$:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Отже, маємо таку *формулу квадрата різниці*:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток цих виразів плюс квадрат другого виразу.

Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів ще називають *квадратом двочлена*.

Квадрати протилежних чисел дорівнюють один одному: $(-a)^2 = a^2$. Тому, підносячи до квадрата вирази $-a - b$ та $-a + b$, можна користуватися формулами:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(-a + b)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Для тих, хто хоче знати більше

Щоб піднести суму або різницю двох виразів до куба, можна використовувати *формули куба суми* або *куба різниці*:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Виведемо ці формули:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 =$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Піднести до квадрата вираз:

1) $xy - 2z^2$; 2) $-3m - n$; 3) $-x + 5y$; 4) $a + b - c$.

- 1) $(xy - 2z^2)^2 = (xy)^2 - 2 \cdot xy \cdot 2z^2 + (2z^2)^2 = x^2y^2 - 4xyz^2 + 4z^4$;
  2) $(-3m - n)^2 = (3m + n)^2 = 9m^2 + 6mn + n^2$;
  3) $(-x + 5y)^2 = (x - 5y)^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$;
  4) $(a + b - c)^2 = ((a + b) - c)^2 = (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2 =$
  $= a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$. ●

1. Чому дорівнює квадрат суми двох виразів? Квадрат різниці?
2. Як записують і читають відповідні формули?

Усно

466. Піднесіть до квадрата двочлен:

1) $x + y$; 2) $x - y$; 3) $a + 1$; 4) $a - 1$.

1 2

467. Піднесіть до квадрата:

1) $(k + n)^2$; 2) $(b + 2)^2$; 3) $(3 + a)^2$;
4) $(c - 4)^2$; 5) $(5 - y)^2$; 6) $(x - 15)^2$;
7) $(k + 12)^2$; 8) $(c - 0{,}5)^2$; 9) $(n + 1{,}2)^2$.

468. Піднесіть до квадрата:

1) $(b - c)^2$; 2) $(x + 4)^2$; 3) $(a - 2)^2$;
4) $(10 - n)^2$; 5) $(z + 0{,}3)^2$; 6) $(b - 1{,}5)^2$.

469. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(2a + 1)^2$; 2) $(2c - 5)^2$; 3) $(3 - 4m)^2$;
4) $(5x - y)^2$; 5) $(3b + 2c)^2$; 6) $(5k - 8n)^2$.

470. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(3b - 1)^2$; 2) $(5z + 2)^2$; 3) $(6a + b)^2$;
4) $(2x - 5y)^2$; 5) $(3a + 10b)^2$; 6) $(4m - 9n)^2$.

471. Спростіть вираз:

1) $(a + 1)^2 + (a - 1)^2$; 2) $(b + 2)^2 - 4(b + 1)$;
3) $(5 - 2x)^2 - 25 - 4x^2$; 4) $x^2 - 1 - (x - 1)^2$.

472. Спростіть вираз:

1) $(b - 4)^2 + 8b - b^2$; 2) $(x + 2)^2 + (x - 2)^2$.

473. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 2)^2 - x^2 = 8$; 2) $(x - 3)^2 - x^2 = 21$.

474. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 1)^2 - x^2 = 11$; 2) $(x + 4)^2 - x^2 = 24$.

475. Піднесіть до квадрата:

1) $(-b + c)^2$; 2) $(-x - y)^2$; 3) $(-2a + 3)^2$;
4) $(-4x + 5y)^2$; 5) $(-2m - 10n)^2$; 6) $(-2{,}5a + 4)^2$.

476. Піднесіть до квадрата:

1) $(-m - n)^2$; 2) $(-b + 5)^2$; 3) $(-3x + y)^2$;
4) $(-4c - 3d)^2$; 5) $(-2k - 15n)^2$; 6) $(-0{,}5z + 2)^2$.

477. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(y^2 + 1)^2$; 2) $(2 - x^3)^2$; 3) $(2m - m^2)^2$;
4) $(6a^2 + a)^2$; 5) $(4a^2 - ac)^2$; 6) $(-4a^2 - 3b)^2$;
7) $(-m^2 + 5nk)^2$; 8) $(2xy^2 + 1{,}5x)^2$; 9) $\left(3x^2 - \frac{2}{3}x\right)^2$.

478. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a^2 + 2)^2$; 2) $(2b^3 - 4)^2$; 3) $(x^2 + 2x)^2$;
4) $(-2a^2 + 5ab)^2$; 5) $(-10m - 3mk)^2$; 6) $\left(\frac{3}{4}xy - \frac{2}{3}\right)^2$.

479. Спростіть вираз:

1) $(2k - 1)^2 - (2k + 1)^2$; 2) $(-a + 2b)^2 + (a + 2b)^2$;
3) $(x^2 - 3)^2 + (3x - 1)(2x + 9)$.

480. Спростіть вираз:

1) $(2z - 5)^2 - 4z^2 + (2z + 5)^2$; 2) $(x^2 + 1)^2 - x^2(x^2 + 2)$.

481. Знайдіть значення виразу:

1) $(2y - 5)^2 - (2y + 5)(2y - 5)$, якщо $y = 2{,}5$; $y = -0{,}15$;

2) $(3m + 2n)^2 - (3m - 2n)^2$, якщо $m = 0{,}5$; $n = \frac{7}{12}$.

482. Знайдіть значення виразу $(2 - 7k)(2 + 7k) + (7k - 1)^2$, якщо $k = -0{,}5$; $k = 1{,}5$.

483. Доведіть тотожність:

1) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;

2) $(3n + 4)^2 + (4n - 3)^2 = 25(n^2 + 1)$;

3) $(2km)^2 + (k^2 - m^2)^2 = (k^2 + m^2)^2$.

484. Доведіть тотожність:

1) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;

2) $(2n - 3)^2 + 24n = (2n + 3)^2$.

485. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(2n + 3)^2 - (2n - 3)(2n + 5)$ ділиться на 8.

486. Доведіть, що для будь-якого натурального значення k значення виразу $(3k + 8)^2 + (4k - 6)^2$ ділиться на 25.

487. Розв'яжіть рівняння:

1) $(5x + 4)^2 = (1 - 5x)^2$;

2) $(3x - 5)(3x + 5) = 7 + (3x - 4)^2$;

3) $(2y + 3)^2 - (4y - 2)(y - 6) = 16$;

4) $(3x - 1)^2 + (4x - 1)^2 = (5x - 1)^2$.

488. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x - 3)^2 = (2x + 1)^2 - 8$;

2) $16y^2 - (4y - 3)^2 = 15y - 90$;

3) $3(x - 1)^2 - (2 - x)(2 + x) = (2x - 1)^2$.

489. На рисунку 8 зображено рамку, яку обмежують два квадрати. Сторона меншого квадрата на 8 см коротша від сторони більшого. Знайдіть сторони квадратів, якщо площа рамки дорівнює 576 см^2.

Рис. 8

Рис. 9

490. Із двох боків парку, що має форму квадрата, зробили доріжки завширшки 2 м (див. рис. 9). Знайдіть розміри парку, якщо загальна площа доріжок дорівнює 324 м^2.

Інтерактивне завдання 14
Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів

4

491. Доведіть тотожність

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

492. Піднесіть до степеня:

1) $(a + b + 3)^2$; 2) $(2x - 3y + 5)^2$;
3) $(a + 1)^3$; 4) $(2x - y)^3$.

493. Піднесіть до степеня:

1) $(a - 2b + 3)^2$; 2) $(m - 2)^3$.

494. Спростіть вираз:

1) $(m + n)^3 - 3mn(m + n)$; 2) $(a - b)^2(a + b)^2 - (a^2 + b^2)^2$;
3) $(5^n + 2)^2 - 2(25^n - 4) + (5^n - 2)^2$.

495. Спростіть вираз:

1) $(x - y)^3 - x^3 + y^3$; 2) $(2^n - 1)^2 - 4^n + 2^{n+1}$.

496. Натуральне число n при діленні на 5 дає в остачі 3. Доведіть, що число $n^2 + 1$ ділиться на 5.

497. Доведіть, що для будь-якого непарного натурального значення m число $m^2 - 1$ ділиться на 4.

Вправи для повторення

498. Подайте вираз у вигляді квадрата одночлена:

1) $16x^2$; 2) $196c^4$; 3) $0{,}25b^2c^2$; 4) $x^4y^6z^2$.

499. Розкладіть на множники:

1) $5y^2 + 15y$; 2) $a^3 + 4a^2 + 2a + 8$.

500. Із 15 % площі поля зібрали 240 ц пшениці. Скільки центнерів пшениці зберуть з решти поля, якщо врожайність на всіх його ділянках однакова?

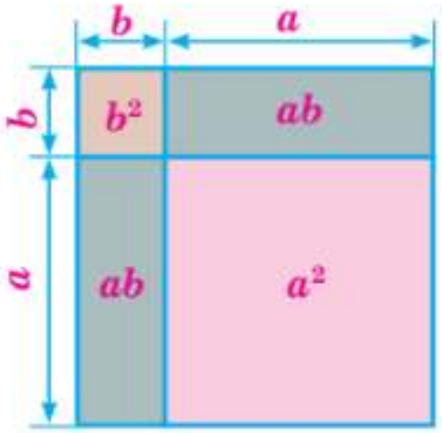
501. Автомобіль рухається позаду автобуса на відстані 4 км. Через скільки хвилин автомобіль наздожене автобус,

якщо швидкість автобуса дорівнює 70 км/год, а автомобіля — 90 км/год?

Поміркуйте

502. Знайдіть усі натуральні числа m і n, для яких виконується рівність $(m + 2n)^2 - (m + n)^2 = 57$.

Цікаво знати



Учені Давньої Греції алгебраїчні твердження, формули, що виражають певні залежності між величинами, трактували геометрично. Зокрема, добуток ab вони розглядали як площу прямокутника зі сторонами a та b.

Наведемо приклад алгебраїчного твердження, яке було відомим давньогрецьким ученим і яке в геометричній термінології формулювали так:

Площа квадрата, побудованого на сумі двох відрізків, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на кожному з цих відрізків, плюс подвоєна площа прямокутника, побудованого на цих відрізках.

Не важко здогадатися, що йдеться про формулу квадрата суми, яку ми зараз символічно записуємо так:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

14 РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ РІЗНИЦІ КВАДРАТІВ ДВОХ ВИРАЗІВ

У тотожності $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ поміняємо місцями ліву і праву частини:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Одержану тотожність називають *формулою різниці квадратів* двох виразів. Формулюють її так:

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їх суми.

Формула різниці квадратів дає можливість розкласти на множники вираз, який можна звести до вигляду $a^2 - b^2$. Наприклад:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3).$$

Порівняйте

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ → виконали множення

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ → розклали на множники

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники:

1) $16x^4 - 9y^2z^2$; 2) $(2a - b)^2 - a^2$.

• 1) $16x^4 - 9y^2z^2 = (4x^2)^2 - (3yz)^2 = (4x^2 - 3yz)(4x^2 + 3yz)$;

2) $(2a - b)^2 - a^2 = (2a - b - a)(2a - b + a) = (a - b)(3a - b)$. •

Вправа 2. Обчислити: $75^2 - 65^2$.

• $75^2 - 65^2 = (75 - 65) \cdot (75 + 65) = 10 \cdot 140 = 1400$. •

Вправа 3. Розв'язати рівняння $(x - 3)^2 - 36 = 0$.

• $(x - 3)^2 - 6^2 = 0$; $(x - 3 - 6)(x - 3 + 6) = 0$; $(x - 9)(x + 3) = 0$;

$x - 9 = 0$ або $x + 3 = 0$; $x = 9$ або $x = -3$.

Відповідь. -3; 9. •

1. Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?
2. Як записують і читають відповідну формулу?

«Усно

503. Розкладіть на множники:

1) $x^2 - y^2$; 2) $p^2 - 5^2$; 3) $m^2 - 4$; 4) $1 - c^2$.

«1 2

504. Розкладіть на множники:

1) $a^2 - 9$; 2) $b^2 - 81$; 3) $16 - x^2$; 4) $64 - y^2$;

5) $4z^2 - 25$; 6) $49 - 9b^2$; 7) $9x^2 - 4y^2$; 8) $25a^2 - 144b^2$.

505. Розкладіть на множники:

1) $b^2 - 25$; 2) $100 - z^2$; 3) $9c^2 - 1$; 4) $81 - 16y^2$;
5) $36m^2 - 49n^2$; 6) $121p^2 - 64q^2$.

506. Знайдіть значення виразу:

1) $45^2 - 44^2$; 2) $81^2 - 71^2$; 3) $138^2 - 38^2$; 4) $6{,}7^2 - 3{,}3^2$.

507. Знайдіть значення виразу:

1) $29^2 - 28^2$; 2) $155^2 - 55^2$; 3) $78^2 - 22^2$; 4) $9{,}5^2 - 8{,}5^2$.

508. Знайдіть значення виразу $x^2 - y^2$, якщо:

1) $x = 22$; $y = 32$; 2) $x = 2{,}8$; $y = 7{,}2$;
3) $x = 54$; $y = -46$; 4) $x = -72$; $y = 28$.

509. Знайдіть значення виразу $m^2 - n^2$, якщо:

1) $m = 48$; $n = 52$; 2) $m = 5{,}5$; $n = -4{,}5$.

510. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4 = 0$; 2) $25y^2 - 16 = 0$.

511. Розв'яжіть рівняння:

2) $y^2 - 36 = 0$; 2) $100x^2 - 49 = 0$.

«« 3

512. Розкладіть на множники:

1) $a^4 - b^2$; 2) $25m^2 - 64n^8$; 3) $36 - 4a^6c^2$;
4) $0{,}01 - 6{,}25x^8y^8$; 5) $\frac{9}{49}a^2 - 16x^4y^8$; 6) $2\frac{7}{9} - 0{,}81a^4b^8c^2$.

513. Розкладіть на множники:

1) $4a^8 - 25b^2c^2$; 2) $1{,}96m^{20} - 0{,}09n^2$; 3) $\frac{4}{9}a^2b^4c^2 - 2\frac{1}{4}x^6$.

514. Розкладіть на множники:

1) $(a + 2)^2 - 1$; 2) $(3x - 1)^2 - 16$;
3) $(3b + 2)^2 - 4b^2$; 4) $25n^2 - (7n - 5)^2$;
5) $(4x + 3)^2 - (3x + 2)^2$; 6) $(a - 2b)^2 - (3a + 5b)^2$.

515. Розкладіть на множники:

1) $(b + 5)^2 - 4$; 2) $(2k - 1)^2 - 36$;
3) $64a^2 - (4a + 3)^2$; 4) $(4x - y)^2 - (5x - 3y)^2$.

516. Знайдіть значення виразу:

1) $50{,}002^2 - 49{,}998^2$; 2) $50^2 - 62{,}5^2 + 37{,}5^2$.

517. Знайдіть значення виразу:
1) $4{,}125^2 - 5{,}875^2$; 2) $500 - 20{,}5^2 + 10{,}5^2$.

518. Знайдіть значення виразу $a^2 - 4b^2$, якщо:
1) $a = -3{,}2$; $b = 3{,}4$; 2) $a = 1\frac{4}{7}$; $b = \frac{2}{7}$.

519. Знайдіть значення виразу $9p^2 - q^2$, якщо:
1) $p = 2{,}3$; $q = -1{,}9$; 2) $p = \frac{3}{14}$; $q = \frac{5}{14}$.

520. Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:
1) $4575^2 - 1425^2$; на 1000; 2) $843^2 - 257^2$; на 200.

521. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x + 3)^2 - 1 = 0$; 2) $(5y - 2)^2 - 9 = 0$;
3) $(3z + 5)^2 - 4z^2 = 0$; 4) $(2x - 3)^2 - (3x + 3)^2 = 0$.

522. Розв'яжіть рівняння:
1) $(2x - 5)^2 - 1 = 0$; 2) $(4y - 7)^2 - (y + 2)^2 = 0$.

Інтерактивне завдання 15
Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів

4

523. Доведіть, що для будь-яких натуральних значень m і n значення виразу $(7m + 4n)^2 - (m + 4n)^2$ ділиться на 48.

524. Доведіть, що для будь-якого натурального значення k значення виразу $(4k + 2)^2 - (4k - 2)^2$ ділиться на 32.

525. Розкладіть на множники:
1) $a^8 - b^8$; 2) $1 - 16x^4$.

526. Розв'яжіть рівняння:
1) $(5 - 2z)^2 = (4z - 1)^2$; 2) $y^4 - 81 = 0$.

527. Розв'яжіть рівняння:
1) $(4x - 3)^2 = (4 - 3x)^2$; 2) $x^4 - 16 = 0$.

528. Доведіть, що різниця квадратів двох натуральних чисел, одне з яких при діленні на 5 дає в остачі 3, а друге — в остачі 2, ділиться на 5.

Вправи для повторення

529. Знайдіть значення виразу:

1) $1{,}8 \cdot \left(0{,}5 - \frac{1}{3} + 1\frac{1}{6}\right)$; 2) $4\frac{7}{20} : 1\frac{9}{20} - 20 \cdot \left(3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{4}\right)$.

530. Піднесіть до квадрата:

1) $(m - 5)^2$; 2) $(3a + 1)^2$; 3) $(4b - 3)^2$; 4) $(-2a - 5b)^2$.

531. Мамі 36 років, а дочці — 12.

1) Через скільки років мама буде удвічі старшою за дочку?

2) Скільки років тому мама була в 5 разів старшою за дочку?

532. Банк дав підприємцеві кредит 50 000 грн на рік зі ставкою 8 % річних. Скільки гривень має повернути підприємець банкові через рік?

Поміркуйте

533. Чи можна натуральні числа 1, 2, ..., 15 розбити на кілька груп так, щоб у кожній групі найбільше число дорівнювало сумі інших чисел групи?

Цікаво знати

Український математик **Георгій Вороний** визнаний фахівцями як один із найяскравіших талантів у галузі теорії чисел. Він народився в селі Журавка на Полтавщині (тепер Чернігівська область), працював у Варшавському університеті на посаді професора.

Георгій Феодосійович Вороний (1868–1908)

Кажуть, що Г. Вороний випередив свій час на століття: хоча його наукові праці вийшли на межі XIX–XX століть, сьогодні їх результати використовують у фізиці, хімії, астрономії, комп'ютерній графіці та багатьох інших галузях знань. З його ім'ям пов'язані спеціальні математичні терміни: у деяких країнах так звані «діаграми Вороного» уведено навіть до шкільної програми.

15 ПЕРЕТВОРЕННЯ МНОГОЧЛЕНА У КВАДРАТ СУМИ АБО РІЗНИЦІ ДВОХ ВИРАЗІВ

Запишемо формули квадрата суми і квадрата різниці двох виразів, поміняв місцями їхні ліві та праві частини:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Отже, тричлени вигляду $a^2 + 2ab + b^2$ або $a^2 - 2ab + b^2$ можна записати як квадрати двочленів. Тому такі тричлени називають *повними квадратами*. Наприклад:

$m^2 + 6m + 9 = (m + 3)^2$ → $m^2 + 6m + 9$ — повний квадрат

$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$ → $4x^2 - 4xy + y^2$ — повний квадрат

Зазначимо, що рівність $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ можна записати у вигляді $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$. Тому запис тричлена у вигляді квадрата двочлена є розкладом тричлена на множники.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники тричлен $9a^2 - 12ab + 4b^2$.

• $9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = (3a - 2b)^2$.

Скорочено записують: $9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a - 2b)^2$. •

Вправа 2. Знайти значення виразу $x^2 + 8x + 16$, якщо $x = 16$; $x = -9$.

• Запишемо спочатку тричлен $x^2 + 8x + 16$ у вигляді квадрата двочлена:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2.$$

Якщо $x = 16$, то $(x + 4)^2 = (16 + 4)^2 = 20^2 = 400$.

Якщо $x = -9$, то $(x + 4)^2 = (-9 + 4)^2 = (-5)^2 = 25$. •

Вправа 3. Розв'язати рівняння $x^2 - 10x + 25 = 0$.

• $(x - 5)^2 = 0$; $x - 5 = 0$; $x = 5$.

Відповідь. 5. •

Вправа 4. Довести, що вираз $x^2 - 8x + 18$ набуває лише додатних значень.

• Виділимо із тричлена $x^2 - 8x + 18$ квадрат двочлена:

$x^2 - 8x + 18 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 16 - 16 + 18 = (x - 4)^2 + 2.$

Ми подали тричлен у вигляді суми двох доданків $(x - 4)^2$ і 2. Доданок $(x - 4)^2$ набуває невід'ємних значень, доданок 2 — додатний. Тому вираз $(x - 4)^2 + 2$ набуває лише додатних значень. •

Примітка. Із рівності $x^2 - 8x + 18 = (x - 4)^2 + 2$, одержаній у вправі 4, випливає, що найменше значення виразу $x^2 - 8x + 18$ дорівнює 2, і цього найменшого значення вираз набуває, якщо $x = 4$.

1. Наведіть приклад тричлена, який можна подати у вигляді квадрата двочлена.

Усно

534. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $x^2 + 2xy + y^2$; 2) $x^2 - 2xb + b^2$; 3) $a^2 + 2a + 1$.

(1)(2)

535. Розкладіть на множники:

1) $p^2 + 2pq + q^2$; 2) $c^2 - 2c + 1$; 3) $b^2 + 4b + 4$;
4) $x^2 - 6x + 9$; 5) $36 + 12b + b^2$; 6) $25 + z^2 - 10z$.

536. Розкладіть на множники:

1) $x^2 - 4x + 4$; 2) $a^2 + 10a + 25$; 3) $16 - 8b + b^2$.

537. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $4a^2 - 4a + 1$; 2) $16x^2 + 8x + 1$; 3) $1 - 14b + 49b^2$;
4) $4x^2 + 12x + 9$; 5) $25b^2 - 20b + 4$; 6) $-24k + 16 + 9k^2$.

538. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

1) $9k^2 - 6k + 1$; 2) $4b^2 + 16b + 16$; 3) $64 - 80s + 25s^2$.

539. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $4x^2 + 4xz + z^2$; 2) $m^2 - 6mn + 9n^2$;
3) $16a^2 - 8ab + b^2$; 4) $4c^2 + 12ca + 9a^2$;
5) $49x^2 - 28xy + 4y^2$; 6) $25p^2 + 9q^2 - 30pq$.

540. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $16a^2 + 8ab + b^2$; 2) $25m^2 - 20mn + 4n^2$;

3) $4x^2 + 36xy + 81y^2$; 4) $9b^2 + 16c^2 - 24bc$.

541. Знайдіть значення виразу:

1) $x^2 - 4x + 4$, якщо $x = 12$; $x = 2{,}1$; $x = -18$;

2) $9a^2 - 6a + 1$, якщо $a = 7$; $a = -33$;

3) $9m^2 + 24mn + 16n^2$, якщо $m = 15$; $n = -11$.

542. Знайдіть значення виразу:

1) $4a^2 + 4a + 1$, якщо $a = 4{,}5$; $a = -5{,}5$;

3) $x^2 - 12xy + 36y^2$, якщо $x = 35$; $y = 6$.

543. Обчисліть зручним способом:

1) $73^2 + 2 \cdot 73 \cdot 27 + 27^2$; 2) $5{,}8^2 - 2 \cdot 5{,}8 \cdot 3{,}8 + 3{,}8^2$.

544. Обчисліть зручним способом:

1) $92^2 - 2 \cdot 92 \cdot 72 + 72^2$; 2) $4{,}9^2 + 2 \cdot 4{,}9 \cdot 5{,}1 + 5{,}1^2$.

«3»

545. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $0{,}25m^2 + 2mn + 4n^2$; 2) $0{,}36c^2 - 0{,}6cx + 0{,}25x^2$;

3) $p^2 - \frac{1}{3}p + \frac{1}{36}$; 4) $(a - 4)^2 + 2(a - 4) + 1$;

5) $(2x + y)^2 - 4(2x + y) + 4$; 6) $(a + b)^2 - 4ab$.

546. Подайте у вигляді квадрата двочлена вираз:

1) $2{,}25c^2 + 12c + 16$; 2) $400a^2 + 4ab + 0{,}01b^2$;

3) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; 4) $(2n - 1)^2 - 6(2n - 1) + 9$.

547. Знайдіть значення виразу:

1) $4x^2 + 4xy + y^2$, якщо $x = \frac{1}{7}$; $y = \frac{5}{7}$;

2) $a^2 - 3a + 2{,}25$, якщо $a = 11{,}5$; $a = -7{,}5$.

548. Знайдіть значення виразу $m^2 - 6mn + 9n^2$, якщо $m = \frac{2}{3}$; $n = \frac{1}{3}$.

549. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 8x + 16 = 0$; 2) $y^2 + 12y + 36 = 0$;

3) $(y - 8)^2 - 4(y - 8) + 4 = 0$; 4) $(2z + 1)^2 + 10(2z + 1) = -25$.

550. Розв'яжіть рівняння:

1) $z^2 - 6z + 9 = 0$; 2) $x^2 + 10x + 25 = 0$;

3) $(y + 4)^2 - 12(y + 4) + 36 = 0$.

Інтерактивне завдання 16

Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів

4

551. Знайдіть значення b, для якого вираз $64y^2 + 80y + b$ є квадратом двочлена.

552. Знайдіть значення a, для якого вираз $ax^2 + 20x + 25$ є квадратом двочлена.

553. Подайте многочлен у вигляді суми квадратів двох виразів:

1) $2y^2 + 2y + 1$; 2) $m^2 + n^2 - 2m + 4n + 5$;

3) $a^2 + 2ab + 2b^2 - 4b + 4$; 4) $a^2 + b^2 + 5c^2 - 2ac + 4bc$.

554. Знайдіть значення x та y, для яких є правильною рівність

$$2x^2 + y^2 - 2xy - 6y + 9 = 0.$$

555. Знайдіть значення a і b, для яких є правильною рівність

$$a^2 + b^2 + 2a - 2b + 2 = 0.$$

556. Доведіть, що вираз набуває лише додатних значень:

1) $x^2 - 2x + 3$; 2) $4m^2 - 4mn + n^2 + 3$.

557. Доведіть, що вираз $a^2 - 4a + 5$ набуває лише додатних значень.

558. Знайдіть найменше значення виразу $b^2 - 8b + 7$ та значення змінної, для якого вираз набуває найменшого значення.

559. Знайдіть найменше значення виразу $x^2 + 6x + 12$ та значення змінної, для якого вираз набуває найменшого значення.

Вправи для повторення

560. Запишіть у вигляді куба вираз:

1) $8x^3$; 2) $-m^3$; 3) $64a^9$; 4) $-27a^6b^{12}$.

561. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1) $(x + 4)(x^2 + 2x - 3)$; 2) $(a - 2b)(a^2 - 2ab + 2b^2)$.

562. Щоб одержати 200 г фарби кольору морської хвилі, художниця змішала фарби білого, зеленого і чорного кольорів. Співвідношення мас цих трьох фарб показує діаграма, зображена на рисунку 10. Скільки грамів фарби білого кольору використала художниця? Зеленого кольору? Чорного кольору?

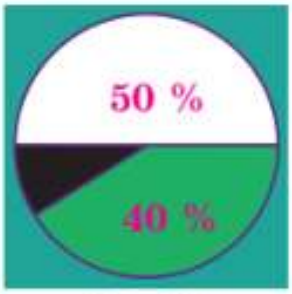


Рис. 10

563. Потяг затримали на станції A на 10 хв, проте він надолужив згаяний час на перегоні між станціями A і B, пройшовши його зі швидкістю 105 км/год, замість запланованої швидкості 90 км/год. Знайдіть відстань між станціями A і B.

Поміркуйте

564. У першій чашці була кава, у другій — стільки ж молока. З першої чашки в другу перелили ложечку кави, потім таку ж ложечку суміші перелили з другої чашки в першу. Чого стало більше: молока в першій чашці чи кави в другій?

16 РІЗНИЦЯ І СУМА КУБІВ ДВОХ ВИРАЗІВ

Різницю квадратів двох виразів можна розкласти на множники за формулою різниці квадратів. Розкладаючи на множники різницю кубів двох виразів, використовують *формулу різниці кубів*:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Доведемо цю тотожність, перемноживши многочлени правої частини:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

У формулі різниці кубів тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають *неповним квадратом суми* виразів a і b (він нагадує тричлен $a^2 + 2ab + b^2$, який є квадратом суми цих виразів). Отже, формулу різниці кубів можна сформулювати так:

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми.

Розкладаючи на множники суму кубів двох виразів, використовують *формулу суми кубів*:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Доведемо цю тотожність:

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$.

Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають *неповним квадратом різниці* виразів a і b. Отже,

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники:

1) $a^3 - 64$; 2) $27a^3 + 125b^3$; 3) $-x^3 - y^6$.

• 1) $a^3 - 64 = a^3 - 4^3 = (a - 4)(a^2 + 4a + 16)$;

2) $27a^3 + 125b^3 = (3a)^3 + (5b)^3 = (3a + 5b)(9a^2 - 15ab + 25b^2)$;

3) $-x^3 - y^6 = -(x^3 + (y^2)^3) = -(x + y^2)(x^2 - xy^2 + y^4)$. •

Вправа 2. Спростити вираз $(2a - x)(4a^2 + 2ax + x^2) + x^3$.

• $(2a - x)(4a^2 + 2ax + x^2) + x^3 = (2a)^3 - x^3 + x^3 = 8a^3$. •

Вправа 3. Розв'язати рівняння $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 - 3x$.

• Записавши ліву частину рівняння у вигляді $x^3 + 27$, матимемо: $x^3 + 27 = x^3 - 3x$; $x^3 - x^3 + 3x = -27$; $3x = -27$; $x = -9$.

Відповідь. -9. •

1. Чому дорівнює різниця кубів двох виразів? Сума кубів?
2. Як записують і читають відповідні формули?

«Усно

565. Який з наведених виразів є неповним квадратом суми виразів b і c? Різниці виразів b і c?

1) $b^2 + 2bc + c^2$; 2) $b^2 + bc + c^2$;

3) $b^2 - 2bc + c^2$; 4) $b^2 - bc + c^2$.

566. До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Д).

1 $x^3 - y^3$	**А** $(x - 2)(x^2 + 4x + 4)$
2 $x^3 + y^3$	**Б** $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
3 $x^3 - 8$	**В** $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
	Г $(x - y)(x^2 - xy + y^2)$
	Д $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

567. Розкладіть на множники: 1) $m^3 - n^3$; 2) $m^3 + n^3$.

«1 2»

568. Розкладіть на множники:

1) $p^3 - q^3$; 2) $b^3 - 1$; 3) $x^3 - 27$; 4) $64 - y^3$;
5) $b^3 + c^3$; 6) $a^3 + 8$; 7) $1 + y^3$; 8) $125 + b^3$.

569. Розкладіть на множники:

1) $a^3 - x^3$; 2) $b^3 - 8$; 3) $27 - a^3$; 4) $1 - z^3$;
5) $k^3 + p^3$; 6) $n^3 + 64$; 7) $z^3 + 1$; 8) $27 + c^3$.

570. Продовжте розкладання на множники:

1) $27b^3 - 1 = (3b)^3 - 1^3 = \ldots$;
2) $8 + 125y^3 = 2^3 + (5y)^3 = \ldots$;
3) $x^3 - 64y^3 = x^3 - (4y)^3 = \ldots$.

571. Продовжте розкладання на множники:

1) $27c^3 - 64 = (3c)^3 - 4^3 = \ldots$;
2) $a^3 + 125b^3 = a^3 + (5b)^3 = \ldots$.

572. Розкладіть на множники:

1) $8x^3 - 1$; 2) $64a^3 + 27$; 3) $125 - 27y^3$; 4) $64b^3 + c^3$.

573. Розкладіть на множники:

1) $1 + 8m^3$; 2) $125p^3 - 1$; 3) $27x^3 + 64$; 4) $a^3 - 8b^3$.

574. Спростіть вираз:

1) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) - x^3$; 2) $(4 - c)(16 + 4c + c^2) + c^3$.

575. Спростіть вираз:

1) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + b^3$; 2) $(k + 1)(k^2 - k + 1) - k^3$.

576. Знайдіть значення виразу $(4x + 1)(16x^2 - 4x + 1) - 63x^3$, якщо $x = -2$; $x = 5$.

577. Знайдіть значення виразу $(1 - 2y)(1 + 2y + 4y^2) + 9y^3$, якщо $y = -3$; $y = 4$.

578. Запишіть у вигляді добутку вираз:

1) $-a^3 + 8$; 2) $-b^3 - c^3$; 3) $-64 - z^3$.

579. Розкладіть на множники:

1) $216b^3 - 27c^3$; 2) $b^3 + 0{,}125$; 3) $\frac{1}{64}p^3 - 8q^3$;

4) $m^6 - n^3$; 5) $27a^9 + c^6$; 6) $-8x^6 + 125y^6$;

7) $27a^3 - b^3c^3$; 8) $0{,}001x^3y^3 + z^{12}$; 9) $1000 - a^3b^6c^9$.

580. Розкладіть на множники:

1) $64a^3 - 125b^3$; 2) $\frac{1}{8}x^3 + 1$; 3) $m^6 - n^6$;

4) $-k^9 - 8p^3$; 5) $64y^3 - 27a^6b^6$; 6) $0{,}064x^3y^3z^3 - 8$.

581. Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

1) $921^3 - 821^3$; на 100; 2) $57^3 + 28^3$; на 85.

582. Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

1) $27^3 + 37^3$; на 64; 2) $75^3 - 25^3$; на 50.

583. Спростіть вираз:

1) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) + 1$;

2) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - a^6 - b^6$;

3) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - (a^2 + 2a + 4)(a - 2)$.

584. Спростіть вираз:

1) $(k^2 + 3)(k^4 - 3k^2 + 9) - 27$;

2) $(b - 1)(b^2 + b + 1) + (b + 1)(b^2 - b + 1)$.

585. Знайдіть значення виразу $(3m + n)(9m^2 - 3mn + n^2) - 26m^3$, якщо:

1) $m = 1{,}5$; $n = -1{,}5$; 2) $m = -6$; $n = 5$.

586. Знайдіть значення виразу $(b - 2c)(b^2 + 2bc + 4c^2) + 7c^3$, якщо $b = 0{,}8$; $c = 0{,}8$.

587. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 4x$;

2) $z^3 - 8z = (z - 4)(z^2 + 4z + 16)$.

588. Розв'яжіть рівняння:

1) $(1 - x)(1 + x + x^2) = x - x^3$;

2) $(y^2 - 3y + 9)(y + 3) = 6y + y^3$.

Якщо доручити двом людям, один з яких математик, виконати деяку незнайому їм роботу, то результат завжди буде таким: математик зробить її краще.

*Жартівливий закон Штейнгауза**

* Гуго Штейнгауз (1887–1972) — польський математик.

Інтерактивне завдання 17
Різниця і сума кубів двох виразів

4

589. Розкладіть на множники:
1) $(b-2)^3+125$; 2) $(2x+3)^3-x^3$;

590. Розкладіть на множники:
1) $(c+3)^3-64$; 2) $(y-1)^3+y^3$.

591. 1) Доведіть тотожність $a^3+b^3=(a+b)((a+b)^2-3ab)$.
2) Знайдіть значення виразу a^3+b^3, якщо $a+b=7$; $ab=12$.

592. 1) Доведіть тотожність $a^3-b^3=(a-b)((a-b)^2+3ab)$.
2) Знайдіть значення виразу a^3-b^3, якщо $a-b=4$; $ab=32$.

593. Доведіть, що сума кубів двох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 4.

Вправи для повторення

594. Знайдіть значення виразу:
1) $4^{10}-(4^5+3)(4^5-3)$; 2) $2^{12}\cdot 3^{12}+(4-6^6)(4+6^6)$.

595. Розв'яжіть рівняння:
1) $7-|x|=5$; 2) $|2x+5|=3$.

596. Скільки парних трицифрових чисел можна скласти з карток, зображених на рисунку 11?

Рис. 11

597. Сплав міді й цинку має масу 3,6 кг і містить 45 % міді. До сплаву додали 400 г міді й одержали новий сплав. Чого у новому сплаві більше: міді чи цинку?

Поміркуйте

598. До школи йдуть 5 дівчат. Кожна з них серед інших 4 дівчат має не менше 2 сестер. Доведіть, що всі дівчата є сестрами.

17 ЗАСТОСУВАННЯ КІЛЬКОХ СПОСОБІВ РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

Для розкладання многочленів на множники ми використовували такі способи:

винесення спільного множника за дужки;
спосіб групування;
застосування формул скороченого множення.

Часто, щоб розкласти многочлен на множники, потрібно застосувати кілька цих способів. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен $7a^2b^2 - 7b^4$.

Розв'язання. $7a^2b^2 - 7b^4 = 7b^2(a^2 - b^2) = 7b^2(a - b)(a + b)$. •

Спочатку винесли спільний множник $7b^2$ за дужки, а потім застосували формулу різниці квадратів.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен

$$m^2 - n^2 - 2m + 2n.$$

Розв'язання. Для виразу $m^2 - n^2$ застосуємо формулу різниці квадратів, а у виразі $-2m + 2n$ винесемо множник -2 за дужки. Тоді:

$$m^2 - n^2 - 2m + 2n = (m - n)(m + n) - 2(m - n) =$$
$$= (m - n)(m + n - 2).$$ •

Приклад 3. Розкласти на множники многочлен

$$ac - 3c + abc - 3bc.$$

Розв'язання. Усі члени многочлена мають спільний множник c. Винесемо його за дужки:

$$ac - 3c + abc - 3bc = c(a - 3 + ab - 3b).$$

Многочлен $a - 3 + ab - 3b$ розкладемо на множники способом групування:

$$a - 3 + ab - 3b = (a - 3) + b(a - 3) = (a - 3)(1 + b).$$

Отже,

$$ac - 3c + abc - 3bc = c(a - 3)(1 + b).$$ •

Загального алгоритму розкладання многочленів на множники із застосуванням кількох способів немає. Якщо це можливо, то розкладання доречно починати з винесення спільного множника за дужки.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розкласти на множники тричлен $x^2 - 6x - 16$.

• Якщо до виразу $x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x$ додати 3^2, тобто 9, то одержимо вираз $x^2 - 6x + 9$, який є квадратом двочлена $x - 3$. Тому, виділивши квадрат цього двочлена, матимемо:

$$x^2 - 6x - 16 = (x^2 - 6x + 9) - 9 - 16 = (x - 3)^2 - 25 =$$
$$= (x - 3)^2 - 5^2 = (x - 3 - 5)(x - 3 + 5) = (x - 8)(x + 2).$$ •

Вправа 2. Розв'язати рівняння $2x^3 - 18x = 0$.

• Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$2x^3 - 18x = 2x(x^2 - 9) = 2x(x - 3)(x + 3).$$

Маємо рівняння $2x(x - 3)(x + 3) = 0$, звідки:

$x = 0$, або $x - 3 = 0$, або $x + 3 = 0$;

$x = 0$, або $x = 3$, або $x = -3$.

Відповідь. -3; 0; 3. •

1. Наведіть приклад застосування кількох способів для розкладання многочлена на множники.

«Усно

599. Поясніть кожний крок розкладання многочлена на множники:

1) $x^2 - 8x - y^2 + 16 = (x^2 - 8x + 16) - y^2 = (x - 4)^2 - y^2 =$
$= (x - 4 - y)(x - 4 + y)$;

2) $a^2 + 2ab - 8b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - b^2 - 8b^2 = (a + b)^2 - 9b^2 =$
$= (a + b - 3b)(a + b + 3b) = (a - 2b)(a + 4b)$.

«1 2

600. Розкладіть на множники:

1) $7a^2 - 7b^2$; 2) $km^2 - kn^2$; 3) $9x^2 - 36$;
4) $x^4 - x^2$; 5) $4a - 4a^3$; 6) $n^5 - 4n^3$;
7) $9c - cb^2$; 8) $2a^3 - 2x^3$; 9) $27y + x^3y$.

601. Розкладіть на множники:

1) $5p^2 - 5q^2$; 2) $3b^2 - 27$; 3) $4y^2 - 4y^4$;
4) $6am^2 - 6a$; 5) $2xy^2 - 8x$; 6) $4k^3 + 32$.

602. Розкладіть на множники:

1) $3p^2 + 6pq + 3q^2$;
2) $xb^2 - 4xb + 4x$;
3) $-m^2 + 2mc - c^2$;
4) $45 + 30k + 5k^2$;
5) $a^3 + 8a^2 + 16a$;
6) $m - 10m^2 + 25m^3$.

603. Розкладіть на множники:

1) $4x^2 + 8x + 4$;
2) $49n - 14nc + nc^2$;
3) $-a^2 + 4ab - 4b^2$;
4) $x^3 - 12x^2 + 36x$.

604. Знайдіть значення виразу:

1) $10a^2 - 10b^2$, якщо $a = 63$; $b = 53$;
2) $3m^2 + 6mn + 3n^2$, якщо $m = 4{,}8$; $n = 5{,}2$;

605. Знайдіть значення виразу:

1) $4x^2 - 4y^2$, якщо $x = 51$; $y = 49$;
2) $5a^2 - 10ab + 5b^2$, якщо $a = 9{,}3$; $b = 7{,}3$.

606. Розв'яжіть рівняння:

1) $8x^2 - 72 = 0$;
2) $50x^2 - 2 = 0$.

607. Розв'яжіть рівняння:

1) $5x^2 - 125 = 0$;
2) $12x^2 - 3 = 0$.

608. Розкладіть на множники:

1) $a^4 - n^4$;
2) $k^4 - 16$.

609. Розкладіть на множники:

1) $x^4 - 1$;
2) $81 - b^4$.

610. Розкладіть на множники:

1) $a^2 - b^2 + a + b$;
2) $x^2 - a^2 + x - a$;
3) $2m^2 - 2n^2 - 3m + 3n$;
4) $4x^2 + y - 2x - y^2$;
5) $a^2 - 16 + (a + 4)^2$;
6) $(z + k)^2 + 2z^2 - 2k^2$.

611. Розкладіть на множники:

1) $c^2 - b^2 + c - b$;
2) $3x + 3y + x^2 - y^2$;
3) $a^2 + 4ab - x^2 - 4xb$;
4) $(m - 2)^2 + m^2 - 4$.

612. Знайдіть значення многочлена $x^2 - y^2 + 2(x + y)^2$, розклавши його на множники, якщо $x = 3\frac{2}{3}$; $y = -2$.

613. Знайдіть значення многочлена $3(a - b)^2 + a^2 - b^2$, розклавши його на множники, якщо $a = 2{,}8$; $b = 5{,}6$.

614. Розкладіть на множники:

1) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; 2) $b^2 + 9 + 6b - k^2$;

3) $m^2 - a^2 - 4ab - 4b^2$; 4) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2c - 1$.

615. Розкладіть на множники:

1) $m^2 + 2mn + n^2 - k^2$; 2) $a^2 + 1 - 2a - b^2$;

3) $c^2 - x^2 + 2xy - y^2$; 4) $x^2 + 2x + 1 - b^2 - 2bc - c^2$.

616. Розкладіть многочлен $4x^2 + 4y - y^2 - 4$ на множники та знайдіть його значення, якщо $x = 3{,}6$; $y = 7{,}2$.

617. Розкладіть многочлен $9p^2 - 25 + 10q - q^2$ на множники та знайдіть його значення, якщо $p = 1{,}2$; $q = 8{,}6$.

618. Розкладіть на множники:

1) $mnk + 8nk - 3mk - 24k$; 2) $3bx^4 - 3x^4 + 3bx^3 - 3x^3$.

619. Розкладіть на множники:

1) $2ac + bc + 2acx + bcx$; 2) $m^2a - m^2b + 3am - 3bm$.

620. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - x = 0$; 2) $1{,}6y^3 - 0{,}4y = 0$;

3) $x^3 - 4x^2 - 4(x - 4) = 0$; 4) $2z^3 - z^2 = 25(2z - 1)$.

621. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - 4x = 0$; 2) $0{,}2z^3 - 1{,}8z = 0$;

3) $x^3 - x^2 - 16(x - 1) = 0$.

Інтерактивне завдання 18

Застосування кількох способів розкладання многочленів на множники

4

622. Розкладіть на множники:

1) $a^2 + 8a + 12$; 2) $x^2 - 6xy + 5y^2$;

3) $9a^2 - 3a^2x + 9ax - 3ax^2$; 4) $x^2y^2a - x^2y^2 + 5axy - 5xy$;

5) $2a^2 + a - 4ab - b + 2b^2$; 6) $a^3 - b^3 - (a - b)^3$.

623. Розкладіть на множники:

1) $x^2 - 2x - 8$; 2) $a^2 + 6ab + 8b^2$;

3) $-a^3b - a^2b^2 - a^2b - ab^2$; 4) $2x^4 + 6x^3y - 4x^3 - 12x^2y$.

624. Дано многочлен $a^2 - 8a + 16 - b^2 - 2bc - c^2$. Доведіть, що його значення дорівнює нулю, якщо $a = b + c + 4$.

625. Дано многочлен $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 10z - 25$. Доведіть, що його значення дорівнює нулю, якщо $x + y + z = 5$.

626. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 8x + 7 = 0$;
2) $z^2 + 4z - 12 = 0$;
3) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$;
4) $4y^3 - y^2 = 4y - 1$.

627. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x - 5 = 0$;
2) $y^2 + 2z - 24 = 0$;
3) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$.

Вправи для повторення

628. Накресліть на координатній площині чотирикутник $ABCD$, якщо $A(-2; 3)$, $B(4; 3)$, $C(4; -1)$, $D(-2; -1)$.

629. На рисунку 12 зображено графік зміни об'єму бензину в баку автомобіля протягом 4 годин.

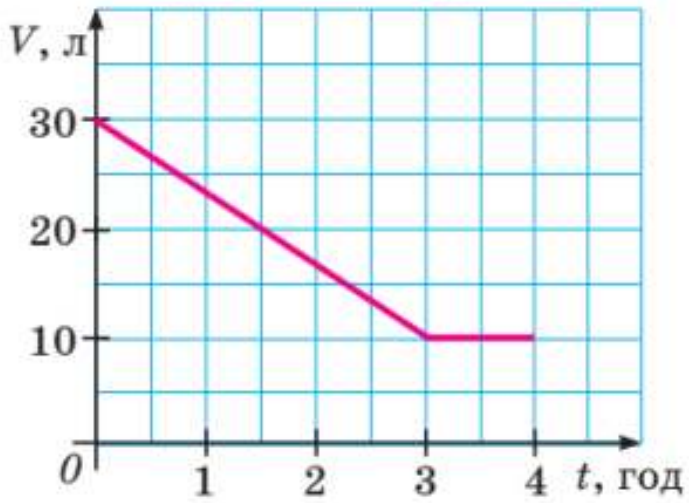


Рис. 12

Користуючись графіком, знайдіть:

1) початковий об'єм бензину; кінцевий об'єм;
2) об'єм бензину в момент часу t год, якщо $t = 1{,}5$; $t = 3$;
3) скільки літрів бензину витратив автомобіль за цей час.

630. Із 50 кг насіння льону отримують 24 кг олії. Скільки потрібно кілограмів такого насіння, щоб отримати 60 кг олії?

631. Майстриня одержала замовлення на виготовлення вишиванок. Якби вона щодня працювала по 6 год, то виконала б замовлення за 12 днів. Скільки годин на день має працювати майстриня, щоб виконати замовлення за 9 днів?

Поміркуйте

632. Жук повзає по ребрах куба. Чи може він послідовно обійти всі ребра, проходячи по кожному ребру лише один раз?

Завдання для повторення § 3

633. Виконайте множення:

1) $(5 - a)(5 + a)$; 2) $(3b + 2a)(3b - 2a)$;
3) $(-m - 5n)(m - 5n)$; 4) $(4a^2b - 2c^3)(4a^2b + 2c^3)$.

634. Піднесіть до квадрата:

1) $(3x + 4)^2$; 2) $(0{,}5ab - 2c)^2$.

635. Спростіть вираз:

1) $(a - 6)(a + 6) + (3 - a)(3 + a)$;
2) $(3x^2 - 1)(3x^2 + 1) - (1 - 3x^2)^2$;
3) $(5a - 2b)^2 + (2a + 5b)^2 - 29b^2$;
4) $(b + 1)(b^2 - b + 1) + b(3 - b)(3 + b)$.

636. Доведіть тотожність:

1) $(a + b)(a - b) - (a - c)(a + c) = (c - b)(c + b)$;
2) $(n + 1)^2 + (n + 5)^2 - 3 = (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + 3$.

637. Знайдіть значення виразу:

1) $a^2 - 10ab + 25b^2$, якщо $a = 12$; $b = 2{,}8$;
2) $(m - 2)(m + 2)(m^2 + 4) - m(m^3 + 4)$, якщо $m = -2{,}5$.

638. Знайдіть значення виразу:

1) $96 \cdot 104$; 2) $19{,}8 \cdot 20{,}2$; 3) $49^2 - 2 \cdot 49 \cdot 59 + 59^2$.

639. Дано вираз $(k - 2)^2 + (k + 2)^2 - 2(k - 4)(k + 4)$. Доведіть, що його значення не залежать від значень k.

640. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(2n + 3)^2 + (1 - 2n)(1 + 2n) + 2$ ділиться на 12.

641. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2y + 5)^2 - 4y^2 = 0$; 2) $(x - 3)(x + 3) - x(x - 2) = 1$;
3) $(z + 4)(z^2 - 4z + 16) = z^3 - 4z$.

642. Розкладіть на множники:

1) $k^2 - 49$; 2) $x^3 - 4x$;
3) $1{,}44a^2 - b^4$; 4) $9x^2 + 6xy + y^2$;
5) $a^3 - 64$; 6) $mx^3 + 8mz^3$.

643. Розкладіть на множники:

1) $m^2 - mk - 3mn + 3nk$; 2) $z^3 + z^2 - 9z - 9$;
3) $a^2 - b^2 - 2xa + 2xb$; 4) $25c^2 - k^2 - 10k - 25$.

644. Розв'яжіть рівняння:

1) $z^2 - 81 = 0$; 2) $x^3 - 9x = 0$;

3) $y^2 - 4y - 21 = 0$; 4) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$.

645. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел є непарним числом.

Інтерактивне завдання для самоперевірки 3

Формули скороченого множення

Завдання для самоперевірки № 3

Початковий рівень

1. Виконайте множення: $(a - x)(a + x)$.

А $a^2 - 2ax + x^2$ **Б** $a^2 + 2ax + x^2$

В $a^2 + x^2$ **Г** $a^2 - x^2$

2. Піднесіть двочлен до квадрата: $(b - 4)^2$.

А $b^2 - 4b + 16$ **Б** $b^2 - 16$

В $b^2 - 8b + 16$ **Г** $b^2 + 8b + 16$

3. Розкладіть на множники многочлен $y^2 - 9$.

А $(y - 9)(y + 9)$ **Б** $(y - 3)(y - 3)$

В $(y + 3)(y + 3)$ **Г** $(y - 3)(y + 3)$

4. Обчисліть: $85^2 - 15^2$.

А 140 **Б** 4900 **В** 7000 **Г** 6125

5. Подайте тричлен $k^2 - 10k + 25$ у вигляді квадрата двочлена.

А $(k - 10)^2$ **Б** $(k - 5)^2$ **В** $(k + 10)^2$ **Г** $(k + 5)^2$

6. Розкладіть на множники: $c^3 + 27$.

А $(c + 3)(c^2 - 6c + 9)$ **Б** $(c - 3)(c^2 + 6c + 9)$

В $(c + 3)(c^2 - 3c + 9)$ **Г** $(c - 3)(c^2 + 3c + 9)$

Середній рівень

7. Розв'яжіть рівняння $(x + 2)^2 - x^2 = 0$.

А 2 **Б** −2 **В** 1 **Г** −1

8. Розкладіть на множники вираз $5b^2 - 5b^4$.

А $5(1 - b^2)(1 + b^2)$ **Б** $5b(1 - b)(1 + b)$

В $5b^2(1 - b)(1 + b)$ **Г** $5b^2(1 - b)$

9. Знайдіть значення виразу $b^2 - 2bc + c^2$, якщо $b = 6{,}5$; $c = 1{,}5$.

А 5 **Б** 25 **В** 40 **Г** 48

10. До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Д).

1 $(2m - n)(2m + n)$	**А** $m^2 - 4mn + 4n^2$
2 $(2m + n)^2$	**Б** $4m^2 - 4mn + n^2$
3 $(2m - n)^2$	**В** $4m^2 + 4mn + n^2$
	Г $2m^2 - n^2$
	Д $4m^2 - n^2$

Достатній рівень

11. Знайдіть значення виразу $(3 - 2k)(3 + 2k) + (1 - 2k)^2$, якщо $k = 2{,}7$.

12. Доведіть тотожність $(a^2 + 1)(a^2 - 1) - (a^2 - 1)^2 + 2 = 2a^2$.

13. Розкладіть на множники:

1) $3a^4 + 12a^3b + 12a^2b^2$; 2) $m^2 - 4n^2 + m - 2n$.

14. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(4x + 5) - (2x - 5)^2 = 15$; 2) $3z^3 - 48z = 0$.

Високий рівень

15. Спростіть вираз $((x + 2y^2)(x - 2y^2))^2 - 16y^8$.

16. Розкладіть на множники:

1) $c^2 - 2c - 35$; 2) $6mnx + x^3 - mx^2 - 6nx^2$.

17. Розв'яжіть рівняння:

1) $y^3 + 8y^2 - y - 8 = 0$;

2) $16 + (2x + 3)^2 = (5 - 4x)(5 + 4x)$.

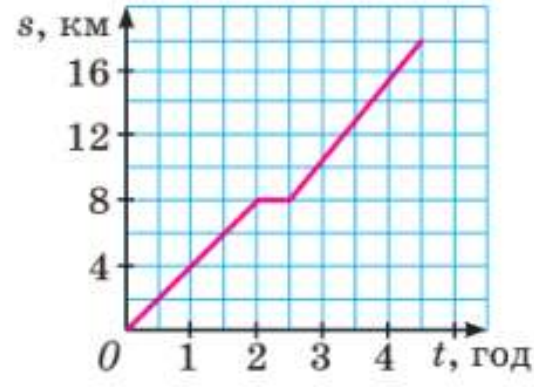
18. Одне натуральне число при діленні на 5 дає в остачі 3, а друге — 4. Доведіть, що сума квадратів цих чисел ділиться на 5.

РОЗДІЛ II
ФУНКЦІЇ

«В одну ріку не можна увійти двічі», — ці слова приписують давньогрецькому філософові Геракліту Ефеському. Вони відображають суттєву особливість реального світу: усе в ньому перебуває в стані безперервної зміни та розвитку. Саме шукаючи закономірності в нескінченному морі видозмін природи, учені дійшли до понять змінної величини і функції.

У цьому розділі ви дізнаєтеся:

- що таке функція;
- які є способи задання функції;
- що таке графік функції;
- що таке математичні моделі реальних процесів;
- яку функцію називають лінійною;
- що є графіком лінійної функції;
- які властивості має лінійна функція.



18 ФУНКЦІЇ ТА СПОСОБИ ЇХ ЗАДАННЯ

1. Функції. Розглянемо приклади залежностей між величинами.

Приклад 1. Нехай сторона квадрата дорівнює a см, а його периметр — P см. Оскільки a визначає довжину сторони квадрата, то a — це змінна, яка може набувати будь-яких додатних значень. Периметр квадрата *залежить* від довжини його сторони. Наприклад,

якщо $a = 6$, то $P = 4 \cdot 6 = 24$;

якщо $a = 0{,}1$, то $P = 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$;

якщо $a = 2{,}5$, то $P = 4 \cdot 2{,}5 = 10$.

Отже, маємо *залежність* змінної P від змінної a, яку можна задати формулою

$$P = 4a.$$

Значення змінної a ($a > 0$) можна вибрати довільно, а значення змінної P, як ми вже зазначили, залежать від вибраних значень a. Тому змінну a називають *незалежною змінною*, а змінну P — *залежною змінною*.

Приклад 2. Протягом доби метеорологи вимірювали температуру повітря через кожні 3 години й одержали дані, наведені в таблиці:

t, год	3	6	9	12	15	18	21	24
T, °C	−2	−4	−3	0	5	4	1	−1

У даному прикладі маємо дві змінні t і T — час і температуру повітря в цей час. Значення температури залежать від значень часу. Так, значенню часу $t = 9$ відповідає значення температури $T = -3$, значенню часу $t = 18$ — значення температури $T = 4$. Тому таблицею задано залежність змінної T від змінної t; змінна t є незалежною змінною, а змінна T — залежною змінною.

Зазначимо, що в обох прикладах *кожному* значенню незалежної змінної відповідає *єдине* значення залежної змінної. За таких умов залежність між змінними називають *функціональною залежністю* або *функцією*.

Означення. **Залежність змінної y від змінної x називають *функцією*, якщо *кожному* значенню змінної x відповідає *єдине* значення змінної y.**

Змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом* функції, а змінну y — *залежною змінною*, або *функцією*. Кажуть: *y є функцією від аргументу x*.

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення* функції, а всі значення, яких набуває залежна змінна (функція), — *область значень* функції.

Отже, залежності, розглянуті в прикладах 1 і 2, є функціями.

У прикладі 1:

периметр P квадрата є функцією від довжини a його сторони; тут P — функція, a — аргумент;

область визначення функції утворюють усі додатні числа;

область значень функції утворюють також усі додатні числа.

У прикладі 2:

температура T є функцією від часу t; тут T — функція, t — аргумент;

область визначення функції утворюють числа першого рядка таблиці: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24;

область значень функції утворюють числа другого рядка таблиці: -2, -4, -3, 0, 5, 4, 1, -1.

2. Способи задання функції. Функцію в прикладі 1 задано *формулою*, а в прикладі 2 — *таблицею*.

Функцію можна задати й *словесно* — описати словами спосіб знаходження її значень за відомими значеннями аргументу. Наприклад, кожному натуральному числу поставимо у відповідність квадрат цього числа. Цим ми словесно задали функцію, значення якої для значень аргументу 1, 2, 3, 4, ... відповідно дорівнюють 1, 4, 9, 16, ... Область визначення цієї функції утворюють усі натуральні числа, а область значень — квадрати всіх натуральних чисел.

Розглянемо функцію, задану формулою $y = 2x^2$, де $0 \le x \le 10$. Такий запис означає, що область визначення функ-

ції утворюють усі значення x, для яких виконується нерівність $0 \le x \le 10$.

Якщо функцію задано формулою $y = 2x^2$ і не вказано, яких значень може набувати аргумент, то вважають, що область визначення функції утворюють усі числа.

Зазначимо, що коли розглядають функцію, задану формулою $y = 2x^2$, то просто кажуть: розглянемо функцію $y = 2x^2$.

Існують функції, які на окремих частинах області визначення задано різними формулами. Наприклад, якщо функцію задано у вигляді

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x \le 1; \\ 2x - 1, \text{ якщо } x > 1, \end{cases}$$

то це означає, що для $x \le 1$ значення функції потрібно знаходити за формулою $y = x^2$, а для $x > 1$ — за формулою $y = 2x - 1$. Так, якщо $x = -2$, то $y = (-2)^2 = 4$; якщо $x = 2$, то $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Функцію задано формулою $y = x^2 - 3$. Знайти значення функції, якщо $x = -3$; $x = 2{,}5$.

• Якщо $x = -3$, то $y = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$.

Якщо $x = 2{,}5$, то $y = 2{,}5^2 - 3 = 6{,}25 - 3 = 3{,}25$. •

Вправа 2. Автомобіль, рухаючись зі швидкістю 80 км/год, за t год долає шлях s км. Задати формулою функцію — залежність шляху s від часу t. Знайти значення функції, яке відповідає значенню аргументу $t = 2{,}5$.

• За t год автомобіль проїде $80t$ км, тому $s = 80t$ — шукана формула.

Якщо $t = 2{,}5$, то $s = 80 \cdot 2{,}5 = 200$. •

Вправа 3. Знайти значення аргументу, для яких значення функції дорівнює 3, якщо функцію задано формулою:

1) $y = 2x - 5$; 2) $y = x^2 + x + 3$; 3) $y = x^2 + 4$.

• 1) Щоб знайти значення x, для яких $y = 3$, розв'яжемо рівняння $2x - 5 = 3$:

$$2x = 3 + 5;\ 2x = 8;\ x = 4.$$

Отже, функція набуває значення 3, якщо $x = 4$.

2) $x^2 + x + 3 = 3$; $x^2 + x = 0$; $x(x + 1) = 0$;
$x = 0$ або $x + 1 = 0$; $x = 0$ або $x = -1$.
Функція набуває значення 3, якщо $x = 0$ або $x = -1$.

3) $x^2 + 4 = 3$; $x^2 = -1$ — рівняння коренів не має. Значення 3 дана функція не набуває. •

1. Наведіть приклад функціональної залежності між змінними.
2. Що називають функцією?
3. Якщо залежність змінної y від змінної x є функцією, то як називають змінну x? Змінну y?
4. Що називають областю визначення функції? Областю значень?
5. Які є способи задання функції? Наведіть приклади.

«Усно

646. Нехай x — довжина сторони квадрата, а S — його площа.
1) Чому залежність S від x є функцією?
2) Якою формулою можна задати цю функцію?
3) Яка зі змінних S та x є незалежною, а яка — залежною? Яка є аргументом, а яка — функцією?

647. Функцію задано формулою $y = 5x$.
1) Яка змінна є аргументом, а яка — функцією?
2) Знайдіть значення функції, яке відповідає значенню аргументу $x = 2$; $x = -1$.
3) Знайдіть значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = 5$; $y = 0$.

648. Яка з наведених таблиць задає функцію, а яка — ні? Відповідь обґрунтуйте. (У таблиці 2) числам 1, 3, 9 відповідають їхні дільники.)

1)

x	1	2	3
y	1	1	1

2)

x	1	3	9
y	1	1; 3	1; 3; 9

649. Функцію задано таблицею:

x	-2	0	1	3	4
y	3	-1	5	7	7

1) Чому дорівнює значення функції, якщо $x = -2$; $x = 1$; $x = 4$?
2) Для яких значень x значення функції дорівнює -1; 7?
3) Які числа утворюють область визначення функції? Область значень?

«1 2

650. Довжина кімнати дорівнює 5 м, ширина — 4 м, а висота — h м.
1) Задайте формулою залежність об'єму V кімнати від висоти h.
2) Чому ця залежність є функцією?
3) Яка зі змінних V та h є аргументом, а яка — функцією?
4) Знайдіть значення функції, яке відповідає значенню аргументу 3; 2,8.

651. Ширина доріжки дорівнює 2 м, а довжина — x м.
1) Задайте формулою залежність площі S доріжки від довжини x.
2) Чому ця залежність є функцією?
3) Знайдіть значення функції, якщо $x = 20$; $x = 125$.

652. Стрічка завдовжки l м коштує N грн. Задайте формулою функцію — залежність вартості N від довжини l, якщо ціна 1 м стрічки дорівнює 10 грн. Знайдіть значення функції, якщо $l = 3$; $l = 1{,}8$.

653. Потяг, рухаючись зі швидкістю 90 км/год, за t год долає шлях s км. Задайте формулою функцію — залежність шляху s від часу t. Знайдіть значення функції, якщо $t = 2$; $t = 2{,}4$.

654. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = 2x^2 - x$, якщо $x = 2$; $x = 0$; $x = -1$.

655. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = 2x + 1$, якщо $x = 5$; $x = 0{,}5$; $x = -2$.

656. Функцію задано формулою $y = |x|$. Складіть таблицю значень функції для вказаних значень аргументу:

x	−10	−2,5	−0,2	0	0,6	2,8	5
y							
	ф	**к**	**і**	**я**	**ц**	**н**	**у**

«Розшифруйте» запис в останньому рядку таблиці, розташувавши знайдені значення в порядку спадання.

657. Функцію задано формулою $y = x^2 + 1$. Складіть таблицю значень функції для значень аргументу: −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3.

658. Функцію задано формулою $y = 2x - 5$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює 0; 3?

659. Функцію задано формулою $y = 2x + 3$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює 1; 7?

660. Функцію задано таблицею:

x	1	2	3	4	5
y	4	−4	4	−8	4

1) Знайдіть значення функції, якщо $x = 2$; $x = 5$.
2) Для яких значень x значення функції дорівнює −8; 4?
3) Запишіть числа, які утворюють область визначення функції.
4) Запишіть числа, які утворюють область значень функції.

661. Функцію задано таблицею:

x	−4	−2	0	2	4
y	−2	−1	0	1	2

1) Знайдіть значення функції, якщо $x = -2$; $x = 2$.
2) Для яких значень x значення функції дорівнює −2; 2?
3) Запишіть числа, які утворюють область визначення функції.
4) Запишіть числа, які утворюють область значень функції.

662. Функцію задано формулою $y = 12x$. Заповніть таблицю:

x	-4	-3				$1{,}5$	2		$3{,}5$
y			-12	-6	3			27	

663. Функцію задано формулою $y = x + 6$. Заповніть таблицю:

x	-12	-9				$1{,}2$	$6{,}4$
y			-2	$-1{,}5$	4		

664. Ребро сталевого куба дорівнює a см, а маса — m г. Задайте формулою масу m куба як функцію від довжини a його ребра, якщо маса 1 см^3 сталі дорівнює 7,8 г. Знайдіть значення функції, якщо $a = 2$; $a = 10$.

665. У магазині на ряд товарів планують знизити ціни на 20 %. Нехай x грн — початкова ціна товару, y грн — його ціна після знижки.

1) Задайте формулою змінну y як функцію від змінної x.
2) На рисунку 13 вказано початкові ціни кількох товарів. Використовуючи одержану формулу, знайдіть, скільки гривень мають коштувати ці товари після знижки.

245 грн 1200 грн 1450 грн 5400 грн

Рис. 13

666. Пенсіонерам підвищили розмір пенсії на 20 %. Нехай x грн та y грн — розміри пенсії до та після підвищення.

1) Задайте формулою змінну y як функцію від змінної x.
2) Використовуючи одержану формулу, заповніть таблицю:

x, грн	3000	4000	5000	8000	10 000
y, грн					

667. Функцію задано формулою $y = x^2 - 4x + 2$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює: 1) 2; 2) −2?

668. Функцію задано формулою $y = x^2 + 2x - 3$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює: 1) −3; 2) −4?

669. Функцію задано формулою $y = 3x - 1$, де змінна x може набувати значень −6; −3; 0; 3; 6; 9. Задайте цю функцію таблицею.

670. Функція кожному числу ставить у відповідність квадрат цього числа, зменшений на 1. Задайте функцію формулою. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює 0?

671. Функція кожному числу ставить у відповідність протилежне йому число, збільшене на 2. Задайте цю функцію формулою. Знайдіть значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 1,6.

Інтерактивне завдання 19
Функції та способи їх задання

«4

672. Автомобіль має подолати шлях між двома містами завдовжки 200 км, рухаючись зі швидкістю 80 км/год. Нехай s км — шлях, який залишилося проїхати автомобілю через t год після початку руху. Задайте формулою шлях s як функцію від часу t та вкажіть область визначення й область значень цієї функції.

673. Дано функцію $y = \begin{cases} 2x - 2, \text{ якщо } x \le 1; \\ x^2 - x, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$ Знайдіть її значення, якщо $x = -2$; $x = 0$; $x = 1$; $x = 4$.

674. Дано функцію $y = \begin{cases} 3x + 1, \text{ якщо } x < 0; \\ x^2 - 1, \text{ якщо } x \ge 0. \end{cases}$ Знайдіть її значення, якщо $x = -1$; $x = 0$; $x = 3$.

675. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 + 6x + 10$ та значення аргументу, для якого функція набуває найменшого значення.

676. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 4x + 2$.

Вправи для повторення

677. На координатній площині позначте точку M, абсциса якої дорівнює -3, а ордината — 2. Проведіть через точку M прямі, перпендикулярні до осей координат. Знайдіть координати точок перетину проведених прямих з осями координат.

678. Побудуйте графік залежності величини y від величини x, якщо ним є ламана, проведена послідовно через точки $A(-2; 3)$, $B(0; -1)$, $C(3; 2)$ і $D(5; 2)$.

679. Знайдіть значення виразу:

1) $(a^2bc^2)^2 \cdot b^2$, якщо $a = 4$; $b = -0{,}3$; $c = 0{,}25$;

2) $(5a^3b)^2 \cdot ab^5$, якщо $a = 0{,}2$; $b = 5$.

680. Скільки різних двоцифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 2 і 5, якщо в записах чисел цифри можуть повторюватися?

Поміркуйте

681. На тарілці лежали 5 яблук, середня маса яких дорівнювала 100 г. Після того як Вікторія взяла з тарілки одне яблуко, середня маса яблук, що залишилися на тарілці, стала дорівнювати 95 г. Знайдіть масу яблука, яке взяла Вікторія.

Цікаво знати

Термін «функція» (від латинського functio — виконання, звершення) уперше ввів німецький математик Готфрід Вільгельм Лейбніц у 1692 році.

Завдяки працям Лейбніца та відомого англійського фізика й математика Ісаака Ньютона (1643–1727) сформувалася нова гілка математики — *математичний аналіз*, у якому поняття функції є одним з основних.

Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716)

19 ГРАФІК ФУНКЦІЇ. ФУНКЦІЯ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

1. Графік функції. Розглянемо функцію, задану формулою $y = 0{,}5x^2$, де $-3 \le x \le 2$. Знайдемо значення цієї функції для цілих значень аргументу й занесемо результати в таблицю:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	$4{,}5$	2	$0{,}5$	0	$0{,}5$	2

Позначимо на координатній площині точки, абсциси яких дорівнюють вибраним значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції (рис. 14).

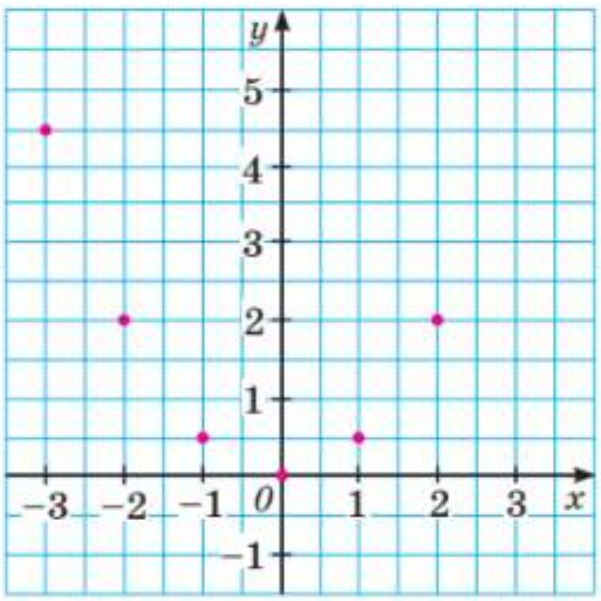


Рис. 14

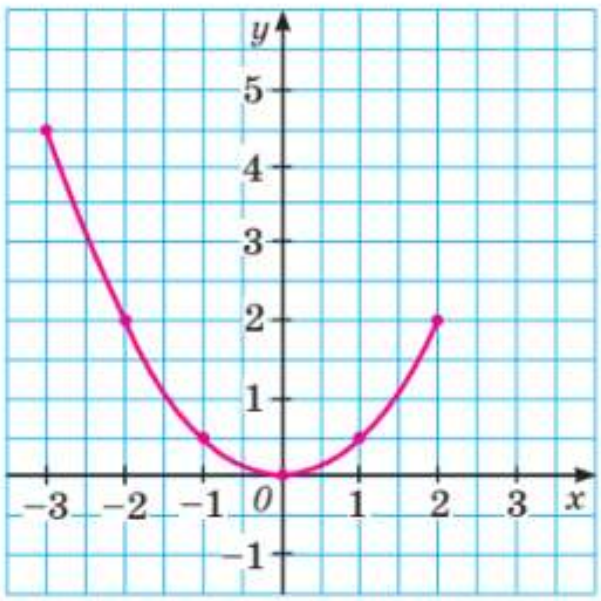


Рис. 15

Добираючи інші значення x, для яких виконується нерівність $-3 \le x \le 2$, й обчислюючи відповідні значення y, отримаємо інші пари значень x та y. Кожній із цих пар також відповідає певна точка на координатній площині. Усі такі точки утворюють фігуру, яку називають *графіком* функції, заданої формулою $y = 0{,}5x^2$, де $-3 \le x \le 2$ (рис. 15).

Означення. ***Графіком функції*** **називають фігуру, утворену всіма точками координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.**

Підкреслимо дві особливості графіка функції, проілюстровані на рисунку 16:

1) Деяка точка $M(a; b)$ належатиме графіку функції тоді й тільки тоді, коли значення функції для $x = a$ дорівнює b.

2) Будь-яка пряма, перпендикулярна до осі x, перетинає графік функції не більше ніж в одній точці.

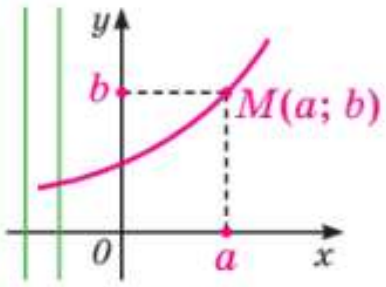


Рис. 16

2. Графічний спосіб задання функції. Маючи графік функції, можна знаходити її значення за відомим значенням аргументу й навпаки: знаходити значення аргументу за відомим значенням функції.

Розглянемо, наприклад, функцію, графік якої зображено на рисунку 17. Про таку функцію кажуть, що її задано *графічно*.

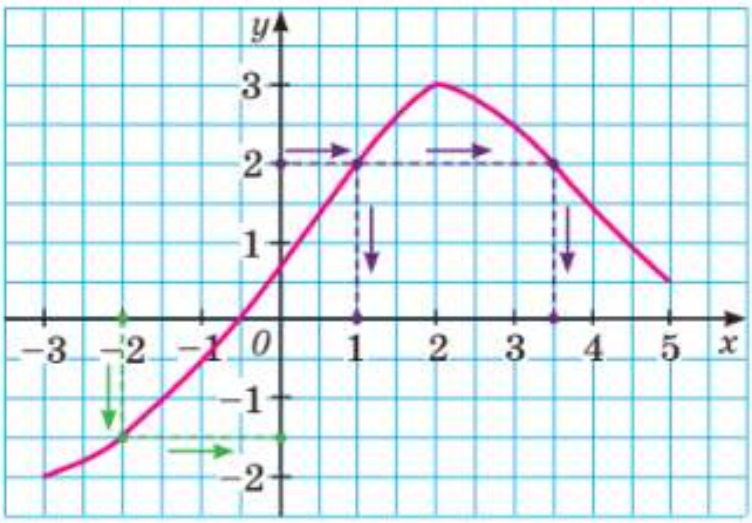


Рис. 17

Знайдемо за допомогою графіка значення функції, якщо $x = -2$. Для цього через точку осі x, абсциса якої дорівнює -2, проведемо пряму, перпендикулярну до осі x. Точка її перетину з графіком функції має координати $(-2; -1{,}5)$. Отже, якщо $x = -2$, то значення функції дорівнює $-1{,}5$.

Знайдемо значення аргументу, для яких значення функції дорівнює 2. Для цього через точку осі y, ордината якої дорівнює 2, проведемо пряму, перпендикулярну до осі y. Одержимо дві точки її перетину з графіком функції: $(1; 2)$ і $(3{,}5; 2)$. Отже, функція набуває значення 2, якщо $x = 1$ або $x = 3{,}5$.

Дивлячись на графік, зображений на рисунку 17, можна відзначити деякі властивості функції, заданої цим графіком.

1) Область визначення функції утворюють усі значення x, для яких виконується нерівність $-3 \le x \le 5$.

2) Найбільше значення функції дорівнює 3 (цього значення функція набуває, якщо $x = 2$).

3) Найменше значення функції дорівнює -2 (цього значення функція набуває, якщо $x = -3$).

4) Область значень функції утворюють усі значення y, для яких виконується нерівність $-2 \le y \le 3$.

5) Значення функції дорівнює нулю, якщо $x = -0{,}5$. Ті значення аргументу, для яких значення функції дорівнюють нулю, називають *нулями* функції. Отже, значення $x = -0{,}5$ є нулем даної функції.

6) Функція набуває додатних значень, якщо $-0{,}5 < x \le 5$; від'ємних значень — якщо $-3 \le x < -0{,}5$.

3. Функція як математична модель реальних процесів. Вам, мабуть, уже доводилося бачити моделі човна, літака, автомобіля, виготовляти моделі куба, прямокутного паралелепіпеда. Кожна модель, залежно від її призначення, відображає певні властивості оригіналу.

Математична модель — це опис якогось реального об'єкта чи процесу мовою математики.

Розглянемо рисунок 18, на якому зображено графік зміни температури води протягом 20 хвилин.

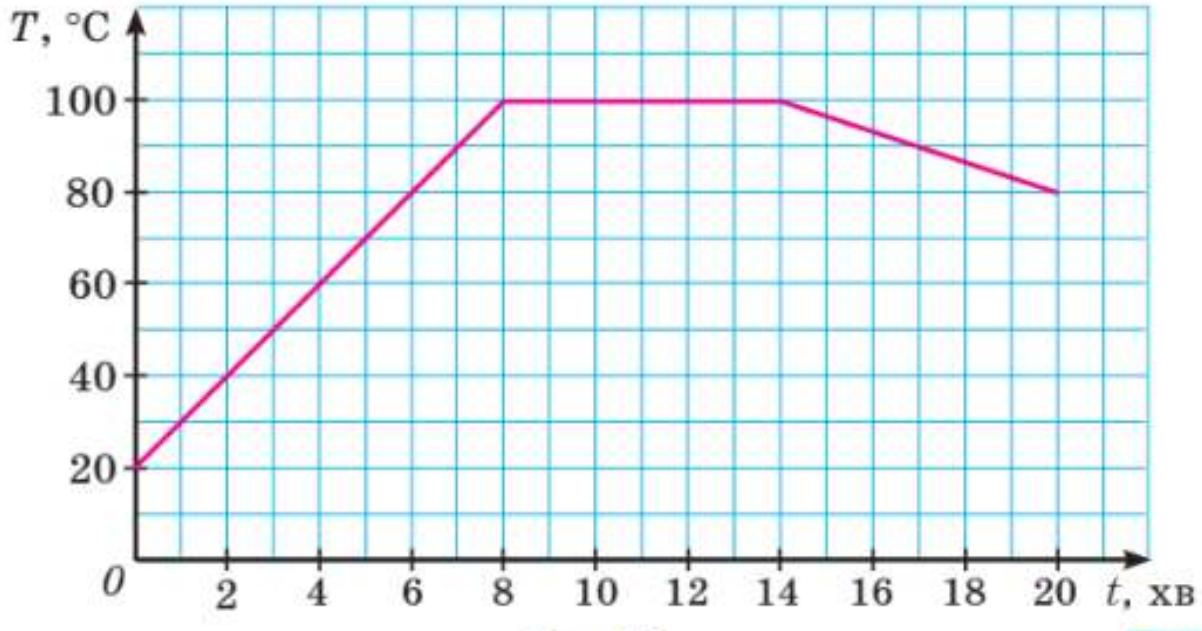


Рис. 18

Із графіка видно, що:

початкова температура води дорівнювала 20 °С;

за перші 8 хв температура води підвищилася до 100 °С;

протягом 6 хв (від 8 хв до 14 хв) температура води не змінювалася, а за наступні 6 хв — знизилася до 80 °С.

Функція, графік якої зображено на рисунку 18, описує реальний процес зміни температури води. Кажуть, що ця функція моделює даний процес, або що вона є *математичною моделлю* даного процесу.

Якщо тіло рухається рівномірно зі швидкістю 15 м/с, то шлях s м, пройдений ним за час t с, можна обчислити за формулою $s = 15t$. У цьому випадку функція, задана формулою $s = 15t$, є математичною моделлю рівномірного руху.

У сьомому та наступних класах ми ознайомимося з багатьма функціями, які можна використати для моделювання реальних процесів і залежностей між різними величинами.

Крім функцій, є й інші види математичних моделей, з якими ми ознайомимося за подальшого вивчення алгебри.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Побудувати графік функції, заданої формулою:

1) $y = 0{,}5x + 1$, де $-4 \le x \le 4$, склавши таблицю значень функції для цілих значень x;

2) $y = 1 - x^2$, де $-2 \le x \le 2$.

• 1) Складемо таблицю значень функції:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3

Позначимо точки, координати яких подано в таблиці, на координатній площині. Якщо до цих точок прикласти лінійку, то можна переконатися, що всі вони лежать на одній прямій. Сполучимо відрізком крайні позначені точки. Цей відрізок і є графіком функції $y = 0{,}5x + 1$, де $-4 \le x \le 4$ (рис. 19).

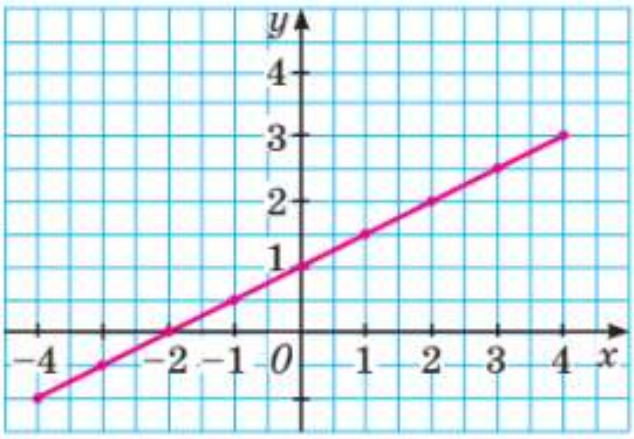


Рис. 19

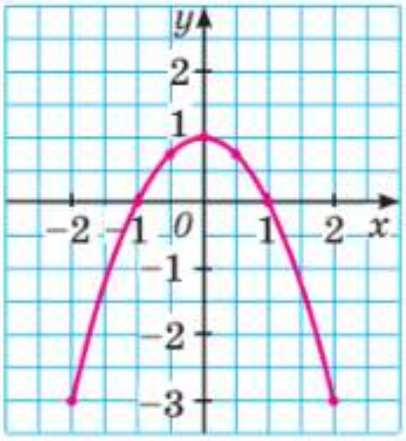


Рис. 20

2) Складемо таблицю значень функції:

x	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2
y	-3	0	$0{,}75$	1	$0{,}75$	0	-3

Позначимо точки, координати яких подано в таблиці, на координатній площині. Сполучимо їх плавною лінією. Маємо графік функції, заданої формулою $y = 1 - x^2$, де $-2 \le x \le 2$ (рис. 20). •

Вправа 2. Чи належить графіку функції $y = 2x^2$ точка $A(3; 9)$? $B(2; 8)$?

• Точка $A(3; 9)$ належатиме графіку даної функції, якщо значення функції для $x = 3$ дорівнює 9.

Знаходимо: якщо $x = 3$, то $y = 2 \cdot 3^2 = 18$. Значення функції не дорівнює 9. Отже, точка $A(3; 9)$ графіку функції не належить.

Для точки $B(2; 8)$ матимемо: якщо $x = 2$, то $y = 2 \cdot 2^2 = 8$. Точка $B(2; 8)$ належить графіку функції. •

1. Що називають графіком функції?
2. Які властивості функції можна встановити, маючи її графік? Поясніть це на прикладі функції, графік якої зображено на рисунку 17.
3. У скількох точках може перетинати графік функції пряма, перпендикулярна до осі абсцис?
4. Наведіть приклад функції, яка є математичною моделлю певного процесу.

Усно

682. Функцію задано графіком, зображеним на рисунку 21.

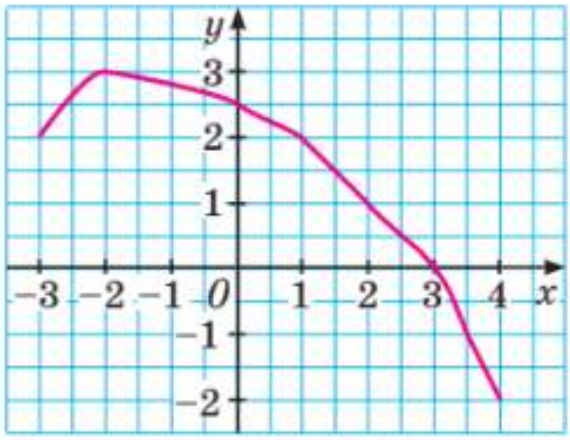


Рис. 21

1) Знайдіть значення функції, якщо $x = -3$; $x = -2$; $x = 2$; $x = 3{,}5$.
2) Знайдіть значення аргументу, для яких значення функції дорівнює -2; $1{,}5$; 2.
3) Чому дорівнює найбільше значення функції? Найменше значення?
4) Укажіть область визначення, область значень і нулі функції.
5) Для яких значень x функція набуває додатних значень? Від'ємних значень?

683. Чи може бути графіком деякої функції з аргументом x фігура, зображена на рисунку 22? Рисунку 23? Рисунку 24? Відповіді обґрунтуйте.

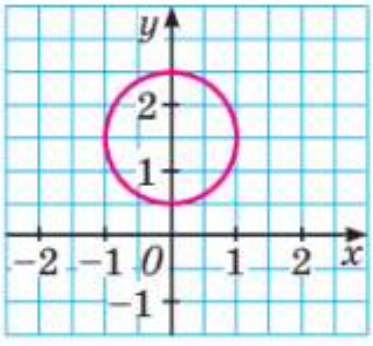


Рис. 22

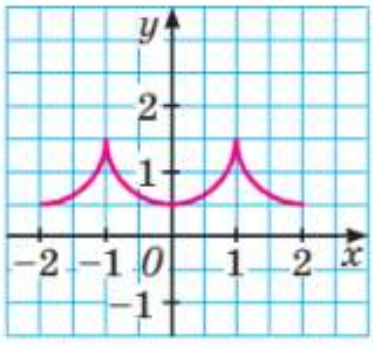


Рис. 23

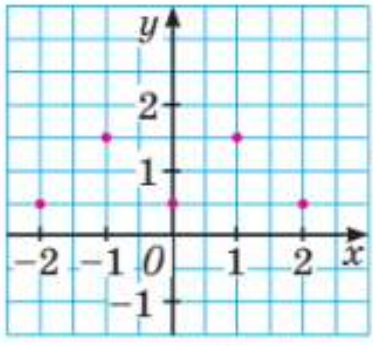


Рис. 24

684. На рисунку 25 зображено графік зміни об'єму води в баку залежно від часу.

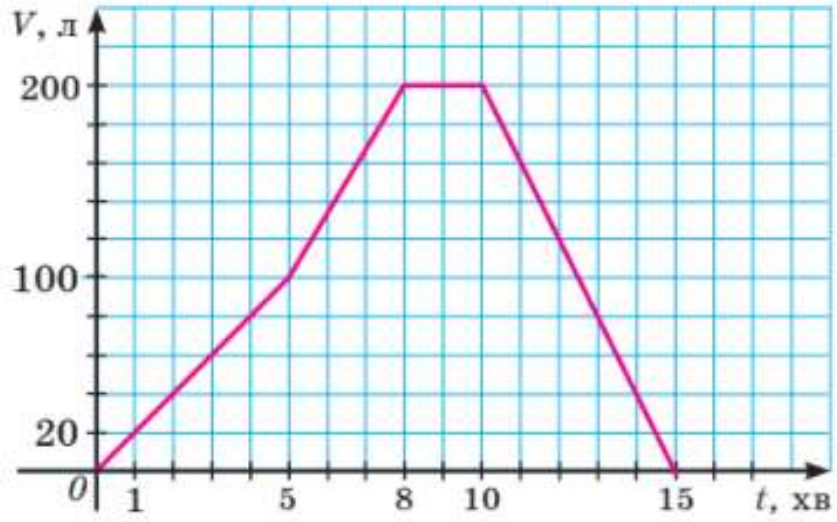


Рис. 25

1) Укажіть об'єм води в баку в початковий момент часу.
2) Скільки літрів води надійшло в бак протягом перших 5 хв? 8 хв? 10 хв?
3) Скільки хвилин об'єм води в баку не змінювався?
4) Протягом скількох хвилин спорожнився бак?

685. На рисунку 26 зображено графік функції.
1) Знайдіть значення функції, якщо $x = -1$; $x = 1{,}5$; $x = 4$.
2) Знайдіть значення аргументу, для яких $y = -1{,}5$; $y = 1$.
3) Чому дорівнює найбільше значення функції? Найменше значення?
4) Укажіть область визначення та область значень функції.
5) Знайдіть нулі функції.
6) Для яких значень x функція набуває додатних значень? Від'ємних значень?

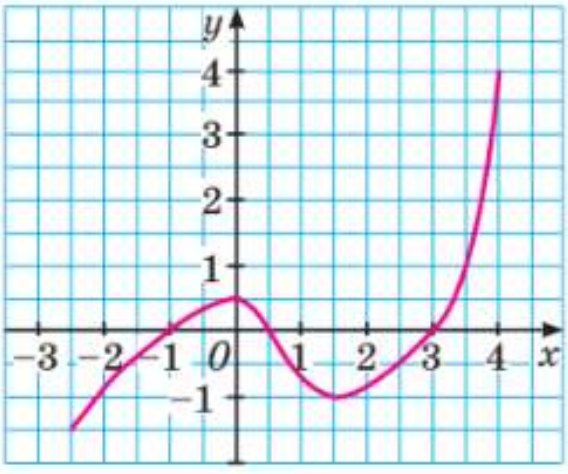


Рис. 26

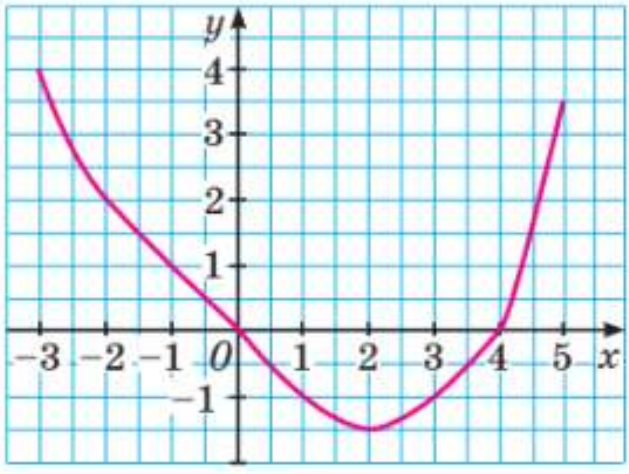


Рис. 27

686. На рисунку 27 зображено графік функції.
1) Знайдіть значення функції, якщо $x = -2$; $x = 1$; $x = 5$.
2) Знайдіть значення аргументу, для яких $y = -1$; $y = 4$.
3) Чому дорівнює найбільше значення функції? Найменше значення?
4) Укажіть область визначення та область значень функції.
5) Для яких значень x функція набуває від'ємних значень?

687. Функцію задано формулою $y = -x^2 + 4$, де $-2 \le x \le 3$. Побудуйте її графік, склавши таблицю значень функції для цілих значень x. Користуючись графіком, знайдіть область значень функції.

688. Функцію задано формулою $y = 2x - 1$, де $-2 \le x \le 3$. Побудуйте її графік, склавши таблицю значень функції для цілих значень x. Користуючись графіком, знайдіть область значень функції.

689. Побудуйте графік функції, заданої формулою:
1) $y = 0{,}5x - 1$, де $-2 \le x \le 4$; 2) $y = -2x + 3$, де $0 \le x \le 4$;
3) $y = x^2 - 1$, де $-2 \le x \le 2$.

690. Побудуйте графік функції, заданої формулою:
1) $y = -x + 1$, де $-4 \le x \le 4$; 2) $y = 0{,}5x^2$, де $-2 \le x \le 2$.

691. Чи належить графіку функції $y = 4x - 3$ точка:
1) $A(-1; -7)$; 2) $B(6; 27)$; 3) $C(20; 77)$; 4) $D(0{,}7; -0{,}2)$?

692. Чи належить графіку функції $y = 2x + 5$ точка:
1) $M(5; 15)$; 2) $N(-5; -15)$; 3) $K(-2{,}5; 0)$?

693. На рисунку 28 зображено графік залежності висоти польоту літака від часу. 1) На якій максимальній висоті летів літак? 2) Скільки хвилин літак набирав висоту? 3) Через скільки хвилин після зльоту літак досяг висоти 3 км?

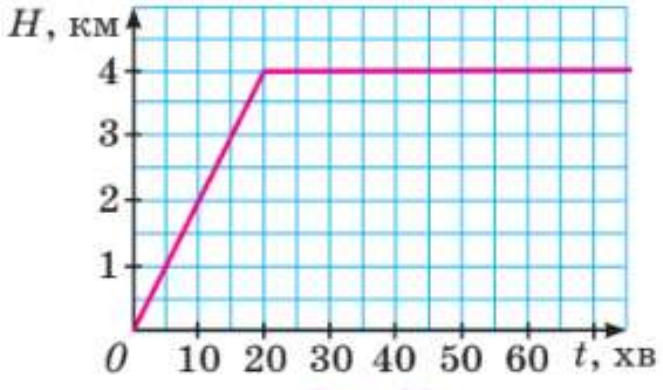


Рис. 28

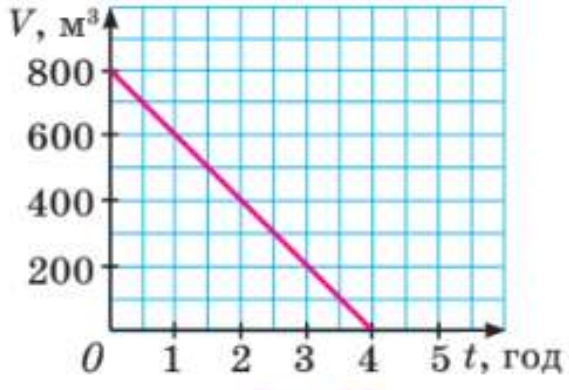


Рис. 29

694. На рисунку 29 зображено графік зміни об'єму води в басейні.

1) Який відбувається процес: вода надходить у басейн чи витікає з нього?

2) Скільки кубометрів води було в басейні в початковий момент часу? Через 2 год? Через 4 год?

695. На рисунку 30 зображено графік зміни температури повітря протягом доби.

Рис. 30

1) Якою була температура повітря о 2 год? О 10 год? О 18 год? О 23 год?

2) О котрій годині температура повітря дорівнювала −2 °С? 0 °С? 6 °С?

3) О котрій годині температура повітря була найнижчою? Найвищою?

«(3)

696. Побудуйте графік функції, якщо ним є ламана $ABCD$, де $A(-2{,}5; -2)$, $B(0; 3)$, $C(4; 3)$, $D(6; 1)$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо $x = -1$; $x = 1{,}33$; $x = 4{,}5$;

2) значення аргументу, для яких $y = -1$; $y = 1$; $y = 3$;

3) найбільше та найменше значення функції;

4) область визначення та область значень функції;

5) нулі функції та значення x, для яких функція набуває від'ємних значень.

697. Побудуйте графік функції, якщо ним є ламана $KLMN$, де $K(-4; 3)$, $L(-2; 1)$, $M(2; 1)$, $N(3; 2)$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення функції, якщо $x = -3$; $x = 1{,}25$; $x = 2{,}5$;
2) значення аргументу, для яких $y = 3$; $y = 2$;
3) найбільше та найменше значення функції;
4) область визначення та область значень функції;
5) значення x, для яких функція набуває найменшого значення.

698. Побудуйте графік функції, заданої формулою:

1) $y = x(4 - x)$, де $-1 \le x \le 5$; 2) $y = x^2 + 4x + 3$, де $-3 \le x \le 1$.

699. Побудуйте графік функції, заданої формулою:

1) $y = x^2 - 2x$, де $-2 \le x \le 3$; 2) $y = (1 - x)(3 + x)$, де $-2 \le x \le 1$.

700. Побудуйте графік функції, заданої таблицею:

x	-2	0	1	$2{,}5$	4
y	3	1	-2	2	1

701. На рисунку 31 зображено графік залежності швидкості тіла від часу.

1) Знайдіть швидкість тіла через 2 с після початку руху; через 5 с; через 10 с; через 20 с.
2) У які моменти часу швидкість тіла дорівнювала 4 м/с? 6 м/с? 8 м/с?
3) У які моменти часу швидкість тіла була найбільшою?
4) Скільки секунд тіло рухалося зі сталою швидкістю? Який шлях пройшло тіло за цей час?

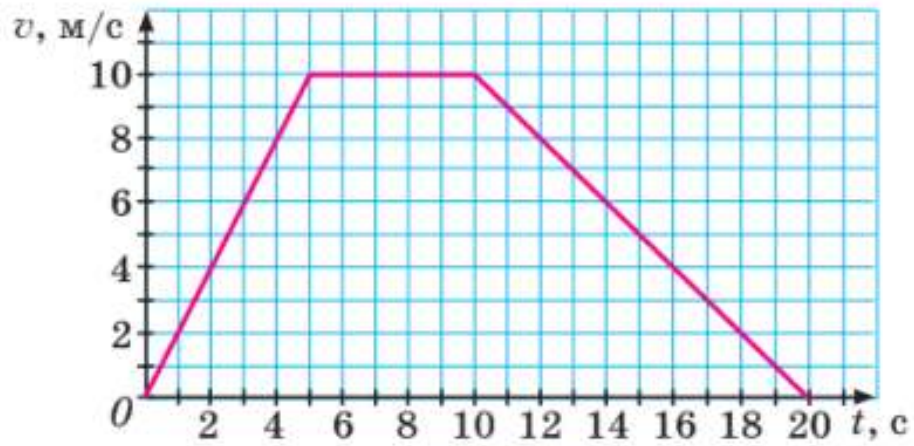


Рис. 31

702. Туристична група здійснила перехід від табору до каменя Довбуша. На рисунку 32 зображено графік залежності шляху s (у км), який пройшли туристи, від часу руху t (у год).

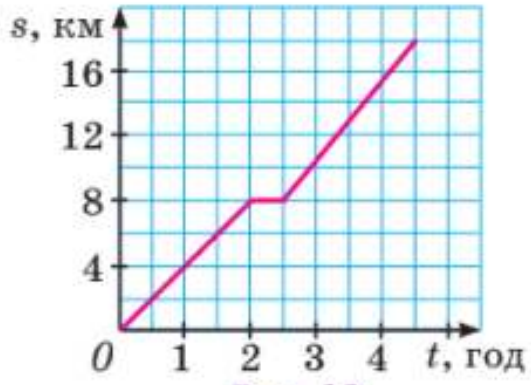


Рис. 32

Камінь Довбуша

1) Через скільки годин після початку руху туристи дійшли до каменя Довбуша та скільки всього кілометрів вони пройшли?
2) Скільки годин витратили туристи на привал?
3) З якою швидкістю рухалися туристи протягом перших двох годин? Після привалу?

Інтерактивне завдання 20
Графік функції

«4»

703. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$, де $-3 \le x \le 3$; 2) $y = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } -2 \le x \le 0; \\ 2x, \text{ якщо } 0 < x \le 4. \end{cases}$

704. Побудуйте графік функції $y = |x| - 2$, де $-4 \le x \le 4$.

705. Дві спортсменки змагалися в плаванні на дистанції 200 м у 50-метровому басейні. На рисунку 33 зображено графіки зміни відстані від спортсменок до місця старту залежно від часу.

1) За скільки секунд кожна спортсменка подолала перші 50 м дистанції?
2) Хто переміг у змаганні?
3) На скільки секунд відстала переможена від переможниці?

4) З якою середньою швидкістю пливла кожна спортсменка на першій стометрівці?

5) Що означають точки перетину графіків?

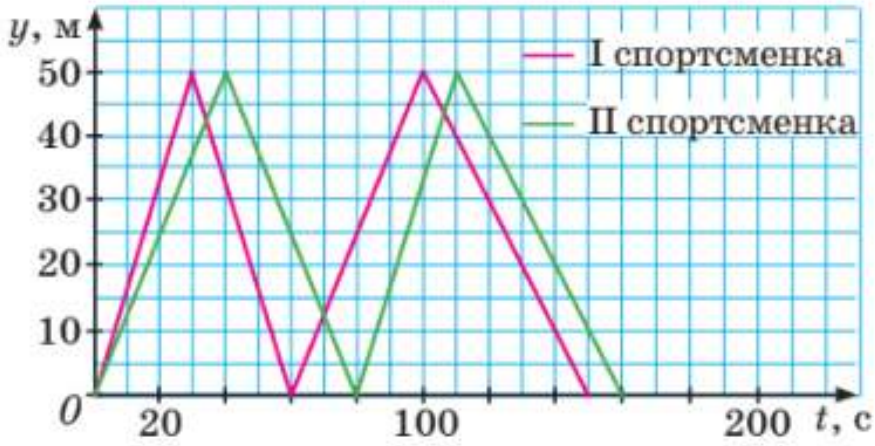


Рис. 33

Вправи для повторення

706. Величини x та y прямо пропорційні. Заповніть таблицю:

x	3	4		5,5		
y	6		12		15	20,8

707. Зі 100 кг насіння льону отримують 37 кг олії. Скільки кілограмів олії отримують із 350 кг такого насіння?

708. Відстань між містами A і B дорівнює 190 км. З міста A до міста B виїжджає автомобіль і рухається зі швидкістю 90 км/год. На якій відстані від міста B він буде через t год? Запишіть розв'язок у вигляді виразу та знайдіть його значення, якщо $t = 1{,}2$.

709. Яку найменшу довжину повинна мати стрічка, щоб її можна було розрізати без залишків на рівні частини завдовжки як 75 см, так і 60 см?

Поміркуйте

710. На дошці записні числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Чи можна стерти деякі два числа й записати різницю цих чисел так, щоб сума шести чисел на дошці дорівнювала 21? (Якщо стирати числа a і b, то можна записати число $a - b$ або число $b - a$.)

Цікаво знати

Планета Нептун

Історія науки знає чимало прикладів, коли в межах вдало побудованої математичної моделі за допомогою обчислень, як кажуть, «на кінчику пера», вдавалося передбачити існування нових фізичних об'єктів і явищ. Так, опираючись на математичні моделі, астрономи Дж. Адамс (Англія) у 1845 році й У. Левер'є (Франція) у 1846 році незалежно один від одного дійшли висновку про існування невідомої тоді ще планети й указали її розміщення на небі. За розрахунками У. Левер'є астроном Г. Галле (Німеччина) знайшов цю планету. Її назвали Нептуном.

20 ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

1. Що таке лінійна функція. Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Нехай автомобіль рухається зі швидкістю 80 км/год і в початковий момент часу перебував на відстані 15 км від міста A (рис. 34). Тоді через t год автомобіль перебуватиме на відстані $s = 80t + 15$ кілометрів від міста.

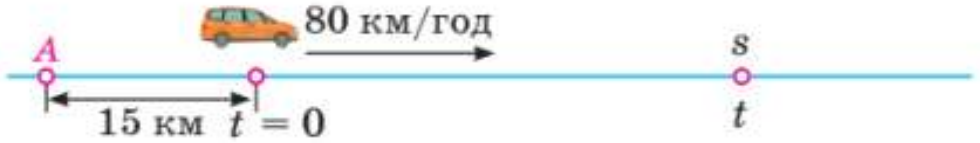


Рис. 34

Приклад 2. Нехай у басейн через трубу щохвилини вливається 3 м^3 води. Якщо в початковий момент часу в басейні було 70 м^3 води, то об'єм V води (у м^3), яка буде в басейні через t хв, можна обчислити за формулою $V = 3t + 70$.

Формулами $s = 80t + 15$, $V = 3t + 70$, де t — незалежна змінна, задають функції, які називають *лінійними*.

Означення. **Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — деякі числа, називають *лінійною*.**

Наприклад, $y = 1{,}2x - 5$, $y = -2x + 3$, $y = 5x$, $y = -3$ — лінійні функції.

У формулі $y = kx + b$ змінна x може набувати будь-яких значень, тому *область визначення лінійної функції утворюють усі числа*.

2. Графік лінійної функції. Побудуємо графік лінійної функції $y = 0{,}5x - 1$. Для цього складемо таблицю кількох значень x і відповідних значень y:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$

На координатній площині позначимо точки, координати яких подано в таблиці (див. рис. 35). Приклавши лінійку, переконуємося, що всі позначені точки лежать на одній прямій. Якби для будь-якого іншого значення x обчислили відповідне значення y і позначили б точку з такими координатами на координатній площині, то й вона лежала б на цій прямій.

Через позначені точки проведемо пряму. Вона є графіком лінійної функції $y = 0{,}5x - 1$.

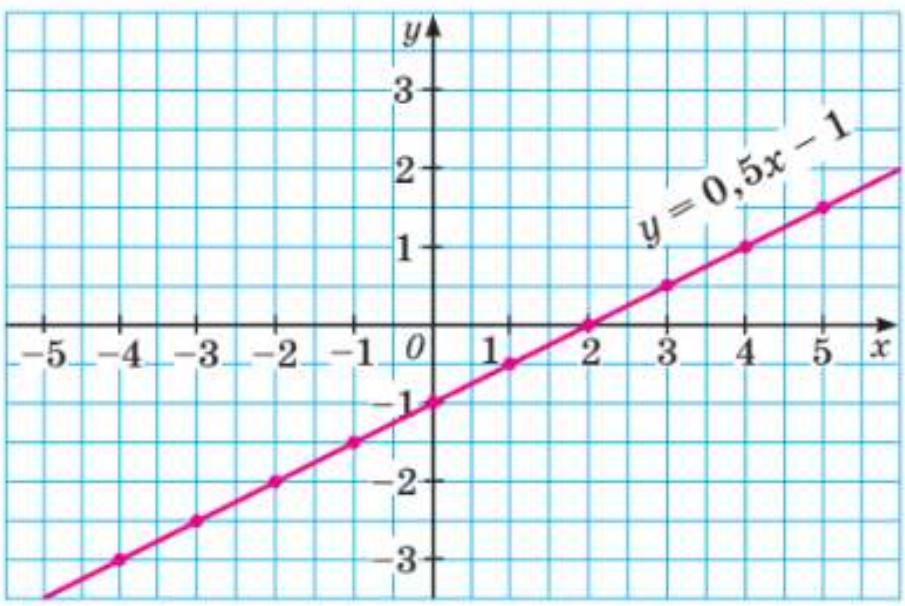


Рис. 35

Узагалі, *графіком лінійної функції є пряма.*

Щоб побудувати графік лінійної функції, достатньо знайти координати двох точок графіка, позначити ці точки на координатній площині й провести через них пряму.

Так, щоб побудувати графік функції $y = 0{,}5x - 1$, достатньо було взяти дві точки, наприклад, $(0; -1)$ і $(2; 0)$, та провести через них пряму.

Якщо $k = 0$, то формула $y = kx + b$ має вигляд $y = 0x + b$, тобто $y = b$. Така функція для всіх значень x набуває того самого значення b. Наприклад, функція $y = 2$ для всіх значень x набуває значення 2. Тому графіком цієї функції є пряма, утворена точками $(x; 2)$, де x — будь-яке число. Ця пряма паралельна осі x (рис. 36).

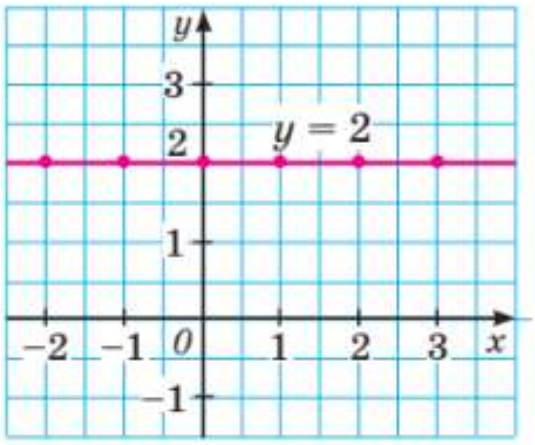


Рис. 36

Щоб побудувати графік функції $y = b$, достатньо позначити на осі y точку з ординатою b і провести через неї пряму, паралельну осі x.

Підсумовуючи, зазначимо такі властивості функції $y = kx + b$:

1. *Область визначення функції утворюють усі числа.*

2. *Якщо $k \neq 0$, то область значень функції утворюють усі числа; якщо $k = 0$, то функція набуває лише одного значення $y = b$.*

3. *Графіком функції є пряма.*

3. Пряма пропорційність. Якщо у формулі $y = kx + b$ взяти $b = 0$ і $k \neq 0$, то матимемо формулу $y = kx$. Нею задають функцію, яка є окремим, але досить важливим випадком лінійної функції та слугує моделлю багатьох реальних процесів. Розглянемо приклад.

Приклад 3. Нехай потяг рухається зі швидкістю 90 км/год. За сталої швидкості шлях, який пройшов потяг, прямо пропорційний часу руху. Якщо потяг рухався t год, то шлях s км, пройдений ним за цей час, можна обчислити за формулою $s = 90t$.

У даному прикладі формула $s = 90t$ задає залежність шляху від часу. Ця залежність є прямо пропорційною. Тому функцію, яку задають формулою $s = 90t$, називають *прямою пропорційністю.*

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx$, де x — незалежна змінна, k — деяке число, $k \neq 0$, називають *прямою пропорційністю.*

Пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції, тому графіком прямої пропорційності є пряма. Ця пряма проходить через початок координат (бо якщо $x = 0$, то $y = k \cdot 0 = 0$).

Для побудови графіка прямої пропорційності достатньо знайти яку-небудь точку графіка, відмінну від початку координат, і провести через цю точку та початок координат пряму.

На рисунку 37 зображено графіки функцій виду $y = kx$ для різних значень k.

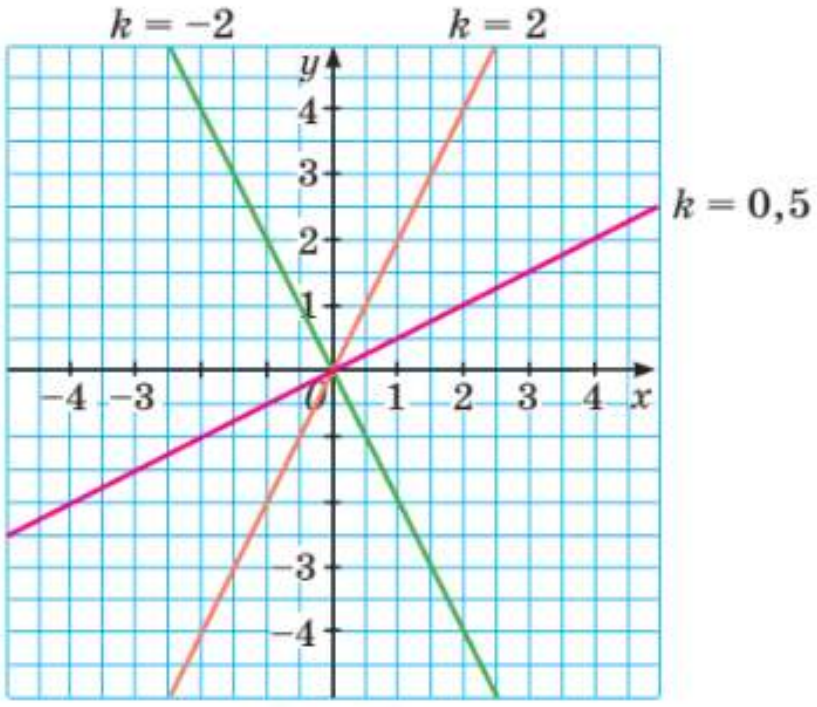


Рис. 37

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Побудувати графік функції, заданої формулою:

1) $y = -2x + 1$; 2) $y = -1{,}5$; 3) $y = \frac{1}{3}x$.

• 1) Знайдемо координати двох точок графіка. Для цього складемо таблицю:

x	0	1
y	1	-1

Позначимо на координатній площині точки $(0; 1)$ та $(1; -1)$ і проведемо через них пряму (рис. 38). Маємо графік функції $y = -2x + 1$.

2) На осі y координатної площини позначимо точку з ординатою $-1{,}5$ і проведемо через неї пряму, паралельну осі x (рис. 39). Маємо графік функції $y = -1{,}5$.

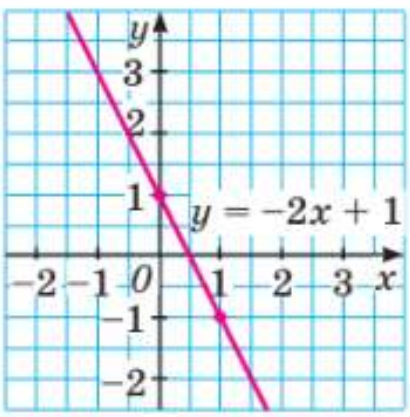


Рис. 38

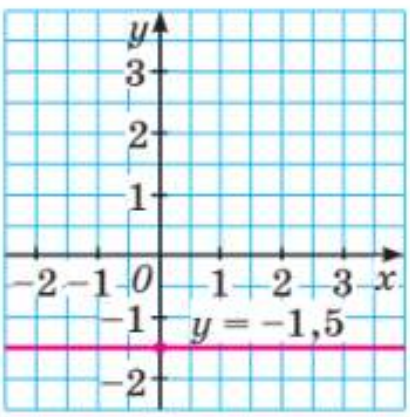


Рис. 39

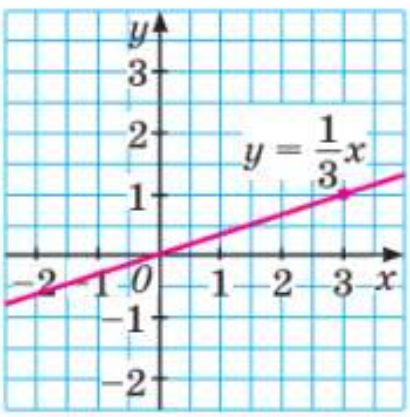


Рис. 40

3) Знайдемо координати однієї точки графіка, відмінної від початку координат. Візьмемо $x = 3$, тоді $y = 1$. Позначимо на координатній площині точку $(3; 1)$ і проведемо через неї та через початок координат пряму (рис. 40). Маємо графік функції $y = \frac{1}{3}x$. •

Вправа 2. Дано функцію $y = 4x - 6$. Не будуючи графік функції, знайти координати точок його перетину з осями координат і нулі функції.

• Точки перетину графіка з осями координат — це точки графіка, абсциса або ордината яких дорівнює нулю.

Якщо $x = 0$, то $y = 4 \cdot 0 - 6 = -6$.

$(0; -6)$ — точка перетину графіка з віссю y.

Якщо $y = 0$, то: $0 = 4x - 6$; $-4x = -6$; $x = 1{,}5$.
$(1{,}5; 0)$ — точка перетину графіка з віссю x.
Значення функції дорівнює нулю ($y = 0$), якщо $x = 1{,}5$.
Отже, нулем функції є $x = 1{,}5$. ●

1. Яку функцію називають лінійною? Прямою пропорційністю?
2. Що є графіком лінійної функції? Як його побудувати?
3. Як побудувати графік функції $y = b$? $y = kx$, де $k \neq 0$?
4. Які властивості має лінійна функція?

«Усно

711. Функції задано формулами:

1) $y = x + 5$; 2) $y = x^2 - 4$; 3) $y = -3x$; 4) $y = 8$;
5) $y = \frac{2}{x}$; 6) $y = \frac{4}{5}x$; 7) $y = 0$; 8) $y = 3 - 7x$.

Які з наведених функцій є лінійними? Прямими пропорційностями? Для лінійних функцій укажіть значення коефіцієнтів k і b, область визначення та область значень.

712. Укажіть правильні твердження:

1) графіком функції $y = 2x - 5$ є пряма;
2) графік функції $y = 2x$ проходить через початок координат;
3) графік функції $y = 2$ паралельний осі y;
4) графік функції $y = 2x + 5$ проходить через точку $(5; 0)$.

«1 2

713. Лінійну функцію задано формулою $y = 2x - 6$. Заповніть таблицю:

x	-6		1	3	7,5	
y		-12				11

714. Лінійну функцію задано формулою $y = x - 4$. Заповніть таблицю:

x	-4		0		$4{,}5$	$9{,}3$
y		-6		0		

715. Побудуйте графік функції:

1) $y = x + 1$; 2) $y = 2x - 1$;

3) $y = -2x - 0{,}5$; 4) $y = -0{,}5x + 1{,}5$.

716. Побудуйте графік функції:

1) $y = x - 2$; 2) $y = -2x + 0{,}5$;

3) $y = 0{,}5x - 1$; 4) $y = -2{,}5$.

717. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = -x$; $y = -x - 2$; $y = -x + 2$;

2) $y = 4$; $y = 1{,}5$; $y = -2$.

718. В одній системі координат побудуйте графіки функцій $y = 2x$, $y = 2x - 2$ та $y = 2x + 1$.

719. Побудуйте графік функції $y = -0{,}5x - 1$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення y, яке відповідає $x = -3$; $x = 2$; $x = 4$;

2) значення x, якому відповідає $y = -2$; $y = 1$;

3) нуль функції;

4) координати точок перетину графіка з осями координат;

5) значення x, для яких функція набуває від'ємних значень.

720. Побудуйте графік функції $y = -x + 1{,}5$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення y, яке відповідає $x = -2$; $x = 2$; $x = 4$;

2) значення x, якому відповідає $y = -1$; $y = 2{,}5$;

3) координати точок перетину графіка з осями координат;

4) значення x, для яких функція набуває додатних значень.

721. Не будуючи графік функції $y = -3x + 7$, визначте, чи проходить він через точку: 1) $M(2; 1)$; 2) $N(8; -17)$, 3) $K(-5; -8)$.

722. Не будуючи графік функції $y = 8x + 9$, визначте, чи проходить він через точку: 1) $A(1; 17)$; 2) $B(2; 23)$, 3) $C(-2; -7)$.

723. Пряму пропорційність задано формулою $y = -4x$. Заповніть таблицю:

x	-3		-1		3	
y		8		-8		-20

724. Пряму пропорційність задано формулою $y = 5x$. Заповніть таблицю:

x	-5		-2			3
y		-15		0	5	

725. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = 3x$; 2) $y = -3x$; 3) $y = -\frac{2}{3}x$.

726. В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

1) $y = 2x$; 2) $y = -2x$; 3) $y = \frac{1}{2}x$.

727. Побудуйте графік функції $y = -0{,}5x$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення x, для якого $y = -1$; $y = 2$;
2) значення x, для яких функція набуває додатних значень.

728. Побудуйте графік функції $y = 1{,}5x$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) значення y, яке відповідає значенню $x = -2$; $x = 3$;
2) значення x, для яких функція набуває додатних значень.

729. Які з точок $K(15; -1)$, $L(4; -60)$, $M(-4; -60)$, $N(-0{,}4; 6)$ належать графіку функції $y = -15x$?

730. Побудуйте графіки функцій в одній системі координат і знайдіть координати точки їх перетину:

1) $y = 4x - 1$ та $y = 2x + 2$; 2) $y = -3x + 2$ та $y = x - 2$;

3) $y = \frac{1}{3}x - 1$ та $y = 1$.

731. Побудуйте графіки функцій в одній системі координат і знайдіть координати точки їх перетину:

1) $y = 3x - 2$ та $y = 2x - 1$; 2) $y = -x + 2$ та $y = 1{,}5x + 2$.

732. Побудуйте графіки функцій $y = 0{,}5x + 2$ та $y = 0{,}5x - 1$ в одній системі координат. За допомогою лінійки та косинця переконайтеся, що графіками є паралельні прямі.

733. Не будуючи графік функції, знайдіть координати точок його перетину з осями координат та нулі функції:
1) $y = -1{,}5x - 4{,}5$; 2) $y = 0{,}3x - 21$; 3) $y = -8$.

734. Не будуючи графік функції, знайдіть координати точок його перетину з осями координат та нулі функції:
1) $y = 2{,}5x + 10$; 2) $y = -1{,}6x + 4{,}8$; 3) $y = 6$.

735. Запишіть формулу прямої пропорційності, якщо її графік проходить через точку: 1) (1; 17); 2) (−2; 4).

736. Запишіть формулу прямої пропорційності, якщо її графік проходить через точку (2; −6).

737. Запишіть формулу прямої пропорційності, графік якої зображено на рисунку 41.

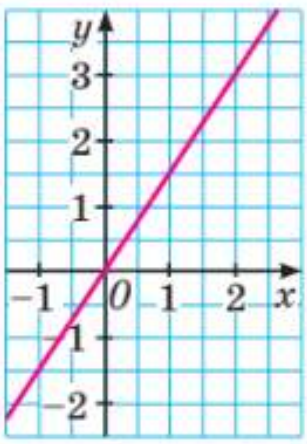


Рис. 41

738. Лінійна функція набуває лише одного значення, а її графік проходить через точку $K(2; -2)$. Запишіть формулу, якою задають цю функцію.

739. Графік лінійної функції паралельний осі x і проходить через точку $M(3; 7)$. Запишіть формулу, якою задають цю функцію.

740. Маса 1 л бензину дорівнює 0,75 кг. Нехай маса x л бензину дорівнює y кг. Задайте формулою змінну y як функцію від змінної x. Побудуйте графік цієї функції, якщо $x \geq 1$.

741. Ширина доріжки дорівнює 1,5 м, довжина — x м, де $x \geq 2$, а площа — y м^2. Задайте формулою змінну y як функцію від змінної x. Побудуйте графік цієї функції.

742. На рисунку 42 зображено графік руху двох автобусів, що вирушили з однієї станції.
1) Через який час після відходу першого автобуса вирушив другий?
2) Знайдіть швидкість кожного автобуса.
3) На якій відстані від станції другий автобус наздогнав перший?
4) Якою формулою задають залежність шляху від часу руху для першого автобуса?

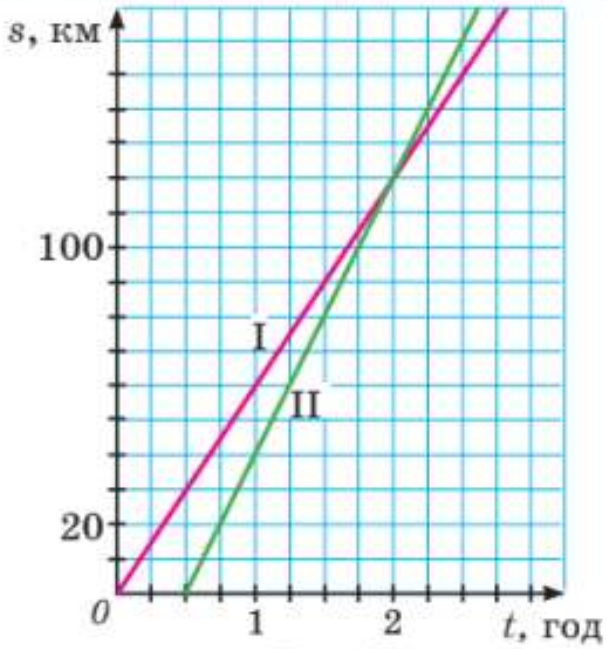


Рис. 42

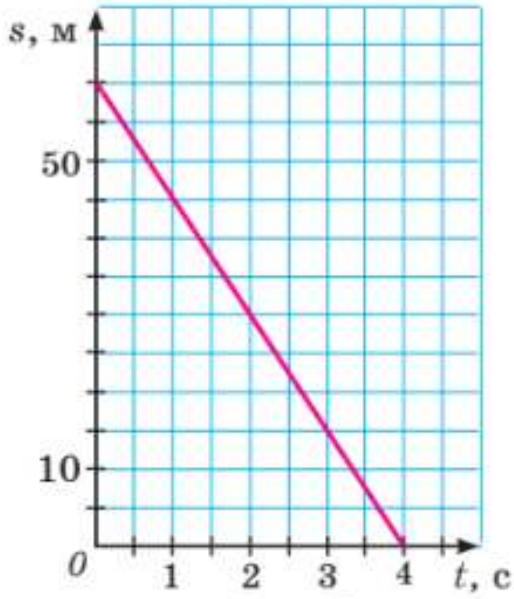


Рис. 43

743. У початковий момент часу велосипедистка перебувала на відстані 60 м до фінішу. На рисунку 43 зображено графік зміни відстані від велосипедистки до фінішу залежно від часу.

1) Через скільки секунд велосипедистка досягла фінішу?
2) З якою швидкістю рухалася велосипедистка?
3) Скільки метрів проїхала велосипедистка за дві останні секунди?

Інтерактивне завдання 21
Лінійна функція

4

744. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = 4x - 8$ та $y = -x + 18$.

745. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = 2x + 7$ та $y = 4x - 15$.

746. Для якого значення k графік функції $y = kx - 2$ проходить через точку $(2; -5)$?

747. Для якого значення b графік функції $y = 4x + b$ проходить через точку $(-1; 3)$?

748. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$;

2) $y = \begin{cases} x + 2, \text{ якщо } x \le 1; \\ 5 - 2x, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$

749. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| - 2$;

2) $y = \begin{cases} -x, \text{ якщо } x < 0; \\ 2x, \text{ якщо } x \geq 0. \end{cases}$

750. У баку автомобіля було 34 л бензину. Нехай після подолання ним шляху завдовжки s км у баку залишиться V л бензину.

1) Задайте формулою об'єм V як функцію від шляху s, якщо на подолання 1 км шляху автомобіль витрачає 0,085 л бензину.
2) Знайдіть об'єм бензину в баку, якщо автомобіль проїде 180 км.
3) Скільки всього кілометрів проїде автомобіль, якщо витратить увесь бензин?

751. У басейні для вирощування риби, розміри якого дорівнюють 10 м × 6 м × 1,5 м, є 30 м^3 води. Відкрили кран, і до басейну щохвилини стало надходити 1,5 м^3 води. Нехай через t хв у басейні стане V м^3 води.

1) Задайте формулою об'єм V як функцію від часу t.
2) Знайдіть об'єм води в басейні, якщо $t = 30$.
3) За скільки хвилин наповниться водою весь басейн?

Вправи для повторення

752. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x - 9 = 5x + 3$;

2) $7(x + 2) - 2(x - 2) = 0$.

753. Доведіть, що для будь-якого натурального значення k значення виразу $(k + 4)(4 - k) + (k + 3)^2 + 4k$ ділиться на 5.

754. До 30-відсоткового розчину солі, маса якого 750 г, долили 150 г води. Знайдіть відсотковий уміст солі в утвореному розчині.

755. У першому пакеті було печива утричі більше, ніж у другому. Після того як 120 г печива переклали з першого пакета в другий, в обох пакетах його стало порівну. Скільки грамів печива було в кожному пакеті спочатку?

Поміркуйте

756. Знайдіть усі натуральні значення m, для яких різниця $m^2 - 225$ є простим числом.

Цікаво знати

Почесне місце в історії математики посідає український математик Михайло Остроградський. Він народився на Полтавщині, закінчив Харківський університет, був академіком кількох академій наук.

Математичні досягнення Михайла Остроградського стосуються, зокрема, алгебри і теорії чисел, математичного аналізу, він є автором кількох підручників, а теореми, формули Остроградського вивчають студенти математичних спеціальностей усіх університетів світу.

У 2001 році ЮНЕСКО внесла Михайла Остроградського до списку видатних математиків світу.

Михайло Васильович Остроградський (1801–1861)

Завдання для повторення § 4

757. Функцію задано формулою $y = 5x - 3$.

1) Знайдіть значення функції, які відповідають значенням аргументу: -8; 0; 16.
2) Знайдіть значення аргументу, для якого значення функції дорівнює -3; 1.
3) Знайдіть значення x, для якого значення функції дорівнює значенню аргументу.

758. Функцію задано формулою $y = x^2 - 3$, де змінна x набуває значень -2; -1; 0; 1; 2; 3. Задайте цю функцію таблицею.

759. На рисунку 44 зображено графік зміни температури тіла протягом 16 хв.

1) Укажіть температури тіла: початкову; кінцеву; найбільшу; найменшу.
2) У які моменти часу температура тіла дорівнювала 80 °С?
3) На скільки градусів збільшилася температура тіла протягом перших 4 хв?
4) На скільки градусів зменшилася температура тіла протягом останніх 8 хв?

Рис. 44

760. Графіком функції є ламана ABC, де $A(-2; 2)$, $B(1; -1)$, $C(5; 1)$. Накресліть графік функції та знайдіть:
1) значення функції, якщо $x = -1$; $x = 4$;
2) значення аргументу, для яких $y = -1$; $y = 1$;
3) найбільше та найменше значення функції;
4) область визначення та область значень функції;
5) нулі функції та значення x, для яких функція набуває від'ємних значень.

761. Побудуйте графік функції:
1) $y = 2x + 1$, де $-3 \le x \le 1$; 2) $y = 0{,}5x^2 - 0{,}5$, де $-2 \le x \le 2$;
3) $y = 1{,}5x - 1$; 4) $y = -3x$; 5) $y = 4$.

762. Побудуйте графік функції $y = -2x - 1$. За допомогою графіка знайдіть:
1) координати точок його перетину з осями координат;
2) значення x, для яких функція набуває додатних значень.

763. Запишіть формулу прямої пропорційності, якщо її графік проходить через точку $A(-3; 1)$.

764. Графік функції $y = kx$ проходить через точку $A(-8; 4)$. Чи проходить графік цієї функції через точку $B(2; -1)$?

765. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = -4x + 6$ з осями координат.

766. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій:
1) $y = 3x$ та $y = -3x + 6$; 2) $y = x + 7$ та $y = 5 - 4x$.

767. Знайдіть нулі та найменше значення функції $y = x^2 - 4x$.

768. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 0,5 дм, 1,2 дм та x дм, де $x \ge 1$, а об'єм — y дм^3. Задайте формулою об'єм паралелепіпеда як функцію від змінної x. Побудуйте графік цієї функції.

769. У деяких країнах (наприклад, у США, Канаді) температуру повітря вимірюють у градусах Фаренгейта. Температуру в градусах Фаренгейта (t_F) виражають через температуру в градусах Цельсія (t_C) за формулою $t_F = 1{,}8t_C + 32$.

1) Знайдіть t_F, якщо $t_C = 20$ °C; $t_C = -15$ °C.

2) Знайдіть t_C, якщо $t_F = 5$ °F; $t_F = 50$ °F.

3) Знайдіть у градусах Фаренгейта температуру плавлення льоду, температуру кипіння води.

Інтерактивне завдання для самоперевірки 4
Функції

Завдання для самоперевірки № 4

Початковий рівень

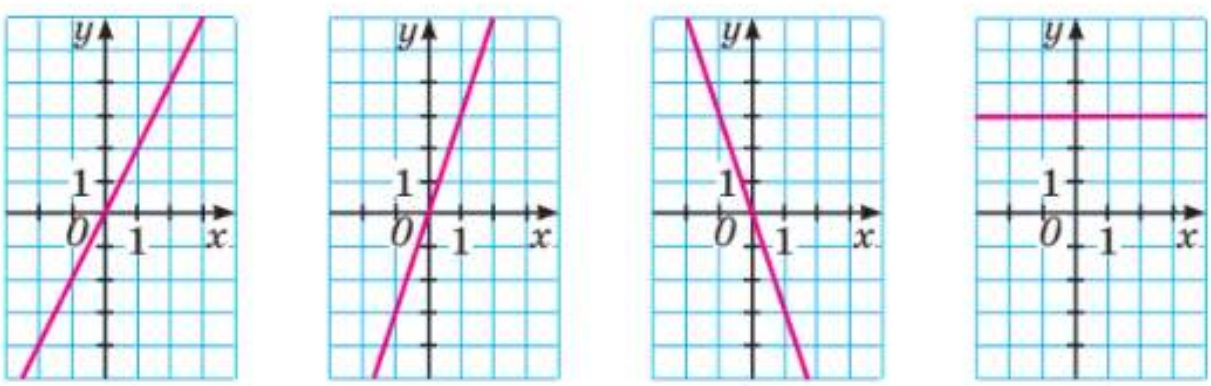
1. Функцію задано формулою $y = 2x - 3$. Знайдіть значення функції, якщо $x = 5$.

А 12 **Б** 10 **В** 7 **Г** 4

2. Знайдіть значення аргументу, для якого значення функції $y = 4x$ дорівнює -8.

А -4 **Б** -2 **В** 4 **Г** 2

3. На якому з наведених рисунків зображено графік функції $y = 3x$?



А **Б** **В** **Г**

4. Функцію задано таблицею:

x	-2	-1	1	2
y	1	2	3	4

Які числа утворюють область значень цієї функції?

А $-2; -1; 1; 2$ **Б** $1; 2$

В $3; 4$ **Г** $1; 2; 3; 4$

5. Яка з наведених точок належить графіку функції $y = 2x + 1$?

А $A(-2; 5)$ **Б** $B(-2; -5)$ **В** $C(2; 5)$ **Г** $D(2; 3)$

6. Яке з наведених тверджень є неправильним?

А Графіком лінійної функції є пряма

Б Графік прямої пропорційності проходить через початок координат

В Графік функції $y = 2$ паралельний осі ординат

Г Графік функції $y = 5x$ не проходить через точку $(1; 1)$

Середній рівень

7. Функцію задано формулою $y = x^2 - 2$. Для кожного значення аргументу (1–3) доберіть відповідне значення функції (А–Д).

1 $x = 2$

2 $x = -1$

3 $x = -4$

А $y = -18$

Б $y = -6$

В $y = -1$

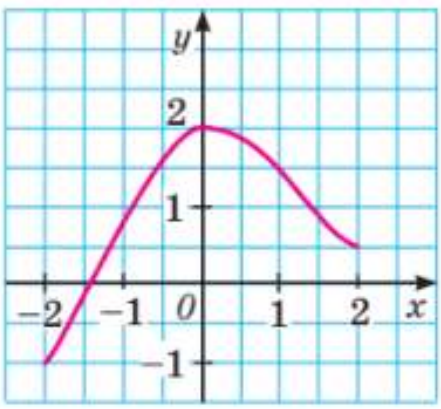
Г $y = 2$

Д $y = 14$

8. Функцію задано формулою $y = 4x - 8$. Знайдіть значення аргументу, для якого значення функції дорівнює 2.

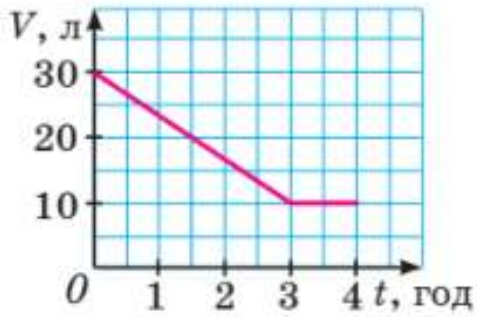
А 0 **Б** 1,5 **В** 2,5 **Г** 4

9. Укажіть область значень функції, графік якої зображено на рисунку.



А $-2 \le x \le 2$ **Б** $-1 \le x \le 2$ **В** $-2 \le y \le 2$ **Г** $-1 \le y \le 2$

10. На рисунку зображено графік зміни об'єму бензину в баку автомобіля протягом 4 годин.



Яке з наведених тверджень є неправильним?

А У початковий момент часу в баку було 30 л бензину

Б У момент часу $t = 1{,}5$ у баку було 20 л бензину

В Об'єм бензину в баку зменшувався протягом 4 год

Г У баку залишилося 10 л бензину

Достатній рівень

11. Графіком функції є ламана $ABCD$, де $A(-3; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(3; 3)$, $D(5; 2)$. Побудуйте цей графік і знайдіть:
1) значення аргументу, для яких $y = 1$; $y = 3$;
2) область визначення та область значень функції.

12. Знайдіть нулі функції $y = x^2 - 6x$.

13. Побудуйте графік функції $y = -2x - 2$. Користуючись графіком, знайдіть значення x, для яких функція набуває додатних значень.

14. Графік функції $y = kx$ проходить через точку $A(2{,}5; 5)$. Чи проходить цей графік через точку $B(-3; -6)$?

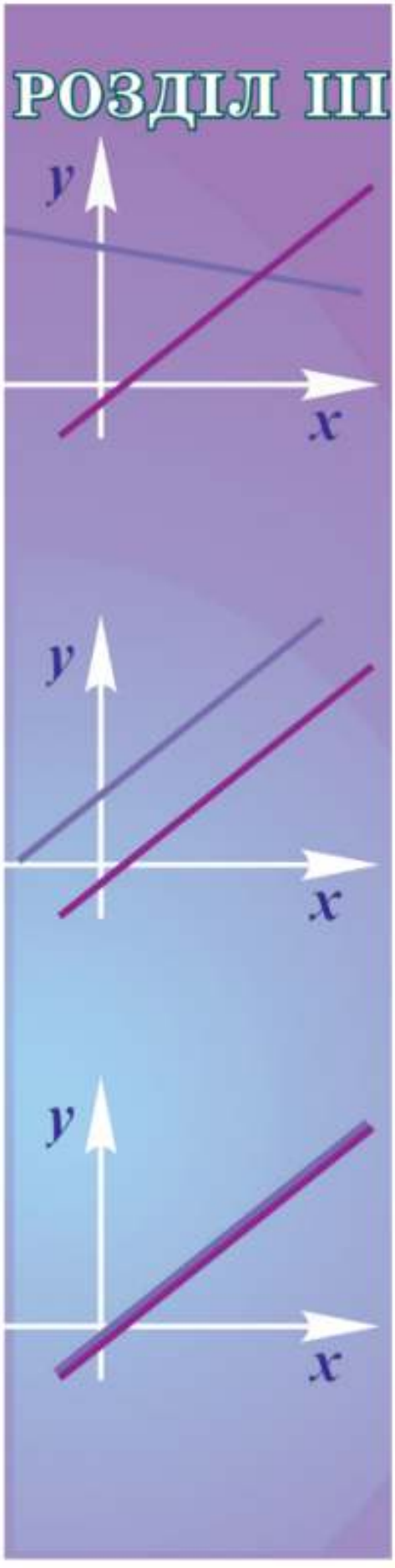
Високий рівень

15. Функцію задано формулою $y = (x - 2)(x + 4)$. Знайдіть значення аргументу, для яких значення функції дорівнює -8.

16. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = 3x - 5$ та $y = 9 - 2x$.

17. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 6x + 2$.

18. Побудуйте графік функції $y = 2|x| - 1$. Користуючись графіком, знайдіть значення x, для яких функція набуває від'ємних значень.

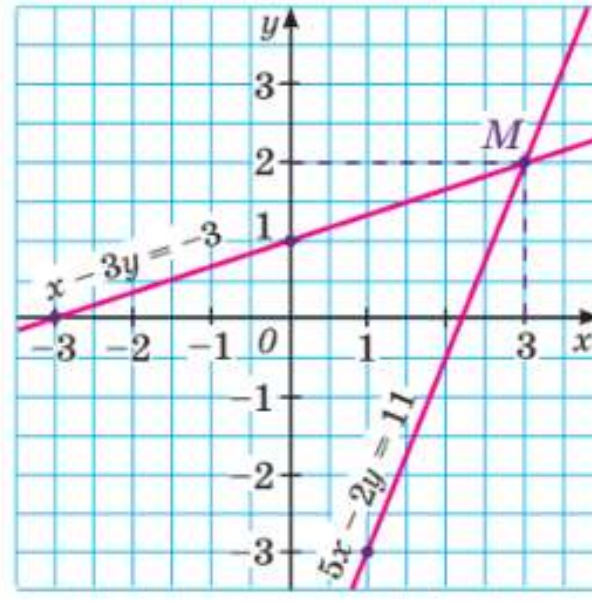


РОЗДІЛ III ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

Алгебра тривалий час була частиною арифметики — однієї з найдавніших математичних дисциплін. Слово «арифметика» в перекладі з грецької мови означає «мистецтво чисел». Алгебру ж після виокремлення її в окрему науку розглядали як мистецтво розв'язувати рівняння.

У цьому розділі ви дізнаєтеся:

- що таке лінійне рівняння з однією змінною; з двома змінними;
- що називають розв'язком рівняння з двома змінними; його графіком;
- що таке система рівнянь;
- які є способи розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними;
- як розв'язувати задачі за допомогою рівнянь та їх систем.



21 РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

1. Рівняння з однією змінною. Корінь рівняння. Розглянемо рівняння $3x = x + 6$, яке містить невідоме число x (ще кажуть: містить змінну x). Розв'язуючи це рівняння, шукають значення змінної x, для якого рівність $3x = x + 6$ є правильною числовою рівністю. Візьмемо для прикладу два значення змінної:

$x = 2$ → $3 \cdot 2 = 2 + 6$ — рівність є неправильною

$x = 3$ → $3 \cdot 3 = 3 + 6$ — рівність є правильною

Означення. **Значення змінної, для якого рівняння перетворюється в правильну числову рівність, називають *коренем*, або *розв'язком* рівняння.**

Отже, число 3 є коренем рівняння $3x = x + 6$, а число 2 — ні.

2. Кількість коренів рівняння. Рівняння можуть мати різну кількість коренів. Наприклад:

рівняння $3x = 9$ має лише один корінь — число 3;

рівняння $(x - 2)(x - 6) = 0$ має два корені — числа 2 і 6;

рівняння $x + 0 = x$ має безліч коренів, бо для будь-якого числа x рівність $x + 0 = x$ є правильною;

рівняння $0x = 2$ коренів не має, бо для будь-якого числа x добуток $0x$ дорівнює 0, а $0 \neq 2$.

3. Розв'язування рівнянь. Властивості рівнянь.

Розв'язати рівняння **означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.**

Розв'язування рівняння здебільшого зводиться до виконання певних перетворень, у результаті яких дане рівняння замінюють простішим. Із цими перетвореннями пов'язані такі властивості рівнянь:

Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, яке має такі самі корені, що й дане.

Якщо деякий доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, яке має такі самі корені, що й дане.

Розв'яжемо, наприклад, рівняння $5(x - 2) + 11 = 3x + 9$:

$5x - 10 + 11 = 3x + 9$	Розкрили дужки
$5x + 1 = 3x + 9$	Звели подібні доданки в лівій частині рівняння
$5x - 3x = 9 - 1$	Перенесли доданки зі змінною x у ліву частину рівняння, а без змінної — у праву, змінивши їхні знаки на протилежні
$2x = 8$	Звели подібні доданки в кожній частині рівняння
$x = 4$	Поділили обидві частини рівняння на 2

Отже, рівняння має єдиний корінь — число 4.

Зазначимо, що, розв'язуючи рівняння $5(x - 2) + 11 = 3x + 9$, ми послідовно переходили до нових рівнянь; усі вони разом з даним рівнянням мають такий самий корінь — число 4.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Чи є число 3 коренем рівняння $3x - 1 = 2(x + 1)$?

• Якщо $x = 3$, то:
значення лівої частини рівняння дорівнює: $3 \cdot 3 - 1 = 8$;
значення правої частини дорівнює: $2 \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 4 = 8$.
Значення лівої частини рівняння дорівнює значенню правої частини, тому $x = 3$ — корінь даного рівняння. •

Вправа 2. Розв'язати рівняння:

1) $\frac{2}{9}(x - 8) = \frac{1}{9}(3x - 1)$; 2) $25(z - 3) + 100z = 125$.

• 1) Помноживши обидві частини рівняння на 9, матимемо:

$2(x - 8) = 3x - 1$; $2x - 16 = 3x - 1$; $2x - 3x = 16 - 1$;

$-x = 15$; $x = -15$.

Відповідь. -15.

2) Поділивши обидві частини рівняння на 25, матимемо:

$z - 3 + 4z = 5$; $5z = 5 + 3$; $5z = 8$; $z = 1{,}6$.

Відповідь. 1,6. •

1. Наведіть приклади рівнянь з однією змінною.
2. Що називають коренем рівняння?
3. Скільки коренів може мати рівняння?
4. Що означає розв'язати рівняння?
5. Сформулюйте властивості рівнянь.

«Усно

770. Чи є число 2 коренем рівняння:

1) $5x = 3x + 4$; 2) $2x + 8 = 7x$; 3) $10 - y = y(y + 2)$?

771. Скільки коренів має рівняння:

1) $2x = 1$; 2) $2y = 0$; 3) $x = x + 3$;
4) $2 + z = z + 2$; 5) $x(x - 5) = 0$; 6) $0(x - 2) = 0$?

772. Назвіть властивості рівнянь, на основі яких здійснено перехід від першого рівняння до другого:

1) $3x + 2 = 5x + 4$; $3x - 5x = 4 - 2$;
2) $20(x - 2) = 40x$; $x - 2 = 2x$;
3) $\frac{1 - 4x}{3} = x$; $1 - 4x = 3x$.

773. Поясніть кожний крок розв'язання рівняння:

1) $3(x - 2) = 5x + 4$

$3x - 6 = 5x + 4$

$3x - 5x = 4 + 6$

$-2x = 10$

$x = 10 : (-2)$

$x = -5$;

2) $\frac{1 + 2x}{3} = 4 + x$

$3 \cdot \frac{1 + 2x}{3} = 3(4 + x)$

$1 + 2x = 12 + 3x$

$2x - 3x = 12 - 1$

$-x = 11$

$x = -11$.

«1 2»

774. Доведіть, що число -4 є коренем рівняння:
1) $4y + 15 = y + 3$; 2) $2(3 - x) = x^2 - 2$.

775. Доведіть, що число 8 є коренем рівняння:
1) $0{,}5x + 6 = 2x - 6$; 2) $z^2 + 6 = 10(z - 1)$.

776. Які з чисел -3, -2, 3, 2 є коренями рівняння
$(x + 2)(x - 1) = 4$?

777. Знайдіть корені рівняння:
1) $5x - 3 = 17$; 2) $21 - 5y = 2y$;
3) $7x + 4 = 3x - 2$; 4) $2x + 3(x + 1) = 8$;
5) $(x - 2)(x + 0{,}5) = 0$; 6) $(2x + 5)^2 = 0$.

778. Знайдіть корені рівняння:
1) $2 - 5x = -3$; 2) $8x + 4 = 3x + 6$;
3) $4(x - 3) = x$; 4) $(x + 3)(x + 2{,}5) = 0$.

779. Розв'яжіть рівняння:
1) $200(x - 1) = 600$; 2) $30(x + 2) = 15(x - 2)$;
3) $\frac{2}{7}x = 4$; 4) $\frac{1}{3}(x - 2) = x$.

780. Розв'яжіть рівняння:
1) $161(2x + 3) = 161x$; 2) $50(x + 3) = 250(x + 1)$;
3) $\frac{1}{4}x = 3$; 4) $x - 6 = \frac{1}{4}x$.

«3»

781. Запишіть рівняння, яке має:
1) один корінь — число 4; 2) два корені — числа -4 і 4.

782. Запишіть рівняння, коренями якого є числа 0 і -2.

783. Обидві частини рівняння $x(x - 2) = x$ поділили на x й одержали рівняння $x - 2 = 1$. Чи мають ці рівняння ті самі корені? Зробіть висновок.

784. Знайдіть корені рівняння:
1) $(5x + 7)(4x - 1) = 0$; 2) $3x^2 + 8 = 4$.

785. Знайдіть корені рівняння:
1) $(4x - 5)(2x + 5) = 0$; 2) $2x^2 + 7 = 1$.

786. Розв'яжіть рівняння:

1) $210(x - 12) + 140(x + 18) = 70$;

2) $0{,}07x + 0{,}05(5x - 4) - 0{,}16 = 0$;

3) $\frac{1}{30}(2x - 5) + \frac{7}{30} = \frac{17}{30}x$.

787. Розв'яжіть рівняння:

1) $200(x - 5) = 100(x + 1) + 500$;

2) $\frac{2}{15}(1 - x) - \frac{4}{15}(1 + x) = \frac{7}{15}$.

Інтерактивне завдання 22

Рівняння з однією змінною. Розв'язування рівнянь

4

788. Знайдіть значення b, для якого коренем рівняння $2x + 3b = -1$ є число 1.

789. Знайдіть значення a, для якого коренем рівняння $5x = 2a - 8$ є число 4.

790. Розв'яжіть рівняння:

1) $(z - 1)(z - 2)(z - 3)(2z + 3) = 0$;

2) $x^2(x^2 + 1)(x^2 - 81) = 0$; 3) $(|x| + 1)(|x| - 2) = 0$.

791. Розв'яжіть рівняння:

1) $(y + 3)^2(2y - 3) = 0$; 2) $(|x| + 4)(x^2 - 4x + 4) = 0$.

Вправи для повторення

792. Спростіть вираз:

1) $(2x - y)(x - 2y) + 5xy$; 2) $(3m - n)(3m + n) + m^2 + n^2$.

793. Знайдіть значення виразу $a^2 + 9b^2 - 6ab$, якщо $a = 3{,}4$; $b = -0{,}2$.

794. Фермер зібрав 4 т яблук і хоче перевезти їх арендованим автомобілем на одне з двох найближчих переробних підприємств. У таблиці для кожного підприємства вказано відстань до нього та закупівельну ціну 1 кг яблук. Якому підприємству вигідніше продати яблука, якщо їх перевезення на відстань 1 км коштує 30 грн?

Підприємство	Відстань до підприємства	Закупівельна ціна 1 кг яблук
1	80 км	7,5 грн
2	120 км	8 грн

795. У місті зараз проживає 52 000 осіб. Відомо, що населення цього міста щороку збільшується на 4 %.
1) Скільки осіб буде в місті через рік?
2) Скільки осіб було в місті рік тому?

Поміркуйте

796. Доведіть, що для будь-яких значень a і b рівняння

$$(2a^2 + 4b^2 - 4ab - 2a + 3)x = a + b$$

має єдиний корінь.

Цікаво знати

Протягом багатьох століть алгебра була наукою про рівняння та способи їх розв'язування. Деякі види рівнянь уміли розв'язувати ще давні єгиптяни й вавилоняни. Про це свідчать папіруси, написання яких відносять до XVIII ст. до н. е.

Становлення алгебри як окремого розділу математики пов'язують з перським математиком Мухаммедом бен Муса аль-Хорезмі (близько 780 – близько 850). Він зібрав та систематизував способи розв'язування рівнянь й описав їх у праці «Кітаб аль-джебр ва-ль-мукабала», що означає «Коротка книга про відновлення і протиставлення». У той час від'ємні числа вважали «несправжніми», і коли під час розв'язування рівняння в якійсь його частині з'являлося від'ємне число, його потрібно було перенести в другу частину. Цю операцію називали відновленням (аль-джебр), тобто переведенням «несправжніх» (від'ємних) чисел у «справжні» (додатні). За допомогою протиставлення (аль-мукабала) відкидали однакові доданки в обох частинах рівняння.

Мухаммед бен Муса аль-Хорезмі (IX ст.), перський математик, астроном і географ.

У XII ст. твір аль-Хорезмі переклали на латинську мову, зберігши в його назві лише слово «аль-джебр», яке згодом стали вимовляти як *алгебра*.

Поступово сформувалася сучасна алгебра, яка охоплює не лише теорію розв'язування рівнянь, а й способи проведення операцій (дій) з різноманітними об'єктами (зокрема з числами).

22 ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Розглянемо рівняння

$2x = -4$; $-1{,}7x = 5{,}1$; $\frac{2}{3}x = 0$; $0x = 4$.

Ліва частина кожного із цих рівнянь є добутком деякого числа та змінної, а права частина — деяким числом. Такі рівняння називають *лінійними* рівняннями з однією змінною.

Означення. **Рівняння виду $ax = b$, у якому a і b — деякі відомі числа, а x — змінна, називають *лінійним рівнянням з однією змінною*.**

Числа a і b називають *коефіцієнтами* лінійного рівняння.

Коли, розв'язуючи рівняння, виконують певні перетворення, зводячи дане рівняння до більш простого, то в багатьох випадках отим «простим» рівнянням є саме лінійне рівняння.

З'ясуємо, скільки коренів може мати лінійне рівняння. Для цього розглянемо спочатку такі три рівняння:

1) $3x = 2$; 2) $0x = 2$; 3) $0x = 0$.

1) Щоб розв'язати рівняння $3x = 2$, достатньо обидві його частини поділити на 3. Одержимо один корінь $x = \frac{2}{3}$.

2) У рівнянні $0x = 2$ значення лівої частини дорівнює 0 для будь-якого значення x. Права ж частина рівняння відмінна від нуля. Отже, дане рівняння коренів не має.

3) Рівність $0x = 0$ є правильною для будь-якого значення x. Тому коренем рівняння $0x = 0$ є будь-яке число (рівняння має безліч коренів).

У загальному випадку для лінійного рівняння $ax = b$ маємо:

якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{b}{a}$;

якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, то рівняння коренів не має;

якщо $a = 0$ і $b = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число (рівняння має безліч коренів).

Підсумок: кількість коренів лінійного рівняння

Рівняння	Коефіцієнти	Корені
$ax = b$	$a \neq 0$	$\frac{b}{a}$ — єдиний корінь
	$a = 0$ і $b \neq 0$	коренів немає
	$a = 0$ і $b = 0$	коренем є будь-яке число (рівняння має безліч коренів)

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати рівняння $5(2x - 1) = 4x - 23$.

• $10x - 5 = 4x - 23$; $10x - 4x = -23 + 5$; $6x = -18$; $x = -3$.
Відповідь. -3. •

Вправа 2. Розв'язати рівняння $3x - 4 = 3(x - 2)$.

• $3x - 4 = 3x - 6$; $3x - 3x = -6 + 4$; $0x = -2$ (або $0 = -2$).
Відповідь. Коренів немає. •

Вправа 3. Розв'язати рівняння $3x - 2(x - 1) = x + 2$.

• $3x - 2x + 2 = x + 2$; $3x - 2x - x = 2 - 2$; $0x = 0$ (або $0 = 0$).
Відповідь. Коренем є будь-яке число. •

Вправа 4. Розв'язати рівняння $\frac{2x - 1}{18} = \frac{x}{12} + \frac{1}{9}$.

• Помножимо обидві частини рівняння на 36 (36 — найменше спільне кратне знаменників дробів):

$$36 \cdot \frac{2x-1}{18} = 36 \cdot \left(\frac{x}{12} + \frac{1}{9}\right).$$

Далі матимемо:

$2(2x-1) = 3x+4$; $4x-2 = 3x+4$; $4x-3x = 4+2$; $x = 6$.

Відповідь. 6. •

Розв'язуючи рівняння, які зводяться до лінійних, варто дотримуватися таких кроків:

1. Якщо в рівнянні є вирази з дробовими коефіцієнтами, то помножити обидві його частини на найменший спільний знаменник дробів.

2. Розкрити дужки (якщо вони є).

3. Перенести доданки, які містять змінну, в одну частину рівняння (як правило, у ліву), а доданки, які не містять змінної, — у другу частину (у праву).

4. Звести подібні доданки.

5. Поділити обидві частини рівняння на коефіцієнт при змінній, якщо він відмінний від нуля. Якщо ж він дорівнює 0, то рівняння або не має коренів, або його коренем є будь-яке число.

Вправа 5. Розв'язати рівняння $|5x - 3(x+2) + 3| = 3$.

• $|5x - 3x - 6 + 3| = 3$; $|2x - 3| = 3$.

Якщо модуль числа дорівнює 3, то цим числом є -3 або 3. Тому можливі два випадки:

1) $2x - 3 = -3$; $2x = 0$; $x = 0$; 2) $2x - 3 = 3$; $2x = 6$; $x = 3$.

Відповідь. 0; 3. •

Вправа 6. Розв'язати рівняння $2|z-1| - 3 = 5$.

• $2|z-1| = 8$; $|z-1| = 4$;

$z - 1 = -4$ або $z - 1 = 4$; $z = -3$ або $z = 5$.

Відповідь. -3; 5. •

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянням з однією змінною? Наведіть приклади таких рівнянь.
2. Скільки коренів може мати лінійне рівняння з однією змінною?

«Усно

797. Які з наведених рівнянь є лінійними рівняннями?

1) $\frac{2}{9}x = 8$; 2) $4 : x = 2$; 3) $-2,7y = 0$; 4) $\frac{4}{z} = \frac{2}{5}$.

798. Скільки коренів має рівняння:

1) $56y = 64$; 2) $0x = -2$; 3) $8x = 0$; 4) $0y = 0$?

799. Розв'яжіть лінійне рівняння:

1) $6x = 42$; 2) $4x = -12$; 3) $-3y = 6$; 4) $-5z = -45$;
5) $3x = -2$; 6) $0y = -5$; 7) $0x = 0$; 8) $-2x = 0$.

«1 2

800. Розв'яжіть рівняння:

1) $28x = 420$; 2) $36x = -54$; 3) $-1,2x = -7,2$;
4) $-0,04z = 1,4$; 5) $2y = -\frac{2}{3}$; 6) $\frac{4}{15}x = \frac{2}{5}$.

801. Розв'яжіть рівняння:

1) $24x = -192$; 2) $-0,8y = -1,2$; 3) $\frac{5}{8}x = \frac{3}{4}$.

802. Знайдіть корені рівняння:

1) $5x - 3 = 17$; 2) $7x + 32 = 12x + 27$;
3) $4 - 3y = 2y + 22$; 4) $4,5z + 1 = 3z + 2,5$;
5) $-1,2m - 2 = m - 0,9$; 6) $5,4y + 1,5 = -1 + 5,4y$.

803. Знайдіть корені рівняння:

1) $8x = -8 + 4x$; 2) $6x + 2 = 20x - 5$;
3) $2y - 1,8 = -3y + 6,7$; 4) $2,5x + 1 = 2,2 + 3x$.

804. Розв'яжіть рівняння:

1) $6(x - 2) = 2x$; 2) $1 - (3x + 1) = 2x$;
3) $2(x + 5) = 2(x - 4)$; 4) $-3(10 - 2x) = 6x - 30$;
5) $x(x - 2) - x^2 = 4$; 6) $(x + 2)^2 = x^2 - 4x$.

805. Розв'яжіть рівняння:

1) $8x - 7 = 3(x - 4)$; 2) $3(3 - x) = 5 - 3x$;
3) $x(x + 4) - x^2 = -8$; 4) $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 2x$.

806. Функцію задано формулою $y = -2x + 3$. Знайдіть значення аргументу, для якого значення функції дорівнює 21.

807. Функцію задано формулою $y = 3x - 2$. Знайдіть значення аргументу, для якого значення функції дорівнює 25.

Інтерактивне завдання 23
Лінійні рівняння з однією змінною

«3»

808. Розв'яжіть рівняння:

1) $5(3x - 6) + 4(5 - 2x) = 5x$;
2) $-0{,}4(2 - x) = 0{,}2(x - 3) + 1$;
3) $5(4(x + 1) - 9x) = 25x$;
4) $(x + 2)(x - 1) = x(x + 3)$;
5) $(3x - 1)^2 = 3x(3x + 1)$;
6) $(2x + 7)(2x - 7) = x(4x + 5)$.

809. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(x - 11) - 5(7 - 2x) = -3$;
2) $0{,}5x = 0{,}4(2x - 5) + 1{,}7$;
3) $2(5x - 8(x - 1)) = 8(x + 9)$;
4) $(x + 2)^2 = (x - 4)(x + 4)$.

810. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = 4x - 5$ та $y = 1 - 2x$.

811. Для яких значень x функції $y = 2x + 3$ й $y = -3 + 7x$ набувають того самого значення?

812. Знайдіть значення x, для яких значення виразу $25x - 30$ менше від значення виразу $15x + 15$ на 5.

813. Знайдіть значення x, для яких значення виразу $4x + 6$ більше за значення виразу $6x - 15$ на 3.

814. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x + 1}{24} = \frac{1 - x}{8}$;
2) $\frac{5}{6} - \frac{3}{8}x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}$;
3) $\frac{x - 1}{5} + \frac{x - 2}{3} = 2 - \frac{x - 2}{15}$;
4) $\frac{2}{5}\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{5}x + 4\frac{1}{3}$.

815. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x - 1}{16} = \frac{2x + 1}{8}$;
2) $\frac{7}{12} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$;
3) $\frac{x}{2} - \frac{x + 3}{3} - \frac{x - 3}{4} = \frac{x}{6}$.

816. Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x - 7| = 11$;
2) $|15 - x| = 5$;
3) $|x - 2| - 4 = 5$;
4) $3|x + 1| + 5 = 11$.

817. Розв'яжіть рівняння:

1) $|4x - 5| = 7$;
2) $2|x - 3| - 1 = 3$.

«4

818. Розв'яжіть рівняння:

1) $|2(x - 3) - (x + 4)| = 2$;
2) $6 - |5 - 4x| = 1$;
3) $|x - 1| - 4(1 - |x - 1|) = -1$.

819. Розв'яжіть рівняння:

1) $|5x - 4(2x + 3)| = 6$;
2) $3(2|x - 4| - 9) = -21$.

Краса тішить розум, серце, душу людини. Краса ж науки полягає у відкритті нових істин, у виявленні стрункості та ладу там, де ще недавно панував хаос. І саме математика вносить цю красу в будь-яку науку.

*Ніна Вірченко**

820. Знайдіть усі значення b, для яких будь-яке число є коренем рівняння:

1) $(b - 3)x = b^2 - 9$;
2) $(b^2 - 9)x = b + 3$.

821. Знайдіть усі значення a, для яких не має коренів рівняння:

1) $(2a + 5)x = -2$;
2) $(a^2 - 1)x = a + 1$.

822. Знайдіть усі значення k, для яких рівняння $kx + 3 = 5x - k$ має єдиний корінь.

Вправи для повторення

823. Обчисліть:

1) $\left(3\frac{3}{8} - 2\frac{5}{12}\right) \cdot 1\frac{2}{5}$;
2) $1{,}2 \cdot (-1{,}56) + 2{,}56 : \frac{5}{6}$.

824. До натурального числа n додали 64 й одержали втричі більше число. Знайдіть n.

825. З міст A і B одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі й зустрілися через 1,5 год. Швидкість одного автомобіля дорівнює a км/год, а другого — на 10 км/год більша. Запишіть у вигляді виразу відстань між містами.

826. Швидкість катера в стоячій воді (ще кажуть: власна швидкість катера) дорівнює a км/год, а швидкість течії річки — 2 км/год. Запишіть у вигляді виразу шлях, який пройде катер, рухаючись 2 год за течією річки і 3 год — проти течії.

* Ніна Вірченко (нар. 1930) — українська науковиця, докторка фізико-математичних наук.

Поміркуйте

827. У футбольному турнірі взяли участь 6 команд. Команда, яка посіла перше місце, забила м'ячів більше, ніж будь-яка інша команда, а всі інші разом забили 26 м'ячів. Скільки щонайменше м'ячів могли забити на цьому турнірі всі команди разом?

23 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розв'язуючи задачі за допомогою рівнянь, здебільшого дотримуються такої схеми:

1) вибирають невідоме й позначають його буквою x (або якою-небудь іншою буквою);

2) використовуючи умову задачі, складають рівняння;

3) розв'язують рівняння й відповідають на поставлені в задачі запитання.

Розглянемо приклади таких задач.

Задача 1. У квітковому магазині в продажу є троянди червоного, рожевого та білого кольорів — усього 120 квітів. Червоних троянд на 40 більше, ніж рожевих, і на 50 більше, ніж білих. Скільки троянд кожного кольору є в магазині?

Розв'язання. Нехай у магазині є x червоних троянд. Тоді рожевих троянд є $x - 40$, а білих — $x - 50$. Усіх троянд є $x + (x - 40) + (x - 50)$, що за умовою задачі дорівнює 120. Маємо рівняння:

$$x + (x - 40) + (x - 50) = 120.$$

Розв'яжемо це рівняння: $3x - 90 = 120$; $3x = 210$; $x = 70$.

Отже, у магазині є 70 червоних троянд, рожевих — $70 - 40 = 30$, білих — $70 - 50 = 20$.

Відповідь. 70 червоних троянд; 30 — рожевих; 20 — білих. ●

Задача 2. З міста A до міста B одночасно виїхали автобус та автомобіль. Коли через 2,5 год автомобіль прибув у місто B, автобусу до цього міста залишалося проїхати ще 35 км. Знайти відстань між містами, якщо швидкість автомобіля в 1,2 раза більша за швидкість автобуса.

Розв'язання. Нехай швидкість автобуса дорівнює x км/год, тоді швидкість автомобіля — $1{,}2x$ км/год (в 1,2 раза більша).

За 2,5 год автобус проїхав $2{,}5x$ км, а автомобіль — $1{,}2x \cdot 2{,}5 = 3x$ (км). Зазначимо, що $3x$ км — це відстань між містами.

Автомобіль проїхав на 35 км більше, ніж автобус, тому різниця шляхів $3x$ км і $2{,}5x$ км дорівнює 35 км. Маємо рівняння:

$$3x - 2{,}5x = 35.$$

Розв'яжемо це рівняння: $0{,}5x = 35$; $x = 70$.

Отже, відстань між містами дорівнює: $3x = 3 \cdot 70 = 210$ (км).

Відповідь. 210 км. •

Звернемо увагу, що в розв'язанні задачі 1 ми позначили через x одну з шуканих величин (кількість червоних троянд). У задачі 2 шуканою величиною є відстань між містами. Якщо цю величину позначити через x км, то при складанні рівняння доведеться провести доволі складні міркування. Ми ж через x км/год позначили невідому швидкість автобуса, виразили через x шляхи, які проїхали автомобіль та автобус, і склали рівняння, знаючи, що різниця шляхів дорівнює 35 км.

Отже, позначати через x (або якою-небудь іншою буквою) бажано ту невідому величину, через яку легше виразити величини, значення яких можна прирівняти.

Рівняння як математична модель реальних процесів. Опишемо мовою математики задачу 2.

Швидкість автобуса в цій задачі ми позначили через x км/год. Далі мовою математики записали шляхи, які проїхали автобус та автомобіль, — $2{,}5x$ км та $3x$ км.

За умовою задачі автомобіль проїхав на 35 км більше, ніж автобус, що «в перекладі на мову математики» дає рівняння

$$3x - 2{,}5x = 35.$$

Одержане рівняння і є математичною моделлю задачі на рух автобуса й автомобіля. Побудувавши математичну модель, ми звели задачу на рух до математичної задачі — розв'язати рівняння.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. За три дні фермер відправив на ринок 170 кг полуниць, до того ж першого дня — на 20 % менше, ніж другого, а третього — на 14 кг більше, ніж першого. Скільки кілограмів полуниць відправляв фермер кожного дня?

• Нехай другого дня фермер відправив на ринок x кг полуниць.

Першого дня він відправив на 20 % менше, ніж другого, тобто 80 % або 0,8 від x кг. Отже, першого дня фермер відправив $0{,}8x$ кг полуниць.

Третього дня фермер відправив $(0{,}8x + 14)$ кг полуниць (на 14 кг більше, ніж першого).

Усього фермер відправив 170 кг полуниць, тому маємо рівняння:

$$0{,}8x + x + (0{,}8x + 14) = 170.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$2{,}6x + 14 = 170; \qquad 2{,}6x = 156; \quad x = 60.$$

Отже, другого дня фермер відправив на ринок 60 кг полуниць, першого — $0{,}8 \cdot 60 = 48$ (кг), третього — $48 + 14 = 62$ (кг).

Відповідь. 48 кг; 60 кг; 62 кг. •

Вправа 2. Зі Львова до Києва вийшов потяг. Через 1 год назустріч йому з Києва вийшов другий потяг, швидкість якого на 10 км/год більша за швидкість першого. Другий потяг через 3 год руху зустрівся із першим, пройшовши на 40 км менше, ніж перший. Знайти швидкості потягів.

• Нехай швидкість першого потяга дорівнює x км/год. За умовою задачі складемо таблицю:

Потяги	Швидкість (км/год)	Час руху (год)	Шлях (км)
Перший	x	4	$4x$
Другий	$x + 10$	3	$3(x + 10)$

Перший потяг пройшов на 40 км більше, тому маємо рівняння:

$$4x - 3(x + 10) = 40.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$4x - 3x - 30 = 40; \quad x - 30 = 40; \quad x = 70.$$

Отже, швидкість першого потяга дорівнює 70 км/год, а другого — $70 + 10 = 80$ (км/год).

Відповідь. 70 км/год; 80 км/год. ●

1. Яких кроків потрібно дотримуватися, розв'язуючи задачу за допомогою рівнянь?

Усно

828. За дві однакові ручки й лінійку Валентина заплатила 28 грн. Знайдіть ціну ручки, якщо вона на 4 грн менша від ціни лінійки.

Нехай ціна ручки дорівнює x грн. Яке рівняння відповідає умові задачі?

1) $x + (x - 4) = 28$;
2) $x + (x + 4) = 28$;
3) $2x + (x - 4) = 28$;
4) $2x + (x + 4) = 28$.

1 2

829. У двох відділеннях фірми працює 58 осіб, до того ж у першому — на 12 осіб більше, ніж у другому. Скільки осіб працює в першому відділенні?

830. Два оператори набрали на комп'ютері 280 сторінок тексту, до того ж перший — на 40 сторінок менше, ніж другий. Скільки сторінок набрав перший оператор?

831. Складіть задачу за рисунком 45 і розв'яжіть її.

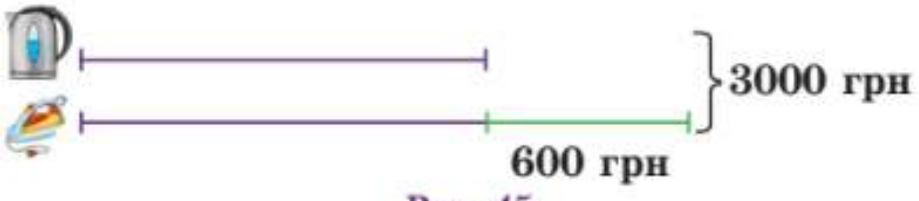


Рис. 45

832. У двох комп'ютерних класах є разом 33 комп'ютери, до того ж в одному класі їх у 1,2 раза більше, ніж у другому. Скільки комп'ютерів у кожному класі?

833. У парку росте листяних дерев у 5 разів більше, ніж хвойних. Скільки листяних і скільки хвойних дерев росте в парку, якщо їх загальна кількість дорівнює 240?

834. Тополя з травня до вересеня поглинає вуглекислого газу на 30 кг більше, або в 4 рази більше, ніж сосна. Скільки кілограмів вуглекислого газу поглинає за цей період кожне дерево?

835. За період з 1960 до 2000 року кількість станцій Київського метрополітену зросла у 8 разів, або на 35 станцій. Скільки станцій було на Київському метрополітені в 1960 році?

Станція метро «Університет»

Станція метро «Кловська»

Станція метро «Дорогожичі»

836. Надрукувати всі сторінки текстового документа перший принтер може за 10 хв, а другий — за 8 хв. Скільки сторінок друкує за 1 хв перший принтер, якщо другий за 1 хв друкує на 4 сторінки більше?

837. Перший автомобіль подолав шлях між двома містами за 5 год, а другий — за 6 год. Знайдіть швидкість другого автомобіля, якщо вона на 15 км/год менша від швидкості першого.

838. За три різні футболки заплатили 180 грн. Перша футболка дешевша від другої на 20 грн, а від третьої — на 10 грн. Скільки гривень коштує кожна футболка?

839. На трьох ділянках парку посадили 85 саджанців, до того ж на другій і на третій ділянках — відповідно на 15 і на 10 саджанців більше, ніж на першій. Скільки саджанців посадили на кожній ділянці?

Інтерактивне завдання 24
Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь

840. Ірина живе на відстані 500 м від школи, а Максим — на відстані 800 м. Одного ранку вони одночасно вийшли до школи, Ірина йшла зі швидкістю 60 м/хв, а Максим — 80 м/хв. Через скільки хвилин руху Ірина була вдвічі ближче до школи, ніж Максим?

841. Висота акації 4 м, а тополі — 22 м. За 1 рік акація виростає на 1,5 м, а тополя — на 2,5 м. Через скільки років тополя буде втричі вищою за акацію?

842. У першому пакеті було на 4 яблука більше, ніж у другому. Після того як з першого пакета взяли 8 яблук, а з другого — 6, у першому пакеті яблук стало в 1,2 раза більше, ніж у другому. Скільки яблук було в кожному пакеті спочатку?

843. Батько втричі старший за дочку, а 6 років тому він був старший за неї в 5 разів. Скільки зараз років батькові та скільки — дочці?

844. У книжковому магазині на двох полицях стояло 80 книжок. Після того як 0,2 усіх книжок, що були на першій полиці, переставили на другу, на обох полицях книжок стало порівну. Скільки книжок стояло на кожній полиці спочатку?

845. У господарстві є 35 домашніх птахів — курей, качок та індиків. Відомо, що качок на 5 більше, ніж індиків, але вдвічі менше, ніж курей. Скільки курей є в господарстві?

846. Зібрані 35 кг винограду розклали в три ящики. Виявилося, що в першому ящику винограду на 3 кг більше, ніж у другому, а в другому — на 2 кг менше, ніж у третьому. Скільки кілограмів винограду поклали в третій ящик?

847. Тролейбусні зупинки A, B, C і D розташовані на прямолінійній ділянці дороги в послідовності, указаній на рисунку 46. Знайдіть відстань між зупинками A і B, якщо вона в 1,2 раза більша за відстань між зупинками C і D, але на 70 м менша від відстані між зупинками B і C.

Рис. 46

848. Катер пройшов шлях між двома пристанями за течією річки за 1,2 год, а зворотний шлях — за 1,5 год. Знайдіть відстань між пристанями, якщо швидкість катера в стоячій воді дорівнює 27 км/год.

849. Шлях від пристані A до пристані B за течією річки теплохід пройшов за 4 год, а від B до A — за 4,5 год. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

850. За два дні автомобіль витратив 27 л бензину, до того ж за другий день — на 20 % менше, ніж за перший. Скільки літрів бензину витрачав автомобіль кожного дня?

851. Водопровідну трубу завдовжки 3,6 м майстер розпиляв на дві частини так, що перша частина виявилася на 25 % довшою за другу. Знайдіть довжину кожної частини труби.

852. Вартість пакета акцій фірми зросла на 400 грн, або на 5 %. Знайдіть початкову вартість пакета акцій.

«4

853. З пакета взяли 3 яблука, а згодом — $\frac{1}{3}$ решти яблук. Після цього в пакеті залишилася половина початкової кількості яблук. Скільки яблук було в пакеті спочатку?

854. Після того як з банківської картки зняли 0,2 усіх грошей, а згодом — $\frac{1}{4}$ залишку, на ній залишилося 4500 грн. Скільки гривень було на картці спочатку?

855. Двома автоматами мають розфасувати 900 кг борошна. За 1 хв перший автомат розфасовує 40 кг борошна, а другий — 35 кг.

1) Скільки кілограмів борошна потрібно виділити кожному автомату, щоб, увімкнувши їх одночасно, завершити розфасування якнайшвидше?

2) За скільки щонайменше хвилин автомати можуть розфасувати все борошно?

856. Зі Львова до Одеси, відстань між якими 970 км, виїхав автомобіль, а через 1,5 год назустріч йому з Одеси виїхав другий автомобіль, який долає за годину на 10 км більше, ніж перший. Другий автомобіль через 5 год руху зустрів перший. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

857. З міста A до міста B вийшов потяг, а через 2 год — другий потяг. Коли через 7 год руху перший потяг прибув до міста B, другому до цього міста залишалося пройти ще 110 км. Знайдіть відстань між містами, якщо швидкість першого потяга на 10 км/год менша від швидкості другого.

858. Бабуся має внука і внучку. Відомо, що внучка молодша від внука на 2 роки, бабуся старша за внука в 4 рази, а рік тому вона була старшою за внучку в 5 разів. Скільки років бабусі?

859. Сплав міді, цинку й олова містить 32 % олова, міді — на 40 г менше, ніж олова, а цинку — на 100 г більше, ніж міді. Знайдіть масу сплаву.

860. Три автомати виготовили партію деталей. Перший автомат виготовив 30 % усіх деталей, другий — на 20 деталей більше, ніж перший, і на 10 деталей менше, ніж третій. Скільки всього деталей виготовили автомати?

861. До 12-відсоткового розчину солі долили 200 г води й одержали 10-відсотковий розчин. Знайдіть масу початкового розчину.

Вправи для повторення

862. Знайдіть значення виразу:

1) $25x^2 - 10xy + y^2$, якщо $x = 1{,}2$; $y = 7$;

2) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) + a(1 - a^3)$, якщо $a = 0{,}95$.

863. Доберіть такі два числа x та y, для яких є правильною рівність:

1) $2x + 5y = 27$; 2) $3x - 7y = 8$.

864. Запишіть замість зірочок такі цифри, щоб число 3*4* ділилося на 9 і на 5. Розгляньте всі можливі випадки.

865. Кількість зошитів, які купила Христина, відноситься до кількості зошитів, які купив Олег, як 4 : 5. Чи може загальна кількість цих зошитів дорівнювати: 1) 15; 2) 18?

Поміркуйте

866. У кутовій клітинці дошки розміру 5×5 стоїть фішка. За один хід фішку можна переставити в сусідню по стороні клітинку. Чи можна за допомогою таких ходів обійти всі клітинки дошки, побувавши на кожній лише один раз, і повернутися в початкову клітинку?

Завдання для повторення § 5

867. Доведіть, що число 4 є коренем рівняння:
1) $3x - 8 = x$; 2) $x(x - 5) = x - 8$.

868. Яке з чисел -3; -2; $-1{,}2$; $1{,}8$ є коренем рівняння
$$5x - 3 = 10x + 3?$$

869. Скільки коренів має рівняння:
1) $\frac{1}{3}x = 12$; 2) $\left(\frac{3}{5} - 0{,}6\right)x = 1$; 3) $0(x + 3) = 0$?

870. Розв'яжіть рівняння:
1) $2x - 3 = 5(x - 3)$;
2) $12(x - 1) = 24(x + 1)$;
3) $-6(2x + 5) + 2(x + 3) = 2$;
4) $0{,}6(2x - 3) - 1{,}5(x + 4) = -4{,}2x$;
5) $\frac{5}{36} + \frac{1}{18}x = \frac{7}{36}x - \frac{5}{9}$; 6) $\frac{3 - x}{12} - \frac{5 + x}{6} = \frac{x}{3}$.

871. Знайдіть корені рівняння:
1) $x(2x - 1) - 2x(x + 2) = 10$;
2) $(x + 3)(2x + 3) = (x - 1)(2x - 1)$;
3) $(x + 4)^2 = x^2 + 3x$;
4) $(3x - 1)(3x + 1) = 3(3x^2 - x)$;
5) $|x - 2| = 2$; 6) $3|2x + 1| - 7 = 2$.

872. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = -2x + 5$ та $y = 2x + 1$.

873. Знайдіть значення a, для якого коренем рівняння $ax + 2 = a$ є число 3.

874. Чи існує значення k, для якого рівняння $(k - 2)x + 2 = k$ не має коренів?

875. За книжку й набір зошитів Назар заплатив 200 грн. Знайдіть ціну книжки, якщо вона на 40 грн дешевша від ціни набору зошитів.

876. Брат старший за сестру в 1,5 раза, або на 4 роки. Скільки років братові й скільки — сестрі?

877. Шлях між двома містами автомобіль подолав за 0,5 год, а велосипедист — за 2 год. Знайдіть швидкість велосипедиста, якщо вона на 60 км/год менша від швидкості автомобіля.

878. За три дні майстер виготовив 78 деталей. За третій день він виготовив на 7 деталей більше, ніж за перший, і в 1,2 раза більше, ніж за другий. Скільки деталей виготовляв майстер кожного дня?

879. У трьох ящиках є помідори: у першому — 35 % усіх помідорів, у другому — на 3 кг менше, ніж у першому, а в третьому — 12 кг. Скільки кілограмів помідорів у трьох ящиках разом?

880. Ціну на товар знизили на 400 грн за два рази: перша знижка була на 15 %, а друга — на 20 %. Знайдіть початкову ціну товару.

Інтерактивне завдання для самоперевірки 5
Лінійні рівняння з однією змінною

Завдання для самоперевірки № 5

Початковий рівень

1. Яке з наведених чисел є коренем рівняння $4x + 2 = 10$?
А -2 **Б** 1 **В** 2 **Г** 3

2. Яке з наведених рівнянь не є лінійним рівнянням?
А $2y = 1$ **Б** $-2x = 0$ **В** $0z = 1$ **Г** $2 : x = 3$

3. Знайдіть корінь рівняння $0{,}5x = 4$.
А 20 **Б** 8 **В** 2 **Г** 0,125

4. Розв'яжіть рівняння $7y - 3 = 3y + 5$.
А -2 **Б** 1 **В** 2 **Г** 3

5. Яке з наведених тверджень є правильним?

А Рівняння $0x = 4$ має один корінь

Б Коренем рівняння $0x = 4$ є будь-яке число

В Рівняння $4x = 0$ коренів не має

Г Рівняння $0x = 0$ має безліч коренів

6. Сума двох чисел дорівнює 6. Знайти ці числа, якщо перше число в 4 рази більше за друге.

Нехай друге число дорівнює x. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А $6x + x = 4$ **Б** $6x - x = 4$

В $4x + x = 6$ **Г** $4x - x = 6$

Середній рівень

7. Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та кількостями їхніх коренів (А–Д).

1 $2(2x - 1) = 4x - 3$	**А** 1 корінь
2 $2(2x - 1) = 4x - 2$	**Б** 2 корені
3 $2(2x - 1) = 2x - 1$	**В** 3 корені
	Г Безліч коренів
	Д Коренів немає

8. Розв'яжіть рівняння $2(3 - x) = 9 - 4x$.

А $-1{,}5$ **Б** $-0{,}5$ **В** $0{,}5$ **Г** $1{,}5$

9. Знайдіть значення x, для якого значення виразу $-2x - 5$ дорівнює 3.

А -11 **Б** -4 **В** 1 **Г** 4

10. За книжку й альбом заплатили 125 грн. Знайдіть ціну книжки, якщо вона на 45 грн дорожча за альбом.

А 85 грн **Б** 80 грн **В** 75 грн **Г** 70 грн

Достатній рівень

11. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = 3x - 8$ та $y = 7 - 2x$.

12. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x + 1)^2 = (2x - 3)(2x + 3)$;

2) $\frac{2x - 3}{20} = \frac{x + 8}{40} - \frac{x}{10}$.

13. У двох сувоях разом є 54 м тканини, до того ж у першому — на 70 % більше, ніж у другому. Скільки метрів тканини в кожному сувої?

14. Зібрані 37 кг слив розклали в три ящики. Виявилося, що в першому ящику слив на 2 кг менше, ніж у другому, а в другому — на 3 кг більше, ніж у третьому. Скільки кілограмів слив поклали в кожний ящик?

Високий рівень

15. Розв'яжіть рівняння $|2x - 3(1 + 2x)| - 5 = 4$.

16. Знайдіть значення a, для якого рівняння $2ax + 5 = a - 2x$ не має коренів.

17. Сплав міді й олова має масу 10 кг і містить 50 % міді. Скільки кілограмів олова потрібно додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав, який містив би 40 % міді?

18. Екскаватор вирив траншею за три дні. Першого дня він вирив 30 % усієї траншеї, другого — в 1,2 раза більше, ніж першого, а третього — 170 м. Знайдіть довжину траншеї.

§ 6. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

24 РІВНЯННЯ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

1. Поняття рівняння із двома змінними. Розглянемо приклад.

Сувій тканини завдовжки 6 м розрізали на дві частини. Якщо довжину однієї частини позначити через x м, а другої — через y м, то матимемо рівняння

$$x + y = 6,$$

яке містить дві змінні x та y. Таке рівняння називають *рівнянням із двома змінними*.

Рівняння

$3x - 2y = 1$, $0x + 4y = 5$, $x^2 + y^2 = 9$, $xy = 10$

також є рівняннями із двома змінними. З них два перші мають вигляд $ax + by = c$, де a, b і c — числа. Такі рівняння називають *лінійними рівняннями із двома змінними*.

Означення. **Рівняння виду $ax + by = c$, у якому a, b і c — деякі відомі числа (коефіцієнти рівняння), а x та y — змінні, називають *лінійним рівнянням із двома змінними*.**

Коефіцієнти a та b називають ще коефіцієнтами при змінних, а коефіцієнт c — вільним членом.

2. Розв'язки рівняння із двома змінними. Розглянемо рівняння

$$2x + y = 8.$$

Якщо в рівнянні змінним x та y надати певних значень, то матимемо числову рівність, яка може бути правильною або неправильною. Наприклад:

$x = 2, y = 4$ → $2 \cdot 2 + 4 = 8$ — рівність є правильною

$x = 3, y = 1$ → $2 \cdot 3 + 1 = 8$ — рівність є неправильною

Кажуть, що пара значень змінних $x = 2$, $y = 4$ є розв'язком рівняння $2x + y = 8$, а пара значень $x = 3$, $y = 1$ не є його розв'язком.

Означення. ***Розв'язком*** **рівняння із двома змінними називають пару значень змінних, для яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність.**

Розв'язками рівняння $2x + y = 8$ є й такі пари чисел:

$x = 4,\ y = 0;$ $x = 1{,}5,\ y = 5;$ $x = 10,\ y = -12.$

Скорочено ці розв'язки записують так: (4; 0); (1,5; 5); (10; −12). У цих парах чисел на першому місці пишуть значення змінної x, а на другому — значення змінної y. Це пов'язано з тим, що змінну x умовно вважають першою змінною, а змінну y — другою.

Щоб знайти розв'язок рівняння із двома змінними, можна підставити в рівняння деяке значення однієї змінної і, розв'язавши одержане рівняння з однією змінною, знайти відповідне значення другої змінної.

Для прикладу знайдемо ще кілька розв'язків рівняння $2x + y = 8$.

Нехай $x = 7$, тоді: $2 \cdot 7 + y = 8;\ \ 14 + y = 8;\ \ y = -6.$

Нехай $x = -3$, тоді: $2 \cdot (-3) + y = 8;\ \ -6 + y = 8;\ \ y = 14.$

Ми знайшли два розв'язки (7; −6) і (−3; 14). Надаючи змінній x інших значень, одержимо інші розв'язки рівняння. Рівняння $2x + y = 8$ має безліч розв'язків.

Рівняння $0x + 0y = 0$ також має безліч розв'язків — його розв'язком є будь-яка пара чисел $(x; y)$. Рівняння $0x + 0y = 8$ розв'язків, очевидно, не має.

Узагалі, лінійне рівняння із двома змінними або має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку.

Якщо рівняння із двома змінними не є лінійним, то воно може мати й скінченну кількість розв'язків. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 = 0$ має один розв'язок — пару чисел (0; 0).

3. Властивості рівнянь із двома змінними. Властивості рівнянь із двома змінними такі ж, як і рівнянь з однією змінною, а саме:

Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на те саме, відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, яке має такі самі розв'язки, що й дане.

Якщо деякий доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, яке має такі самі розв'язки, що й дане.

Розглянемо рівняння

$$3x + 2y = 8.$$

Використовуючи властивості рівнянь, виразимо з цього рівняння одну змінну через іншу, наприклад, y через x. Для цього перенесемо доданок $3x$ у праву частину, змінивши його знак на протилежний:

$$2y = -3x + 8.$$

Поділимо обидві частини одержаного рівняння на 2:

$$y = -1{,}5x + 4.$$

Користуючись формулою $y = -1{,}5x + 4$, можна знайти скільки завгодно розв'язків даного рівняння. Для цього достатньо взяти довільне значення x та обчислити відповідне значення y. Пари деяких відповідних значень x та y подамо у вигляді таблиці.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = -1{,}5x + 4$	7	$5{,}5$	4	$2{,}5$	1	$-0{,}5$

Пари чисел кожного стовпчика — розв'язки рівняння $3x + 2y = 8$.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Знайти значення a, для якого одним із розв'язків рівняння $3x + ay = -1$ є пара чисел $(-1; 2)$.

• Пара чисел $(-1; 2)$ буде розв'язком рівняння $3x + ay = -1$, якщо виконуватиметься рівність $3 \cdot (-1) + a \cdot 2 = -1$. Розв'яжемо одержане рівняння зі змінною a:

$$-3 + 2a = -1; \quad 2a = -1 + 3; \quad 2a = 2; \quad a = 1.$$

Відповідь. $a = 1$. •

Вправа 2. Знайти всі розв'язки рівняння:
1) $5x + y = 3$; 2) $(x + 2)^2 + |y - 4| = 0$.

• 1) Виразимо з рівняння змінну y через змінну x:

$$y = 3 - 5x.$$

Розв'язками даного рівняння є пари чисел $(x; y)$, у яких x та y пов'язані формулою $y = 3 - 5x$. Тому всі розв'язки можна записати у вигляді $(x; 3 - 5x)$, де x — будь-яке число.

Відповідь. $(x; 3 - 5x)$, де x — будь-яке число.

2) Оскільки $(x + 2)^2 \geq 0$ й $|y - 4| \geq 0$ для будь-яких значень x та y, то рівність $(x + 2)^2 + |y - 4| = 0$ буде правильною лише тоді, коли $(x + 2)^2 = 0$ й $|y - 4| = 0$, звідки $x = -2$, $y = 4$.

Відповідь. $(-2; 4)$ ●

1. Наведіть приклади рівнянь із двома змінними.
2. Яке рівняння називають лінійним рівнянням із двома змінними?
3. Що називають розв'язком рівняння із двома змінними?
4. Скільки розв'язків може мати лінійне рівняння із двома змінними?

Усно

881. Серед наведених рівнянь укажіть лінійні рівняння із двома змінними:

1) $xy = 3$; 2) $x + 2y = 7$; 3) $x + y^2 = 4$;
4) $x - y = 0$; 5) $12x + xy = 0$; 6) $0x - 2y = 3$;
7) $3x + 0y = 0$; 8) $0x + 0y = 0$; 9) $0x + 0y = 5$.

882. Чи є розв'язком рівняння $2x - y = 3$ пара чисел:

1) $x = 2$, $y = 1$; 2) $x = 1$, $y = 2$; 3) $(4; 5)$?

883. Укажіть кілька розв'язків рівняння: 1) $x + y = 0$; 2) $xy = 0$.

1 2

884. Які з пар чисел $(2; 2)$, $(1; 3)$, $(1; 3{,}5)$, $(4; -1)$, $\left(\frac{2}{3}; 4\right)$ є розв'язками рівняння $3x + 2y = 10$?

885. Які з пар чисел $(2; 2)$, $(-1; -2)$, $(1; 1)$, $\left(1; \frac{2}{3}\right)$ є розв'язками рівняння $4x - 3y = 2$?

886. Знайдіть які-небудь два розв'язки рівняння:

1) $2x + 3y = 8$; 2) $x - 3y = -1$; 3) $x - y^2 = 2$.

887. Знайдіть які-небудь два розв'язки рівняння:

1) $x + 2y = 7$; 2) $3x - y = 2$; 3) $x^2 + y = 5$.

888. Складіть яке-небудь лінійне рівняння, розв'язком якого є пара чисел: 1) $x = 1$, $y = 3$; 2) $(-2, 1)$.

889. Складіть яке-небудь лінійне рівняння, розв'язком якого є пара чисел: 1) $x = 2$, $y = 1$; 2) $(2, -2)$.

890. Виразіть змінну y через змінну x з рівняння:
1) $2x + y = -3$; 2) $-6x + 2y = 1$; 3) $3x - 2y = 4$.

891. Виразіть змінну x через змінну y з рівняння:
1) $x - 3y = 4$; 2) $2x + 4y = 5$; 3) $-2x + 5y = 8$.

Інтерактивне завдання 25
Рівняння із двома змінними

3

892. Складіть рівняння із двома змінними за наведеною умовою:
1) Перший майстер виготовляє за 1 год x деталей, другий — y деталей, а обидва за 8 год разом — 96 деталей.
2) У малій коробці є x олівців, у великій — y олівців, а в 6 малих коробках на 8 олівців більше, ніж у 2 великих.
3) Швидкість теплохода дорівнює x км/год, а швидкість течії річки — y км/год; за 1,5 год теплохід пройшов проти течії річки 48 км.

893. Складіть рівняння із двома змінними за наведеною умовою:
1) Довжина кімнати дорівнює x м, ширина — y м, а периметр — 24 м.
2) Швидкість першого автомобіля дорівнює x км/год, а другого — y км/год; за 3 год перший автомобіль проїхав на 90 км більше, ніж другий за 2 год.

894. Виразіть із рівняння змінну x через змінну y і знайдіть які-небудь три розв'язки цього рівняння:
1) $4x + 2y = 15$; 2) $-5x + 2y = 3$; 3) $0{,}2x - 1{,}6y = 2$.

895. Виразіть із рівняння змінну y через змінну x і знайдіть які-небудь два розв'язки цього рівняння:
1) $-2x + 4y = 5$; 2) $3x - 0{,}5y = 1{,}5$.

896. Знайдіть розв'язок рівняння $3x + 5y = 16$, який складається із двох однакових чисел.

897. Знайдіть значення m, для якого пара чисел $(m; 2)$ є розв'язком рівняння $3x - 4y = -2$.

898. Знайдіть значення p, для якого пара чисел $(-5; p)$ є розв'язком рівняння $2x + 5y = 15$.

899. Для яких значень a пара чисел $(2; 4)$ є розв'язком рівняння:
1) $ax + 3y = 10$; 2) $x^2 + y^2 = axy$?

900. Для яких значень b пара чисел $(1; 2)$ є розв'язком рівняння:
1) $2x + by = 12$; 2) $x^2 + bxy + y^2 = 1$?

«4

901. Знайдіть усі розв'язки рівняння:
1) $2x - 5y = 10$; 2) $3x - 0y = 9$;
3) $|x + 5| + |y - 5| = 0$; 4) $(x - 1)^2 + (2y + 3)^2 = 0$;
5) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$; 6) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$.

902. Знайдіть усі розв'язки рівняння:
1) $3x + 2y = 6$; 2) $0x - 2y = 4$;
3) $|x - 4| + (y + 1)^2 = 0$; 4) $x^2 + y^2 - 8y + 16 = 0$.

903. У пекарні 57 тістечок розклали в малі та великі коробки. У кожну малу коробку клали по 5 тістечок, а в кожну велику — по 9. Скільки використали малих коробок і скільки великих?

904. Знайдіть усі значення a, для яких одним із розв'язків рівняння $(a + 1)^2x - (a - 1)^2y = 5$ є пара чисел $(2; -3)$.

905. Знайдіть усі значення b, для яких одним із розв'язків рівняння $(2b - 3)x - (3b - 2)y = 4b$ є пара чисел $(3; 1)$.

Вправи для повторення

906. Побудуйте графік функції:
1) $y = 1{,}5x - 2$; 2) $y = -x + 1$.

907. На координатній площині позначте точки $A(-2; 2)$ та $B(4; -1)$. Проведіть пряму AB і знайдіть координати точок її перетину з осями координат.

908. У січні підприємство випустило 8000 одиниць продукції, у лютому — на 3,75 % менше, ніж у січні, а в березні —

на 4 % більше, ніж у лютому. Скільки одиниць продукції випустило підприємство в березні?

909. Зріст Михайла 150 см, а Тараса — 156 см. На скільки відсотків зріст Тараса більший за зріст Михайла?

Поміркуйте

910. Ромашка має 18 пелюсток. Мирослава, а за нею Ганна по черзі відривають від ромашки або одну пелюстку, або дві пелюстки, що ростуть поруч. Хто відірве останню пелюстку — той переможець. Хто з дівчат може забезпечити собі перемогу?

25 ГРАФІК ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

Розглянемо рівняння

$$3x - 2y = 2.$$

Розв'язками цього рівняння є, наприклад, пари чисел (2; 2), (4; 5), (0; −1). Цим розв'язкам на координатній площині відповідають точки з координатами (2; 2), (4; 5) і (0; −1). Якщо на координатній площині позначити всі точки, координати яких є розв'язками рівняння $3x - 2y = 2$, то одержимо *графік* цього рівняння.

Означення. ***Графіком рівняння із двома змінними*** **називають фігуру, утворену всіма точками координатної площини, координати яких є розв'язками даного рівняння.**

Щоб з'ясувати, що є графіком рівняння $3x - 2y = 2$, виразимо з нього змінну y через змінну x:

$$-2y = -3x + 2; \quad y = 1{,}5x - 1.$$

Формулою $y = 1{,}5x - 1$ задають лінійну функцію, графіком якої є пряма. Знайдемо координати двох точок графіка:

якщо $x = 0$, то $y = 1{,}5 \cdot 0 - 1 = -1$;

якщо $x = 2$, то $y = 1{,}5 \cdot 2 - 1 = 2$.

Провівши через точки (0; −1) і (2; 2) пряму (рис. 47), одержимо графік функції $y = 1{,}5x - 1$. Ця пряма є також і графіком рівняння $3x - 2y = 2$.

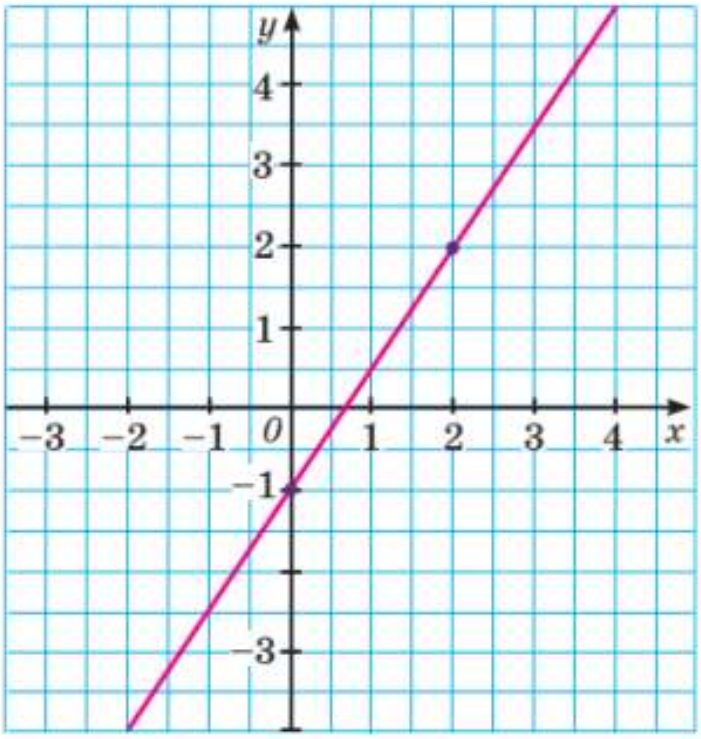


Рис. 47

Узагалі, *графіком рівняння* $ax + by = c$, *у якому хоча б один з коефіцієнтів* a *або* b *відмінний від нуля, є пряма.*

Щоб побудувати графік такого рівняння, достатньо знайти два його розв'язки, позначити на координатній площині точки, що відповідають цим розв'язкам, і провести через них пряму.

На рисунках 48 і 49 зображено графіки лінійних рівнянь, у яких один з коефіцієнтів при змінних дорівнює 0:

$0x + y = 2$, або $y = 2$;

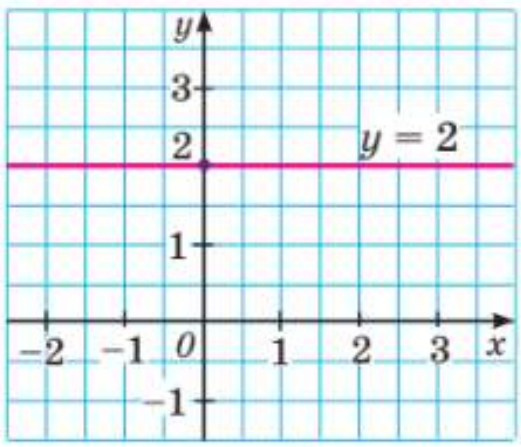


Рис. 48

$2x + 0y = 4$, або $x = 2$.

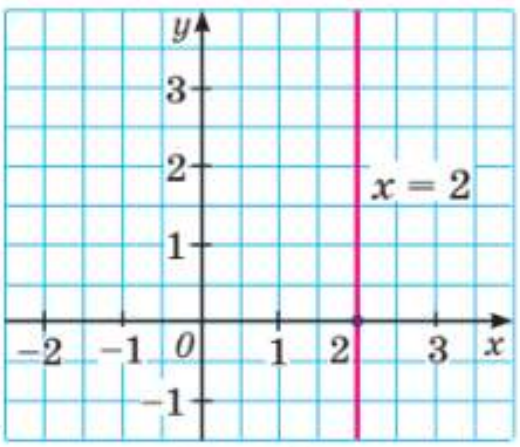


Рис. 49

Графіком рівняння $y = 2$ є графік функції $y = 2$, тобто пряма, паралельна осі x, що проходить через точку (0; 2).

Розв'язками рівняння $2x + 0y = 4$ (або $x = 2$) є пари чисел $(2; y)$, де y — будь-яке число. Точки координатної площини, які відповідають таким розв'язкам, утворюють пряму, паралельну осі y, що проходить через точку (2; 0).

Якщо в рівнянні $ax + by = c$ обидва коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю, то воно може мати вигляд:

$$0x + 0y = 0 \quad \text{або} \quad 0x + 0y = c, \text{ де } c \neq 0.$$

У першому випадку розв'язком рівняння є будь-яка пара чисел, а його графіком — уся координатна площина.

У другому випадку рівняння розв'язків не має і його графік не містить жодної точки.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Побудувати графік рівняння $x + 2y = 2$.

• Спочатку знайдемо два розв'язки рівняння.

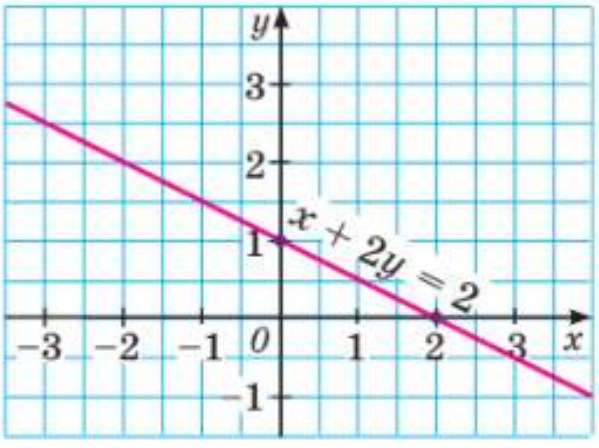
Нехай $x = 0$, тоді: $2y = 2$; $y = 1$. (0; 1) — розв'язок.

Нехай $y = 0$, тоді $x = 2$. (2; 0) — розв'язок.

Розв'язки рівняння можна подавати у вигляді таблиці.

x	0	2
y	1	0

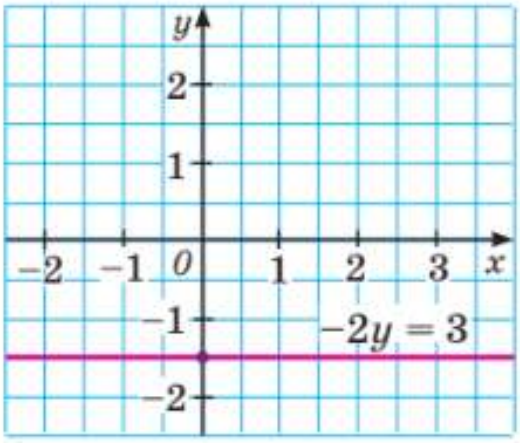
На координатній площині позначаємо точки (0; 1) та (2; 0) і проводимо через них пряму. Ця пряма є шуканим графіком.



•

Вправа 2. Побудувати графік рівняння $-2y = 3$.

• У даному рівнянні маємо одну змінну y. Якщо потрібно побудувати графік такого рівняння, то вважають, що це є лінійне рівняння із двома змінними x та y, у якому коефіцієнт при змінній x дорівнює 0, тобто $0x - 2y = 3$. Графіком рівняння є пряма $y = -1{,}5$, яка паралельна осі x і проходить, наприклад, через точку $(0; -1{,}5)$. •



1. Що називають графіком рівняння із двома змінними?
2. Що є графіком рівняння $ax + by = c$, у якому $a \neq 0$ або $b \neq 0$? Як побудувати графік такого рівняння?
3. Що є графіком рівняння $0x + 0y = 0$? $0x + 0y = c$, де $c \neq 0$?

Усно

911. Назвіть координати кількох точок, які належать графіку рівняння $-x + y = 1$ (рис. 50).

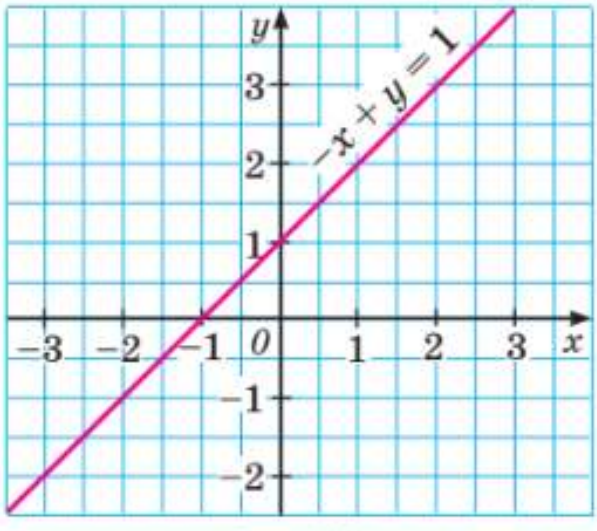


Рис. 50

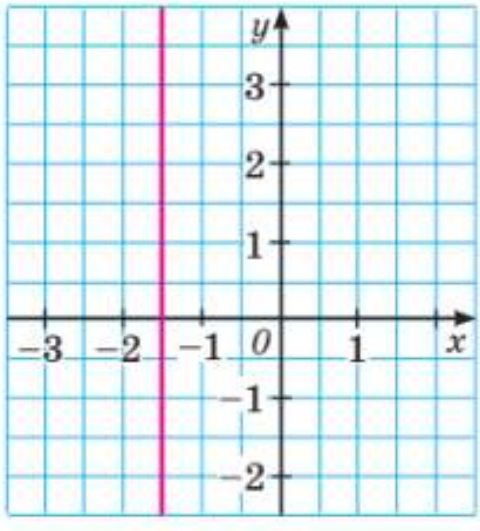


Рис. 51

912. Які з даних точок належать графіку рівняння $2x - y = 1$:
1) $A(1; 1)$; 2) $B(2; 1)$; 3) $C(0; 1)$; 4) $D(0; -1)$?

913. Укажіть координати кількох точок, які належать графіку рівняння $x - 2y = 0$.

914. Графік якого рівняння зображено на рисунку 51?

«(1)(2)

915. Які з точок $K(-2; 0{,}5)$, $L(0; 2)$, $M(2; 4)$, $N(4; 5)$ належать графіку рівняння $-3x + 4y = 8$?

916. Які з точок $A(2; 11)$, $B(3; 12)$, $C(0; 7)$, $D(-1; 5)$ належать графіку рівняння $-2x + y = 7$?

917. Знайдіть координати яких-небудь двох точок, які належать графіку рівняння $3x + 4y = 12$, і двох точок, які йому не належать.

918. Знайдіть координати яких-небудь двох точок, які належать графіку рівняння:

1) $2x + y = 5$; 2) $5x - 2y = 10$.

919. Побудуйте графік рівняння:

1) $x - y = 4$; 2) $x + 3y = 3$;
3) $2x + y = -1$; 4) $3x - 2y = 6$;
5) $-4x + y = 0$; 6) $0{,}5x + y = 2$.

920. Побудуйте графік рівняння:

1) $x - y = 3$; 2) $x + 2y = -4$;
3) $3x - y = 0$; 4) $-x + 0{,}5y = 1$.

«(3)

921. Складіть яке-небудь лінійне рівняння, графік якого проходить через точку $M(-1, 4)$.

922. В одній системі координат побудуйте графіки рівнянь:

1) $x + y = 2$; 2) $-x - y = -2$; 3) $2x + 2y = 4$.

Що можна сказати про графіки цих рівнянь?

923. В одній системі координат побудуйте графіки рівнянь:

1) $x - y = -2$; 2) $x - y = 0$; 3) $x - y = 2$.

Що можна сказати про графіки цих рівнянь?

924. Побудуйте графік рівняння:

1) $5x - 6y = 4$; 2) $8x + 16y = 24$;
3) $1{,}5x = 6$; 4) $-0{,}3y = 0{,}6$.

925. Побудуйте графік рівняння:

1) $4x + 7y = 3$; 2) $12x - 4y = 8$;
3) $8x = 24$; 4) $0{,}7y = -0{,}7$.

926. На прямій, яка є графіком рівняння $7x - 5y = 9$, узято точку, абсциса якої дорівнює 2. Знайдіть ординату цієї точки.

927. На прямій, яка є графіком рівняння $4x + 9y = 1$, узято точку, ордината якої дорівнює 1. Знайдіть абсцису цієї точки.

928. Не будуючи графік рівняння $-0{,}5x + 3y = 9$, знайдіть координати точок його перетину з осями координат.

929. Не будуючи графік рівняння $5x - 4y = 10$, знайдіть координати точок його перетину з осями координат.

930. Графік рівняння $ax + 3y = 4$ проходить через точку (1; 2). Знайдіть значення коефіцієнта a та побудуйте графік рівняння.

931. Графік рівняння $5x - 2y = c$ проходить через точку (2; 4). Знайдіть значення коефіцієнта c та побудуйте графік рівняння.

Інтерактивне завдання 26

Графік лінійного рівняння із двома змінними

4

932. Побудуйте графік рівняння:

1) $(3x + y)(2x - y) = 0$; 2) $(y + 1)(x - y - 1) = 0$;

3) $|x + 2y - 3| = 0$; 4) $|x + y| = 2$.

Вказівка. 1) З рівняння маємо: $3x + y = 0$ або $2x - y = 0$. Тому графік рівняння утворюють дві прямі, які є графіками лінійних рівнянь $3x + y = 0$ та $2x - y = 0$.

933. Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - y)(x + y - 2) = 0$; 2) $|x - y| = 1$.

934. Знайдіть усі значення a і b, для яких графік рівняння $ax + by = 4$ проходить через точки (0; 2) і (−2; 6).

935. Знайдіть усі значення a і b, для яких графік рівняння $ax + by = 6$ проходить через точки (3; 0) і (4; −1).

936. Чи існує значення a, для якого графіки двох рівнянь $a^2x + 4y = 5$ і $(a + 1)x - y = 1$ проходили б через точку (1; 1)?

Вправи для повторення

937. Розкладіть на множники:

1) $7x + ay + 7y + ax$; 2) $(x - 2)^2 - 1$.

938. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 8x + 1$.

939. Одне число більше за друге на 12, а їх сума дорівнює 44. Знайдіть ці числа.

940. Автомобіль подолав шлях завдовжки 157 км за 2 год. Деяку частину шляху він проїхав зі швидкістю 86 км/год, а решту шляху — зі швидкістю 76 км/год. Скільки кілометрів проїхав автомобіль, рухаючись зі швидкістю 86 км/год?

Поміркуйте

941. Чи можна 10 яблук, маси яких дорівнюють 75 г, 80 г, 85 г, 90 г, 95 г, 100 г, 105 г, 110 г, 115 г, 120 г, розкласти в 3 купи так, щоб маса яблук кожної купи не перевищувала 328 г?

26 СИСТЕМИ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

1. Системи лінійних рівнянь із двома змінними та їх розв'язки. Розглянемо задачу.

Задача. Біля новобудови на двох ділянках посадили 36 дерев, до того ж на першій — на 4 дерева більше, ніж на другій. Скільки дерев посадили на кожній ділянці?

Нехай на першій ділянці посадили x дерев, а на другій — y дерев. За умовою задачі, усього посадили 36 дерев, тому $x + y = 36$. На першій ділянці посадили на 4 дерева більше, ніж на другій, тому різниця $x - y$ дорівнює 4: $x - y = 4$.

Маємо два лінійні рівняння із двома змінними:

$$x + y = 36;$$
$$x - y = 4.$$

І в першому, і в другому рівняннях змінні позначають ті самі величини — кількості дерев на ділянках. Тому потрібно знайти такі значення змінних, які перетворюють у правиль-

ну числову рівність і перше, і друге рівняння, тобто потрібно знайти спільні розв'язки цих рівнянь.

Якщо потрібно знайти всі спільні розв'язки кількох рівнянь, то кажуть, що потрібно розв'язати *систему рівнянь*.

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки. Так, систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, складену за умовою нашої задачі, записують:

$$\begin{cases} x + y = 36; \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Спільним розв'язком обох рівнянь цієї системи є пара значень змінних $x = 20$, $y = 16$, бо рівності $20 + 16 = 36$ і $20 - 16 = 4$ є правильними. Цю пару чисел називають *розв'язком* системи рівнянь.

Означення. ***Розв'язком*** **системи рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, для яких кожне рівняння системи перетворюється в правильну числову рівність.**

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

2. Розв'язування систем лінійних рівнянь графічним способом. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = -3; \\ -x + 3y = 5. \end{cases}$$

Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи. На рисунку 52 пряма AB — графік рівняння $2x + y = -3$, а пряма CD — графік рівняння $-x + 3y = 5$. Координати будь-якої точки прямої AB є розв'язком першого рівняння системи, а координати будь-якої точки прямої CD є розв'язком другого рівняння. Будь-яка спільна точка цих прямих має координати, які є розв'язком як першого, так і другого рівнянь, тобто є розв'язком системи. Оскільки прямі AB і CD перетинаються в єдиній точці $M(-2; 1)$, то система рівнянь має єдиний розв'язок $x = -2$; $y = 1$. Цей розв'язок можна записувати й у вигляді пари чисел $(-2; 1)$.

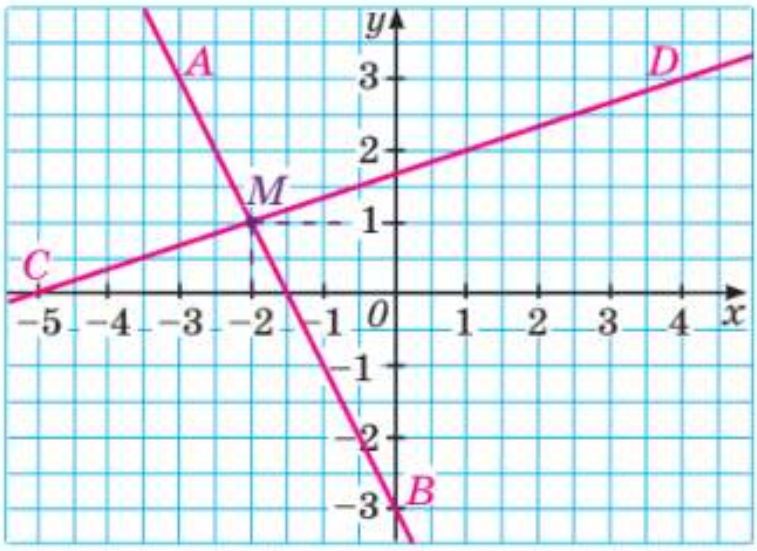


Рис. 52

Примітка. Щоб не помилитися, визначаючи за графіками рівнянь координати точки їх перетину, варто перевірити, чи справді знайдені координати є розв'язком системи. Перевіримо: якщо $x = -2$; $y = 1$, то $2 \cdot (-2) + 1 = -3$ і $-(-2) + 3 \cdot 1 = 5$ — правильні рівності. Пара чисел $(-2; 1)$ справді є розв'язком системи рівнянь.

Спосіб розв'язування систем рівнянь, який ми щойно використали, називають *графічним*.

Щоб розв'язати систему рівнянь графічним способом, потрібно:

1) побудувати графіки рівнянь системи в одній системі координат;

2) знайти координати всіх спільних точок цих графіків — отримані координати й будуть шуканими розв'язками.

Якщо в системі двох лінійних рівнянь із двома змінними графіками рівнянь є прямі, то така система може мати:

єдиний розв'язок, якщо ці прямі перетинаються;

безліч розв'язків, якщо прямі збігаються;

жодного розв'язку, якщо прямі паралельні.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати графічно систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 2y = 11; \\ x - 3y = -3. \end{cases}$$

• Побудуємо графіки обох рівнянь системи.

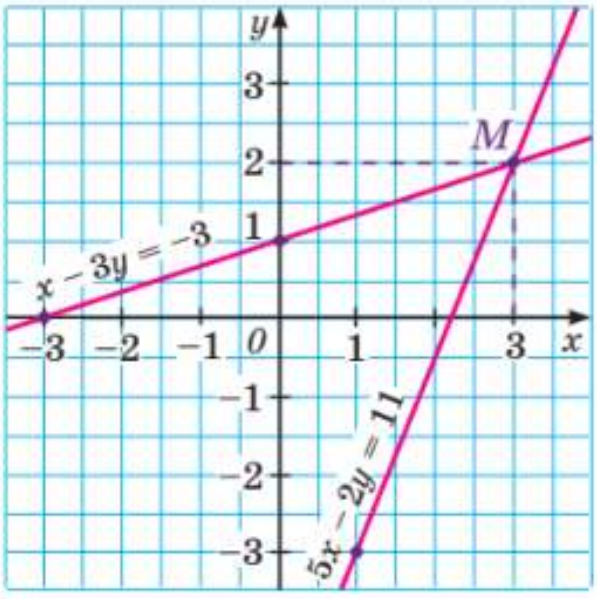
$5x - 2y = 11$		
x	1	3
y	−3	2

$x - 3y = -3$		
x	0	−3
y	1	0

Графіки перетинаються в єдиній точці — точці $M(3; 2)$.

Перевірка. Якщо $x = 3$; $y = 2$, то $5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 11$ і $3 - 3 \cdot 2 = -3$ — правильні рівності.

Відповідь. (3; 2). •



Вправа 2. Скільки розв'язків має система рівнянь:

1) $\begin{cases} x - 2y = -1; \\ -3x + 6y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 3; \\ 2x + 2y = 3? \end{cases}$

• 1) Побудуємо графіки рівнянь системи.

$x - 2y = -1$		
x	−1	1
y	0	1

$-3x + 6y = 3$		
x	−1	1
y	0	1

Графіки рівнянь зображено на рисунку 53. Ці графіки збігаються, тому система рівнянь має безліч розв'язків.

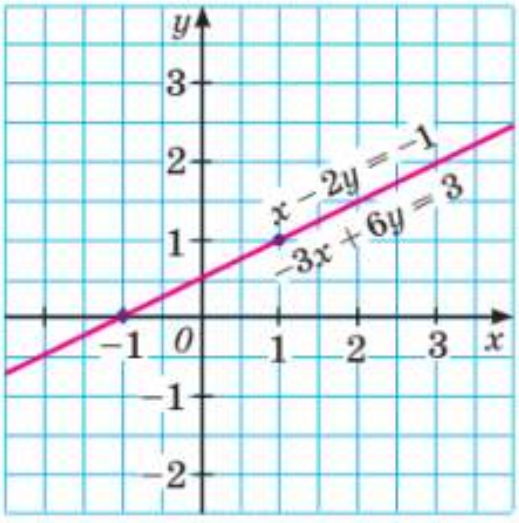


Рис. 53

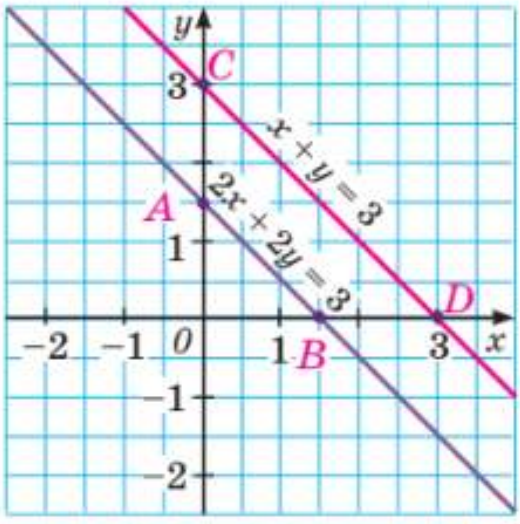


Рис. 54

2) Побудуємо графіки рівнянь системи.

$x + y = 3$		
x	0	3
y	3	0

$2x + 2y = 3$		
x	0	1,5
y	1,5	0

Графіки рівнянь зображено на рисунку 54. Ці графіки є паралельними прямими (бо $\angle ABO = \angle CDO = 45°$). Система рівнянь розв'язків не має. ●

1. Наведіть приклад системи двох рівнянь із двома змінними.
2. Що називають розв'язком системи рівнянь із двома змінними?
3. Що означає розв'язати систему рівнянь?
4. Як розв'язують систему рівнянь із двома змінними графічним способом?
5. Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь із двома змінними, графіками рівнянь якої є прямі?

«Усно

942. Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - 2y = 0; \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ пара чисел:

1) $x = 2; y = 1;$ 2) $x = 0; y = 0$?

943. Скільки розв'язків має система, графіки рівнянь якої зображено на рисунку 55? Рисунку 56 (на ньому прямі паралельні)?

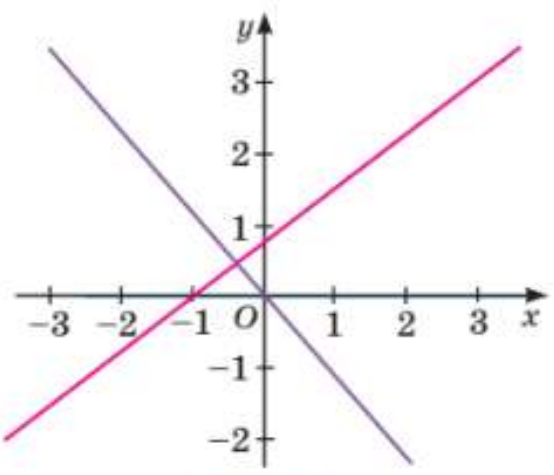


Рис. 55

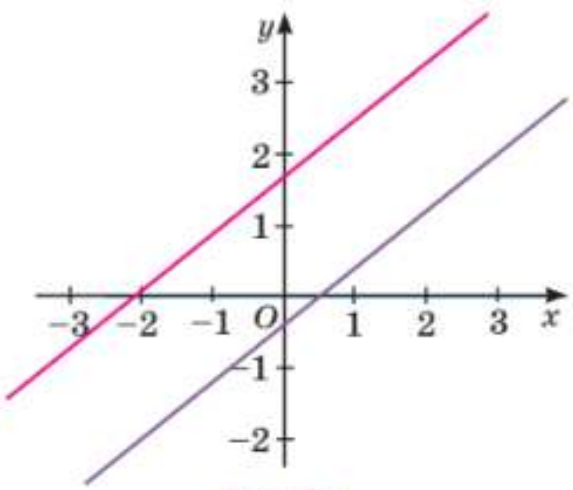


Рис. 56

«1 2

944. Яка з наведених пар чисел є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2; \\ -x + 4y = -6: \end{cases}$$

1) (1; 0); 2) (4; 2); 3) (−2; 2); 4) (−2; −2)?

945. Чи є пара чисел (−1; 3) розв'язком системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 5x + 2y = 1; \\ -2x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3x - y = 0; \\ 4x + 2y = -2? \end{cases}$

946. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 2; \\ 2x - 3y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3x - y = -4; \\ x + 2y = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 4y = -7; \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$

947. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 0; \\ 2x + 5y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 2; \\ x + 2y = -5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - y = 8; \\ 2x + y = 10. \end{cases}$

«3

948. Скільки розв'язків має система рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 3y = 4; \\ 4x + y = -5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 6x - 2y = -3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = -3; \\ 2x - 4y = -6? \end{cases}$

949. Скільки розв'язків має система рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 3y = -2; \\ 2x + 6y = -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2y = 1; \\ 9x - 6y = -2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = -2; \\ x + 4y = 0? \end{cases}$

950. Знайдіть які-небудь два розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2; \\ 6x - 9y = -6. \end{cases}$$

951. Для яких значень a і b пара чисел (2; −1) є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 5x - ay = 10; \\ bx + 2y = 4? \end{cases}$

952. Для яких значень c і d пара чисел $(1; 5)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} cx + y = 7; \\ 3x - dy = 8? \end{cases}$

953. Складіть яку-небудь систему рівнянь, що має розв'язок:
1) $x = -2$; $y = 1$; 2) $(1; 4)$.

954. Складіть яку-небудь систему рівнянь, що має розв'язок $(3; -1)$.

955. Дано систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 2; \\ x - y = c. \end{cases}$ Обґрунтуйте твердження:
1) якщо $c = 2$, то система рівнянь має безліч розв'язків;
2) якщо $c \neq 2$, то система рівнянь розв'язків не має.

956. Складіть яку-небудь систему рівнянь, яка містила б рівняння $x - 3y = 1$ і:
1) мала єдиний розв'язок;
2) мала безліч розв'язків.

957. Складіть яку-небудь систему рівнянь, яка містила б рівняння $4x + y = -3$ і не мала розв'язків.

Інтерактивне завдання 27
Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

4

958. Для яких значень a і b пара чисел $(3; -4)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} -2x + by = 2; \\ bx + ay = -8? \end{cases}$

959. Для яких значень b система рівнянь $\begin{cases} 2x - y = b - 4; \\ 2x - y = 2b \end{cases}$ має безліч розв'язків?

960. Для яких значень c система рівнянь $\begin{cases} 5x - 15y = 10; \\ x - 3y = c: \end{cases}$
1) не має розв'язків; 2) має безліч розв'язків?

Вправи для повторення

961. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x - 6 = 2(1 - x)$; 2) $\frac{2y + 3}{3} - y = y - 3$.

962. Із рівняння $2x - 3y = -9$ виразіть:

1) змінну x через змінну y; 2) змінну y через змінну x.

963. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(n + 2)^2 - (n - 2)^2$ ділиться на 8.

964. Три самоскиди вивезли з кар'єру руду. Перший самоскид вивіз 30 % усієї руди, другий — на 12 т більше, ніж перший, а третій — 148 т. Скільки всього тонн руди вивезли самоскиди?

Поміркуйте

965. У туристичній фірмі працює 28 осіб, кожна з яких володіє англійською або французькою мовою. Відомо, що англійською мовою володіють 20 осіб, а французькою — 15. Скільки осіб володіють і англійською, і французькою мовами?

Цікаво знати

У книзі «Геометрія», виданій 1637 року, відомий французький математик Рене Декарт запропонував новий метод математичних досліджень — *метод координат*.

Суть цього методу полягає в тому, що кожній геометричній фігурі на координатній площині ставлять у відповідність рівняння чи нерівність, які задовольняють координати кожної точки фігури, і тільки вони. Так, кожній прямій можна поставити у відповідність рівняння цієї прямої виду $ax + by = c$. Якщо, наприклад, потрібно довести, що деякі дві прямі є паралельними, то досить записати рівняння обох прямих і довести, що система цих рівнянь не має розв'язку.

Рене Декарт (1596–1650), французький філософ і математик. Розробив метод координат, створив основи аналітичної геометрії

Як бачимо, геометрична задача завдяки методу координат зводиться до алгебраїчної задачі. Таке нововведення Декарта дало початок новій математичній дисципліні, яку зараз називають аналітичною геометрією.

Рене Декарт зробив низку відкриттів, які стали поворотними пунктами в усій математиці. Він увів поняття змінної величини та функції, прямокутної системи координат, яку на його честь називають ще прямокутною декартовою системою координат.

27 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ СПОСОБОМ ПІДСТАНОВКИ

Крім графічного, існують інші способи розв'язування систем лінійних рівнянь. Розглянемо один із таких способів.

Нехай потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 3; \\ 3x - 2y = 8. \end{cases} \qquad (1)$$

З першого рівняння системи виразимо змінну y через змінну x:

$$y = 3 - 2x.$$

Підставимо в друге рівняння системи замість y вираз $3 - 2x$. Одержимо систему

$$\begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 3x - 2(3 - 2x) = 8. \end{cases} \qquad (2)$$

Системи (1) і (2) мають такі самі розв'язки (доведення у рубриці «Для тих, хто хоче знати більше»). Друге рівняння системи (2) має лише одну змінну x. Розв'яжемо це рівняння:

$$3x - 6 + 4x = 8; \quad 7x = 14; \quad x = 2.$$

У перше рівняння системи (2) підставимо замість x число 2 і знайдемо відповідне значення y:

$$y = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Пара чисел $(2; -1)$ — розв'язок системи (2), а також і системи (1).

Спосіб, використаний для розв'язання системи рівнянь (1), називають *способом підстановки*.

Щоб розв'язати систему двох лінійних рівнянь способом підстановки, потрібно:

1) виразити з якого-небудь рівняння системи одну змінну через другу;

2) підставити в друге рівняння системи замість цієї змінної одержаний вираз;

3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;

4) знайти відповідне значення іншої змінної;

5) записати розв'язок системи рівнянь.

Для тих, хто хоче знати більше

Доведемо, що системи рівнянь (1) і (2) мають такі самі розв'язки.

Нехай пара чисел $(a; b)$ — довільний розв'язок системи (1). Тоді правильними є числові рівності $2a + b = 3$ і $3a - 2b = 8$, а отже, і рівність $b = 3 - 2a$. Замінимо в рівності $3a - 2b = 8$ число b виразом $3 - 2a$, одержимо правильну рівність $3a - 2(3 - 2a) = 8$. Оскільки рівності $b = 3 - 2a$ і $3a - 2(3 - 2a) = 8$ є правильними, то пара чисел $(a; b)$ є розв'язком системи (2). Ми показали, що довільний розв'язок системи (1) є розв'язком системи (2).

Навпаки, нехай пара чисел $(c; d)$ — довільний розв'язок системи (2). Тоді правильними є числові рівності $d = 3 - 2c$ і $3c - 2(3 - 2c) = 8$. Замінимо в рівності $3c - 2(3 - 2c) = 8$ вираз $3 - 2c$ числом d, одержимо правильну рівність $3c - 2d = 8$. З рівності $d = 3 - 2c$ випливає, що $2c + d = 3$. Оскільки рівності $2c + d = 3$ і $3c - 2d = 8$ є правильними, то пара чисел $(c; d)$ є розв'язком системи (1). Ми показали, що довільний розв'язок системи (2) є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) мають такі самі розв'язки.

Системи рівнянь, які мають такі самі розв'язки, називають ***рівносильними***. Отже, розв'язуючи систему рівнянь (1), ми замінили її рівносильною системою (2).

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 4x - 5y = 7; \\ 3x + 4y = -18. \end{cases}$

• Виразимо з першого рівняння змінну y через змінну x:

$$-5y = -4x + 7; \qquad 5y = 4x - 7; \qquad y = \frac{4x - 7}{5}.$$

Підставимо в друге рівняння системи замість y вираз $\frac{4x - 7}{5}$ і розв'яжемо одержане рівняння:

$$3x + 4 \cdot \frac{4x - 7}{5} = -18;$$
$$15x + 4(4x - 7) = -90;$$
$$15x + 16x - 28 = -90;$$
$$31x = -62;$$
$$x = -2.$$

Знайдемо відповідне значення змінної y:

$$y = \frac{4 \cdot (-2) - 7}{5} = -3.$$

Відповідь. $(-2; -3)$. •

Вправа 2. Для яких значень a система рівнянь $\begin{cases} 3x - ay = 2; \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ не має розв'язків?

• Виразимо з другого рівняння змінну x через змінну y:

$$x = 2y + 3.$$

Підставимо в перше рівняння системи замість x вираз $2y + 3$, одержимо рівняння

$$3(2y + 3) - ay = 2.$$

Далі матимемо:

$$6y + 9 - ay = 2; \qquad 6y - ay = 2 - 9; \qquad (6 - a)y = -7.$$

Останнє рівняння не має коренів лише у випадку, коли коефіцієнт при y дорівнює нулю: $6 - a = 0$; $a = 6$. Для цього значення a система рівнянь не має розв'язків.

Відповідь. $a = 6$. •

Вправа 3. Графіком лінійної функції є пряма, що проходить через точки $A(-1; 2)$ і $B(2; 5)$. Задати цю функцію формулою.

• Нехай шукану лінійну функцію задають формулою $y = kx + b$, де k і b — поки що невідомі числа. Оскільки графік функції проходить через точки $A(-1; 2)$ і $B(2; 5)$, то мають виконуватися дві рівності

$$2 = k \cdot (-1) + b \text{ і } 5 = k \cdot 2 + b,$$

звідки

$$-k + b = 2 \text{ і } 2k + b = 5.$$

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} -k + b = 2; \\ 2k + b = 5, \end{cases}$ знайдемо: $k = 1$, $b = 3$. Отже, функцію задають формулою $y = x + 3$. •

1. Як розв'язують систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки?

Усно

966. Систему рівнянь потрібно розв'язати способом підстановки. Чи правильно виконано перехід від першої системи до другої у випадках:

1) $\begin{cases} x + y = 3; \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 - y; \\ 3(3 - y) - 4y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 3; \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 - x; \\ 3x - 4(3 - x) = 2? \end{cases}$

1 2

967. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x = y; \\ 3x - y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2x + 1; \\ x + y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 3; \\ x = 4y + 5. \end{cases}$

968. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} x + y = 4; \\ 4x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u - 3v = 1; \\ 2u + v = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 3y = 3; \\ x - y = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 7s + 2t = 3; \\ 5s - t = 7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x + 9y = 4; \\ x + 3y = 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x = y + 7; \\ 4y = 3x - 1. \end{cases}$

969. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} x = 2y + 3; \\ x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 11; \\ y = 4x - 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2a - 5b = 9; \\ a - 7b = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 2y = 3; \\ 2x + y = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2u + 7v = 2; \\ u + 3v = 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$

«3

970. Знайдіть значення x_0, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = 2x - 1; \\ 3x + 2y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 2; \\ 2x - 3y = -1. \end{cases}$

971. Знайдіть значення y_0, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 5; \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$

972. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5x - 6y = 1; \\ 3x + 4y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 4y = -5; \\ 5x - 3y = 11; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 5y = 9; \\ 5x + 2y = 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x - 5y = 3; \\ 0{,}7x + 0{,}2y = 1{,}6. \end{cases}$

973. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 2; \\ 4x - 6y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 4y = 1; \\ 4x - 3y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}1y = 0{,}6; \\ -2x + 5y = 9. \end{cases}$

974. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь, не виконуючи побудов:

1) $x - y = 4$ й $x + 2y = -2$; 2) $5x - 2y = 10$ і $3x - 4y = -8$.

975. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $7x + 4y = 9$ і $2x + 5y = -9$, не виконуючи побудов.

976. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5(x - 2) + 2y = x - 2; \\ 4(y + 3) - 5 = x - 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3(x - 2y) - 5(x - y) = 3; \\ 2(x - 2y) - 3(x - y) = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x + 4) - 1 = -3(y + 3); \\ 0{,}2(y - 5) + 1{,}9 = -0{,}3x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{3}(x + 2) = y + 3; \\ 4x - y = 6. \end{cases}$

977. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 7(x-2)+3x=3y-6; \\ 6-x=4(y-3); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(x+y)-3(x-y)=1; \\ 4(x+y)-5(x-y)=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x+y)+1=4x-3; \\ 0{,}3(x-y)=0{,}2x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{1}{4}(x+y)=2; \\ 2x-3y=1. \end{cases}$

Інтерактивне завдання 28

Розв'язування систем лінійних рівнянь способом підстановки

978. Доведіть, що графіками рівнянь $4x-2y=5$ і $2x-y=3$ є паралельні прямі.

979. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{x+2}{6}-\frac{y-3}{6}=1; \\ 2x-3y=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{3}-1=\frac{x-4y}{9}; \\ \frac{x-2y}{4}=\frac{2x+1}{6}. \end{cases}$

980. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{2}=0; \\ \frac{x-2}{6}=\frac{x+y}{9}. \end{cases}$

981. Графіком лінійної функції є пряма, що проходить через точки $M(-2;\,6)$ і $N(3;\,1)$.

1) Задайте цю функцію формулою.

2) Чи проходить графік функції через точку $K(-1;\,5)$?

982. Графіком лінійної функції є пряма, що проходить через точки $A(-1;\,-1)$ і $B(2;\,5)$. Задайте цю функцію формулою та знайдіть її значення, якщо $x=0$.

983. Для яких значень b система рівнянь $\begin{cases} x+by=8; \\ 2x+3y=16 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

984. Для яких значень a система рівнянь $\begin{cases} 4x-y=9; \\ ax+2y=4 \end{cases}$ не має розв'язків?

Вправи для повторення

985. Доведіть, що значення виразу $4(a-2)^2-(2a-3)^2+4a$ не залежать від значень a.

986. Знайдіть значення виразу $(a+b)^2$, якщо $a-b=4$ й $ab=-4$.

987. Чи можна 100 книжок розташувати на трьох полицях так, щоб на другій полиці було на 20 книжок більше, ніж на першій, і на 7 книжок менше, ніж на третій?

988. Від пристані A до пристані B теплохід плив на 30 хв довше, ніж від B до A. Знайдіть відстань між пристанями, якщо швидкість теплохода в стоячій воді дорівнює 32,5 км/год, а швидкість течії річки — 2,5 км/год.

Поміркуйте

989. У коробці 25 кульок, кожна з яких має певний колір. Відомо, що серед будь-яких п'яти кульок знайдуться хоча б 2 кульки одного кольору. Доведіть, що в коробці знайдуться 7 кульок одного кольору.

28 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ СПОСОБОМ ДОДАВАННЯ

Розглянемо дві правильні рівності:

$$7+5=12;$$
$$4+6=10.$$

Почленно додамо ці рівності: ліву частину до лівої й праву до правої:

$$(7+5)+(4+6)=12+10.$$

Знову одержали правильну рівність. Ця властивість правильних числових рівностей лежить в основі способу розв'язування систем рівнянь, який називають *способом додавання*. Розглянемо приклад.

Нехай потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x+2y=21; \\ 5x-2y=19. \end{cases} \qquad (1)$$

У цій системі коефіцієнти при змінній y є протилежними числами. Тому, почленно додавши рівняння системи (ліву ча-

стину до лівої й праву до правої), одержимо рівняння з однією змінною x:

$$(3x + 2y) + (5x - 2y) = 21 + 19;$$

$$8x = 40,$$

звідки $x = 5$.

Підставивши значення $x = 5$ в одне з рівнянь системи, можна знайти значення y. Використовуючи, наприклад, друге рівняння, матимемо:

$$5 \cdot 5 - 2y = 19; \quad 25 - 2y = 19; \quad -2y = -6; \quad y = 3.$$

Пара чисел (5; 3) — розв'язок системи (1). (Цю саму пару чисел ми одержали б, якби розв'язували систему способом підстановки.)

Якщо в рівняннях деякої системи коефіцієнти при одній зі змінних є протилежними числами, то таку систему зазвичай розв'язують способом додавання — почленно додають рівняння системи й одержують рівняння з однією змінною.

Спосіб додавання можна використовувати й для розв'язування систем лінійних рівнянь, у яких коефіцієнти при кожній змінній не є протилежними числами. Для цього спочатку потрібно «підготувати» рівняння системи до додавання.

Розв'яжемо, наприклад, систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12; \\ 2x - 3y = -26. \end{cases} \qquad (2)$$

У цій системі коефіцієнти при змінній x і коефіцієнти при змінній y не є протилежними числами. Однак, помноживши обидві частини першого рівняння на 2, а другого — на -3, одержимо систему

$$\begin{cases} 6x + 8y = 24; \\ -6x + 9y = 78, \end{cases}$$

у якій коефіцієнти при змінній x — протилежні числа. Почленно додавши рівняння останньої системи, матимемо:

$$17y = 102; \quad y = 6.$$

Підставивши значення $y = 6$ у перше рівняння системи (2), знаходимо:

$$3x + 4 \cdot 6 = 12; \quad 3x + 24 = 12; \quad 3x = -12; \quad x = -4.$$

Отже, розв'язком системи рівнянь (2) є пара чисел $(-4; 6)$.

Три перші кроки розв'язування системи рівнянь (2) можна записати так:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12; \\ 2x - 3y = -26; \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot (-3) \end{matrix} \qquad \begin{cases} 6x + 8y = 24; \\ -6x + 9y = 78; \end{cases} + \qquad 17y = 102.$$

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь способом додавання, потрібно:

1) помножити, за необхідності, обидві частини рівнянь системи на такі числа, щоб в обох рівняннях коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;

2) почленно додати рівняння;

3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;

4) знайти відповідне значення іншої змінної;

5) записати розв'язок системи рівнянь.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. Розв'язати способом додавання систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 5y = 9; \\ 6x + 7y = 9. \end{cases}$$

• $\begin{cases} 3x + 5y = 9; \\ 6x + 7y = 9; \end{cases} \Big| \cdot (-2) \qquad \begin{cases} -6x - 10y = -18; \\ 6x + 7y = 9; \end{cases} +$

$$-3y = -9; \quad y = 3.$$

Підставимо в перше рівняння системи замість y число 3 й розв'яжемо одержане рівняння:

$$3x + 5 \cdot 3 = 9; \quad 3x + 15 = 9; \quad 3x = -6; \quad x = -2.$$

Відповідь. $(-2; 3)$. •

1. Як розв'язують систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання?

«Усно

990. Яке одержимо рівняння, якщо почленно додамо рівняння системи:

1) $\begin{cases} x + 2y = 2; \\ -x + 4y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y = 1; \\ -x + y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -2x + 3y = 2; \\ 2x - 5y = -1? \end{cases}$

991. Систему рівнянь потрібно розв'язати способом додавання. Поясніть перетворення при переході від першої системи рівнянь до другої та доцільність таких перетворень:

1) $\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 4y = 8; \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} -3x - 6y = -12; \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 2y = 4; \\ 4x - 3y = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 9x - 6y = 12; \\ -8x + 6y = -10. \end{cases}$

«1 2»

992. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 1; \\ x + y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 3; \\ -x + 4y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 5y = 3; \\ 3x - 5y = -8. \end{cases}$

993. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = 4; \\ 2x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = -3; \\ -5x + 3y = 11. \end{cases}$

994. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 5y = 6; \\ x + 3y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5m + 2n = 8; \\ 3m + 2n = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - y = -2; \\ 3x + 2y = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 2y = -1; \\ 3x - 5y = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x - 4y = 6; \\ 3x + 2y = 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x - 3y = 10; \\ 6x + 5y = 2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x - 5y = 2; \\ 2x + 3y = -5; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x + 2y = 6; \\ 3x + 7y = -8; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} -4x + 5y = -9; \\ 5x + 3y = 2. \end{cases}$

995. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5x + y = 4; \\ 2x + y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ 2x + y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 3y = 8; \\ 5x + 6y = -7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x - 4y = 6; \\ -2x + 5y = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x + 3y = 2; \\ 3x + 5y = -2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x - 5y = -2; \\ 7x - 8y = 10. \end{cases}$

Інтерактивне завдання 29

Розв'язування систем лінійних рівнянь способом додавання

«3

996. Знайдіть значення різниці $x_0 - y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 4x - 3y = 10; \\ 2x + 7y = -12. \end{cases}$

997. Знайдіть значення суми $x_0 + y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ 5x + 4y = 11. \end{cases}$

998. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 10x + 7y = -2; \\ 15x + 5y = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0{,}1x + 3y = 5; \\ 0{,}3x - 7y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1{,}2x + 0{,}5y = 3; \\ -0{,}4x + 1{,}5y = 5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y = -\frac{1}{3}; \\ x + \frac{2}{3}y = \frac{2}{3}. \end{cases}$

999. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}3y = 5; \\ 2x - 0{,}6y = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 1; \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}y = 4. \end{cases}$

1000. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} 9x + 3y = 15; \\ 12x + 4y = 25? \end{cases}$

1001. Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} -2x + 7y = -6; \\ 4x - 14y = 12? \end{cases}$$

1002. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 9(x - 2) = 5(y - 3) - 1; \\ 7(y + 2) = 9(x + 2) - 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5(x + 2y) - 1 = 6y + 1; \\ 2(x + 5y) - 1 = 9y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x(x - 4) + 3y = x^2 - 4; \\ 6x + y^2 = (y + 3)^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x - 3)(y + 2) = xy - 3; \\ (y + 2)^2 = y^2 - 2x. \end{cases}$

1003. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5(2x - 3y) = 4x; \\ 6x - 4y = 4(2x - 1) - 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x + 3)(y - 3) = xy + x; \\ (x + 2)^2 - x^2 = 2y. \end{cases}$

4

1004. Доведіть, що графіки рівнянь $x + 2y = -9$, $x - 2y = 11$ і $36x + 7y = 1$ проходять через ту саму точку.

1005. Доведіть, що графік рівняння $-12x + 17y = 5$ не проходить через точку перетину графіків рівнянь $3x - 5y = -1$ і $-3x + y = 5$.

1006. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x - y}{3} = \dfrac{x + 1}{5}; \\ 7(x - y) = 5(x + y) - 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - 1)^2 - (x - 2)^2 = 2y; \\ (y + 2)^2 - (y + 1)^2 = 3x. \end{cases}$

1007. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} (2x + 3)^2 - 4(x^2 - y) = -3; \\ 5(x + 3) - 2(x - y + 6) = 3. \end{cases}$$

1008. Знайдіть значення a і b, для яких графік рівняння $ax + by = 7$ проходить через точки $M(1; 3)$ і $N(-2; 1)$.

1009. Чи існує значення a, для якого система рівнянь $\begin{cases} ax - 3y = 5; \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$ не має розв'язків?

1010. Знайдіть значення b, для якого система рівнянь $\begin{cases} 5x - by = 3; \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$ не має розв'язків.

Вправи для повторення

1011. Складіть рівняння із двома змінними за наведеною умовою:

1) Сума чисел x та y удвічі більша за їх різницю.

2) Перший автомат за 1 хв виготовляє x пластикових пляшок, другий — y пляшок, а обидва за 15 хв разом — 450 пляшок.

1012. Доведіть, що значення виразу $3^{34} + 9^{92} - 3^{30} - 9^{90}$ ділиться на 80.

1013. На двох ділянках росте 128 дерев. Кількість дерев на першій ділянці відноситься до кількості дерев на другій як 9 : 7. Скільки дерев росте на першій ділянці?

1014. За рік 1 м^2 листя бузку виділяє 1,1 кг кисню, а 1 м^2 листя дуба — в $1\frac{5}{17}$ раза менше. Скільки кілограмів кисню виділяє за рік 1 м^2 листя дуба?

Поміркуйте

1015. У країні є 15 міст, кожне з яких сполучене дорогою принаймні із 7 іншими. Доведіть, що дорогами країни можна проїхати з будь-якого міста до будь-якого іншого міста.

29 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Ви вже розв'язували задачі за допомогою рівнянь з однією змінною. Розв'яжемо задачу, склавши систему рівнянь.

Задача. Швидкість катера за течією річки дорівнює 29 км/год, а проти течії — 24 км/год. Знайти швидкість катера в стоячій воді та швидкість течії річки.

Розв'язання. Нехай швидкість катера в стоячій воді дорівнює x км/год, а швидкість течії річки — y км/год. Швидкість катера за течією річки (29 км/год) дорівнює сумі його швидкості в стоячій воді та швидкості течії річки, тому

$$x + y = 29.$$

Швидкість катера проти течії річки (24 км/год) дорівнює різниці швидкості катера в стоячій воді та швидкості течії річки, тому

$$x - y = 24.$$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 29; \\ x - y = 24. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо: $x = 26{,}5$; $y = 2{,}5$.

Відповідь. 26,5 км/год; 2,5 км/год. •

Розв'язуючи задачу, ми одержали систему рівнянь і задачу на рух звели до математичної задачі — розв'язати систему рівнянь. Отже, як математичні моделі реальних процесів, крім функцій і рівнянь, можуть слугувати й системи рівнянь.

Зазначимо, що для моделювання задачі можна було б використати рівняння з однією змінною. Однак для складання такого рівняння довелося б провести складніші міркування.

Щоб розв'язати задачу за допомогою системи рівнянь, дотримуються таких кроків:

1) позначають деякі дві невідомі величини буквами;

2) використовуючи умову задачі, складають два рівняння з вибраними невідомими;

3) записують систему цих рівнянь і розв'язують її;

4) відповідають на поставлені в задачі запитання.

Приклади розв'язання вправ

Вправа 1. На заводі мінеральну воду розлили в малі та великі пляшки. У 4 малих і 3 великих пляшках є разом 8 л мінеральної води, а в 2 малих і 5 великих — 11 л. Знайти місткість малої пляшки та місткість великої.

• Нехай місткість малої пляшки дорівнює x л, а великої — y л. Тоді в 4 малих і 3 великих пляшках є разом $(4x + 3y)$ л води, що за умовою задачі становить 8 л. Маємо рівняння:

$$4x + 3y = 8.$$

У 2 малих і 5 великих пляшках є разом 11 л води, тому

$$2x + 5y = 11.$$

Одержали систему рівнянь $\begin{cases} 4x + 3y = 8; \\ 2x + 5y = 11. \end{cases}$

Розв'яжемо цю систему способом додавання:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 8; \\ -4x - 10y = -22; \end{cases} \quad -7y = -14; \quad y = 2.$$

З першого рівняння системи знаходимо x:

$$4x + 3 \cdot 2 = 8; \quad 4x = 2; \quad x = 0{,}5.$$

Відповідь. 0,5 л; 2 л. •

Вправа 2. На двох ділянках мають посадити 60 дерев. Після того як на першій ділянці посадили 12 дерев, а на другій — 18, на першій ділянці залишилося посадити вдвічі більше дерев, ніж на другій. Скільки дерев мають посадити на кожній ділянці?

• Нехай на першій ділянці мають посадити x дерев, а на другій — y дерев. Усього мають посадити 60 дерев, тому

$$x + y = 60.$$

Коли на першій ділянці посадили 12 дерев, а на другій — 18, то на першій ділянці залишилося посадити $(x - 12)$ дерев, а на другій — $(y - 18)$. На першій ділянці залишилося посадити вдвічі більше дерев, ніж на другій, тому

$$x - 12 = 2(y - 18).$$

Маємо систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 60; \\ x - 12 = 2(y - 18). \end{cases}$

Розв'яжемо цю систему способом підстановки. З першого рівняння системи маємо: $x = 60 - y$. Підставивши в друге рівняння системи замість x вираз $60 - y$, матимемо:

$$60 - y - 12 = 2y - 36; \quad -3y = -84; \quad y = 28.$$

Тоді $x = 60 - y = 60 - 28 = 32$.

Відповідь. 32 дерева; 28 дерев. •

«Усно

1016. Руслана старша за свого брата Назара на 3 роки, а 7 років тому була старшою за нього вдвічі. Скільки зараз років Руслані та скільки — Назару?

Нехай зараз Руслані x років, а Назару — y років. Яка з наведених систем рівнянь відповідає умові задачі?

1) $\begin{cases} y - x = 3; \\ y - 7 = 2(x - 7); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 3; \\ x + 7 = 2(y + 7); \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3; \\ x - 7 = 2(y - 7); \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 3; \\ y - 7 = 2(x - 7). \end{cases}$

1017. На двох ділянках росте 120 кущів винограду, до того ж на першій — на 8 кущів більше, ніж на другій. Скільки кущів винограду росте на кожній ділянці?

1018. У пакеті є 17 фруктів: яблука і груші, до того ж яблук на 5 більше, ніж груш. Скільки яблук і скільки груш є в пакеті?

1019. За 2 кг помідорів і 1 кг огірків заплатили 80 грн. Якби купували 1 кг помідорів і 3 кг огірків, то потрібно було б заплатити 90 грн. Скільки гривень коштує 1 кг помідорів? 1 кг огірків?

1020. Два великі й один малий пакети містять разом 5 л соку, а один великий і два малі — 4 л. Скільки літрів соку містить один великий пакет і скільки — один малий?

1021. Туристична група здійснила похід на 14 човнах. Частина човнів були двомісними, а частина — тримісними. Скільки було двомісних і скільки тримісних човнів, якщо група складалася з 37 осіб й усі місця були зайняті?

1022. Антоніна має монети 5 грн і 10 грн — усього 8 монет на загальну суму 50 грн. Скільки монет 5 грн і скільки монет 10 грн має Антоніна?

1023. Складіть задачу за рисунком 57 і розв'яжіть її.

Рис. 57

1024. Складіть задачу за рисунком 58 і розв'яжіть її.

Рис. 58

1025. Різниця двох натуральних чисел дорівнює 18, до того ж одне з них у 5 разів більше за друге, зменшене на 2. Знайдіть ці числа.

1026. Знайдіть два натуральні числа, сума яких дорівнює 30 і одне з яких удвічі більше за друге, збільшене на 3.

1027. Перший оператор за 5 год і другий за 7 год разом набрали 55 сторінок тексту. Скільки сторінок набирав за 1 год кожний оператор, якщо перший за 2 год набирав на 3 сторінки більше, ніж другий за 1 год?

1028. За 5 однакових зошитів і 2 однакові альбоми заплатили 84 грн. Знайдіть ціну зошита і ціну альбому, якщо 3 зошити дорожчі за 1 альбом на 2 грн.

1029. Знайдіть сторони ділянки прямокутної форми, якщо її периметр дорівнює 104 м, а довжина на 12 м більша за ширину.

1030. За 1 год катер проходить за течією річки 32 км, а за 2 год проти течії — 56 км. Знайдіть швидкість катера в стоячій воді та швидкість течії річки.

Інтерактивне завдання 30

Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь

«3»

1031. Два автомати, працюючи разом, розфасували 1440 кг борошна за 20 хв. Виявилося, що перший автомат розфасував борошна на 160 кг менше, ніж другий. Скільки кілограмів борошна розфасовує кожний автомат за 1 хв?

1032. Два робітники за 4 год виготовили 80 деталей, до того ж другий робітник виготовив на 16 деталей більше, ніж перший. Скільки деталей виготовляв за годину кожен робітник?

1033. На двох тарілках лежало 27 тістечок. Після того як з першої тарілки забрали 7 тістечок, а з другої на першу переклали 5 тістечок, на першій тарілці їх стало втричі більше, ніж на другій. Скільки тістечок лежало на кожній тарілці спочатку?

1034. Рік тому батько був старший за дочку в 5 разів, а через рік буде старшим за неї в 4 рази. Скільки зараз років батькові та скільки — дочці?

1035. Складіть задачу, математичною моделлю якої була б система рівнянь $\begin{cases} x + y = 30; \\ x + 5 = 2(y - 5). \end{cases}$

1036. У двох ящиках є апельсини. Якщо 4 апельсини перекласти з першого ящика в другий, то в другому ящику апельсинів стане вдвічі більше, ніж у першому. Якщо ж 7 апельсинів перекласти з другого ящика в перший, то в першому ящику апельсинів стане вдвічі більше, ніж у другому. Скільки апельсинів у кожному ящику?

Вказівка. Розв'язуючи задачу, використайте таблицю:

	1-й ящик	2-й ящик	
Є апельсинів	x	y	
Стане I	$x - 4$	$y + 4$	У другому вдвічі більше, ніж у першому
Стане II	$x + 7$	$y - 7$	У першому вдвічі більше, ніж у другому

1037. *Старовинна задача.* Кінь і мул ішли поруч з важкими ношами на спинах. Кінь скаржився, що його ноша дуже важка. «Чого ти скаржишся?», — відповів йому мул. — «Адже якщо я візьму в тебе один мішок, то в мене мішків стане вдвічі більше, ніж у тебе. А ось якби ти забрав з моєї спини один мішок, то в нас мішків було б порівну». Скільки мішків ніс кінь і скільки — мул?

1038. Рухаючись 3 год за течією річки і 2 год проти течії, теплохід проходить 218 км, а рухаючись 2 год за течією й 1 год проти течії, — 132 км. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді та швидкість течії річки.

1039. Катер, рухаючись 2 год за течією річки і 3 год проти течії, проходить 138 км. Він же за 3 год за течією річки проходить на 38 км більше, ніж за 2 год проти течії. Знайдіть швидкість катера в стоячій воді та швидкість течії річки.

1040. Фірма має на двох рахунках у банку 24 млн грн, до того ж 35 % грошей на першому рахунку дорівнює 85 % грошей на другому. Скільки гривень є на кожному рахунку?

1041. У двох мішках було 102 кг борошна. Після того як з першого мішка взяли 15 % усього борошна, у ньому все ж залишилося борошна на 9 кг більше, ніж у другому. Скільки кілограмів борошна було в кожному мішку спочатку?

1042. Із міст A і B в напрямку міста C одночасно виїхали два автомобілі (рис. 59) і через 1,8 год одночасно прибули до міста C. Якби автомобілі їхали назустріч один одному, то зустрілися б через 0,2 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

Рис. 59

1043. Із двох міст одночасно назустріч один одному виїхали автомобіль та автобус і зустрілися через 3 год. Виявилося, що до моменту зустрічі автомобіль проїхав на 45 км більше, ніж автобус. Знайдіть швидкості автомобіля й автобуса, якщо шлях між містами автобус подолав за 6,6 год.

4

1044. *Задача з фольклору.* Летіли галки й побачили палки. Якщо на палки сяде по дві галки, то одна палка залишиться без галок. Якщо ж на кожну палку сяде одна галка, то одна галка залишиться без палки. Скільки було палок і скільки летіло галок?

1045. Банк купив 20 000 акцій підприємства A і 10 000 акцій підприємства B на загальну суму 210 000 грн. Після того як ціна акцій підприємства A зросла на 25 %, а ціна акцій підприємства B впала на 20 %, банк продав усі акції за 240 000 грн. Знайдіть початкову ціну акції кожного підприємства.

1046. Антикварний магазин купив два предмети на загальну суму 3500 грн, а продав їх за 4600 грн. За скільки гривень магазин купив кожний предмет, якщо на перший він установив націнку 40 %, а на другий — 20 %?

1047. Номер квартири Ольги — двоцифрове число, сума цифр якого дорівнює 12. Якщо до цього числа додати 36, то одержимо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Який номер квартири Ольги?

1048. Андрій записав двоцифрове число, сума цифр якого дорівнює 8. Якщо це число зменшити на 18, то одержимо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Яке число записав Андрій?

1049. Із пункту A в пункт B одночасно виїхали два велосипедисти. Коли через 1,5 год перший велосипедист прибув у пункт B, другому до пункту B залишалося проїхати ще 6 км. Не затримуючись у пункті B, перший велосипедист вирушив у зворотний шлях і через 5 хв зустрів другого велосипедиста. Знайдіть швидкості велосипедистів і відстань між пунктами.

1050. Із табору A в табір B, відстань між якими 41 км, вийшла туристична група, а через 1 год назустріч їй з табору B — друга група. Через 2 год після виходу другої групи відстань між групами дорівнювала 18 км, а ще через 2 год вони зустрілися. Знайдіть швидкість кожної групи.

1051. Є два сплави міді й олова. Перший сплав містить 45 % міді, а другий — 30 %. Скільки кілограмів кожного сплаву потрібно взяти, щоб одержати 60 кг нового сплаву, який містив би 40 % міді?

Вправи для повторення

1052. Спростіть вираз:

1) $(m + 2n)(2m - n) + 2n^2$; 2) $(2b - a)^2 + (a - 2b)(2b + a)$.

1053. Розкладіть на множники:

1) $a + 3ab - c - 3bc$; 2) $x^2 - y^2 + 2(x + y)$.

1054. Побудуйте графік функції $y = -0{,}5x - 1{,}5$. За допомогою графіка знайдіть значення x, для яких функція набуває додатних значень.

1055. Доведіть, що не існує чисел a і b, для яких була б правильною рівність $a^2 - 4a + b^2 - 4b + 9 = 0$.

Поміркуйте

1056. На складі є банки, місткість яких 0,5 л, 0,7 л та 1 л. Після того як зі складу частину банок забрали, на ньому залишилося 3600 банок, загальна місткість яких дорівнює 2800 л. Доведіть, що серед них є хоча б одна півлітрова банка.

Завдання для повторення § 6

1057. Які з пар чисел (3; 3), (−1; −2), (7; 6), (1; 0,5) є розв'язками рівняння $5x - 4y = 3$?

1058. Знайдіть які-небудь два розв'язки рівняння:

1) $2x + 3y = 8$; 2) $-x + 3y = -2$.

1059. Із рівняння $2x - y = 6$ виразіть:

1) змінну x через змінну y; 2) змінну y через змінну x.

1060. Побудуйте графік рівняння:

1) $2x - y = 1$; 2) $0{,}5x + y = -2$.

1061. Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x + 3y = 5; \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$ пара чисел: 1) (−2; 3); 2) (4; −1)?

1062. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = 3; \\ x - 3y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2y = -1; \\ x - 2y = 1. \end{cases}$

1063. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} x + 3y = 1; \\ 2x - y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 4y = 5; \\ 4x - 3y = 5. \end{cases}$

1064. Знайдіть значення x_0, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} y = x + 2; \\ 3x - y = 1. \end{cases}$

1065. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 6x + y = 1; \\ 3x - y = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 7y = 1; \\ 6x - 5y = 8. \end{cases}$

1066. Знайдіть значення суми $x_0 + y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 1{,}8x - 0{,}5y = 10; \\ -2x + 5y = -20. \end{cases}$

1067. Не виконуючи побудов, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $2x - 3y = 1$ та $x + 3y = 5$.

1068. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2(x-1)+y = x-4; \\ 4(x+1)-5 = -y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(y+3)+1 = y(x-2); \\ (x-4)^2 = x^2-4y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{15} = 1; \\ 5x - 3y = -15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3}; \\ \frac{y}{7} = \frac{x+2}{6}. \end{cases}$

1069. Знайдіть усі значення a, для яких система рівнянь $\begin{cases} x - 4y = 2; \\ x - a^2y = a \end{cases}$ не має розв'язків.

1070. На теплоході є двомісні та чотиримісні каюти, у яких можна перевезти 78 осіб. Скільки двомісних і скільки чотиримісних кают на теплоході, якщо всього їх є 25?

1071. Із двох міст, відстань між якими 300 км, одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі й зустрілися через 2 год. Відомо, що до моменту зустрічі перший автомобіль проїхав на 20 км більше, ніж другий. Знайдіть швидкості автомобілів.

1072. Якщо відкрити перший кран на 7 хв, а потім другий — на 3 хв, то в бак надійде 216 л води. Якщо ж відкрити перший кран на 8 хв, а потім другий — на 6 хв, то в бак надійде 288 л води. Скільки літрів води надходить у бак через кожний кран за 1 хв?

1073. На двох полицях було 60 книжок. Після того як четверту частину книжок першої полиці переставили на другу, на другій полиці книжок стало втричі більше, ніж на першій. Скільки книжок було на кожній полиці спочатку?

1074. У парку росте листяних дерев на 50 більше, ніж хвойних. Якби листяних дерев було на 20 % менше, а хвойних — на 20 % більше, то в парку цих дерев було б порівну. Скільки листяних і скільки хвойних дерев росте в парку?

Інтерактивне завдання для самоперевірки 6
Системи лінійних рівнянь із двома змінними

Завдання для самоперевірки № 6

Початковий рівень

1. Яка з наведених пар чисел є розв'язком рівняння $x - y = 2$?

А (3; 2) **Б** (1; −2) **В** (−3; −2) **Г** (5; 3)

2. Яке з наведених рівнянь не є лінійним рівнянням із двома змінними?

А $-2x + 3y = 5$ **Б** $x - y = 0$

В $0x - 2xy = 1$ **Г** $0x + 0y = 3$

3. Яка з наведених пар чисел є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 3; \\ 3x + y = 7? \end{cases}$$

А (3; 3) **Б** (1; −1) **В** (2; 2) **Г** (2; 1)

4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 2; \\ 2x + y = 7. \end{cases}$

А (2; 0) **Б** (1; −3) **В** (3; 1) **Г** (4; 2)

5. Знайдіть значення y_0, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x = y - 1; \\ x + 2y = 5. \end{cases}$

А 2 **Б** 1 **В** −1 **Г** −2

6. Сума двох чисел дорівнює 16. Знайти ці числа, якщо перше число більше за друге на 4.

Нехай перше число дорівнює x, а друге — y. Яка з наведених систем рівнянь відповідає умові задачі?

А $\begin{cases} x + y = 4; \\ x - y = 16; \end{cases}$ **Б** $\begin{cases} x + y = 16; \\ x - y = 4; \end{cases}$

В $\begin{cases} x + y = 16; \\ y - x = 4; \end{cases}$ **Г** $\begin{cases} x + y = 4; \\ y - x = 16. \end{cases}$

Середній рівень

7. До кожного початку речення (1–3) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

1 Графік рівняння $x - 2y = 0$ ...
2 Графік рівняння $x - 2y = 2$ ...
3 Графік рівняння $x - 0y = 4$ ...

А перетинає вісь абсцис у точці (2; 0).
Б перетинає вісь ординат у точці (0; 2).
В не перетинає вісь абсцис.
Г не перетинає вісь ординат.
Д проходить через початок координат.

8. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 3; \\ 2x - 3y = 2. \end{cases}$

А (2; –1) **Б** (4; 1) **В** (5; 2) **Г** (7; 4)

9. Знайдіть значення суми $x_0 + y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 3x + 2y = 6; \\ 4x - 2y = 8. \end{cases}$

А 4 **Б** 2 **В** 0 **Г** –2

10. У магазині борошно продають у малих і великих пакетах. Загальна маса малого та великого пакетів борошна дорівнює 7 кг, а 2 малих і 3 великих — 19 кг. Знайдіть масу малого та масу великого пакетів борошна.

А 1 кг; 6 кг **Б** 2 кг; 5 кг
В 3 кг; 4 кг **Г** 2,5 кг; 4,5 кг

Достатній рівень

11. Знайдіть значення b, для якого графік рівняння $2x - by = 2$ проходить через точку $M(-1; 2)$.

12. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x - 5y = -1; \\ 3x + 2y = 8. \end{cases}$

13. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3(2x - y) - 2(x - y) = 1; \\ 4x - 5(x + 2y) = 51. \end{cases}$

14. У двох ящиках було 36 яблук. Після того як з першого ящика переклали 5 яблук у другий, у другому ящику стало вдвічі більше яблук, ніж у першому. Скільки яблук було в кожному ящику спочатку?

Високий рівень

15. Для яких значень a і b графік рівняння $2ax - by = 2$ проходить через точки $(-1; 4)$ і $(2; 2)$.

16. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}(x-1)^2 + y = (x-2)^2;\\(y+1)^2 - 3x = (y-2)^2.\end{cases}$

17. Знайдіть значення k, для якого система рівнянь $\begin{cases}2x - 3y = 4;\\ x + ky = 2\end{cases}$ має безліч розв'язків.

18. Є два розчини солі: 5-відсотковий і 12-відсотковий. Скільки грамів кожного розчину потрібно взяти, щоб одержати 280 г 10-відсоткового розчину солі?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

Багато чого з математики не залишається в пам'яті, але коли зрозумієш її, тоді легко при нагоді згадати призабуте.

Михайло Остроградський

Цілі вирази

1075. Запишіть у вигляді виразу вартість покупки, якщо було куплено пакет соку за ціною a грн і 2 пляшки напою, по b грн кожна.

1076. Площа першого поля дорівнює a га, другого — на b га менша, ніж першого, а третього — удвічі більша, ніж другого. Запишіть у вигляді виразу загальну площу трьох полів. Знайдіть значення цього виразу, якщо $a = 24$; $b = 8$.

1077. Знайдіть значення виразу:

1) $x^2 - 3y$, якщо $x = 5$; $y = 9$; 2) $4(a - 2) - 6a$, якщо $a = 0{,}5$.

1078. Знайдіть значення степеня:

1) 9^4; 2) $(-3)^5$; 3) $(-0{,}5)^4$; 4) $\left(3\frac{1}{3}\right)^3$.

1079. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^2a^4; 2) $b^7 : b$; 3) $(m^3)^5$; 4) $(x^5 \cdot x)^4$.

1080. Знайдіть значення виразу:

1) $(7^8 : 7^6)^2$; 2) $0{,}4^5 \cdot 2{,}5^5$;

3) $(-2^7 \cdot 0{,}5^7)^7 \cdot 0{,}25^4 \cdot 8^4$; 4) $27^4 : 3^{10} - 2^{10} \cdot 0{,}5^9$.

1081. Подайте у стандартному вигляді одночлен:

1) $8x^2xz$; 2) $-3a^2b \cdot 2(a^5)^2$;

3) $-m^3 \cdot 3m^2n \cdot 5n^4$; 4) $0{,}5ac \cdot (-4a^3c)^2 \cdot a^2c$.

1082. Знайдіть значення виразу $(8x^3y)^2 \cdot y^4$, якщо $x = 0{,}5$; $y = 2$.

1083. Подайте одночлен $64a^6b^{12}$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів, одним з яких є $2a^2b^8$; $-4a^3b$;

2) квадрата одночлена; 3) куба одночлена.

1084. Подайте у стандартному вигляді многочлен:

1) $3x^2 - 6x + x^2 - 3 + x$; 2) $3a \cdot 2ab + a^5 - 2a^5 - 4a^2b$.

1085. Спростіть вираз:

1) $8a^2 + 4a - 3 - (7 - 8a + 3a^2)$;

2) $mn - 3m^2n - (mn - m^2) + (3m^2n + mn)$.

1086. Виконайте множення і запишіть результат у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1) $a(a^2 - 4a + 3)$;
2) $(2x^2 - 4x + 8)(-0{,}5x^2)$;
3) $(2k + 1)(3k - 5)$;
4) $(4ab^2 + 9a^2)(2b^2 - 3a)$;
5) $(z - 2)(z^2 - z + 3)$;
6) $(b - 7)(b + 1)(b - 2)$.

1087. Виконайте множення:

1) $(b + 8)(b - 8)$;
2) $(5x - 2y)(5x + 2y)$;
3) $(-m - 0{,}3)(m - 0{,}3)$;
4) $(x^2y - 4z^3)(x^2y + 4z^3)$.

1088. Піднесіть до квадрата:

1) $(2x + 3)^2$;
2) $(0{,}5a - 4b)^2$.

1089. Спростіть вираз:

1) $m(2m - 11n) + (m - 4n)(3n - 2m)$;
2) $(x + 1)(x^2 - 2x + 3) - x^3$;
3) $(2b - 9)(2b + 9) - 4b^2$;
4) $(4y - 5)^2 + (2y + 5)^2 - 20y^2$;
5) $(a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2) - 27b^3$;
6) $k^4 - (2k^3 + k^2(k^2 - 2k + 3)) + 4k^2$.

1090. Запишіть у вигляді многочлена вираз:

1) $(x - 3)^3$;
2) $(a + b - 2)^2$.

1091. Доведіть тотожність:

1) $y(b - x) + x(b + y) = b(x + y)$;
2) $(k + 2)(k - 2)(k^2 + 4) + 16 = k^4$;
3) $(a + 2b)^2 + (2a + b)^2 = 5(a + b)^2 - 2ab$.

1092. Розкладіть на множники:

1) $a^2 - 5a$;
2) $12xy^3 + 8xy^2 - 16x^2y$;
3) $n^2 - 4m^2$;
4) $120 - 30a^2z^2$;
5) $a^2 + 8a + 16$;
6) $6x^2 - 24xy + 24y^2$;
7) $x^3 - (2a)^3$;
8) $27b^3 + c^3$.

1093. Розкладіть на множники:

1) $ax - ay + 3x - 3y$;
2) $x^2y - 2x + xy - 2$;
3) $9ay - 6a^2y + 2axy - 3xy$;
4) $a^2 - 4b^2 + 2b + a$;
5) $x^2 - 2x - 3$;
6) $m^2 - 8mn + 7n^2$.

1094. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 16 = 0$;
2) $y^3 - y = 0$;
3) $z^2 - 4z + 4 = 0$;
4) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$.

1095. Знайдіть значення виразу:

1) $103 \cdot 97$; 2) $1{,}8 \cdot 2{,}2$;

3) $7{,}35^2 - 6{,}35^2$; 4) $49^2 + 2 \cdot 49 \cdot 21 + 21^2$.

1096. Доведіть, що значення виразу:

1) $3^{14} - 3^{12}$ ділиться на 8; 2) $49^8 + 3 \cdot 7^{15}$ ділиться на 10.

1097. Знайдіть значення виразу:

1) $a^3 - 0{,}5a^2$, якщо $a = 1{,}5$;

2) $x^2 - 2xy + y^2$, якщо $x = -0{,}36$; $y = 1{,}64$.

1098. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(2n + 3)^2 - (2n - 1)^2$ ділиться на 8.

1099. Доведіть, що значення виразу $(x + 1)^2 - (x - 1)(x + 3)$ не залежать від значень x.

1100. Знайдіть значення x, для якого вираз $x^2 + 2x + 9$ набуває найменшого значення.

1101. Знайдіть найменше значення виразу $x^2 + y^2 - 4y - 2x$.

Функції

1102. Функцію задано формулою $y = -2x + 3$.

1) Знайдіть значення функції, які відповідають значенням аргументу: -2; 0; 6.

2) Знайдіть значення аргументу, яким відповідає значення функції: 3; 0; -1.

1103. Функцію задано графіком, зображеним на рисунку 60.

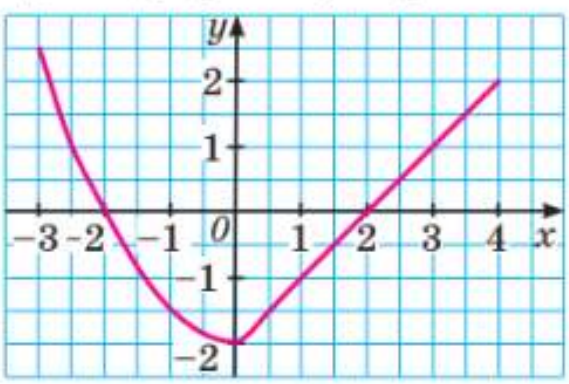


Рис. 60

1) Знайдіть значення функції, якщо $x = 1$; $x = -2{,}5$; $x = 3{,}5$.

2) Знайдіть значення аргументу, для яких значення функції дорівнює -2; 1; 2,5.

3) Укажіть область визначення, область значень і нулі функції.

1104. Функцію задано формулою $y = x^2 - 1$, де змінна x може набувати значень -2; -1; 0; 1; 2; 3. Задайте цю функцію таблицею.

1105. Побудуйте графік функції $y = 2x^2 - 2$, де $-2 \le x \le 2$. За допомогою графіка знайдіть значення x, для яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

1106. Побудуйте графік функції:

1) $y = 1{,}5x$; 2) $y = -1{,}5x$; 3) $y = 3x - 1$; 4) $y = -1{,}5x + 1$.

1107. На рисунку 61 зображено графік функції. Задайте функцію формулою, якщо: 1) $x \le 2$; 2) $x \ge 2$.

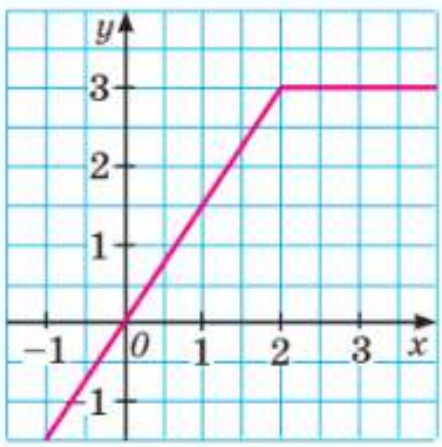


Рис. 61

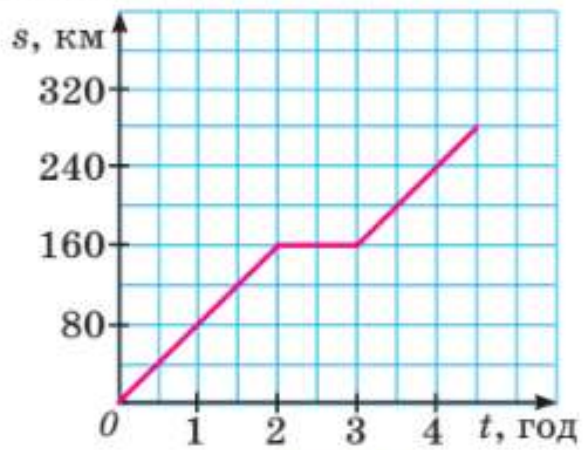


Рис. 62

1108. Автомобіль подолав шлях між двома містами за 4,5 год, зробивши одну зупинку. На рисунку 62 зображено графік залежності шляху s (у км), який проїхав автомобіль, від часу руху t (у год).

1) Скільки всього кілометрів проїхав автомобіль?

2) Укажіть тривалість зупинки.

3) З якою швидкістю їхав автомобіль до зупинки? Після зупинки?

1109. Графік прямої пропорційності проходить через точку $A(2; 7)$. Чи проходить цей графік через точку $B(-4; -14)$?

1110. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y = 1{,}5x$ та $y = -x + 5$; 2) $y = -2x$ та $y = x^2$.

1111. Знайдіть значення b, для якого графіки функцій $y = 3x + b$ та $y = 2x + 4$ перетинаються в точці, що лежить на осі абсцис.

Лінійні рівняння та їх системи

1112. Яке з наведених чисел є коренем рівняння $2x - 3 = 2{,}5x$?

1) 6; 2) 4; 3) -4; 4) -6.

1113. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x - 18 = 57 - 2x$; 2) $3(x - 2) - 4(x - 4) = 5$;

3) $50(3x + 8) = 25x - 100$; 4) $0{,}3(1 - x) = 0{,}4(x - 1) - 0{,}7$;

5) $\frac{2}{9}(3x - 2) + \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{2}{9}$; 6) $\frac{2x + 3}{6} + \frac{3x + 4}{9} = -\frac{1}{18}$.

1114. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x + 3)(x - 1) = 2x^2$; 2) $x(x + 1) = (x - 1)(x + 2)$;

3) $(x - 3)(x + 3) = (x + 5)^2$; 4) $2x(x - 1{,}5)^2 = 2x^3 - 6x^2 + 9$;

5) $|3 - 2x| = 5$; 6) $||x| - 2| = 6$.

1115. Знайдіть значення k, для якого число 4 є коренем рівняння $(k - 2)x = 3x - k$.

1116. Чи існує значення a, для якого рівняння $ax + 8 = 2(x + 8)$ має безліч коренів?

1117. Знайдіть значення b, для якого значення виразу $-2b + 6$ на 3 більше за значення виразу $3b - 2$.

1118. У двох ящиках 35 кг яблук, до того ж у першому — в 1,5 раза більше, ніж у другому. Скільки кілограмів яблук у кожному ящику?

1119. Кабель завдовжки 40 м розрізали на три частини так, що перша частина виявилася на 2 м коротшою від другої і на 4 м довшою за третю. Знайдіть довжину кожної частини.

1120. У першій цистерні бензину було втричі більше, ніж у другій. Після того як з першої цистерни забрали 400 л бензину, а з другої — 800 л, у першій цистерні бензину стало у 8 разів більше, ніж у другій. Скільки літрів бензину було в кожній цистерні спочатку?

1121. Із міста виїхав велосипедист і рухається зі швидкістю 24 км/год. Через пів години услід за ним виїхав автомобіль, швидкість якого 84 км/год. Скільки часу потрібно автомобілю, щоб наздогнати велосипедиста?

1122. Оператор набрав на комп'ютері рукопис посібника за три дні. Першого дня він набрав 30 % усіх сторінок, другого — на 5 сторінок більше, ніж першого, а третього — 27 сторінок. Скільки всього сторінок набрав оператор?

1123. У фірмі працювало 120 осіб, з яких 50 % — чоловіки. Після того як на роботу прийняли кілька жінок, чоловіки стали складати 48 % усіх працівників фірми. Скільки жінок було прийнято на роботу?

1124. Які з пар чисел (1; 1), (−1; −1), (6; 3), (2; 1), (3,5; 2) є розв'язками рівняння $2x - 5y = -3$?

1125. Побудуйте графік рівняння та знайдіть координати точок його перетину з осями координат:

1) $x + 3y = 3$;
2) $2x - 3y = 6$;
3) $2x = 5$;
4) $-3y = 6$.

1126. Знайдіть значення b, для якого графік рівняння $x - by = 3$ проходить через точку $K(1; -2)$.

1127. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 2; \\ x + 2y = 5. \end{cases}$

1128. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x = 2 - y; \\ x + 4y = -4; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + 2y = 6; \\ 2x - 3y = -2; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 3x - 8y = 7; \\ 5x + 4y = 3; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 7x - 4y = 2; \\ 6x - 5y = -3; \end{cases}$
5) $\begin{cases} 3(2x - 5) + 2y = x + 2; \\ 5(x + 1) - 15 = y + 4; \end{cases}$
6) $\begin{cases} (x - 1)(y + 3) = xy; \\ (x + 2)^2 = x^2 - 4y; \end{cases}$
7) $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}6y = 1{,}8; \\ 35(5x - 1) = 35(5y + 4); \end{cases}$
8) $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{3} + \dfrac{y - 2}{6} = -2; \\ \dfrac{x + 8}{8} + \dfrac{y + 7}{6} = 0. \end{cases}$

1129. Знайдіть значення різниці $x_0 - y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 8x - 5y = 2; \\ 4x - 3y = 2. \end{cases}$

1130. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $2x + 3y = -2$ та $4x - 5y = 7$.

1131. Чи належить точка перетину графіків рівнянь $x + 2y = -3$ і $2x - y = 4$ графіку рівняння $3x + y = 1$?

1132. Графік лінійної функції проходить через точки $A(-1; 1)$ і $B(3; -7)$. Задайте цю функцію формулою.

1133. Знайдіть значення k, для якого система рівнянь $\begin{cases} x + 2y = 5; \\ 2x + 4y = k \end{cases}$ має безліч розв'язків.

1134. У ящику лежать 25 яблук — червоні та жовті. Відомо, що червоних яблук на 3 більше, ніж жовтих. Скільки яблук кожного кольору лежать в ящику?

1135. Із двох пунктів, відстань між якими 17 км, одночасно вийшли назустріч одна одній дві групи туристів і зустрілися через 2 год. Знайдіть швидкість кожної групи, якщо швидкість першої на 0,5 км/год менша від швидкості другої.

1136. Два автомати за 8 хв спільної роботи розфасували 600 кг цукру. Перший автомат за 2 хв і другий — за 3 хв разом розфасовують 190 кг цукру. Скільки кілограмів цукру розфасовує за хвилину кожний автомат?

1137. Братові й сестрі разом 10 років. Скільки років кожному з них, якщо через рік брат буде вдвічі старший за сестру?

1138. На першій клумбі було на 5 кущів квітів більше, ніж на другій. Після того як з першої клумби пересадили 4 кущі на другу, на другій клумбі стало кущів в 1,2 раза більше, ніж на першій. Скільки кущів квітів було на кожній клумбі спочатку?

1139. Молоко однієї корови містить 5 % жиру, а другої — 3,5 %. Змішавши молоко від обох корів, одержали 18 л молока, жирність якого дорівнює 4 %. Скільки для цього використали літрів молока від кожної корови?

Інтерактивне завдання для самоперевірки 7
Підсумкове завдання

Завдання для самоперевірки № 7

Початковий рівень

1. Який з наведених записів є виразом зі змінними?

А $6 \cdot 1{,}5 - 2$ **Б** $a > b$ **В** $x - y = 0$ **Г** $m + 5n$

2. Яка з наведених рівностей не є тотожністю?

А $(c + 1)^2 = c^2 + 2c + 1$ **Б** $(2 - b)^2 = 4 - 4b + b^2$

В $x^2 - 9 = (x - 9)(x + 9)$ **Г** $k^3 - 8 = (k - 2)(k^2 + 2k + 4)$

3. Подайте вираз $(m^5)^2 : m^4$ у вигляді степеня.

А m^3 **Б** m^6 **В** m^{10} **Г** m^{14}

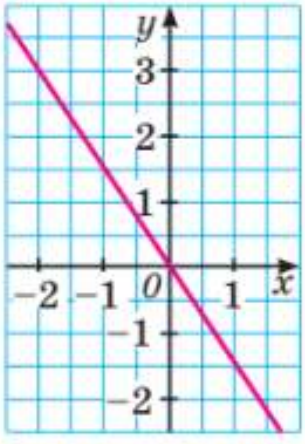
4. Спростіть вираз $(b + 8)(b - 8) + 64$.

А $b^2 + 128$ **Б** $b^2 - 64$ **В** b^2 **Г** 0

5. Розв'яжіть рівняння $3(x - 2) = x$.

А -3 **Б** 1,5 **В** 2,5 **Г** 3

6. На рисунку зображено графік лінійної функції. Яке з наведених тверджень щодо цієї функції є неправильним?



А Дана функція є прямою пропорційністю

Б Якщо значення аргументу дорівнює -1, то значення функції дорівнює 1,5

В Графік функції проходить через точку $(1; -1)$

Г Графік функції проходить через початок координат

Середній рівень

7. До кожного числового виразу (1–3) доберіть його значення (А–Д).

1 $5{,}5^2 - 2 \cdot 5{,}5 \cdot 4{,}5 + 4{,}5^2$

2 $5{,}5^2 + 2 \cdot 5{,}5 \cdot 4{,}5 + 4{,}5^2$

3 $5{,}5^2 - 4{,}5^2$

А -1

Б 1

В 10

Г 100

Д 1000

8. Функцію задано формулою $y = 4x + 3$. Знайдіть значення аргументу, для якого значення функції дорівнює 1.

А 7 **Б** 1 **В** 0,5 **Г** −0,5

9. Знайдіть значення виразу $(1 - b)(1 + b) + (b - 1)^2$, якщо $b = 25$.

А −50 **Б** −48 **В** 50 **Г** 52

10. Знайдіть значення суми $x_0 + y_0$, якщо $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 4; \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

А −4 **Б** −2 **В** 2 **Г** 4

Достатній рівень

11. Доведіть тотожність $(3a - 2b)^2 - (2a - 3b)^2 = 5(a^2 - b^2)$.

12. Побудуйте графік функції $y = -2x - 1$. Користуючись графіком, знайдіть значення x, для яких функція набуває від'ємних значень.

13. Розв'яжіть рівняння $(x - 3)(2x - 3) = (x + 3)^2$.

14. Три автомобілі перевезли разом 18 т вантажу. Перший автомобіль перевіз вантажу в 1,4 раза більше, ніж другий, а другий — на 1 т менше, ніж третій. Скільки тонн вантажу перевіз кожний автомобіль?

Високий рівень

15. Знайдіть значення виразу $a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 - b^2)$, якщо $a = 1{,}28$; $b = -2{,}56$.

16. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$; 2) $|14 - 2(1 - 3x)| = 3$.

17. Знайдіть значення a і b, для яких графік рівняння $ax + by = 2$ проходить через точки $(2; 1)$ і $(-2; -2)$.

18. Першого разу з банківської картки зняли 40 % усіх грошей, а другого — на 500 грн менше. Після цього на ній залишилося 30 % початкової суми. Скільки гривень було на картці спочатку?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Пам'ятайте: хочете навчитися плавати, — сміливіше входьте в воду. Хочете навчитися математики, — беріться за задачі. Кожен розв'язок є своєрідним мистецтвом пошуку.

Михайло Кравчук

До розділу I. Цілі вирази

1140. Чи можна в записі $*1*2*3*4*5*6*7*8*9*10$ поставити замість зірочок знаки «+» або «−» так, щоб значення одержаного числового виразу дорівнювало: 1) 5; 2) 0; 3) 60?

1141. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n число:

1) $9^{2n} - 1$ ділиться на 10; 2) $3^{4n} + 4$ ділиться на 5.

1142. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n число $10^n - 4$ ділиться на 3, але не ділиться на 9.

1143. Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n, для яких була б правильною рівність $m(m + 1) = 3^n + 2^n$.

1144. Знайдіть найменше натуральне число, яке внаслідок множення на 2 дає квадрат натурального числа, а внаслідок множення на 3 — куб натурального числа.

1145. Доведіть, що значення виразу $27^7 + 9^{11} - 81^5$ ділиться на 11.

1146. Доведіть, що сума чотирьох послідовних натуральних степенів числа 3 ділиться на 120.

1147. Для деяких натуральних значень m і n число $3m + 2n$ ділиться на 7. Доведіть, що для тих самих значень m і n на 7 ділиться й число:

1) $10m + 9n$; 2) $4m + 5n$; 3) $m + 3n$.

1148. 1) Деякі два натуральні числа при діленні на 7 дають ту саму остачу. Доведіть, що різниця цих чисел ділиться на 7.

2) Доведіть, що серед будь-яких восьми натуральних чисел завжди знайдуться два числа, різниця яких ділиться на 7.

1149. До деякого трицифрового числа праворуч дописали одну цифру і від одержаного числа відняли початкове. Виявилося, що різниця ділиться на 9. Яку цифру дописали?

1150. Двоцифрове число в сумі з числом, записаним тими самими цифрами, але у зворотному порядку, дає квадрат натурального числа. Знайдіть усі двоцифрові числа, які мають таку властивість.

1151. Номер квитка складається із шести цифр. Квиток вважають «щасливим», якщо в його номері сума перших трьох цифр дорівнює сумі трьох останніх. Доведіть, що:

1) якщо квиток з номером $\overline{abcdef}$ є «щасливим», то й квиток з номером $\overline{defabc}$ — «щасливий»;

2) сума номерів «щасливих» квитків $\overline{abcdef}$ і $\overline{defabc}$ ділиться на 1001;

3) сума номерів усіх можливих «щасливих» квитків ділиться на 1001.

1152. Знайдіть усі натуральні значення m і n, для яких є правильною рівність:

1) $(m + n)^2 - n^2 = 3$; 2) $m^2 - (m - n)^2 = 9$.

1153. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^8 - x^7 = x^4 - x^3$; 2) $(|x| - x)(|x| + x) = 1 - |x - 1|$;

3) $(x^2 + 4x + 3)^2 - (x^2 + 4x - 3)^2 = 0$.

1154. Для деяких чисел x та y є правильною рівність $9x + 8y = 7xy$. Доведіть, що для цих чисел також є правильною рівність $81x^2 - 49x^2y^2 + 144xy + 64y^2 = 0$.

1155. Доведіть, що:

1) квадрат цілого числа або ділиться на 3, або при діленні на 3 дає в остачі 1;

2) для будь-якого натурального значення n число $3n + 2$ не є квадратом цілого числа.

1156. Різниця квадратів натуральних чисел m і n є простим числом. Доведіть, що:

1) $m = n + 1$;

2) число $4m + n^2$ є квадратом цілого числа.

1157. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $n^2 + 3n + 2$ є складеним числом.

До розділу II. Функції

1158. Функцію задано формулою $y = x^2 + 2ax$, де a — деяке додатне число. Чи набуває ця функція від'ємного значення?

1159. Знайдіть нулі функції, заданої формулою

$$y = |x^2 - 16| + |2x - 8|.$$

1160. Двоє дівчат змагалися у бігу на дистанції 100 м. На рисунку 63 зображено графіки їхніх забігів протягом перших 8 с. Знайдіть відстань між дівчатами у момент фінішу переможниці, вважаючи, що кожна з них бігла зі сталою швидкістю.

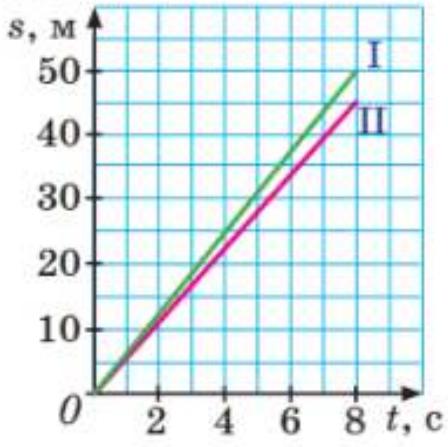


Рис. 63

1161. Графік лінійної функції проходить через точки $(-1; -2)$ і $(2; 1)$. Знайдіть усі значення a, для яких цей графік проходить і через точку $(2a; 9 - 3a)$.

1162. 1) Побудуйте графік функції $y = x + |x|$.

2) Для яких значень b рівняння $x + |x| = b$ має безліч коренів?

До розділу III. Лінійні рівняння та їх системи

1163. Не виконуючи обчислень, доведіть, що число 2 не є коренем рівняння

$$135x(1297x - 468) - 114(273x + 575) - 2125 = 0.$$

1164. Скільки коренів залежно від значень a має рівняння:

1) $(a^2 - a)(x - a) = a - 1$; 2) $|x - a| + |x - 1| = 0$?

1165. Дано рівняння $b(x - 1) + 5b = 8(x + b) + 1$.

1) Для яких значень b рівняння не має коренів?

2) Чи існують значення b, для яких рівняння має більше, ніж один корінь?

1166. Розв'яжіть рівняння:

1) $1 - x + x^2 + (x^3 - x^2)^{20} = x$;

2) $5(2|x - 4| - 3) = 3(2|4 - x| + 3)$.

1167. Із міста A до міста B виїхав автобус і рухався зі швидкістю 60 км/год. Через пів години він зустрів автомобіль, який їхав з міста B. Цей автомобіль доїхав до міста A і через 40 хв вирушив у зворотний шлях. За 20 км від міста B автомобіль наздогнав автобус. Знайдіть відстань між містами, якщо швидкість автомобіля дорівнює 90 км/год.

1168. Сплав міді, цинку й олова має масу 1 кг і містить олова на 20 % більше, ніж міді, а цинку — на 50 % більше, ніж олова. Знайдіть масу цинку в сплаві.

1169. Тато любить каву з молоком. Коли йому дали повну чашку самої кави, він відпив $\frac{1}{5}$ чашки і долив молоком. Потім знову відпив $\frac{1}{5}$ чашки і знову долив молоком. Після цього в чашці стало кави на 56 мл більше, ніж молока. Знайдіть місткість чашки.

1170. Знайдіть усі значення a, для яких пара чисел $(2; 5)$ є розв'язком рівняння $2(5a + 1)^2x - 5(2a - 1)^2y = 7$.

1171. Побудуйте графік рівняння $|x| - |y| = 0$.

1172. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 20; \\ x - 2y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x + 3)^2 - (x + 2)^2 = -2y + 5; \\ (y - 5)^2 - (y + 3)^2 = 4 + 4x. \end{cases}$

1173. Знайдіть усі пари цілих чисел, які є розв'язками рівняння $x^2 - y^2 = 3$.

1174. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x + y + 5)^2 + (2x - y - 1)^2 = 0$;

2) $3|x + y - 2| + 2|x - y + 3| = 0$;

3) $x^2 + 2y^2 + 2xy - 4y + 4 = 0$.

1175. Скільки розв'язків, залежно від значень a, має система рівнянь

$$\begin{cases} 3x + (a - 2)y = 6a; \\ x - (a + 2)y = -2? \end{cases}$$

1176. Розв'яжіть систему рівнянь із трьома змінними (тобто знайдіть усі значення змінних x, y і z, для яких кожне рівняння системи перетворюється в правильну числову рівність):

1) $\begin{cases} 2x + y + z = 21; \\ x + 2y + z = 20; \\ x + y + 2z = 19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; \\ 2x + 2y + 2z = -6. \end{cases}$

1177. Знайдіть такі числа a, b, c і d, для яких є правильною кожна з рівностей:
$a = bcd$; $a + b = cd$; $a + b + c = d$; $a + b + c + d = 1$.

1178. На дошці записано п'ять чисел. Відомо, що сума будь-яких чотирьох із цих чисел дорівнює 1. Чому дорівнює сума всіх записаних чисел?

1079. Із Вінниці до Чернівців о 8 год виїхав автобус, а з Чернівців до Вінниці о 10 год — автомобіль. До моменту зустрічі об 11 год автомобіль проїхав на 120 км менше, ніж автобус. Знайдіть швидкості автобуса й автомобіля, якщо до Вінниці автомобіль приїхав о 13 год 15 хв.

1180. У першому бутлі є 4 л води, а в другому — 8 л. Якщо перший бутель наповнити водою, переливши її з другого бутля, то об'єм води в другому бутлі становитиме 60 % його місткості. Якщо ж другий бутель наповнити водою, переливши її з першого бутля, то об'єм води в першому бутлі становитиме третину його місткості. Знайдіть місткість кожного бутля.

1181. Двома паралельними залізничними коліями рухаються назустріч один одному два потяги. Довжина першого потяга дорівнює 130 м, а другого — 104 м. Зустрівшись, потяги протягом 4,68 с йшли один повз другий. Якби потяги рухалися в одному напрямку й перший потяг переганяв другий, то вони йшли б один повз другий протягом 46,8 с. Знайдіть швидкість кожного потяга.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАСІВ

1. НАТУРАЛЬНІ ЧИСЛА

Ряд натуральних чисел

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...

Найменшим натуральним числом є число 1. Найбільшого натурального числа не існує.

Порівняння натуральних чисел

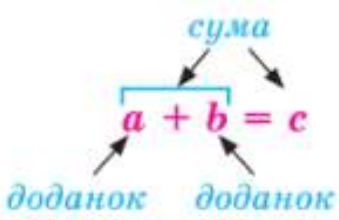
Із двох натуральних чисел, які мають різну кількість цифр, більшим є те, у якого цифр більше.

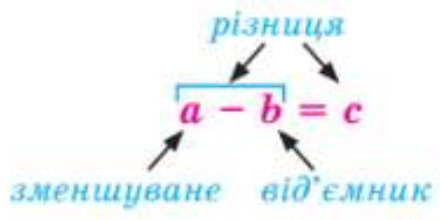
Із двох натуральних чисел, які мають однакову кількість цифр, більшим є те, у якого більше одиниць у найвищому розряді. Якщо кількість одиниць у найвищому розряді однакова, то більшим є те число, у якого більше одиниць у на порядок нижчому розряді, і т. д.

Наприклад: $15\,418 > 9864$; $1543 > 1528$.

Дії з натуральними числами

Додавання і віднімання натуральних чисел



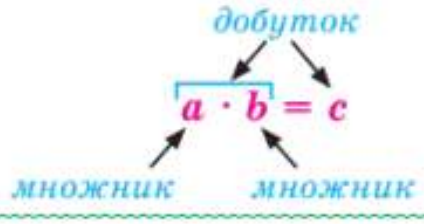


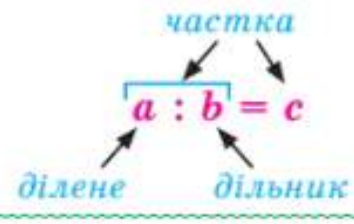
$a - b = c$, якщо $c + b = a$

Множення і ділення натуральних чисел

$a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ разів}}$

$a : b = c$, якщо $c \cdot b = a$





2. ПОДІЛЬНІСТЬ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Дільники і кратні натурального числа

Дільником натурального числа n називають будь-яке натуральне число, на яке n ділиться націло.

Кратним натуральному числу k називають будь-яке натуральне число, яке ділиться на k.

Число 12	дільники: 1, 2, 3, 4, 6, 12
	кратні: 12, 24, 36, 48, 60, ...

Ознаки подільності

На **10** ділиться те й тільки те натуральне число, запис якого закінчується цифрою 0.

На **5** ділиться те й тільки те натуральне число, запис якого закінчується цифрою 0 або цифрою 5.

На **2** ділиться те й тільки те натуральне число, запис якого закінчується парною цифрою.

На **3** ділиться те й тільки те натуральне число, сума цифр якого ділиться на 3.

На **9** ділиться те й тільки те натуральне число, сума цифр якого ділиться на 9.

Прості та складені числа

Натуральне число називають *простим*, якщо воно має тільки два різні дільники: одиницю і саме це число.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 — перші 10 простих чисел.

Натуральне число називають *складеним*, якщо воно має більше, ніж два дільники.

Кожне складене число можна *розкласти на прості множники* — записати у вигляді добутку кількох простих чисел.

Наприклад: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Найбільший спільний дільник

Найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне з даних натуральних чисел, називають *найбільшим спільним дільником* цих чисел.

Щоб знайти найбільший спільний дільник кількох чисел, можна: 1) розкласти дані числа на прості множники; 2) знайти добуток їх спільних множників.

Наприклад: $72 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot 3$; $60 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5$;

$$НСД(72; 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Найменше спільне кратне

Найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з даних натуральних чисел, називають *найменшим спільним кратним* цих чисел.

Щоб знайти найменше спільне кратне двох чисел, можна: 1) розкласти дані числа на прості множники; 2) розклад одного з чисел помножити на ті множники з розкладу другого числа, яких немає в розкладі першого.

Наприклад: $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$; $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$;

$$НСК(72; 60) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360.$$

3. ДЕСЯТКОВІ ДРОБИ

Порівняння десяткових дробів

Із двох десяткових дробів більший той, у якого більша ціла частина. Якщо десяткові дроби мають однакові цілі частини, то більший той дріб, у якого більше число десятих; якщо число десятих однакове, то більший той дріб, у якого більше число сотих, і т. д.

Наприклад: $15{,}4 > 12{,}98$; $15{,}43 > 15{,}41$.

Дії з десятковими дробами

Щоб *додати* (*відняти*) десяткові дроби, їх записують один під одним так, щоб кома стояла під комою. Далі додають (віднімають) десяткові дроби, як і натуральні числа, не зважаючи на коми. У сумі (різниці) кому ставлять під комою.

Наприклад:

$$\begin{array}{r} 0{,}714 \\ +\ 11{,}3 \\ \hline 12{,}014 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}75 \\ -\ 0{,}592 \\ \hline 1{,}158 \end{array}$$

Щоб *помножити* один десятковий дріб на другий, потрібно: 1) не зважаючи на коми, виконати множення чисел як натуральних; 2) у добутку відокремити праворуч комою стільки десяткових знаків, скільки їх мають обидва множники разом.

Щоб *поділити* десятковий дріб на десятковий дріб, потрібно в діленому й дільнику перенести коми праворуч на стільки десяткових знаків, скільки їх є в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

Наприклад:

$$\begin{array}{r} 1{,}8 \\ \times\ 0{,}32 \\ \hline 36 \\ 54 \\ \hline 0{,}576 \end{array}$$

$$5{,}472 : 1{,}52 = 547{,}2 : 152 = 3{,}6$$

$$\begin{array}{r|l} 547{,}2 & 152 \\ \hline 456 & 3{,}6 \\ \hline 912 & \\ 912 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

4. ЗВИЧАЙНІ ДРОБИ

Правильні та неправильні дроби

Звичайний дріб $\frac{a}{b}$ (a — *чисельник*, b — *знаменник*; a і b — натуральні числа)

Дріб, чисельник якого менший від знаменника, називають *правильним дробом*.

Дріб, чисельник якого більший за знаменник або дорівнює йому, називають *неправильним дробом*.

Наприклад: $\frac{3}{4}$ — правильний дріб; $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$ — неправильні дроби.

Мішані числа

$5\frac{1}{4}$ — мішане число; 5 — ціла частина, $\frac{1}{4}$ — дробова частина

Перетворення мішаного числа в неправильний дріб	$5\frac{1}{4}=\frac{5\cdot 4+1}{4}=\frac{21}{4}$
Перетворення неправильного дробу в мішане число	$21:4=5$ (ост. 1); $\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$

Основна властивість дробу

Якщо чисельник і знаменник звичайного дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то одержимо дріб, що дорівнює даному.

Наприклад: $\frac{3}{7}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 2}=\frac{6}{14}$; $\frac{15}{20}=\frac{15:5}{20:5}=\frac{3}{4}$.

Зведення дробів до найменшого спільного знаменника

Щоб звести дроби до найменшого спільного знаменника, потрібно:

1) знайти найменше спільне кратне знаменників даних дробів (це й буде найменший спільний знаменник);

2) знайти додатковий множник для кожного дробу, поділивши найменший спільний знаменник на знаменники даних дробів;

3) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник.

Наприклад, для дробів $\frac{3}{4}$ і $\frac{5}{6}$ матимемо:

1) НСК(4; 6) = 12;

2) додаткові множники: $12:4=3$; $12:6=2$;

3) $\frac{3^{\backslash 3}}{4}=\frac{9}{12}$; $\frac{5^{\backslash 2}}{6}=\frac{10}{12}$ — звели дроби $\frac{3}{4}$ і $\frac{5}{6}$ до найменшого спільного знаменника 12.

Порівняння звичайних дробів

Із двох дробів з однаковими знаменниками більший той, чисельник якого більший, і менший той, чисельник якого менший.

Наприклад: $\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$; $\frac{5}{7} < \frac{8}{7}$.

Щоб порівняти дроби з різними знаменниками, потрібно звести їх до спільного знаменника і порівняти одержані дроби.

Додавання і віднімання звичайних дробів

Щоб *додати (відняти) дроби з однаковими знаменниками*, потрібно додати (відняти) їхні чисельники і суму (різницю) записати в чисельнику, а знаменник залишити той самий.

Наприклад: $\frac{3}{11} + \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$; $\frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$; $1 - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Щоб *додати (відняти) дроби з різними знаменниками*, потрібно: 1) звести дроби до спільного знаменника; 2) додати (відняти) одержані дроби з однаковими знаменниками.

Множення і ділення звичайних дробів

Щоб *помножити один дріб на другий*, потрібно помножити їхні чисельники і добуток записати в чисельнику, помножити їхні знаменники і добуток записати в знаменнику.

Щоб *поділити один дріб на другий*, достатньо ділене помножити на число, обернене до дільника.

Наприклад: $\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{16} = \frac{{}^{1}\cancel{2} \cdot \cancel{15}^{3}}{\cancel{5}_{1} \cdot \cancel{16}_{8}} = \frac{3}{8}$; $\frac{5}{8} : \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 2} = \frac{15}{16}$.

Знаходження дробу і відсотків від числа

Щоб *знайти дріб від числа*, достатньо число помножити на цей дріб.

Щоб *знайти відсотки від числа*, достатньо записати відсотки у вигляді дробу і помножити число на цей дріб.

Наприклад: 30 % від числа 140 — це 0,3 від числа 140:

$$140 \cdot 0{,}3 = 42.$$

Знаходження числа за відомим значенням його дробу чи відсотків

Щоб *знайти число за відомим значенням його дробу*, достатньо це значення поділити на дріб.

Щоб *знайти число за його відсотками*, достатньо записати відсотки у вигляді дробу й поділити значення відсотків на одержаний дріб.

Наприклад: знайдемо число, 15 % якого дорівнюють 3:

$$15\ \% = 0{,}15; \qquad 3 : 0{,}15 = 20.$$

5. ВІДНОШЕННЯ І ПРОПОРЦІЇ

Відношення

Відношенням двох чисел називають частку цих чисел.

$a : b$ — відношення числа a до числа b.

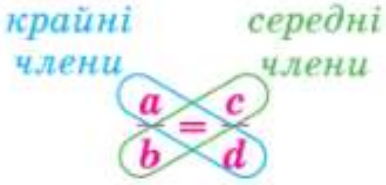
Щоб *знайти відсоткове відношення двох чисел*, потрібно знайти відношення цих чисел і записати результат у відсотках.

Наприклад, відсоткове відношення чисел 7 і 25 дорівнює:

$$7 : 25 = 0{,}28 = 28\ \%.$$

Пропорції

Рівність двох відношень за умови, що вона є правильною, називають *пропорцією*.



Основна властивість пропорції

Якщо $a : b = c : d \left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$ — пропорція, то $ad = bc$.

6. РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

... −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Цілі числа

$28;\ 2{,}51;\ 3\frac{2}{9};\ -45;\ -30{,}5;\ -8\frac{2}{3};\ 0$ — ***раціональні числа***

Модуль числа

Модулем додатного числа і числа 0 є це саме число; модулем від'ємного числа є протилежне йому число:

$|a| = a$, якщо $a \geq 0$; $\quad |a| = -a$, якщо $a < 0$.

Наприклад: $|5{,}3| = 5{,}3$; $\quad |0| = 0$; $\quad |-8| = 8$.

Додавання і віднімання раціональних чисел

Щоб *знайти суму двох від'ємних чисел*, потрібно додати їхні модулі й поставити перед одержаним числом знак «−».

Щоб *знайти суму двох чисел з різними знаками*, потрібно: 1) знайти модулі доданків; 2) від більшого модуля відняти менший модуль; 3) поставити перед одержаним числом знак того доданка, модуль якого більший.

Наприклад:

$-16 + (-9) = -25$; $\quad 3{,}2 + (-4{,}4) = -(4{,}4 - 3{,}2) = -1{,}2$.

Щоб *знайти різницю двох чисел*, достатньо до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику.

Наприклад: $-15 - (-9) = -15 + 9 = -6$.

Множення і ділення раціональних чисел

Щоб *знайти добуток двох від'ємних чисел*, достатньо перемножити їхні модулі.

Щоб *знайти добуток двох чисел з різними знаками*, достатньо перемножити їхні модулі та поставити перед одержаним числом знак «−».

Наприклад: $-5 \cdot (-9) = 5 \cdot 9 = 45$; $-5 \cdot 9 = -(5 \cdot 9) = -45$.

Щоб *знайти частку двох від'ємних чисел*, достатньо модуль діленого поділити на модуль дільника.

Щоб *знайти частку чисел з різними знаками*, достатньо модуль діленого поділити на модуль дільника і поставити перед одержаним числом знак «−».

Наприклад:

$$-15 : (-3) = 15 : 3 = 5; \quad 15 : (-3) = -(15 : 3) = -5.$$

Властивості дій з раціональними числами

Властивості додавання

$a + b = b + a$ — *переставна властивість*

$(a + b) + c = a + (b + c)$ — *сполучна властивість*

Властивості множення

$ab = ba$ — *переставна властивість*

$(ab)c = a(bc)$ — *сполучна властивість*

$a(b + c) = ab + ac$ — *розподільна властивість*

Правила розкриття дужок

Щоб *розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+»*, потрібно опустити дужки і знак «+», що стоїть перед ними, і записати всі доданки, які були в дужках, зі своїми знаками:

$$a + (-b + c) = a - b + c.$$

Щоб *розкрити дужки, перед якими стоїть знак «−»*, потрібно опустити дужки і знак «−», що стоїть перед ними, і записати всі доданки, які були в дужках, із протилежними знаками:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

§ 1. **12.** $5n$ кг; 240 кг. **13.** $40k$ кг; 200 кг. **20.** $b = -7$. **21.** $a = 2{,}5$. **22.** $x = 2$. **29.** $1{,}1(k - 500)$ грн; 7700 грн. **30.** $0{,}6(m + 10)$ лип; 33 липи. **31.** 1) 1; 2) 0. **32.** 0. **33.** −3; −28. **36.** На 25 %. **40.** 27 кг. **41.** *Вказівка.* Нехай a — найменша з відстаней між двома мавпами. З'ясуйте, куди дивляться мавпи, відстань між якими дорівнює a. **49.** 1) $2x - 11z$; 2) $-14a + 15b - 3$. **51.** 1) $-2k - 6$; −4; 2) $2a - b + 18$; 27. **54.** 1) 4; 2) −2; 3) 0; 4) −0,75. **55.** 1) −1; 2) −6. **59.** $2(2a - 3)$ м. **60.** $5b$ см. **63.** 1) $28c + 22$; 2) $x - 4{,}5$; 3) $-6x - y + 3z$; 4) $4a - 6b$; 5) $-6x + 18$; 6) $15n - 20$. **64.** 1) $-4a + 12$; 2) $1{,}5a - 3{,}7b$; 3) $12n + 18$; 4) $\frac{2}{9}x - \frac{4}{9}y$. **65.** 15. **66.** 0. **69.** 7. **72.** 1) 1; 2) 4,5. **73.** 1) −3; 2) 1,5. **74.** $(3k - 4)$ км; 236 км. **75.** $(2{,}5x - 4)$ яблука. **76.** 1) На $0{,}6k$ грн; 2) $1{,}6k$ грн. **79.** 1) $0{,}96n$ грн; 2) на $0{,}04n$ грн. **80.** $1{,}7a$ грн. **82.** 250 г. **83.** 250 т. **84.** На 8 %. **85.** 7 намист. *Вказівка.* Врахуйте, що в намисті чорні перлини можуть бути поруч, через одну, через дві і т. д. **99.** 1) 256; 2) −250; 3) −1; 4) 10. **102.** 1) −7; 9; 2) 1; 0,0016. **113.** 1) 2; 2) −2; 3) 0,4. **114.** 1) −5; 2) 6; 3) 0,25. **115.** 1) 0; 100; 0; 2) 0; 99; −1. **116.** 1) 1, якщо $b = 1$; 2) −5, якщо $y = -0{,}5$. **117.** 1) −5; 2) 0,5. **118.** 1) 0; 2) коренів немає. **119.** 1) $x = 0$; $y = -1$; 2) $m = 2$; $n = 0{,}5$. **120.** $a = 0$; $b = 4$. **122.** 1) 1,4; 2) 2. **123.** 7 матчів виграла, 2 зіграла внічию. **125.** Попелюшка. *Вказівка.* Після кожного ходу кількість букетів збільшується на 1. Оскільки всього є 32 троянди, то, маючи 2 букети, одержати 32 букети з однієї троянди можна за $32 - 2 = 30$ ходів. Врахуйте, що парні ходи робить принц. **140.** 1) 64; 2) −27; 3) 16,25; 4) 25. **143.** 1) 20 000; 2) −2; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 100 000; 5) 1; 6) 8; 7) 1; 8) $-9\frac{1}{3}$. **144.** 1) 0; 2) 10 000; 3) 1; 4) 25; 5) $\frac{4}{9}$; 6) $1\frac{6}{7}$. **147.** 1) a^{35}; 2) x^{18}; 3) k^{22}; 4) a^{15}. **148.** 1) c^{22}; 2) a^{15}; 3) y^{16}; 4) b^{12}. **149.** 1) 27; −27; 2) 2,25; $5\frac{4}{9}$. **150.** −27; $\frac{1}{27}$. **151.** 1) 16; 2) 5; 3) 0,01; 4) $2\frac{7}{9}$. **152.** 1) 81; 2) 4. **153.** 3) 9; 4) 1. **158.** 19. **159.** 2000 користувачів. **160.** 1) 60 см × 60 см; 2) 42 плитки; 3) 10 500 грн. **161.** 0 або 9. **174.** 1) $-12{,}5a^7b^5$; 2) $0{,}27a^6b^5$; 3) $-10x^5y^8$; 4) $16a^6b^{12}$; 5) $-0{,}5m^{10}n^8$; 6) $a^7b^7c^7$. **175.** 1) $-8m^4n^3$; 2) $-2{,}1p^5q^3$; 3) $-9a^{12}b^5$; 4) $-12x^9y^5z^6$. **176.** 1) 400 000; 2) 1; 3) −32. **177.** 1) −10; 2) 256. **178.** 1) 12; 2) 4; 3) 64; 4) −24. **185.** 1) $8a^{3n+1}b^{2n+2}$; 2) $-2x^{22n}$. **186.** 1) $16x^{48}$; 2) a^{8n+5}. **187.** −16. **188.** 1. **189.** У 8 разів. **191.** 1) 2;

2) −4. **192.** 12 000 грн. **193.** 9 слив. **194.** *Вказівка.* Припустимо, що кожний хлопець зіграв більше, ніж 5 матчів. Урахуйте, що тоді в усіх матчах загалом зіграли більше, ніж $5 \cdot 30$ хлопців. **197.** $(3n - 2)$ квітки. **198.** $(160t + 35)$ км. **199.** $1{,}25n$ грн. **202.** 1,8. **206.** 3) −1; 4) 625; 5) 32; 6) 5. **209.** 1) $-6x^4y^2$; 2) $-0{,}2a^5b^5$; 3) $-10x^6z^5$; 4) $-256m^8n^{21}$. **210.** 2) 27; 3) −320. **214.** 1) 0,5; 2) 0; 3) коренів немає. **215.** 3.

Завдання для самоперевірки № 1. **1.** Г. **2.** Б. **3.** В. **4.** Г. **5.** В. **6.** Г. **7.** Г. **8.** В. **9.** А. **10.** 1 — Б; 2 — В; 3 — Г. **11.** 1) −225; 2) −1. **13.** 32. **14.** 1) $-4a^5b^8 \cdot (-16a^7b^{10})$; 2) $(4a^4b^6)^3$. **15.** 26. **16.** 0,5. **17.** $(2x - 20)$ м.

§ 2. **226.** 1) 12; 2) −17; 3) 0,44. **227.** 1) 8; 2) −27. **230.** 1) −0,44; 2) −15; 3) −10. **231.** 1) 168; 2) 2. **237.** 1) −2; 2) −0,6. **238.** 1) 17,6 кг; 2) 25 кг. **239.** 18,4 км/год. **240.** Не може. *Вказівка.* Врахуйте: якби кенгуру повернувся в початкову точку, то кількість стрибків в один бік дорівнювала б кількості стрибків у протилежний бік і загальна кількість стрибків була б парною. **253.** 1) −1; 2) 2. **254.** 1) −2; 2) 1. **255.** 1) a^2b^3; 2) $-x^4 - 2x - 11$; 3) $2xy - 2x^2$. **256.** 1) $8ab + 4b^2$; 2) $-n^2 + 8n$. **257.** 10; 2,5. **258.** 0; 1,04. **263.** 1) $P = -3x^2 - x + 3$; 2) $P = x^2 + 2$; 3) $P = 3x^2$. **264.** $-2x^2 + 2x + 6$. **265.** 1) 2; 2) −1,75. **266.** 1) −1,2; 2) 2. **267.** $(3n - 8)$ яблунь. **268.** $(3m + 2)$ кг. **276.** 25 т. **277.** На 44,2 %. **278.** Порівну. **284.** 4) $2m + 3$; 5) $4a^2$; 6) x^2. **285.** 3) $-2y^2$; 4) 0. **286.** 1) 2; 2) −4,5; 3) 2; 4) 6. **287.** 1) 7; 2) −3. **288.** 8 грн. **289.** 6 л. **290.** 1) $2a + 8$; 2) $15x^6 - 18x^4$; 3) $8m^4n^2 - 8m^4n^3$; 4) $2abc$; 5) $-2x^2 + x$. **291.** 1) $b^4 - 2b$; 2) $2x^2$; 3) $-10m^3n^5$; 4) $-6a^2b^2 - 4a^4$. **297.** 1) 3; 2) 5; 3) 9,5; 4) −2. **298.** 1) 1; 2) −1,8; 3) 1,5. **299.** 24 клени; 8 лип. **300.** По 110 яблук. **301.** 90 км/год. **302.** 1) $-a^n$; 2) 0. **303.** 0. **305.** 1) −1; 2) 4. **306.** 0. **307.** 12 хв. **309.** 1) $4a^5b^4$; 2) $-54x^5y^8$. **310.** 2) 60; 3) 120; 4) 15. **311.** 3,6 год. **312.** Ні. *Вказівка.* Обґрунтуйте, що будь-яке одержане число ділитиметься на 9. **318.** 1) −12; 2) $6a^2 - 4$; 3) $4x^2$; 4) $a^3 + 3a$; 5) $a^2 - 3b^2$; 6) $4y^2$. **319.** 1) $5x + 6$; 2) $3a^2$; 3) $b^2 + 2bc$; 4) $2m^2 - 3n^2$. **320.** 1) 5; 2) 0,6. **321.** 1) 4; 2) 1. **326.** 1) $12a^2 - 10$; 2) $45x - 4$; 3) $5a$; 4) $7b^3$; 5) $14x^4y^2$. **327.** 1) $18x^2 - 15$; 2) $-35b + 10$; 3) x^3; 4) $2ab$. **335.** 1) 1,8; 2) 2; 3) −0,6. **336.** 1) 1; 2) −0,5. **337.** 0. **340.** 1) −4; 2) −1. **341.** 1. **342.** 6 м; 4 м. **343.** 8 см; 4 см. **344.** 3; 4; 5. **347.** 8000 грн. **348.** 16 км.

349. Ні. *Вказівка.* Обґрунтуйте, що за вказаних ходів парність кількості чашок, які стоять догори дном, не змінюється. **361.** 1) 6,25; 2) 103. **362.** 1) 1,96; 2) 28. **363.** 1) 0; 5; 2) 0; −3. **364.** 1) 0; −2; 2) 0; 2. **365.** 3) $12x^4y^4(3y - 4x^2)$; 4) $8a^2b^2(3b - 2ab - 5a)$; 5) $-6m^4n^5(5n - 2m + 7mn)$; 6) $4abc(2c + 5b - 3a)$. **366.** 2) $2x^4z^3(1 + 2z - 2z^2)$; 3) $15a^2b^2(3a^2 - 4ab + 5b^2)$; 4) $-18k^2n^4(2n - 3k + 5)$. **367.** 4) $(a-b)(m-3)$; 5) $(n - 3)(a^2 + 5)$; 6) $(x - 2)(x+2)$; 7) $(a-b)(2x-a+b)$; 8) $2x(a+b)(2+a+b)$. **368.** 3) $(s-t)(a-b)$; 4) $(a-b)(2+x)$; 5) $(m - 4)(m - 9)$; 6) $(m - n)(k + 2m - 2n)$. **369.** 1) 0,5; 2) −3. **370.** 1) 5; 2) 2. **371.** 1) 7800; 2) −9,3; 3) 3,6; 4) 0. **372.** 1) 17 400; 2) 22,5. **375.** 1) 0; 20; 2) 0; 0,4; 3) −2; 4; 4) 1,5; 2. **376.** 1) 0; −0,2; 2) 0; 0,4; 3) −2,5; 3; 4) −2; 7. **377.** 1) 0; 2) 0. **378.** 0. **383.** 1) 2,5; 4; 2) −4; 6. **384.** 1) −3; 3; 2) −4; 2. **387.** 1) 263; 2) 1. **388.** 276 м. **389.** Ні. *Вказівка.* Припустимо, що розставити відповідним чином числа можна. Підрахуйте двома способами суму всіх чисел таблиці. **396.** 1) $(a + b)(m - n)$; 2) $(x - y)(2 - a)$; 3) $(a - b)(5 + x)$; 4) $(y - 1)(a - 3)$; 5) $(a + 1)(a^2 + 1)$; 6) $(x - 4)(x^2 + 2)$. **397.** 1) $(x + y)(3 - k)$; 2) $(c + b)(6 - a)$; 3) $(m - x)(a - 2)$; 4) $(x - 2)(x^2 + 1)$. **398.** −2. **399.** 30. **400.** 1) $(b - a)(b - 2)$; 2) $(x + y)(10 + x)$; 3) $(3 - x)(a + x)$; 4) $(a^2 + b^2)(1 - ay)$; 5) $(c + 2)(3a^2 - 5bc)$; 6) $(2x^2 + 3y)(6 + 5x)$; 7) $(x + 4yz)(3xyz - 1)$; 8) $(3y - 4x)(0{,}3a + 0{,}4y)$. **401.** 1) $(a + 2b)(a + 3)$; 2) $(x + 3a)(x - 2)$; 3) $(y^2 - a)(x^2 + 2y)$; 4) $(a - 2c)(2ab - 1)$; 5) $(2x^3 + 3y^2)(3y + 4z^2)$; 6) $(n^2 + 3a^2)(0{,}2an - 0{,}5)$. **402.** 1) 2,5; 2) 37. **403.** 38. **404.** 1) 14; 2) −4. **405.** 11. **406.** 1) −5; 4; 2) −2; 0,5. **407.** 1) −3; 4; 2) −1,5; 4. **408.** 1) $(a - b + c)(x + 3)$; 2) $(x^2 - y^2 + 4z)(a - 4b)$; 3) $(a + b)(-5 + 3n - m)$; 4) $(b + c)(n^2 + p^2 - p)$. **409.** 1) $(a - b + 1)(c + d)$; 2) $(x + y + 2)(xy + 1)$; 3) $(a + b)(2a^2 + 2b - 1)$. **410.** 1) $(a - 2)(a - 5)$; 2) $(x + y)(x + 2y)$. **411.** 1) $(x + 1)(x + 4)$; 2) $(a - 3b)(a - 4b)$. **412.** 1) 1; 2; 2) −1,5. **413.** 1) −4; −2; 2) 5. **417.** 26 л. **418.** 28 т/га; 32 т/га. **419.** Хлопців на 5 більше, ніж дівчат. **424.** 1) $4b^2 - 27$; 2) $4x + 8$; 3) $-ab^2 + 2a$. **428.** 7 см; 5 см. **429.** 5) $(x - y)(3 - a)$; 6) $(x + 2)(x^2 + 1)$; 7) $(1 - 2y)(x + 2y)$; 8) $5(b + 2)(a^2 - 2bc)$. **430.** 1) −18; 2) 85. **432.** 1) 2; 2) −1; 3) −1,5; 4) 1,5; 5) 0; 3; 6) −0,25; 1,5; 7) 2; 3; 8) 2.

Завдання для самоперевірки № 2. **1.** В. **2.** Г. **3.** Б. **4.** Б. **5.** В. **6.** Г. **7.** В. **8.** Б. **9.** В. **10.** 1—Г; 2—А; 3—В. **11.** $-ab^3$. **12.** 6. **14.** $(m - k)(m - 3)$; 3. **17.** $(x - m)(x - ab)$. **18.** 0; 1.

§ 3. **436.** 1) a^3; 2) 25; 3) -1; 4) $4a^2$. **437.** 1) m^2; 2) $-16b^2$. **439.** 1) 91; 2) 3,51. **440.** 1) 2; 2) -12. **441.** -5. **447.** 1) 3; 2) -5; 3) $-4x^4$; 4) a^6; 5) $-6b^3 + 24b$; 6) 0. **448.** 1) 7; 2) $25 - 2c$; 3) $9b^2$; 4) $8a^2$. **449.** 1) $b^4 - 1$; 2) $16x^4 - 1$; 3) $y^4 - 16z^4$; 4) $a^8 - 1$. **450.** 1) $81 - c^4$; 2) $256x^4 - y^4$. **453.** 1) 5; 2) 0,4; 3) 0,5; 4) 0. **454.** 1) 27; 2) 1; 3) -1. **455.** 1) $a^{32} - b^{32}$; 2) $6b^2$. **456.** a^4. **457.** 1) 25; 2) -256; 3) -1. **458.** 1) -625; 2) 1. **459.** -1. **460.** 1) Сітки мають ту саму довжину; 2) перший. **463.** 117 км. **464.** 12 %. **465.** Так. *Вказівка.* Врахуйте, що один гном може мати 0, 1, 2, 3, 4 або 5 цукерок — усього 6 варіантів. **471.** 1) $2a^2 + 2$; 2) b^2; 3) $-20x$; 4) $2x - 2$. **472.** 1) 16; 2) $2x^2 + 8$. **473.** 1) 1; 2) -2. **474.** 1) -5; 2) 1. **479.** 1) $-8k$; 2) $2a^2 + 8b^2$; 3) $x^4 + 25x$. **480.** 1) $4z^2 + 50$; 2) 1. **481.** 1) 0; 53; 2) 7. **482.** 12; -16. **487.** 1) $-0,3$; 2) 2; 3) 0,5; 4) 0,25. **488.** 1) 1; 2) -9; 3) -1. **489.** 32 см; 40 см. **490.** 80 м $\times$ 80 м. **494.** 1) $m^3 + n^3$; 2) $-4a^2b^2$; 3) 16. **495.** 1) $-3x^2y + 3xy^2$; 2) 1. **500.** 1360 ц. **501.** 12 хв. **502.** $m = 27$; $n = 1$. **510.** 2) $-0,8$; 0,8. **511.** 2) $-0,7$; 0,7. **514.** 1) $(a + 1)(a + 3)$; 2) $(3x - 4)(3x + 2)$; 3) $(b + 2)(5b + 2)$; 4) $(-2n + 5)(12n - 5)$; 5) $(x + 1)(7x + 5)$; 6) $(-2a - 7b)(4a + 3b)$. **515.** 1) $(b + 3)(b + 7)$; 2) $(2k - 7)(2k + 5)$; 3) $(4a - 3)(12a + 3)$; 4) $(-x + 2y)(9x - 4y)$. **516.** 1) 0,4; 2) 0. **517.** 1) $-17,5$; 2) 190. **518.** 1) -36; 2) $2\frac{1}{7}$. **519.** 1) 44; 2) $\frac{2}{7}$. **521.** 1) -4; -2; 2) $-0,2$; 1; 3) -5; -1; 4) -6; 0. **522.** 1) 2; 3; 2) 1; 3. **526.** 1) -2; 1; 2) -3; 3. **527.** 1) -1; 1; 2) -2; 2. **531.** 1) 12 років; 2) 6 років. **532.** 54 000 грн. **533.** Ні. **541.** 1) 100; 0,01; 400; 2) 400; 10 000; 3) 1. **542.** 1) 100; 100; 2) 1. **543.** 1) 10 000; 2) 4. **544.** 1) 400; 2) 100. **547.** 1) 1; 2) 100; 81. **548.** $\frac{1}{9}$. **549.** 1) 4; 2) -6; 3) 10; 4) -3. **550.** 1) 3; 2) -5; 3) 2. **551.** 25. **552.** 4. **553.** 2) $(m - 1)^2 + (n + 2)^2$; 3) $(a + b)^2 + (b - 2)^2$; 4) $(a - c)^2 + (b - 2c)^2$. **554.** $x = 3$; $y = 3$. **555.** $a = -1$; $b = 1$. **558.** -9, якщо $b = 4$. **559.** 3, якщо $x = -3$. **563.** 105 км. **564.** Порівну. **574.** 1) y^3; 2) 64. **575.** 1) a^3; 2) 1. **576.** -7; 126. **577.** -26; 65. **583.** 1) x^6; 2) 0; 3) 16. **584.** 1) k^6; 2) $2b^3$. **585.** 1) 0; 2) -91. **586.** 0. **587.** 1) -2; 2) 8. **588.** 1) 1; 2) 4,5. **589.** 1) $(b+3)(b^2-9b+39)$; 2) $(x+3)(7x^2+15x+9)$. **590.** 1) $(c - 1)(c^2 + 10c + 37)$; 2) $(2y - 1)(y^2 - y + 1)$. **591.** 2) 91. **592.** 2) 448. **595.** 1) -2; 2; 2) -4; -1. **596.** 5 чисел. **597.** Міді. **598.** *Вказівка.* Припустимо, що деякі дві дівчини A і B не є сестрами. У такому випадку вони не мають спільної сестри і тому разом мають не менше 4 сестер. Тоді всього має бути щонайменше $4 + 2 = 6$ дівчат. Зробіть висновок. **600.** 4) $x^2(x - 1)(x + 1)$; 5) $4a(1 - a)(1 + a)$; 6) $n^3(n - 2)(n + 2)$; 7) $c(3 - b)(3 + b)$; 8) $2(a - x)(a^2 + ax + x^2)$; 9) $y(3 + x)(9 - 3x + x^2)$. **601.** 3) $4y^2(1 - y)(1 + y)$; 4) $6a(m - 1)(m + 1)$; 5) $2x(y - 2)(y + 2)$; 6) $4(k + 2)(k^2 - 2k + 4)$.

602. 3) $-(m-c)^2$; 4) $5(3+k)^2$; 5) $a(a+4)^2$; 6) $m(1-5m)^2$. **603.** 2) $n(7-c)^2$; 3) $-(a-2b)^2$; 4) $x(x-6)^2$. **604.** 1) 11 600; 2) 300. **605.** 1) 800; 2) 20. **606.** 1) -3; 3; 2) $-0{,}2$; $0{,}2$. **607.** 1) -5; 5; 2) $-0{,}5$; $0{,}5$. **608.** 1) $(a-n)(a+n)(a^2+n^2)$; 2) $(k-2)(k+2)(k^2+4)$. **609.** 1) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$; 2) $(3-b)(3+b)(9+b^2)$. **610.** 1) $(a+b)(a-b+1)$; 2) $(x-a)(x+a+1)$; 3) $(m-n)(2m+2n-3)$; 4) $(2x-y)(2x+y-1)$; 5) $2a(a+4)$; 6) $(z+k)(3z-k)$. **611.** 1) $(c-b)(c+b+1)$; 2) $(x+y)(3+x-y)$; 3) $(a-x)(a+x+4b)$; 4) $2m(m-2)$. **612.** 15. **613.** 0. **614.** 1) $(x-y-z)(x-y+z)$; 2) $(b+3-k)(b+3+k)$; 3) $(m-a-2b)(m+a+2b)$; 4) $(a+b-c+1)(a+b+c-1)$. **615.** 1) $(m+n-k)(m+n+k)$; 2) $(a-1-b)(a-1+b)$; 3) $(c-x+y)(c+x-y)$; 4) $(x+1-b-c)(x+1+b+c)$. **616.** $(2x-y+2)(2x+y-2)$; 24,8. **617.** $(3p-q+5)(3p+q-5)$; 0. **618.** 1) $k(n-3)(m+8)$; 2) $3x^3(b-1)(x+1)$. **619.** 1) $c(1+x)(2a+b)$; 2) $m(a-b)(m+3)$. **620.** 1) -1; 0; 1; 2) $-0{,}5$; 0; $0{,}5$; 3) -2; 2; 4; 4) -5; $0{,}5$; 5. **621.** 1) -2; 0; 2; 2) -3; 0; 3; 3) -4; 1; 4. **622.** 1) $(a+6)(a+2)$; 2) $(x-5y)(x-y)$; 3) $3a(a+x)(3-x)$; 4) $xy(a-1)(xy+5)$; 5) $(a-b)(2a-2b+1)$; 6) $3ab(a-b)$. **623.** 1) $(x-4)(x+2)$; 2) $(a+2b)(a+4b)$; 3) $-ab(a+b)(a+1)$; 4) $2x^2(x+3y)(x-2)$. **626.** 1) 1; 7; 2) -6; 2; 3) -2; 2; 3; 4) -1; 0,25; 1. **627.** 1) -1; 5; 2) -6; 4; 3) -3; -2; 3. **630.** 125 кг. **631.** 8 год. **632.** Ні. *Вказівка.* Припустимо, що такий обхід можливий. Розглянемо вершину куба, яка не є ні початком, ні кінцем обходу. Урахуйте: скільки разів жук заповзає в цю вершину, стільки разів і виповзає з неї щоразу по різних ребрах. **635.** 1) -27; 2) $6x^2-2$; 3) $29a^2$; 4) $9b+1$. **637.** 1) 4; 2) -6. **641.** 1) $-1{,}25$; 2) 5; 3) -16. **643.** 1) $(m-k)(m-3n)$; 2) $(z+1)(z-3)(z+3)$; 3) $(a-b)(a+b-2x)$; 4) $(5c-k-5)(5c+k+5)$. **644.** 1) -9; 9; 2) -3; 0; 3; 3) -3; 7; 4) -1; 1; 5.

Завдання для самоперевірки № 3. **1.** Г. **2.** В. **3.** Г. **4.** В. **5.** Б. **6.** В. **7.** Г. **8.** В. **9.** Б. **10.** 1—Д; 2—В; 3—Б. **11.** $-0{,}8$. **13.** 1) $3a^2(a+2b)^2$; 2) $(m-2n)(m+2n+1)$. **14.** 1) 1,6; 2) -4; 0; 4. **15.** $x^4-8x^2y^4$. **16.** 1) $(c-7)(c+5)$; 2) $x(x-m)(x-6n)$. **17.** 1) -8; -1; 1; 2) $-0{,}6$; 0.

§ 4. **658.** 2,5; 4. **659.** -1; 2. **665.** 1) $y=0{,}8x$. **666.** 1) $y=1{,}2x$. **667.** 1) 0; 4; 2) 2. **668.** 1) -2; 0; 2) -1. **672.** $s=200-80t$; $0\le t\le 2{,}5$; $0\le s\le 200$. **675.** 1, якщо $x=-3$. **676.** -2. **680.** 6 чисел. **681.** 120 г. **697.** 5) $-2\le x\le 2$. **701.** 3) $5\le t\le 10$; 4) 5 с; 50 м. **702.** 2) 0,5 год; 3) 4 км/год; 5 км/год. **705.** 3) на 10 с; 4) $1\frac{2}{3}$ м/с;

$1\frac{1}{4}$ м/с. **707.** 129,5 кг. **709.** 300 см. **710.** Ні. *Вказівка.* Сума S всіх заданих чисел є парним числом. Якщо стерти числа a і b, то сума усіх чисел, що залишаться, дорівнюватиме $S - a - b$. Записавши після цього число $a - b$ або $b - a$, матимемо числа, сума яких дорівнюватиме $(S - a - b) + a - b = S - 2b$ або $(S - a - b) + b - a = S - 2a$. В обох випадках нова сума є парною. Зробіть висновок. **730.** 1) (1,5; 5); 2) (1; −1); 3) (6; 1). **731.** 1) (1; 1); 2) (0; 2). **733.** 1) (−3; 0); (0; −4,5); −3; 2) (70; 0); (0; −21); 70; 3) (0; −8); вісь x не перетинає; нулів немає. **734.** 1) (−4; 0); (0; 10); −4; 2) (3; 0); (0; 4,8); 3; 3) (0; 6); вісь x не перетинає; нулів немає. **742.** 2) 60 км/год; 80 км/год; 4) $s = 60t$. **743.** 2) 15 м/с; 3) 30 м. **744.** (5,2; 12,8). **745.** (11; 29). **746.** $k = -1{,}5$. **747.** $b = 7$. **750.** 1) $V = 34 - 0{,}085s$; 2) 18,7 л; 3) 400 км. **751.** 1) $V = 30 + 1{,}5t$; 2) 75 м³; 3) 40 хв. **752.** 1) −4; 2) −3,6. **754.** 25 %. **755.** 360 г; 120 г. **756.** 16. *Вказівка.* Нехай $m^2 - 225 = p$, де p — просте число. Тоді $(m - 15)(m + 15) = p$. Обґрунтуйте, що в такому випадку $m - 15 = 1$. **757.** 3) $x = 0{,}75$. **759.** 3) На 40 °С; 4) на 20 °С. **762.** 1) (−0,5; 0); (0; −1); 2) $x < -0{,}5$. **765.** (1,5; 0); (0; 6). **766.** 1) (1; 3); 2) (−0,4; 6,6). **767.** $x = 0$, $x = 4$ — нулі функції; −4 — найменше значення. **769.** 3) 32 °F; 212 °F.

Завдання для самоперевірки № 4. **1.** В. **2.** Б. **3.** Б. **4.** Г. **5.** В. **6.** В. 7. 1–Г; 2–В; 3–Д. **8.** В. **9.** Г. **10.** В. **11.** 1) -3; $-1 \le x \le 3$; 2) $-3 \le x \le 5$; $1 \le y \le 3$. **12.** 0; 6. **13.** $x < -1$. **14.** Так. **15.** −2; 0. **16.** (2,8; 3,4). **17.** −7. **18.** $-0{,}5 < x < 0{,}5$.

§ 5. **778.** 1) 1; 2) 0,4; 3) 4; 4) −3; −2,5. **779.** 1) 4; 2) −6; 3) 14; 4) −1. **780.** 1) −3; 2) −0,5; 3) 12; 4) 8. **784.** 1) −1,4; 0,25; 2) коренів немає. **785.** 1) −2,5; 1,25; 2) коренів немає. **786.** 1) 0,2; 2) 1,125; 3) $\frac{2}{15}$. **787.** 1) 16; 2) −1,5. **788.** $b = -1$. **789.** $a = 14$. **790.** 2) −9; 0; 9; 3) −2; 2. **791.** 1) −3; 1,5; 2) 2. **792.** 1) $2x^2 + 2y^2$; 2) $10m^2$. **794.** Другому. **795.** 1) 54 080 осіб; 2) 50 000 осіб. **804.** 1) 3; 2) 0; 3) коренів немає; 4) коренем є будь-яке число; 5) −2; 6) −0,5. **805.** 1) −1; 2) коренів немає; 3) −2; 4) 4,5. **806.** −9. **807.** 9. **808.** 1) 5; 2) 6; 3) 0,4; 4) −1; 5) $\frac{1}{9}$; 6) −9,8. **809.** 1) 4,5; 2) 1; 3) −4; 4) −5. **810.** (1; −1). **811.** 1,2. **812.** 4. **813.** 9. **814.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) 5; 4) −8. **815.** 1) −1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) −1. **816.** 1) −2; 9; 2) 10; 20; 3) −7; 11; 4) −3; 1. **817.** 1) −0,5; 3; 2) 1; 5. **818.** 1) 8; 12; 2) 0; 2,5; 3) 0,4; 1,6. **819.** 1) −6; −2; 2) 3; 5. **820.** 1) $b = 3$; 2) $b = -3$. **821.** 1) $a = -2{,}5$; 2) $a = 1$. **822.** $k \ne 5$. **824.** 32.

825. $(3a + 15)$ км. **826.** $(5a - 2)$ км. **827.** 33 м'ячі. **829.** 35 осіб. **830.** 120 сторінок. **832.** 18 і 15 комп'ютерів. **833.** 200 листяних; 40 хвойних. **834.** Тополя — 40 кг; сосна — 10 кг. **835.** 5 станцій. **836.** 16 сторінок. **837.** 75 км/год. **838.** 50 грн; 70 грн; 60 грн. **839.** 20, 35 і 30 саджанців. **840.** 5 хв. **841.** 5 років. **842.** 20 і 16 яблук. **843.** 36 і 12 років. **844.** 50 і 30 книжок. **845.** 20 курей. **846.** 12 кг. **847.** 300 м. **848.** 36 км. **849.** 34 км/год. **850.** 15 л; 12 л. **851.** 2 м; 1,6 м. **852.** 8000 грн. **853.** 12 яблук. **854.** 7500 грн. **855.** 1) 480 кг; 420 кг; 2) 12 хв. *Вказівка.* Час розфасування буде найменшим, якщо автомати завершать роботу одночасно. **856.** 80 км/год; 90 км/год. **857.** 560 км. **858.** 56 років. **859.** 500 г. **860.** 500 деталей. **861.** 1000 г. **862.** 1) 1; 2) −0,05. **865.** 1) Ні; 2) так. **866.** Не можна. *Вказівка.* Зафарбуйте клітинки дошки в білий та чорний кольори в шаховому порядку. Врахуйте, що після кожного ходу змінюється колір клітинки, на якій стоїть фішка. **870.** 1) 4; 2) −3; 3) −2,6; 4) 2; 5) 5; 6) −1. **871.** 1) −2; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) −3,2; 4) $\frac{1}{3}$; 5) 0; 4; 6) −2; 1. **872.** (1; 3). **873.** $a = -1$. **874.** Не існує. **875.** 80 грн. **876.** 12 і 8 років. **877.** 20 км/год. **878.** 23, 25 і 30 деталей. **879.** 30 кг. **880.** 1250 грн.

Завдання для самоперевірки № 5. **1.** В. **2.** Г. **3.** Б. **4.** В. **5.** Г. **6.** В. **7.** 1–Д; 2–Г; 3–А. **8.** Г. **9.** Б. **10.** А. **11.** (3; 1). **12.** 1) −2,5; 2) 2. **13.** 34 м; 20 м. **14.** 12 кг; 14 кг; 11 кг. **15.** −3; 1,5. **16.** $a = -1$. **17.** 2,5 кг. **18.** 500 м.

§ 6. **896.** (2; 2). **897.** $m = 2$. **898.** $p = 5$. **899.** 1) $a = -1$; 2) $a = 2{,}5$. **900.** 1) $b = 5$; 2) $b = -2$. **901.** 1) $(x; 0{,}4x - 2)$, де x — будь-яке число; 2) $(3; y)$, де y — будь-яке число; 3) $(-5; 5)$; 4) $(1; -1{,}5)$; 5) $(3; 0)$; 6) $(2; -1)$. **902.** 1) $(x; 3 - 1{,}5x)$, де x — будь-яке число; 2) $(x; -2)$, де x — будь-яке число; 3) $(4; -1)$; 4) $(0; 4)$. **903.** 6 малих і 3 великі коробки. **904.** $a = 0$; $a = 0{,}4$. **905.** $b = -7$. **908.** 8008 одиниць. **909.** На 4 %. **910.** Ганна. *Вказівка.* Після першого ходу Мирослави Ганна має відірвати одну або дві пелюстки так, щоб на ромашці утворилися два ланцюжки з однаковою кількістю пелюсток. Якщо далі Мирослава відриватиме пелюстки від одного ланцюжка, то Ганна має відривати такі самі за порядком пелюстки від іншого. **926.** 1. **927.** −2. **928.** (0; 3); (−18; 0). **929.** (0; −2,5); (2; 0). **930.** $a = -2$.

931. $c = 2$. **934.** $a = 4$; $b = 2$. **935.** $a = 2$; $b = 2$. **936.** Існує: $a = 1$. **937.** 1) $(x + y)(7 + a)$; 2) $(x - 3)(x - 1)$. **938.** −15. **939.** 28; 16. **940.** 43 км. **941.** Ні. *Вказівка.* Хоча б в одній купі має бути не менше ніж 4 яблука. Підрахуйте масу чотирьох найлегших яблук. **946.** 1) (4; 2); 2) (0; 4); 3) (2; 1); 4) (−1; 1). **947.** 1) (1; 1); 2) (3; −4); 3) (3; 4). **948.** 1) Один; 2) жодного; 3) безліч. **949.** 1) Безліч; 2) жодного; 3) один. **951.** $a = 0$; $b = 3$. **952.** $c = 2$; $d = -1$. **958.** $a = 0{,}5$; $b = -2$. **959.** $b = -4$. **960.** 1) $c \neq 2$; 2) $c = 2$. **961.** 1) 2; 2) 3. **964.** 400 т. **965.** 7 осіб. **967.** 1) (3; 3); 2) (0; 1); 3) (1; −1). **968.** 1) (1; 3); 2) (4; 1); 3) (3; 1); 4) (1; −2); 5) розв'язків немає; 6) (3; 2). **969.** 1) (7; 2); 2) (3; 5); 3) (7; 1); 4) (1; −1); 5) (1; 0); 6) (1; 1). **970.** 1) 2; 2) 1. **971.** −2. **972.** 1) (2; 1,5); 2) (1; −2); 3) (2; −1); 4) (2; 1). **973.** 1) (1; 0,5); 2) (1; −1); 3) (3; 3). **974.** 1) (2; −2); 2) (4; 5). **975.** (3; −3). **976.** 1) (3; −2); 2) (−2; 1); 3) (1; −6); 4) (1; −2). **977.** 1) (2; 4); 2) (1,5; 0,5); 3) (3; 1); 4) (5; 3). **979.** 1) (4; 3); 2) (1; −0,5). **980.** (10; 2). **981.** 1) $y = -x + 4$; 2) так. **982.** $y = 2x + 1$; 1. **983.** $b = 1{,}5$. **984.** $a = -8$. **986.** 0. **987.** Ні. **988.** 105 км. **989.** *Вказівка.* Припустимо, що кульок кожного кольору не більше шести. Тоді різних кольорів має бути щонайменше 5 (якби, наприклад, різних кольорів було 4, то всіх кульок було б не більше $6 \cdot 4 = 24$). Знайдіть протиріччя з умовою задачі. **992.** 1) (4; 3); 2) (7; 2); 3) (−1; 1). **993.** 1) (3; 1); 2) (−1; 2). **994.** 1) (−4; 2); 2) (2; −1); 3) (0; 2); 4) (9; 5); 5) (2; 1); 6) (2; −2); 7) (−1; −1); 8) (2; −2); 9) (1; −1). **995.** 1) (1; −1); 2) (−1; 3); 3) (1; −2); 4) (2; 1); 5) (1; −1); 6) (6; 4). **996.** 3. **997.** 2. **998.** 1) (1,2; −2); 2) (20; 1); 3) (1; 3,6); 4) (−2; 4). **999.** 1) (2,5; 10); 2) (6; −9). **1000.** Жодного. **1001.** Безліч. **1002.** 1) (0,5; 0,5); 2) $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; 3) (−0,5; −2); 4) (0; −1). **1003.** 1) (2,5; 1); 2) (1,5; 5). **1006.** 1) (4; 1); 2) (0; −1,5). **1007.** (−2; 3). **1008.** $a = -2$; $b = 3$. **1009.** Не існує. **1010.** $b = -4$. **1013.** 72 дерева. **1014.** 0,85 кг. **1015.** *Вказівка.* Припустимо, що знайдуться два міста A і B такі, що дорогами країни проїхати з A до B не можна. За умовою, кожне з міст A і B сполучене дорогою принаймні із 7 іншими містами. Врахуйте, що інших міст є 13 і серед них немає міста C, яке сполучене дорогою і з містом A, і з містом B (інакше з A до B можна було б проїхати через це місто). **1017.** 64 і 56 кущів. **1018.** 11 яблук; 6 груш. **1019.** 30 грн; 20 грн. **1020.** 2 л; 1 л. **1021.** 5 двомісних; 9 тримісних. **1022.** 6 монет;

2 монети. **1025.** 25; 7. **1026.** 22; 8. **1027.** 4 і 5 сторінок. **1028.** 8 грн; 22 грн. **1029.** 32 м; 20 м. **1030.** 30 км/год; 2 км/год. **1031.** 32 кг; 40 кг. **1032.** 8 і 12 деталей. **1033.** 17 і 10 тістечок. **1034.** 31 рік; 7 років. **1036.** 15 і 18 апельсинів. **1037.** 5 і 7 мішків. **1038.** 43 км/год; 3 км/год. **1039.** 28 км/год; 2 км/год. **1040.** 17 млн грн; 7 млн грн. **1041.** 60 кг; 42 кг. **1042.** 100 км/год; 80 км/год. **1043.** 90 км/год; 75 км/год. **1044.** 3 палки; 4 галки. **1045.** 8 грн; 5 грн. **1046.** 2000 грн; 1500 грн. **1047.** 48. **1048.** 53. **1049.** 38 км/год; 34 км/год; 57 км. **1050.** 5 км/год; 4 км/год. **1051.** 40 кг; 20 кг. **1052.** 1) $2m^2+3mn$; 2) $2a^2-4ab$. **1053.** 1) $(1+3b)(a-c)$; 2) $(x+y)(x-y+2)$. **1056.** *Вказівка.* Припустимо, що півлітрових банок на складі не залишилося. Якщо залишилося x банок, місткість яких 0,7 л, та y банок, місткість яких 1 л, то маємо систему рівнянь $\begin{cases} x+y=3600; \\ 0{,}7x+y=2800. \end{cases}$ Обґрунтуйте, що не існує пари натуральних чисел, яка була б розв'язком цієї системи. **1062.** 1) (2; 1); 2) (−1; −1). **1063.** 1) (4; −1); 2) (0,5; −1). **1064.** 1,5. **1065.** 1) (1; −5); 2) (3; 2). **1066.** 3. **1067.** (2; 1). **1068.** 1) (1; −3); 2) (1; −2); 3) (6; 15); 4) (10; 14). **1069.** $a=-2$. **1070.** 11 двомісних; 14 чотиримісних. **1071.** 80 км/год; 70 км/год. **1072.** 24 л; 16 л. **1073.** 20 і 40 книжок. **1074.** 150 і 100 дерев.

Завдання для самоперевірки № 6. **1.** Г. **2.** В. **3.** Г. **4.** В. **5.** А. **6.** Б. **7.** 1–Д; 2–А; 3–Г. **8.** Г. **9.** Б. **10.** Б. **11.** $b=-2$. **12.** (2; 1). **13.** (−1; −5). **14.** 17 і 19 яблук. **15.** $a=0{,}2$; $b=-0{,}6$. **16.** (1; 1). **17.** $k=-1{,}5$. **18.** 80 г; 200 г.

Повторення за курс алгебри 7 класу. **1080.** 1) 2401; 2) 1; 3) −16; 4) 7. **1082.** 64. **1086.** 5) z^3-3z^2+5z-6; 6) $b^3-8b^2+5b+14$. **1087.** 3) $0{,}09-m^2$; 4) $x^4y^2-16z^6$. **1089.** 1) $-12n^2$; 2) $-x^2+x+3$; 3) −81; 4) $-20y+50$; 5) a^3; 6) k^2. **1093.** 1) $(x-y)(a+3)$; 2) $(xy-2)(x+1)$; 3) $y(3-2a)(3a-x)$; 4) $(a+2b)(a-2b+1)$; 5) $(x-3)(x+1)$; 6) $(m-n)(m-7n)$. **1094.** 1) −4; 4; 2) −1; 0; 1; 3) 2; 4) −1; 1; 3. **1097.** 1) 2,25; 2) 4. **1100.** $x=-1$. **1101.** −5. **1108.** 3) 80 км/год; 80 км/год. **1110.** 1) (2; 3); 2) (0; 0); (−2; 4). **1111.** $b=6$. **1113.** 1) 15; 2) 5; 3) −4; 4) 2; 5) 1; 6) −1,5. **1114.** 1) 3; 2) коренів немає; 3) −3,4; 4) 2; 5) −1; 4; 6) −8; 8. **1115.** $k=4$. **1116.** Ні. **1117.** $b=1$. **1118.** 21 кг; 14 кг. **1119.** 14 м; 16 м; 10 м. **1120.** 3600 л; 1200 л. **1121.** 12 хв. **1122.** 80 сторінок. **1123.** 5 жінок. **1126.** $b=1$. **1127.** (3; 1). **1128.** 1) (4; −2); 2) (2; 2); 3) (1; −0,5); 4) (2; 3);

5) (3; 1); 6) (0,5; −1,5); 7) (−6; −7); 8) (−4; −4). **1129.** 1. **1130.** (0,5; −1). **1131.** Так. **1132.** $y = -2x - 1$. **1133.** $k = 10$. **1134.** 14 червоних, 11 жовтих яблук. **1135.** 4 км/год; 4,5 км/год. **1136.** 35 кг; 40 кг. **1137.** 7 років; 3 роки. **1138.** 19 і 14 кущів. 1139. 6 л; 12 л.

Завдання для самоперевірки № 7. **1.** Г. **2.** В. **3.** Б. **4.** В. **5.** Г. **6.** В. **7.** 1–Б; 2–Г; 3–В. **8.** Г. **9.** Б. **10.** В. **12.** $x > -0{,}5$. **13.** 0; 15. **14.** 7 т; 5 т; 6 т. **15.** 0. **16.** 1) −5; −2; 2; 2) −2,5; −1,5. **17.** $a = 3$; $b = -4$. **18.** 5000 грн.

Задачі підвищеної складності. **1140.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **1144.** 72. **1149.** 0 або 9. **1150.** 29; 38; 47; 56; 65; 74; 83; 92. **1152.** 1) $m = 1$, $n = 1$; 2) $m = 5$, $n = 1$; $m = 3$, $n = 3$; $m = 5$, $n = 9$. **1153.** 1) −1; 0; 1; 2) 0; 2; 3) −4; 0. **1155.** *Вказівка.* 1) Ціле число n може мати вигляд: 1) $n = 3k$; 2) $n = 3k + 1$; 3) $n = 3k + 2$, де k — ціле число. Розгляньте три можливі випадки. **1158.** Так (наприклад, якщо $x = -0{,}5a$). **1159.** $x = 4$. **1160.** 10 м. **1161.** $a = 2$. **1162.** 2) $b = 0$. **1164.** 1) Якщо $a = 0$ — жодного кореня; якщо $a = 1$ — безліч коренів; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 1$ — 1 корінь; 2) якщо $a = 1$ — 1 корінь; якщо $a \neq 1$ — жодного кореня. **1165.** 1) $b = 8$; 2) не існують. **1166.** 1) 1; 2) −2; 10. **1167.** 290 км. **1168.** 450 г. **1169.** 200 мл. **1170.** $a = 0{,}2$. **1172.** 1) (6; 2); 2) (−1; 1). **1173.** (2; 1); (2; −1); (−2; 1); (−2; −1). **1174.** 1) (−1; −3); 2) (−0,5; 2,5); 3) (−2; 2). **1175.** Якщо $a \neq -1$ — один розв'язок, якщо $a = -1$ — безліч розв'язків. **1176.** 1) $x = 6$; $y = 5$; $z = 4$; 2) $x = y = z = -1$. *Вказівки.* 1) Додавши рівняння системи, можна знайти значення суми $x + y + z$. Далі з першого рівняння системи можна знайти значення x, з другого і третього — значення y і z. 2) Додайте рівняння системи. **1177.** $a = \frac{1}{42}$; $b = \frac{1}{7}$; $c = \frac{1}{3}$; $d = \frac{1}{2}$. **1178.** 1,25. **1079.** 72 км/год; 96 км/год. **1180.** 6 л; 10 л. **1181.** 27,5 м/с; 22,5 м/с.

Предметний покажчик

Аргумент 113
Властивості
— лінійної функції 135
— рівнянь з однією змінною 151
— рівнянь із двома змінними 175
— степеня з натуральним показником 27
Вирази
— зі змінними 6
— цілі 6
— числові 6
Віднімання многочленів 50
Графік
— лінійного рівняння із двома змінними 180
— лінійної функції 135
— прямої пропорційності .. 136
— функції 121
Додавання многочленів 49
Залежна змінна 113
Значення
— виразу зі змінними 6
— функції 113
Коефіцієнт одночлена 34
Корінь рівняння 150
Многочлен 44
— стандартного вигляду 44
Множення
— многочленів 60
— одночлена на многочлен .. 55
— одночленів 35
— різниці двох виразів на їх суму 79
Незалежна змінна 113
Область
— визначення функції 113
— значень функції 113
Одночлен 34
— стандартного вигляду 34
Піднесення до степеня
— добутку 29
— одночлена 35
— степеня 28
Пряма пропорційність 136
Рівняння
— з однією змінною 150
— із двома змінними 174
— лінійне 156
Розв'язок
— рівняння із двома змінними 175
— системи рівнянь із двома змінними 187
Розв'язування систем лінійних рівнянь
— графічним способом 188
— способом додавання 202
— способом підстановки 195
Розкладання многочленів на множники 65
— способом винесення спільного множника за дужки 66
— способом групування 72
Система лінійних рівнянь із двома змінними 187
Способи задання функції 113
Степінь
— з натуральним показником 21
— многочлена 45
— одночлена 35
Тотожність 14
Тотожні перетворення виразів 14
Тотожно рівні вирази 13
Формула
— квадрата суми 83
— квадрата різниці 84
— різниці квадратів 89
— різниці кубів 98
— суми кубів 99
Функція 113
— лінійна 134

URL-адреси QR-кодів інтерактивних завдань

https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd01
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd02
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd03
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd04
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd05
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd06
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd07
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd08
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd09
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd10
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd11
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd12
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd13
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd14
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd15
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd16
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd17
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd18
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd19
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd20
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd21
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd22
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd23
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd24
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd25
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd26
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd27
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd28
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd29
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_zavd30

Інтерактивні завдання для самоперевірки

https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_smp01
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_smp02
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_smp03
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_smp04
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_smp05
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_smp06
https://pp-books.com/Kravchuk_Matem_7kl_smp07

ЗМІСТ

Передмова 3

РОЗДІЛ І. ЦІЛІ ВИРАЗИ

§ 1. Цілі вирази. Одночлени

1. Вирази зі змінними. Цілі вирази 6
2. Тотожно рівні вирази. Тотожності 13
3. Степінь з натуральним показником 20
4. Властивості степеня з натуральним показником 27
5. Одночлени. Стандартний вигляд одночлена 34

§ 2. Многочлени

6. Многочлени. Степінь многочлена 44
7. Додавання і віднімання многочленів 49
8. Множення одночлена на многочлен 55
9. Множення многочлена на многочлен 60
10. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки .. 65
11. Розкладання многочленів на множники способом групування 71

§ 3. Формули скороченого множення

12. Множення різниці двох виразів на їх суму 79
13. Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів 83
14. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів 89
15. Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів 94
16. Різниця і сума кубів двох виразів 98
17. Застосування кількох способів розкладання многочленів на множники 103

РОЗДІЛ ІІ. ФУНКЦІЇ

§ 4. Функції

18. Функції та способи їх задання 112

19. Графік функції. Функція як математична модель реальних процесів 121
20. Лінійна функція 133

РОЗДІЛ III. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

§ 5. Лінійні рівняння з однією змінною

21. Рівняння з однією змінною. Розв'язування рівнянь 150
22. Лінійні рівняння з однією змінною 156
23. Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь 162

§ 6. Системи лінійних рівнянь із двома змінними

24. Рівняння із двома змінними 174
25. Графік лінійного рівняння із двома змінними 180
26. Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними 186
27. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом підстановки 194
28. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом додавання 200
29. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь 206

Завдання для повторення за курс алгебри 7 класу 219

Задачі підвищеної складності 228

Відомості з курсу математики 5–6 класів.....233

Відповіді та вказівки.....242

Предметний покажчик.....252

URL-адреси QR-кодів інтерактивних завдань.....253

Навчальне видання

Кравчук Василь Ростиславович
Підручна Марія Василівна
Янченко Галина Михайлівна

Алгебра

Підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам «Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Редагування і верстання: *Оксана Гудь, Сергій Мартинюк*
Літературне редагування: *Маргарита Більчук*
Художнє оформлення: *Олена Сажко*
Дизайн обкладинки: *Олена Сажко*

Формат 70×100/16. 20,64 ум. др. арк., 18,57 обл.-вид. арк. Тираж . Замовлення №
Видавець, виготовлювач і розповсюджувач видавничої продукції
Редакція газети «Підручники і посібники»
46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-31
Збут: pip.ternopil@ukr.net Редакція: editoria@i.ua
Інтернет-магазин: www.pp-books.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 5143 від 05.07.2016 р.

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ТАБЛИЦЯ СТЕПЕНІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 2 ДО 9

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561		
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125					
6^n	6	36	216	1296						
7^n	7	49	343	2401						
8^n	8	64	512	4096						
9^n	9	81	729	6561						

СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

$a^n = \underbrace{aa...a}_{n \text{ разів}}$, якщо $n > 1$; $a^1 = a$.

Властивості степеня з натуральним показником

$a^m a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0,\ m > n)$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$a^{m+n} = a^m a^n$

$a^{m-n} = a^m : a^n$ $(a \neq 0,\ m > n)$

$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$

$a^n b^n = (ab)^n$

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Aa	*Bb*	*Cc*	*Dd*	*Ee*	*Ff*	*Gg*	*Hh*
а	бе	це	де	е	еф	же	аш
Ii	*Jj*	*Kk*	*Ll*	*Mm*	*Nn*	*Oo*	*Pp*
і	йот(жі)	ка	ель	ем	ен	о	пе
Qq	*Rr*	*Ss*	*Tt*	*Uu*	*Vv*	*Ww*	
ку	ер	ес	те	у	ве	дубль-ве	
Xx	*Yy*	*Zz*					
ікс	ігрек	зет					