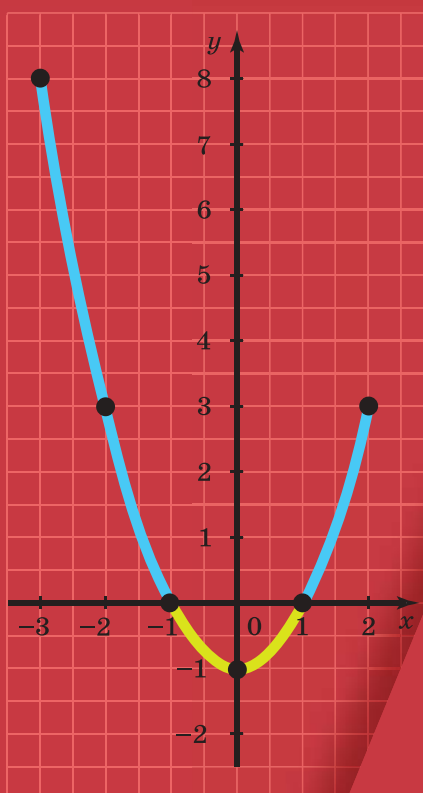
Генеза

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

Олександр Істер

АЛГЕБРА



7

ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

$ax = b$

якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$	якщо $a = 0$ і $b = 0$, то x – будь-яке число	якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння не має коренів

КВАДРАТИ І КУБИ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 1 ДО 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

СТЕПЕНІ ЧИСЕЛ 2 ТА 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^{m+n} = a^m a^n$$

$$a^{m-n} = a^m : a^n$$

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$$

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$a^1 = a$$

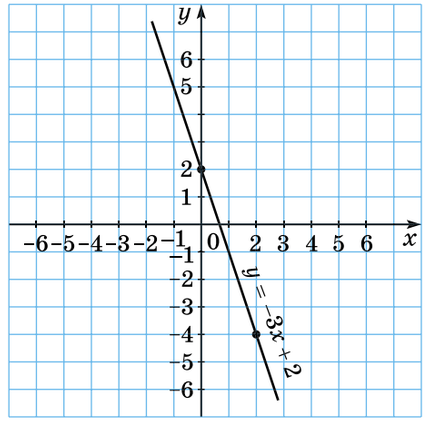
ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ГРАФІК ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

$y = -3x + 2$

x	0	2
y	2	-4



ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

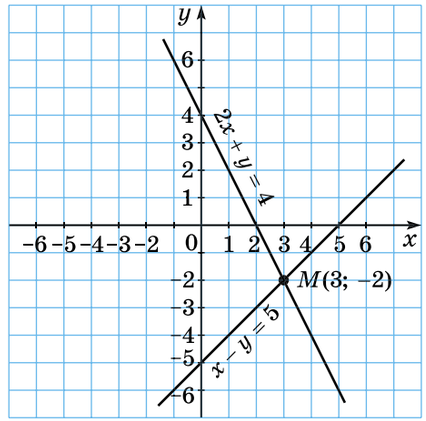
$$\begin{cases} x - y = 5, \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$M(3;\ -2)$

$x = 3;\ y = -2$

Перевірка:

$$\begin{cases} 3 - (-2) = 5, \\ 2 \cdot 3 + (-2) = 4. \end{cases}$$

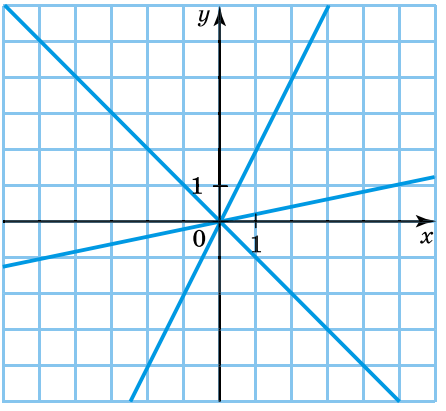


ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України



Київ
«Генеза»
2024

УДК 512(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Відповідає модельній навчальній програмі «Алгебра. 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.)

Істер О. С.
І-89 Алгебра : підруч. для 7-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2024. — 288 с. : іл.

ISBN 978-617-8353-29-2.

УДК 512(075.3)

ISBN 978-617-8353-29-2

© Істер О. С., 2024
© «Генеза»,
оригінал-макет, 2024

Шановні семикласниці та семикласники!

Ви починаєте вивчати одну з найважливіших математичних дисциплін – **алгебру**. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках.

У підручнику використано такі умовні позначення:

 – пригадай (раніше вивчене);

 – зверни особливу увагу;

 – запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

113 – завдання для класної і 115 – домашньої роботи;

 – рубрика «Україна – це ми»;

 – рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;

 – рубрика «Життєва математика»;

 – вправи для підготовки до вивчення нової теми;

 – вправи для повторення;

 – рубрика «Головне в розділі».

Текст, надрукований **жирним** шрифтом, звертає вашу увагу на нове поняття або таке, яке треба пригадати.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки  починаються вправи початкового рівня;

з позначки  починаються вправи середнього рівня;

з позначки  починаються вправи достатнього рівня;

з позначки  починаються вправи високого рівня;

з позначки  починаються вправи підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, головний теоретичний матеріал (рубрика *«Головне в роз-*

ділі»), а в кінці підручника – *«Завдання для перевірки знань за курс алгебри 7 класу»*. *«Задачі підвищеної складності»* допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики.

Автор намагався подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках та під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, які часто доводиться розв'язувати в повсякденному житті.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів та розвитку математики як науки ви знайдете в рубриці *«А ще раніше...»*.

Бажаємо успіхів в опануванні курсу!

Шановні вчительки та вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів/учениць, диференціації навчання тощо.

Додаткові вправи у «*Завданнях для перевірки знань*» призначено для учнів/учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Чи правильно їх розв'язано, учитель/учителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад, під час уроків узагальнення або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

У рубриці «*Життєва математика*» зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, а в рубриці «*Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу*» – задачі, що допоможуть актуалізувати відповідні знання.

«*Задачі підвищеної складності*» в кінці підручника допоможуть підготувати учнів/учениць до різноманітних математичних змагань та підвищити їхню цікавість до математики.

«Завдання для перевірки знань за курс алгебри 7 класу», які також розміщено в кінці підручника, можна запропонувати учням для підготовки до річної контрольної роботи.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього потрібно розв'язати вправи, що посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж курсу алгебри 7 класу, який опрацьовує дитина, ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на *«Задачі підвищеної складності»*, які розміщено в кінці підручника.

ПОВТОРЮЄМО МАТЕМАТИКУ ЗА 5–6 КЛАСИ

Натуральні числа і дії з ними. Подільність натуральних чисел

1. Обчисліть значення виразів та дізнаєтеся кількість мешканців у деяких містах України на момент останнього перепису населення (2001 р.). Дізнайтеся, до яких областей належать ці міста:

1) 13 145 + 7435 (Красилів);
2) 203 912 + 825 137 (Одеса);
3) 78 117 − 13 256 (Прилуки);
4) 974 002 − 725 189 (Рівне);
5) 313 · 42 (Баштанка);
6) 833 · 281 (Кременчук);
7) 64 246 : 13 (Рудки);
8) 1 536 470 : 106 (Судак).

2. Обчисліть:

1) 137 125 + 321 117;
2) 429 113 − 253 087;
3) 429 · 17;
4) 91 575 : 45;
5) 79 335 : 215;
6) 137 · 273.

3. Обчисліть значення виразу зручним способом:

1) 297 + (495 + 703);
2) 329 + 1075 + 1925 + 671;
3) 250 · 49 · 4;
4) 125 · 37 · 8 · 2.

4. Обчисліть значення виразу зручним способом:

1) (724 + 913) + 276;
2) 2715 + 256 + 1285 + 744;
3) 500 · 73 · 20;
4) 25 · 13 · 400 · 7.

5. Запишіть усі дільники числа: 1) 16; 2) 38; 3) 60.

6. Запишіть усі дільники числа: 1) 25; 2) 36; 3) 78.

7. Розкладіть на прості множники число: 1) 48; 2) 80.

8. Розкладіть на прості множники число: 1) 60; 2) 96.

9. Знайдіть найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел:

1) 19 і 3; 2) 36 і 48; 3) 17 і 51; 4) 10; 15 і 25.

10. Знайдіть найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел:

1) 7 і 12;
2) 39 і 52;
3) 54 і 18;
4) 12; 16 і 20.

11. Обчисліть значення виразу

$$(166\,788 : 452 - 125) \cdot 409 - 97\,962$$

та дізнайтеся рік заснування Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

12. Знайдіть значення виразу

$$95\,472 - (423 - 35\,133 : 147) \cdot 509$$

та дізнайтеся рік заснування Національного університету «Львівська політехніка».

13. Якою цифрою закінчується число:
1) 5347^2;
2) $2003^3 - 195^2$;
3) $146^3 + 127^2 - 39^3$?

14. Якою цифрою закінчується число:
1) 7293^2;
2) $4007^3 - 129^2$;
3) $125^3 + 138^3 - 45^2$?

15. Знайдіть найменше і найбільше п'ятицифрові числа, кратні числу 124.

16. Знайдіть найменше і найбільше чотирицифрові числа, кратні числу 39.

Десяткові дроби і дії з ними

17. (*Усно.*) Обчисліть:
1) $4 + 2{,}7$; 2) $1{,}8 + 3{,}2$; 3) $4{,}5 - 1{,}2$; 4) $7{,}2 - 4{,}5$;
5) $10 \cdot 5{,}2$; 6) $4{,}3 \cdot 0{,}01$; 7) $3{,}6 : 3$; 8) $2{,}8 : 0{,}1$.

18. Виконайте дію:
1) $4{,}92 + 5{,}713$; 2) $12{,}38 - 4{,}113$; 3) $3{,}5 \cdot 2{,}14$; 4) $2{,}6^2$;
5) $5{,}9 \cdot 4{,}03$; 6) $41{,}04 : 12$; 7) $8{,}55 : 2{,}5$; 8) $0{,}7^3$.

19. Виконайте дію:
1) $5{,}731 + 9{,}28$; 2) $17{,}52 - 9{,}293$; 3) $7{,}6 \cdot 4{,}15$; 4) $3{,}2^2$;
5) $2{,}05 \cdot 4{,}7$; 6) $31{,}2 : 15$; 7) $8{,}82 : 2{,}8$; 8) $0{,}6^3$.

20. Запишіть у порядку зростання числа 2,9(П); 2,81(Л); 3,41(К); 2,8(С); 3,4(А); 2,89(І) та прочитайте прізвище відомого у світі українського оперного співака, Героя України. Дізнайтеся з інтернету більше про нього.

21. Запишіть у порядку спадання числа 7,7(П); 7,6(Н); 7,8(І); 6,8(Ь); 7,73(Р); 7,65(І) та прочитайте назву міста-героя України. Дізнайтеся з інтернету, за що місту було присвоєно це звання.

22. Округліть числа:
1) 7,25; 3,739; 8,03; 9,05 до десятих;
2) 5,713; 9,8999; 4,115; 8,718 до сотих;
3) 7,389; 4,5; 9,93; 7,38 до одиниць;
4) 135,72; 431,431 до десятків.

23. Округліть числа:
1) 17,38; 49,55; 4,06; 7,02 до десятих;
2) 13,548; 29,341; 9,999; 4,444 до сотих;
3) 3,713; 14,52; 7,111 до одиниць.

24. Знайдіть значення виразу:
1) $2{,}9 \cdot (7{,}32 + 0{,}08 : 0{,}125) - 4{,}2 \cdot 0{,}25 + 7{,}35$;
2) $(7{,}85 + 4{,}2^2) : 5 - 0{,}9^3 : 3$.

25. Знайдіть значення виразу:
1) $45{,}2 \cdot 0{,}75 - (9{,}34 + 0{,}06 : 0{,}25) \cdot 2{,}8 - 4{,}05$;
2) $(8{,}93 - 2{,}6^2) : 4 + 0{,}6^3 : 2$.

26. Запишіть три десяткових дроби, кожний з яких:
1) більший за 4,8 і менший від 4,9;
2) менший від 0,43 і більший за 0,41.

27. Запишіть три десяткових дроби, кожний з яких:
1) менший від 9,6 і більший за 9,4;
2) більший за 4,83 і менший від 4,84.

Звичайні дроби і дії з ними. Відсотки

28. (*Усно.*) Обчисліть:

1) $\frac{4}{9} + \frac{2}{9}$; 2) $\frac{7}{8} - \frac{1}{8}$; 3) $\frac{4}{5} \cdot 10$; 4) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$;

5) $4\frac{1}{7} + 2\frac{5}{7}$; 6) $5\frac{7}{9} - 4\frac{6}{9}$; 7) $\frac{3}{5} : 15$; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

29. Обчисліть:

1) $\frac{4}{9} + \frac{11}{15}$; 2) $\frac{9}{16} - \frac{5}{12}$; 3) $2\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$; 4) $7\frac{4}{9} - \frac{1}{3}$;

5) $\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{16}$; 6) $\frac{12}{13} \cdot \frac{39}{40}$; 7) $\frac{7}{10} : \frac{2}{5}$; 8) $\frac{5}{8} : \frac{15}{16}$.

30. Виконайте дію:

1) $\frac{4}{9} + \frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{12} - \frac{3}{8}$; 3) $3\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; 4) $4\frac{9}{10} - \frac{1}{2}$;

5) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{15}$; 6) $\frac{8}{17} \cdot \frac{51}{80}$; 7) $\frac{2}{9} : \frac{7}{18}$; 8) $\frac{7}{9} : \frac{14}{45}$.

31. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(15\frac{3}{10} - 13\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{9}$; 2) $\frac{7}{36} : \left(3\frac{11}{12} - 3\frac{5}{9}\right)$.

32. Обчисліть значення виразу:

1) $5 : \left(\frac{2}{3} + 1\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{18}\right)$; 2) $\left(2\frac{13}{50} - 2\frac{1}{20}\right) \cdot 3\frac{4}{7}$.

33. Дзвінок для велосипеда коштує 150 грн. Скільки коштуватиме велосипедний дзвінок після:
1) зниження ціни на 10 %; 16 %;
2) підвищення ціни на 8 %; 20 %?

34. Чохол для телефона коштує 200 грн. Скільки коштуватиме чохол після:
1) підвищення ціни на 15 %; 9 %;
2) зниження ціни на 4 %; 30 %?

35. Розв'яжіть рівняння:

1) $x + 0{,}4 = \frac{7}{15}$; 2) $x - \frac{2}{7} = \frac{11}{14}$; 3) $\frac{17}{25} - x = 0{,}6$;

4) $\frac{2}{7}x = \frac{4}{21}$; 5) $x : \frac{2}{5} = 1{,}6$; 6) $2{,}4 : x = \frac{8}{13}$.

36. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{19}{50} - x = \frac{3}{20}$; 2) $0{,}8 + x = \frac{13}{15}$; 3) $x - 0{,}05 = \frac{7}{30}$;

4) $3{,}2 : x = \frac{4}{5}$; 5) $1{,}5x = \frac{15}{16}$; 6) $x : \frac{4}{5} = 2{,}8$.

37. Автомобіль за перший день подорожі з Києва до Бухареста подолав 364 км, що становить 40 % від відстані між цими містами. Скільки кілометрів йому залишилося подолати?

38. Придбавши книжку за 90 грн, Оля витратила 30 % грошей, які мала. Скільки грошей залишилося в дівчинки?

39. Обчисліть двома способами (перетворивши десятковий дріб у мішане число або перетворивши мішане число в десятковий дріб):

1) $13{,}75 + 4\frac{1}{20}$; 2) $5\frac{8}{25} - 3{,}9$; 3) $1{,}125 \cdot 1\frac{3}{5}$; 4) $8\frac{2}{5} : 1{,}4$.

40. Обчисліть двома способами (перетворивши десятковий дріб у мішане число або перетворивши мішане число в десятковий дріб):

1) $3\frac{1}{4} + 6{,}05$; 2) $3{,}48 - 1\frac{9}{20}$; 3) $1{,}15 \cdot 1\frac{2}{5}$; 4) $5{,}2 : 1\frac{3}{10}$.

41. Після зниження ціни на 10 % навушники стали коштувати 225 грн. Якою була початкова вартість навушників?

42. Під час сушіння яблука втрачають 82 % своєї маси. Скільки потрібно свіжих яблук, щоб отримати 9 кг сушених?

43. Ціну товару спочатку збільшили на 20 %, а потім нову ціну зменшили на 15 %. Як і на скільки відсотків змінилася ціна порівняно з початковою?

44. Ціну товару спочатку зменшили на 20 %, а потім нову ціну збільшили на 15 %. Як і на скільки відсотків змінилася ціна товару порівняно з початковою?

Відношення і пропорції

45. (*Усно.*) Чому рівність $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ є пропорцією? Назвіть її крайні й середні члени.

46. (*Усно.*) Скільком кілометрам на місцевості відповідає 1 см на карті з масштабом:
1) 1 : 100 000; 2) 1 : 700 000; 3) 1 : 5 000 000?

47. Знайдіть невідомий член пропорції:
1) $x : 6 = 5 : 3$; 2) $\frac{5}{x} = \frac{20}{7}$; 3) $x : 12 = \frac{13}{24}$.

48. Знайдіть невідомий член пропорції:
1) $6 : x = 2 : 7$; 2) $\frac{x}{3} = \frac{7}{6}$; 3) $\frac{7}{10} = x : 5$.

49. Скільки відсотків становить:
1) 2 від 5; 2) 18 від 12; 3) 3,5 від 17,5; 4) $\frac{1}{7}$ від $\frac{1}{14}$?

50. Скільки відсотків становить:
1) 4 від 8; 2) 20 від 16; 3) 2,6 від 10,4; 4) $\frac{1}{10}$ від $\frac{1}{2}$?

51. Поділіть число:
1) 28 на дві частини у відношенні 5 : 2;
2) 36 на три частини у відношенні 1 : 3 : 5.

52. Поділіть число:
1) 48 на дві частини у відношенні 1 : 3;
2) 50 на три частини у відношенні 2 : 5 : 3.

3 **53.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-7}{4}=\frac{5}{8}$; 2) $\frac{3x+1}{7}=\frac{3-4x}{14}$.

54. Розв'яжіть рівняння: 1) $\frac{2x+3}{5}=\frac{7}{10}$; 2) $\frac{2x-1}{4}=\frac{5-4x}{12}$.

55. 1) Майстер за перший тиждень відремонтував 24 девайси, а за другий — 30 девайсів. На скільки відсотків зросла продуктивність праці майстра?

2) Майстер за перший тиждень відремонтував 30 девайсів, а за другий — 24 девайси. На скільки відсотків знизилася продуктивність праці майстра?

56. Товар коштував 80 грн. На скільки відсотків збільшилася або зменшилася ціна товару, якщо в результаті переоцінки він став коштувати:

1) 72 грн; 2) 84 грн?

4 **57.** До 180 г 10-відсоткового розчину солі долили 70 г води. Яким став відсотковий уміст солі в новому розчині?

58. До сплаву масою 250 г, що містить 40 % олова, долили 150 г олова. Яким став відсотковий уміст олова в новому сплаві?

Раціональні числа і дії з ними

1 **59.** Обчисліть:

1) $-8+(-9)$; 2) $-13{,}6+(-7{,}9)$; 3) $29+(-11)$;
4) $-37+4{,}5$; 5) $-8-5$; 6) $-9-(-4)$;
7) $7-(-3)$; 8) $4-9{,}1$; 9) $2{,}9\cdot(-10)$;
10) $-4\cdot(-4{,}5)$; 11) $-4{,}2:(-4)$; 12) $8:(-0{,}01)$.

60. Виконайте дії:

1) $-6+(-10)$; 2) $-4{,}9+(-5{,}7)$; 3) $-38+12$;
4) $7{,}2+(-5)$; 5) $-4-(-3)$; 6) $-9-11$;
7) $0-(-9)$; 8) $5-10{,}2$; 9) $-5{,}1\cdot(-0{,}1)$;
10) $-6\cdot 2{,}5$; 11) $-7{,}2:10$; 12) $-7{,}5:(-5)$.

2 **61.** Виконайте дії:

1) $-\frac{6}{7}+\left(-\frac{4}{21}\right)$; 2) $-4\frac{7}{12}+5\frac{1}{6}$; 3) $\frac{12}{41}-1$;

4) $-3\frac{1}{8}-\left(-4\frac{3}{4}\right)$; 5) $-\frac{8}{9}\cdot\frac{27}{48}$; 6) $-1\frac{2}{7}\cdot\left(-2\frac{1}{3}\right)$;

7) $\frac{8}{15}:\left(-1\frac{1}{5}\right)$; 8) $-\frac{30}{41}:(-5)$; 9) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$.

62. Обчисліть:

1) $-\frac{5}{9}+\left(-\frac{7}{12}\right)$; 2) $5\frac{1}{4}+\left(-7\frac{1}{8}\right)$; 3) $-\frac{8}{17}-1$;

4) $2\frac{1}{3}-\left(-5\frac{2}{9}\right)$; 5) $-\frac{7}{9}\cdot\left(-\frac{18}{49}\right)$; 6) $4\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{7}{9}\right)$;

7) $-3\frac{3}{5}:\left(-\frac{9}{10}\right)$; 8) $-8:\frac{16}{17}$; 9) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$.

63. Запишіть усі цілі числа, що містяться на координатній прямій між числами:

1) $-2{,}7$ і $4{,}1$; 2) $-102{,}5$ і $-97{,}9$; 3) $-5\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{11}$.

64. Запишіть усі цілі числа, що містяться на координатній прямій між числами:

1) $-1\frac{2}{3}$ і $4{,}7$; 2) $-85{,}3$ і $-78{,}4$; 3) $-\frac{4}{11}$ і $3\frac{2}{5}$.

65. Позначте на координатній площині точки:
$A(-2;\ 4)$, $M(0;\ -3)$, $K(5;\ 1)$, $D(4;\ 0)$, $L(-6;\ -2)$, $N(2;\ -3)$.

66. Позначте на координатній площині точки:
$B(2;\ -5)$, $C(-2;\ 0)$, $T(4;\ 2)$, $E(0;\ 3)$, $Q(-4;\ -1)$, $P(-5;\ 2)$.

67. Зведіть подібні доданки:

1) $4x+2y-5x-2y$; 2) $-5{,}9+11{,}2a+7{,}8-18a$;
3) $-9a+7b-8+3a-b$; 4) $2{,}7x+3x+12y-9{,}8y-5{,}7x$.

68. Зведіть подібні доданки:

1) $7p-2m+6p+2m$; 2) $-14b+3{,}9-7{,}2+18{,}5b$;
3) $5x-8y+5-4x+y$; 4) $2{,}5a-2{,}9b+3a+3{,}7b-5{,}5a$.

69. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $-5(2a-3)+3(4a-5)$; 2) $2(a-3m)-7(2a+m)$;
3) $(2y-3)\cdot(-3)+2(4y-1)$; 4) $2{,}4(2x-3)-4{,}8(x-5)$.

70. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $-4(3a-2)+6(2a-1)$; 2) $5(b-3c)-3(4b+c)$;
3) $(7x-2)\cdot(-4)+2(4-3y)$; 4) $2{,}6(3a-5)-7{,}8(a-10)$.

71. Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}5(2x-3)+2{,}6=0{,}2(4+2x)$;

2) $\frac{1}{2}\left(6-3\frac{1}{2}x\right)=1\frac{1}{4}x+9$.

72. Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}5(3 - x) + 1{,}4 = -0{,}3(2x - 2)$; 2) $2\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3}x = \frac{2}{9}\left(1\frac{1}{2}x - \frac{9}{10}\right)$.

73. Знайдіть значення виразу

$$3\frac{1}{4} \cdot \left(-12\frac{2}{5} - (-4{,}2) : \frac{7}{15}\right) + 17{,}05$$

та дізнайтеся, у якому столітті була перша письмова згадка про селище Гурзуф у Криму.

74. Обчисліть значення виразу

$$1124{,}2 + 1\frac{1}{2} \cdot \left(-18\frac{3}{5} - (-5{,}4) : \frac{9}{13}\right)$$

та дізнайтеся рік закладання Михайлівського Золотоверхого собору в Києві.

75. Спростіть вираз $5(2{,}6a + 3{,}4b) - 2(6a - 2{,}5b)$ та знайдіть його значення, якщо $a = -11$; $b = -1\frac{3}{22}$.

76. Спростіть вираз $6(1{,}5x + 2{,}5y) - 5(2x - 3y)$ та знайдіть його значення, якщо $x = -2$; $y = -1\frac{7}{30}$.

77. Знайдіть суму, доданками якої є числа: обернене та протилежне до числа 2,6.

78. Знайдіть значення виразу a^2, якщо $a = 14{,}75 - 2\frac{13}{20} + 3\frac{2}{9} \cdot (-5{,}4)$.

79. Знайдіть значення виразу b^3, якщо $b = 24{,}25 - 1\frac{17}{20} + 4\frac{5}{6} \cdot (-4{,}8)$.

80. Знайдіть значення виразу $10b - (2b + 4x)$, якщо $x - 2b = -5$.

81. Знайдіть значення виразу $15a - (3a + 4m)$, якщо $m - 3a = -3$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

82. Чи є число -2 коренем рівняння:
1) $x + 5 = 7$; 2) $x \cdot 4 = -8$; 3) $x - 3 = -5$; 4) $-10 : x = -5$?

83. Знайдіть корінь рівняння:
1) $x - 3 = 8$; 2) $7 + x = 3$; 3) $-4x = -20$; 4) $x : 3 = -7$.

Якщо вам потрібно пригадати поняття або термін з теоретичного матеріалу за 5–6 класи, то це можна зробити, зайшовши за посиланням *https://cutt.ly/AwKIdi35* або *QR*-кодом.

РОЗДІЛ 1

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **пригадаєте** основні властивості рівнянь з однією змінною;
- **ознайомитеся** з лінійним рівнянням з однією змінною;
- **навчитеся** розв'язувати лінійні рівняння з однією змінною та рівняння, які до них зводяться; текстові задачі за допомогою рівнянь.

$ax = b$

$2x = -3$

$15x = 0$

§ 1. Загальні відомості про рівняння

Рівняння та його розв'язки

Упродовж багатьох століть алгебра розвивалася як наука про рівняння.

Рівнянням **називають рівність, яка містить змінну.**

Основні відомості про рівняння ви вже знаєте з попередніх класів. Вираз, записаний у рівнянні ліворуч від знака рівності, називають *лівою частиною рівняння*, а вираз, записаний праворуч, – *правою частиною рівняння*.

Якщо в рівняння $4x - 6 = x$ замість змінної x підставити число 2, то одержимо правильну числову рівність: $4 \cdot 2 - 6 = 2$, адже числові значення обох частин рівняння будуть між собою рівні. У такому разі про число 2 кажуть, що воно є *коренем рівняння*.

Значення змінної, яке перетворює рівняння в правильну числову рівність, називають *коренем* (або *розв'язком*) *рівняння*.

Про число, яке є коренем рівняння, ще кажуть, що воно *задовольняє рівняння*.

Різні рівняння можуть мати різну кількість коренів.

Наприклад, рівняння $4x - 6 = x$ має лише один корінь – число 2. Рівняння $x(x - 6) = 0$ має два корені – числа 0 і 6. Рівняння

$x + 0{,}1 = 0{,}1 + x$ задовольнятиме будь-яке значення змінної x, тобто будь-яке число є його коренем, отже, це рівняння має безліч коренів. Але не існує жодного значення змінної x, яке б перетворювало рівняння $x + 1 = x$ у правильну числову рівність, адже для кожного значення змінної x значення лівої частини рівняння буде на 1 перевищувати значення правої його частини. Тому рівняння $x + 1 = x$ коренів не має.

Розв'язати рівняння **– означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.**

Рівносильні рівняння

Розглянемо рівняння $x + 1 = 5$ і $3x = 12$. Кожне з них має єдиний корінь – число 4. Ці рівняння є ***рівносильними***.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які коренів не мають.

Приклад 1. Чи рівносильні рівняння: 1) $x + 3 = 4$ і $5x = 10$;
2) $x + 2 = x$ і $2 - x = 5 - x$;
3) $18 - x = 11$ і $21 : x = 3$?

Розв'язання. 1) Коренем рівняння $x + 3 = 4$ є число 1, а коренем рівняння $5x = 10$ – число 2. Тому рівняння $x + 3 = 4$ і $5x = 10$ не є рівносильними.
2) Кожне з рівнянь $x + 2 = x$ і $2 - x = 5 - x$ не має коренів, тому ці рівняння є рівносильними.
3) Коренем рівняння $18 - x = 11$ є число 7. Коренем рівняння $21 : x = 3$ також є число 7. Тому рівняння $18 - x = 11$ і $21 : x = 3$ – рівносильні.

Відповідь: 1) ні; 2), 3) так.

Властивості рівнянь

Для розв'язування рівнянь використовують *властивості*, які перетворюють рівняння на рівносильні їм рівняння:

1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Приклад 2. З'ясувати, чи є рівносильними рівняння:
1) $2(x - 1) = 5x$ і $2x - 2 = 5x$;
2) $3a + 2 = 5a - a - 7$ і $3a + 2 = 4a - 7$;
3) $5x = 2x + 9$ і $5x - 2x = 9$;
4) $0{,}5b = 1{,}5b - 3{,}5$ і $b = 3b - 7$.

Розв'язання. 1) Рівняння $2(x - 1) = 5x$ і $2x - 2 = 5x$ є рівносильними, оскільки друге рівняння одержуємо з першого розкриттям дужок у його лівій частині.
2) Рівняння $3a + 2 = 5a - a - 7$ і $3a + 2 = 4a - 7$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо з першого зведенням подібних доданків у його правій частині.
3) Рівняння $5x = 2x + 9$ і $5x - 2x = 9$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо з першого перенесенням доданка з правої частини рівняння в ліву зі зміною знака цього доданка на протилежний.
4) Рівняння $0{,}5b = 1{,}5b - 3{,}5$ і $b = 3b - 7$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо шляхом множення на 2 обох частин першого рівняння.

Відповідь: 1) – 4) так, рівняння рівносильні.

А ще раніше...

У IX ст. видатний арабський математик Мухаммед бен Муса Аль-Хорезмі у своєму трактаті «Кітаб аль-джебр аль-мукабала» зібрав і систематизував наявні на той час методи розв'язування рівнянь. Узятий з назви цієї книжки термін «аль-джебр» (у перекладі з арабської означає «відновлення») надалі став уживатися як «алгебра» і дав назву цілій науці.

У ті часи, коли Аль-Хорезмі писав свій трактат, від'ємні числа вважалися хибними, несправжніми. Тому коли від'ємне число переносили з однієї частини рівняння в іншу, змінюючи його знак, вважали, що воно «відновлюється» (стає додатним), тобто з несправжнього перетворюється на справжнє. Саме таке перетворення рівнянь Аль-Хорезмі й назвав «відновленням».

Властивість взаємного знищення однакових доданків рівняння, що містилися в обох його частинах, Аль-Хорезмі назвав «протиставленням» (арабською мовою – «аль-мукабала»).

Аль-Хорезмі був перший учений, хто відокремив алгебру від арифметики і розглянув її як окрему математичну науку. Алгебру Аль-Хорезмі в латинському перекладі вивчали європейці протягом XII–XVI ст. Подальший розвиток алгебри пов'язаний саме з європейськими вченими, зокрема з італійськими математиками епохи Відродження.

До XIX ст. алгебра розвивалася як наука, що вивчає методи розв'язування рівнянь. Згодом вона значно збагатилася новими змістовими лініями: спрощення виразів, функції, розв'язування нерівностей тощо. І тепер рівняння – це лише одна зі складових частин алгебри.



Мухаммед бен Муса Аль-Хорезмі (783 – бл. 850)

Що називають рівнянням? ○ Що називають коренем (або розв'язком) рівняння? ○ Що означає розв'язати рівняння? ○ Які рівняння називають рівносильними? ○ Які властивості використовують під час розв'язування рівнянь?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

84. (*Усно.*) Який із записів є рівнянням (відповідь обґрунтуйте):
1) $4x - 12 > 0$; 2) $3x + 7$;
3) $4x - 2 = 10$; 4) $(14 - 10) \cdot 2 = 8$?

85. (*Усно.*) Чи є число 4 коренем рівняння:
1) $2x = 8$; 2) $x - 2 = 3$; 3) $2x - 3 = 6$; 4) $32 : x = 8$?

86. Чи є число 3 розв'язком рівняння:
1) $x + 5 = 8$; 2) $2x = 9$; 3) $x - 4 = -1$; 4) $x : 3 = 0$?

87. Яке із чисел є коренем рівняння $x^2 = 2x + 3$:
1) 0; 2) –1; 3) 1; 4) 3?

88. Чи є коренем рівняння $x^2 = 4 - 3x$ число:
1) 0; 2) 1; 3) –2; 4) –4?

89. Доведіть, що кожне із чисел 1,2 та –1,2 є коренем рівняння $x^2 = 1{,}44$.

90. Чи є рівносильними рівняння:
1) $x + 2 = 5$ і $x : 3 = 1$; 2) $x - 3 = 7$ і $2x = 18$?

91. Чи є рівносильними рівняння:
1) $x - 2 = 3$ і $2x = 10$; 2) $x + 3 = 7$ і $x : 2 = 3$?

92. Доведіть, що:
1) коренем рівняння $2(x - 3) = 2x - 6$ є будь-яке число;
2) рівняння $y - 7 = y$ не має коренів.

93. Доведіть, що:
1) коренем рівняння $3(2 - c) = 6 - 3c$ є будь-яке число;
2) рівняння $x = x + 8$ не має коренів.

94. Складіть рівняння, що має:
1) єдиний корінь – число -2;
2) два корені – числа 5 і -5.

95. З'ясуйте, не розв'язуючи рівнянь, чи є вони рівносильними:
1) $4(x - 2) = 19$ і $4x - 8 = 19$;
2) $2x - 3 = 3x + 5$ і $2x - 3x = 5 + 3$;
3) $8(x - 3) = 40$ і $x - 3 = 5$;
4) $\frac{2x}{3} = 11$ і $2x = 33$.

96. Установіть, не розв'язуючи, чи є рівняння рівносильними:
1) $8(x - 1) = 5$ і $8x - 8 = 5$;
2) $3x + 7 = 4x - 8$ і $3x - 4x = -8 - 7$;
3) $9(x + 2) = 18$ і $x + 2 = 2$;
4) $-\frac{3x}{4} = 7$ і $-3x = 28$.

97. Чи має розв'язки рівняння:
1) $x + 2 = 2 - x$;
2) $x + 3 = 3 + x$;
3) $x + 1 = -1 + x$;
4) $0 \cdot x = 0$;
5) $0 \cdot (x - 1) = 3$;
6) $5(x - 1) = 5x - 5$;
7) $0 : x = 0$;
8) $2(x - 3) = 2x - 7$?

Вправи для повторення

98. Обчисліть:
1) $\frac{2}{3} + \frac{7}{12}$;
2) $\frac{8}{21} - \frac{3}{14}$;
3) $2\frac{3}{5} + 3\frac{7}{10}$;
4) $\frac{5}{11} - \frac{2}{33}$;
5) $\frac{9}{20} + 1\frac{1}{15}$;
6) $5\frac{4}{15} - 1\frac{2}{7}$.

99. Знайдіть:
1) 25 % від числа 200;
2) 13 % від числа 82;
3) 20,5 % від числа 64;
4) 21 % від числа $3\frac{2}{7}$.

Життєва математика

100. Щоб заощадити на електроспоживанні, у родині вирішили встановити двозонний лічильник електроенергії. Оплата за електроенергію вночі становить 50 % від оплати в інший час. Лічильник було придбано за 1500 грн, і ще 500 грн було сплачено за встановлення та взяття лічильника на облік. З червня 2023 року тариф для населення становить 2,64 грн за 1 кВт · год. Родина щомісяця використовує 500 кВт · год електроенергії, з них 100 кВт · год – у нічний час. За двозонним лічильником вартість електроенергії, використаної в нічний час, обчислюється за тарифом 1,32 грн за 1 кВт · год. Через скільки місяців родина окупить встановлення двозонного лічильника?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

101. Перенесіть у ліву частину рівняння всі доданки, що містять змінну, а в праву – усі доданки, які її не містять:

1) $5y + 11 = 8 - 3y$;
2) $6x - 13 = 2x + 7$;
3) $-2m - 13 = -3m + 5$;
4) $-1 - 4x = 17x - 8$.

102. Розв'яжіть рівняння:

1) $-3x = -21$;
2) $-2x = 40$;
3) $0{,}2x = -5$;
4) $50x = -5$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

103. Яку остачу при діленні на 1001 дає число

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 2000?$$

§ 2. Лінійне рівняння з однією змінною

Лінійне рівняння з однією змінною та його розв'язування

Ми знаємо, як розв'язувати рівняння $2x = -8$; $-0{,}01x = 17$; $\frac{1}{3}x = 5$. Кожне із цих рівнянь має вигляд $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа.

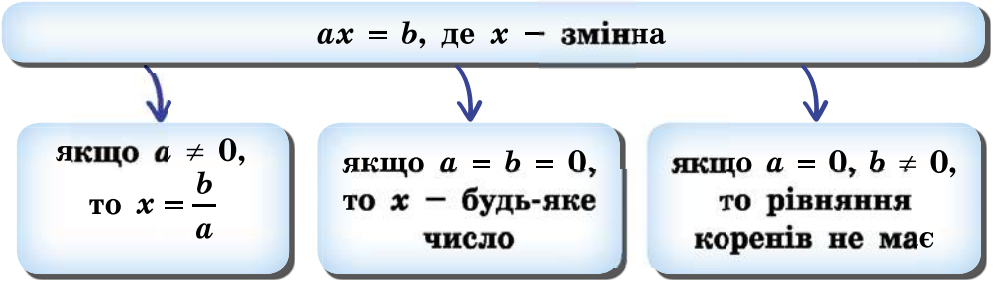
Рівняння вигляду $ax = b$, де x – змінна, a і b – числа, називають ***лінійним рівнянням з однією змінною***.
Числа a і b називають ***коефіцієнтами*** цього рівняння.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ є ***рівнянням першого степеня з однією змінною.*** Поділивши обидві частини такого рівняння на a, матимемо, що $x = \frac{b}{a}$, тобто єдиним коренем цього рівняння є число $\frac{b}{a}$.

Якщо $a = b = 0$, то лінійне рівняння набуває вигляду $0x = 0$. Його коренем є будь-яке число, оскільки для будь-якого значення x значення лівої і правої частин рівняння будуть між собою рівними й дорівнюватимуть нулю. Тому рівняння $0x = 0$ має безліч коренів.

Якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, лінійне рівняння набуває вигляду $0x = b$. При цьому не існує жодного значення змінної x, яке б перетворювало ліву і праву частини рівняння на одне й те саме число. Адже значення лівої частини рівняння для будь-якого значення x дорівнюватиме нулю, а значення правої частини – числу b, відмінному від нуля. Тому рівняння $0x = b$ для $b \neq 0$ коренів не має.

Систематизуємо дані про розв'язки лінійного рівняння $ax = b$, де a і b – числа, у вигляді схеми:



Приклад 1. Розв'язати рівняння:

1) $0{,}2x = 7$; 2) $-\frac{2}{3}x = 2\frac{2}{3}$; 3) $0x = 7$.

Розв'язання.

1) $0{,}2x = 7$;
$x = 7 : 0{,}2$;
$x = 35$.
Відповідь: 35.

2) $-\frac{2}{3}x = 2\frac{2}{3}$;
$x = 2\frac{2}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right)$;
$x = -4$.
Відповідь: -4.

3) $0x = 7$;
рівняння коренів не має.
Відповідь: коренів немає.

Приклад 2. Для якого значення b рівносильні рівняння $-2x = 8$ і $3x + b = 11$?

Розв'язання. 1) Розв'яжемо рівняння $-2x = 8$. Маємо: $x = 8 : (-2)$; $x = -4$.

2) Щоб рівняння $-2x = 8$ і $3x + b = 11$ були рівносильними, необхідно, щоб друге рівняння мало єдиний корінь, що дорівнює числу -4. Оскільки $x = -4$, то маємо: $-12 + b = 11$; $b = 23$. Легко пересвідчитися в тому, що рівняння $3x + 23 = 11$ має єдиний корінь, що дорівнює -4. *Відповідь*: 23.

Розв'язування рівнянь, що зводяться до лінійних

Процес розв'язування багатьох рівнянь є зведенням цих рівнянь до лінійних шляхом рівносильних перетворень за властивостями рівнянь.

Приклад 3. Розв'язати рівняння:

1) $3(x + 3) - 2x = 6 - 4x$; 2) $\frac{x+1}{2} + \frac{5-x}{3} = \frac{x+13}{6}$.

Розв'язання.

1. Позбудемося знаменників (якщо вони є):

1) $3(x + 3) - 2x = 6 - 4x$.

2) $\frac{x+1}{2} + \frac{5-x}{3} = \frac{x+13}{6}$.

Помножимо обидві частини рівняння на 6 (на найменший спільний знаменник дробів). Маємо:

$$\frac{6(x+1)}{2} + \frac{6(5-x)}{3} = \frac{6(x+13)}{6};$$

$$3(x + 1) + 2(5 - x) = x + 13.$$

2. Розкриємо дужки (якщо вони є):

$3x + 9 - 2x = 6 - 4x$. $3x + 3 + 10 - 2x = x + 13$.

3. Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину рівняння, а інші – у праву, змінивши знаки цих доданків на протилежні:

$3x - 2x + 4x = 6 - 9$. $3x - 2x - x = 13 - 3 - 10$.

4. Зведемо подібні доданки:

$5x = -3$. $0x = 0$.

5. Розв'яжемо отримане лінійне рівняння:

$x = -3 : 5$; x – будь-яке число.

$x = -0{,}6$.

Відповідь: $-0{,}6$. *Відповідь*: будь-яке число.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $5(x + p) = 3x - 7p$, x – змінна.

Розв'язання. Розкриємо дужки в лівій частині рівняння:

$$5x + 5p = 3x - 7p.$$

Перенесемо доданок $3x$ у ліву частину, а $5p$ – у праву.

Матимемо: $5x - 3x = -7p - 5p$, тобто $2x = -12p$.

Тоді $x = (-12p) : 2$, тобто $x = (-12 : 2)p$, отже, $x = -6p$.

Відповідь: $-6p$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $|2x - 7| = 3$.

Розв'язання. Щоб модуль деякого виразу дорівнював числу 3, значення цього виразу має дорівнювати 3 або -3.

Маємо: $|2x - 7| = 3$;

$2x - 7 = 3$; або $2x - 7 = -3$;

$2x = 10$; $2x = 4$;

$x = 5$. $x = 2$.

Відповідь: 5; 2.

Яке рівняння називають лінійним рівнянням з однією змінною? Наведіть приклади лінійних рівнянь. ○ Коли рівняння $ax = b$ має єдиний корінь? ○ Коли рівняння $ax = b$ має безліч коренів? ○ Коли рівняння $ax = b$ не має коренів?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

104. (*Усно.*) Яке з рівнянь є лінійним:

1) $15x = 0$; 2) $-7x = -\frac{1}{2}$;

3) $x^2 = 2x$; 4) $0x = 19$;

5) $x + 3 = x^2$; 6) $0x = 0$?

105. (*Усно.*) Скільки коренів має рівняння:

1) $2x = -3$;

2) $0x = 7$;

3) $0x = 0$?

106. З'ясуйте, яке з даних рівнянь має лише один корінь, не має коренів, має безліч коренів:

1) $-2x = -9$; 2) $0x = 0$;

3) $0{,}42x = 0$; 4) $17 = 0x$;

5) $\frac{2}{3}x = -9$; 6) $0x = -12$.

107. (*Усно.*) Розв'яжіть рівняння:

1) $-2x = -12$; 2) $0{,}5x = -2{,}5$; 3) $-2{,}5x = 7{,}5$;

4) $\frac{1}{5}x = \frac{3}{10}$; 5) $\frac{4}{7}x = 1$; 6) $-5x = -12$.

108. Розв'яжіть рівняння:

1) $-3x = -21$; 2) $-2x = \frac{2}{9}$; 3) $-\frac{1}{5}x = -5$;

4) $50x = 5$; 5) $-x = 1\frac{2}{7}$; 6) $-0{,}01x = 0{,}17$;

7) $\frac{2}{9}x = -\frac{4}{27}$; 8) $-1{,}2x = -4{,}2$; 9) $\frac{7}{8}x = 0$.

109. Знайдіть корінь рівняння:

1) $2x = -8$; 2) $\frac{1}{5}x = 9$; 3) $-3x = \frac{1}{4}$;

4) $-10x = -5$; 5) $\frac{2}{15}x = 0$; 6) $0{,}1x = -0{,}18$.

110. Визначте, що має бути записано в правій частині рівняння замість пропусків, якщо відомо його корінь:

1) $8x = \ldots$; $x = -9$; 2) $-9x = \ldots$; $x = 0$; 3) $\frac{3}{4}x = \ldots$; $x = 12$.

111. Знайдіть корінь рівняння:

1) $7x + 14 = 0$; 2) $0{,}3x - 21 = 0{,}5x - 23$;

3) $4x + 3 = 6x - 13$; 4) $5x + (3x - 7) = 9$;

5) $47 = 10 - (9x + 2)$; 6) $(3x + 2) - (8x + 6) = 14$.

112. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x - 10 = 0$; 2) $1{,}4x - 12 = 0{,}9x + 4$;

3) $3x + 14 = 5x + 16$; 4) $12 - (5x + 10) = -3$;

5) $6 - (8x + 11) = -1$; 6) $(3x - 4) - (6 - 4x) = 4$.

113. Яке з рівнянь рівносильне рівнянню $5x = 10$:

1) $x + 3 = 5$; 2) $5 - x = 7$;

3) $x + 2 = x + 1$; 4) $x - 7 = -5$;

5) $x = 8 - 3x$; 6) $4x - 7 = 4x$?

114. Чи є рівняння рівносильними:

1) $4x - x = 17$ і $3x = 17$; 2) $5x - 9 = 3x$ і $6x = 21$;

3) $2x = -12$ і $x + 6 = 0$; 4) $12x = 0$ і $15x = 15$?

115. Для якого значення x значення виразу:
1) $3x + 7$ дорівнює -2;
2) $4(x + 1)$ дорівнює значенню виразу $5x - 9$?

116. Для якого значення y:
1) значення виразу $5y - 13$ дорівнює -3;
2) значення виразів $3(y - 2)$ і $13y - 8$ між собою рівні?

117. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{3} = 5$; 2) $\frac{2x-7}{5} = 1$; 3) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$; 4) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1$.

118. Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{x-2}{4} = 1$; 2) $\frac{3x+2}{5} = 4$; 3) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$; 4) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$.

119. Складіть лінійне рівняння, коренем якого є:
1) число -2; 2) число $-0{,}2$.

120. Складіть лінійне рівняння:
1) яке не має коренів; 2) коренем якого є будь-яке число.

121. Складіть лінійне рівняння, коренем якого є:
1) число -8; 2) будь-яке число.

122. Знайдіть корінь рівняння:
1) $(4x - 2) + (5x - 4) = 9 - (5 - 11x)$;
2) $(7 - 8x) - (9 - 12x) + (5x + 4) = -16$;
3) $3(4x - 5) - 10(2x - 1) = 33$;
4) $9(3(x + 1) - 2x) = 7(x + 1)$.

123. Розв'яжіть рівняння:
1) $(9x - 4) + (15x - 5) = 18 - (25 - 22x)$;
2) $(10x + 6) - (9 - 9x) + (8 - 11x) = -19$;
3) $7(x - 1) - 3(2x + 1) = -x - 15$;
4) $5(4(x - 1) - 3x) = 9x$.

124. Розв'яжіть рівняння $\frac{3x-11}{4} = \frac{2x-2}{3}$ і $\frac{4y-16}{2} = \frac{6y-10}{5}$. Знайдіть добуток $10xy$ та дізнайтеся рік заснування Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

125. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x+13}{3} = \frac{6x-1}{4}$ і $\frac{3y-9}{5} = \frac{2y+6}{6}$. Знайдіть значення виразу $x + y + 1788$ та дізнайтеся рік заснування Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

126. Розв'яжіть рівняння, де x – змінна:

1) $2x + a = x + a$; 2) $b + x = c - x$;

3) $6x + 2m = x - 8m$; 4) $9a + x = 3b - 2x$.

127. Розв'яжіть рівняння, де x – змінна:

1) $7x + m = 2x + m$; 2) $a + x = 2m - x$;

3) $3x + b = 9b - x$; 4) $5p + 2x = 10a - 3x$.

128. Чи є рівносильними рівняння:

1) $2x - 4 = 2$ і $5(x - 3) + 1 = 3x - 8$;

2) $5x + 3 = 8$ і $7(x - 2) + 20 = 4x + 3$;

3) $5x = 0$ і $0 \cdot x = 5$;

4) $7x + 1 = 7x + 2$ і $5(x + 1) = 5x + 5$;

5) $0 : x = 7$ і $0 \cdot x = 7$;

6) $3(x - 2) = 3x - 6$ і $2(x + 7) = 2(x + 1) + 12$?

129. Для якого значення y значення виразу:

1) $5y + 7$ утричі більше за значення виразу $y + 5$;

2) $2y - 4$ на 7,4 більше за значення виразу $3 - 7y$?

130. Для якого значення x значення виразу:

1) $7x + 8$ удвічі більше за значення виразу $x + 7$;

2) $5x - 8$ на 17,2 менше від значення виразу $x + 2$?

131. Складіть рівняння, яке було б рівносильним рівнянню

$$7(2x - 8) = 5(7x - 8) - 15x.$$

132. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| + 3 = 7$; 2) $|x| - 2 = -9$; 3) $2|x| - 6 = 0$;

4) $|x + 5| = 0$; 5) $|7 - x| = 1$; 6) $|x + 12| = -3$;

7) $|2x + 1| = 7$; 8) $2(|x| - 3) = |x|$; 9) $\frac{1}{2}|x - 1| + 3 = 5$.

133. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| - 5 = 4$; 2) $|x| + 1 = -2$; 3) $\frac{1}{2}|x| - 4 = 0$;

4) $|2x - 1| = 0$; 5) $|2x - 7| = 3$; 6) $4(|x| - 3) = |x|$.

134. Для якого значення a рівняння:

1) $2ax = 16$ має корінь, що дорівнює 4;

2) $3x = a$ має корінь, що дорівнює $\frac{4}{7}$;

3) $5(a + 1)x = 40$ має корінь, що дорівнює -1?

135. Для якого значення b коренем рівняння:
1) $3bx = -24$ є число -4; 2) $(2b - 5)x = 45$ є число 3?

136. Розв'яжіть рівняння:
1) $4x + 7 = 3(x - 2) + x$; 2) $2x + 5 = 2(x - 4) + 13$.

137. Знайдіть корінь рівняння:
1) $3(x - 2) + 4x = 7(x - 1) + 1$; 2) $2(x + 1) + 4x = 6(x + 3)$.

138. Розв'яжіть рівняння:
1) $\frac{3x-1}{2} + \frac{6x+3}{11} = 10$; 2) $\frac{8x-3}{7} - \frac{3x+1}{10} = 2$;
3) $\frac{x}{10} + \frac{2x}{5} = \frac{7x}{15} - \frac{1}{6}$; 4) $\frac{1+2x}{2} - \frac{3x+2}{3} = \frac{5x+4}{6}$;
5) $\frac{2x-3}{5} - \frac{1-x}{4} + \frac{5x+1}{20} = \frac{9x+3}{10}$;
6) $\frac{3x-5}{4} - \frac{2-x}{3} + \frac{2x+5}{12} = \frac{5x-6}{4}$.

139. Знайдіть корінь рівняння:
1) $\frac{2x+1}{3} + \frac{x+7}{2} = 5$; 2) $\frac{5x-6}{12} - \frac{x-5}{8} = 1$;
3) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{9} = \frac{5x}{6} - \frac{1}{18}$; 4) $\frac{3x+1}{5} - \frac{2+x}{2} = \frac{x-8}{10}$.

140. За якого значення b рівняння мають однакові корені:
1) $4x - 3 = 5$ і $3x + b = 17$; 2) $x + b = 9$ і $2x - b = x$?

141. Для якого значення a рівняння мають однакові корені:
1) $2x - 3 = 7$ і $a - 3x = 9$; 2) $x + a = 7$ і $3x - a = 2x$?

142. Знайдіть усі цілі значення m, для яких корінь рівняння $mx = 4$ є цілим числом.

143. Знайдіть усі цілі значення b, для яких корінь рівняння $bx = -6$ є натуральним числом.

144. Для якого значення a не має коренів рівняння:
1) $(a - 1)x = 5$; 2) $(a + 3)x = a - 2$; 3) $(a - 4)x = a - 4$?

145. Для якого значення b не має розв'язків рівняння:
1) $(b + 1)x = 6$; 2) $(b - 3)x = b$; 3) $(b + 1)x = b + 1$?

146. Для якого значення m будь-яке число є коренем рівняння:
1) $(m - 1)x = 1 - m$;
2) $m(m + 2)x = (m + 2)$;
3) $(m - 3)x = 5$?

147. Для якого значення a має безліч коренів рівняння:
1) $(a + 2)x = 2 + a$;
2) $(a - 3)x = 9$;
3) $a(a - 4)x = 4 - a$?

148. Розв'яжіть рівняння, де x – змінна.
1) $(b + 1)x = 7$; 2) $(5 - b)x = b - 5$; 3) $(|b| - 2)x = b + 2$.

149. Розв'яжіть рівняння:
1) $|x| + 4x = 15$; 2) $|7x| - x = 24$.

Вправи для повторення

150. Знайдіть значення виразу:
1) $4a + 12b + 8a$, якщо $a = -13$; $b = 13$;
2) $(3x - 2x)(5m + 4m)$, якщо $x = 1\frac{8}{9}$; $m = -1\frac{1}{2}$.

151. Знайдіть число, якщо:
1) 15 % його дорівнюють 300;
2) 11 % його дорівнюють 28,16.

152. Зведіть подібні доданки:
1) $7x - 2y + 3x + 17y$;
2) $-5{,}2 + 17a + 4{,}9 - 12a$;
3) $-5x + 7 - 2y + 5x - 12y$;
4) $5\frac{1}{2}p - 2\frac{5}{6}a + 7\frac{1}{2}p + 4\frac{1}{3}a$.

153. Розкрийте дужки і спростіть вираз:
1) $a - (a - (2a - 8))$;
2) $5m - ((n - m) + 3n)$;
3) $15a - (2a - (3a - (a + 1)))$;
4) $b - (b - ((b - a) - 2a))$.

Життєва математика

154. Добова доза вітаміну С для дорослої людини становить 0,05 г. У 100 г ягід малини міститься майже 25 мг вітаміну С (1 мг = 0,001 г).
1) Визначте, скільки грамів вітаміну С міститься в 1 кг ягід малини.
2) Скільки добових доз вітаміну С може замінити дорослій людині споживання 1 кг ягід малини?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

155. Одне число на 6 менше від другого. Менше із чисел позначено через x. Виразіть через x друге число.

156. Одне число в 4 рази більше за друге. Менше із чисел позначено через x. Виразіть через x друге число.

157. На двох клумбах разом росте 62 тюльпани, до того ж на одній клумбі на 6 тюльпанів менше, ніж на другій. Скільки тюльпанів росте на кожній клумбі?



Цікаві задачі — поміркуй одначе

158. Відомо, що $x + y = 13$. Для яких натуральних значень x і y вираз xy набуває найбільшого значення?

§ 3. Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь. Рівняння як математична модель задачі

Математична модель задачі

Щоб розв'язати задачу практичного змісту, доцільно спочатку створити її *математичну модель*, тобто записати залежність між відомими й невідомими величинами за допомогою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо.

Розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь

Розглянемо текстові задачі, математичними моделями яких є лінійні рівняння та рівняння, що зводяться до них.

Розв'язувати задачу за допомогою рівняння слід у такій послідовності:

1) позначити змінною одну з невідомих величин;
2) інші невідомі величини (якщо вони є) виразити через введену змінну;
3) за умовою задачі встановити співвідношення між невідомими та відомими значеннями величин і скласти рівняння;
4) розв'язати одержане рівняння;
5) проаналізувати розв'язки рівняння і знайти невідому величину, а за потреби і значення інших невідомих величин;
6) записати відповідь до задачі.

Розглянемо кілька задач та розв'яжемо їх за допомогою лінійного рівняння.

Задача 1. На свій день народження сестрички-близнючки Наталя та Олена отримали разом 127 вітальних *SMS*-повідомлень, причому Наталя отримала на 13 повідомлень більше, ніж Олена. Скільки *SMS*-повідомлень на свій день народження отримала кожна сестричка?

Розв'язання. Нехай Олена отримала x повідомлень, тоді Наталя – $(x+13)$. А обидві разом – $(x+x+13)$ повідомлень, що за умовою дорівнює 127.

Маємо рівняння: $x+x+13=127$. Звідки $x=57$.

Отже, Олена отримала 57 повідомлень,

$57+13=70$ (повід.) – отримала Наталя.

Відповідь: 70 повідомлень; 57 повідомлень.

Задача 2. Максимально допустимий розмір кредиту банк обчислює за формулою:

$$S=\frac{C}{3}\cdot n,$$

де S – сума кредиту, C – середньомісячна зарплата позичальника. Для кредиту терміном в один рік вважають, що $n=9$, терміном у два роки – $n=21$, терміном у три роки – $n=33$. Який найменший розмір середньомісячної зарплати має бути в позичальника, щоб банк надав йому кредит у сумі 30 000 грн на: 1) 1 рік; 2) 2 роки; 3) 3 роки?

Розв'язання. За умовою $S=30\ 000$ грн. Нехай найменший розмір середньомісячної зарплати позичальника – x грн.

1) Маємо рівняння: $30\ 000=\frac{x}{3}\cdot 9$; звідки $x=10\ 000$.

Отже, середньомісячна зарплата позичальника має бути не менше ніж 10 000 грн.

2) Маємо рівняння: $30\ 000=\frac{x}{3}\cdot 21$; звідки $x\approx 4285{,}7$.

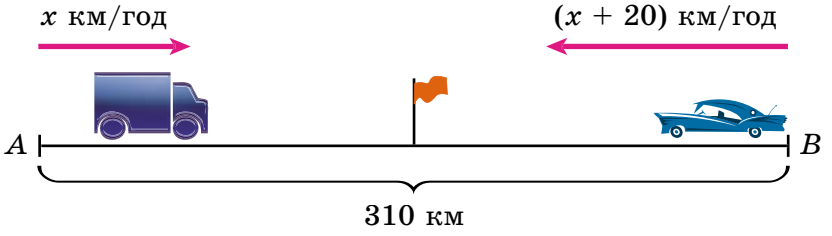
Отже, середньомісячна зарплата має бути не менше ніж 4286 грн.

3) Маємо рівняння: $30\ 000=\frac{x}{3}\cdot 33$; звідки $x\approx 2727{,}3$.

Отже, середньомісячна зарплата має бути не менше ніж 2728 грн.

Відповідь: 1) 10 000 грн;
2) 4286 грн;
3) 2728 грн.

Задача 3. З міста A до міста B, відстань між якими 310 км, виїхала вантажівка. Через 30 хв після цього з міста B до міста A виїхав легковик. Вантажівка і легковик зустрілися через 2 год після виїзду легковика. Знайти швидкість кожної із цих автівок, якщо швидкість легковика на 20 км/год більша за швидкість вантажівки.



Розв'язання. Нехай швидкість вантажівки – x км/год. Умову задачі зручно подати у вигляді таблиці:

Учасники руху	v, км/год	t, год	s, км	
Вантажівка	x	2,5	$2{,}5x$	310 км
Легковик	$x + 20$	2	$2(x + 20)$	

Оскільки автівки виїхали назустріч одна одній і зустрілися, то разом вони подолали 310 км.

Маємо рівняння: $2{,}5x + 2(x + 20) = 310$.

Розв'яжемо його: $2{,}5x + 2x + 40 = 310$;

$4{,}5x = 270$;

$x = 60$ (км/год) – швидкість вантажівки;

$60 + 20 = 80$ (км/год) – швидкість легковика.

Відповідь: 60 км/год; 80 км/год.

Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи задачу за допомогою рівняння?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

159. (*Усно.*) Одне число на 30 більше за інше. Менше з них позначено через x. Виразіть через x більше із цих чисел.

160. (*Усно.*) Одне додатне число в 4 рази більше за інше. Менше з них позначено через x. Виразіть через x більше із цих чисел.

161. На одній клумбі росте x кущів троянд, а на іншій – утричі більше. Виразіть через x кількість кущів троянд, що ростуть на другій клумбі.

162. (*Усно.*) Відстань, що дорівнює x км, велосипедистка долає за 3 год. Виразіть через x швидкість її руху.

163. (*Усно.*) Перше число позначили через x, а друге число становить чверть від першого. Виразіть друге число через x.

164. Перше число дорівнює x, а друге число становить 60 % від першого. Виразіть через x друге число.

165. (*Усно.*) Сума довжин двох відрізків дорівнює 16 см. Довжина одного з них x см. Виразіть через x довжину другого відрізка.

166. (*Усно.*) Власна швидкість човна дорівнює 24 км/год, а швидкість течії – x км/год. Виразіть через x швидкість човна за течією і проти течії.

167. Загадали число. Якщо від нього відняти 7 і одержаний результат поділити на 9, то матимемо 12. Яке число загадали?

168. Знайдіть число, половина якого разом з його третиною дорівнює 40.

169. У двох цистернах разом 64 т пального, причому в першій на 4 т менше, ніж у другій. Скільки тонн пального в кожній цистерні?

170. В автопарку вантажівок у 6 разів більше, ніж легковиків. Скільки легковиків в автопарку, якщо їх разом з вантажівками налічується 91?

171. Одне з двох додатних чисел утричі більше за інше. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 32.

172. Бабусі разом з мамою 99 років. Скільки років кожній з них, якщо бабуся старша за маму на 25 років?

173. Сума двох чисел 240, а їх відношення дорівнює 5 : 7. Знайдіть ці числа.

174. Різниця двох чисел 36, а їх відношення дорівнює 7 : 4. Знайдіть ці числа.

175. Периметр трикутника дорівнює 20 дм. Дві його сторони між собою рівні, і кожна з них на 1 дм більша за третю. Знайдіть сторони трикутника.

176. За два дні було продано 384 кг бананів, причому другого дня продали $\frac{3}{5}$ від того, що продали першого. Скільки кілограмів бананів продали першого дня і скільки – другого?

177. Група студентів за другий день подолала $\frac{7}{8}$ від тієї відстані, яку подолала першого дня. Скільки кілометрів подолали студенти першого дня і скільки – другого, якщо за перший день було подолано на 3 км більше, ніж за другий?

178. Бабуся ліпила вареники протягом двох годин. За другу годину вона виліпила на 5 % більше вареників, ніж за першу. Скільки вареників виліпила бабуся за першу годину і скільки – за другу, якщо за другу годину вона виліпила на 3 вареники більше, ніж за першу?

179. За пральну машину та її підключення заплатили 11 760 грн. Вартість підключення становить 5 % від вартості машини. Скільки коштує пральна машина?

180. За 2 год мотоцикліст долає таку саму відстань, що й велосипедистка за 5 год. Швидкість мотоцикліста на 27 км/год більша за швидкість велосипедистки. Знайдіть швидкість кожного з них.

181. Ящик з апельсинами на 3 кг важчий за ящик з лимонами. Яка маса кожного з них, якщо маса чотирьох ящиків з апельсинами така сама, як маса п'яти ящиків з лимонами?

182. З міста до села турист ішов зі швидкістю 4 км/год, а повертався назад зі швидкістю 3 км/год. На весь шлях він витратив 7 год. Знайдіть відстань від міста до села.

183. Периметр прямокутника дорівнює 36 см, причому одна з його сторін на 4 см більша за іншу. Знайдіть сторони прямокутника та його площу.

184. Під час літніх канікул Сергій прочитав удвічі більше оповідань, ніж Костя. Проте протягом вересня Костя встиг прочитати ще 24 оповідання, після чого виявилося, що хлопці прочитали однакову кількість оповідань. Скільки оповідань прочитав кожен з хлопців до початку навчального року?

185. У Марійки було втричі більше грошей, ніж в Олі. Після того як Марійка витратила 18 грн, грошей у дівчат стало порівну. Скільки грошей мала кожна з дівчат спочатку?

186. Мережа кондитерських до річниці свого відкриття дарувала відвідувачам набори солодощів торгових марок «Добре», «Солодко» та «Смачно». Наприкінці святкування з'ясувалося, що наборів «Солодко» було подаровано на 12 більше, ніж наборів «Добре», а наборів «Смачно» – на 31 більше, ніж «Солодко». По скільки наборів кожної марки було подарова-

но, якщо відвідувачів було 430 і кожен з них отримав по одному набору?

187. Одна сторона трикутника на 9 см менша від другої і вдвічі менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 105 см.

188. Чи можна розкласти 68 банок консервів у три ящики так, щоб у другому ящику було вдвічі більше банок, ніж у першому, а в третьому – на 3 банки менше, ніж у першому?

189. Чи можна 90 книжок розмістити на трьох полицях так, щоб на третій було на 3 книжки більше, ніж на другій, і на 5 книжок менше, ніж на першій?

190. Батькові зараз – 38 років, а його синові – 10. Через скільки років батько буде втричі старший за сина?

191. На одній ділянці кущів аґрусу втричі більше, ніж на другій. Якщо з першої ділянки пересадити 12 кущів на другу, то кущів аґрусу на обох ділянках стане порівну. Скільки кущів аґрусу росте на кожній ділянці?

192. У двох корпусах пансіонату проживала однакова кількість відпочивальників. У зв'язку з проведенням ремонту було вирішено переселити 24 відпочивальники з першого корпусу до другого, після чого кількість відпочивальників у першому корпусі стала в 4 рази меншою, ніж у другому. По скільки відпочивальників проживало в кожному корпусі до початку ремонтних робіт?

193. У двох мішках цукру було порівну. Після того як з першого мішка пересипали 8 кг до другого, у ньому стало вдвічі менше цукру, ніж у другому. По скільки кілограмів цукру було в кожному мішку спочатку?

194. На 440 гривень було придбано 25 зошитів у клітинку і лінійку. Вартість зошита в лінійку – 17 грн, а в клітинку – 18 грн. По скільки зошитів кожного виду придбали?

195. Для свята придбали 12 коробок цукерок по 55 грн та по 62,5 грн за одиницю, усього на суму 697,5 грн. По скільки коробок кожного виду придбали?

196. *Старовинна грецька задача.* У Піфагора запитали: «Скільки учнів навчається у твоїй школі?». На що він відповів: «Половина всіх моїх учнів вивчає математику, чверть – музику, сьома частина мовчить, і, окрім того, є ще три жінки». Скільки учнів навчалося в школі Піфагора?

197. Маса бідона з молоком становить 25 кг і ще половину його маси. Яка маса бідона з молоком?

198. $\frac{1}{4}$ від одного числа дорівнює $\frac{2}{3}$ від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 66.

199. 60 % від одного числа дорівнюють 45 % від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 210.

200. Човен витратив на шлях за течією 2,5 год, а проти течії – 3,6 год. Відстань, яку проплив човен за течією, виявилася на 7,6 км меншою, ніж відстань, яку він проплив проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

201. Катер за течією річки плив 1,6 год, а проти течії – 2,5 год. Відстань, яку подолав катер проти течії, виявилася на 6,2 км більшою, ніж відстань, яку подолав катер за течією. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 16 км/год.

202. З пункту A до пункту B зі швидкістю 12 км/год виїхав велосипедист. Через 3 год з пункту B до пункту A виїхала мотоциклістка зі швидкістю 45 км/год. Скільки годин до зустрічі з мотоциклісткою їхав велосипедист, якщо відстань від A до B становить 235,5 км? На якій відстані від пункту A відбулася їхня зустріч?

203. З котеджного містечка в напрямку залізничної станції зі швидкістю 14 км/год виїхала велосипедистка, а через 2 год після неї звідти ж, але в протилежному напрямку зі швидкістю 4 км/год вийшов пішохід. Через скільки годин після свого виходу пішохід буде на відстані 73 км від велосипедистки? На якій відстані від котеджного містечка в цей час він перебуватиме?

204. Перший кавун на 5 кг легший за другий і утричі легший за третій. Перший і третій кавуни разом удвічі важчі за другий. Знайдіть масу кожного кавуна.

205. Під час підготовки до олімпіади з математики Іван розв'язав на 3 задачі менше, ніж Оксана, і у 2 рази менше, ніж Сергій. При цьому Іван і Сергій разом розв'язали у 2,1 раза більше задач, ніж Оксана. Яку кількість задач розв'язав кожен з учнів, готуючись до олімпіади?

Вправи для повторення

206. Обчисліть:

1) $-3\frac{1}{4}\cdot 3\frac{9}{13}$; 2) $-3\frac{1}{7}\cdot\left(-1\frac{3}{11}\right)$; 3) $5\frac{1}{3}\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)$;

4) $-2\frac{4}{5}:1\frac{1}{15}$; 5) $-2\frac{1}{31}:\left(-31\frac{1}{2}\right)$; 6) $\frac{7}{9}:(-14)$.

207. Скільки відсотків становить:

1) число 7 від числа 28;

2) число 2,7 від числа $3\frac{3}{5}$?

208. Поясніть, чому не мають розв'язків рівняння:

1) $0\cdot x=15$; 2) $x+8=x$;

3) $y-2=y+3$; 4) $7-m=2-m$;

5) $0:x=13$; 6) $3(x+1)=3x$.

209. Знайдіть усі значення a, для яких рівняння $ax=-8$ має:

1) додатний корінь;

2) від'ємний корінь.

Життєва математика

210. На автомагістралі встановлено дорожній знак, який указує, що швидкість на найближчій ділянці шляху 10 км завдовжки не має перевищувати 50 км/год. Водій подолав цю ділянку за 10 хв. Чи порушив він правила дорожнього руху на цій ділянці шляху?



Цікаві задачі — поміркуй одначе

211. Мама, тато та двоє їхніх дітей мають переправитися човном на протилежний берег річки. Маса тата – 75 кг, мами – 60 кг, дітей – по 38 кг. Як їм скористатися човном, якщо він витримує масу до 80 кг і кожен у цій сім'ї вміє веслувати?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Коренем якого рівняння є число 8?

А. $x : 4 = 3$ **Б.** $x - 9 = 1$
В. $x + 7 = 15$ **Г.** $2x = 10$

2. Яке з рівнянь є лінійним?

А. $4x^2 = 5$ **Б.** $x + 7 = x^2$
В. $3x + x^2 = 0$ **Г.** $2x = 0$

3. Яке з рівнянь не має коренів?

А. $7x = 0$ **Б.** $0x = 7$ **В.** $0x = 0$ **Г.** $7x = 7$

2 **4.** Знайдіть корінь рівняння $0{,}3x - 1{,}5 = 0$.

А. 5 **Б.** -5 **В.** $\frac{1}{5}$ **Г.** $-\frac{1}{5}$

5. Яке з рівнянь рівносильне рівнянню $3x - 8 = 10$?

А. $2x = -12$ **Б.** $x + 7 = 1$ **В.** $5x = 30$ **Г.** $x - 9 = 3$

6. На одній з полиць книжок утричі більше, ніж на іншій. Скільки книжок на цій полиці, якщо разом на двох полицях 48 книжок?

А. 12 **Б.** 16 **В.** 30 **Г.** 36

3 **7.** Укажіть рівняння, коренем якого є будь-яке число.

А. $12x = -8$ **Б.** $2(x - 1) = 2x$
В. $2(x - 1) = 2x - 2$ **Г.** $2x = 2x - 2$

8. Знайдіть корінь рівняння $\frac{x+2}{5} + \frac{x-2}{10} = \frac{1}{2}$.

А. 0 **Б.** 1 **В.** 2 **Г.** 5

9. Розв'яжіть рівняння $|2x - 5| = 7$. Якщо рівняння має один корінь, укажіть його у відповіді; якщо рівняння має більше ніж один корінь, у відповіді вкажіть їх суму.

А. 7 **Б.** 6 **В.** -1 **Г.** 5

4 **10.** Знайдіть найменше ціле значення a, для якого коренем рівняння $ax = 8$ є ціле число.

А. 4 **Б.** 1 **В.** -8 **Г.** -16

11. Для якого значення a рівняння $(a + 3)x = a(a - 3)$ не має розв'язків?

А. немає таких значень a **Б.** -3 **В.** 0 **Г.** 3

12. 80 % від одного числа дорівнюють $\frac{2}{7}$ від другого. Знайдіть менше із цих чисел, якщо їх сума дорівнює 76.

А. 30 **Б.** 24 **В.** 22 **Г.** 20

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** У першому кошику яблук на 6 менше, ніж у другому, й удвічі менше, ніж у третьому. Всього у трьох кошиках разом 62 яблука. Встановіть відповідність між питаннями до задачі (1–3) та відповідями до них (А–Г).

Питання	*Відповіді*
1. Скільки яблук у першому кошику?	**А.** 28 ябл.
2. Скільки яблук у другому кошику?	**Б.** 20 ябл.
3. Скільки яблук у третьому кошику?	**В.** 16 ябл.
	Г. 14 ябл.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–3

1 **1.** Чи є число 4 коренем рівняння:

1) $x + 7 = 10$; 2) $3x = 12$?

2. Які з рівнянь є лінійними:

1) $5x = -2$; 2) $x^2 = 7$;

3) $7 : x = 7$; 4) $0x = 0$?

3. Скільки коренів має рівняння:

1) $-3x = 5$; 2) $0x = 7$?

2 **4.** Розв'яжіть рівняння:

1) $-4x = 12$; 2) $0{,}2x - 1{,}2 = 0$.

5. Чи рівносильні рівняння: $3x - 2 = x + 8$ і $2(x - 3) = x - 1$?

6. У першому кошику удвічі більше грибів, ніж у другому. Скільки грибів у кожному кошику, якщо у двох кошиках разом 78 грибів?

3 **7.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+1}{5} + \frac{3x-2}{4} = 2$; 2) $5x - (x + 5) = 4(x - 2)$.

4 **8.** Човен за течією плив 3,5 год, а проти течії 4,2 год. Відстань, яку проплив човен за течією, на 9,8 км більша за відстань, яку проплив човен проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

Додаткові завдання

3 **9.** Розв'яжіть рівняння $|4x - 3| = 5$.

4 **10.** Знайдіть усі цілі значення a, для яких корінь рівняння $ax = -6$ є цілим числом.

11. З міста до села вийшов пішохід зі швидкістю 4 км/год. Через 2 год із села до міста вирушила велосипедистка зі швидкістю 16 км/год. Скільки годин до зустрічі з пішоходом їхала велосипедистка, якщо відстань від села до міста дорівнює 38 км?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

1 **212.** Чи є число -5 коренем рівняння:
1) $x + 3 = 2$; 2) $2 - x = 7$; 3) $x : 5 = 1$; 4) $4x = -20$?

2 **213.** Доведіть, що кожне із чисел 2, -3 і 0 є коренем рівняння $x(x - 2)(x + 3) = 0$.

3 **214.** З'ясуйте, чи є рівносильними рівняння:
1) $|x| = 2$ і $x(x + 2) = 0$; 2) $|x| = 4$ і $x^2 = 16$.

4 **215.** Чи є правильним твердження: «Якщо кожен корінь одного рівняння є коренем іншого, то ці рівняння рівносильні»?

До § 2

1 **216.** Укажіть кількість коренів рівняння:
1) $7x = -12$; 2) $0x = 0$; 3) $-3x = -17$; 4) $0x = -8$.

2 **217.** Розв'яжіть рівняння:
1) $-\frac{2}{3}x = 6$; 2) $\frac{4}{7}x = -\frac{16}{21}$; 3) $\frac{x-1}{7} = 3$; 4) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 15$;
5) $4{,}7x - 2 = 4{,}5x + 3$; 6) $2x - 3 - (3x - 2) = -8$.

3 **218.** Знайдіть корінь рівняння:
1) $10(2x - 7) - 5(4x - 2) = -60$; 2) $3(5x - 4) - (15x - 2) = 9$;
3) $\frac{3x+1}{7} + \frac{2x+1}{5} = 2$; 4) $\frac{2x+1}{3} - \frac{7-x}{6} = \frac{5x-3}{2}$.

4 **219.** Для якого значення a:
1) рівняння $ax = 8$ не має коренів;
2) коренем рівняння $(a + 3)x = a + 3$ є будь-яке число?

* **220.** Розв'яжіть рівняння $(a - 1)x = 8$ відносно змінної x.

До § 3

221. На станції техобслуговування за 3 дні відремонтували x автівок. Виразіть через x кількість відремонтованих автівок на день, якщо щодня ремонтували однакову кількість автівок.

222. Периметр прямокутника дорівнює 36 см, причому його довжина вдвічі більша за ширину. Знайдіть сторони прямокутника та його площу.

223. За 7 олівців і 3 ручки заплатили 50 грн 85 к. Скільки коштує один олівець, якщо він дешевший за ручку на 4 грн 95 к.?

224. У кошику було в 4 рази менше винограду, ніж у ящику. Після того як з ящика до кошика переклали 1,5 кг винограду, у кошику стало втричі менше винограду, ніж у ящику. Скільки кілограмів винограду було в кошику і скільки – у ящику спочатку?

225. За 4,5 год човен за течією річки долає таку саму відстань, як за 6 год проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна дорівнює 14 км/год.

226. На проміжній станції поїзд було затримано на 0,5 год. Збільшивши швидкість на 15 км/год, він через 2 год прибув на кінцеву станцію чітко за розкладом. Якою була швидкість поїзда до затримки?

227. На двох тарілках було по 60 вареників. Після того як з першої тарілки з'їли утричі більше вареників, ніж з другої, на ній залишилося вдвічі менше вареників, ніж на другій. По скільки вареників залишилося на кожній тарілці?

228. Для преміювання працівників офісу нараховано певну суму коштів. Якщо кожен отримає по 11 000 грн, то 2000 грн ще залишаться, а щоб кожен отримав по 12 000 грн, не вистачить 6000 грн. Скільки працівників у офісі та яку суму коштів нараховано для преміювання?

229. В одній овочевій ятці запланували продати 95 кг лимонів, а у другій – 60 кг. Перша щодня продавала по 7 кг, а друга – по 6 кг. Через скільки днів лимонів у першій ятці залишиться вдвічі більше, ніж у другій?

230. Змішали 15-відсотковий розчин добрива з 5-відсотковим і одержали 180 г 7,5-відсоткового розчину. По скільки грамів кожного розчину взяли?

Головне в розділі 1

РІВНЯННЯ

Рівнянням називають рівність, що містить змінну.

КОРІНЬ РІВНЯННЯ

Значення змінної, яке перетворює рівняння в правильну числову рівність, називають ***коренем***, або ***розв'язком рівняння***.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

РІВНОСИЛЬНІ РІВНЯННЯ

Два рівняння називають ***рівносильними***, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які коренів не мають.

ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Рівняння вигляду $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа, називають ***лінійним рівнянням з однією змінною***.

РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ

$ax = b$, x – змінна, a і b – числа

якщо $a \neq 0$, то $\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$	якщо $a = 0$ і $b = 0$, то x – будь-яке число	якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, то рівняння не має коренів

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розв'язувати задачу за допомогою рівняння слід у такій послідовності:

1) позначити змінною одну з невідомих величин;

2) інші невідомі величини (якщо вони є) виразити через введену змінну;

3) за умовою задачі встановити співвідношення між невідомими та відомими значеннями величин і скласти рівняння;

4) розв'язати одержане рівняння;

5) проаналізувати розв'язки рівняння і знайти невідому величину, а за потреби і значення інших невідомих величин;

6) записати відповідь до задачі.

РОЗДІЛ 2

ЦІЛІ ВИРАЗИ

$2y + 3y$

$(a + b)^2$

a^n

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **пригадаєте,** що таке числові й буквені вирази, їх значення; степінь, основа та показник степеня;
- **ознайомитеся** з поняттями одночлена і многочлена, тотожності, тотожно рівних виразів;
- **навчитеся** виконувати арифметичні дії з одночленами і многочленами, тотожні перетворення виразів; застосовувати формули скороченого множення і властивості степенів, розкладати многочлени на множники.

§ 4. Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Числове значення виразу

Числові вирази та їх значення

Числові вирази утворюють із чисел за допомогою знаків арифметичних дій і дужок.

Наприклад, вирази $12 \cdot 3 - 9$; $1{,}2^3$; $5\frac{1}{7} - \left(5{,}7 : 3 + 1\frac{7}{9}\right)$ є числовими виразами.

Число, що є результатом виконання всіх дій у числовому виразі, називають ***значенням виразу***.

Наприклад, $12 \cdot 3 - 9 = 27$, тому 27 є значенням числового виразу $12 \cdot 3 - 9$.

Якщо числовий вираз містить дію, яку неможливо виконати, то кажуть, що вираз не має змісту (смислу). Наприклад, вираз $5 : (8 : 2 - 4)$ не має змісту, бо $8 : 2 - 4 = 0$ і наступну дію $5 : 0$ виконати неможливо.

Вирази зі змінними

Окрім числових виразів, у математиці розглядають вирази, що містять букви. Такі вирази ми раніше називали *буквеними*.

Приклад 1. Нехай потрібно знайти площу прямокутника, довжина якого дорівнює 10 см, а ширина – b см.

За формулою площі прямокутника маємо: $S = 10b$. Якщо, наприклад, $b = 3$, то $S = 10 \cdot 3 = 30$, а якщо $b = 7$, то $S = 70$.

У виразі $10b$ букві b можна надавати різних значень, тобто її значення можна змінювати. Відповідно буде змінюватися і значення виразу $10b$. Тому букву b у такому виразі називають *змінною*, а сам вираз $10b$ – *виразом зі змінною*.

Вирази зі змінними утворюють із чисел і змінних за допомогою знаків арифметичних дій і дужок.

Наприклад, вирази $5 + a$; $2(b - 3x)$; $\frac{c-5p}{d}$ – вирази зі змінними.

Якщо замість змінних у вираз підставити певні числа, то одержимо числовий вираз. Його значення називають ***числовим значенням виразу*** для вибраних значень змінних.

Приклад 2. Знайти значення виразу:

1) $(5 + b) : 4$, якщо $b = 0; -2$; 2) $\frac{a-c}{12}$, якщо $a = 17$, $c = -5$.

Розв'язання. 1) Якщо $b = 0$, то $(5 + b) : 4 = (5 + 0) : 4 = 1{,}25$; якщо $b = -2$, то $(5 + b) : 4 = (5 + (-2)) : 4 = 0{,}75$.

2) Якщо $a = 17$, $c = -5$, то $\frac{a-c}{12} = \frac{17-(-5)}{12} = \frac{22}{12} = 1\frac{5}{6}$.

Відповідь: 1) 1,25; 0,75; 2) $1\frac{5}{6}$.

Раціональні вирази

Вираз, який містить лише дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня, називають *раціональним виразом*.

Наприклад, вирази:

$$2a - m;\quad \frac{p+2q}{9};\quad -\frac{2}{3}(x-9+y);\quad \frac{5+x}{m};\quad \frac{17}{x^2-3};\quad a+b-\frac{1}{c}$$

є раціональними виразами.

Раціональний вираз, який не містить ділення на вираз зі змінною, називають ***цілим раціональним виразом***.

Якщо в раціональному виразі є ділення на вираз зі змінною, його називають ***дробовим раціональним виразом***. Три перших з вищенаведених раціональних виразів – цілі, а три останніх – дробові.

Вирази зі змінними використовують для запису формул.

Наприклад, $s = vt$ – формула відстані,

$P = 2(a + b)$ – формула периметра прямокутника,

$n = 2k$, де k – натуральне число, – формула парного натурального числа,

$n = 2k + 1$, де k – натуральне число або 0 (або $n = 2k - 1$, де k – натуральне число), – формула непарного натурального числа,

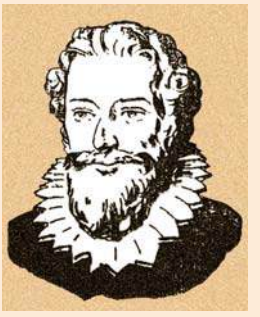
$n = 7k$, де k – натуральне число, – формула натурального числа, кратного числу 7.

Вирази, що не є раціональними, розглядатимемо в наступних класах.

А ще раніше...

Поява букв і знаків арифметичних дій у математичних записах є результатом розвитку математичної науки. У своїх працях шукане невідоме число давні єгипетські вчені називали «хау» (у перекладі – «купа»), а знаки математичних дій взагалі не вживали, записуючи все переважно словами. І хоча потреба у використанні знаків математичних дій виникла ще у Давньому Єгипті, з'явилися вони набагато пізніше. Замість знаків додавання і віднімання давні математики використовували малюнки або слова, а це призводило до громіздких записів.

Знаки арифметичних дій стали використовувати в наукових працях математиків, починаючи з XV ст. На сьогодні відомо, хто і коли запропонував деякі математичні знаки для записів. Так, знаки «+» і «–» трапляються вперше в 1489 році в праці «Арифметика» Йоганна Відмана, професора Лейпцизького університету. Знак «×» для позначення дії множення ввів англійський математик Вільям Оутред у 1631 році. Для позначення дії ділення він використовував риску («/»). Дробову риску в математичних записах (для відокремлення чисельника дробу від його знаменника) уже в 1202 році використовував Леонардо Пізанський, відомий математик середньовічної Європи. Німецький математик, фізик і філософ Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716) запропонував використовувати як знак множення крапку («·»), а як знак ділення – двокрапку («:»). Це відбулося у 1693 році та в 1684 році відповідно. Знак рівності («=») увів у 1557 році Роберт Рекорд, математик, який народився у Вельсі й довгий час був особистим лікарем королівської сім'ї Великої Британії.



Франсуа Вієт
(1540–1603)

Величезний внесок у розвиток алгебраїчної символіки зробив у XVI ст. видатний французький математик Франсуа Вієт, якого називають «батьком» алгебри. Саме він став позначати буквами не тільки

змінні, а й будь-які числа, зокрема коефіцієнти при змінних. Проте його символіка відрізнялася від сучасної. Замість x, x^2 і x^3 Вієт писав відповідно букви N (*Numerus* – число), Q (*Quadratus* – квадрат) і C (*Cubus* – куб). Наприклад, рівняння $x^3 + 7x^2 - 8x = 20$ він записував так: $1C + 7Q - 8N$ *aequ* 20 (*aequali* – дорівнює).

Із чого утворюють числові вирази? ○ Що називають значенням числового виразу? ○ Що таке вираз зі змінними? ○ Що називають числовим значенням виразу для вибраних значень змінних? ○ Наведіть приклад числового виразу і виразу зі змінними. ○ Який вираз називають цілим раціональним виразом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

231. (*Усно.*) Які з даних виразів є числовими, а які – виразами зі змінними:

1) $5 + m^2 - a$; 2) $(12 - 3) : 4$;

3) $\dfrac{5+x}{a+b}$; 4) $(0 - 8) \cdot 5 - 13$?

232. (*Усно.*) Які з раціональних виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\dfrac{a^3+c}{5}$; 2) $\dfrac{5}{a^3+c}$; 3) $m + \dfrac{x}{7}$; 4) $m + \dfrac{7}{x}$?

233. Випишіть окремо: числові вирази; вирази зі змінними; цілі раціональні вирази; дробові раціональні вирази:

1) $5 + c$; 2) $(2 - 15) \cdot 4$; 3) $\dfrac{a+m}{p}$; 4) $q^2 - 19$;

5) $7 + \dfrac{a}{5}$; 6) $\dfrac{1}{4}ab$; 7) $\dfrac{9-5}{11}$; 8) $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$.

234. Прочитайте словами вирази зі змінними:

1) $x + 7$; 2) $m - a$; 3) $5ab$; 4) $5 : (c + 9)$.

235. Складіть і запишіть по два вирази:

1) зі змінною a; 2) зі змінними x і y.

236. Складіть і запишіть по три вирази:

1) зі змінною x; 2) зі змінними a і b.

237. (*Усно.*) Які з даних числових виразів не мають змісту:

1) $(5 - 6) : 7$; 2) $(10 - 2 \cdot 5) : 7$;

3) $4 : (12 - 2 \cdot 6)$; 4) $\dfrac{17}{15 + 5 \cdot (-3)}$?

238. Знайдіть значення виразу:

1) $5x - 3$, якщо $x = 1{,}8$; $x = 2\frac{1}{5}$;

2) $a^2 + 3a$, якщо $a = -1$; $a = 0{,}8$.

239. Знайдіть значення виразу:

1) $5m + 2n$, якщо $m = -1{,}3$; $n = 2\frac{1}{2}$;

2) $a(2b - c)$, якщо $a = 1{,}5$; $b = 3{,}2$; $c = -1{,}4$.

240. Знайдіть значення виразу:

1) $b^2 - 4b$, якщо $b = -2$; $b = 0{,}5$;

2) $x^2 - y^2$, якщо $x = 5$; $y = -3$; якщо $x = 0{,}1$; $y = 0{,}2$.

241. Запишіть у вигляді виразу:

1) суму чисел b і c;

2) добуток чисел $5m$ і n^3;

3) квадрат суми чисел a і $9p$;

4) різницю квадратів чисел $3d$ і $7t$.

242. Запишіть у вигляді виразу:

1) різницю чисел p і 7;

2) частку чисел $a + c$ і d;

3) суму числа a і добутку чисел m і n.

243. Заповніть у зошиті такі таблиці:

m	2	3	-1	0	-2
n	1	2	0	-5	-3
$2m - 3n$					

x	-1	0	1	2
$x^2 + 2$				
$x^2 + 2x$				

244. Дізнайтеся прізвище видатного українського кардіохірурга. Для цього знайдіть значення виразу в першій таблиці й перенесіть букви, що відповідають знайденим значенням, у другу таблицю.

x	-2	-1	0	1	2
$x^2 - 4x$					
Букви	*O*	*A*	*B*	*M*	*C*

5	-3	12	-4	12	0

245. Порівняйте суму $a + b$ з добутком ab, якщо:

1) $a = 0$, $b = -2$;

2) $a = -3$, $b = 2$.

246. Майстер за одну годину виготовляє x деталей, а його учень – y деталей. Скільки деталей вони виготовили разом, якщо майстер працював 8 год, а учень – 4 год?

247. (*Усно.*) Нехай a дм – довжина прямокутника, b дм – його ширина ($a > b$). Що можуть означати вирази:

1) ab; 2) $2(a + b)$; 3) $2a$; 4) $\frac{a}{b}$?

248. Ручка коштує x грн, олівець – y грн ($x > y$). Що можуть означати вирази:

1) $x + y$; 2) $3x + 4y$; 3) $x - y$; 4) $\frac{x}{y}$?

249. Запишіть у вигляді виразу час, який учень щоденно проводить у школі, якщо в нього на день a уроків по 45 хв, b перерв по 15 хв і c перерв по 10 хв. Обчисліть значення цього виразу, якщо $a = 6$; $b = 2$; $c = 3$.

250. Коли Марійка витягла зі своєї скарбнички всі монети, то виявилося, що там було x монет номіналом 50 к., y монет номіналом 1 грн і z монет номіналом 2 грн. Обчисліть, яку суму коштів назбирала Марійка, якщо $x = 8$; $y = 5$; $z = 20$.

251. Спростіть вираз $-2\frac{1}{6}x + 3{,}5y - 3\frac{5}{6}x - 2{,}5y$ та знайдіть його значення, якщо $x = -330$, $y = 16$. Сприймаючи значення виразу як рік, пригадайте, яка визначна для України подія відбулася цього року.

252. Спростіть вираз $5\frac{1}{7}a - 2{,}6b + 1\frac{6}{7}a + 1{,}6b$ та знайдіть його значення, якщо $a = 225$, $b = -40$, відтак дізнаєтеся рік заснування Національного університету «Києво-Могилянська академія».

253. Складіть формулу натурального числа, яке:

1) кратне числу 9; 2) при діленні на 5 дає в остачі 1.

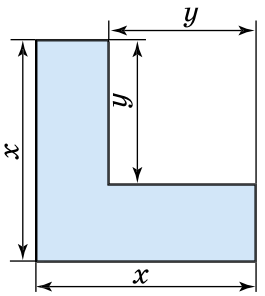
254. Для деяких значень a і b значення виразу $a - b$ дорівнює 2,25. Якого значення для тих самих значень a і b набуває вираз:

1) $4(a - b)$; 2) $b - a$; 3) $\frac{1}{b - a}$; 4) $\frac{3(a - b)}{4(b - a)}$?

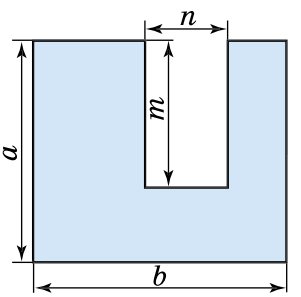
255. Для деяких значень c і d значення виразу $c - d$ дорівнює $\frac{4}{7}$. Якого значення для тих самих значень c і d набуває вираз:

1) $7(c - d)$; 2) $d - c$; 3) $\frac{1}{d - c}$; 4) $\frac{5(d - c)}{4(c - d)}$?

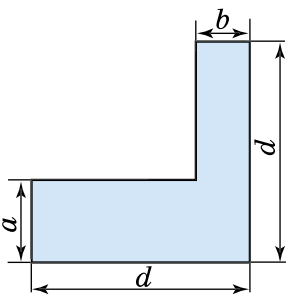
256. Складіть вирази для обчислення площ фігур (мал. 4.1–4.3):



Мал. 4.1



Мал. 4.2



Мал. 4.3

Вправи для повторення

257. Обчисліть:

1) 13^2; 2) 7^3;

3) $(-2{,}1)^2$; 4) $(-1{,}1)^3$;

5) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; 6) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^2$;

7) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; 8) $0{,}2^3$.

258. Якою цифрою закінчується значення виразу:

1) 132^2; 2) 271^3; 3) 2017^2; 4) $1315^2 - 115^3$?

259. Власна швидкість катера – 26 км/год, а швидкість течії річки – 2 км/год. Знайдіть відстань між двома пристанями, якщо в одному напрямку катер долає її на 30 хв швидше, ніж у зворотному.

Життєва математика

260. Військовий збір у 2023 році складав 1,5 % від доходів громадян. Протягом року заробітна плата директора магазину мобільних аксесуарів становила 14 000 грн, кожної з двох його продавчинь – по 8000 грн, а продавця-консультанта – 10 000 грн на місяць. Щомісяця, крім військового збору, директор перераховував 700 грн, кожна з продавчинь – по 300 грн і консультант-продавець – 400 грн у благодійний фонд на підтримку української армії. Скільки всього коштів сплатили робітники цього магазину на потреби української армії в 2023 році?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

261. Спростіть вираз: 1) $3a \cdot 7$; 2) $2b \cdot (-0{,}1)$; 3) $-6{,}2a \cdot 5b$; 4) $-0{,}2c \cdot (-0{,}5d)$.

262. Розкрийте дужки:
1) $4(b + 1)$; 2) $3(m - 2)$; 3) $-7(c - 5)$;
4) $-10(7 + a)$; 5) $5(-1{,}4 + k)$; 6) $(t - 2{,}5) \cdot (-8)$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

263. Чи існує таке значення x, для якого: 1) $-x \geqslant |x|$; 2) $x > |x|$?

§ 5. Тотожні вирази. Тотожність. Тотожне перетворення виразу. Доведення тотожностей

Тотожні вирази

Знайдемо значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ для деяких значень змінної x і результат запишемо в таблицю:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$2(x - 1)$	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6
$2x - 2$	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6

З таблиці можна дійти висновку, що значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ для кожного з даних значень змінної x між собою рівні. Як відомо, за розподільною властивістю множення: $2(x - 1) = 2x - 2$. Тому для будь-якого іншого значення змінної x значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ теж будуть між собою рівними. Такі вирази називають *тотожно рівними*.

Два вирази, відповідні значення яких між собою рівні для будь-яких значень змінних, називають *тотожними*, або *тотожно рівними*.

Наприклад, тотожними є вирази $2x + 3x$ і $5x$, бо для кожного значення змінної x ці вирази набувають однакових значень (це зрозуміло, адже $2x + 3x = 5x$).

Розглянемо тепер вирази $3x + 2y$ і $5xy$. Якщо $x = 1$ і $y = 1$, то відповідні значення цих виразів рівні між собою:

$$3x + 2y = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5; \qquad 5xy = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5.$$

Проте можна вказати такі значення x і y, для яких значення цих виразів рівними між собою не будуть. Наприклад, якщо $x = 2$; $y = 0$, то

$$3x + 2y = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6, \qquad 5xy = 5 \cdot 2 \cdot 0 = 0.$$

Отже, існують такі значення змінних, для яких відповідні значення виразів $3x + 2y$ і $5xy$ не дорівнюють одне одному. Тому вирази $3x + 2y$ і $5xy$ не є тотожно рівними.

Тотожність

Рівність, яка є правильною для будь-яких значень змінних, називають *тотожністю*.

З огляду на зазначене, тотожностями, зокрема, є рівності: $2(x - 1) = 2x - 2$ та $2x + 3x = 5x$.

Тотожністю є кожна рівність, якою записано відомі властивості дій над числами. Наприклад,

$a + b = b + a$; $\quad (a + b) + c = a + (b + c)$; $\quad a(b + c) = ab + ac$;
$ab = ba$; $\quad (ab)c = a(bc)$; $\quad a(b - c) = ab - ac$.

Тотожностями є і такі рівності:

$a + 0 = a$; $\quad a \cdot 0 = 0$; $\quad a \cdot (-b) = -ab$;
$a + (-a) = 0$; $\quad a \cdot 1 = a$; $\quad -a \cdot (-b) = ab$.

Тотожностями також вважають правильні числові рівності, наприклад:

$1 + 2 + 3 = 6$; $\quad 5^2 + 12^2 = 13^2$; $\quad 12 \cdot (7 - 6) = 3 \cdot 4$.

Тотожне перетворення виразу

Якщо у виразі $5x + 2x - 9$ звести подібні доданки, одержимо, що $5x + 2x - 9 = 7x - 9$. У такому разі кажуть, що вираз $5x + 2x - 9$ замінили тотожним йому виразом $7x - 9$.

Заміну виразу на тотожно рівний йому вираз називають *тотожним перетворенням виразу*.

Тотожні перетворення виразів виконують, застосовуючи властивості дій над числами. Зокрема, *тотожними перетвореннями є розкриття дужок, зведення подібних доданків* тощо. А ще тотожні перетворення виконують під час *спрощення виразу*, тобто заміни деякого виразу на тотожно рівний йому вираз, який має коротший запис.

Приклад 1. Спростити вираз: 1) $-0{,}3m \cdot 5n$;
2) $2(3x - 4) + 3(-4x + 7)$; 3) $2 + 5a - (a - 2b) + (3b - a)$.

Розв'язання. 1) $-0{,}3m \cdot 5n = -0{,}3 \cdot 5mn = -1{,}5mn$;
2) $2(3x-4)+3(-4x+7) = \underline{6x} - 8 - \underline{12x} + 21 = -6x + 13 = 13 - 6x$;
3) $2 + 5a - (a - 2b) + (3b - a) = 2 + \underline{5a} - \underline{a} + \underline{\underline{2b}} + \underline{\underline{3b}} - \underline{a} = 3a + 5b + 2$.

Відповідь: 1) $-1{,}5mn$; 2) $13 - 6x$; 3) $3a + 5b + 2$.

Доведення тотожностей

Щоб довести, що рівність є тотожністю (інакше кажучи, щоб *довести тотожність*), використовують тотожні перетворення виразів.

Довести тотожність можна одним зі способів:

- виконати тотожні перетворення її лівої частини, тим самим звівши її до вигляду правої частини;
- виконати тотожні перетворення її правої частини, тим самим звівши її до вигляду лівої частини;
- виконати тотожні перетворення обох її частин, тим самим звівши обидві частини до однакових виразів.

Приклад 2. Довести тотожність:
1) $2x - (x + 5) - 11 = x - 16$;
2) $20b - 4a = 5(2a - 3b) - 7(2a - 5b)$;
3) $2(3x - 8) + 4(5x - 7) = 13(2x - 5) + 21$.

Розв'язання. 1) Перетворимо ліву частину даної рівності:
$2x - (x + 5) - 11 = \underline{2x} - \underline{x} - 5 - 11 = x - 16$.

Тотожними перетвореннями вираз у лівій частині рівності звели до вигляду правої частини і тим самим довели, що ця рівність є тотожністю.

2) Перетворимо праву частину рівності:
$5(2a - 3b) - 7(2a - 5b) = \underline{10a} - \underline{\underline{15b}} - \underline{14a} + \underline{\underline{35b}} = 20b - 4a$.

Тотожними перетвореннями праву частину рівності звели до вигляду лівої частини і тим самим довели, що ця рівність є тотожністю.

3) У цьому разі зручно спростити і ліву, і праву частини рівності та порівняти результати:

$2(3x-8)+4(5x-7)=\underline{6x}-16+\underline{20x}-28=26x-44$;

$13(2x-5)+21=26x-65+21=26x-44$.

Тотожними перетвореннями ліву і праву частини рівності звели до одного й того самого вигляду: $26x-44$. Тому ця рівність є тотожністю.

Які вирази називають тотожними? Наведіть приклад тотожних виразів. Яку рівність називають тотожністю? Наведіть приклад тотожності. Що називають тотожним перетворенням виразу? Як довести тотожність?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

264. (*Усно.*) Чи є вирази тотожно рівними:

1) $3x+x$ і $4x$;
2) $2a+b$ і $b+2a$;
3) $a+a+a$ і a^3;
4) $3(a-2)$ і $3a-6$;
5) $x-y$ і $y-x$;
6) $7m\cdot p$ і $7p\cdot m$?

265. Чи є тотожно рівними вирази (чому?):

1) $5m-2m$ і $3m$;
2) $3a-8$ і $8-3a$;
3) $5x+y$ і $y+5x$;
4) $b+b$ і b^2;
5) $2(x-3)$ і $2x-6$;
6) $2a\cdot b$ і $2a+b$?

266. (*Усно.*) Чи є тотожністю рівність:

1) $2x+3y=6xy$;
2) $5a-1=-1+5a$;
3) $9(a-b)=9a-5b$?

267. Розкрийте дужки:

1) $2(m-1)$;
2) $9(3x+2)$;
3) $-(a-5)$;
4) $-(-7+2m)$.

268. Розкрийте дужки:

1) $-(m-2)$;
2) $4(a+1)$;
3) $7(1-3p)$;
4) $-(-3a+5)$.

269. Зведіть подібні доданки:

1) $2a-a$;
2) $-5p+7p$;
3) $-3b-2b$;
4) $c-8c$.

270. Назвіть кілька виразів, тотожних виразу $3x+4x$.

271. Спростіть вираз, використовуючи переставну та сполучну властивості множення:

1) $-2{,}5x\cdot 4$;
2) $4p\cdot(-1{,}5)$;
3) $0{,}2x\cdot(-0{,}3p)$;
4) $-\frac{1}{7}x\cdot(-7y)$.

272. Спростіть вираз:

1) $-2p \cdot 3{,}5$; 2) $7a \cdot (-1{,}2)$;

3) $0{,}2x \cdot (-3y)$; 4) $-1\frac{1}{3}m \cdot (-3n)$.

273. (*Усно.*) Спростіть вираз:

1) $2x - 9 + 5x$; 2) $7a - 3b + 2a + 3b$;

3) $-2x \cdot 3$; 4) $-4a \cdot (-2b)$.

274. Зведіть подібні доданки:

1) $5b - 8a + 4b - a$; 2) $17 - 2p + 3p + 19$;

3) $1{,}8a + 1{,}9b + 2{,}8a - 2{,}9b$; 4) $5 - 7c + 1{,}9p + 6{,}9c - 1{,}7p$.

275. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $4(5x - 7) + 3x + 13$; 2) $2(7 - 9a) - (4 - 18a)$;

3) $3(2p - 7) - 2(p - 3)$; 4) $-(3m - 5) + 2(3m - 7)$.

276. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $3(8a - 4) + 6a$; 2) $7p - 2(3p - 1)$;

3) $2(3x - 8) - 5(2x + 7)$; 4) $3(5m - 7) - (15m - 2)$.

277. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $0{,}6x + 0{,}4(x - 20)$, якщо $x = 2{,}4$;

2) $1{,}3(2a - 1) - 16{,}4$, якщо $a = 10$;

3) $1{,}2(m - 5) - 1{,}8(10 - m)$, якщо $m = -3{,}7$;

4) $2x - 3(x + y) + 4y$, якщо $x = -1$, $y = 1$.

278. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $0{,}7x + 0{,}3(x - 4)$, якщо $x = -0{,}7$;

2) $1{,}7(y - 11) - 16{,}3$, якщо $y = 20$;

3) $0{,}6(2a - 14) - 0{,}4(5a - 1)$, якщо $a = -1$;

4) $5(m - n) - 4m + 7n$, якщо $m = 1{,}8$; $n = -0{,}9$.

279. Доведіть тотожність:

1) $-(2x - y) = y - 2x$; 2) $2(x - 1) - 2x = -2$;

3) $2(x - 3) + 3(x + 2) = 5x$; 4) $c - 2 = 5(c + 2) - 4(c + 3)$.

280. Доведіть тотожність:

1) $-(m - 3n) = 3n - m$; 2) $7(2 - p) + 7p = 14$;

3) $5a = 3(a - 4) + 2(a + 6)$; 4) $4(m - 3) + 3(m + 3) = 7m - 3$.

281. Довжина однієї зі сторін трикутника a см, а довжина кожної з двох інших сторін на 2 см більша за неї. Запишіть у вигляді виразу периметр трикутника та спростіть цей вираз.

282. Ширина прямокутника дорівнює x см, а довжина на 3 см більша за ширину. Запишіть у вигляді виразу периметр прямокутника та спростіть цей вираз.

3 **283.** Розкрийте дужки та спростіть вираз:

1) $x - (x - (2x - 3))$; 2) $5m - ((n - m) + 3n)$;

3) $4p - (3p - (2p - (p + 1)))$; 4) $5x - (2x - ((y - x) - 2y))$;

5) $\frac{2}{3}\left(6a - \frac{3}{8}b\right) - \frac{2}{11}\left(4\frac{1}{8}a - 33b\right)$;

6) $-\frac{2}{9}(2{,}7m - 1{,}5n) + \frac{5}{6}(2n - 0{,}48m)$.

284. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

1) $a - (a - (3a - 1))$;

2) $12m - ((a - m) + 12a)$;

3) $5y - (6y - (7y - (8y - 1)))$;

4) $\frac{4}{7}(2{,}1a - 2{,}8b) - \frac{4}{5}\left(1\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{4}b\right)$.

285. Доведіть тотожність:

1) $10x - (-(5x + 20)) = 5(3x + 4)$;

2) $-(-3p) - (-(8 - 5p)) = 2(4 - p)$;

3) $3(a - b - c) + 5(a - b) + 3c = 8(a - b)$.

286. Доведіть тотожність:

1) $12a - (-(8a - 16)) = -4(4 - 5a)$;

2) $4(x + y - t) + 5(x - t) - 4y = 9(x - t)$.

287. Доведіть, що значення виразу

$$1{,}8(m - 2) + 1{,}4(2 - m) + 0{,}2(1{,}7 - 2m)$$

не залежить від значення змінної.

288. Доведіть, що для будь-якого значення змінної значення виразу $a - (a - (5a + 2)) - 5(a - 8)$ дорівнює одному й тому самому числу.

4 **289.** Доведіть, що сума трьох послідовних парних чисел ділиться на 6.

290. Доведіть, що якщо n – натуральне число, то значення виразу $-2(2{,}5n - 7) + 2\frac{1}{3}(3n - 6)$ є парним числом.

Вправи для повторення

291. Сплав масою 1,6 кг містить 15 % міді. Скільки кілограмів міді міститься в цьому сплаві?

292. Скільки відсотків становить число 20 від свого:

1) квадрата; 2) куба?

293. Турист 2 год йшов пішки та 3 год їхав на велосипеді. Загалом він подолав 56 км. Знайдіть, з якою швидкістю турист їхав на велосипеді, якщо вона на 12 км/год більша за швидкість, з якою він ішов пішки.

Життєва математика

294. Друзі Наталя та Артем їздили на автобусну екскурсію в інше місто. На дорогу туди автобус витратив 2 год, а повернувся назад за 1 год 20 хв, бо поїхав іншою дорогою. Стежачи за спідометром автобуса, друзі помітили, що протягом поїздки швидкість автобуса була сталою, а пробіг збільшився на 200 км. Визначте довжину дороги туди і дороги назад.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

295. Обчисліть значення квадрата або куба:

1) $(3{,}1)^2$; 2) $(-5)^3$; 3) $\left(-\frac{1}{7}\right)^2$; 4) $(0{,}1)^3$;

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; 6) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$; 7) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$; 8) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$.

296. Обчисліть: 1) $(-1)^2 + (-2)^3 - 8^2$; 2) $(3^3 - (-4)^2) \cdot 7$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

297. У чемпіонаті міста з футболу беруть участь 11 команд. Кожна команда грає з іншими по одному матчу. Доведіть, що в будь-який момент змагань знайдеться команда, яка до цього моменту провела або парну кількість матчів, або ще не провела жодного.

§ 6. Степінь з натуральним показником

Степінь

Добуток кількох однакових множників можна записати у вигляді виразу, який називають ***степенем***.

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{6 множників}} = 4^6$$

показник степеня

основа степеня

Оскільки $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$, то кажуть, що число 4096 є шостим степенем числа 4.

Степенем числа a з натуральним показником n $(n > 1)$ **називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.**
Степенем числа a з показником 1 **називають саме число a.**

Степінь з основою a і показником n записують так: a^n, читають: «a в степені n» або «n-й степінь числа a».

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}},\ n > 1$$

якщо $n = 1$, $a^1 = a$

якщо $n = 2$, a^2 — квадрат числа

якщо $n = 3$, a^3 — куб числа

Приклад 1. Подати у вигляді степеня:
1) aa; 2) $bbbb$; 3) $17 \cdot 17 \cdot 17$; 4) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.
Розв'язання. 1) $aa = a^2$; 2) $bbbb = b^4$;
3) $17 \cdot 17 \cdot 17 = 17^3$; 4) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$.
Відповідь: 1) a^2; 2) b^4; 3) 17^3; 4) 10^5.

Піднесення до степеня

Обчислення значення степеня є арифметичною дією, яку називають ***піднесенням до степеня.***

Приклад 2. Виконати піднесення до степеня:
1) 2^4; 2) 0^3; 3) $(-6)^2$; 4) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$.
Розв'язання. 1) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$;
2) $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;
3) $(-6)^2 = -6 \cdot (-6) = 36$;
4) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$.
Відповідь: 1) 16; 2) 0; 3) 36; 4) $-\frac{8}{125}$.

Знак степеня з натуральним показником n

З'ясуємо, який *знак степеня з натуральним показником n*.

1) Якщо $a = 0$, то $0^1 = 0$; $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$; ... . Отже, $0^n = 0$.

2) Якщо $a > 0$, то $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}} > 0$ як добуток додатних чисел. Отже, $a^n > 0$ для будь-якого $a > 0$.

3) Якщо $a < 0$, то для непарного значення n маємо:
$a^n < 0$ (як добуток непарної кількості від'ємних множників);
для парного значення n маємо:
$a^n > 0$ (як добуток парної кількості від'ємних множників).
Отже,

якщо n – натуральне число, то
$0^n = 0$ для будь-якого n;
$a^n > 0$ для будь-яких $a > 0$ та n;
$a^n < 0$ для будь-якого $a < 0$ та непарного n;
$a^n > 0$ для будь-якого $a < 0$ та парного n.

Обчислення значень виразів на кілька дій

Якщо вираз містить кілька дій, то спочатку виконують піднесення до степеня, потім множення і ділення, а вже потім – додавання і віднімання.

Приклад 3. Знайти значення виразу:
1) $3 - 7 \cdot 2^3$; 2) $(2 + (-3)^4)^2$; 3) $((-1)^5 + (-1)^6)^8$; 4) $4^3 : 2^7$.

Розв'язання. 1) $3 - 7 \cdot 2^3 = 3 - 7 \cdot 8 = 3 - 56 = -53$;
2) $(2 + (-3)^4)^2 = (2 + 81)^2 = 83^2 = 6889$;
3) $((-1)^5 + (-1)^6)^8 = (-1 + 1)^8 = 0^8 = 0$;
4) $4^3 : 2^7 = 64 : 128 = 0{,}5$.

Відповідь: 1) -53; 2) 6889; 3) 0; 4) 0,5.

Зверніть увагу, що під час обчислень можна також записувати кожну дію окремо.

А ще раніше...

Поняття степеня з натуральним показником сформувалося ще у давні часи. Квадрат числа використовували для обчислення площ, куб числа – для обчислення об'ємів. У Давньому Єгипті та Вавилоні степені деяких чисел використовували під час розв'язування окремих задач.

Французький математик Франсуа Вієт використовував букви N, Q і C не лише для записів відповідно x, x^2 і x^3, а й для запису степенів, вищих за третій. Наприклад, четвертий степінь у його записі виглядав так: QQ.

Сучасний запис степенів запропонував видатний французький математик, фізик, філософ Рене Декарт. У своїй праці «Геометрія», датованій 1634 роком, він став записувати степені з натуральним показником так, як ми це робимо зараз: c^3, c^4, c^5 і т. д. Проте c^2 він записував як добуток: cc.



Рене Декарт
(1596–1650)

Сформулюйте означення степеня з натуральним показником. Наведіть приклади степенів та назвіть їхні основу і показник. Як називають другий степінь числа; третій степінь числа? Яким числом (додатним чи від'ємним) є степінь додатного числа; степінь від'ємного числа з парним показником; степінь від'ємного числа з непарним показником? У якому порядку виконують арифметичні дії в числових виразах, що містять степені?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

298. Прочитайте вирази, назвіть основу і показник степеня:

1) $0{,}7^5$; 2) $(-4)^2$; 3) $(xy)^3$;

4) $(a-b)^5$; 5) $\left(\frac{1}{2}x^2y\right)^9$; 6) $(a^2-b^2)^7$.

299. Запишіть добуток у вигляді степеня:

1) $0{,}5 \cdot 0{,}5$; 2) $(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)$; 3) $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}$;

4) $-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$; 5) $aaaa$; 6) $(xy)\cdot(xy)$;

7) $\underbrace{p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}_{\text{18 множників}}$; 8) $(m-p)(m-p)(m-p)$.

300. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8$; 2) $-2\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$; 3) $mmmm$;

4) $(c+3)(c+3)$; 5) $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}$; 6) $\underbrace{aaa\ldots a}_{\text{12 множників}}$.

301. Запишіть степінь у вигляді добутку однакових множників:

1) 7^5; 2) b^3; 3) $(x-y)^2$; 4) $\left(\frac{a}{a+b}\right)^4$.

302. Подайте степінь у вигляді добутку однакових множників:

1) 9^7; 2) c^4; 3) $(a+b)^3$; 4) $\left(\frac{x}{x-m}\right)^2$.

303. (*Усно.*) Обчисліть:

1) 1^3; 2) 0^5; 3) 5^2; 4) $(-7)^2$; 5) $(-2)^3$; 6) $(-1)^8$.

304. Знайдіть значення виразу:

1) 3^2; 2) 2^3; 3) 0^2; 4) 1^7; 5) $(-1)^4$; 6) $(-1)^3$.

305. Виконайте піднесення до степеня:

1) 3^5; 2) $(0{,}7)^2$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^5$;

5) $(-7)^4$; 6) $(-0{,}3)^3$; 7) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$; 8) $(-0{,}1)^4$.

306. Виконайте піднесення до степеня:

1) 5^4; 2) $(1{,}5)^2$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4$;

5) $(-3)^3$; 6) $(-1{,}7)^2$; 7) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^3$; 8) $(-0{,}2)^4$.

307. Заповніть таблицю в зошиті:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n										
3^n										

308. Розкладіть натуральні числа на прості множники, використавши в запису степінь:

1) 16; 2) 27; 3) 50; 4) 1000; 5) 99; 6) 656.

309. Знайдіть значення виразу:

1) -5^2; 2) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; 3) $-(-0{,}2)^4$; 4) $-(-1)^{19}$.

310. Обчисліть:

1) -7^3; 2) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; 3) $-\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; 4) $-(-1)^{16}$.

311. Порівняйте з нулем значення виразу (відповідь запишіть у вигляді нерівності):

1) $(-5{,}7)^2$; 2) $(-12{,}49)^9$; 3) -53^7; 4) $-(-2)^5$.

312. Порівняйте з нулем значення виразу (відповідь запишіть у вигляді нерівності):
1) $(-4{,}7)^3$; 2) $(-2{,}31)^4$; 3) $-(-2)^8$; 4) $-(-3)^7$.

313. Знайдіть значення виразу:
1) $0{,}2 \cdot 25^2$; 2) $\dfrac{50}{0{,}1^3}$; 3) $-4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$;
4) $0{,}01 \cdot (-5)^3$; 5) $\left(5 \cdot \dfrac{2}{15}\right)^3$; 6) $\left(6 : \dfrac{2}{3}\right)^2$;
7) $5^2 + (-5)^4$; 8) $(3{,}4 - 3{,}6)^2$; 9) $(-1{,}8 + 4{,}8)^4$.

314. Обчисліть:
1) $0{,}5 \cdot 40^2$; 2) $\dfrac{30}{0{,}3^3}$; 3) $-5 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^3$;
4) $\left(-\dfrac{7}{8}\right)^2 \cdot 16$; 5) $\left(12 : \dfrac{6}{7}\right)^2$; 6) $\left(-3 \cdot \dfrac{2}{9}\right)^4$;
7) $6^2 - (-6)^3$; 8) $(1{,}7 - 1{,}9)^4$; 9) $(-2{,}5 + 8{,}5)^2$.

315. Чи є правильними рівності:
1) $3^2 + 4^2 = 5^2$; 2) $4^2 + 5^2 = 6^2$;
3) $2^3 + 3^3 = 5^3$; 4) $2^6 + 6^2 = 10^2$;
5) $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$; 6) $(-5)^2 + (-12)^2 = (-13)^2$?

316. Подайте числа:
1) 0; 4; 0,16; $\dfrac{9}{25}$; 169; $1\dfrac{24}{25}$ у вигляді квадрата;
2) 64; −27; 0; 1; $-\dfrac{1}{8}$; $1\dfrac{91}{125}$ у вигляді куба.

317. Подайте числа:
1) 5; 125; 625 у вигляді степеня з основою 5;
2) 100; 10 000; 10 у вигляді степеня з основою 10.

318. Подайте:
1) 8; 81; −125; −64; 0,16; 0,001; $3\dfrac{3}{8}$; $1\dfrac{11}{25}$ у вигляді квадрата або куба числа;
2) 2; 4; 8; 256 у вигляді степеня з основою 2;
3) 81; −27; −3 у вигляді степеня з основою −3.

319. Обчисліть: 1) суму квадратів чисел 0,6 і −0,7;
2) квадрат суми чисел 5,7 і −6,3;
3) різницю кубів чисел 2,3 і 2,2;
4) куб суми чисел 8,2 і 1,8.

320. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{27}x^3$, якщо $x = 0; -1; 1; -3; 3$;

2) $a + a^2 + a^3$, якщо $a = 1; -1; -2$;

3) $(15x)^4$, якщо $x = \frac{1}{3}; -\frac{1}{5}$;

4) $a^2 - b^2$, якщо $a = -6$; $b = -8$.

321. Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}01a^4$, якщо $a = 2; -5; 10$;

2) $5c^2 - 4$, якщо $c = 0{,}2; -0{,}1; 0$;

3) $(m + n)^3$, якщо $m = -4$, $n = -1$;

4) $4x^2 - x^3$, якщо $x = 1; -2; -3$.

322. Не виконуючи обчислень, порівняйте:

1) -2^4 і $(-2)^4$;

2) $(-7)^3$ і $(-6)^2$;

3) $(-12)^8$ і 12^8;

4) -5^3 і $(-5)^3$.

323. Порівняйте значення виразів:

1) $-x^2$ і $(-x)^2$, якщо $x = 5; -3; 0$;

2) $-x^3$ і $(-x)^3$, якщо $x = -2; 0; 3$.

324. Замініть «зірочку» знаком $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ так, щоб одержана нерівність була правильною для будь-яких значень змінних:

1) $a^2 * 0$; 2) $-b^2 * 0$; 3) $m^2 + 3 * 0$;

4) $-p^2 - 1 * 0$; 5) $(a - 3)^2 * 0$; 6) $a^2 + b^2 * 0$;

7) $x^2 + y^2 + 5 * 0$; 8) $(m - n)^2 + 1 * 0$; 9) $-(p + 9)^2 * 0$.

325. Якого найменшого значення може набувати вираз:

1) $a^2 + 1$; 2) $3 + (m - 3)^2$; 3) $(a + 8)^4 - 5$?

326. Якого найбільшого значення може набувати вираз:

1) $-x^2 + 2$; 2) $-(m - 2)^4 + 1$; 3) $5 - (a + 9)^2$?

Вправи для повторення

327. Запишіть дріб у вигляді відсотків:

1) 0,8; 2) 1,13; 3) 8,3; 4) 0,007.

328. Обчисліть: 1) $\left(9\frac{8}{15} - 7\frac{7}{15}\right) \cdot 4{,}5 - 2\frac{1}{6} : 0{,}52$;

2) $\frac{8}{13} \cdot (-0{,}1625) - \left(\frac{9}{22} + 1\frac{4}{11}\right) \cdot 1{,}32$.

329. Для деяких натуральних значень x і y значення виразу $x + 3y$ ділиться на 5. Чи ділиться на 5 значення виразу $7x + 21y$ для тих самих значень x і y?

Життєва математика

330. Щоб бути здоровою, людина має щоденно вживати 3 г білків на кожні 4 кг своєї маси.

1) Скільки білків має містити щоденний раціон підлітка масою 48 кг?

2) Скільки білків має містити ваш щоденний раціон?

Цікаві задачі — поміркуй одначе

331. Доведіть *ознаку подільності на 4*: натуральне число ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли число, записане його двома останніми цифрами, ділиться на 4.

§ 7. Властивості степеня з натуральним показником

Розглянемо властивості степеня з натуральним показником.

Множення степенів з однаковими основами

Вираз a^3a^2 є добутком двох степенів з однаковими основами. Застосувавши означення степеня, цей добуток можна переписати:

$$a^3a^2 = (aaa) \cdot (aa) = aaaaa = a^5.$$

Отже, $a^3a^2 = a^5$, тобто $a^5 = a^{3+2}$. У той самий спосіб неважко перевірити, що $x^5x^4x^2 = x^{5+4+2} = x^{11}$. Тому *добуток степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює сумі показників множників*. Ця властивість справджується для кожного добутку степенів з однаковими основами.

Для будь-якого числа a й довільних натуральних чисел m і n справджується рівність: $a^m a^n = a^{m+n}$.

Доведення. Для $m > 1$, $n > 1$ маємо:

$$a^m a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{\substack{m \\ \text{множників}}} \cdot \underbrace{aa \ldots a}_{\substack{n \\ \text{множників}}} = \underbrace{aaa \ldots a}_{\substack{(m+n) \\ \text{множників}}} = a^{m+n}.$$

Якщо, наприклад, $m = 1$, $n > 1$, то

$$a \cdot a^n = a \cdot \underbrace{aa \ldots a}_{\substack{n \\ \text{множників}}} = \underbrace{aaa \ldots a}_{\substack{(n+1) \\ \text{множників}}} = a^{n+1}.$$

Випадки $m > 1$, $n = 1$ та $m = 1$, $n = 1$ розглядаються аналогічно.

Рівність $a^m a^n = a^{m+n}$ називають ***основною властивістю степеня***. Вона поширюється на добуток трьох і більше степенів. Наприклад: $a^m a^n a^k = a^{m+n+k}$.

З основної властивості степеня випливає *правило множення степенів* з однаковими основами.

Щоб помножити степені з однаковими основами, основу залишають тією самою, а показники степенів додають.

Наприклад, $3^7 \cdot 3^5 = 3^{7+5} = 3^{12}$; $7^3 \cdot 7 = 7^3 \cdot 7^1 = 7^{3+1} = 7^4$;
$a^7 a^2 a^3 = a^{7+2+3} = a^{12}$.

Ділення степенів з однаковими основами

Оскільки $a^3 a^2 = a^5$, то за означенням частки $a^5 : a^3 = a^2$, тобто $a^2 = a^{5-3}$. У той самий спосіб неважко пересвідчитися, що $a^{15} : a^4 = a^{11}$. Тому *частка степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює різниці показників діленого і дільника*. Ця властивість справджується для кожної частки степенів з однаковими, відмінними від нуля, основами за умови, що показник степеня діленого більший за показник степеня дільника.

Для будь-якого числа $a \neq 0$ і довільних натуральних чисел m і n, таких, що $m > n$, справджується рівність:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доведення. Оскільки $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, тобто $a^{m-n} a^n = a^m$, то за означенням частки маємо $a^m : a^n = a^{m-n}$.

З доведеної властивості випливає *правило ділення степенів*.

Щоб поділити степінь на степінь, основи яких однакові, основу залишають тією самою, а від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника.

Наприклад, $3^{18} : 3^5 = 3^{18-5} = 3^{13}$; $m^9 : m = m^9 : m^1 = m^{9-1} = m^8$.

Піднесення степеня до степеня

Вираз $(a^7)^3$ – степінь, основа якого є степенем. Цей вираз можна подати у вигляді степеня з основою a:

$$(a^7)^3 = a^7 \cdot a^7 \cdot a^7 = a^{7+7+7} = a^{7\cdot 3} = a^{21}.$$

У той самий спосіб можна пересвідчитися, що $((x^7)^3)^2 = x^{42}$. Тобто *степінь при піднесенні до степеня дорівнює степеню з тією самою основою і показником, що дорівнює добутку показників даних степенів.*

Для будь-якого числа a і довільних натуральних чисел m і n справджується рівність: $(a^m)^n = a^{mn}$.

Доведення. $(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ доданків}}} = a^{mn}$.

З доведеної властивості випливає *правило піднесення степеня до степеня.*

Щоб піднести степінь до степеня, основу залишають тією самою, а показники степенів перемножують.

Наприклад, $(4^5)^4 = 4^{5\cdot 4} = 4^{20}$; $(a^8)^{11} = a^{8\cdot 11} = a^{88}$;

$((p^3)^2)^5 = (p^{3\cdot 2})^5 = (p^6)^5 = p^{6\cdot 5} = p^{30}$.

Піднесення добутку до степеня

Вираз $(ab)^3$ є степенем добутку множників a і b. Цей вираз можна подати у вигляді добутку степенів a і b:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3b^3.$$

Отже, $(ab)^3 = a^3b^3$.

Так само підносять до степеня будь-який добуток.

Для будь-яких чисел a і b та довільного натурального числа n справджується рівність: $(ab)^n = a^n b^n$.

Доведення.

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ множників}} = \underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ множників}} \cdot \underbrace{(bb\cdot\ldots\cdot b)}_{n \text{ множників}} = a^n b^n.$$

Ця властивість степеня поширюється на степінь добутку з трьох і більше множників.

Наприклад,

$$(mpk)^n = m^n p^n k^n; \quad (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n \text{ тощо.}$$

Маємо *правило піднесення добутку до степеня.*

Щоб піднести добуток до степеня, потрібно піднести до цього степеня кожний з множників і отримані результати перемножити.

Наприклад, $(7ab)^2 = 7^2 a^2 b^2 = 49a^2 b^2$;

$(-2xy)^3 = (-2)^3 x^3 y^3 = -8x^3 y^3$.

Застосування властивостей степеня до розв'язування вправ

Маємо:

$a^m a^n = a^{m+n}$	і	$a^{m+n} = a^m a^n$
$a^m : a^n = a^{m-n}$		$a^{m-n} = a^m : a^n$
$(a^m)^n = a^{mn}$		$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$
$(ab)^n = a^n b^n$		$a^n b^n = (ab)^n$

Розглянемо, як можна спрощувати та перетворювати вирази, що містять степені, обчислювати їхні значення та порівнювати.

Приклад 1. Спростити вираз $(a^2)^3 \cdot (a^4 a)^6$.

Розв'язання. $(a^2)^3 \cdot (a^4 a)^6 = a^6 \cdot (a^5)^6 = a^6 a^{30} = a^{36}$.

Відповідь: a^{36}.

Приклад 2. Обчислити: 1) $0{,}7^{13} : 0{,}7^{11}$;
2) $3^5 \cdot 9^2 : 27^2$;
3) $2^7 \cdot 0{,}5^8$.

Розв'язання. 1) $0{,}7^{13} : 0{,}7^{11} = 0{,}7^2 = 0{,}49$.

2) Подамо 9^2 і 27^2 у вигляді степеня з основою 3, матимемо: $9^2 = (3^2)^2$, $27^2 = (3^3)^2$. Отже,

$3^5 \cdot 9^2 : 27^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 : (3^3)^2 = 3^5 \cdot 3^4 : 3^6 = 3^9 : 3^6 = 3^3 = 27$.

3) Оскільки $0{,}5^8 = 0{,}5^7 \cdot 0{,}5$, маємо:

$2^7 \cdot 0{,}5^8 = 2^7 \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5 = (2 \cdot 0{,}5)^7 \cdot 0{,}5 = 1^7 \cdot 0{,}5 = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$.

Відповідь: 1) 0,49; 2) 27; 3) 0,5.

Приклад 3. Подати у вигляді степеня вираз:

1) $25a^2b^4$; 2) $-64p^6$.

Розв'язання.

1) $25a^2b^4 = 5^2a^2(b^2)^2 = (5ab^2)^2$;

2) $-64p^6 = (-4)^3(p^2)^3 = (-4p^2)^3$.

Відповідь: 1) $(5ab^2)^2$; 2) $(-4p^2)^3$.

Приклад 4. Порівняти значення виразів 7^{40} і 48^{20}.

Розв'язання. Оскільки $7^{40} = (7^2)^{20} = 49^{20}$ і $49^{20} > 48^{20}$, то $7^{40} > 48^{20}$.

Відповідь: $7^{40} > 48^{20}$.

Сформулюйте основну властивість степеня. Сформулюйте правила множення степенів, ділення степенів, піднесення степеня до степеня та піднесення добутку до степеня і запам'ятайте відповідні формули.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

332. (*Усно.*) Які з рівностей правильні:

1) $a^3 \cdot a^5 = a^{15}$; 2) $a^2a^8 = a^{10}$; 3) $b^{20} : b^4 = b^5$;

4) $b^6 : b^2 = b^4$; 5) $(a^5)^7 = a^{35}$; 6) $(a^3)^4 = a^7$?

333. (*Усно.*) Подайте добуток у вигляді степеня:

1) a^7a^3; 2) b^5b; 3) $7^8 \cdot 7^{13}$; 4) $5 \cdot 5^{11}$.

334. Запишіть добуток у вигляді степеня:

1) x^5x^7; 2) a^2a^8; 3) m^3m; 4) $2^9 \cdot 2^{30}$.

335. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) p^2p^4; 2) c^9c^3; 3) $4 \cdot 4^{16}$; 4) c^7c^2.

336. (*Усно.*) Представте частку у вигляді степеня:

1) $a^7 : a^2$; 2) $3^{14} : 3^{11}$; 3) $c^8 : c$; 4) $12^{14} : 12^{13}$.

337. Запишіть частку у вигляді степеня:

1) $b^5 : b^3$; 2) $m^{12} : m^5$; 3) $t^6 : t$; 4) $x^{10} : x^9$.

338. Подайте частку у вигляді степеня:

1) $m^9 : m^5$; 2) $a^{10} : a^5$; 3) $9^7 : 9$; 4) $m^{14} : m^{13}$.

339. (*Усно.*) Подайте у вигляді степеня:

1) $(x^3)^7$; 2) $(3^{10})^4$; 3) $(c^2)^5$; 4) $(9^7)^{11}$.

340. Подайте у вигляді степеня:

1) $(m^3)^5$; 2) $(a^5)^7$; 3) $(9^3)^8$; 4) $(10^4)^2$.

341. Подайте у вигляді степеня:

1) $(a^4)^5$; 2) $(c^7)^2$; 3) $(9^2)^{15}$; 4) $(18^{14})^2$.

2 **342.** Запишіть вираз x^{12} у вигляді добутку двох степенів, один з яких дорівнює: 1) x^3; 2) x^6; 3) x^9; 4) x^{11}.

343. Запишіть степінь у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами: 1) m^7; 2) c^{12}; 3) 5^{17}; 4) p^8.

344. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $(-7)^3 \cdot (-7)^4 \cdot (-7)$; 2) aa^5a^{11}; 3) $bbbb^9$;

4) $(x-y)^3(x-y)^{12}$; 5) $14^7 \cdot 14^5 \cdot 14^9$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^4$.

345. Запишіть у вигляді степеня вираз:

1) $12^3 \cdot 12^9 \cdot 12$; 2) ppp^7p;

3) $(a+b)^3(a+b)^5$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6$.

346. Обчисліть значення виразу, використовуючи властивості степеня і таблицю степенів з основами 2 і 3 (див. № 307 на с. 58):

1) $2^3 \cdot 2^4$; 2) $3^6 : 3$; 3) $3 \cdot 3^3 \cdot 3^4$; 4) $2^9 : 2^3$.

347. Виконайте піднесення до степеня:

1) $(xy)^9$; 2) $(abc)^7$; 3) $(0{,}1a)^3$; 4) $(2xy)^4$;

5) $(-2a)^5$; 6) $(-0{,}3a)^2$; 7) $(-4ab)^3$; 8) $\left(-\frac{2}{3}axz\right)^4$.

348. Запишіть степінь у вигляді добутку степенів або добутку числа і степенів:

1) $(ab)^5$; 2) $(2p)^4$; 3) $(-5ax)^3$;

4) $\left(-\frac{3}{4}ac\right)^4$; 5) $(-0{,}1m)^3$; 6) $(-0{,}07mx)^2$.

349. Знайдіть значення виразу:

1) $6^{18} : 6^{16}$; 2) $0{,}3^8 : 0{,}3^5$; 3) $\frac{4{,}92^{10}}{4{,}92^9}$;

4) $\frac{10^8}{10^5}$; 5) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{10} : \left(-\frac{1}{4}\right)^7$; 6) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{12} : \left(1\frac{1}{2}\right)^8$.

350. Обчисліть:

1) $9^{10} : 9^8$; 2) $\frac{0{,}4^{17}}{0{,}4^{14}}$; 3) $\left(-1\frac{1}{9}\right)^{15} : \left(-1\frac{1}{9}\right)^{13}$; 4) $\frac{\left(1\frac{1}{3}\right)^{12}}{\left(1\frac{1}{3}\right)^8}$.

351. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{8^{12}\cdot 8^3}{8^{13}}$; 2) $\frac{4^8}{4\cdot 4^6}$; 3) $\frac{(-3)^5\cdot(-3)^7}{(-3)^{10}}$; 4) $\frac{(0{,}2)^7\cdot(0{,}2)^5}{(0{,}2)^3\cdot(0{,}2)^6}$.

352. Обчисліть:

1) $5^4\cdot 5^{12}:5^{13}$; 2) $\frac{37^{12}}{37^5\cdot 37^6}$;

3) $\frac{6^{17}\cdot 6^8}{6^{22}}$; 4) $\frac{(0{,}7)^3\cdot(0{,}7)^{16}}{(0{,}7)^{12}\cdot(0{,}7)^5}$.

353. Спростіть вираз, використовуючи правила множення і ділення степенів:

1) $a^7\cdot a^9:a^3$; 2) $b^9:b^5:b^3$;
3) $m^{12}:m^7\cdot m$; 4) $p^{10}:p^9\cdot p^3$.

354. Запишіть вираз у вигляді степеня:

1) $(a^3)^4\cdot a^8$; 2) $((a^7)^2)^3$; 3) $(b^3)^2:b^4$; 4) $(a^4)^5\cdot(a^7)^2$.

355. Подайте вираз у вигляді степеня:

1) $(b^3)^4\cdot b^7$; 2) $((x^4)^5)^6$; 3) $(c^3)^8:c^{10}$; 4) $(m^3)^5\cdot(m^2)^7$.

356. Запишіть вираз у вигляді степеня з основою mn:

1) m^9n^9; 2) m^7n^7; 3) m^2n^2; 4) $m^{2015}n^{2015}$.

357. Подайте вираз у вигляді степеня з основою ab:

1) a^5b^5; 2) a^3b^3; 3) $a^{18}b^{18}$; 4) $a^{2016}b^{2016}$.

358. Запишіть добуток у вигляді степеня:

1) a^4b^4; 2) $49a^2x^2$; 3) $0{,}001a^3b^3$; 4) $-8p^3$;

5) $-32a^5b^5$; 6) $-a^7b^7c^7$; 7) $\frac{1}{27}x^3y^3$; 8) $-\frac{64}{125}p^3q^3$.

359. Знайдіть значення x, для якого справджується рівність:

1) $3^5\cdot 3^2=3^{5+x}$; 2) $2^7\cdot 2^8=2^{1+x}$;
3) $4^x\cdot 4^5=4^8$; 4) $9^8:9^x=9^5$.

360. Знайдіть значення x, для якого справджується рівність:

1) $1{,}8^9:1{,}8=1{,}8^{9-x}$; 2) $19^x:19^7=19^9$; 3) $4^{12}:4^x=4^7$.

361. Замініть «зірочку» степенем з основою p, де $p\neq 0$, таким, щоб рівність стала тотожністю:

1) $p^7:*=p^3$; 2) $*:p^5=p^9$;
3) $p^9:*\cdot p^3=p^7$; 4) $*:p^9\cdot p^4=p^{10}$.

362. Замініть «зірочку» степенем з основою a таким, щоб рівність стала тотожністю:

1) $a^2\cdot *=a^7$; 2) $a^8\cdot *=a^9$; 3) $a^4\cdot *\cdot a^7=a^{19}$.

363. Подайте вираз:
1) 8^7; $(16^3)^5$ у вигляді степеня з основою 2;
2) 25^3; 625^7 у вигляді степеня з основою 5.

364. Подайте вираз:
1) 9^7; $(81^3)^5$ у вигляді степеня з основою 3;
2) 100^4; 1000^9 у вигляді степеня з основою 10.

365. Обчисліть, використовуючи властивості степенів:

1) $256 : 2^5$; 2) $243 : 3^4 \cdot 9$; 3) $\dfrac{125^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 25}$; 4) $\dfrac{100 \cdot 10^7}{10^5 \cdot 1000}$.

366. Подайте у вигляді степеня (n – натуральне число):
1) x^5x^n; 2) $x^8 : x^n$, $n < 8$;
3) $x^n : (x^8 \cdot x^9)$, $n > 17$; 4) $x^{2n} : x^n \cdot x^{3n+1}$;
5) $((x^n)^3)^5$; 6) $(-x^4)^{2n}$.

367. Знайдіть значення виразу:

1) $5^3 \cdot 2^3$; 2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \cdot 20^2$; 3) $0{,}2^{13} \cdot 5^{13}$;

4) $(1{,}5)^7 \cdot \left(1\dfrac{1}{3}\right)^7$; 5) $0{,}5^7 \cdot 2^8$; 6) $\left(1\dfrac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^8$.

368. Обчисліть:

1) $0{,}25^7 \cdot 4^7$; 2) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^5 \cdot 14^5$; 3) $\left(1\dfrac{1}{8}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{10}$; 4) $1{,}5^7 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^9$.

369. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості степенів:

1) $\dfrac{9^5}{3^7}$; 2) $\dfrac{8^7}{4^8}$; 3) $\dfrac{27^3 \cdot 9^4}{81^3}$; 4) $\dfrac{25^4 \cdot 125^{10}}{5^{36}}$.

370. Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{5^7 \cdot 7^8}{35^7}$; 2) $\dfrac{2^{17} \cdot 3^6}{24^5}$; 3) $\dfrac{36^7}{2^{12} \cdot 3^{10}}$; 4) $\dfrac{27^3}{18^4}$.

371. Обчисліть:

1) $\dfrac{7^9 \cdot 49^8}{343^8}$; 2) $\dfrac{6^{12}}{2^{10} \cdot 3^{11}}$; 3) $\dfrac{2^8 \cdot 5^7}{100^3}$; 4) $\dfrac{36^5}{24^6}$.

372. Порівняйте значення виразів:
1) 6^{10} і 36^5; 2) 10^{20} і 20^{10};
3) 5^{14} і 26^7; 4) 2^{3000} і 3^{2000}.

Вправи для повторення

373. Спростіть вираз:

1) $5{,}2 \cdot 6a$; 2) $-4{,}5b \cdot 8$; 3) $-5x \cdot (-12)$;

4) $\frac{2}{3}m \cdot \frac{3}{4}k$; 5) $1\frac{1}{3}x \cdot \left(-1\frac{2}{7}y\right)$; 6) $-1{,}8a \cdot (-b) \cdot 5c$.

374. Вартість деякого товару становила 80 грн. Спочатку її знизили на 15 %, а потім підвищили на 10 %. Знайдіть:

1) вартість товару після зниження;
2) вартість товару після підвищення;
3) як саме і на скільки гривень змінилася вартість товару;
4) як саме і на скільки відсотків змінилася вартість товару.

375. Нехай $a + b = 5$ і $c = -2$. Знайдіть значення виразу:

1) $a + b - c$; 2) $a - 2c + b$; 3) $\frac{a+b+c}{c}$; 4) $c(a + b - 4c)$.

376. Спростіть вираз $1{,}7\left(1\frac{1}{5}a - 4b\right) - 1{,}5(1{,}2b - a)$ і знайдіть його значення, якщо $a = 5$; $b = -10$.

Життєва математика

377. Студент-художник Максим отримав свій перший гонорар у розмірі 4000 грн за написану картину. Із цього приводу він вирішив привітати букетом троянд свою викладачку мистецтва Ларису Василівну. Яку найбільшу кількість троянд зможе придбати Максим, якщо витратить на букет половину тієї суми, яку отримає після вирахування з гонорару прибуткового податку в розмірі 18 % та 1,5 % військового збору, за умови, що одна троянда коштує 100 грн і букет має містити непарну кількість квітів?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

378. Запишіть коефіцієнт буквеного виразу:

1) $5c$; 2) $-2a$; 3) $0{,}17kb$;

4) $-\frac{1}{3}m$; 5) acx; 6) $-ad$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

379. Дано п'ять різних додатних чисел, які можна розбити на дві групи так, щоб суми чисел у кожній з груп були однаковими. Скількома способами це можна зробити?

§ 8. Одночлен. Стандартний вигляд одночлена

Одночлен

Розглянемо вирази: 7; $-\frac{8}{11}$; a^9; $-b$; $7b^2m$; $4a^2\cdot(-5)ac$.

Це — числа, змінні, їхні степені й добутки. Такі вирази називають ***одночленами***.

Цілі вирази — числа, змінні, їхні степені й добутки — називають *одночленами*.

Вирази $a + b^2$; $c^3 - 5m$; $0{,}9a^2 : m$ не є одночленами, оскільки містять дії додавання, віднімання, ділення.

Одночлен стандартного вигляду

Спростимо одночлен $4a^2 \cdot (-5)ac$, використавши переставну та сполучну властивості множення:

$$4a^2 \cdot (-5)ac = 4 \cdot (-5)a^2ac = -20a^3c.$$

Звівши одночлен $4a^2 \cdot (-5)ac$ до вигляду $-20a^3c$, кажуть, що звели його *до стандартного вигляду*.

Якщо одночлен є добутком, що має один числовий множник, записаний на першому місці, а інші множники є степенями різних змінних, то такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*.

Одночлени 5; -9; b; $-p^3$ — теж одночлени стандартного вигляду.

Коефіцієнт і степінь одночлена

Очевидно, що до стандартного вигляду можна звести будь-який одночлен. Числовий множник одночлена стандартного вигляду називають ***коефіцієнтом*** цього одночлена.

Наприклад, коефіцієнтом одночлена $-20a^3c$ є число -20, а коефіцієнтом одночлена $\frac{7}{11}b^9$ — число $\frac{7}{11}$.

Якщо одночлен має коефіцієнт 1, то його не записують → $1 \cdot c^2d = c^2d$

Якщо одночлен має коефіцієнт −1, то записують лише знак «мінус» → $-1 \cdot p^7 = -p^7$

Для кожного *одночлена* можна вказати *його степінь*.

Степенем одночлена **називають суму показників степенів усіх змінних, які він містить. Якщо одночлен не містить змінних (тобто є числом), то вважають, що його степінь дорівнює нулю.**

Наприклад, одночлен $4a^2b^7c^3$ – це одночлен 12-го степеня, адже $2 + 7 + 3 = 12$; m^7n – одночлен 8-го степеня, адже $7 + 1 = 8$; $-5a^4$ – одночлен 4-го степеня; $5m$ – одночлен 1-го степеня.

Якщо одночлен не містить змінних, то є одночленом 0-го степеня. Так, наприклад, одночлен -7 є одночленом 0-го степеня.

Який вираз називають одночленом? ○ Який вигляд одночлена називають стандартним виглядом? ○ Наведіть приклад одночлена стандартного вигляду та назвіть його коефіцієнт. ○ Що називають степенем одночлена?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

380. (*Усно.*) Які з виразів є одночленами:

1) $4{,}5a^2b$; 2) $-0{,}45mpc$; 3) $a^2 - 9$;

4) $p \cdot (-0{,}2)$; 5) a^2am; 6) $\left(-\frac{2}{3}p + 7\right)m$;

7) $x - y$; 8) $c^{12} : c^3$; 9) $5(m + p)^7$;

10) $-m$; 11) $-4{,}9$; 12) 0?

381. (*Усно.*) Назвіть одночлени стандартного вигляду та їхні коефіцієнти:

1) $5xy$; 2) $-4ama$; 3) $9a^2ba^3b$;

4) $-a^7b^3$; 5) $0{,}2a \cdot 3b$; 6) $-2xyt$;

7) x^9c^7; 8) 17; 9) $4 \cdot 7b$.

382. Які з виразів є одночленами? Серед одночленів укажіть ті, які записано у стандартному вигляді:

1) $5a \cdot 3b$; 2) $-7x^2y$; 3) $a^2 - a + 1$; 4) $x \cdot xy \cdot 7$;

5) $\left(\frac{1}{3}a - 1\right) \cdot 5$; 6) $-m^2$; 7) $12 + m$; 8) -145;

9) $4(x - y)^2$; 10) p^{18}; 11) $1 : x$; 12) $-xytm$.

383. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $7a^2a^3a$; 2) $8 \cdot a \cdot 0{,}1m \cdot 2p$;

3) $5t \cdot (-4at)$; 4) $-1\frac{2}{3}m^4 \cdot 12m^2p$;

5) $-5a^2 \cdot 0{,}2am^7 \cdot (-10m)$; 6) $t^3 \cdot (-p)^7 \cdot t$.

384. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $-7m^2b \cdot 8mb^2$; 2) $5m \cdot 2a \cdot (-3b)$;

3) $-7a \cdot (-5a^2)$; 4) $-2{,}2a^2 \cdot \frac{25}{44}a^3p$;

5) $-a \cdot (-0{,}2a^2p) \cdot (-0{,}3p^4)$; 6) $c^5 \cdot (-a) \cdot (-c^4a) \cdot a^7$.

385. Знайдіть значення одночлена:

1) $3{,}5a^2$, якщо $a = 4$; $0{,}1$; 2) $-4m^3$, якщо $m = 0$; -1;

3) $10xy$, якщо $x = 1{,}4$, $y = -5$;

4) $-0{,}01a^2c$, якщо $a = 5$, $c = -2$.

386. Обчисліть значення одночлена:

1) $1{,}6a^2$, якщо $a = -5$; 0; -1;

2) $5b^2c$, якщо $b = 0{,}2$ і $c = 0{,}1$; $b = -0{,}4$ і $c = 2$.

387. Заповніть таблицю в зошиті:

a	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$
$4a^2$											
$-2a^2$											

388. Знайдіть:

1) значення x, для якого значення одночлена $-0{,}8x$ дорівнює 0; 1; -1; 12;

2) значення a і b, для яких значення одночлена $15ab$ дорівнює 10; -60; 0.

389. Знайдіть:

1) значення a, для якого значення одночлена $-0{,}6a$ дорівнює 0; -3; 12; -300;

2) пару значень x і y, для яких значення одночлена $12xy$ дорівнює 15; –120; 0.

390. (*Усно.*) Чи є правильним твердження? У разі ствердної відповіді обґрунтуйте її; якщо відповідь заперечна – наведіть приклад, що спростовує твердження.

1) Одночлен $7m^2$ для будь-яких значень m набуває додатних значень;

2) одночлен $\frac{1}{16}p^4$ для будь-яких значень p набуває невід'ємних значень;

3) одночлен $-12a^2$ для будь-яких значень a набуває від'ємних значень;

4) одночлен $8b^3$ для будь-яких значень b набуває додатних значень.

391. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, висота якого дорівнює x см, ширина у 3 рази більша за висоту, а довжина у 2 рази більша за ширину.

392. Ширина прямокутника дорівнює b дм, а довжина втричі більша за ширину. Знайдіть площу прямокутника.

Вправи для повторення

393. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

1) $3(12x - 5) + 4x$;
2) $7(a - 1) - 7a + 13$;
3) $4{,}2(x - y) + 3{,}5(x + y)$;
4) $12 - 5(1 - x) - 5x$.

394. Серед виразів $3(y - x)$, $-3(x - y)$, $-3x - 3y$, $-3x + 3y$ знайдіть ті, що тотожно рівні виразу $3y - 3x$.

Життєва математика

395. Подружжя, Леонід та Оксана, відкрили депозити по 100 000 грн кожний і домовилися через рік порівняти отримані від цих депозитів прибутки. Леонід відкрив депозит у банку, що нараховує 4 % щоквартально, а Оксана – у банку, що приймає кошти під 17 % річних. Чий прибуток через рік виявиться більшим і на скільки?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

396. Спростіть вираз:

1) $-4a \cdot (-0{,}5b)$;
2) $10c \cdot 0{,}1d$;
3) $0{,}25y \cdot (-40x)$;
4) $4c \cdot (-2a) \cdot (-3b)$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

397. *Задача Стенфордського університету.* Щоб пронумерувати всі сторінки книжки, друкар використав 1890 цифр. Скільки сторінок у цій книжці?

§ 9. Множення одночленів. Піднесення одночлена до степеня

Множення одночленів

Під час *множення одночленів* використовують властивості множення та правило множення степенів з однаковими основами.

Приклад 1. Перемножити одночлени $-3x^3y^7$ і $5x^2y$.

Розв'язання. $-3x^3y^7 \cdot 5x^2y = (-3 \cdot 5)(x^3x^2)(y^7y) = -15x^5y^8$.

Відповідь: $-15x^5y^8$.

Добутком будь-яких одночленів є одночлен, який зазвичай подають у стандартному вигляді. Аналогічно до прикладу 1 можна множити три і більше одночлени.

Приклад 2. Знайти добуток одночленів $-\frac{1}{2}a^2b \cdot \frac{2}{3}ab^7 \cdot (-6a^7b^{13})$.

Розв'язання. $-\frac{1}{2}a^2b \cdot \frac{2}{3}ab^7 \cdot (-6a^7b^{13}) = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6)\right) \cdot (a^2aa^7) \times$

$\times (bb^7b^{13}) = 2a^{10}b^{21}$.

Відповідь: $2a^{10}b^{21}$.

Піднесення одночлена до степеня

Під час *піднесення одночлена до степеня* використовують властивості степенів.

Приклад 3. Піднести одночлен:

1) $-2x^2y$ до куба; 2) $-p^7m^2$ до четвертого степеня.

Розв'язання.

1) $(-2x^2y)^3 = (-2)^3(x^2)^3y^3 = -8x^6y^3$;

2) $(-p^7m^2)^4 = (-1)^4(p^7)^4(m^2)^4 = p^{28}m^8$.

Відповідь: 1) $-8x^6y^3$; 2) $p^{28}m^8$.

Результатом піднесення одночлена до степеня є одночлен, який зазвичай записують у стандартному вигляді.

Розглянемо ще кілька прикладів.

Приклад 4. Спростити вираз $\left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y$.

Розв'язання. $\left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot x^3(y^5)^3 \cdot 18x^5y = \left(-\frac{8}{27} \cdot 18\right) \times$

$\times (x^3x^5) \cdot (y^{15}y) = -5\frac{1}{3}x^8y^{16}$.

Відповідь: $-5\frac{1}{3}x^8y^{16}$.

Приклад 5. Подати одночлен $16m^8p^{10}$ у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду.

Розв'язання. Оскільки $16 = 4^2$, $m^8 = (m^4)^2$, $p^{10} = (p^5)^2$, то

$16m^8p^{10} = 4^2 \cdot (m^4)^2 \cdot (p^5)^2 = (4m^4p^5)^2$.

Відповідь: $(4m^4p^5)^2$.

Які правила та властивості використовують під час множення одночленів; піднесення одночлена до степеня?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

398. (*Усно.*) Перемножте одночлени:

1) $3x$ і $5y$; 2) $-a$ і $2b$; 3) $4x^2$ і $-2y$; 4) $-3m^2$ і $-n^2$.

399. Виконайте множення одночленів:

1) $1{,}5x \cdot 12y$; 2) $-p^2 \cdot 9p^7$;

3) $8a \cdot \left(-\frac{3}{4}a^7\right)$; 4) $-\frac{2}{3}a \cdot (-12ab^3)$;

5) $0{,}7mn^2 \cdot (-m^7n^3)$; 6) $-0{,}2m^7p^9 \cdot (-4m^4p)$;

7) $-0{,}6ab^2c^3 \cdot 0{,}5a^3bc^7$; 8) $\frac{3}{4}mn^2 \cdot \left(-\frac{4}{5}m\right) \cdot \frac{5}{3}n^7$.

400. Знайдіть добуток одночленів:

1) $20a \cdot (-0{,}5b)$; 2) $-a^2 \cdot (-3a^7b)$;

3) $5b \cdot \left(-\frac{1}{5}b^3\right) \cdot 2c$; 4) $\frac{3}{5}xy^3 \cdot \frac{10}{21}x^2y^5$;

5) $\frac{3}{5}ab^2 \cdot \left(-\frac{5}{6}a^3\right) \cdot 2b^7$; 6) $-\frac{1}{2}m^2p \cdot \frac{2}{3}m^3p \cdot \frac{1}{5}mp^3$.

401. Перемножте одночлени:
1) $-13x^2y$ і $12xy^3$; 2) $0{,}8mn^8$ і $50m^2n$;
3) $-\frac{1}{5}ab^2$, $15a^2p$ і $-\frac{1}{3}pb^4$; 4) $20xy^2$; $-0{,}1x^2y$ і $0{,}2x^2y^2$.

402. Знайдіть два різних записи одночлена $-12m^2n^5$ у вигляді добутку двох одночленів стандартного вигляду.

403. Знайдіть два різних записи одночлена $18m^2n^7$ у вигляді добутку:
1) двох одночленів стандартного вигляду;
2) трьох одночленів стандартного вигляду.

404. (*Усно.*) Піднесіть одночлен до степеня:
1) $(-mn^2)^2$; 2) $(2a^2b)^3$; 3) $(-m^3b^2)^4$; 4) $(-a^3b^5)^7$.

405. Піднесіть до квадрата одночлен:
1) $3a$; 2) $2b^2$; 3) $-4a^3b^7$;
4) $-0{,}1p^9a^4$; 5) $-\frac{1}{5}m^5$; 6) $\frac{6}{7}p^6m^8$.

406. Піднесіть до куба одночлен:
1) $2p$; 2) $7m^5$; 3) $-3a^3b^2$;
4) $-0{,}1a^7b^2$; 5) $\frac{1}{4}p^6$; 6) $-\frac{2}{5}mn^4$.

407. Виконайте піднесення до степеня:
1) $(-xy^3)^3$; 2) $(-7a^2bc^3)^2$; 3) $(p^3m^4q^5)^4$;
4) $(-2a^2b)^4$; 5) $\left(\frac{1}{6}p^2c^5\right)^3$; 6) $(-c^5m^{10}a^3)^5$.

408. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду:
1) $(-5x)^2$; 2) $\left(\frac{1}{2}p^4\right)^3$; 3) $(-0{,}2a^2b^3)^4$;
4) $(-ab^7c^5)^6$; 5) $(-10a^{11}b)^5$; 6) $(a^8c^{10})^7$.

409. Подайте вираз:
1) $\frac{1}{9}x^6$; $0{,}25m^6p^{10}$; $121a^{18}b^2c^4$ у вигляді квадрата одночлена;
2) $0{,}001a^9$; $-125p^3b^{12}$; $\frac{8}{27}c^6m^{15}a^{21}$ у вигляді куба одночлена.

410. Який одночлен стандартного вигляду має бути в дужках замість пропусків, щоб рівність була правильною:
1) $(\ \dots\ )^2 = 4m^6$; 2) $(\ \dots\ )^2 = 0{,}36p^8q^{10}$; 3) $(\ \dots\ )^3 = -8c^9$;

4) $(\ \dots\ )^3 = 1000c^6m^{12}$; 5) $(\ \dots\ )^4 = 16a^4b^8$; 6) $(\ \dots\ )^5 = c^{15}p^{45}$?

411. Який одночлен стандартного вигляду потрібно записати замість «зірочки», щоб одержати правильну рівність:

1) $* \cdot 4m^2n = 12m^7n^{12}$; 2) $5a^2b \cdot * = a^3b^7$;
3) $* \cdot (-2m^2p) = 24m^3p^2$; 4) $* \cdot (-9a^2b) = a^3b$;
5) $5m^2a^3 \cdot * = -5m^2a^3$; 6) $4m^2n \cdot * = -\frac{1}{16}m^2n^8$?

412. Який одночлен стандартного вигляду потрібно записати замість «зірочки», щоб одержати правильну рівність:

1) $* \cdot 3m^2n^3 = 15m^3n^8$; 2) $-7p^2x^3 \cdot * = 21p^2x^9$;
3) $* \cdot (-3a^3b^9) = a^6b^{10}$; 4) $12p^3m \cdot * = -\frac{1}{2}p^3m$?

413. Спростіть вираз:

1) $15m^2 \cdot (4m^3)^2$; 2) $-0{,}5m^5 \cdot (2m^3)^4$;
3) $(-3a^3b^4)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}ab^3\right)$; 4) $\left(-\frac{2}{3}ac^4\right)^3 \cdot 18a^5c$.

414. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $6a^3 \cdot (2a^5)^2$; 2) $-0{,}8a^4 \cdot (5a^7)^3$;
3) $(-2b^2a^7)^4 \cdot \left(-\frac{1}{8}a^3b\right)$; 4) $\left(-\frac{4}{5}mn^4\right)^3 \cdot 25m^4n$.

415. Подайте вираз у вигляді добутку числа 5 і квадрата деякого виразу:

1) $5a^4b^2$; 2) $20c^4d^2m^8$; 3) $\frac{5}{16}p^{12}$.

416. Запишіть вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $(8ab^3)^2 \cdot (0{,}5a^3b)^3$; 2) $\left(\frac{3}{4}m^2n^8\right)^3 \cdot (-4m^7)^2$;
3) $-(-m^2n^3)^4 \cdot (7m^3n)^2$; 4) $(-0{,}2x^3c^7)^5 \cdot (10xc^3)^5$.

417. Спростіть вираз:

1) $(10m^2n)^2 \cdot (3mn^2)^3$; 2) $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right)^3 \cdot (4a^5)^2$;
3) $-(3a^6m^2)^3 \cdot (-a^2m)^4$; 4) $(-5xy^6)^4 \cdot (0{,}2x^6y)^4$.

418. Подайте одночлен у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $-4ab^2$:

1) $8a^2b^2$; 2) $-\frac{1}{5}ab^4$; 3) $-7{,}8a^3b^5$; 4) $1\frac{1}{8}a^3b^2$.

419. Подайте одночлен у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $3mn^2$:

1) $12m^2n^2$; 2) $-\frac{1}{4}mn^5$; 3) $-6{,}9m^7n^8$; 4) $1\frac{1}{5}m^8n^2$.

420. Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду (n – натуральне число):

1) $(-0{,}2a^{n+5}b^{n+2}) \cdot (0{,}5a^{n-2}b^{n+3})$, $n > 2$;
2) $(2a^{2n}b^5)^3 \cdot (-3a^3b^{3n})^2$;
3) $(a^2b^3)^n \cdot (a^{2n}b)^3 \cdot (a^2b^{3n})^5$;
4) $(x^{2n-1}y^{3n+1})^2 \cdot (x^{3n-1}y^{2n+1})^3$.

421. Відомо, що $3ab^2 = 7$. Знайдіть значення виразу:

1) ab^2; 2) $5ab^2$; 3) $-9a^2b^4$; 4) $27a^3b^6$.

422. Відомо, що $5xy^2 = 9$. Знайдіть значення виразу:

1) xy^2; 2) $7xy^2$; 3) $-25x^2y^4$; 4) $125x^3y^6$.

Вправи для повторення

423. Для перевезення школярів до літнього оздоровчого табору використали 3 мікроавтобуси марки «Газель» та 2 мікроавтобуси марки «Богдан». У кожній «Газелі» розмістилося по x учнів/учениць, а в кожному «Богдані» – по y учнів/учениць. Скільки всього учнів/учениць прибуло до табору на відпочинок зазначеним транспортом? Запишіть відповідь у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $x = 20$, $y = 22$.

424. Замініть «зірочку» таким виразом, щоб рівність була тотожністю:

1) $(b^3)^2 \cdot * = b^{10}$; 2) $(m^2)^3 \cdot * = -m^{14}$;
3) $(a \cdot a^4)^2 : * = a^3$; 4) $n^6 \cdot (n \cdot n^2)^2 = * \cdot (-n^4)$.

425. Обчисліть значення виразу $\frac{2^{n+1} \cdot 7^{n+2}}{14^n}$, де n – натуральне число.

Життєва математика

426. Через стирання гумових покришок кожний автомобіль щороку розсіює в повітря 10 кг гумового пилу. Нехай у невеликому містечку на 1000 родин кожна четверта родина має автомобіль, а 5 % усіх родин мають по два



автомобілі. Скільки гумового пилу розсіють у повітря за рік автомобілі жителів цього містечка?

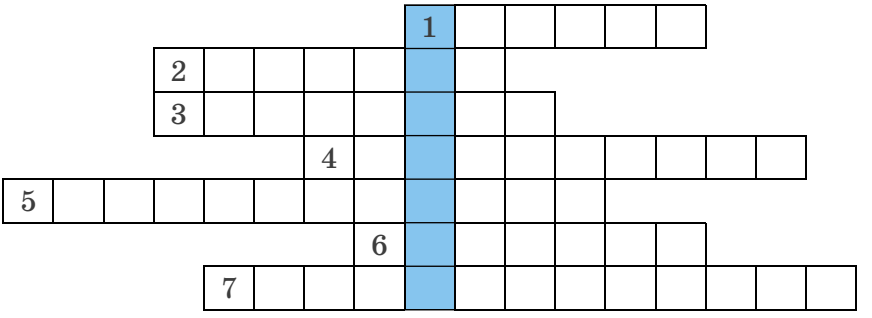
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

427. Зведіть подібні доданки:

1) $7a - 6b - 2a + b$;
2) $-11x + 10y - 3x - 2y$;
3) $10{,}3m - 12{,}9t + 6{,}7m$;
4) $3c + d + 3c - d$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

428. *Видатні українці та українки.* Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу чи інтернет) та прочитайте у виділеному стовпчику одне з фундаментальних понять математики, з яким ви ознайомитеся в наступному розділі.



1. Видатний поет, учений, публіцист.
2. Український математик, співавтор першого тритомного словника української математичної термінології, ініціатор першої Київської олімпіади, однофамілець першого президента незалежної України.
3. Видатний поет і художник, літературна спадщина якого вважається основою української літератури та сучасної української мови.
4. Один з найвідоміших у світі авіаконструкторів українсько-польського походження.
5. Видатна актриса, яка першою здобула звання Народної артистки Української РСР.
6. Українська художниця жанру наївного мистецтва, майстриня народного декоративного живопису. Входить до числа найвідоміших жінок України.
7. Автор «Енеїди» – першого твору нової української літератури, написаного народною мовою, один із засновників нової української драматургії.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Який з виразів тотожно рівний виразу $b + b + b + b$?

А. b^4 **Б.** $4 + b$ **В.** $4b$ **Г.** $\frac{b}{4}$

2. Який з виразів є одночленом?

А. $7x - y$ **Б.** $7x + y$ **В.** $\frac{7x}{y}$ **Г.** $7xy$

3. $a^6 : a^3 = \ldots$

А. a^3 **Б.** a^2 **В.** a **Г.** 1

2 **4.** Укажіть значення виразу $(-2)^3$.

А. 8 **Б.** -8 **В.** -6 **Г.** 6

5. Запишіть у вигляді виразу квадрат суми чисел m і $3a$.

А. $(m - 3a)^2$ **Б.** $m^2 + (3a)^2$ **В.** $(m + 3a)^2$ **Г.** $(m \cdot 3a)^2$

6. Обчисліть значення виразу $2{,}5a^2$, якщо $a = -4$.

А. -40 **Б.** 40 **В.** 100 **Г.** -100

3 **7.** Знайдіть значення виразу $-14\frac{1}{2}a + 8{,}3b + 4\frac{1}{2}a - 7{,}3b$, якщо $a = 1{,}9$; $b = -3{,}5$.

А. 22,5 **Б.** $-15{,}5$ **В.** $-22{,}5$ **Г.** 15,5

8. Обчисліть $\frac{9^{18}}{27^{12}}$.

А. 3 **Б.** 9 **В.** 27 **Г.** 1

9. $(4mp^3)^2 \cdot (0{,}5m^7p)^3 = \ldots$

А. $\frac{1}{2}m^{23}p^9$ **Б.** $2m^8p^4$ **В.** $2m^{23}p^9$ **Г.** $2m^{12}p$

4 **10.** Якого найбільшого значення може набувати вираз $1 - (a - 3)^2$?

А. 1 **Б.** -1 **В.** -3 **Г.** -8

11. Укажіть найбільше із чисел 2^{300}, 3^{200}, 7^{100}, 25^{50}.

А. 2^{300} **Б.** 3^{200} **В.** 7^{100} **Г.** 25^{50}

12. Знайдіть значення виразу $8x^2y^4$, якщо $2xy^2 = -5$.

А. 25 **Б.** -50 **В.** 50 **Г.** 100

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

13. Установіть відповідність між виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Г).

Вираз	*Значення виразу*
1. $2^9 : 64$	**А.** 2
2. $1{,}5^4 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^4$	**Б.** 4
3. $\frac{8^4 \cdot 2^5}{4^8}$	**В.** 8
	Г. 16

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 4–9

1 **1.** Чи є тотожно рівними вирази:
1) $3b + 4b$ і $7b$; 2) $a + a + a$ і a^3;
3) $m + 2a$ і $2a + m$; 4) $3(x - 2)$ і $3x - 2$?

2. Подайте у вигляді степеня добуток:
1) $4 \cdot 4 \cdot 4$; 2) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$.

3. Виконайте дії:
1) x^5x^4; 2) $x^7 : x^2$.

2 **4.** Знайдіть значення виразу:
1) $0{,}4 \cdot (-5)^4$; 2) $2^5 - 4^3 + (-1)^5$.

5. Подайте у вигляді степеня вираз:
1) $(m^3)^4 \cdot m^7$; 2) $(a^2)^7 : (a^3)^2$.

6. Запишіть вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:
1) $-0{,}3m^2np^3 \cdot 4mn^2p^7$; 2) $\left(-\frac{1}{2}p^7a\right)^3$.

3 **7.** Спростіть вираз:
1) $0{,}2a^2b \cdot (-10ab^3)^2$; 2) $\left(-\frac{1}{4}m^2n^3\right)^4 \cdot (4m^5n)^3$.

8. Доведіть тотожність: $2(a + b - c) + 3(a - c) - 2b = 5(a - c)$.

4 **9.** Порівняйте вирази:
1) 5^{12} і 25^6; 2) 2^{30} і 3^{20}.

Додаткові вправи

10. Доведіть, що сума трьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 3.

11. Якого найменшого значення може набувати вираз:
1) $m^4 - 12$; 2) $(a + 2)^8 + 7$?

12. Відомо, що $4m^2n = 9$. Знайдіть значення виразу:
1) $12m^2n$; 2) $4m^4n^2$.

З історії математичного олімпіадного руху України

Математичні змагання є досить популярними серед школярів України. Це й індивідуальні змагання – математична олімпіада, і командні – турнір юних математиків або математичні бої. Участь у цих змаганнях надає можливість школярам долучитися до прекрасного світу цікавих і нестандартних задач, перевірити свої знання з математики, повірити у власні сили або віднайти в собі хист до математики.



Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики проходить щорічно в чотири етапи. Перший – це шкільні олімпіади, другий – районні й міські (для міст обласного підпорядкування), третій – обласні олімпіади, олімпіади міст Києва і Севастополя та Автономної Республіки Крим. Четвертий – це заключний етап, який з призерів третього етапу визначає переможців Всеукраїнської олімпіади. Саме за підсумками четвертого етапу складається перелік кандидатів до складу команди України для участі в Міжнародній математичній олімпіаді. Щоб увійти до команди, переможці четвертого етапу беруть участь у відбірково-тренувальних зборах, за підсумками яких і формується остаточний склад команди. Щороку кількість представників України на Міжнародній олімпіаді визначається залежно від її рейтингу серед інших країн-учасниць. Що вищий рейтинг, то більше учасників увійдуть до команди. Рейтинг команди залежить від результатів її виступу на Міжнародній олімпіаді, причому на рейтинг впливає та кількість балів, яку вибороли учасники за всі розв'язані на олімпіаді конкурсні задачі.

Історія математичного олімпіадного руху України розпочалася з Київських математичних олімпіад. Перша в Україні олімпіада пройшла у столиці в приміщенні Київського дер-

жавного університету (нині Київський національний університет імені Тараса Шевченка) у 1935 році за ініціативи видатного українського математика Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942). Наступного року в Київській олімпіаді взяли участь і учні інших міст України. Зокрема, у 1936 році серед переможців олімпіади був харківський десятикласник Олексій Погорєлов, який згодом пов'язав свою наукову діяльність з геометрією, ставши видатним геометром, академіком Національної академії наук України, автором шкільного підручника з геометрії, за яким кілька десятиліть успішно навчалися українські школярі. У тому ж 1936 році було започатковано й районні олімпіади та проведено першу Всеукраїнську олімпіаду.

У 1938 році М. П. Кравчука було репресовано, але небайдужі до математики молоді вчені зберегли традицію щорічно проводити Київську математичну олімпіаду. У 1942–1945 рр. під час Другої світової війни олімпіади не проводились, а потім їх проведення поновили. Важливу роль у поновленні Київської математичної олімпіади відіграв Микола Миколайович Боголюбов, що на той час був молодим професором фізико-математичного (нині механіко-математичний) факультету Київського державного університету. У післявоєнні роки до організації Київських математичних олімпіад школярів за пропозицією М. М. Боголюбова долучилася відома науковиця педагогіки та історії математики Любов Миколаївна Граціанська. На той час учні 7–10 класів, що цікавилися математикою, мали можливість щонеділі відвідувати математичні гуртки при Київському державному університеті, організацією яких керувала Любов Миколаївна. Заняття гуртків проводили студенти механіко-математичного факультету, які згодом і очолили математичний олімпіадний рух України. Серед них А. В. Скороход, М. Й. Ядренко, В. А. Вишенський, В. І. Михайловський та інші. Гуртківці традиційно брали участь у Київських математичних олімпіадах. Тоді учасниками Київської олімпіади могли стати і школярі Києва, і учні з інших міст України, бо до 1961 року олімпіада проводилася лише в Києві. І нині, за традицією, у Київській математичній олімпіаді можуть брати участь усі охочі школярі.

Саме 1961 рік вважають роком заснування Республіканської олімпіади – заключного етапу математичної олімпіади в Україні, який став прототипом четвертого етапу нинішньої

Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики. Щоб щорічно змагатися, необхідно було відбирати сильну команду учасників, збираючи талановитих школярів по різних куточках України. Це завдання могла вирішити Республіканська математична олімпіада, у якій мали між собою змагатися переможці українських обласних олімпіад, міст Києва і Севастополя та Автономної Республіки Крим, тобто школярі з усіх регіонів України. Отже, у 1961 році Республіканська олімпіада з математики стала освітянською подією загальнодержавного значення. Саме з її переможців надалі й формувалася команда юних математиків для участі у Всесоюзних олімпіадах.

Значну роль у виявленні математично обдарованої учнівської молоді та залученні її до математичних змагань відіграла Республіканська заочна фізико-математична школа (РЗФМШ). Її заняття демонструвалися щочетверга о 16 годині українським телебаченням. Школярі слухали цікаві лекції провідних математиків, ознайомлювалися із завданнями контрольних робіт, які мали виконати та надіслати до організаторів РЗФМШ на перевірку, а також брали участь у заочній олімпіаді, завдання якої оголошувалися в цій програмі. За результатами заочних олімпіад і контрольних робіт виявляли математично обдарованих школярів України, залучали їх до участі в очному етапі олімпіади РЗФМШ, а випускників шкіл – до навчання у провідних закладах вищої освіти України, зокрема і на механіко-математичному факультеті Київського державного університету. Нині багато вчених старшого покоління тепло відгукуються про РЗФМШ, наголошуючи, що саме завдяки їй вони зацікавилися математикою та прийшли в науку.

Значну роль у підвищенні цікавості учнів до математики, залучення до її багатогранного світу задач відігравав і щорічний збірник науково-популярних статей для школярів «У світі математики», що почав виходити друком у 1968 році. Серед авторів матеріалів збірника були і відомі професори механіко-математичного факультету Київського державного університету, і його студенти й аспіранти. А в редакційну колегію збірника увійшли відомі українські математики А. Г. Конфорович, М. Я. Лященко, М. Й. Ядренко, А. Я. Дороговцев та інші. Професор Київського державного університету Микола Йосипович Ядренко до останніх своїх днів був відповідальним редактором цього видання. Збірник «У світі

математики» виходить друком і нині, трохи змінивши свій формат, але не змінивши свого змісту й мети: популяризувати математику серед школярів.

Також М. Й. Ядренко понад 30 років (до 2004 р.) очолював журі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, включаючи й 1991 рік, коли учнівські математичні олімпіади в Україні посіли чільне місце у світовій мережі математичних змагань школярів.


Логотип ММО

У 1992 році непересічною подією для українського математичного олімпіадного руху стала участь команди України в Міжнародній математичній олімпіаді (ММО), хоча в цей рік за регламентом команда мала лише статус спостерігача. А з 1993 року Україна стає офіційним учасником Міжнародної математичної олімпіади. Школярі України гідно представляють свою країну, щороку виборюючи золоті, срібні та бронзові медалі. Загалом з 1993 по 2023 рік Україна на Міжнародній математичній олімпіаді виборола 171 медаль (43 золоті, 75 срібних та 53 бронзові) і має високий рейтинг з-поміж 125 команд-учасниць з інших країн світу.

§ 10. Многочлен. Подібні члени многочлена та їх зведення. Степінь многочлена

Многочлен

Вираз $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ є сумою одночленів $7x^2y^3$, $-5xy^7$, $9x^5$ і -8. Цей вираз називають ***многочленом***.

Многочленом називають суму одночленів.

Одночлени, з яких складається многочлен, називають ***членами многочлена***. Наприклад, многочлен $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ складається із чотирьох членів: $7x^2y^3$, $-5xy^7$, $9x^5$ і -8.

Многочлен, який містить два члени, називають ***двочленом***, многочлен, який містить три члени, – ***тричленом***. Наприклад, $a + b^7$, $2xy - 3y^7$ – двочлени; $x + xy + y^3$, $mn + m - n$ – тричлени. Одночлен вважають окремим видом многочлена.

Будь-який многочлен є цілим виразом. Але не кожний цілий вираз є многочленом. Наприклад, цілі вирази $3(x - 1)$; $(a + b)^2$; $(m - n)^3$ не є многочленами, бо вони не є сумою одночленів.

Подібні члени многочлена

У многочлені $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9$ члени $7x^2y$ і $-5x^2y$ є подібними доданками, оскільки вони мають одну й ту саму буквену частину x^2y. Також подібними доданками є й члени 8 і -9, які не мають буквеної частини.

Подібні доданки многочлена називають *подібними членами многочлена*, а зведення подібних доданків у многочлені – *зведенням подібних членів многочлена*.

Приклад 1. Звести подібні члени у многочлені

$$7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9.$$

Розв'язання. $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9 = (7x^2y - 5x^2y) + (8 - 9) + 9xy = 2x^2y - 1 + 9xy$.

Відповідь: $2x^2y - 1 + 9xy$.

Многочлен стандартного вигляду

Кожний член многочлена $2x^2y - 1 + 9xy$ є одночленом стандартного вигляду, причому цей многочлен уже не містить подібних доданків. Такі многочлени називають ***многочленами стандартного вигляду***.

Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають *многочленом стандартного вигляду*.

Приклад 2. Чи записано в стандартному вигляді многочлен:

1) $xy^2 - x^2y^3x + 7$; 2) $m^2 + 3mn - 3n^2$; 3) $9ab + 7 - 5ab$?

Розв'язання. 1) Оскільки x^2y^3x не є одночленом стандартного вигляду, то многочлен $x^2y - x^2y^3x + 7$ не є многочленом стандартного вигляду.

2) $m^2 + 3mn - 3n^2$ – многочлен стандартного вигляду.

3) Многочлен $9ab + 7 - 5ab$ містить подібні доданки, тому не є многочленом стандартного вигляду.

Відповідь: 1), 3) ні; 2) так.

Приклад 3. Записати у стандартному вигляді многочлен

$$3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^3y + 7xy^3 - 8.$$

Розв'язання. Спочатку зведемо до стандартного вигляду члени многочлена, потім зведемо подібні доданки:

$3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^3y + 7xy^3 - 8 = \underline{3x^3y} + 5 - \underline{\underline{4xy^3}} - \underline{5x^3y} + + \underline{\underline{7xy^3}} - 8 = -2x^3y + 3xy^3 - 3.$

Відповідь: $-2x^3y + 3xy^3 - 3$.

Степінь многочлена стандартного вигляду

Члени многочлена $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$, який має стандартний вигляд, – це одночлени відповідно п'ятого, шостого та нульового степенів. Найбільший із цих степенів називають ***степенем многочлена***. Отже, $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$ – многочлен шостого степеня.

Степенем многочлена стандартного вигляду називають **найбільший зі степенів одночленів, що містить цей многочлен.**

Наприклад, $5x - 7$ та $2a - 3b + 7$ – многочлени першого степеня; $2mn + n$ – другого; $2x^4 + x^5 - x^2$ – п'ятого степеня.

Степенем довільного многочлена називають степінь тотожно рівного йому многочлена стандартного вигляду.

Приклад 4. Визначити степінь многочлена

$$2x^2y + 3xy - 6x^2y + 4x^2y - 7.$$

Розв'язання. Спочатку запишемо многочлен у стандартному вигляді: $\underline{2x^2y} + 3xy - \underline{6x^2y} + \underline{4x^2y} - 7 = 3xy - 7$. Многочлен $3xy - 7$ є многочленом другого степеня, а тому і многочлен $2x^2y + 3xy - - 6x^2y + 4x^2y - 7$ є многочленом другого степеня.

Відповідь: другого степеня.

Члени многочлена можна записувати в різній послідовності. Для многочленів стандартного вигляду, які містять одну змінну, члени зазвичай упорядковують за зростанням або спаданням показників степенів цієї змінної.

Наприклад, $7a^4 + 5a^3 - 8a^2 - 5$ або $-5 - 8a^2 + 5a^3 + 7a^4$.

Що називають многочленом? ○ Що називають членами многочлена? ○ Який многочлен називають двочленом, а який – тричленом? ○ Які члени многочлена називають подібними? ○ Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду? ○ Що називають степенем многочлена?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

429. (*Усно.*) Які з даних виразів є многочленами:

1) $a(a^2 - 3)$; 2) $4c^2 - c^2 + x^6$; 3) $\frac{9}{a-2}$; 4) y;

5) $(c - 3)(c + 2)$; 6) $t^2 - \frac{1}{2}t$; 7) 4,9; 8) $(m - 2c)^2$?

430. Серед поданих виразів виберіть многочлени:

1) $c^3 - c^2 + c$; 2) $\frac{m}{m-p}$; 3) d^2; 4) $x(x - y)$;

5) $-4\frac{1}{7}$; 6) $(x + 5)(x - 5)$; 7) $c^7 - 1$; 8) $(a + b)^2$.

431. Назвіть члени многочлена:

1) $4x^2y - 7xy^2 + 5 + 3xy$; 2) $-a^3 + 4a^2 - 9a + 3$.

432. Складіть многочлен з одночленів:

1) $5m^2$, $-2m$ і 3; 2) $7ab$, $-2a^2$ і b^2;

3) $4p$ і $2q^3$; 4) $-c^2$, $-3mc$, m^3 і 7.

433. Складіть многочлен з одночленів:

1) $5m$ і $-5n$; 2) m^3, $-2m^2$ і mn; 3) $-x^3$, $-2y^2$, xy і 4.

434. (*Усно.*) Чи записано многочлен у стандартному вигляді? Для многочленів стандартного вигляду визначте їхній степінь.

1) $5m^2 + m^3 + 1$; 2) $7x^2 + 2x + 3x^2$;

3) $2 + a + a^2b + 3$; 4) $c^2c + c^5 - 8$;

5) $3x^2x + 2xx^2 + x$; 6) $p^2 - 19$.

435. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $7x - 15xy - 8xy$; 2) $8ab - 5ab + 4b^2$;

3) $9a^4 - 5a + 7a^2 - 5a^4 + 5a$;

4) $18a^4b - 9a^4b - 7ba^4$;

5) $4b^3 + b^2 - 15 - 7b^2 + b^3 - b + 18$;

6) $9xy^2 - x^3 - 5xy^2 + 3x^2y - 4xy^2 + 2x^3$.

436. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $a^3 - 2a^3 + 3a^3$;

2) $-x^4 + 2x^3 - 3x^4 + 5x^2 - 3x^2$;

3) $7 + 3m^6 - 2m^3 - 5m^6 + 2m^6 - m^5 - 7$;

4) $9xy^3 + 6x^2y^2 - x^3y + x^2y^2 - 9xy^3$.

437. (*Усно.*) Які з многочленів – многочлени четвертого степеня:

1) $a^3 + 3a^2 + 1$; 2) $a^2a^2 - 8$;

3) $a^4 - 4a^3 - a^4$; 4) $aa^3 + 2$?

438. Які з многочленів є многочленами п'ятого степеня:
1) $m^3 + m^4 - m^2$; 2) $12 + mm^4$;
3) $mm + mm^2 + m^2m^2$; 4) $m^5 - 3 - m^5$?

439. Зведіть многочлен до стандартного вигляду та визначте його степінь:
1) $x^2y + xyy$; 2) $2a \cdot a^2 \cdot 3b + a \cdot 5c$;
3) $7x \cdot 5y^2 - 4y \cdot 7x^2$; 4) $3a \cdot 4a \cdot (-5a) - a^3 \cdot (-8b)$.

440. Подайте многочлен у стандартному вигляді та визначте його степінь:
1) $3x \cdot x^2 + 2x \cdot 5y^2$; 2) $5a \cdot b^2a + 3b \cdot 2ab^2$;
3) $-5mn^3m + 4mmm$; 4) $5p \cdot 3p \cdot (-p) - p^4qp$.

441. Перепишіть многочлен у порядку спадання степенів змінної:
1) $7x - 5x^3 + x^4 - 9x^2 + 1$; 2) $8y^3 - 5 + 7y^6 - 9y^4 + y^2$.

442. Перепишіть многочлен у порядку зростання степенів змінної:
1) $3m^2 - 3m + m^3 - 8$; 2) $7a^2 - 9a^5 + 4a^3 + 5 - a^4$.

443. Знайдіть значення: 1) двочлена $3x^2 - 1$, якщо $x = -1$; 2;
2) тричлена $5m + 9n^2 - 1$, якщо $m = -2$, $n = \frac{1}{3}$.

444. Обчисліть значення многочлена:
1) $64x^3 - x^2 + 1$, якщо $x = \frac{1}{4}$;
2) $4mn - 3m + 2n - 4mn$, якщо $m = 4$, $n = -3$.

445. Обчисліть значення многочлена:
1) $9p^2 - p^3$, якщо $p = \frac{1}{3}$;
2) $2xy - 4x + 3y + 4x$, якщо $x = -1$, $y = 2$.

446. Чи існує таке значення x, для якого значення многочлена $x^2 + 5$ дорівнює нулю; є від'ємним?

447. Зведіть многочлен до стандартного вигляду і вкажіть його степінь:
1) $3a^2ab - 5a^2b^2b^2 - 6ab \cdot 2a + 5ab \cdot 0{,}4ab - 1{,}5a \cdot 2b \cdot a^2$;
2) $3xy^2 \cdot 4x^3y + 5x^3y \cdot 2y \cdot (-x) - 10x^3y^3 \cdot \frac{1}{2}x - 7xy \cdot (-3xy^3)$.

448. Зведіть многочлен до стандартного вигляду і вкажіть його степінь:
1) $3a^2b^3 - ab^3 - a^3a - a^2b^2 \cdot b + 0{,}5ab \cdot 2b^2 + 4ab \cdot 0{,}5ab^2$;
2) $7x \cdot 2y^3 - 5x \cdot 3xy \cdot (-x) + \frac{1}{2}y \cdot (-14xy) - 3yx \cdot 4y^2$.

449. Зведіть многочлен

$$5xy^3 + x^2y^2 + 748{,}75 - 2x^3y - 3xy^3 - x^2y^2$$

до стандартного вигляду і знайдіть його значення, якщо $x = \frac{1}{2}$; $y = -1$. Відтак дізнаєтеся в кілометрах відстань від Києва до столиці Литви – міста Вільнюс.

450. Доведіть, що многочлен $a^2 + b^2 + 1$ для будь-яких значень змінних a і b набуває лише додатних значень.

451. Замість «зірочки» запишіть такий одночлен, щоб утворився многочлен четвертого степеня:

1) $x^3 + 3x^2 + * - 2$;
2) $m^6 - 4m^4 + mn + *$;
3) $a^3b - 3a^4b^3 + 3a^2 + *$;
4) $pq^3 - p^2q^2 + p^2q^3 + * - p^3q$.

452. Замість «зірочки» запишіть такий одночлен, щоб після зведення многочлена до стандартного вигляду отримати многочлен, що не містить змінної x:

1) $3x - 12 + 5x + 15 - 9x + *$;
2) $5xy^2 - y^3 + 7y^2 + 7y^2x - 5 + *$.

453. Дано многочлен $5x^3 + 2x^2 - x + 7$. Утворіть з нього новий многочлен, замінивши змінну x на одночлен:

1) m;
2) $-x$;
3) $2a$;
4) $3b^2$.

Отримані многочлени зведіть до стандартного вигляду.

454. Дано многочлен $3a^3 - 5a^2 + a - 8$. Утворіть з нього новий многочлен, замінивши змінну a на даний одночлен, та зведіть до стандартного вигляду:

1) x;
2) $-a$;
3) $2b$;
4) $3c^2$.

455. Оберіть ті многочлени, значення яких є додатними для будь-яких значень змінних; є від'ємними для будь-яких значень змінних:

1) $a^4 + 3a^2 + 5$;
2) $c^5 + c^3 + c$;
3) $-p^2 - 7$;
4) $-m^2 - m^2n^2 - n^2 - 9$;
5) $-a - b - 7$;
6) $x^8 + y^6 + c^4 + 1$.

Вправи для повторення

456. Розкрийте дужки та спростіть вираз:

1) $x + 5 + (2x - 7)$;
2) $2y - 7 - (3y - 8)$;
3) $7 - (2x + 9) + (3x - 11)$.

457. Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:
1) сума квадратів чисел 3,1 і −2,7;
2) квадрат різниці чисел −3,8 і −3,7;
3) куб суми чисел 1,52 і −1,5.

458. Замініть пропуски степенем з основою x так, щоб одержати тотожність:
1) $x^3 \cdot (\ \dots\ )^2 = x^{13}$; 2) $(\ \dots\ )^3 \cdot x^7 = x^{19}$.



Життєва математика

459. 1) У зв'язку зі збільшенням кількості замовлень конвеєр невеликого підприємства з пакування продукції в листопаді спожив на 20 % більше електроенергії, ніж у жовтні. Скільки кВт · год спожив конвеєр у листопаді, якщо в жовтні його споживання становило 1250 кВт · год?
2) *Практична діяльність.* Дізнайтеся, скільки коштує 1 кВт · год електроенергії для підприємств, та визначте суму, яку сплатило підприємство за використану для пакування продукції електроенергію в жовтні, а яку — у листопаді.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

460. Розкрийте дужки та спростіть вираз:
1) $d - (d - 1)$; 2) $-(a + 10) + a$;
3) $p + (-p + a)$; 4) $(t + 4) - (t - 5)$;
5) $-(10 - x) + (-x + 7)$; 6) $-(b - 5 + a) - (2 - b)$.



Цікаві задачі — поміркуй одначе

461. Знайдіть усі натуральні значення n, для яких справджується нерівність $\frac{7}{12} < \frac{n}{63} < \frac{11}{18}$.

§ 11. Додавання і віднімання многочленів

Додавання многочленів

Додамо многочлени $7x^2 - 4x + 9$ і $-3x^2 + 5x - 7$. Для цього запишемо їх суму, потім розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$(7x^2 - 4x + 9) + (-3x^2 + 5x - 7) =$$
$$= 7x^2 - 4x + 9 - 3x^2 + 5x - 7 = 4x^2 + x + 2.$$

Ми записали суму многочленів $7x^2 - 4x + 9$ і $-3x^2 + 5x - 7$ у вигляді многочлена $4x^2 + x + 2$. Так само можна додавати три і більше многочленів. *Сумою будь-яких многочленів є многочлен або одночлен*, які зазвичай записують у стандартному вигляді.

Віднімання многочленів

Тепер від многочлена $5x^2 - 8x + 7$ віднімемо многочлен $2x^2 - 6x - 5$. Для цього запишемо різницю цих многочленів, далі розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$(5x^2 - 8x + 7) - (2x^2 - 6x - 5) =$$
$$= 5x^2 - 8x + 7 - 2x^2 + 6x + 5 = 3x^2 - 2x + 12.$$

Різницю многочленів $5x^2 - 8x + 7$ і $2x^2 - 6x - 5$ ми подали у вигляді многочлена $3x^2 - 2x + 12$. *Різницею будь-яких многочленів є многочлен або одночлен*, які зазвичай записують у стандартному вигляді.

Застосування додавання і віднімання многочленів при розв'язуванні вправ

Розглянемо приклади застосування додавання і віднімання многочленів при розв'язуванні вправ.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(7x - 5) - (2x^2 + 3x - 7) + (9 - 2x) = 4 - 2x^2.$$

Розв'язання. Розкриємо дужки в лівій частині рівняння:

$$7x - 5 - 2x^2 - 3x + 7 + 9 - 2x = 4 - 2x^2.$$

Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину рівняння, а ті, що не містять змінної, – у праву. Матимемо:

$$\underline{7x} - \underline{\underline{2x^2}} - \underline{3x} - \underline{2x} + \underline{\underline{2x^2}} = 4 + 5 - 7 - 9;$$
$$2x = -7;$$
$$x = -3{,}5.$$

Відповідь: $-3{,}5$.

Приклад 2. Довести, що значення виразу

$$(7x^2 - 4x + 5) - (x^2 - 3) + (4 - 2x^2 + 4x)$$

є додатним числом для будь-якого значення змінної.

Доведення. Маємо: $(7x^2 - 4x + 5) - (x^2 - 3) + (4 - 2x^2 + 4x) =$
$= 7x^2 - 4x + 5 - x^2 + 3 + 4 - 2x^2 + 4x = 4x^2 + 12.$

Значення виразу x^2 є невід'ємним числом для будь-якого значення x. Тому й значення виразу $4x^2$ також є невід'ємним числом для будь-якого значення x. А отже, значення виразу $4x^2 + 12$ є додатним для будь-якого значення змінної x. Твердження задачі доведено.

Запис многочлена у вигляді суми або різниці многочленів

Іноді виникає потреба розв'язати обернену задачу – записати многочлен у вигляді суми або різниці многочленів. У такому випадку доцільно скористатися правилами взяття виразу в дужки, перед якими стоїть знак «плюс» або «мінус», які вивчали в попередніх класах.

Приклад 3. Записати многочлен $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5$ у вигляді:
1) суми двох многочленів, один з яких містить змінну a, а інший її не містить;
2) різниці двох многочленів, перший з яких містить змінну b, а другий її не містить.

Розв'язання.
1) $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (a^2 - a) + (-b^3 + b^7 + 5)$;
2) $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (-b^3 + b^7) - (-a^2 + a - 5)$.

Відповідь: 1) $(a^2 - a) + (-b^3 + b^7 + 5)$;
2) $(-b^3 + b^7) - (-a^2 + a - 5)$.

Як знайти суму многочленів? Як знайти різницю многочленів? Які правила допоможуть записати многочлен у вигляді суми або різниці многочленів?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

462. (*Усно.*) Прочитайте многочлен, який одержимо після розкриття дужок:
1) $a + (b - 5)$; 2) $y + (3 - m + t)$;
3) $x - (p - 1)$; 4) $c - (-b^2 + 1)$.

463. Знайдіть суму многочленів:
1) $2x^2 + 3x^3 - 1$ та $5x^3 + 3x^2 + 7$;
2) $a^3 + 3a^2 + 1$, $2a^2 - 5$ та $6 - 5a^2$.

464. Знайдіть суму многочленів:
1) $3m^3 + 5m^2 - 7$ та $2m^3 + 6$;
2) $b^2 + 3b - 1$, $2b - 3b^2$ та $2b^2 + 7$.

465. Знайдіть різницю многочленів:
1) $4p^3 + 7p^2 - p$ та $2p^2 + p$;
2) $m^2 + 2m - 1$ та $m^3 + 2m - 1$.

466. Знайдіть різницю многочленів:
1) $2a^3 - 3a^2 + 7$ та $a^3 - 5a^2 - 8$;
2) $c^4 + c^3 - 2$ та $c^3 + 2c^2 - 2$.

467. Знайдіть суму і різницю виразів:
1) $x + y$ і $x - y$; 2) $x - y$ і $-x + y$;
3) $-x - y$ і $y - x$; 4) $x - y$ і $y - x$.

468. Знайдіть суму і різницю виразів:
1) $2a - b$ і $2a + b$; 2) $2a - b$ і $-2a + b$;
3) $-2a - b$ і $2a + b$; 4) $2a - b$ і $b - 2a$.

469. Знайдіть суму та різницю многочленів і зведіть їх до многочленів стандартного вигляду:
1) $3x^2 - 2x + 1$ і $3x^2 - 4$; 2) $2x + 1$ і $-3x^2 - 2x - 1$;
3) $a + 5b$ і $3a - 5b$; 4) $m^2 - 2mn - n^2$ і $m^2 + n^2$.

470. Запишіть суму та різницю першого і другого многочленів і зведіть їх до многочленів стандартного вигляду:
1) $5y^2 + 2y - 10$ і $3y^2 - y + 7$;
2) $5m^3 - m + 3$ і $4m^2 + m - 4$;
3) $5p^2 - 2pq - 7q^2$ і $3p^2 + 2pq + 5q^2$.

471. Спростіть вираз:
1) $(1 + 2p) + (p^2 - p)$; 2) $(5a^2 + a^3) - (-a + 5a^2)$;
3) $(x^2 - 5x) + (5x - 13)$; 4) $(3b^3 - 5b^2) - (5 + 3b^3 - 2b^2)$.

472. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:
1) $(5ab^2 - 12ab - 7a^2b) - (15ab + 8a^2b)$;
2) $\left(\frac{3}{5}a^3b^2 - \frac{3}{4}ab^2\right) - \left(-\frac{5}{8}b^2a - \frac{7}{10}b^2a^3\right)$;
3) $(x + y - z) - (-2x + 3y - z) - (-5y + 4z + x)$;
4) $(2m - 3n) - (4m - 3mn + 3n^2) - (5mn - 5n^2 - 3n)$.

473. Спростіть вираз:
1) $(15x^2 - 3xy) - (12x^2 - 5xy + y^2)$;
2) $(5a^2b - 12ab + 14ab^2) - (-5ab + 14ab^2 - 7a^2b)$;
3) $(m + n - 2p) - (-2m + p - 3n) - (4n + 3m - 4p)$.

474. Розв'яжіть рівняння:
1) $5x + 2x^2 - (2x^2 - 10) = 25$; 2) $5 - x^3 - (2x + 7 - x^3) = -8$.

475. Розв'яжіть рівняння:
1) $5x^2 + 7x - (2x + 5x^2 - 8) = 8$;
2) $2 - 3x^3 - (5x - 3x^3) = -13$.

476. Подайте многочлен у вигляді суми двох многочленів, один з яких містить змінну x, а інший її не містить:
1) $xa + b - m - xb$; 2) $xa^2 - 17a + 5x + 10b$.

477. Запишіть многочлен $5x^2 - 9x^3 + 7x - x^4 - 1$ у вигляді суми двочлена і тричлена. Знайдіть два розв'язки задачі.

З **478.** Для якого значення x:
1) значення різниці одночлена $5x$ і многочлена $3x - 5x^2 + 12$ дорівнює значенню многочлена $7x + 5x^2 - 18$;
2) значення різниці многочленів $5x^3 + 3x^2 - x$ і $2x^3 - 2x^2 + x$ дорівнює значенню многочлена $5x^2 + 3x^3 + 14$?

479. Для якого значення змінної y:
1) сума многочленів $2y^3 - 3y + y^2$ та $5y - 2y^3 - y^2 + 7$ дорівнює 19;
2) різниця двочлена $5y^2 - 7y$ і тричлена $2y^2 - 8y + 9$ дорівнює двочлену $3y^2 - 3y$?

480. Подайте многочлен у вигляді різниці двох многочленів, перший з яких містить змінну y, а другий її не містить:
1) $-ya + yx + x - y - a + 1$;
2) $-p^2 + y^2 + 2p - 7y - 1$.

481. Який многочлен стандартного вигляду потрібно записати замість пропусків, щоб одержати тотожність:
1) $-(\ldots) = 4p - q$;
2) $-(\ldots) = 4m^2 - p^2 + 5$;
3) $(\ldots) + 2m^2n - 5mn^2 = 7m^2 - 3mn^2$;
4) $7a^2b + 9a^3 + (\ldots) = 8a^2b$;
5) $3 + 2a^2 - 5a + (\ldots) = 9a^2 - 12$;
6) $(\ldots) - (4x^2 - 2xy) = 5 + 5x^2 - 2xy$?

482. Знайдіть многочлен стандартного вигляду, підставивши який замість M матимемо тотожність:
1) $-M = 5a - b^2 + 7$;
2) $M + (3a^2 - 2ab) = 5a^2 + 3ab - b^2$;
3) $M - (3mn - 4n^2) = m^2 - 4mn + n^2$;
4) $(7a^2 - b^2 - 9ba) - M = 0$.



483. Велосипедистка була в дорозі 4 год. За першу годину вона проїхала x км, а за кожну наступну – на 3 км більше, ніж за попередню. Яку відстань проїхала велосипедистка:
1) за другу годину;
2) за третю годину;
3) за перші три години;
4) за весь час руху?

484. Бригада робітників викопала криницю за 5 днів. За перший день вони викопали a метрів, а за кожний наступний – на 2 метри менше, ніж за попередній. Скільки метрів криниці викопала бригада:
1) за другий день;
2) за третій день;
3) за перших два дні;
4) за останніх три дні?

485. Доведіть тотожність:
1) $(x - y) + (y - p) - (x - p) = 0$;
2) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 - a^2 - c^2) - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2$.

486. Доведіть тотожність:
$(a^3 + a^2 - a) + (2a^2 - 5a + 3a^3) - (4a^3 - 6a + 2a^2) = a^2$.

487. Доведіть, що для будь-яких натуральних значень n значення виразу $(15 - 7n) - (7 - 11n)$ є кратним числу 4.

488. Доведіть, що для будь-яких натуральних значень m значення виразу $(m^2 - 4m + 1) - (m^2 - 9m - 14)$ ділиться на 5.

489. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{1}{8}a^2b + \frac{3}{5}ab\right) - \left(\frac{7}{10}ab - \frac{3}{4}ba^2\right) - \left(\frac{7}{8}a^2b - \frac{1}{10}ab - 2\right)$$

не залежить від значення змінних.

490. Доведіть, що значення виразу
$(7x^5 - 4x^4 + x^3 - 8) - (3x^5 - 4x^4 + 4x^3) - (4x^5 - 3x^3 + 7)$
не залежить від значення змінної.

491. Знайдіть значення виразу:
1) $(b^2 + 3b - 8) - (7b^2 - 5b + 7) + (5b^2 - 8b + 10)$, якщо $b = -2$;
2) $17x^2 - (3x^2 - 2xy + 3y^2) - (14x^2 + 3xy - 4y^2)$, якщо $x = -0{,}1$, $y = 10$.

492. Знайдіть значення виразу:

1) $(m^2 - 2m - 8) - (0{,}1m^2 - 5m + 9) + (4m - 0{,}9m^2 + 5)$, якщо $m = \frac{1}{7}$;

2) $7a^2 - (3ab - 2a^2) + (4ab - 9a^2)$, якщо $a = -\frac{1}{8}$, $b = -32$.

493. Подайте многочлен $3m^2n - 5mn + 4n^2 - 9n - 7$ у вигляді різниці двох многочленів так, щоб усі члени обох многочленів мали додатні коефіцієнти.

494. Нехай $a = 7m^2 + 5mn - n^2$, $b = -6m^2 + 2mn + 3n^2$, $c = m^2 - 2n^2$. Підставте ці многочлени замість a, b, c у вираз і спростіть його:
1) $a + b + c$; 2) $a - b - c$.

495. Доведіть, що для будь-якого значення x різниця многочленів $0{,}5x^4 + x^3 - 0{,}2x^2 - 5$ і $0{,}3x^4 + x^3 - 0{,}7x^2 - 9$ набуває додатного значення. Якого найменшого значення набуває ця різниця і для якого значення x?

496. Доведіть, що сума:
1) трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3;
2) чотирьох послідовних натуральних чисел при діленні на 4 дає в остачі 2.

497. Запис $\overline{xy}$ означає натуральне число, у якому x десятків і y одиниць. Доведіть, що:
1) сума чисел $\overline{xy}$ і $\overline{yx}$ кратна числу 11;
2) різниця чисел $\overline{xy}$ і $\overline{yx}$, де $x > y$, кратна числу 9.

498. Запис $\overline{xyz}$ означає натуральне число, у якому x сотень, y десятків і z одиниць. Подайте у вигляді многочлена:
1) $\overline{xyz}$; 2) $\overline{zyx}$; 3) $\overline{xyz} + \overline{zy}$; 4) $\overline{yxz} - \overline{yx}$.

Вправи для повторення

499. Обчисліть значення виразу $(0{,}018 + 0{,}982) : (4 \cdot 0{,}5 - 0{,}2)$.

500. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $-8x \cdot 1{,}5y$, якщо $x = \frac{4}{7}$, $y = -1\frac{3}{4}$;

2) $-2a \cdot (-3{,}5b) \cdot 5c$, якщо $a = -1$, $b = -\frac{2}{5}$, $c = \frac{3}{7}$.

501. Подайте вираз 2^{60} у вигляді степеня з основою:
1) 4; 2) 8; 3) 16; 4) 32.

Життєва математика

502. 1) Для 13-річного підлітка мінімальна потреба в молочних продуктах (молоко, кефір, ряжанка) становить 15 % від норми рідини на день. Скільки рідких молочних продуктів має вживати підліток згаданого віку щоденно, якщо потреба його організму в рідині становить 2 літри на день?
2) *Практична діяльність.* Проаналізуйте свій раціон харчування. Чи виконуєте ви зазначені рекомендації?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

503. Розкрийте дужки:
1) $-0{,}6d(-5b + 4p - 0{,}3x)$;
2) $10(0{,}9x - 2{,}3y + 0{,}1z)$;
3) $(-0{,}3a + 5b - 2c) \cdot (-20)$;
4) $\left(-\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}m - 1\frac{1}{3}x\right) \cdot 12$.



Цікаві задачі — поміркуй одначе

504. Знайдіть цифри a і b, якщо число $\overline{9a6b2}$ кратне числу 36. Укажіть усі можливі розв'язки.

§ 12. Множення одночлена на многочлен

Правило множення одночлена на многочлен

Помножимо одночлен $5x$ на многочлен $3x - 7$, використовуючи розподільну властивість множення:

$$5x(3x - 7) = 5x \cdot 3x - 5x \cdot 7 = 15x^2 - 35x.$$

Отже, добутком одночлена $5x$ і многочлена $3x - 7$ є многочлен $15x^2 - 35x$, який одержали, помноживши одночлен на кожний член многочлена і додавши знайдені результати. Маємо *правило множення одночлена на многочлен*:

щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити цей одночлен на кожний член многочлена й отримані добутки додати.

Добуток будь-якого одночлена на будь-який многочлен завжди можна подати у вигляді многочлена.

Застосування правила множення одночлена на многочлен до розв'язування вправ

Розглянемо застосування правила множення одночлена на многочлен при розв'язуванні вправ.

Приклад 1. Виконати множення $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2)$.

Розв'язання. $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2) = -3ab \cdot 5a^2 - 3ab \cdot (-2ab) - 3ab \cdot b^2 = -15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3$.

Записати це множення можна коротше, пропустивши проміжні результати: $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2) = -15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3$.

Відповідь: $-15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3$.

Приклад 2. Спростити вираз $5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m)$.

Розв'язання.

$5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m) = \underline{5m^3} - \underline{\underline{10m}} - \underline{2m^3} + \underline{\underline{10m}} = 3m^3$.

Відповідь: $3m^3$.

Приклад 3. Спростити вираз $4ab(2a^2b - a) - 8a(a^2b^2 - ab)$ та знайти його значення, якщо $a = -\frac{1}{8}$; $b = -4$.

Розв'язання. Спочатку спростимо заданий вираз.

$4ab(2a^2b - a) - 8a(a^2b^2 - ab) = \underline{8a^3b^2} - \underline{\underline{4a^2b}} - \underline{8a^3b^2} + \underline{\underline{8a^2b}} = 4a^2b.$

Якщо $a = -\frac{1}{8}$; $b = -4$, то

$$4a^2b = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \cdot (-4) = -16 \cdot \frac{1}{64} = -\frac{1}{4} = -0,25.$$

Відповідь: $4a^2b$; $-0,25$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4} = \frac{x-14}{12}$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на найменший спільний знаменник дробів, тобто на 12:

$$12\left(\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4}\right) = 12 \cdot \frac{x-14}{12}.$$

Маємо:
$$\frac{12 \cdot (2x-1)}{3} - \frac{12 \cdot (3x+2)}{4} = \frac{12 \cdot (x-14)}{12};$$
$$4(2x - 1) - 3(3x + 2) = x - 14;$$
$$8x - 4 - 9x - 6 = x - 14;$$
$$8x - 9x - x = -14 + 4 + 6;$$
$$-2x = -4;$$
$$x = 2.$$

Відповідь: 2.

Сформулюйте правило множення одночлена на многочлен.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

505. (*Усно.*) Виконайте множення:
1) $x(a - 3)$; 2) $-p(x + y)$;
3) $m(a - b + 2)$; 4) $-y(x - 3 + p)$.

506. Виконайте множення:
1) $a(b - 2)$; 2) $m(a + c)$; 3) $p(a - b - 3)$; 4) $-b(a - c + 3)$.

507. Виконайте множення одночлена на многочлен:
1) $7a^2(3 - a)$; 2) $-5x^2(x^3 + 4x)$;
3) $-3c^3(c - 2c^2)$; 4) $2a^4(a^5 - a^3 - 1)$;
5) $(3x^2 - 5x - 3) \cdot 2x$; 6) $(c^3 + c - 4) \cdot (-3c)$.

508. Перетворіть добуток на многочлен:

1) $4xy(x^2 - 2xy - y^2)$;
2) $-a^2b(ab^2 - b^2 + a^2)$;
3) $(2mn - 3m^2 - 5n^2) \cdot (-4m^2)$;
4) $(-2x^2y + 3xy - x^2) \cdot xy^2$;
5) $(2{,}8a^2b - 3{,}7a^3b - 0{,}8b) \cdot 10ab^2$;
6) $-1{,}8a^2b^6(5a^2b - 1{,}5a - 2b^3)$.

509. Подайте добуток у вигляді многочлена:

1) $4a(a^2 - 2a + 3)$;
2) $-3b^2(4b^3 - 2b^2 + 3b - 8)$;
3) $(3x^2 - 4x + 12) \cdot (-0{,}1x^3)$;
4) $(p^2 - 9p^3 + 7p - 1) \cdot 3p^4$;
5) $7ab(2a^2b - 3ab^2 - 3a^3)$;
6) $-6m^2n(m^2n - 3mn^2 - 4n^3)$;
7) $(9a^2b - 8ab^3 - a^2b^2) \cdot (-3a^2b^3)$;
8) $(p^2q^3 - 2pq^4 + 3p^3) \cdot 5p^3q^2$.

510. Виконайте множення:

1) $\frac{1}{7}a^2b(1{,}4a^2 - 2{,}1b^3)$;
2) $-\frac{2}{3}x^2y^3\left(1{,}2y^5 - \frac{9}{10}xy\right)$;
3) $\left(1\frac{1}{5}mn^2 - 1\frac{1}{15}m^2\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}m^2n\right)$;
4) $\left(1\frac{1}{4}m - \frac{5}{6}n\right) \cdot 2\frac{2}{5}m^2n^7$.

511. Виконайте множення:

1) $\frac{1}{4}m^2n(2{,}4mn - 2{,}8m^2)$;
2) $-\frac{2}{5}ab^3\left(1{,}5ab - \frac{5}{6}b^2\right)$;
3) $\left(1\frac{1}{2}x^2y - \frac{9}{10}xy^4\right) \cdot \frac{2}{3}xy^3$;
4) $\left(1{,}5a - \frac{4}{7}b\right) \cdot \left(-\frac{1}{14}a^2b^5\right)$.

512. Подайте у вигляді многочлена:

1) $5(x - 3) - 2(x - 3)$;
2) $5(7a - 1) - 7(5a + 3)$;
3) $2b(b - 3) - 5b(b + 7)$;
4) $7y^2(3y - 2) + 4y^2(y + 5)$.

513. Спростіть вираз:

1) $5(3 - 2a) + 7(3a - 1)$;
2) $3(2x - 8) - 3(2x - 5)$;
3) $3m(m - 2) - 5m(7 - m)$;
4) $2a^2(3a - 5) + 4a^2(a + 3)$.

514. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $5m(m - n) + 3n(n - m)$;
2) $2a(2b - 3a) - 3a(5b - 7a)$;
3) $a(3a^2 - 2b) - b(5a^2 - 2a)$;
4) $0{,}2mn(m^2 - n^2 + 3) - 0{,}5m(nm^2 - n^3)$.

515. Виконайте дії:

1) $3a(a - b) + 5b(a + b)$;
2) $3y(x - y) + y(2y - 3x)$;
3) $p(p^2 - 2a) - a(a^2 - 2p)$;
4) $3xy(x^2 - y^2 + 7) - 5xy(y^2 + x^2)$.

516. Розв'яжіть рівняння:

1) $6 + 2(5x + 4) = 24$;
2) $3(5x - 1) = 4(4x - 8)$;
3) $7 - 4(y - 1) = (3y - 2) \cdot (-2)$;
4) $3(y - 2) - 5(y + 7) = -7(y - 1)$.

517. Розв'яжіть рівняння:
1) $5(2x - 1) = 3(4x + 5)$; 2) $9 - 5(y + 2) = (7y - 5) \cdot (-3)$.

518. Знайдіть корінь рівняння:
1) $x(x - 3) - 9 = 12 + x^2$; 2) $3x - 2x^2 = 2x(5 - x) + 14$.

519. Знайдіть корінь рівняння:
1) $7 - x(x - 2) = 5 - x^2$;
2) $3x(x - 5) = 3x^2 - 5x + 20$.

520. Запишіть замість «зірочки» такий одночлен, щоб справджувалася рівність:
1) $(a + b) \cdot * = am + bm$;
2) $* \cdot (x - y) = -nx + ny$;
3) $* \cdot (a - b + c) = ax^2 - bx^2 + cx^2$;
4) $* \cdot (c - n + p) = -abc + abn - abp$;
5) $* \cdot (x^2 - xy) = x^2y^2 - xy^3$;
6) $(p - 1) \cdot * = p^2q^2 - pq^2$.

521. Доведіть, що для будь-якого значення a вираз
$$a(3a + 1) - a^2(a + 2) + (a^3 - a^2) - (a + 1)$$
набуває одного й того самого значення.

522. Доведіть, що значення виразу
$$x(5x^2 - x + 2) - (5x - 2 + 4x^3) - x(x^2 - x - 3)$$
не залежить від значення змінної.

523. Доведіть, що вираз тотожно дорівнює нулю:
1) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$;
2) $a(b + c - bc) - b(c + a - ac) + c(b - a)$.

524. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:
1) $-7a^5b(2b^4 + ab^5 - 3a^2b^6 + a^3b^7)$;
2) $(3x^3 + 5x^2 - 2a - 3a^2)xay$;
3) $-4pm^3(m^4 - 2p^3m + 7p^6m^7 + 11p^7m^3)$;
4) $\left(-\frac{1}{2}a^2b^9 + \frac{1}{6}ab^7 - \frac{1}{3}a^3b^6\right)(-12a^3b^7)$.

525. Доведіть, що для будь-якого значення змінної a вираз $2a^2(a - 5) - a(-6a + 2a^2 + 3a^3) - 4$ набуває від'ємних значень.

526. Доведіть, що для будь-якого значення змінної m вираз $5(m^2 - 3m + 1) - 3m(m - 5)$ набуває лише додатних значень.

527. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:
1) $3a(5a^2 - 3ab + ab^3 - b^2) \cdot b$;
2) $-xy \cdot (x^2y - 2x^2y^2 + 3xy^3 + x^3) \cdot x^2$.

528. Спростіть вираз і знайдіть його значення. Знайдіть суму всіх отриманих значень і дізнайтеся, скільки разів представники України вигравали в пісенному конкурсі «Євробачення».

1) $4a - 2(5a - 1) + (8a - 2)$, якщо $a = -3{,}5$;

2) $10(2 - 3x) + 12x - 9(x + 1)$, якщо $x = -\frac{1}{27}$;

3) $a(3a - 4b) - b(3b - 4a)$, якщо $a = -5$, $b = 5$;

4) $3xy(5x^2 - y^2) - 5xy(3x^2 - y^2)$, якщо $x = \frac{1}{8}$, $y = -2$.

529. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $7a(2a - 0{,}1) - 0{,}1a(10a - 7)$, якщо $a = \frac{1}{13}$;

2) $4x(2x - 5y) - 2y(4y - 10x)$, якщо $x = -15$, $y = 15$.

530. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5x-9}{4} + \frac{5x-7}{4} = 1$;

2) $\frac{3x-1}{14} - \frac{x}{7} = -2$;

3) $\frac{x-6}{3} + \frac{2x+3}{3} = 2x$;

4) $\frac{2-x}{5} - \frac{x}{15} = \frac{1}{3}$;

5) $2x(1 - 3x) + 5x(3 - x) = 17x - 11x^2$;

6) $(7x^3 + 2x^2 - 4x - 5) - (6x^3 - x^2 + 2x) = 3x^2 - (6x - x^3)$.

531. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{7x-3}{6} - \frac{5x+1}{2} = 0$;

2) $\frac{x-3}{5} - \frac{x}{4} = 1$;

3) $\frac{4x+1}{6} + \frac{10x+1}{6} = x$;

4) $\frac{x+2}{15} = \frac{1}{3} - \frac{x}{5}$;

5) $3x(2 + x) - 4(1 - x^2) = 7x^2 + 6x$;

6) $(x^2 + 4x - 8) - (7x - 2x^2 - 5) = 3x^2 - (3x + 3)$.

532. Для якого значення змінної:

1) значення виразу $2(3y + 1)$ у 4 рази більше за значення виразу $3y - 2$;

2) добуток виразів $3x$ і $2x + 1$ дорівнює сумі виразів $x(4x - 1)$ і $2(x^2 - 3)$?

533. Для виготовлення одного тістечка потрібно на 4 г цукру більше, ніж для виготовлення одного пиріжка або одного пончика. За день у кондитерському цеху було виготовлено 80 тістечок, 50 пончиків і 50 пиріжків. Водночас на всі тістечка витратили на 80 г цукру більше, ніж на всі пончики

і пиріжки разом. Скільки грамів цукру потрібно для виготовлення одного тістечка?

534. За 8 олівців, 4 ручки і блокнот заплатили 265 грн. Олівець на 17 грн 50 к. дешевший за ручку і на 32 грн 50 к. дешевший за блокнот. Скільки коштують окремо олівець, ручка і блокнот?

535. Одна котушка бавовняних ниток коштує 5 грн 40 к., а льняних – 6 грн 50 к. Бабуся для плетіння серветок придбала бавовняних ниток на 6 котушок більше, ніж льняних, витративши на всю покупку 175 грн 20 к. Скільки котушок бавовняних і скільки котушок льняних ниток придбала бабуся?



536. Човен плив 3,5 год за течією річки і 2,5 год проти течії. Відстань, яку він проплив за течією річки, на 30 км більша за відстань, яку він проплив проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії 2 км/год.

537. Якими одночленами потрібно замінити «зірочки», щоб одержати тотожність:

1) $5ax^2 \cdot (* + *) = 5ax^3 + 35ax^2$;
2) $(9a^2 + *) \cdot 3a = * + 18a^5$;
3) $(* - 4mc^2) \cdot * = 3m^3c^2 - 12m^2c^4$;
4) $(* - *) \cdot x^2y^3 = 5x^2y^3 - 7x^2y^4$?

538. Які одночлени потрібно вписати в клітинки, щоб одержати тотожність:

1) $3a^2(\square - \square) = 9a^5 - 12a^2$;
2) $(\square + \square) \cdot 5ab^2 = 5ab^2 + 10a^2b^3$;
3) $(\square - 2m^2a) \cdot 7m = 14m^2 - \square$;
4) $(7x^2a - 9xa^2) \cdot \square = 14x^3a^5 - \square$?

539. Спростіть вираз (n – натуральне число):

1) $x^{n+3}(x^{n+4} - x) - x^{2n+7}$;
2) $y^n(y^{n+2} - y^n - y^2) - y^2(y^{2n} - y^n)$;
3) $z^n(z^2 - 1) - z^2(z^n + 2) - 2(z^n - z^2)$.

Вправи для повторення

540. У яких координатних чвертях лежать точки $A(4; -8)$, $B(-5; -7)$, $C(1; 17)$, $D(-9; 8)$?

541. Спростіть:

1) $(-3a^2b^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}ab^2\right)^3$;

2) $(0{,}1mn^7)^2 \cdot (-10m^2n^3)^3$.

542. Використовуючи властивості степенів, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{24^{17} \cdot 6^{16}}{48^{16} \cdot 3^{17}}$; 2) $\frac{35^9 \cdot 2^7}{5^7 \cdot 14^8}$.

Життєва математика

543. У багатьох країнах світу, зокрема і в Україні, температуру вимірюють за шкалою Цельсія. А в деяких країнах, наприклад у США, основною шкалою для вимірювання температури є шкала Фаренгейта. Щоб значення температури за Фаренгейтом t_F перетворити у градуси Цельсія t_C, користуються формулою $t_C = 1{,}8t_F + 32$.

1) Запишіть формулу, за якою значення температури у градусах Цельсія t_C можна перетворити у значення температури за шкалою Фаренгейта t_F.

2) Уявіть, що ваш термометр вимірює температуру тіла за Фаренгейтом. Заповніть таблицю, перетворивши значення температури за Фаренгейтом у значення температури за Цельсієм.

t_F	95	95,9	96,8	97,7	98,6	99,5	100,4	101,3	102,2
t_C									

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

544. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $7a - 7b$; 2) $-2y - 2x$; 3) $9n + 9m$; 4) $bx + by$;
5) $3m - mx$; 6) $7t + 7$; 7) $5ap + 5pb$; 8) $4ax - 4bx$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

545. Відомо, що для деяких натуральних значень a і b значення виразу $6a + b$ кратне числу 7. Доведіть, що для тих самих значень a і b значення виразу $6b + a$ також кратне числу 7.

§ 13. Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки

Розкладання многочлена на множники



У 5 класі ми розкладали складені числа на прості множники, тобто подавали натуральні числа у вигляді добутку. Наприклад, $12 = 2^2 \cdot 3$; $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ тощо.

Подати у вигляді добутку можна і деякі многочлени. Це означає, що ці многочлени можна розкладати на множники.

Наприклад, $5x - 5y = 5(x - y)$; $a^3 + 3a^2 = a^2(a + 3)$ тощо.

Розкласти многочлен на множники означає подати його у вигляді добутку одночлена на многочлен або добутку кількох многочленів так, щоб цей добуток був тотожно рівним даному многочлену.

Винесення спільного множника за дужки

Розглянемо один із способів розкладання многочлена на множники – ***винесення спільного множника за дужки***. Одним з відомих нам прикладів такого розкладання є розподільна властивість множення $a(b + c) = ab + ac$, якщо її записати у зворотному порядку: $ab + ac = a(b + c)$. Цей запис означає, що многочлен $ab + ac$ розклали на два множники a та $b + c$.

Під час розкладання на множники многочлена із цілими коефіцієнтами множник, який виносять за дужки, обирають так, щоб члени многочлена, який залишиться в дужках, не мали спільного буквеного множника, а модулі їхніх коефіцієнтів не мали спільних дільників.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розкласти вираз на множники:

1) $8m + 4$; 2) $at + 7ap$; 3) $15a^3b - 10a^2b^2$.

Розв'язання. 1) Спільним множником є число 4, тому

$$8m + 4 = \underline{4} \cdot 2m + \underline{4} \cdot 1 = 4(2m + 1).$$

2) Спільним множником є змінна a, тому $at + 7ap = a(t + 7p)$.

3) У цьому разі спільним числовим множником є найбільший спільний дільник чисел 10 і 15 – число 5, а спільним буквеним множником є одночлен a^2b. Отже,

$$15a^3b - 10a^2b^2 = \underline{5a^2b} \cdot 3a - \underline{5a^2b} \cdot 2b = 5a^2b(3a - 2b).$$

Відповідь: 1) $4(2m + 1)$; 2) $a(t + 7p)$; 3) $5a^2b(3a - 2b)$.

Приклад 2. Розкласти на множники:

1) $2m(b - c) + 3p(b - c)$; 2) $x(y - t) + c(t - y)$.

Розв'язання.

1) У цьому разі спільним множником є двочлен $b - c$. Отже, $2m\underline{(b - c)} + 3p\underline{(b - c)} = (b - c)(2m + 3p)$.

2) Доданки мають множники $y - t$ і $t - y$, які є протилежними виразами. Тому в другому доданку винесемо за дужки множник -1, одержимо: $c(t - y) = -c(y - t)$.

Отже, $x(y - t) + c(t - y) = x(y - t) - c(y - t) = (y - t)(x - c)$.

Відповідь: 1) $(b - c)(2m + 3p)$; 2) $(y - t)(x - c)$.

Для перевірки правильності розкладання на множники слід перемножити отримані множники. Результат має дорівнювати даному многочлену.

Розв'язування рівнянь за допомогою розкладання многочлена на множники

Розкладання многочленів на множники часто спрощує процес розв'язування рівняння.

Приклад 3. Знайти корені рівняння $5x^2 - 7x = 0$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники винесенням спільного множника за дужки: $x(5x - 7) = 0$. Враховуючи, що добуток дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю, матимемо: $x = 0$ або $5x - 7 = 0$, отже, $x = 0$ або $x = 1{,}4$.

Відповідь: 0; 1,4.

Зауважимо, що такий спосіб розв'язування рівняння можна застосовувати, лише коли права частина рівняння дорівнює 0. Рівняння $5x^2 - 7x = 12$, $5x^2 - 7x = 40$ тощо таким способом розв'язувати не можна.

Яке перетворення називають розкладанням многочлена на множники? На прикладі многочлена $ab + ac$ поясніть, як виконують розкладання на множники за допомогою винесення спільного множника за дужки.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

546. (*Усно.*) Знайдіть спільний множник у виразі:

1) $5x + 5y$; 2) $7a - 7$; 3) $ab + at$; 4) $ma - pm$.

547. (*Усно.*) Розкладіть на множники:

1) $am + an$; 2) $12x - 12y$; 3) $tm - tc$; 4) $2c + 2m$.

548. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $5a + 5c$; 2) $7x - 7u$; 3) $ap - ab$; 4) $mx + yx$.

549. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $2u - 2p$; 2) $7x + 7y$; 3) $at + bt$; 4) $ma - mc$.

550. (*Усно.*) Чи правильно виконано розкладання на множники:
1) $7a + 7 = 7a$; 2) $5m - 5 = 5(m - 5)$;
3) $2a - 2 = 2(a - 1)$; 4) $7xy - 14x = 7x(y - 2)$;
5) $5mn + 5n = 5m(n + 3)$; 6) $7ab + 8cb = 15b(a + c)$?

551. Запишіть суму у вигляді добутку:
1) $3a + 12b$; 2) $-6a - 9x$; 3) $17a + 17$;
4) $-ab - a$; 5) $14a - 21x$; 6) $8b - 8$.

552. Розкладіть на множники:
1) $4m - 16a$; 2) $-12m + 18a$; 3) $14m - 14$;
4) $-xb - b$; 5) $8p + 8$; 6) $20b - 30c$.

553. Розкладіть на множники:
1) $5ab + 5xb$; 2) $2xy - 8y$; 3) $-5ab + 5a$;
4) $7a + 21ay$; 5) $9x^2 - 27x$; 6) $3a - 9a^2$;
7) $m^2 - ma$; 8) $12ax - 4a^2$; 9) $-18xy + 24y^2$;
10) $a^2b - ab^2$; 11) $pm - p^2m$; 12) $-x^2y^2 - xy$.

554. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $7ax - 7bx$; 2) $3ab + 9a$; 3) $6xm - 8xn$;
4) $15xy + 5x$; 5) $9m^2 - 18m$; 6) $15m - 30m^2$;
7) $9xy + 6x^2$; 8) $a^2b - ab$; 9) $-p^2q - pq^2$.

555. Розкладіть на множники:
1) $x^3 - x^2$; 2) $a^4 + a^2$; 3) $m^3 - m^5$;
4) $a^3 + a^7$; 5) $3b^2 - 9b^3$; 6) $7a^3 + 6a$;
7) $4y^2 + 12y^4$; 8) $5m^5 + 15m^2$; 9) $-16a^4 - 20a$.

556. Розкладіть на множники:
1) $m^4 - m^2$; 2) $a^4 + a^5$; 3) $6a - 12a^3$;
4) $18p^3 - 12p^2$; 5) $14b^3 + 7b^4$; 6) $-25m^3 - 20m$.

557. Запишіть суму $6x^2y + 15x$ у вигляді добутку і знайдіть його значення, якщо $x = -0{,}5$, $y = 5$.

558. Запишіть вираз $12a^2b - 8a$ у вигляді добутку і знайдіть його значення, якщо $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$.

559. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $a^4 + a^3 - a^2$; 2) $m^9 - m^2 + m^7$;
3) $b^6 + b^5 - b^9$; 4) $-y^7 - y^{12} - y^3$.

560. Подайте у вигляді добутку:
1) $p^7 + p^3 - p^4$; 2) $a^{10} - a^5 + a^8$;
3) $b^7 - b^5 - b^2$; 4) $-m^8 - m^2 - m^4$.

561. Обчисліть зручним способом:
1) $132 \cdot 27 + 132 \cdot 73$; 2) $119 \cdot 37 - 19 \cdot 37$.

562. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 2x = 0$; 2) $x^2 + 4x = 0$.

563. Знайдіть корені рівняння:
1) $x^2 + 3x = 0$; 2) $x^2 - 7x = 0$.

564. Розкладіть многочлен на множники:
1) $4a^3 + 2a^2 - 8a$; 2) $9b^3 - 3b^2 - 27b^5$;
3) $16m^2 - 24m^6 - 32m^3$; 4) $-5b^3 - 20b^2 - 25b^5$.

565. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $5c^8 - 5c^7 + 10c^4$; 2) $9m^4 + 27m^3 - 81m$;
3) $8p^7 - 4p^5 + 10p^3$; 4) $21b - 28b^4 - 14b^3$.

566. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $7m^4 - 21m^2n^2 + 14m^3$; 2) $12a^2b - 18ab^2 + 30ab^3$;
3) $8x^2y^2 - 4x^3y^5 + 12x^4y^3$; 4) $-5p^4q^2 - 10p^2q^4 + 15p^3q^3$.

567. Розкладіть многочлен на множники:
1) $12a - 6a^2x^2 - 9a^3$; 2) $12b^2y - 18b^3 - 30b^4y$;
3) $16bx^2 - 8b^2x^3 + 24b^3x$; 4) $60m^4n^3 - 45m^2n^4 + 30m^3n^5$.

568. Обчисліть зручним способом:
1) $843 \cdot 743 - 743^2$; 2) $1103^2 - 1103 \cdot 100 - 1103 \cdot 3$.

569. Знайдіть значення виразу:
1) $4{,}23a - a^2$, якщо $a = 5{,}23$;
2) $x^2y + x^3$, якщо $x = 2{,}51$, $y = -2{,}51$;
3) $am^5 - m^6$, якщо $m = -1$, $a = -5$;
4) $-xy - x^2$, якщо $x = 2{,}7$, $y = 7{,}3$.

570. Знайдіть значення виразу:
1) $9{,}11a + a^2$, якщо $a = -10{,}11$;
2) $5ax^2 + 5a^2x$, якщо $a = \frac{2}{5}$; $x = \frac{3}{5}$.

571. Розкладіть вираз на множники:
1) $2p(x - y) + q(x - y)$; 2) $a(x + y) - (x + y)$;
3) $(a - 7) - b(a - 7)$; 4) $5(a + 1) + (a + 1)^2$;
5) $(x + 2)^2 - x(x + 2)$; 6) $-5m(m - 2) + 4(m - 2)^2$.

572. Подайте вираз у вигляді добутку:
1) $a(x - y) + b(y - x)$; 2) $p(b - 5) - n(5 - b)$;
3) $7x(2b - 3) + 5y(3 - 2b)$; 4) $(x - y)^2 - a(y - x)$;

5) $5(x-3)^2-(3-x)$; 6) $(a+1)(2b-3)-(a+3)(3-2b)$.

573. Розкладіть на множники:
1) $3x(b-2)+y(b-2)$; 2) $(m^2-3)-x(m^2-3)$;
3) $a(b-9)+c(9-b)$; 4) $7(a+2)+(a+2)^2$;
5) $(c-m)^2-5(m-c)$; 6) $-(x+2y)-5(x+2y)^2$.

574. Знайдіть корені рівняння:
1) $4x^2-x=0$; 2) $7x^2+28x=0$;
3) $\frac{1}{9}x^2+x=0$; 4) $\frac{2}{11}x^2-\frac{3}{11}x=0$.

575. Розв'яжіть рівняння:
1) $12x^2+x=0$; 2) $0{,}2x^2-2x=0$;
3) $\frac{1}{14}x^2-x=0$; 4) $1\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x=0$.

576. Розв'яжіть рівняння:
1) $x(3x+2)-5(3x+2)=0$; 2) $2x(x-2)-5(2-x)=0$.

577. Розв'яжіть рівняння:
1) $x(4x+5)-7(4x+5)=0$; 2) $7(x-3)-2x(3-x)=0$.

578. Доведіть, що значення виразу:
1) 17^3+17^2 кратне числу 18;
2) $9^{14}-81^6$ кратне числу 80.

579. Доведіть, що значення виразу:
1) 39^9-39^8 ділиться на 38; 2) 49^5-7^8 ділиться на 48.

580. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $(5m-10)^2$; 2) $(18a+27b)^2$.

581. Знайдіть корені рівняння:
1) $x(x-3)=7x-21$; 2) $2x(x-5)=20-4x$.

582. Розв'яжіть рівняння:
1) $x(x-2)=4x-8$; 2) $3x(x-4)=28-7x$.

583. Доведіть, що число:
1) 10^4+5^3 ділиться на 9;
2) $4^{15}-4^{14}+4^{13}$ ділиться на 13;
3) $27^3-3^7+9^3$ ділиться на 25;
4) $21^3+14^3-7^3$ ділиться на 34.

Вправи для повторення

584. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $-3x^2+7x^2-4x^2+3x^2$, якщо $x=0{,}1$;
2) $8m+5n-7m+15n$, якщо $m=7$, $n=-1$.

585. Запишіть замість «зірочок» такі коефіцієнти одночленів, щоб рівність перетворилася на тотожність:
1) $2m^2 - 4mn + n^2 + (*m^2 - *mn - *n^2) = 3m^2 - 9mn - 5n^2$;
2) $7x^2 - 10y^2 - xy - (*x^2 - *xy + *y^2) = -x^2 + 3y^2 + xy$.

586. Довжина прямокутника втричі більша за його ширину. Якщо довжину прямокутника зменшити на 5 см, то його площа зменшиться на 40 см^2. Знайдіть довжину і ширину прямокутника.

Життєва математика

587. Ширина проїзної частини 16 м. Швидкість руху Марічки 1,5 м/с. Чи встигне вона перейти пішохідний перехід на зелений сигнал світлофора, який триває 25 с? Чи встигне Марічка перевести через проїзну частину бабусю, швидкість якої 0,8 м/с?

Цікаві задачі — поміркуй одначе

588. Відомо, що $a < b < c$. Чи можуть одночасно справджуватися нерівності $|a| > |c|$ і $|b| < |c|$?

§ 14. Множення многочлена на многочлен

Правило множення многочлена на многочлен

Помножимо многочлен $a + b$ на многочлен $x + y$. Позначимо многочлен $x + y$ буквою m. Маємо:

$$(a + b)(x + y) = (a + b)m = am + bm.$$

У виразі $am + bm$ підставимо замість m многочлен $x + y$ і знову скористаємося правилом множення одночлена на многочлен:

$$am + bm = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Отже,

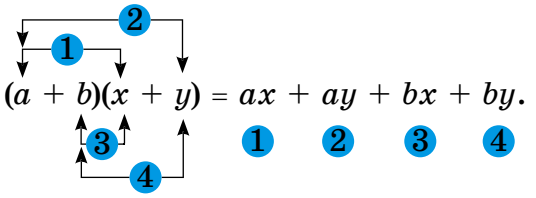
$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Многочлен $ax + ay + bx + by$ є сумою всіх одночленів, які одержано множенням кожного члена многочлена $a + b$ на кожний член многочлена $x + y$.

Приходимо до *правила множення многочлена на многочлен*.

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена й одержані добутки додати.

Процес множення многочлена на многочлен можна подати схематично:



Застосування правила множення многочлена на многочлен до розв'язування вправ

Результатом множення многочлена на многочлен є многочлен. Якщо перший із співмножників добутку містить m членів, а другий – n членів, то, перемноживши їх, одержимо многочлен, що міститиме mn членів, а після зведення подібних доданків ця кількість може зменшитися.

Приклад 1. Виконати множення $(2x - y)(4x - 3xy + 2y)$.

Розв'язання. $(2x - y)(4x - 3xy + 2y) = 2x \cdot 4x - 2x \cdot 3xy + 2x \cdot 2y - y \cdot 4x + y \cdot 3xy - y \cdot 2y = 8x^2 - 6x^2y + \underline{4xy} - \underline{4xy} + 3xy^2 - 2y^2 = 8x^2 - 6x^2y + 3xy^2 - 2y^2$.

Відповідь: $8x^2 - 6x^2y + 3xy^2 - 2y^2$.

Приклад 2. Спростити вираз $(2x - 7)(x - 3) - 2x(x + 4)$.

Розв'язання. $(2x - 7)(x - 3) - 2x(x + 4) = 2x^2 - \underline{\underline{6x}} - \underline{\underline{7x}} + 21 - 2x^2 - \underline{\underline{8x}} = -21x + 21$.

Відповідь: $-21x + 21$.

Приклад 3. Довести, що значення виразу

$$n(n - 3) - (n - 2)(n - 3) + 8$$

є парним числом для всіх натуральних значень n.

Доведення. На першому етапі виконаємо множення многочленів $(n - 2)(n - 3)$ і запишемо його в дужках. Маємо:

$$n^2 - 3n - (n^2 - 2n - 3n + 6) + 8.$$

Розкриємо дужки, перед якими стоїть знак «мінус». Отримаємо

$$n^2 - 3n - n^2 + 2n + 3n - 6 + 8 = 2n + 2 = 2(n + 1).$$

Якщо n – натуральне число, то $n + 1$ – також натуральне число. Тому значення виразу $2(n + 1)$ є парним числом для будь-якого натурального значення n. Тому і значення виразу $n(n - 3) - (n - 2)(n - 3) + 8$ є парним числом для всіх натуральних значень n.

Твердження задачі доведено.

Якщо потрібно перемножити більше ніж два многочлени, то спочатку перемножують деякі два з них, потім отриманий результат множать на третій многочлен і так само далі.

Приклад 4. Виконати множення $(x - 2)(x + 3)(x + 1)$.

Розв'язання. Спочатку перемножимо перший і другий многочлени та отриманий результат помножимо на третій многочлен:
$(x - 2)(x + 3)(x + 1) = (x^2 + 3x - 2x - 6)(x + 1) = (x^2 + x - 6) \times$
$\times (x + 1) = x^3 + x^2 + x^2 + x - 6x - 6 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$

Відповідь: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Сформулюйте правило множення многочлена на многочлен. Як перемножити більше ніж два многочлени?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

589. (*Усно.*) Знайдіть добуток:
1) $(x + y)(a + t)$; 2) $(a - 2)(b + 1)$;
3) $(7 - p)(b - c)$; 4) $(1 - m)(2 - d)$.

590. Виконайте множення:
1) $(a - b)(x + m)$; 2) $(c + n)(a + y)$;
3) $(p - t)(c - y)$; 4) $(a + 3)(b - 2)$.

591. Перемножте двочлени:
1) $(c - 7)(x + 1)$; 2) $(a + b)(p + y)$;
3) $(b + 2)(y - 4)$; 4) $(c - b)(a - x)$.

592. Спростіть вираз:
1) $(a + 3)(a + 2)$; 2) $(y - 2)(y + 4)$; 3) $(2 - p)(p + 1)$;
4) $(b - 5)(2b + 1)$; 5) $(3a - 4)(2a + 1)$; 6) $(5y - 3)(1 - 2y)$.

593. Спростіть вираз:
1) $(y + 2)(y - 3)$; 2) $(a - 3)(a - 2)$; 3) $(4 - p)(p + 3)$;
4) $(5a - 2)(a + 3)$; 5) $(4b - 3)(2b - 1)$; 6) $(7m - 2)(1 + 2m)$.

594. Подайте вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:
1) $(2 + 4x)(2y - 1)$; 2) $(x^2 + a)(x - a^2)$;
3) $(4p - 2m)(3p + 5m)$; 4) $(2x^2 - 1)(3x + 1)$;
5) $(7x^2 - 4x)(3x - 2)$; 6) $(b - 2)(3b^3 - 4b^2)$;
7) $(m^2 - 2m)(3m - 7m^2)$; 8) $(n^3 - 2n^2)(n + 7)$.

595. Спростіть вираз:
1) $(3m^2 - p)(m^2 + p)$; 2) $(5a^2 + b)(b^2 - 4a^2)$;
3) $(12a^2 - 3)(5a - 7a^2)$; 4) $(2a^3 - 3a^2)(a + 5)$.

596. Виконайте множення:

1) $(m - n)(a + b - 1)$;
2) $(3 - a)(p + 5 - m)$;
3) $(a + x - 3)(n + 2)$;
4) $(c - d - 7)(x + y)$.

597. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(a + b)(m - 2 + p)$;
2) $(5 - x)(m - n - p)$;
3) $(x + y - 2)(a - m)$;
4) $(p + q + 3)(-a - x)$.

598. Виконайте дії:

1) $(2x + 7)(2x - 4) + 28$;
2) $5m^2 + (3 - 5m)(m + 2)$;
3) $(a + 7)(a - 2) - a(a + 5)$;
4) $(2b + 1)(3b - 1) - (6b^2 - 1)$.

599. Спростіть вираз:

1) $(2p - 1)(3p + 5) - 6p^2$;
2) $12 + (3m - 2)(5m + 6)$;
3) $(m + 3)(m - 5) - m(m - 2)$;
4) $(3a - 2)(4a + 1) - (12a^2 - 2)$.

600. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду і знайдіть його значення:

1) $(2a - 3)(3a + 5) - 6a^2$, якщо $a = 13{,}5$;
2) $(5x - 1)(1 - 2x) - 7x$, якщо $x = -2$.

601. Спростіть вираз і обчисліть його значення:

1) $(7x + 3)(2x - 1) - 14x^2$, якщо $x = -8$;
2) $(2a + 4)(1 - 3a) + 10a$, якщо $a = -1$.

602. Виконайте дії:

1) $x(x - 5) + (x + 4)(x + 2)$;
2) $(m + 3)(m - 4) - m(m - 1) + 5$;
3) $(a + 3)a - (a + 1) + (4 - a)(4 + a)$;
4) $(y + 2)(y - 3) - 2y(1 - y)$.

603. Спростіть вираз:

1) $(5x - 1)(4x + 7) - 4x(5x - 8)$;
2) $(a + 3)(a - 2) - a(a + 9) + 6$;
3) $2x(3x - 1) + (x - 9)(5x - 6)$;
4) $(2x + 3)(5x - 4) - 2x(x - 3) - 13(x - 1)$.

604. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 1)(x + 2) - x^2 = -8$;
2) $(3x + 1)(5 - 2x) + 6x^2 = 5$.

605. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)(2x - 1) - 2x^2 = 7$;
2) $10x^2 + (5x - 1)(4 - 2x) = -4$.

606. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:

1) $(a^2 + ab - b^2)(a - b)$;
2) $(x^2 - xy - y^2)(x + y)$;
3) $(m - n)(-m^2 - 3mn + n^2)$;
4) $(p - 2)(p^2 + 3p - 4)$;
5) $(9 - 4m - m^2)(m - 2)$;
6) $(y^2 - 3y - 7)(4y - 2)$.

607. Виконайте множення та спростіть одержаний вираз:
1) $(a + b)(-a^2 + ab - b^2)$; 2) $(x - y)(-x^2 - xy + y^2)$;
3) $(7a^2 + a - 1)(a + 1)$; 4) $(2m^2 - 3m - 2)(m + 5)$.

608. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:
1) $(3m + 2n)(9m^2 - 6mn + 4n^2)$;
2) $(4x^2 + 10xy + 25y^2)(2x - 5y)$;
3) $(-x^2 + 3xa - a^2)(x + 2a)$;
4) $(3m - x)(5mx - m^2 + x^2)$.

609. Подайте добуток у вигляді многочлена:
1) $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$; 2) $(9a^2 - 2ab - b^2)(3a + 2b)$.

610. Виконайте дії:
1) $9m^2 - (3m - 2)(3m + 7)$; 2) $18y - (3y + 1)(6y + 4)$;
3) $(a + 4)a - (a + 2)(a - 2)$; 4) $(b + 7)(b + 1) - (b + 8)(b - 1)$.

611. Спростіть вираз:
1) $8x - (x + 5)(x + 3)$; 2) $a(a + 8) - (a + 2)(a - 5)$;
3) $12x^2 + 5 - (4x + 7)(3x - 1)$;
4) $(x + 1)(x - 5) - (x + 3)(x - 7)$.

612. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:
1) $a^2(a - 2)(a + 5)$; 2) $-5m^2(m - 1)(2 - m)$;
3) $-4x^3(2x - 3)(x - x^2)$; 4) $0{,}2b^2(5b + 10)(b^2 - 2)$.

613. Розкрийте дужки і спростіть одержаний вираз:
1) $m^2(m - 4)(m + 2)$; 2) $-a^2(2a - 3)(3a + 7)$;
3) $-5b^3(2b + b^2)(b - 1)$; 4) $0{,}5x^2(2x - 6)(x^2 + x)$.

614. Доведіть тотожність:
1) $(m - 3)(m + 7) - 10 = (m + 8)(m - 4) + 1$;
2) $(2x - 1)(3x + 5) + 9x = (3x - 1)(2x + 5) + 3x$.

615. Доведіть, що для кожного значення змінної a:
1) значення виразу $(a - 8)(a + 3) - (a - 7)(a + 2)$ дорівнює -10;
2) значення виразу $(a^2 - 2)(a^2 + 5) - (a^2 - 4)(a^2 + 4) - 3a^2$ дорівнює 6.

616. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:
1) $(m - 7)(m + 1) - (m + 2)(m - 8)$;
2) $a^2(a^2 - 1) - (a^2 - 2)(a^2 + 3) + 2a^2$.

617. Доведіть, що для будь-якого значення змінної a значення виразу $(a + 7)(a - 3) - 4(a - 8)$ є додатним числом.

618. Запишіть вираз у вигляді многочлена:
1) $(x - y)^2$; 2) $(p + 2a)^2$; 3) $(4x - 3y)^2$; 4) $(7a + 2b)^2$.

619. Перетворіть вираз на многочлен:
1) $(2a - 3b)^2$; 2) $(4x + 5y)^2$.

620. Спростіть вираз і обчисліть його значення:
1) $(2x^2 - x)(3x^2 + x) - (x^2 + x)(6x^2 - 2x)$, якщо $x = -2$;
2) $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2) - 8b^3$, якщо $a = 3$, $b = -2015$.

621. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(x - 9)(x + 9) - (x - 3)(x + 27)$, якщо $x = 1\frac{1}{8}$;
2) $8a^3 - (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$, якщо $a = -\frac{7}{8}$, $b = \frac{1}{3}$.

622. Знайдіть корені рівняння:
1) $4x - (x + 2)(x - 3) = (5 - x)(x + 3)$;
2) $2x(x + 1) - (x + 2)(x - 3) = x^2 + 7$.

623. Розв'яжіть рівняння:
1) $x(2x - 5) - x^2 = 2 - (x - 1)(2 - x)$;
2) $2x^2 - (x + 1)(x + 19) = (x + 3)(x - 2) + 8$.

624. Замість «зірочки» запишіть такі одночлени, щоб рівність стала тотожністю:
1) $(x - 1)(* + 3) = x^2 + * - *$; 2) $(y + 2)(y - *) = * + y - *$.

625. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу:
1) $(n + 2)(n + 3) - n(n - 1)$ є кратним числу 6;
2) $(n - 5)(n + 8) + (n + 1)(2n - 5) + 46$ при діленні на 3 дає в остачі 1.

626. Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо квадрат меншого з них на 44 менший від добутку двох інших.

627. Дано два добутки $27 \cdot 18$ і $12 \cdot 42$. На яке одне й те саме число потрібно зменшити кожен із чотирьох множників, щоб значення нових добутків стали між собою рівними?

628. Дано два добутки $22 \cdot 15$ і $27 \cdot 12$. На яке одне й те саме число потрібно збільшити кожен із чотирьох множників, щоб значення нових добутків стали між собою рівними?

4 **629.** Виконайте множення:
1) $(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 3a - 7)$; 2) $(7 - 2b + 3b^2)(2b^2 - 2b - 1)$.

630. Виконайте множення:
1) $(x^2 - x - 1)(x^2 + 3x + 5)$; 2) $(7 - a - 2a^2)(a^2 + 3a - 1)$.

631. Знайдіть чотири послідовних цілих числа, якщо добуток двох більших з них на 78 більший за добуток двох менших.

632. Знайдіть чотири послідовних натуральних числа, якщо добуток двох менших з них на 102 менший від добутку двох більших.

633. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:
1) $(a + 2)(a - 1)(a + 3)$; 2) $(a - 4)(a - 7)(a + 1)$.

634. Виконайте множення:
1) $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$;
2) $(b - 1)(b^4 + b^3 + b^2 + b + 1)$.

635. Периметр прямокутника дорівнює 60 см. Якщо його довжину збільшити на 1 см, а ширину зменшити на 3 см, то його площа зменшиться на 45 см^2. Знайдіть довжину і ширину цього прямокутника.

Вправи для повторення

636. Швидкість автомобіля – 70 км/год, а мотоцикла – 50 км/год. Шлях від села до міста мотоцикл долає на 2 год довше, ніж автомобіль. Знайдіть відстань від села до міста.

637. Знайдіть додатне число, яке після піднесення до квадрата:
1) збільшується в 4 рази; 2) зменшується в 5 разів.

638. У першій каністрі було втричі більше бензину, ніж у другій. Коли з першої каністри перелили 2 л у другу, то об'єм бензину другої каністри становив $\frac{5}{7}$ від об'єму першої. Скільки бензину було в кожній каністрі спочатку?

639. Подайте вираз у вигляді різниці двох многочленів, один з яких містить змінну x, а другий її не містить:
1) $(5x^2 - 8b + a) - (b^2 - 5x + 1) - (2b - x^2 + 7x)$;
2) $(8mx^2 + 7mn^2 - p) - (x^2 + mx^2 + 2p) - 17x$.

Життєва математика

640. Заробітна плата Тетяни пропорційна кількості відпрацьованих годин. За місяць вона відпрацювала 170 год і отримала 8500 грн. Скільки годин має відпрацювати Тетяна в наступному місяці, щоб отримати 9250 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

641. Обчисліть $2\frac{124}{125} \cdot 4\frac{2}{129} + 3\frac{1}{125} \cdot 5\frac{2}{129} - \frac{12}{129}$.

§ 15. Розкладання многочлена на множники способом групування

Спосіб групування

У § 13 ми ознайомилися з розкладанням многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки. Існують й інші способи розкладання многочленів на множники, наприклад, ***спосіб групування***.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен

$$ab - 5a + 2b - 10.$$

Розв'язання. У всіх членів цього многочлена немає спільного множника. Тому тут доцільно застосувати саме спосіб групування. Розіб'ємо доданки на дві групи так, *щоб доданки в кожній групі мали спільний множник*:

$$ab - 5a + 2b - 10 = (ab - 5a) + (2b - 10).$$

З кожної групи винесемо спільний множник за дужки:

$$(ab - 5a) + (2b - 10) = a(b - 5) + 2(b - 5).$$

Тепер одержаний для обох груп спільний множник $b - 5$ винесемо за дужки:

$$a\underline{(b - 5)} + 2\underline{(b - 5)} = (b - 5)(a + 2).$$

Отже, $ab - 5a + 2b - 10 = (b - 5)(a + 2)$.

Згрупувати доданки цього многочлена можна було й у інший спосіб.

А саме: $ab - 5a + 2b - 10 = (ab + 2b) + (-5a - 10) = b\underline{(a + 2)} - 5\underline{(a + 2)} = (a + 2)(b - 5)$.

Відповідь: $(b - 5)(a + 2)$.

Дійшли висновку, що для розкладання многочлена на множники способом групування варто виконувати дії в такій послідовності:

1) розбити многочлен на групи доданків, кожна з яких містить спільний множник;
2) з кожної групи винести спільний множник за дужки;
3) спільний для всіх груп множник, що утворився, винести за дужки.

Для перевірки правильності розкладання слід перемножити одержані множники. Добуток цих множників має дорівнювати даному многочлену.

Застосування способу групування для розкладання на множники многочленів, що містять шість або три доданки

Деякі многочлени, що містять шість або три доданки (членів многочлена) можна розкласти на множники за допомогою способу групування.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен

$$2a + 2b - m + am + bm - 2.$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Згрупуємо члени многочлена у три групи по два доданки так, щоб доданки в кожній групі мали спільний множник. Матимемо:

$2a + 2b - m + am + bm - 2 = (2a + am) + (2b + bm) + (-m - 2) =$
$= a\underline{(2 + m)} + b\underline{(2 + m)} - 1\underline{(2 + m)} = (2 + m)(a + b - 1).$

2-й спосіб. Згрупуємо тепер члени многочлена у дві групи по три доданки так, щоб доданки в кожній групі мали спільний множник. Матимемо:

$2a + 2b - m + am + bm - 2 = (2a + 2b - 2) + (am + bm - m) =$
$= 2\underline{(a + b - 1)} + m\underline{(a + b - 1)} = (a + b - 1)(2 + m).$

Відповідь: $(2 + m)(a + b - 1)$.

Приклад 3. Розкласти на множники тричлен $x^2 - 6x + 8$.

Розв'язання. Враховуючи, що $-6x = -2x + (-4x)$, можемо переписати многочлен як суму чотирьох доданків, згрупувати їх і далі розкласти на множники:

$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2x - 4x + 8 = (x^2 - 2x) + (-4x + 8) =$
$= x\underline{(x - 2)} - 4\underline{(x - 2)} = (x - 2)(x - 4).$

Відповідь: $(x - 2)(x - 4)$.

Якби ми подали доданок $-6x$ у вигляді суми двох якихось інших доданків, то не змогли б застосувати групування й розкласти на множники. Пропонуємо переконатися в цьому самостійно. «Секрет» у тому, що саме доданки $-2x$ і $-4x$ сприяли появі спільного множника після розбиття многочлена на групи.

Яку послідовність дій застосовують для розкладання многочлена на множники способом групування?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

642. У многочлені $ca - 2c + 5a - 10$ назвіть групу зі спільним множником a і групу зі спільним множником 2.

643. Закінчіть розкладання многочлена на множники:

$xy + yt - 2x - 2t = (xy - 2x) + (yt - 2t) = x(y - 2) + t(y - 2) = \ldots$

644. Закінчіть розкладання многочлена на множники:

$ab - cd - ad + cb = (ab - ad) + (cb - cd) = a(b - d) + c(b - d) = \ldots$

2 **645.** Подайте вираз у вигляді добутку многочленів:

1) $a(b + c) + 3b + 3c$;
2) $p(x - y) + 7x - 7y$;
3) $m(t - 5) + t - 5$;
4) $b(m - c) + c - m$.

646. Розкладіть на множники:

1) $c(x - y) + 3x - 3y$;
2) $a(c + m) + 9c + 9m$;
3) $x(c + 5) + c + 5$;
4) $y(p - 3) + 3 - p$.

647. Розкладіть многочлен на множники:

1) $ax + ay + 6x + 6y$;
2) $5m - 5n + pm - pn$;
3) $9p + mn + 9n + mp$;
4) $ab + ac - b - c$;
5) $1 - by - y + b$;
6) $ma + 2a - 2m - 4$.

648. Подайте у вигляді добутку многочленів:

1) $ab + 5a + bm + 5m$;
2) $mp - b + bp - m$;
3) $am - b + m - ab$;
4) $cm - 3dm + cp - 3dp$.

649. Запишіть вираз $ab - ac + 2b - 2c$ у вигляді добутку та знайдіть його значення, якщо $a = -1$; $b = 5{,}7$; $c = 6{,}7$.

650. Запишіть вираз $5x - 5y + xt - yt$ у вигляді добутку та знайдіть його значення, якщо $x = 7{,}2$; $y = 6{,}2$; $t = -4{,}5$.

3 **651.** Подайте вираз у вигляді добутку многочленів:

1) $a^3 + a^2 + a + 1$;
2) $b^5 - b^3 - b^2 + 1$;
3) $c^4 + 3c^3 - c - 3$;
4) $a^6 - 5a^4 - 3a^2 + 15$;
5) $m^2 - mn - 8m + 8n$;
6) $ab - 9b + b^2 - 9a$;
7) $7t - ta + 7a - t^2$;
8) $xy - ty - y^2 + xt$.

652. Розкладіть многочлен на множники:

1) $x^2 + bx - b^2y - bxy$;
2) $a^2b + c^2 - abc - ac$;
3) $7a^3m + 14a^2 - 6bm - 3am^2b$;
4) $21x + 8tm^3 - 24m^2 - 7xtm$.

653. Подайте многочлен у вигляді добутку:

1) $b^2 + xb - x^2y - xby$;
2) $m^2 + 7m - bm - 7b$;
3) $4a - ax + 4x - x^2$;
4) $ma - mb - m^2 + ab$.

654. Обчисліть значення виразу найзручнішим способом:

1) $157 \cdot 37 + 29 \cdot 157 + 143 \cdot 42 + 24 \cdot 143$;

2) $9\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - 16 \cdot 4{,}5 + 10\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - 16$.

655. Знайдіть значення виразу, попередньо розклавши вираз на множники:

1) $5m^2 - 5mn - 7m + 7n$, якщо $m = 1{,}4$; $n = -5{,}17$;

2) $3a^3 - 2b^3 - 6a^2b^2 + ab$, якщо $a = \frac{1}{3}$; $b = \frac{2}{3}$.

656. Знайдіть значення виразу, попередньо розклавши вираз на множники:

1) $27x^3 + x^2 + 27x + 1$, якщо $x = -\frac{1}{27}$;

2) $5p + px^2 - p^2x - 5x$, якщо $p = 2{,}5$; $x = 2{,}4$.

657. Запишіть вираз у вигляді добутку:

1) $45x^3y^4 - 9x^5y^3 - 15x^2y^2 + 3x^4y$;

2) $2{,}1mn^2 - 2{,}8mp^2 - 2{,}7n^3 + 3{,}6np^2$.

658. Розкладіть на множники:

1) $8m^2c - 6m^2x - 16cx^3 + 12x^4$;

2) $1{,}2xy^3 + 1{,}6x^3y^2 - 2x^7y - 1{,}5x^5y^2$.

659. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x + 40 = 8x$;

2) $5y^3 + 2y^2 + 5y + 2 = 0$.

660. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 7x - 7 = x$;

2) $7y^3 + y^2 + 7y + 1 = 0$.

661. Розкладіть на множники:

1) $at^2 - ap + t^3 - tp - bt^2 + bp$;

2) $ax^2 + ay^2 - mx^2 - my^2 + m - a$;

3) $mb - m + 7 - 7b - 7m^2 + m^3$;

4) $6ax + 3ay - az - 6bx - 3by + bz$.

662. Розкладіть на множники:

1) $a^2b + a + ab^2 + b + 9ab + 9$;

2) $8ax + 4bx - 4x + 10am + 5bm - 5m$.

663. Розкладіть на множники тричлен:

1) $x^2 + 5x + 4$;

2) $x^2 - 5x + 4$;

3) $x^2 + x - 6$;

4) $a^2 + 4ab + 3b^2$.

664. Розкладіть на множники:

1) $x^2 - 6x + 5$;

2) $x^2 - x - 6$;

3) $x^2 + 2x - 15$;

4) $a^2 + 5ab + 6b^2$.

Вправи для повторення

665. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $0{,}8(a - 5) - 0{,}6(2 - a)$, якщо $a = -5$;

2) $\frac{4}{7}(7x - 14y) - \frac{2}{9}(18x - 27y)$, якщо $x = 2024$, $y = -\frac{1}{2}$.

666. Знайдіть корінь рівняння:
1) $6x(x - 1) - 2x(3x - 5) = -8$;
2) $5(2 - x^2) - 4x(x - 1) = 3x(1 - 3x)$.

Життєва математика

667. Головна редакторка видавництва дала термінову роботу двом набірникам тексту. Перший набирає сторінку за 4 хв, другий – за 6 хв. У якому відношенні вони мають розподілити між собою роботу, щоб виконати її якомога швидше?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

668. Подайте вираз у вигляді многочлена:
1) $(x + 3)(x + 3)$;
2) $(y - 2)(y - 2)$;
3) $(7 - m)(7 - m)$;
4) $(5 + a)(5 + a)$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

669. Чи існують такі натуральні значення змінних x і y, для яких $x^5 + y^5 = 33^6$?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Укажіть вираз, що не є многочленом.

А. $\frac{a}{a-5}$ **Б.** $x^2 - 2x + 7$ **В.** $-b - 19$ **Г.** $6c^2$

2. $k(n - m) = \ldots$

А. $kn - m$ **Б.** $n - km$ **В.** $kn + km$ **Г.** $kn - km$

3. $4c + 8 = \ldots$

А. $2(c + 4)$ **Б.** $4(c + 2)$ **В.** $8(c + 1)$ **Г.** $4(c - 2)$

2 **4.** Якому з многочленів дорівнює вираз $(x - 5)(x + 2)$?

А. $x^2 + 3x - 10$ **Б.** $x^2 - 3x - 10$
В. $x^2 + 3x + 10$ **Г.** $x^2 - 3x - 3$

5. Подайте вираз $(3m^2 - m) + (4m^2 - 5) - (7m^2 + 3)$ у вигляді многочлена стандартного вигляду.

А. $14m^2 - m - 2$ **Б.** $-m - 2$
В. $-m - 8$ **Г.** $8 - m$

6. Розкладіть вираз $am - an - 2m + 2n$ на множники.

А. $(m - n)(a - 2)$ **Б.** $(m - n)(a + 2)$
В. $(m + n)(a - 2)$ **Г.** $(m - a)(n - 2)$

3 **7.** Для якого значення x значення різниці одночлена $8x$ і многочлена $3x - 4x^2 + 2$ дорівнює значенню многочлена $3x + 4x^2 - 4$?

А. 2 **Б.** 1 **В.** -1 **Г.** 0

8. Обчисліть $297 \cdot 397 - 397^2$ найзручнішим способом.

А. 39 700 **Б.** $-39\,700$ **В.** $-29\,700$ **Г.** 29 700

9. Знайдіть значення виразу $(x - 5)(x + 2) - (x - 7)(x + 4)$, якщо $x = 10{,}2$.

А. 18,2 **Б.** 18 **В.** 28,2 **Г.** 7,8

4 **10.** Розв'яжіть рівняння $x^2 + 7x = 2(x + 7)$.

А. -7; 2 **Б.** -7 **В.** 2 **Г.** -2; 7

11. Значення виразу $27^4 - 3^9$ є кратним числу ...

А. 7 **Б.** 11 **В.** 13 **Г.** 17

12. Знайдіть найбільше із чотирьох послідовних парних чисел, якщо добуток першого і третього чисел на 44 менший від добутку двох інших.

А. 10 **Б.** 6 **В.** 18 **Г.** 14

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

2 **13.** Установіть відповідність між виразами (1–3) та многочленами, які їм тотожно дорівнюють (А–Г).

Вираз	*Многочлен*
1. $(3x^3 + x^2 - 2x) - (2x^3 - 4x^2 - 2x + 6)$	**А.** $x^3 + 5x^2$
2. $2x^2(3x - 5) - 5x(x^2 - 3x)$	**Б.** $x^3 + 5x^2 - 6$
3. $(x^2 + 6x)(x - 1)$	**В.** $x^3 + 5x^2 - 6x$
	Г. $x^3 + 5x - 6$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 10–15

1 **1.** Виконайте множення:
1) $m(a - b + 3)$; 2) $-p(x + y - 4)$.

2. Винесіть за дужки спільний множник:
1) $7a - 7b$; 2) $xm + ym$.

3. Виконайте множення:
1) $(a + 2)(x - 3)$; 2) $(b - 5)(c - m)$.

2 **4.** Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:
1) $(2x^2 - x) + (3x - 5) - (x^2 - 5)$;
2) $-2xy(x^2 - 3xy + y^2)$.

5. Розкладіть многочлен на множники:
1) $9a^2 - 12ab$; 2) $7x - 7y + ax - ay$.

6. Спростіть вираз $(x + 5)(x - 2) - x(x + 3)$.

3 **7.** Розв'яжіть рівняння $(2x + 3)(3x - 7) = x(6x - 3) - 17$.

8. Розкладіть многочлен на множники:
1) $9m^3 - 3m^4 - 27m^8$; 2) $m^2 + 2n - 2m - mn$.

4 **9.** Знайдіть чотири послідовних цілих числа, добуток двох менших з яких на 90 менший від добутку двох більших.

Додаткові вправи

4 **10.** Доведіть, що сума п'яти послідовних натуральних чисел ділиться на 5.

11. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 5x = 4x - 20$.

12. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:
1) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 3x - 1)$; 2) $(a + 3)(a - 5)(a - 1)$.

§ 16. Квадрат суми і квадрат різниці

Формула квадрата суми

Піднесемо до квадрата двочлен $a + b$:

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Отже,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Цю тотожність називають ***формулою квадрата суми.*** Вона дає змогу підносити до квадрата суму двох довільних виразів не

за правилом множення многочленів, а *скорочено*: одразу записувати квадрат $(a + b)^2$ у вигляді $a^2 + 2ab + b^2$. Тому формулу квадрата суми називають ще *формулою скороченого множення*. Читають її так:

квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу, плюс подвоєний добуток першого на другий, плюс квадрат другого виразу.

Приклад 1. Подати вираз $(3x + 5y)^2$ у вигляді многочлена.

Розв'язання.

$(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2.$

Якщо проміжні дії легко виконати усно, то можна одразу записати відповідь:

$(3x + 5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2.$

Відповідь: $(3x + 5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2.$

Формула квадрата різниці

Піднесемо тепер до квадрата двочлен $a - b$:

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

Отже,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Отримали ***формулу квадрата різниці***, яка також є формулою скороченого множення. Читають її так:

квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу, мінус подвоєний добуток першого на другий, плюс квадрат другого виразу.

Зауважимо, що формулу квадрата різниці можна отримати, якщо переписати різницю $a - b$ у вигляді суми $a + (-b)$:

$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

Приклад 2. Піднести двочлен $4a - 7b$ до квадрата.

Розв'язання. За формулою квадрата різниці маємо:

$(4a - 7b)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 7b + (7b)^2 = 16a^2 - 56ab + 49b^2.$

Відповідь: $(4a - 7b)^2 = 16a^2 - 56ab + 49b^2.$

Перетворення виразів за допомогою формул квадрата суми і квадрата різниці

Нам уже відомо, що $x^2 = (-x)^2$, тому, підносячи до квадрата вирази вигляду $-a - b$ і $-a + b$, доцільно попередньо замінити їх на протилежні їм вирази:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(-a + b)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Приклад 3. Перетворити на многочлен:

1) $(-x - 6m)^2$; 2) $(-2p^2 + 9q)^2$.

Розв'язання. 1) $(-x - 6m)^2 = (x + 6m)^2 = x^2 + 12xm + 36m^2$;

2) $(-2p^2 + 9q)^2 = (2p^2 - 9q)^2 = 4p^4 - 36p^2q + 81q^2$.

Відповідь: 1) $x^2 + 12xm + 36m^2$; 2) $4p^4 - 36p^2q + 81q^2$.

Приклад 4. Спростити вираз $(-5m^3 - 2n^2)^2 + (2m^3 - 5n^2)^2$.

Розв'язання. $(-5m^3 - 2n^2)^2 + (2m^3 - 5n^2)^2 = (5m^3 + 2n^2)^2 + (2m^3 - 5n^2)^2 = 25m^6 + \underline{\underline{20m^3n^2}} + \underline{\underline{4n^4}} + 4m^6 - \underline{\underline{20m^3n^2}} + \underline{\underline{25n^4}} = 29m^6 + 29n^4$.

Відповідь: $29m^6 + 29n^4$.

Обчислення квадратів чисел за допомогою формул квадрата суми і квадрата різниці

Розглянемо, як застосовують формули квадрата суми і квадрата різниці для обчислення квадратів чисел.

Приклад 5. Обчислити: 1) $(50 + 1)^2$; 2) $5{,}8^2$.

Розв'язання. 1) $(50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$;

2) $5{,}8^2 = (6 - 0{,}2)^2 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 = 36 - 2{,}4 + 0{,}04 = 33{,}64$.

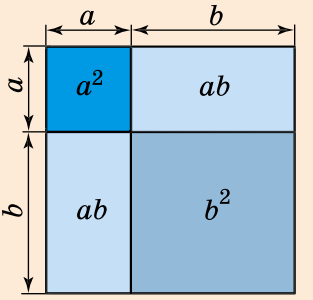
Відповідь: 1) 2601; 2) 33,64.

А ще раніше...

Деякі правила скороченого множення були відомі давнім китайським і грецьким математикам понад 4 тисячі років тому. Тоді вони формулювали ці правила не за допомогою букв та символів, а словами, і доводили геометрично, тобто тільки для додатних чисел.

Наприклад, тотожність $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ у другій книзі «Начал» Евкліда (III ст. до н. е.) формулювалася так: «Якщо пряма лінія (мається на увазі відрізок) як-небудь розсічена, то квадрат на всій прямій дорівнює квадратам на відрізках разом із двічі взятим прямокутником, що міститься між відрізками». Тут «квадрат на всій прямій» слід розуміти як $(a + b)^2$, «квадрати на відрізках» як a^2 і b^2, «прямокутник, що міститься між відрізками» як ab.

Геометричний зміст цієї тотожності зображено на малюнку.



Запишіть і прочитайте формулу квадрата суми. ○ Запишіть і прочитайте формулу квадрата різниці. ○ Як піднести до квадрата вирази $-a - b$ і $-a + b$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

670. (*Усно.*) Які з виразів є квадратами суми двох виразів, а які — квадратами різниці:

1) $x^2 + y^2$; 2) $(a - b)^2$; 3) $p^2 - c^2$; 4) $(m + 2)$;
5) $(x + 3)^2$; 6) $(b - 7)^3$; 7) $(4 - p)^2$; 8) $(x + y)^2$?

671. (*Усно.*) Які з рівностей є правильними:

1) $(b - 2)^2 = b^2 - 2^2$; 2) $(a + 3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2$;
3) $(x + 5)^2 = x^2 + x \cdot 5 + 5^2$; 4) $(7 - y)^2 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot y + y^2$?

672. Які з рівностей є правильними:

1) $(a + 7)^2 = a^2 + 7^2$; 2) $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$;
3) $(2 - y)^2 = 2^2 - 2 \cdot y + y^2$; 4) $(b + 3)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot 3 + 3^2$?

673. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(a + m)^2$; 2) $(b - x)^2$; 3) $(x + p)^2$; 4) $(m - y)^2$.

674. Піднесіть до квадрата:

1) $(b - p)^2$; 2) $(x + t)^2$; 3) $(c - a)^2$; 4) $(y + d)^2$.

675. (*Усно.*) Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $(a + 4)^2$; 2) $(x - 3)^2$; 3) $(b + 2)^2$; 4) $(m - 5)^2$.

676. Піднесіть до квадрата:

1) $(x - 9)^2$; 2) $(a + 3)^2$; 3) $(10 - m)^2$;
4) $(7 + y)^2$; 5) $(c - 0{,}2)^2$; 6) $(0{,}8 + x)^2$.

677. Перетворіть на многочлен:

1) $(2x + 5)^2$; 2) $(7b - 4)^2$; 3) $(10x + 3y)^2$;
4) $(9a - 4b)^2$; 5) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^2$; 6) $(5m - 0{,}2t)^2$.

678. Перетворіть на многочлен:

1) $(a - 3)^2$; 2) $(x + 9)^2$; 3) $(c + 0{,}3)^2$;
4) $(2a - 5)^2$; 5) $(4y + 3)^2$; 6) $(9a - 8b)^2$;
7) $(4b + 7a)^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}m - 2n\right)^2$; 9) $(0{,}5p + 2q)^2$.

679. Виконайте дії:

1) $(3a + 1)^2 - 1$; 2) $12ab + (2a - 3b)^2$;
3) $(4a + 8)^2 - 16(a^2 + 4)$; 4) $-4y^2 + (5x - 2y)^2 - 25x^2$.

680. Спростіть: 1) $20a + (a - 10)^2$; 2) $(3m + 5)^2 - 9m^2$;
3) $(x + 4)^2 - 8(x + 2)$; 4) $(2a - 7b)^2 - (4a^2 + 49b^2)$.

681. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:

1) $(a - 2)^2 + a(a + 4)$; 2) $(b + 1)(b + 2) + (b - 3)^2$.

682. Спростіть вираз:

1) $(m - 5)^2 - m(m - 10)$; 2) $(x + 4)^2 + (x + 1)(x - 9)$.

683. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)^2 - x^2 = 12$; 2) $(y - 2)^2 = y^2 - 2y$.

684. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 4)^2 - x^2 = 24$; 2) $(y + 5)^2 = 5y + y^2$.

685. Заповніть у зошиті таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Квадрат різниці виразів I і II
$2x$	b	$4x^2 - 4xb + b^2$
	$7b$	$4x^2 - 28xb + 49b^2$
$3x$		$9x^2 - 2xb + \frac{1}{9}b^2$
$0{,}5x$	$4b$	

686. Заповніть у зошиті таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Квадрат суми виразів I і II
$3m$	a	$9m^2 + 6ma + a^2$
$5m$		$25m^2 + 20ma + 4a^2$
	$4a$	$\frac{1}{16}m^2 + 2ma + 16a^2$
$0{,}6m$	$5a$	
		$\frac{1}{9}m^2 + 6ma + 81a^2$

687. За формулою квадрата суми або квадрата різниці обчисліть:
1) $(100 + 2)^2$; 2) 41^2; 3) 99^2; 4) $3{,}8^2$.

688. Обчисліть, використовуючи формули квадрата суми або квадрата різниці:
1) $(40 - 1)^2$; 2) 89^2; 3) 501^2; 4) $4{,}02^2$.

689. Серед виразів $(x - y)^2$, $(x + y)^2$, $(-y + x)^2$, $(-x - y)^2$ знайдіть ті, що є тотожно рівними виразу:
1) $(y + x)^2$; 2) $(y - x)^2$.

690. Подайте у вигляді многочлена:
1) $(-p + 5)^2$; 2) $(-a - 7)^2$; 3) $(-p - 2m)^2$; 4) $(-3b + c)^2$.

691. Перетворіть на многочлен:
1) $(-a + 3)^2$; 2) $(-b - 5)^2$; 3) $(-4m + p)^2$; 4) $(-a - 3b)^2$.

692. Перетворіть на многочлен:
1) $(-9b + 4m)^2$; 2) $(-7a - 10b)^2$; 3) $(-0{,}5m - 0{,}4p)^2$;
4) $\left(-1\frac{1}{2}x + 6y\right)^2$; 5) $(0{,}04p - 50q)^2$; 6) $(-0{,}25c - 0{,}2d)^2$.

693. Подайте у вигляді многочлена:
1) $(-3a + 5x)^2$; 2) $(-8x - 5y)^2$; 3) $(-4b - 0{,}5y)^2$;
4) $\left(8x + \frac{1}{16}y\right)^2$; 5) $(-0{,}02a - 10b)^2$; 6) $(-0{,}15m + 0{,}1n)^2$.

694. Виконайте дію:
1) $(a^2 - 9)^2$; 2) $(7 - y^3)^2$; 3) $(2a + c^4)^2$;
4) $(-5a + b^3)^2$; 5) $(4a^2 - 5m^3)^2$; 6) $\left(\frac{1}{3}p^4 + 9q^3\right)^2$.

695. Піднесіть до квадрата:
1) $(a^2 + 2a)^2$; 2) $\left(\frac{1}{4}m^3 - 12m\right)^2$; 3) $\left(1\frac{1}{3}p^7 + 3p^2\right)^2$;
4) $(7ab - 2b^3)^2$; 5) $\left(10p^6 + \frac{1}{2}p^4a^3\right)^2$; 6) $(0{,}2m^2n + 15m^3n^4)^2$.

696. Подайте вираз у вигляді многочлена:
1) $(b^7 - 5)^2$; 2) $(a^3 + 2b^4)^2$; 3) $\left(8x^6 - \frac{1}{4}x^2\right)^2$;
4) $\left(6m^3 + 1\frac{1}{6}m^5\right)^2$; 5) $(7a^2 + 8ap^3)^2$; 6) $\left(\frac{1}{2}b^2m^3 - \frac{1}{3}b^3m^2\right)^2$.

697. Спростіть вираз:
1) $(3a - 4b)^2 - (3a + 4b)^2$;
2) $(2a + 3b)^2 + (a - 6b)^2$;
3) $a(2a - 1)^2 - 4a(a + 5)^2$;
4) $12m^2 - 3(2m - n)^2 - 12mn$.

698. Виконайте дії:
1) $(7a + 9b)^2 - (7a - 9b)^2$;
2) $(10a - 3b)^2 + (6a + 5b)^2$;
3) $18x^2 - 12xy - 2(3x - y)^2$;
4) $a(9a - 1)^2 - 81a(a - 2)^2$.

699. Які одночлени потрібно записати замість «зірочки», щоб утворилася тотожність:
1) $(* + 2a)^2 = b^2 + 4ab + 4a^2$;
2) $(2b - *)^2 = 4b^2 + 9 - 12b$;
3) $(3a^4 + *)^2 = * + 30a^4 + 25$;
4) $(5x^2 - *)^2 = 25x^4 - * + 9m^2$?

700. Замініть «зірочку» одночленом так, щоб одержати тотожність:
1) $(* - 7)^2 = x^2 - 14x + 49$;
2) $(4p^3 + *)^2 = * + 9 + 24p^3$.

701. Подайте вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:
1) $(x - 2)(x + 1)^2$;
2) $(x + 1)(x - 5)^2$.

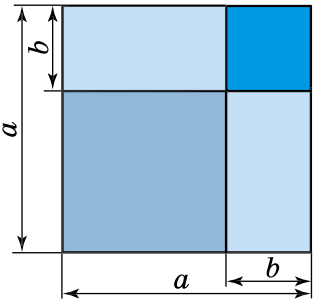
702. Доведіть тотожність:
1) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;
2) $m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn$.

703. Доведіть тотожність:
1) $-4ab = (a - b)^2 - (a + b)^2$;
2) $(x - y)^2 + 2xy = x^2 + y^2$.

704. Розв'яжіть рівняння:
1) $(3x - 4)^2 - (3x + 2)^2 = -24$;
2) $(2x - 3)^2 + (1 - x)(9 + 4x) = 18$.

705. Розв'яжіть рівняння:
1) $x(x - 2) - (x + 5)^2 = -1$;
2) $(2y - 7)^2 + (5 - 4y)(y - 7) = 3(y - 6)$.

706. Використовуючи малюнок, поясніть геометричний зміст формули $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ для $a > 0$, $b > 0$, $a > b$.



707. Спростіть вираз $((((a + b)^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2)^2 - 2a^4b^4)^2 - 2a^8b^8$.

708. Доведіть формулу скороченого множення для:
1) куба суми: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
2) куба різниці: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Розв'язання.
1) $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$
$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

709. Піднесіть до куба за формулами скороченого множення:
1) $(2 + a)^3$; 2) $(2b - 1)^3$.

710. Піднесіть до куба:
1) $(x - 2)^3$; 2) $(1 + 2m)^3$.

Вправи для повторення

711. Знайдіть значення виразу $993\frac{2}{7} + \left(5,4 : \frac{9}{35} - 11\frac{2}{9}\right) \cdot 2,25 - 4\frac{2}{7}$ і дізнайтеся рік початку будівництва Софійського собору в Києві.

712. Знайдіть три послідовних натуральних парних числа, якщо добуток двох менших з них на 104 менший від добутку двох більших.

713. Доведіть, що значення виразу:
1) $8^{10} - 8^9 + 8^8$ кратне числу 152;
2) $15^4 - 10^4 - 5^4$ ділиться на 80.

Життєва математика

714. На заправці один літр бензину коштує 45 грн. Водій залив у бак 30 л бензину і ще придбав пляшку води за 20 грн. Яку решту отримає водій з 1500 грн?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

715. Подайте у вигляді квадрата число:
1) 1; 2) 9; 3) 25; 4) 64;
5) 100; 6) 121; 7) 196; 8) 900.

716. Подайте у вигляді квадрата одночлен:
1) x^4; 2) y^8; 3) m^6; 4) p^{10};
5) $16a^2$; 6) $49b^{10}$; 7) m^2n^4; 8) $36c^2a^2$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

717. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(n^2 + n)(n + 2)$ ділиться на 6.

§ 17. Розкладання многочленів на множники за допомогою формул квадрата суми і квадрата різниці

Перетворення тричлена у квадрат двочлена

Формули квадрата суми і квадрата різниці можна використовувати також для розкладання на множники виразів вигляду $a^2 + 2ab + b^2$ і $a^2 - 2ab + b^2$. Для цього перепишемо ці формули, помінявши місцями їхні ліву і праву частини.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Такий вигляд формул зручно використовувати для перетворення тричлена у квадрат двочлена.

Тричлен вигляду $a^2 + 2ab + b^2$ або $a^2 - 2ab + b^2$ називають *повним квадратом*. Саме його можна подати у вигляді квадрата двочлена.

Наприклад, $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ і $a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$, тому тричлени $x^2 + 4x + 4$ і $a^2 - 6a + 9$ є повними квадратами. Перетворення тричлена, що є повним квадратом, у квадрат двочлена називають *згортанням у повний квадрат*.

Оскільки $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ і $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$, то згортання в повний квадрат є розкладанням тричлена на множники.

Приклад 1. Розкласти тричлен $4x^2 + 12x + 9$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $4x^2 = (2x)^2$; $12x = 2 \cdot 2x \cdot 3$ і $9 = 3^2$, то тричлен $4x^2 + 12x + 9$ є квадратом суми $2x + 3$, отже, його можна розкласти на множники:

$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$.

Відповідь: $(2x + 3)^2$.

Приклад 2. Знайти значення виразу $x^2 + 25y^4 - 10xy^2$, якщо $x = 44$, $y = -3$.

Розв'язання. Спочатку згорнемо вираз у повний квадрат:

$x^2 + 25y^4 - 10xy^2 = x^2 - 10xy^2 + 25y^4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5y^2 + (5y^2)^2 = (x - 5y^2)^2$.

Тепер виконати обчислення буде зовсім не складно. Якщо $x = 44$, $y = -3$, то $(x - 5y^2)^2 = (44 - 5 \cdot (-3)^2)^2 = (44 - 45)^2 = (-1)^2 = 1$.

Відповідь: 1.

Перетворення тричлена у вираз, протилежний квадрату двочлена

Приклад 3. Перетворити тричлен $-16a^2 + 8ab - b^2$ на вираз, протилежний квадрату двочлена.

Розв'язання. Винесемо за дужки -1, а одержаний в дужках вираз згорнемо в повний квадрат:

$-16a^2 + 8ab - b^2 = -(16a^2 - 8ab + b^2) = -((4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot b + b^2) =$
$= -(4a - b)^2.$

Відповідь: $-(4a - b)^2$.

Зауважимо, що не кожен тричлен можна подати у вигляді квадрата двочлена або у вигляді виразу, протилежного квадрату двочлена.

Розв'язування рівнянь

Приклад 4. Розв'язати рівняння $16x^2 - 40x + 25 = 0$.

Розв'язання. Маємо: $(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 5 + 5^2 = 0$;
$(4x - 5)^2 = 0$.
Оскільки значення квадрата виразу дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли значення самого виразу дорівнює нулю, то маємо:
$4x - 5 = 0$, $x = 1{,}25$.

Відповідь: 1,25.

Наведіть приклад тричлена, що є квадратом суми; квадратом різниці.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

718. (*Усно.*) Розкладіть на множники:
1) $c^2 + 2cd + d^2$; 2) $x^2 - 2xy + y^2$; 3) $m^2 + 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2$.

719. Згорніть многочлен у повний квадрат:
1) $m^2 - 2mn + n^2$; 2) $p^2 + 2pq + q^2$; 3) $a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2$.

720. Розкладіть тричлен на множники:
1) $t^2 + 2tp + p^2$; 2) $a^2 - 2ax + x^2$; 3) $b^2 + 2 \cdot b \cdot 7 + 7^2$.

721. Розкладіть на множники:
1) $a^2 - 6a + 9$; 2) $64 + 16b + b^2$; 3) $0{,}01m^2 + 0{,}2m + 1$;
4) $\frac{1}{25} - \frac{2}{5}p + p^2$; 5) $4m^2 - 12m + 9$; 6) $9c^2 + 24cd + 16d^2$.

722. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена:
1) $a^2 + 4a + 4$; 2) $9m^2 - 6m + 1$;

3) $b^2 - 1{,}2b + 0{,}36$; 4) $\frac{1}{49}m^2 - \frac{2}{7}m + 1$;

5) $81a^2 + 18ab + b^2$; 6) $25m^2 - 60mn + 36n^2$.

723. Обчисліть зручним способом:

1) $36^2 + 2 \cdot 36 \cdot 14 + 14^2$; 2) $117^2 - 2 \cdot 117 \cdot 17 + 17^2$.

724. Обчисліть зручним способом:

1) $87^2 + 2 \cdot 87 \cdot 13 + 13^2$; 2) $137^2 - 2 \cdot 137 \cdot 47 + 47^2$.

725. Знайдіть значення виразу, попередньо згорнувши його у повний квадрат:

1) $a^2 - 2a + 1$, якщо $a = 91; -19$;

2) $4m^2 + 28m + 49$, якщо $m = -3{,}5; 0$;

3) $16x^2 - 40xy + 25y^2$, якщо $x = 5$, $y = 4$.

726. Знайдіть значення виразу:

1) $a^2 + 10a + 25$, якщо $a = -15; 95$;

2) $0{,}01x^2 + 0{,}8x + 16$, якщо $x = 10; -40$;

3) $4m^2 + 28mn + 49n^2$, якщо $m = -3$, $n = -\frac{1}{7}$.

727. Перетворіть тричлен у квадрат двочлена:

1) $\frac{1}{4}m^2 + 4n^2 + 2mn$; 2) $-10mn + 0{,}25m^2 + 100n^2$;

3) $9p^2 + pq + \frac{1}{36}q^2$; 4) $m^6 + 4n^2 - 4m^3n$;

5) $25m^{12} + p^6 - 10m^6p^3$; 6) $\frac{9}{64}c^6 - 3dc^5 + 16d^2c^4$.

728. Розкладіть на множники:

1) $\frac{1}{9}a^4 + 9b^2 + 2a^2b$; 2) $-6{,}4a^2y^4 + 0{,}16a^4 + 64y^8$;

3) $16m^{20} + n^{12} - 8m^{10}n^6$; 4) $6a^4b^2 + a^6 + 9a^2b^4$.

729. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена або виразу, протилежного до квадрата двочлена:

1) $-1 + 4x - 4x^2$; 2) $-40a + 25a^2 + 16$;

3) $24xy - 9x^2 - 16y^2$; 4) $-140x^3y + 100x^6 + 49y^2$;

5) $4pq - 25p^2 - 0{,}16q^2$; 6) $-0{,}64m^6 - 1{,}6m^3n^2 - n^4$.

730. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена або виразу, що є протилежним до квадрата двочлена:

1) $-9 - 30x - 25x^2$; 2) $-36b + 81b^2 + 4$;

3) $42xy - 49x^2 - 9y^2$; 4) $-0{,}36a^4 - 25b^6 + 6a^2b^3$.

731. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 10x + 25 = 0$;
2) $64y^2 + 16y + 1 = 0$;
3) $9x^2 + 1 = -6x$;
4) $16y^2 = 56y - 49$.

732. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 16x + 64 = 0$;
2) $36x^2 - 12x + 1 = 0$;
3) $4x^2 + 9 = -12x$;
4) $x^2 = 0{,}4x - 0{,}04$.

733. Запишіть замість «зірочки» такий одночлен, щоб одержаний тричлен можна було перетворити на квадрат двочлена:

1) $* - 2mn + n^2$;
2) $25a^2 + 20a + *$;
3) $64m^2 + * + 49b^2$;
4) $* - 12bm^3 + 9b^2$;
5) $p^2 - 0{,}8p^7 + *$;
6) $* + a^2b^3 + \frac{1}{4}a^4$.

734. Запишіть замість «зірочки» такий одночлен, щоб одержаний тричлен можна було подати у вигляді квадрата двочлена:

1) $* - 28x + 49$;
2) $64a^2 - 16a + *$;
3) $25a^2 + * + \frac{1}{25}b^6$;
4) $0{,}01a^8 + 100b^6 + *$.

735. Розкладіть вираз на множники:

1) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$;
2) $(a^2 + 6a + 9) + 2(a + 3) + 1$.

736. Доведіть, що нерівність є правильною для будь-якого значення x:

1) $x^2 + 2 > 0$;
2) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$.

737. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $x^2 - 4x + 4$;
2) $-x^2 + 2x - 1$.

738. Вставте пропущені знаки $\leqslant$ або $\geqslant$ так, щоб для будь-яких значень x нерівність була правильною:

1) $x^2 + 4x + 4 \ldots 0$;
2) $-x^2 + 30x - 225 \ldots 0$;
3) $-x^2 - 8x - 16 \ldots 0$;
4) $36 - 12x + x^2 \ldots 0$.

739. Доведіть, що для будь-яких значень змінної вираз $x^2 + 4x + 5$ набуває лише додатних значень. Якого найменшого значення набуває цей вираз і для якого значення x?

740. Доведіть, що для будь-якого значення змінної вираз $x^2 + 6x + 11$ набуває лише додатних значень. Якого найменшого значення набуває цей вираз і для якого значення x?

741. Замініть «зірочки» одночленами так, щоб одержаний тричлен був повним квадратом (знайдіть три різних розв'язки задачі):

1) $* - 48xy + *$;
2) $* + 20ab + *$.

742. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена, якщо це можливо:

1) $x^2 - 3x + 9$;
2) $49a^2 - 140ab + 100b^2$;
3) $4a^2 - 9b^2 - 12ab$;
4) $16y^2 + 8y - 1$;
5) $\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{40}xy + \frac{1}{25}y^2$;
6) $-xy + \frac{1}{16}y^2 + 4x^2$.

Вправи для повторення

743. Для яких значень x:

1) квадрат двочлена $x + 2$ на 225 більший за квадрат двочлена $x - 3$;
2) квадрат двочлена $2x - 6$ у 4 рази більший за квадрат двочлена $x + 3$?

744. Спростіть вираз:

1) $(m - 2)(m + 3)(m - 5)$; 2) $(p^2 + 1)(p^8 - p^6 + p^4 - p^2 + 1)$.

Життєва математика

745. Щосереди в аптеці «Будьте здорові» діє 15-відсоткова знижка для пенсіонерів. Скільки грошей заощадить пенсіонер, придбавши ліки в середу, якщо роздрібна ціна цих ліків становить 580 грн?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

746. Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $(x - 3)(x + 3)$;
2) $(y + 2)(y - 2)$;
3) $(1 + m)(1 - m)$;
4) $(4 - a)(4 + a)$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

747. Є піскові годинники двох видів: одним відміряють 7 хв, а другим — 11 хв. Як за допомогою цих годинників відміряти точно 15 хв?

§ 18. Множення різниці двох виразів на їх суму

Формула множення різниці двох виразів на їх суму

Помножимо різницю $a - b$ на суму $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже,

$$\boldsymbol{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.}$$

Отримали ще одну формулу скороченого множення, яку читають так:

добуток різниці двох виразів на їх суму дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Розглянемо приклади застосування цієї формули.

Приклад 1. Виконати множення:

1) $(2m - 3p)(2m + 3p)$;
2) $(4a^2 + b^3)(b^3 - 4a^2)$.

Розв'язання.

1) $(2m - 3p)(2m + 3p) = (2m)^2 - (3p)^2 = 4m^2 - 9p^2$ або скорочено:
$(2m - 3p)(2m + 3p) = 4m^2 - 9p^2$.
2) $(4a^2 + b^3)(b^3 - 4a^2) = (b^3 + 4a^2)(b^3 - 4a^2) = (b^3)^2 - (4a^2)^2 = b^6 - 16a^4$.

Відповідь: 1) $4m^2 - 9p^2$; 2) $b^6 - 16a^4$.

Приклад 2. Подати добуток $(-5m - 7a)(5m - 7a)$ у вигляді многочлена.

Розв'язання.

1-й спосіб. Винесемо у виразі $-5m - 7a$ за дужки число -1. Матимемо:
$(-5m - 7a)(5m - 7a) = -1 \cdot (5m + 7a)(5m - 7a) = -((5m)^2 - (7a)^2) =$
$= -(25m^2 - 49a^2) = -25m^2 + 49a^2 = 49a^2 - 25m^2$.

2-й спосіб. У кожному із множників спочатку поміняємо місцями доданки:
$(-5m - 7a)(5m - 7a) = (-7a - 5m)(-7a + 5m) = (-7a)^2 - (5m)^2 =$
$= 49a^2 - 25m^2$.

Відповідь: $49a^2 - 25m^2$.

Застосування формул множення різниці двох виразів на їх суму під час спрощення виразів

Приклад 3. Спростити вираз:

1) $-2m(m-5)(m+5)$; 2) $4x(x-2)-(2x+3)(2x-3)$;
3) $(b^2-2)(b^2+2)(b^4+2)$.

Розв'язання. 1) $-2m(m-5)(m+5) = -2m(m^2-5^2) = -2m(m^2-25) = -2m^3+50m = 50m-2m^3$.

2) $4x(x-2)-(2x+3)(2x-3) = 4x^2-8x-((2x)^2-3^2) = 4x^2-8x-4x^2+9 = 9-8x$.

3) Застосуємо двічі поспіль формулу множення різниці двох виразів на їх суму. Маємо: $(b^2-2)(b^2+2)(b^4+4) = ((b^2)^2-2^2)\times(b^4+4) = (b^4-4)(b^4+4) = (b^4)^2-4^2 = b^8-16$.

Відповідь: 1) $50m-2m^3$; 2) $9-8x$; 3) b^8-16.

Застосування формули множення двох виразів на їх суму під час обчислення виразів

Приклад 4. Обчислити зручним способом $4{,}3\cdot 3{,}7$.

Розв'язання.

$4{,}3\cdot 3{,}7 = (4+0{,}3)(4-0{,}3) = 4^2-0{,}3^2 = 16-0{,}09 = 15{,}91$.

Відповідь: 15,91.

Якому виразу дорівнює добуток різниці двох виразів на їх суму? Запишіть і прочитайте відповідну формулу.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

748. (*Усно.*) Які з рівностей є тотожностями:
1) $(a-c)(a+c) = a^2-c^2$; 2) $(m+p)(m-p) = m^2+p^2$;
3) $(y-x)(y+x) = (y-x)^2$; 4) $(d+n)(d-n) = n^2-d^2$?

749. Закінчіть запис:
1) $(c-5)(c+5) = c^2-5^2 = \ldots$;
2) $(b+7)(b-7) = b^2-7^2 = \ldots$.

750. Знайдіть добуток:
1) $(c-d)(c+d)$; 2) $(p+a)(p-a)$.

751. Виконайте множення двочленів:
1) $(b+t)(b-t)$; 2) $(a-t)(a+t)$.

752. Виконайте множення:
1) $(p-9)(p+9)$; 2) $(5+x)(5-x)$;
3) $(3-c)(3+c)$; 4) $(7+y)(y-7)$.

753. Перетворіть на многочлен:

1) $(m - 2)(m + 2)$; 2) $(7 + a)(7 - a)$;
3) $(4 - x)(4 + x)$; 4) $(11 + b)(b - 11)$.

754. Подайте добуток у вигляді многочлена:

1) $(2x - 3)(2x + 3)$; 2) $(3p + 8)(3p - 8)$;
3) $(4 + 5a)(5a - 4)$; 4) $(3m - 4p)(4p + 3m)$;
5) $(7a + 10b)(10b - 7a)$; 6) $\left(\frac{1}{4}p - \frac{1}{7}q\right)\left(\frac{1}{7}q + \frac{1}{4}p\right)$.

755. Виконайте множення:

1) $(p - 2m)(p + 2m)$; 2) $(2p + 7)(2p - 7)$;
3) $(2c + 5)(5 - 2c)$; 4) $(8a - 0{,}3x)(0{,}3x + 8a)$;
5) $(0{,}1p + q)(q - 0{,}1p)$; 6) $\left(\frac{2}{7}a - \frac{3}{5}b\right)\left(\frac{2}{7}a + \frac{3}{5}b\right)$.

756. Заповніть у зошиті таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Добуток різниці виразів I і II на їх суму	Різниця квадратів виразів I і II
$3a$	b	$(3a - b)(3a + b)$	$9a^2 - b^2$
$5m$	$2n$		
$\frac{1}{2}x$	$3y$		
$0{,}1p$	$0{,}7q$		
$\frac{1}{7}c$	$\frac{1}{3}d$		

757. Виконайте дії:

1) $16 + (3a + 4)(3a - 4)$; 2) $(5m - 3)(5m + 3) - 25m^2$.

758. Спростіть вираз:

1) $(8x - 5)(8x + 5) + 25$; 2) $9m^2 + (5 - 3m)(5 + 3m)$;
3) $(2b - 3)(3 + 2b) - 4b^2$; 4) $(4a + 7)(7 - 4a) - 49$.

759. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x = (2x - 3)(2x + 3) - 4x^2$; 2) $9x^2 + (8 - 3x)(8 + 3x) = 4x$.

760. Знайдіть корені рівняння:

1) $8x = (5x - 4)(5x + 4) - 25x^2$;
2) $(9 - 4x)(9 + 4x) + 16x^2 = 3x$.

761. Обчисліть зручним способом:

1) $(40 - 1)(40 + 1)$; 2) $81 \cdot 79$; 3) $1002 \cdot 998$; 4) $1{,}03 \cdot 0{,}97$.

762. Знайдіть значення виразу зручним способом:
1) $(80 + 2)(80 - 2)$; 2) $59 \cdot 61$; 3) $108 \cdot 92$; 4) $12{,}3 \cdot 11{,}7$.

763. Подайте добуток у вигляді многочлена:
1) $(p^2 + 3q)(3q - p^2)$; 2) $(2a - m^3)(m^3 + 2a)$;
3) $(5a - b^2)(b^2 + 5a)$; 4) $(0{,}7m + n^2)(0{,}7m - n^2)$;
5) $(4t^2 - p^4)(4t^2 + p^4)$; 6) $(3a^3 - 4b^4)(4b^4 + 3a^3)$.

764. Виконайте множення:
1) $(1{,}7a - 1{,}4p^3)(1{,}4p^3 + 1{,}7a)$; 2) $\left(3a^2 - \frac{1}{4}b^3\right)\left(\frac{1}{4}b^3 + 3a^2\right)$;
3) $\left(5m^2n + \frac{1}{7}p^3\right)\left(\frac{1}{7}p^3 - 5m^2n\right)$;
4) $\left(\frac{2}{3}a^7 + 1{,}2y^8\right)\left(1{,}2y^8 - \frac{2}{3}a^7\right)$.

765. Виконайте множення:
1) $(5a + b^2)(b^2 - 5a)$; 2) $(4a^3 - d^2)(d^2 + 4a^3)$;
3) $(0{,}7p - m^7)(m^7 + 0{,}7p)$; 4) $\left(\frac{1}{5}m^2 + 3b^7\right)\left(3b^7 - \frac{1}{5}m^2\right)$;
5) $(0{,}2a^2b - 0{,}3ab^2)(0{,}2a^2b + 0{,}3ab^2)$;
6) $\left(1{,}2p^7 - \frac{2}{3}a^8\right)\left(\frac{2}{3}a^8 + 1{,}2p^7\right)$.

766. Подайте у вигляді многочлена:
1) $(-a^2 + 7)(7 + a^2)$; 2) $(-p^2 - q^7)(p^2 - q^7)$;
3) $(-8m - 5p)(-8m + 5p)$; 4) $(-2a^3 - 3b)(-3b + 2a^3)$.

767. Спростіть вираз:
1) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$; 2) $(2a + x)(4a^2 + x^2)(2a - x)$;
3) $(c^3 + d^2)(c^3 - d^2)(d^4 + c^6)$;
4) $(-x - y)(x - y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$.

768. Перетворіть на многочлен:
1) $(-a^7 + b^5)(a^7 + b^5)$; 2) $(-0{,}1m^3 - p^4)(0{,}1m^3 - p^4)$;
3) $(3x - 2p)(3x + 2p)(9x^2 + 4p^2)$;
4) $(-a^2 - 5b^3)(a^2 - 5b^3)(a^4 + 25b^6)$.

769. Замість «зірочок» запишіть такі одночлени, щоб утворилася тотожність:
1) $(2a + *)(2a - *) = 4a^2 - 49b^2$;
2) $(* - 9p)(* + 9p) = 0{,}25m^4 - 81p^2$;
3) $100a^8 - 9b^6 = (* + 10a^4)(10a^4 - *)$;
4) $(4x - 3y)(* + *) = 16x^2 - 9y^2$.

770. Знайдіть корені рівняння:
1) $8x(1 + 2x) - (4x + 1)(4x - 1) = 17$;
2) $x - 12x(1 - 3x) = 14 - (5 - 6x)(6x + 5)$;
3) $(4x + 1)(4x - 1) + (2x - 3)^2 = 5x(4x - 11)$.

771. Розв'яжіть рівняння:
1) $5x(4x - 1) - (6x - 1)(6x + 1) = (4x + 3)(3 - 4x)$;
2) $(3x - 4)(3x + 4) - (5x - 2)(5x + 2) = 2x(1 - 8x)$;
3) $(5x - 4)^2 - 2x(8x - 5) = (3x - 2)(3x + 2)$.

772. Спростіть вираз:
1) $(a + 3)^2 - (a + 3)(a - 3)$;
2) $(8x - 3y)(8x + 3y) - (3x - 8y)^2$;
3) $(b - 3)^2(b + 3)^2$;
4) $(a + 5)^2(5 - a)^2$.

773. Спростіть вираз:
1) $(c - 2)^2 - (c - 3)(c + 3)$;
2) $(9x - 2y)(9x + 2y) - (5x - 2y)^2$;
3) $(a + 6)^2(a - 6)^2$;
4) $(2 - m)^2(m + 2)^2$.

774. Доведіть, що квадрат будь-якого цілого числа завжди на одиницю більший за добуток попереднього йому й наступного за ним чисел.

775. Виконайте множення, використавши формули скороченого множення:
1) $((x + y) + 1)((x + y) - 1)$;
2) $(a + b + c)(a - (b + c))$;
3) $(m + n + 2p)(m + n - 2p)$;
4) $(x - y - 2)(x + y + 2)$.

Вправи для повторення

776. Обчисліть: $2,7 \cdot \left(8\frac{7}{12} - 2\frac{17}{36}\right) - 4\frac{1}{3} : 0,65$.

777. Щоб заасфальтувати деяку ділянку дороги за певний час, бригада шляховиків мала асфальтувати по 15 м^2 щогодини. Натомість щогодини вони асфальтували на 3 м^2 більше, тому за 2 год до закінчення терміну їм залишилося заасфальтувати 12 м^2. Якою була площа ділянки та скільки годин її мали асфальтувати?

Життєва математика

778. Коли українці обчислюють «індекс борщу», тобто ціну набору продуктів для приготування 5 л класичної української страви, то роблять це за одним із численних рецептів (див. мал.). Так, у 2019 році такий набір коштував у середньому 74,4 грн, при цьому мінімальна зарплата в Україні становила 4173 грн. У 2023 році згаданий набір коштував у середньому 99,2 грн, при цьому мінімальна зарплата в Україні становила 6700 грн. Скільки каструль борщу можна було зварити на мінімальну зарплату в 2023 році? Зробіть висновки.



Цікаві задачі — поміркуй одначе

779. Нехай a_1; a_2; a_3 – натуральні числа, b_1; b_2; b_3 – ці самі числа, записані в іншому порядку. Доведіть, що добуток $|a_1 - b_1| \cdot |a_2 - b_2| \cdot |a_3 - b_3|$ є парним числом.

§ 19. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів

Формула різниці квадратів

У тотожності $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ поміняємо місцями ліву і праву частини. Матимемо:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Цю тотожність називають ***формулою різниці квадратів*** двох виразів та читають так:

різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на їх суму.

Формулу різниці квадратів двох виразів застосовують для розкладання на множники двочлена $a^2 - b^2$. Цю формулу можна

використовувати і для розкладання на множники різниці квадратів будь-яких двох виразів.

Приклад 1. Розкласти на множники:
1) $16 - x^2$; 2) $49m^4 - 64p^6$.

Розв'язання. 1) Оскільки $16 = 4^2$, то за формулою різниці квадратів: $16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$.
2) Оскільки $49m^4 = (7m^2)^2$, а $64p^6 = (8p^3)^2$, маємо:
$49m^4 - 64p^6 = (7m^2)^2 - (8p^3)^2 = (7m^2 - 8p^3)(7m^2 + 8p^3)$.

Відповідь: 1) $(4 - x)(4 + x)$; 2) $(7m^2 - 8p^3)(7m^2 + 8p^3)$.

Приклад 2. Розкласти на множники $25x^2 - (1 - 2x)^2$.

Розв'язання. $25x^2 - (1 - 2x)^2 = (5x)^2 - (1 - 2x)^2 = (5x - (1 - 2x)) \times$
$\times (5x + (1 - 2x)) = (5x - 1 + 2x)(5x + 1 - 2x) = (7x - 1)(3x + 1)$.

Відповідь: $(7x - 1)(3x + 1)$.

Обчислення значень виразів за допомогою формули різниці квадратів

Приклад 3. Обчислити $105^2 - 95^2$ зручним способом.

Розв'язання.
$$105^2 - 95^2 = (105 - 95)(105 + 95) = 10 \cdot 200 = 2000.$$

Відповідь: 2000.

Розв'язування рівнянь з використанням формули різниці квадратів

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^2 - 25 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$, маємо:
$$x^2 - 25 = 0;$$
$$(x - 5)(x + 5) = 0;$$
$$x - 5 = 0 \quad \text{або} \quad x + 5 = 0;$$
отже, $x = 5$ або $x = -5$.

Відповідь: -5; 5.

Прочитайте і запам'ятайте формулу різниці квадратів двох виразів.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

780. (*Усно.*) Які з рівностей є тотожностями:
1) $c^2 - d^2 = (c - d)(c - d)$; 2) $p^2 - t^2 = (p + t)(p - t)$;

3) $a^2 + b^2 = (a + b)(a + b)$; 4) $3^2 - b^2 = (3 - b)(3 + b)$?

781. Доберіть замість пропусків такий двочлен, щоб рівність перетворилася на тотожність:
1) $a^2 - 1 = (a - 1)(...)$; 2) $4 - m^2 = (...)(2 + m)$.

782. Доберіть замість пропусків такий вираз, щоб рівність перетворилася на тотожність:
1) $p^2 - 1 = (...)(p + 1)$; 2) $9 - c^2 = (3 - c)(...)$.

783. (*Усно.*) Розкладіть на множники:
1) $a^2 - 4$; 2) $36 - b^2$; 3) $4x^2 - 25m^2$; 4) $x^2y^2 - 1$.

784. Подайте многочлен у вигляді добутку різниці та суми:
1) $a^2 - 25$; 2) $16 - p^2$; 3) $d^2 - 1{,}44$;
4) $0{,}09 - m^2$; 5) $b^2 - \frac{4}{9}$; 6) $\frac{25}{36} - c^2$.

785. Розкладіть на множники:
1) $36a^2 - b^2$; 2) $-a^2 + b^2$; 3) $49x^2 - 64$;
4) $9m^2 - 16n^2$; 5) $-100m^2 + 121k^2$; 6) $0{,}25 - a^2b^2$;
7) $16m^2a^2 - 0{,}01$; 8) $p^2 - c^2d^2$; 9) $81p^2m^2 - n^2$.

786. Подайте многочлен у вигляді добутку різниці та суми:
1) $a^2 - 64$; 2) $0{,}25 - b^2$; 3) $-81 + 36x^2$;
4) $169p^2 - q^2$; 5) $400a^2 - 25m^2$; 6) $49a^2b^2 - 16$;
7) $900 - a^2b^2$; 8) $c^2d^2 - 4m^2$; 9) $100a^2b^2 - 0{,}16m^2$.

787. Обчисліть, застосовуючи формулу різниці квадратів:
1) $67^2 - 57^2$; 2) $43^2 - 53^2$; 3) $112^2 - 88^2$;
4) $21{,}5^2 - 21{,}4^2$; 5) $0{,}725^2 - 0{,}275^2$; 6) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$.

788. Обчисліть зручним способом:
1) $43^2 - 33^2$; 2) $27^2 - 37^2$; 3) $0{,}97^2 - 0{,}03^2$.

789. Знайдіть значення виразу $x^2 - y^2$, якщо
1) $x = 55$; $y = 45$; 2) $x = 2{,}01$; $y = 1{,}99$.

790. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $\frac{1}{9} - x^2 = 0$;
3) $y^2 - 0{,}25 = 0$; 4) $4x^2 - 9 = 0$.

791. Знайдіть корені рівняння:
1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $y^2 - \frac{1}{16} = 0$;
3) $0{,}49 - x^2 = 0$; 4) $64y^2 - 49 = 0$.

3 **792.** Розкладіть на множники:

1) $c^4 - m^6$; 2) $p^8 - a^{10}$; 3) $a^6 - 9m^4$;

4) $100a^6 - 25x^8$; 5) $0{,}49 - m^4p^{12}$; 6) $36x^2c^{14} - 0{,}16d^4$;

7) $\frac{25}{49}a^8 - \frac{36}{49}b^6c^2$; 8) $-0{,}01m^2 + 0{,}81x^6y^8$;

9) $1\frac{7}{9}t^{20}a^{24} - 1\frac{11}{25}p^{16}q^{18}$.

793. Розкладіть на множники:

1) $a^8 - 16m^6$; 2) $36c^6 - 49a^{10}$;

3) $0{,}25 - m^{12}a^2$; 4) $-121p^8c^4 + 4a^2$;

5) $-\frac{25}{36}a^2b^4 + \frac{36}{49}c^6$; 6) $2\frac{1}{4}a^2b^8 - 1\frac{9}{16}p^6c^{18}$.

794. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{100}{15^2 - 10^2}$; 2) $\frac{29^2 - 21^2}{80}$; 3) $\frac{47^2 - 23^2}{48^2 - 22^2}$.

795. Подайте вираз у вигляді добутку:

1) $(x + 2)^2 - 1$; 2) $4 - (y + 3)^2$;

3) $(4m - 5)^2 - 16$; 4) $6{,}25 - (a - 3{,}5)^2$;

5) $(2x - 5)^2 - 49$; 6) $1 - (2x + 1)^2$.

796. Розкладіть на множники:

1) $16x^2 - (1 + 3x)^2$; 2) $(3y - 5)^2 - 16y^2$;

3) $49m^2 - (a + 3m)^2$; 4) $(5a - 2b)^2 - 25a^2$.

797. Розкладіть на множники:

1) $(p + 2)^2 - 9$; 2) $16 - (m - 3)^2$;

3) $(3x - 2)^2 - 36$; 4) $x^2 - (2x - 1)^2$;

5) $(5a - 3b)^2 - 9b^2$; 6) $(3x + 4y)^2 - 100y^2$.

798. Знайдіть корені рівняння:

1) $(x - 1)^2 - 25 = 0$; 2) $49 - (2x + 5)^2 = 0$;

3) $(5x + 3)^2 = 64$; 4) $(0{,}1x - 0{,}5)^2 = 0{,}36$.

799. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 2)^2 - 36 = 0$; 2) $(5x - 4)^2 - 81 = 0$;

3) $(2x + 7)^2 = 49$; 4) $(0{,}2x - 0{,}5)^2 = 0{,}09$.

800. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(n + 7)^2 - n^2$ ділиться на 7.

4 **801.** Подайте вираз у вигляді добутку:

1) $a^6 - (b - 5a^3)^2$; 2) $(-3m^2 + 4p)^2 - 9m^4$;

3) $(7x + 2y)^2 - (2x - 7y)^2$; 4) $(a + b + c)^2 - (a + b - c)^2$;

5) $a^2(a + 1)^2 - c^8$; 6) $(5a - b - 1)^2 - (5a + b - 1)^2$.

802. Розкладіть на множники:

1) $(5a^2 - 3b)^2 - 16a^4$;
2) $m^8 - (3c - 2m^4)^2$;
3) $(2a + 3b)^2 - (4a - 5b)^2$;
4) $(x - y + t)^2 - (x - y - t)^2$.

803. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 4)^2 - (5x - 8)^2 = 0$;
2) $x^4 - 81 = 0$;
3) $16x^4 - 1 = 0$;
4) $81x^2 + 4 = 0$.

804. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних цілих чисел, де зменшуваним є більше число, дорівнює сумі цих чисел.

Вправи для повторення

805. Спростіть вираз:

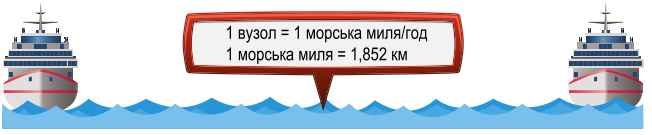
1) $(t + 1)(t - 7) - (t - 1)(t + 7)$;
2) $(a^3 - 2b)(a^2 + 2b) - (a^2 - 2b)(a^3 + 2b)$.

806. Обчисліть, використовуючи формулу куба двочлена:

1) $(100 - 1)^3$;
2) 41^3;
3) 29^3;
4) $0{,}99^3$.

Життєва математика

807. Корабель пливе зі швидкістю 11 вузлів. Велосипедист долає 100 м за 18 с. Порівняйте швидкості корабля і велосипедиста. Зверніть увагу на малюнок.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

808. Подайте у вигляді куба число:

1) 1;
2) 27;
3) 64;
4) 216.

809. Подайте у вигляді куба одночлен:

1) x^6;
2) $8y^3$;
3) $1000m^{12}$;
4) $125p^3c^9$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

810. Господиня має важільні терези й гирку масою 100 г. Як їй за чотири зважування відміряти 1,5 кг крупи?




§ 20. Сума і різниця кубів

Формула суми кубів

Помножимо $a + b$ на $a^2 - ab + b^2$:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Маємо тотожність, яку називають ***формулою суми кубів***:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

У правій частині формули множник $a^2 - ab + b^2$ нагадує повний квадрат $a^2 - 2ab + b^2$, але замість подвоєного добутку $2ab$ містить ab. Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають ***неповним квадратом різниці*** виразів a і b. Тому формулу суми кубів читають так:

сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів на неповний квадрат їх різниці.

Приклад 1. Розкласти многочлен $x^3 + 64$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $64 = 4^3$, то цей многочлен можна подати у вигляді суми кубів двох виразів:

$$x^3 + 64 = x^3 + 4^3.$$

За формулою суми кубів маємо:

$$x^3 + 4^3 = (x + 4)(x^2 - 4x + 4^2) = (x + 4)(x^2 - 4x + 16).$$

Відповідь: $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$.

Формула різниці кубів

Тепер помножимо $a - b$ на $a^2 + ab + b^2$:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Маємо тотожність, яку називають ***формулою різниці кубів***:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають ***неповним квадратом суми*** виразів a і b, а формулу різниці кубів читають так:

різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на неповний квадрат їх суми.

Приклад 2. Розкласти многочлен $27a^3 - m^6$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $27a^3 = (3a)^3$ і $m^6 = (m^2)^3$, то цей многочлен можна перетворити на різницю кубів:

$$27a^3 - m^6 = (3a)^3 - (m^2)^3.$$

Далі застосуємо формулу різниці кубів:

$(3a)^3 - (m^2)^3 = (3a - m^2)((3a)^2 + 3am^2 + (m^2)^2) = (3a - m^2) \times \times (9a^2 + 3am^2 + m^4)$.

Відповідь: $(3a - m^2)(9a^2 + 3am^2 + m^4)$.

Приклад 3. Подати вираз $(p - 2)^3 - 1$ у вигляді добутку.

Розв'язання. $(p - 2)^3 - 1 = (p - 2)^3 - 1^3 = (p - 2 - 1)((p - 2)^2 + + (p - 2) \cdot 1 + 1^2) = (p - 3)(p^2 - 4p + 4 + p - 2 + 1) = (p - 3) \times \times (p^2 - 3p + 3)$.

Відповідь: $(p - 3)(p^2 - 3p + 3)$.

Множення суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці та різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми

Помінявши місцями ліві та праві частини формул суми і різниці кубів, матимемо:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,$$
$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Ці тотожності є формулами скороченого множення і дають змогу скорочено виконувати множення суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці та різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми.

Добуток суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці дорівнює сумі кубів цих виразів.
Добуток різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми дорівнює різниці кубів цих виразів.

Приклад 4. Перетворити вираз $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$ на многочлен.

Розв'язання. Оскільки вираз $x^2 - 2xy + 4y^2$ є неповним квадратом різниці виразів x і $2y$, то можемо застосувати формулу суми кубів:

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = x^3 + (2y)^3 = x^3 + 8y^3.$$

Відповідь: $x^3 + 8y^3$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$(5x - 1)(25x^2 + 5x + 1) = 125x^3 - 8x.$$

Розв'язання. Застосуємо до лівої частини рівняння формулу різниці кубів, одержимо: $(5x)^3 - 1^3 = 125x^3 - 8x$;

$125x^3 - 1 = 125x^3 - 8x$;

$125x^3 - 125x^3 + 8x = 1$;

$8x = 1$;

$x = 0{,}125$.

Відповідь: 0,125.

Запам'ятайте формулу суми кубів. Запам'ятайте формулу різниці кубів. Якому виразу тотожно дорівнює добуток суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці? А добуток різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

811. (*Усно.*) Який з виразів є неповним квадратом різниці виразів x і y, а який – неповним квадратом їх суми:

1) $x^2 + xy + y^2$; 2) $x^2 - 2xy + y^2$; 3) $x^2 - xy - y^2$;
4) $x^2 + 2xy + y^2$; 5) $x^2 - xy + y^2$; 6) $x^2 + 4xy + y^2$?

812. (*Усно.*) Які з рівностей є тотожностями:

1) $c^3 + d^3 = (c^2 + d^2)(c + d)$;
2) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
3) $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$;
4) $p^3 - t^3 = (p - t)(p^2 + 2pt + t^2)$?

813. Серед рівностей виберіть ті, що є тотожностями:

1) $m^3 - p^3 = (m^2 - p^2)(m - p)$;
2) $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - xa + a^2)$;
3) $c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + cd + d^2)$;
4) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$.

814. Розкладіть на множники:

1) $m^3 - p^3$; 2) $a^3 + d^3$; 3) $8 - a^3$;
4) $q^3 + 27$; 5) $n^3 - 64$; 6) $0{,}001 + t^3$.

815. Подайте вираз у вигляді суми або різниці кубів і розкладіть його на множники:

1) $8a^3 + 1$; 2) $27 - \frac{1}{27}c^3$; 3) $y^3 + 64x^3$;

4) $0{,}125b^3 - 64y^3$; 5) $1 + 1000m^3$; 6) $\frac{1}{125}a^3 - \frac{1}{216}b^3$.

816. Розкладіть на множники:

1) $\frac{1}{27} + b^3$; 2) $\frac{1}{8}x^3 - 8$; 3) $1 + 125p^3$;

4) $0{,}064m^3 - \frac{1}{1000}n^3$; 5) $\frac{27}{8}a^3 + \frac{8}{27}b^3$; 6) $216p^3 - \frac{1}{216}q^3$.

817. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$; 2) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$;

3) $(1 - d + d^2)(1 + d)$; 4) $(m - 2)(m^2 + 2m + 4)$.

818. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$; 2) $(m - 1)(m^2 + m + 1)$;

3) $(b + 4)(b^2 - 4b + 16)$; 4) $(25 + 5q + q^2)(5 - q)$.

819. Знайдіть значення виразу:

1) $(4p - 1)(16p^2 + 4p + 1)$, якщо $p = -0{,}25$;

2) $(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$, якщо $a = -\frac{1}{2}$; $b = 2$.

820. Знайдіть значення виразу:

1) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$, якщо $x = \frac{2}{3}$;

2) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$, якщо $x = -2$; $y = 0{,}5$.

821. Розкладіть многочлен на множники:

1) $a^3 - b^6$; 2) $t^{12} + c^9$; 3) $p^{18} + m^{24}$;

4) $-c^3 + m^{15}$; 5) $-\frac{1}{8} - a^{24}$; 6) $-c^{99} - d^{60}$;

7) $x^3y^3 + 1$; 8) $27 - a^3b^9$; 9) $x^6y^{12} + m^{27}$;

10) $64m^6p^{21} - 125x^3$; 11) $\frac{1}{27}c^{24}m^{18} + 27t^9$;

12) $343a^{18}b^{33} - 0{,}001c^{36}$.

822. Запишіть вираз у вигляді добутку:

1) $x^9 - y^6$; 2) $-p^{12} - 27$;

3) $-a^9b^6 + 1$; 4) $216p^{15} + 0{,}008t^{18}$;

5) $64m^{21}c^3 - p^{30}$; 6) $512t^{24}p^{27} - 729a^{33}$.

823. Виконайте множення:

1) $(b^3 - d^2)(b^6 + b^3d^2 + d^4)$;

2) $(c^3 + 2p)(c^6 - 2pc^3 + 4p^2)$;

3) $(9x^2 + 3xy + y^2)(3x - y)$;

4) $(4c + 3d)(16c^2 - 12cd + 9d^2)$;

5) $(a^8 - 4a^4 + 16)(a^4 + 4)$;

6) $(5m^2 - 6p^3)(25m^4 + 30m^2p^3 + 36p^6)$.

824. Подайте у вигляді многочлена:
1) $(a^5 - m^2)(a^{10} + a^5m^2 + m^4)$;
2) $(25a^2 - 5ab + b^2)(5a + b)$;
3) $(2x - 7y^2)(4x^2 + 14xy^2 + 49y^4)$;
4) $(3p^2 + 4c^3)(9p^4 - 12p^2c^3 + 16c^6)$.

825. Виконайте дії:
1) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - a(a^2 - 5)$;
2) $(b - 3)(b^2 + 3b + 9) - b(b - 3)(b + 3)$;
3) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$;
4) $(2b^2 - 1)(4b^4 + 2b^2 + 1) - (2b^3 + 1)^2$.

826. Спростіть вираз:
1) $(a - 4)(a^2 + 4a + 16) - a(a - 2)(a + 2)$;
2) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) - (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4)$;
3) $b(b - 1)^2 - (b - 5)(b^2 + 5b + 25)$;
4) $(a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)$.

827. Знайдіть значення виразу:
1) $(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1) - 7a^3$, якщо $a = -2$;
2) $(x^2 + 5xy + 25y^2)(x - 5y) + 25y^3 - x^3$, якщо $x = -2024$, $y = 0{,}1$.

828. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = x^3 - 8x$;
2) $(x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1) = x^9 - 5x$;
3) $(9x^2 - 6x + 4)(3x + 2) = 3x(3x + 4)(3x - 4) + 32$;
4) $8\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + x + 4\right) - x(x - 3)^2 = 6x^2 - 46$.

829. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 24x + x^3$;
2) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 2x(2x - 3)(2x + 3) + 37$.

14 **830.** Розкладіть на множники:
1) $(a + 3)^3 - a^3$;
2) $(x - 4)^3 + 8$;
3) $27p^3 - (p + 1)^3$;
4) $64x^3 + (x - 1)^3$.

831. Розкладіть на множники:
1) $(a + 1)^3 + a^3$;
2) $(b - 2)^3 - 8$;
3) $125b^3 - (b - 1)^3$;
4) $64a^3 + (a + 2)^3$.

832. Доведіть, що дві останні цифри значення виразу $415^3 + 85^3$ є нулями.

833. Чи ділиться число $115^3 - 15^3$ на 100?

834. Обчисліть значення виразу $\dfrac{57^3 - 43^3}{14} + 57 \cdot 43$ зручним способом.

Вправи для повторення

835. Доведіть, що різниця натурального трицифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами у зворотному порядку, ділиться на 11.

836. В одній упаковці було 90 зошитів, а в другій – 30. Коли з першої взяли вдвічі більше зошитів, ніж з другої, то в першій упаковці залишилося в 5 разів більше зошитів, ніж у другій. По скільки зошитів залишилося в кожній упаковці?

Життєва математика

837. У Марини Олегівни є дисконтна картка книгарні «Олімп», за умовами якої покупцю надається знижка в розмірі 12 % від вартості покупки. Скільки Марина Олегівна заплатить за книжку вартістю 150 грн, якщо використає дисконтну картку?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

838. Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^3 + a^2$; 2) $3c^5 - 15c^2$; 3) $x^2 + 6x + 9$;

4) $9x^2 - 6x + 1$; 5) $0{,}81 - y^2$; 6) $0{,}25a^2 - \dfrac{9}{16}b^2$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

839. *З українського фольклору.* Жінка на базарі курей продавала. Першому покупцю вона продала половину всіх курей та ще пів курки. Другому – половину з того, що залишилося, та ще пів курки. Третьому – половину того, що залишилося, та ще пів курки. Після цього з'ясувалося, що всіх курей продано, і задоволена жінка повернулася додому. Скільки курей вона винесла на продаж?

§ 21. Застосування кількох способів розкладання многочленів на множники

Приклади розкладання многочленів на множники із застосуванням двох послідовних способів

У попередніх параграфах ми вже розглядали кілька способів розкладання многочленів на множники: винесення спільного множника за дужки, групування, застосування формул скороченого множення.

Іноді для розкладання на множники доводиться застосовувати кілька способів. Тоді розкладання доцільно починати з винесення спільного множника за дужки, якщо такий множник існує.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен $5m^4 - 20m^2n^2$.

Розв'язання. Спочатку винесемо за дужки спільний множник $5m^2$:

$5m^4 - 20m^2n^2 = 5m^2(m^2 - 4n^2)$.

Тепер до виразу в дужках застосуємо формулу різниці квадратів:

$$5m^2(m^2 - 4n^2) = 5m^2(m - 2n)(m + 2n).$$

Відповідь: $5m^2(m - 2n)(m + 2n)$.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен

$$2x^4 + 12x^3 + 18x^2.$$

Розв'язання. Винесемо за дужки спільний множник $2x^2$, а вираз в дужках згорнемо в повний квадрат:

$$2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2.$$

Відповідь: $2x^2(x + 3)^2$.

Приклад 3. Розкласти на множники многочлен

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b.$$

Розв'язання. Винесемо за дужки спільний множник a^2b, матимемо:

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(ab - 3a + 5b - 15).$$

Многочлен $ab - 3a + 5b - 15$, що утворився в дужках, можна розкласти на множники способом групування:

$ab - 3a + 5b - 15 = (ab - 3a) + (5b - 15) = a\underline{(b - 3)} + 5\underline{(b - 3)} =$
$= (b - 3)(a + 5)$.

Остаточно маємо: $a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(b - 3)(a + 5)$.

Відповідь: $a^2b(b - 3)(a + 5)$.

Універсального правила для розкладання многочленів на множники немає. Приклади, які ми розглянули вище, дають змогу лише сформулювати *правило-орієнтир*, якого бажано дотримуватися для розкладання многочленів на множники.

1) Якщо можливо, винести спільний множник за дужки.
2) Перевірити, чи не є вираз, отриманий у дужках, квадратом двочлена або різницею квадратів, різницею чи сумою кубів.
3) Якщо многочлен, отриманий у дужках, містить чотири або шість доданків, перевірити, чи не розкладається він на множники способом групування.

Штучні прийоми розкладання многочленів на множники

Окрім запропонованого правила, інколи допомагають штучні прийоми. Розглянемо їх на прикладах.

Приклад 4. Розкласти на множники многочлен

$$a^2 - 4a + 4 - b^2.$$

Розв'язання. Оскільки перші три доданки є квадратом двочлена, застосуємо штучне групування, розбивши многочлен на дві групи, перша з яких є квадратом двочлена, а до другої включимо четвертий доданок. Тоді цей многочлен перетвориться на різницю квадратів двох виразів:

$$a^2 - 4a + 4 - b^2 = (a - 2)^2 - b^2 = (a - 2 - b)(a - 2 + b).$$

Відповідь: $(a - 2 - b)(a - 2 + b)$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x^2 + 8x - 20 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо таке число, яке разом з виразом $x^2 + 8x$ утворює квадрат двочлена. Це число 16. Тому в лівій частині рівняння додамо і віднімемо число 16. Одержимо:

$x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = 0;$
$(x^2 + 8x + 16) - 36 = 0;$
$(x + 4)^2 - 6^2 = 0.$

Далі розкладемо ліву частину рівняння на множники за формулою різниці квадратів і розв'яжемо одержане рівняння:

$(x + 4 - 6)(x + 4 + 6) = 0;$
$(x - 2)(x + 10) = 0;$
$x - 2 = 0$ або $x + 10 = 0;$
$x = 2$ або $x = -10.$

Відповідь: $-10;\ 2$.

Перетворення $x^2 + 8x - 20 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = (x + 4)^2 - 36$ називають *виділенням квадрата двочлена*.

Про розкладання многочленів на множники

Не кожний многочлен другого степеня, а тим паче — вищих за другий степінь, можна розкласти на множники. Наприклад, не можна розкласти на множники многочлени $x^2 + 4$, $x^2 + y^2 + 1$, $x^2 + x + 2$ тощо. Зокрема, не розкладаються на множники многочлени другого степеня, які є неповними квадратами суми або різниці та не містять спільного множника. Наприклад, $m^2 + m + 1$, $p^2 - 3p + 9$, $4x^2 + 2x + 1$ тощо.

Які способи розкладання многочленів на множники ви знаєте? ○ У чому полягає правило-орієнтир для розкладання многочленів на множники? ○ Чи кожний многочлен можна розкласти на множники? ○ Наведіть приклади многочленів, які не можна розкласти на множники.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

840. (*Усно.*) З формул виберіть ті, що є тотожностями:
1) $(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2$;
2) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + 2ab + b^2)$;
6) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$.

841. Які з формул є тотожностями:
1) $(m - n)^2 = m^2 - mn + n^2$;
2) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$;
3) $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$;
4) $(c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2$;
5) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;
6) $a^2 - b^2 = (a + b)(a + b)$?

842. Закінчіть розкладання на множники:
1) $xa^2 - 9x = x(a^2 - 9) = x(a^2 - 3^2) = \ldots$;
2) $bm^2 - 2mb + b = b(m^2 - 2m + 1) = \ldots$.

843. (*Усно.*) Розкладіть на множники:
1) $ax^2 - ay^2$;
2) $mp^2 - m$;
3) $b^3 - b$.

844. Розкладіть на множники:
1) $5a^2 - 5b^2$;
2) $ap^2 - aq^2$;
3) $2xm^2 - 2xn^2$;
4) $7b^2 - 7$;
5) $16x^2 - 4$;
6) $75 - 27c^2$;
7) $5mk^2 - 20m$;
8) $63ad^2 - 7a$;
9) $125px^2 - 5py^2$.

845. Подайте у вигляді добутку:
1) $m^3 - m$; 2) $p^2 - p^4$; 3) $7a - 7a^3$;
4) $9b^5 - 9b^3$; 5) $81c^3 - c^5$; 6) $3a^5 - 300a^7$.

846. Розкладіть на множники:
1) $ax^2 - ay^2$; 2) $ma^2 - 4mb^2$; 3) $28 - 7m^2$;
4) $p^5 - p^3$; 5) $b - 4b^3$; 6) $a^5 - a^3c^2$;
7) $15d - 15d^3$; 8) $625b^3 - b^5$; 9) $500a^5 - 45a^3$.

847. Розв'яжіть рівняння:
1) $3x^2 - 27 = 0$; 2) $5 - 20x^2 = 0$.

848. Знайдіть корені рівняння:
1) $8 - 2x^2 = 0$; 2) $75x^2 - 3 = 0$.

849. Розкладіть на множники:
1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$; 2) $-2m^2 + 4mn - 2n^2$;
3) $-a^2 - 4a - 4$; 4) $6a^2 + 24ab + 24b^2$;
5) $2am^2 + 4am + 2a$; 6) $8a^4 - 8a^3 + 2a^2$.

850. Подайте многочлен у вигляді добутку:
1) $-4a^2 + 8ab - 4b^2$; 2) $-25by^2 - 10by - b$;
3) $a^5 + 6a^4m + 9a^3m^2$; 4) $6by^2 + 36by^3 + 54by^4$.

851. Знайдіть значення виразу:
1) $3m^2 - 3n^2$, якщо $m = 41$, $n = 59$;
2) $2x^2 + 4xy + 2y^2$, якщо $x = 29$, $y = -28$.

852. Знайдіть значення виразу:
1) $5x^2 - 5y^2$, якщо $x = 49$, $y = 51$;
2) $3a^2 - 6ab + 3b^2$, якщо $a = 102$, $b = 101$.

853. Подайте у вигляді добутку:
1) $3a^3 - 3b^3$; 2) $7x^3 + 7y^3$; 3) $-pm^3 - pn^3$;
4) $16a^3 - 2$; 5) $125m + m^4$; 6) $a^7 - a^4$.

854. Розкладіть на множники:
1) $bx^3 - by^3$; 2) $-2a^3 - 2b^3$; 3) $8a - a^4$.

855. Розкладіть на множники:
1) $a^4 - 81$; 2) $16 - c^4$; 3) $x^8 - 1$; 4) $a^4 - b^8$.

856. Доведіть тотожність:
$$a^8 - b^8 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4).$$

857. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^3 - x = 0$; 2) $112y - 7y^3 = 0$;
3) $64x^3 + x = 0$; 4) $y^3 + 4y^2 + 4y = 0$.

858. Розв'яжіть рівняння:
1) $y - y^3 = 0$; 2) $5x^3 - 180x = 0$;
3) $16y^3 + y = 0$; 4) $x^3 - 2x^2 + x = 0$.

859. Розкладіть на множники:
1) $7ab + 21a - 7b - 21$;
2) $6mn + 60 - 30m - 12n$;
3) $-abc - 3ac - 4ab - 12a$;
4) $a^3 - ab - a^2b + a^2$.

860. Подайте вираз у вигляді добутку:
1) $90 + 3ab - 45a - 6b$;
2) $-3mn - 9m - 18n - 54$;
3) $a^4x + a^4 + a^3x + a^3$;
4) $p^3a^2 + pa^2 - 3ap^3 - 3ap$.

861. Розкладіть на множники:
1) $a^2 + 2ab + b^2 - 16$;
2) $a^2 - x^2 - 2xy - y^2$;
3) $p^2 - x^2 + 10p + 25$;
4) $p^2 - x^2 + 20x - 100$.

862. Розкладіть на множники:
1) $x^2 + 2xy + y^2 - 25$;
2) $m^2 - a^2 + 2ab - b^2$;
3) $m^2 - a^2 - 8m + 16$;
4) $m^2 - b^2 - 8b - 16$.

863. Подайте вираз у вигляді добутку:
1) $a^2 - 81 + a - 9$;
2) $m^2 - a^2 - (a + m)$;
3) $x^2 - y^2 - x + y$;
4) $x + x^2 - y - y^2$;
5) $a - 3b + a^2 - 9b^2$;
6) $16m^2 - 25n^2 - 4m - 5n$.

864. Розкладіть на множники:
1) $a^2 - b^2 - (a - b)$;
2) $p^2 - b - p - b^2$;
3) $16x^2 - 25y^2 + 4x - 5y$;
4) $100m^2 - 10m + 9n - 81n^2$.

865. Перетворіть вираз на добуток:
1) $p^2(m - 3) - 2p(m - 3) + (m - 3)$;
2) $1 - a^2 - 4b(1 - a^2) + 4b^2(1 - a^2)$.

866. Доведіть тотожність:
$$c^2(c - 2) - 10c(c - 2) + 25(c - 2) = (c - 2)(c - 5)^2.$$

867. Подайте у вигляді добутку:
1) $ab^2 - b^3 - a + b$;
2) $ax^2 - a^3 + 7x^2 - 7a^2$;
3) $p^3 + p^2q - 4p - 4q$;
4) $a^3 - 5m^2 + 5a^2 - am^2$.

868. Розкладіть на множники:
1) $m^3 + n^3 + m + n$;
2) $a - b - (a^3 - b^3)$;
3) $a^3 + 8 - a^2 - 2a$;
4) $8p^3 - 1 - 12p^2 + 6p$.

869. Подайте у вигляді добутку:
1) $m^3 + m^2n - m - n$;
2) $ba^2 - 3a^2 - 4b + 12$;
3) $a^3 - b^3 + a - b$;
4) $x^3 + 1 - 5x - 5$.

870. Розв'яжіть рівняння:
1) $y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0$;
2) $x^3 = 2x^2 + 4x - 8$.

871. Для якого значення x:
1) значення виразу $x^3 - x^2 - x + 1$ дорівнює нулю;
2) значення виразів $x^3 - 9x$ і $x^2 - 9$ між собою рівні?

872. Запишіть у вигляді добутку:
1) $9(a+b)^2-(a^2-2ab+b^2)$;
2) $25(3y-2m)^2-36(9y^2+12my+4m^2)$.

873. Розкладіть на множники:
1) $a^3+8b^3+a^2-2ab+4b^2$;
2) $m^3-8n^3+m^2-4mn+4n^2$.

874. Перетворіть многочлен на добуток многочленів:
1) $a^3-b^3+a^2-2ab+b^2$; 2) $c^2+2cd+d^2-x^2-2xy-y^2$.

875. Розкладіть тричлен на множники, виділивши попередньо квадрат двочлена:
1) x^2-2x-3;
2) x^2+8x-9;
3) x^2-3x-4;
4) x^2+x-2.

Розв'язання.

4) $x^2+x-2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=(x-1)(x+2).$

876. Доведіть, що для будь-якого цілого значення n значення виразу $\frac{n^3-n}{6}$ є числом цілим.

Вправи для повторення

877. Спростіть вираз:
1) $x(x+1)(x+2)-3(x-2)(x+2)+2(x-6)$;
2) $(2x+3y)(3y-x)-(2x-y)(5x-y)+(2x-3y)(5x+2y)$.

878. Розв'яжіть рівняння:

$$x((x-2)^2+4x)=64\left(\frac{1}{4}x-1\right)\left(\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{4}x+1\right).$$

879. Супермаркет електроніки до річниці свого відкриття вирішив продати 141 планшет і 95 смартфонів зі знижками. Щогодини продавали по 12 акційних планшетів та по 10 акційних смартфонів. Через скільки годин від початку дії знижок акційних планшетів у супермаркеті залишалося утричі більше, ніж акційних смартфонів?

Життєва математика

880. Світлана вклала 60 000 грн у цінні папери, придбавши акцій фірми «Альфа» на 15 000 грн, акцій компанії «Бета» – на 20 000 грн, а решту вклавши в акції фірми «Гамма». Через рік акції фірми «Альфа» подорожчали на 20 %, акції компанії «Бета» – на 8 %, а акції фірми «Гамма» подешевшали на 10 %. Яким є загальний прибуток чи збиток Світлани за рік?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

881. Тарас і Яна живуть в одному під'їзді на одному поверсі й навчаються в одній школі. Тарас пішки витрачає на дорогу до школи 12 хв, а Яна – 18 хв. Через 3 хвилини після того, як вийшла Яна, до школи вирушив і Тарас. Через який час після свого виходу він наздожене Яну?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Якому многочлену тотожно дорівнює вираз $(m - n)^2$?

А. $m^2 + 2mn + n^2$ **Б.** $m^2 - n^2$

В. $m^2 + n^2$ **Г.** $m^2 - 2mn + n^2$

2. Знайдіть добуток $(a - x)(a + x)$.

А. $a^2 + x^2$ **Б.** $a^2 - x^2$ **В.** $x^2 - a^2$ **Г.** $a^2 + 2xa + x^2$

3. Подайте вираз $x^2 + 2xy + y^2$ у вигляді квадрата двочлена.

А. $(x - y)^2$ **Б.** $(y - x)^2$ **В.** $(2x + y)^2$ **Г.** $(x + y)^2$

2 **4.** Перетворіть вираз $(5x - 1)^2$ на многочлен.

А. $5x^2 - 10x + 1$ **Б.** $25x^2 + 10x + 1$

В. $25x^2 - 10x + 1$ **Г.** $25x^2 - 1$

5. Розкладіть двочлен $-16 + 9a^2$ на множники.

А. $(3a - 4)(3a - 4)$ **Б.** $(3a + 4)(4 - 3a)$

В. $(3a + 4)(3a - 4)$ **Г.** $(3a - 4)^2$

6. Подайте вираз $m^3 + 64$ у вигляді добутку.

А. $(m + 4)(m^2 - 4m + 16)$ **Б.** $(m + 4)(m^2 - 8m + 16)$

В. $(m - 4)(m^2 + 4m + 16)$ **Г.** $(m + 4)(m^2 - 4m - 16)$

3 **7.** Розв'яжіть рівняння: $x(x + 2) - (x - 3)^2 = 7$.

А. -2 **Б.** -1 **В.** 1 **Г.** 2

8. Спростіть вираз $(m^2 + 2p)(m^4 - 2m^2p + 4p^2)$.

А. $m^4 + 8p^3$ **Б.** $m^6 + 8p^3$
В. $m^6 - 8p^3$ **Г.** $m^6 + 4p^3$

9. Розкладіть многочлен $3ab - 3b + 6a - 6$ на множники.

А. $(a - 1)(b + 2)$ **Б.** $3(a + 1)(b - 2)$
В. $3(a + 1)(b + 2)$ **Г.** $3(a - 1)(b + 2)$

4 **10.** Якого найменшого значення набуває вираз $x^2 + 4x + 3$?

А. 1 **Б.** 0 **В.** -1 **Г.** -2

11. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

А. -2; -1; 1 **Б.** -2; 1
В. -2; -1 **Г.** -1; 1

12. Розкладіть вираз $(b - 2)^3 - b^3$ на множники.

А. $2(b^2 - 6b + 4)$ **Б.** $-2(b^2 - 6b + 4)$
В. $-2(3b^2 - 6b + 4)$ **Г.** $2(3b^2 - 6b + 4)$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням, якщо $x = 1{,}4$ (А–Г).

Вираз	*Значення виразу, якщо $x = 1{,}4$*
1. $25x^2 - 70x + 49$	**А.** -1
2. $(5x - 1)(25x^2 + 5x + 1) - 125x^3$	**Б.** 0
3. $72 - 120x + 50x^2$	**В.** 1
	Г. 2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 16–21

1 **1.** Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(p + a)^2$; 2) $(c - m)(c + m)$.

2. Розкладіть на множники:

1) $t^2 - 2tb + b^2$; 2) $d^2 - n^2$.

3. Які з рівностей є тотожностями:

1) $(p - a)^2 = p^2 - pa + a^2$;
2) $p^3 + q^3 = (p + q)(p^2 - pq + q^2)$;
3) $m^2 - c^2 = (m - c)(m + c)$;
4) $d^3 - t^3 = (d - t)(d^2 + 2dt + t^2)$?

2 **4.** Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(3a - 5)^2$; 2) $(7 + 2b)(2b - 7)$.

5. Розкладіть многочлен на множники:
1) $a^2 + 6a + 9$; 2) $-25 + 36x^2$;
3) $b^3 + 64$; 4) $7c^2 - 7d^2$.

6. Спростіть вираз $(2x + 3)^2 + (7 - 2x)(7 + 2x)$ та знайдіть його значення, якщо $x = -\frac{1}{12}$.

7. Розв'яжіть рівняння:
1) $2x^3 - 50x = 0$; 2) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$.

8. Спростіть вираз:
1) $(-4a + 3b)^2 + (-4a + 5b)(5b + 4a) + 24ab$;
2) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - a(a - 3)(a + 3)$.

9. Доведіть, що для будь-якого значення змінної x вираз $x^2 + 8x + 17$ набуває лише додатних значень. Якого найменшого значення набуває цей вираз і для якого значення x?

Додаткові вправи

10. Перетворіть вираз на многочлен:
1) $(a + 3)^3$; 2) $(2m - 5)^3$.

11. Знайдіть дві останні цифри числа $293^3 - 93^3$.

12. Розкладіть тричлен $x^2 + 6x - 7$ на множники.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 4

882. Випишіть вирази, які є виразами зі змінними, у дві групи: у першу – цілі раціональні вирази, у другу – дробові раціональні вирази:

1) $m - 7$; 2) $\frac{a^2 - b}{5}$; 3) $\frac{7 + 9 \cdot 2}{3}$; 4) $(3 - 9) + 7 \cdot 8$;

5) $-\frac{1}{6}ab$; 6) $\frac{3}{a + c^3}$; 7) $\frac{1}{x} + \frac{1}{3}$; 8) $a^3 - a^2 + a$.

883. На склад привезли a мішків цукру, по 50 кг у кожному. Запишіть виразом масу всього завезеного цукру. Знайдіть значення цього виразу, якщо $a = 12$.

884. Запишіть у вигляді виразу:
1) двоцифрове число, у якому x десятків і y одиниць;
2) двоцифрове число, у якому 5 десятків і a одиниць;
3) трицифрове число, у якому a сотень, b десятків і c одиниць;

4) трицифрове число, у якому m сотень, n десятків і 6 одиниць.

4 **885.** Відомо, що $x - y = 2$ і $p = 3$. Знайдіть значення виразу:
1) $x + p - y$; 2) $x - y + 5p$; 3) $(y - x)p$;
4) $\dfrac{3(y-x)}{-p+4(x-y)}$; 5) $7x - 7y - p$; 6) $\dfrac{6}{p} - \dfrac{4}{5(y-x)}$.

До § 5

1 **886.** Спростіть вираз:
1) $2 + 3a - 5$; 2) $0{,}4m + m$;
3) $3p - 2p + 5$; 4) $-(m - 3)$.

2 **887.** Розкрийте дужки та зведіть подібні доданки:
1) $7(5x + 8) - 12x$; 2) $9m + 3(15 - 4m)$;
3) $6(x + 1) - 6x - 9$; 4) $12x - 2(3x - 5)$;
5) $-(2x + 1) - 3(2x - 5)$; 6) $5(x - 2) - 4(2x - 3)$.

3 **888.** Доведіть тотожність:
1) $18(a - 2) = 12a - (20 - (6a - 16))$;
2) $2(x - y + t) - 3(x + y - t) - 5(t - y) = -x$.

4 **889.** Доведіть, що сума будь-яких трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.

* **890.** Чи є тотожністю рівність:
1) $|a + 5| = a + 5$; 2) $|m^2 + 1| = m^2 + 1$;
3) $|m - n| = |n - m|$; 4) $|a| + |b| = |a + b|$?

До § 6

1 **891.** а) Подайте добуток у вигляді степеня:
1) $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$; 2) $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;
3) aa; 4) $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{x}{y}$.

б) Подайте степінь у вигляді добутку однакових множників:
1) m^3; 2) 17^4; 3) $(p + 2)^2$; 4) $\left(\dfrac{a}{9}\right)^5$.

2 **892.** Обчисліть:
1) 2^6; 2) $(0{,}2)^3$; 3) $\left(-\dfrac{1}{8}\right)^2$; 4) $\left(-1\dfrac{1}{6}\right)^3$;
5) $-(-2)^3$; 6) $-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$; 7) $-(-0{,}1)^2$; 8) $-(-1)^{27}$.

893. Не виконуючи обчислень, порівняйте з нулем значення виразу:
1) $(-1{,}7)^{15} \cdot (-2{,}7)^2$; 2) $(-2{,}3)^3 : (-5{,}89)$;
3) $-3{,}7^2 \cdot (-2{,}8)^4$; 4) $-(-2{,}6)^8 \cdot (-5{,}7)^5$.

894. Знайдіть останню цифру числа:
1) 2025^{13}; 2) 5011^7; 3) 1006^{17}; 4) $15^9 + 16^8 + 101^{17}$.

895. Чи є число:
1) $10^{17} + 5$ кратним числу 3;
2) $10^{29} + 7$ кратним числу 9?

До § 7

896. Подайте у вигляді степеня:
1) b^7b^3; 2) a^3a; 3) $9^8 \cdot 9^7$; 4) $p^{10} : p^3$;
5) $19^8 : 19^6$; 6) $7^{15} : 7^{14}$; 7) $(a^3)^4$; 8) $(2^5)^3$.

897. Обчисліть:
1) $3^8 : 3^7$; 2) $2^5 \cdot 2^{12} : 2^{15}$; 3) $\dfrac{10^4 \cdot 10^9}{10^{10}}$; 4) $\dfrac{8^5 \cdot 8^{10}}{8^{11} \cdot 8^3}$.

898. Знайдіть значення x, для якого рівність є тотожністю:
1) $(4^7)^x = 4^{21}$; 2) $(3^2)^6 = 3^{3x}$; 3) $\left(\left(\left(\frac{1}{7}\right)^x\right)^3\right)^4 = \left(\frac{1}{7}\right)^{24}$.

899. Запишіть вираз у вигляді степеня (n – натуральне число):
1) $(a^{18} : a^{2n}) \cdot (a^7 : a^n)$, де $n < 7$; 2) $\dfrac{a^8 \cdot a^{2n}}{a^n \cdot a^5} \cdot a^{4n}$.

900. Знайдіть останню цифру числа (n – натуральне число):
1) 8^{4n}; 2) 7^{4n+1}.

До § 8

901. Які з виразів є одночленами? Які з одночленів подано у стандартному вигляді:
1) $-a^2c$; 2) $7a \cdot 2b \cdot 4$; 3) 17; 4) $aaba$;
5) $6\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)$; 6) $p + 1$; 7) $-p^2$; 8) $c^9 - c$?

902. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:
1) $-\frac{1}{2}a^2b \cdot 2ab^7$; 2) $3m \cdot (-2m^2) \cdot 5m^7$;

3) $-7ap^2 \cdot 0{,}1a^2p^9$; 4) $1\frac{1}{8}m^2 \cdot \frac{8}{9}mc^2$;

5) $-a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-5d)$; 6) $p^9 \cdot (-2a^2) \cdot (-5p^7) \cdot a^8$.

3 **903.** Складіть два різних одночлени стандартного вигляду зі змінними a і b так, щоб:
1) степінь кожного з них дорівнював 7, а коефіцієнт дорівнював -8;
2) степінь кожного з них дорівнював 3, а коефіцієнт дорівнював 17.

До § 9

1 **904.** Знайдіть добуток одночленів:
1) $3m \cdot 2n$; 2) $-4p \cdot 2a$; 3) $8m^2 \cdot 3n$; 4) $-2a^3 \cdot (-b^7)$.

2 **905.** Подайте вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $-2{,}5m^2 \cdot (-4m^3p)$; 2) $12p^2m \cdot \left(-\frac{5}{6}p^3m^7\right)$;

3) $0{,}6m^7a^9 \cdot 10m^2a^7 \cdot \frac{1}{2}m^3$; 4) $(-mn^7)^3$;

5) $(-2a^5b^7)^2$; 6) $(m^3p^7a^9)^5$.

3 **906.** Знайдіть одночлен A, якщо:
1) $A \cdot 14m^2n = 42m^4n^2$; 2) $3p^2q^7 \cdot A = -21p^3q^7$.

907. Виконайте множення одночленів $0{,}4m \cdot 10nm^2$ та знайдіть значення одержаного добутку, якщо $m = -2$; $n = 0{,}5$.

4 **908.** Чи можна подати вираз у вигляді квадрата одночлена:
1) $49m^8n^{12}$; 2) $-25a^4b^8$;
3) $-0{,}2m^4n^2 \cdot (-5m^2n^4)$; 4) $-(-3a^4)^3 \cdot 3a^{12}$?

909. Для якого натурального значення n рівність

$$(2{,}5a^8c)^n \cdot 0{,}16c^5 = 2{,}5a^{24}c^8$$

є тотожністю?

До § 10

1 **910.** З даних одночленів складіть многочлен та вкажіть його степінь:
1) $5a^2$ і $4b$; 2) $-a^2$; ab і m;
3) $5c^3$ і -8; 4) $3mn^2$; $4mn$; $-5m^2n$ і -7.

2 **911.** Зведіть подібні члени многочлена:
1) $8a^2b - 7ab^2 + 5a^2b + 4b^2a$; 2) $5mn - 2mn - 8 - 3mn$;
3) $7m^3 + m^2 - 8 - m^3 + 3m^2$;
4) $2x^2y - 7xy^2 - 5xy + 3yx^2 + 7y^2x$.

3 **912.** Зведіть до стандартного вигляду многочлен

$$-\frac{1}{4}ab \cdot (-8ab^2) + 8a^2 \cdot (-1{,}5ab) + 20ab \cdot (-0{,}1ab^2) + a^2ab + 2a \cdot 6a^2b$$

і знайдіть його значення, якщо $a = 5$; $b = -\frac{1}{25}$.

4 **913.** Чи існують такі натуральні значення змінної a, для яких значення многочлена $2a^2 + 6a + 7$ є парним числом?

До § 11

2 **914.** Спростіть вираз:
1) $(3m + 5n) + (9m - 7n) - (-2n + 5m)$;
2) $(12ab - b^2) - (5ab + b^2) + (ab + 2b^2)$;
3) $(3x^2 + 2x) + (2x^2 - 3x - 4) - (17 - x^2)$;
4) $(m - n + p) + (m - p) - (m - n - p)$.

3 **915.** 1) Подайте многочлен $4x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ у вигляді суми двочленів.
2) Подайте многочлен $x^3 - 5x + 7x^2 - 9$ у вигляді різниці одночлена і тричлена.

916. Який многочлен у сумі з многочленом $2x^2 - 3x + 7$ дає:
1) 0; 2) 5; 3) $-3x + 1$; 4) $x^2 - 5x + 7$?

4 **917.** Доведіть, що сума двох послідовних непарних цілих чисел ділиться на 4.

918. Спростіть вираз $5xy - 8x^2y - \left(3xy - \left(4\frac{1}{4}xy^2 + 8x^2y\right) - 2{,}75xy^2\right)$ і знайдіть його значення, якщо $x = -1$; $y = 3$.

До § 12

1 **919.** Виконайте множення:
1) $a(b + 7)$; 2) $c(2 - x)$; 3) $-a(m - 3)$; 4) $-b(a - x + y)$.

2 **920.** Перетворіть добуток на многочлен:
1) $2xa(a^2 - 3ax)$; 2) $-3mp(2m^3 - 5mp)$;
3) $4ab^2(a^2 - 2ab - b^2)$; 4) $(4m^3 - 2mn^2 - n^2)mn^2$;
5) $(-0{,}1x^3y + 0{,}2x^2y - y^3)(-5x^2y)$;
6) $-10n^3x\,(5nx^2 - 2n^2x + x^5)$.

3 **921.** Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $2x(x + y) - y(2x - y) - y(y + 1)$, якщо $x = -5$, $y = -10$;
2) $m^2(m^2 - 5m + 1) - 2m(m^3 - 4m^2 + m) + m^4 - 3m^3 + 2$, якщо $m = -3$.

922. Для якого значення змінної значення виразу $2x(6x - 5)$ на 5 менше від відповідного значення виразу $3(4x^2 - 5)$?

4 **923.** Спростіть вираз $\frac{1}{8}x^n - \frac{5}{8}x^2(1 + x^{n-2}) + \frac{1}{2}x^3(x^{n-3} + 2)$, де $n > 3$, n – натуральне число.

924. За перший день з овочесховища продали на 3 ц більше овочів, ніж за другий, а за третій $\frac{4}{9}$ від того, що продали за перші два дні разом. По скільки центнерів овочів продавали кожного із цих днів, якщо разом за ці дні продали 65 ц овочів?

✱ **925.** Розв'яжіть рівняння $\frac{1 - \frac{3x}{2}}{4} + \frac{2 - \frac{x}{4}}{3} = x - 2.$

До § 13

1 **926.** Винесіть за дужки спільний множник:
1) $5x - 5y$; 2) $7m + 7n$; 3) $ap + ac$; 4) $bm - bk$.

2 **927.** Розкладіть на множники:
1) $7ax - 7bx$; 2) $8a + 24ac$; 3) $18p - 24p^2$;
4) $5m^3 - 10m^2$; 5) $-15a^2 - 20a^3$; 6) $a^7 - a^2 + a^5$.

3 **928.** Подайте вираз у вигляді добутку:
1) $6xy - 12x^2y + 15xy^2$;
2) $7mn^5 + 28m^2n^3 - 7m^3n^2$;
3) $a(x - 2) + 3b(x - 2) - 2(2 - x)$;
4) $8(m - 1)^2 - n(1 - m)$.

4 **929.** Розв'яжіть рівняння:
1) $x|x - 3| - 5|x - 3| = 0$;
2) $|x||x - 2| - 7|x - 2| = 0$.

✱ **930.** Для деякого значення x значення виразу $x^2 - 3x - 13$ дорівнює -1. Знайдіть для того самого значення x значення виразу:
1) $2x^2 - 6x - 26$; 2) $x^2(x^2 - 3x - 13) - 3x(x^2 - 3x - 13)$;
3) $3x^2 - 9x - 8$; 4) $\frac{5}{12}x^2 - \frac{5}{4}x + 3$.

До § 14

1 **931.** Виконайте множення:
1) $(m - p)(a + x)$; 2) $(2 + t)(a - 3)$;
3) $(a + b)(2 + c)$; 4) $(a - 2)(b - 3)$.

932. Подайте у вигляді многочлена:
1) $(2m - 3p)(3m + 2p)$; 2) $(2a^2 + b)(3b - 5a^2)$;
3) $(7x^2 - 2x)(3x + 1)$; 4) $(5a^3 - 4a^2)(9a^2 + 8a)$;
5) $(3a^2 + 5ba)(3b - 4a)$; 6) $(mn - n^2)(4n^3 + 2n^2m)$.

933. Спростіть вираз:
1) $(a - 8)(2a - 2) - (a + 9)(a - 3)$;
2) $(x - y)(x + 3) - (x + y)(x - 3)$;
3) $(3a - 5b)(5a + 3b) - (5a - 3b)(3a + 5b)$;
4) $(a^3 + 4m)(a^2 - 4m) - (a^2 + 4m)(a^3 - 4m)$.

934. Розв'яжіть рівняння:
1) $(3x - 1)(2x + 6) - (2x - 2)(3x + 1) = -24$;
2) $(3x + 9)(x - 5) - (x - 7)(3x - 1) = 12 + 8x$.

935. Доведіть, що значення виразу
$2(10x - 5)(x + 0{,}6) + (4x^2 - 1)(2x - 5) - (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
не залежить від значення змінної.

936. Доведіть, що $(x + 1)(y + 1) - (x - 1)(y - 1) = 8$, якщо $x + y = 4$.

937. Два акваріуми мають форму прямокутного паралелепіпеда. Довжина першого – на 10 см більша за його ширину. Довжина другого акваріума на 20 см більша за довжину першого, а ширина – на 10 см більша за ширину першого. Якщо обидва акваріуми заповнити водою на висоту 25 см, то води в другому буде на 37,5 л більше, ніж у першому. Знайдіть довжину і ширину першого акваріума.

До § 15

938. Закінчіть розкладання многочлена на множники:
$ab - 7b + 3a - 21 = (ab - 7b) + (3a - 21) = \ldots$

939. Розкладіть на множники:
1) $m(a - b) + 3a - 3b$; 2) $a(b + c) + b + c$;
3) $3a - 3c + xa - xc$; 4) $ab - ac - 4b + 4c$.

940. Подайте многочлен у вигляді добутку:
1) $12x^2c - 8x^2y - 9cy^3 + 6y^4$;
2) $1{,}6mn^2 - 2{,}4mp^2 - n^3 + 1{,}5np^2$.

941. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$, застосувавши розкладання многочлена на множники.

До § 16

942. Піднесіть двочлен до степеня:
1) $(x - p)^2$; 2) $(m + a)^2$; 3) $(b - k)^2$; 4) $(y + c)^2$.

2 **943.** Перетворіть вираз на многочлен:
1) $(3a - 7)^2$; 2) $(2b + 5)^2$; 3) $(10m - 5k)^2$;
4) $(4p + 9q)^2$; 5) $(0{,}1m - 5p)^2$; 6) $\left(\frac{1}{6}a + 6b\right)^2$.

3 **944.** Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(a - 1)^2 - (a - 2)^2$, якщо $a = 1{,}5$;
2) $(3b + 2)^2 + (3b - 2)^2$, якщо $b = -\frac{1}{3}$.

945. Знайдіть число, квадрат якого після збільшення цього числа на 3 збільшується на 159.

4 **946.** Чи є рівність $(a - b)^2 = |a - b|^2$ тотожністю?

947. Подайте у вигляді многочлена:
1) $((x + y) + a)^2$; 2) $((b - c) - d)^2$;
3) $(m + n + 2)^2$; 4) $(a + 3 - c)(a + 3 - c)$.

До § 17

1 **948.** Подайте у вигляді квадрата двочлена:
1) $m^2 - 2mp + p^2$; 2) $b^2 + 2by + y^2$; 3) $a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 4^2$.

2 **949.** Розкладіть на множники:
1) $m^2 + 20m + 100$; 2) $49 - 14b + b^2$; 3) $0{,}09x^2 + 0{,}6x + 1$;
4) $\frac{1}{36} - \frac{1}{3}p + p^2$; 5) $4x^2 + 20x + 25$; 6) $4m^2 - 12mp + 9p^2$.

3 **950.** Знайдіть значення виразу:
1) $-100m^2 + 20m - 1$, якщо $m = 0{,}1; -0{,}9$;
2) $-4x^2 - 12xy - 9y^2$, якщо $x = 0{,}03$, $y = -0{,}02$.

4 **951.** Розв'яжіть рівняння:
1) $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$; 2) $5y^2 + 2y + \frac{1}{5} = 0$.

952. Змініть один з коефіцієнтів многочлена так, щоб одержаний тричлен можна було подати у вигляді квадрата двочлена (знайдіть три різних розв'язки):
1) $100m^2 + 40mn + n^2$; 2) $25a^2 - ab + 9b^2$.

* **953.** Доведіть, що для будь-яких значень змінних вираз набуває лише невід'ємних значень:
1) $4x(4x - 10) + 25$;
2) $(a - 2)((a - 2) + 2m) + m^2$;
3) $(a + b)(a + b + 8) + 16$.

До § 18

1 **954.** Які з рівностей є тотожностями:
1) $(b - x)(b + x) = b^2 + x^2$; 2) $(c - d)(c + d) = c^2 - d^2$;
3) $(m + n)(m - n) = (m + n)^2$; 4) $(p + q)(p - q) = p^2 - q^2$?

2 **955.** Виконайте множення:
1) $(c + 7)(7 - c)$; 2) $(0{,}5m - 3)(0{,}5m + 3)$;
3) $(3k + 7)(3k - 7)$; 4) $(2p - 9q)(9q + 2p)$;
5) $(10m + 9n)(9n - 10m)$; 6) $\left(\frac{2}{3}c - \frac{4}{5}d\right)\left(\frac{2}{3}c + \frac{4}{5}d\right)$.

956. Подайте у вигляді многочлена:
1) $4(a - 1)(a + 1)$; 2) $b(b - 2)(b + 2)$;
3) $7p(p + 3)(p - 3)$; 4) $-3x(x + 4)(x - 4)$.

3 **957.** Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(1{,}9x - 3)(3 + 1{,}9x) + 0{,}39x^2$, якщо $x = 2$;
2) $9{,}99 - (5y - 0{,}1)(5y + 0{,}1)$, якщо $y = \frac{1}{5}$;
3) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$, якщо $x = 1{,}8$; $y = -1{,}8$;
4) $(ab + 1)(ab - 1)(a^2b^2 + 1)$, якщо $a = 5$; $b = \frac{1}{5}$.

4 **958.** Обчисліть: $7^{40} \cdot 3^{40} - (21^{20} - 1)(21^{20} + 1)$.

До § 19

1 **959.** Які з рівностей є тотожностями:
1) $m^2 - p^2 = (m + p)(m - p)$; 2) $a^2 - 7^2 = (a - 7)(a + 7)$;
3) $c^2 - d^2 = (c - d)(c + d)$; 4) $9^2 - a^2 = (9 - a)^2$?

2 **960.** Розкладіть на множники двочлен:
1) $x^2 - 49$; 2) $100 - p^2$; 3) $0{,}04m^2 - n^2$;
4) $25x^2 - 36y^2$; 5) $16a^2 - b^2c^2$; 6) $121m^2a^2 - \frac{1}{9}b^2$.

3 **961.** Розв'яжіть рівняння, де x – змінна:
1) $a^2x^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$; 2) $x^2 - 0{,}09a^2 = 0$.

4 **962.** Чи ділиться:
1) $138^2 - 136^2$ на 4; 2) $349^2 - 347^2$ на 6?

963. Розкладіть на множники вираз:
1) $9 - (2x - 8)(3x + 2) - 2x(5x + 10)$;
2) $(3x + 5)(4x - 5) - 2x(2{,}5 + 1{,}5x)$.

До § 20

964. Який з даних виразів є неповним квадратом суми виразів m і n, а який – неповним квадратом їх різниці:
1) $m^2 - 2mn + n^2$; 2) $m^2 + mn + n^2$;
3) $m^2 + 2mn + n^2$; 4) $m^2 - mn + n^2$?

965. Розкладіть на множники:
1) $x^3 - y^3$; 2) $p^3 + k^3$; 3) $a^3 - 64$;
4) $\frac{1}{125} + b^3$; 5) $0{,}001m^3 - 1$; 6) $8x^3 + 27p^3$.

966. Доведіть, що значення виразу $37^3 + 13^3$ ділиться на 50.

967. Доведіть тотожність
$x^6 - y^6 = (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$.

До § 21

968. Закінчіть розкладання на множники:
1) $ym^2 - 4y = y(m^2 - 4) = y(m^2 - 2^2) = \ldots$
2) $ca^2 + 2ac + c = c(a^2 + 2a + 1) = \ldots$

969. Розкладіть на множники многочлен:
1) $mp^2 - mq^2$; 2) $20a^2 - 5$;
3) $c - c^3$; 4) $64a^2 - a^4$;
5) $5x^2 - 10xy + 5y^2$; 6) $2b + 4bn + 2bn^2$.

970. Подайте у вигляді добутку:
1) $9a^3 - 9b^3$; 2) $2mn - 2bn + 6m - 6b$;
3) $\frac{1}{81}p^4 - 1$; 4) $m^2 - 4mn + 4n^2 - 25$;
5) $b^2 - 36 + b - 6$; 6) $m^3 - 4m - m^2n + 4n$.

971. Розкладіть на множники многочлен:
1) $am^4 - m^4 - am^2 + m^2$; 2) $a^3b - a^3 - ab + a$;
3) $b^3 + 1 - b^2 - b$; 4) $x^3 - 27 + x^4 - 9x^2$.

972. Доведіть тотожність:
1) $(a + 1)^3 - 4(a + 1) = (a + 1)(a - 1)(a + 3)$;
2) $(m^2 + 9)^2 - 36m^2 = (m - 3)^2(m + 3)^2$.

Головне в розділі 2

ТОТОЖНІ ВИРАЗИ

Два вирази, відповідні значення яких рівні між собою для будь-яких значень змінних, називають ***тотожними***, або ***тотожно рівними***.

ТОТОЖНІСТЬ

Рівність, яка є правильною для будь-яких значень змінних, називають ***тотожністю***.

ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ

Довести тотожність можна одним з таких способів:

▼ виконати тотожні перетворення її лівої частини, тим самим звівши до вигляду правої частини;

▼ виконати тотожні перетворення її правої частини, тим самим звівши до вигляду лівої частини;

▼ виконати тотожні перетворення обох її частин, тим самим звівши обидві частини до однакових виразів.

СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Степінь числа a з натуральним показником n $(n > 1)$ – це добуток n множників, кожний з яких дорівнює a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}},\ n > 1.$$

Степінь числа a з показником 1 – це саме число a:

$$a^1 = a.$$

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad a^{m+n} = a^m a^n$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad a^{m-n} = a^m : a^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$$

$$(ab)^n = a^n b^n \qquad a^n b^n = (ab)^n$$

ОДНОЧЛЕН

Цілі вирази – числа, змінні, їхні степені й добутки – називають ***одночленами***.

Якщо одночлен є добутком, що має один числовий множник, який записано на першому місці, а інші множники є степенями різних змінних, то такий одночлен називають ***одночленом стандартного вигляду***.

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, які він містить. Якщо одночлен не містить змінних (тобто є числом), то вважають, що його степінь дорівнює нулю.

МНОГОЧЛЕН

Многочленом називають суму одночленів.

Подібні доданки многочлена називають ***подібними членами многочлена***, а зведення подібних доданків у многочлені – ***зведенням подібних членів многочлена***.

Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають ***многочленом стандартного вигляду***.

ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Додавання і віднімання многочленів виконують, використовуючи правила розкриття дужок і зведення подібних доданків.

МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити цей одночлен на кожний член многочлена і знайдені добутки додати.

РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

Розкласти многочлен на множники означає подати його у вигляді добутку одночлена на многочлен або добутку кількох многочленів так, щоб цей добуток був тотожно рівним даному многочлену.

МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член одного многочлена помножити на кожний член іншого многочлена й одержані добутки додати.

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

КВАДРАТ СУМИ І КВАДРАТ РІЗНИЦІ

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

РІЗНИЦЯ КВАДРАТІВ

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

СУМА І РІЗНИЦЯ КУБІВ

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Про фундаторів математичних олімпіад в Україні

Трохи раніше ви вже ознайомилися з історією математичного олімпіадного руху України, тепер детальніше розкажемо про його фундаторів, які більшу частину свого життя присвятили виявленню, вихованню та навчанню математично обдарованої молоді.



«Він жив і горів безмірною любов'ю до України і до математики й увесь свій короткий вік працював невпинно й творчо на благо науки, освіти рідного народу. Його лекції – це і сила, і безмірна глибочінь, і краса математичної думки». Ці слова про Михайла Пилиповича Кравчука до його 115-річчя написала Ніна Опанасівна Вірченко, українська вчена в області математики, докторка фізико-математичних наук, заслужена працівниця освіти України, професорка Національного технічного університету України «КПІ» (НТУУ КПІ).

Народився майбутній учений 27 вересня 1892 р. у с. Човниця на Волині. Навчався в Луцькій гімназії, яку в 1910 році закінчив із золотою медаллю, і вступив на математичне відділення фізико-математичного факультету Київського університету Св. Володимира (нині Київський національний університет імені Тараса Шевченка). У 1914 році М. Кравчук закінчує навчальний заклад і його залишають при університеті як професорського стипендіата для підготовки до наукової та викладацької роботи. Успішно склавши магістерські іспити в 1917 році, Михайло Кравчук одержує звання приват-доцента. І відтоді вся наукова, педагогічна та громадська діяльність Кравчука пов'язана з Києвом. Він викладає математичні предмети у вперше створених у столиці українських гімназіях, Українському народному університеті. Був учителем Архипа Люльки, винахідника турбореактивного двигуна, та Сергія Корольова, авіаконструктора зі світовим ім'ям. На лекціях Михайла Пилиповича ніколи не було вільного місця, слухати його приходили і біологи, і хіміки, і філософи, і філологи, і робітники…

У 1919 році Кравчук опублікував перший переклад українською мовою підручника «Елементарна геометрія» А. П. Кисельова, російськомовного підручника, який на початку XX ст. отримав схвальну оцінку вчителів математики та проіснував більш як пів століття аж до перебудови шкільного курсу математики в СРСР. На початку 1920 року Михайла Пилиповича обрано членом комісії математичної термінології при Інституті наукової мови Української академії наук. На кінець того самого року ця комісія під головуванням М. Кравчука створила тритомний математичний словник. Пильне вивчення праць Михайла Кравчука під мовно-термінологічним кутом зору й нині може прислужитися такій актуальній справі, як подальша розробка та вдосконалення української математичної термінології.

Вільно володіючи кількома мовами (французькою, німецькою, італійською, польською, російською), він писав ними свої наукові праці, але найчастіше – рідною мовою, і ця його мова – гідний зразок українського науково-математичного стилю.

У 1924 році Михайло Пилипович Кравчук блискуче захистив докторську дисертацію. Це був перший в Україні захист докторської дисертації. У 1925 році Михайлові Кравчукові присвоїли звання професора, а в 1929 році його обрали дійсним членом Всеукраїнської академії наук. У віці 37 років він став наймолодшим академіком в Україні. Математичні інтереси Михайла Пилиповича – розмаїті, його наукові праці відзначались оригінальністю ідей, нестандартністю підходів до відомих і нових математичних проблем. Своєрідність та гнучкість мислення, висока продуктивність та працездатність, ерудованість, вимогливість та наукова щедрість, відданість науці М. Кравчука викликали захоплення його учнів та послідовників, коло яких значно з року в рік розширювалось.

Вісім років, з 1929-го по 1937-й, були найпліднішими у творчості та наукових здобутках М. Кравчука. Він одержує низку вагомих результатів у різних розділах математики, зокрема і в теорії многочленів, видає підручники для вищої школи, ініціює проведення першої в Україні шкільної математичної олімпіади, неперервно працює над удосконаленням математичної термінології. Результати своїх досліджень друкує не тільки в наукових виданнях України, а й за кордоном: в Італії, Франції, Німеччині.

Але подальша доля Михайла Пилиповича склалася трагічно. У СРСР почалися сталінські репресії. У 1938 році тяжка година випробовувань настала і для нього. Його заарештовують, інкримінуючи стандартний на той час набір злочинів: український націоналізм, шпигунство, контрреволюційну діяльність. Через це у вересні 1938 р. Михайла Кравчука засудили до 20 років тюремного ув'язнення і 5 років заслання та відправили в тюремні табори на Колиму. Три каторжні зими і літа відбув він там, хворий і пригнічений несправедливістю. А 9 березня 1942 року його не стало. Залишився Михайло Кравчук на віки вічні в колимській мерзлоті поряд з поетом-неокласиком Михайлом Драй-Хмарою, що за кілька літ до нього спочив у тій далекій землі, поряд з тисячами інших закатованих представників інтелігенції. І лише в 1956 році Михайла Пилиповича було реабілітовано.

У 1992 році, після здобуття незалежності, Україна відзначила 100-річчя від дня народження М. П. Кравчука. Його ім’я було занесено в Міжнародний календар ЮНЕСКО визначних наукових діячів. У Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут» періодично проходять міжнародні наукові конференції, присвячені пам’яті академіка Михайла Кравчука, у яких беруть участь учені з усіх областей України, з Литви, Австралії, США, Німеччини, Польщі, Китаю, Японії та інших країн.

Пам'ять про Михайла Пилиповича Кравчука увічнено в назві однієї з київських вулиць, на батьківщині вченого відкрито його музей. У НТУУ КПІ засновано стипендію його імені, а на території цього вишу відкрито пам'ятник ученому, на постаменті якого викарбовано його життєве кредо: «Моя любов – Україна і математика».



Історія знає приголомшливі приклади, коли таємниці науки підкорялися юним дослідникам.

Видатного математика і фізика-теоретика Миколу Миколайовича Боголюбова (1909–1993) було зараховано до аспірантури, коли йому ще не виповнилося і 15 років. У 17 років за досягнення в математиці йому присвоїли ступінь кандидата наук. Ще через два роки його наукові праці було відзначено нагородою Болонської академії наук (Італія), а у 20 років за визначні досягнення в галузі математики за рішенням Всеукраїнської академії наук йому було присвоєно науковий ступінь доктора фізико-математичних наук без захисту дисертації.

Народився Микола Боголюбов у Нижньому Новгороді (Росія), але більшу частину свого життя і наукової діяльності він провів в Україні. Коли Миколі виповнився рік, його родина переїхала до Києва. З юних років Микола самостійно опрацьовує курси вищої математики та фізики, і тринадцятирічному хлопцю з надзвичайними здібностями дозволяють відвідувати лекції в Київському університеті. З великим захопленням юнак вивчає тут математику, фізику, астрономію, бере участь у роботі наукових семінарів. З 1923 року його заняттями з математики керує відомий учений, математик і механік М. М. Крилов (1879–1955). Понад два десятиліття Микола Миколайович Боголюбов керував проведенням учнівських математичних олімпіад у Києві та Україні, був професором Київського і Московського університетів, працював в Академії наук УРСР, у Математичному інституті ім. В. А. Стєклова, Академії наук СРСР, Міжнародному науковому центрі ядерно-фізичних досліджень – Об'єднаному інституті ядерних досліджень у м. Дубна (Росія).

З українськими математичними олімпіадами нерозривно пов'язане ім'я ще однієї неперевершеної особистості – Михайла Йосиповича Ядренка (1932–2004), який щороку до останніх своїх днів очолював журі Всеукраїнської учнівської олімпіади.



Надзвичайно плідним є його життєвий шлях. Народився у с. Дрімайлівка Чернігівської області. За словами самого Михайла Йосиповича, його першими підручниками були буквар та «Кобзар» Шевченка. Навчаючись у школі, він твердо вирішив стати математиком. У березні 1950 р. Михайло почув по радіо

оголошення, що в Київському університеті має відбутися математична олімпіада, і, маючи бажання взяти в ній участь, написав до університету листа із запитанням про таку можливість для школярів не з Києва. Через деякий час отримав відповідь із запрошенням узяти в ній участь. Тоді Михайло посів у цих змаганнях 2-ге місце з-поміж учнів 10 класу. Того ж року він закінчив школу із золотою медаллю та вступив до Київського університету на механіко-математичний факультет, а після його закінчення – до аспірантури. Захистив кандидатську і докторську дисертації. Ще бувши аспірантом, він бере активну участь в організації Київських математичних олімпіад та підготовці конкурсних задач. А з 1970 року стає головою журі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

Працювати зі школярами, розшукувати і підтримувати талановиту молодь було покликанням ученого.

Понад 40 років свого життя Михайло Йосипович віддав розвитку шкільної математичної освіти, виданню посібників і задачників з математики, титанічній праці з виховання математично здібної молоді. У 2010 році на честь Михайла Йосиповича названо Всеукраїнський турнір юних математиків (ТЮМ), ще одне не менш популярне за олімпіаду математичне змагання всеукраїнського рівня.

Усе своє життя він пропрацював у Київському університеті, більш ніж 30 років завідував кафедрою теорії ймовірностей та математичної статистики механіко-математичного факультету. Під його керівництвом 45 аспірантів захистили дисертації, 10 стали докторами наук. У 1990 році Михайла Йосиповича було обрано членом-кореспондентом Національної академії наук України.

Неможливо перелічити всі громадські обов'язки Михайла Йосиповича. Зокрема, він був віцепрезидентом Українського математичного товариства, членом Бюро відділення математики НАН України, редактором низки наукових журналів.

Плідну наукову, педагогічну, методичну і громадську роботу Михайло Йосипович вів до останнього дня свого життя, яке обірвалося 28 вересня 2004 року.

Його донька Ольга у своїх спогадах про батька зазначала: «Усе своє життя батько присвятив людям, математиці, Україні...».

РОЗДІЛ 3

ФУНКЦІЇ

$y = kx + l$

$y = x^2 - 1$

$y = \frac{7}{x}$

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **ознайомитеся** з поняттями функції та її графіка, лінійної функції;
- **дізнаєтеся** про способи задання функцій;
- **навчитеся** знаходити область визначення та область значень деяких функцій, будувати графік лінійної функції.

§ 22. Функція. Область визначення та область значень функції. Способи задання функцій. Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів

Поняття функції

У житті ми часто стикаємося із залежностями між різними величинами. Наприклад, периметр квадрата залежить від довжини його сторони, площа прямокутника – від його вимірів, маса шматка крейди – від його об'єму, відстань, яку долає рухомий об'єкт, – від його швидкості та часу руху тощо.

Розглянемо приклади *залежностей між двома величинами*.

Приклад 1. Нехай сторона квадрата дорівнює a см, а його периметр дорівнює P см. Для кожного значення змінної a можна знайти відповідне значення змінної P. Наприклад,

якщо $a = 5$, то $P = 4 \cdot 5 = 20$;
якщо $a = 8$, то $P = 4 \cdot 8 = 32$;
якщо $a = 1{,}2$, то $P = 4 \cdot 1{,}2 = 4{,}8$.

Отже, периметр квадрата залежить від довжини його сторони. Математичну модель цієї залежності можна записати у вигляді формули $P = 4a$.

Оскільки кожному значенню довжини сторони квадрата відповідає певне значення його периметра, то кажуть, що маємо *відповідність* між довжиною сторони квадрата і його периметром (або *залежність між змінними* a і P). При цьому вважають, що значенню $a = 5$ *відповідає* значення $P = 20$, або значення $P = 20$ є *відповідним* значенню $a = 5$.

Змінну a, значення якої вибирають довільно, називають ***незалежною змінною***, а змінну P, кожне значення якої залежить від вибраного значення a, – ***залежною змінною***.

Приклад 2. Нехай автомобіль рухається зі сталою швидкістю 80 км/год. Відстань, яку він при цьому подолає, залежить від часу його руху.

Позначимо час руху автомобіля (у годинах) через t, а відстань, яку він подолав (у кілометрах), – через s. Для кожного значення змінної t ($t \geqslant 0$) можна знайти відповідне значення s. Наприклад,

якщо $t = 1{,}5$, то $s = 80 \cdot 1{,}5 = 120$;
якщо $t = 3$, то $s = 80 \cdot 3 = 240$;
якщо $t = 4{,}5$, то $s = 80 \cdot 4{,}5 = 360$.

Залежність змінної s від змінної t можна задати формулою $s = 80t$, де t – незалежна змінна, а s – залежна змінна.

У математиці зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, а залежну змінну – буквою y. У прикладах, які ми розглянули, кожному значенню незалежної змінної відповідає *лише одне значення* залежної змінної.

Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають *функціональною залежністю*, або *функцією*.

Незалежну змінну ще називають ***аргументом***, а про залежну змінну кажуть, що вона є ***функцією*** від цього аргументу. У згаданих вище прикладах – периметр квадрата P є функцією від довжини його сторони a, а відстань s, яку подолав автомобіль зі сталою швидкістю, є функцією від часу руху t. Значення залежної змінної називають ***значенням функції***.

Область визначення та область значень функції

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення функції*.
Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють *область значень функції*.

Наприклад, областю визначення функції у прикладі 1 є всі додатні числа a, тобто $a > 0$.

Областю визначення функції у прикладі 2 є всі невід'ємні числа t, тобто $t \geqslant 0$.

Область значень функції у прикладі 1 складається з усіх додатних чисел P, а область значень функції у прикладі 2 – з усіх невід'ємних чисел s, тобто $s \geqslant 0$.

Приклад 3. Функцію задано формулою $y = \dfrac{8}{x-2}$. Знайти:

1) область визначення функції;
2) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -2; 6; 10;
3) значення аргументу, за якого значення функції дорівнює -1.

Розв'язання. 1) Областю визначення функції є всі такі значення x, для яких дріб $\dfrac{8}{x-2}$ має зміст. Знаменник дробу дорівнює нулю для $x = 2$. Отже, областю визначення функції є всі числа, крім числа 2. Домовимся, що в таких випадках можна записувати: «$x \neq 2$», маючи на увазі, що всі значення, крім числа 2, утворюють область визначення функції.

2) Якщо $x = -2$, то $y = \dfrac{8}{-2-2} = \dfrac{8}{-4} = -2$; якщо $x = 6$, то $y = \dfrac{8}{6-2} = 2$; якщо $x = 10$, то $y = \dfrac{8}{10-2} = 1$.

3) Щоб знайти x, для якого $y = -1$, потрібно у формулу функції замість y підставити число -1. Тоді матимемо рівняння: $-1 = \dfrac{8}{x-2}$, коренем якого є число -6.

Отже, значення $y = -1$ функція набуває для $x = -6$.

Способи задання функції

Задавати функцію можна різними способами. У прикладах, які ми розглянули, *функції задано формулами*: $P = 4a$; $s = 80t$; $y = \dfrac{8}{x-2}$. Такий спосіб задання функції є досить зручним, бо дає змогу для довільного значення аргументу знаходити відповідне йому значення функції, та компактним, оскільки в більшості випадків формула має короткий запис.

Трапляються і функції, які для різних значень аргументу задаються різними формулами. Розглянемо таку функцію, її запис та як з нею працювати.

Приклад 4. Нехай дано функцію $y = \begin{cases} 2x - 7, \text{ якщо } x \leqslant -2; \\ x^2 + 1, \text{ якщо } x > -2. \end{cases}$

Цей запис означає, що для значень аргументу x таких, що $x \leqslant -2$, значення функції обчислюють за формулою $y = 2x - 7$, а для значень аргументу x таких, що $x > -2$, – за формулою $y = x^2 + 1$.

Наприклад, якщо $x = -3$, то $y = 2 \cdot (-3) - 7 = -13$;
якщо $x = -2$, то $y = 2 \cdot (-2) - 7 = -11$;
якщо $x = 0$, то $y = 0^2 + 1 = 1$;
якщо $x = 5$, то $y = 5^2 + 1 = 26$.

Задавати функцію можна й *таблицею*. Такий спосіб задання функції називають *табличним*. Розглянемо його на прикладі.

Приклад 5. Щогодини, починаючи з восьмої і до тринадцятої, вимірювали атмосферний тиск і отримані значення записували в таблицю:

Час t, год	8	9	10	11	12	13
Атмосферний тиск p, мм рт. ст.	753	754	756	754	753	752

Таблиця задає відповідність між часом вимірювання t і атмосферним тиском p. Ця відповідність є функцією, бо кожному значенню змінної t відповідає єдине значення змінної p. У цьому прикладі t є незалежною змінною, а p – залежною змінною. Область визначення функції складається із чисел 8; 9; 10; 11; 12; 13 (перший рядок таблиці), а область значень – із чисел 752; 753; 754; 756 (другий рядок таблиці).

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для знаходження значень функції не потрібно нічого обчислювати. Незручним є те, що таблиця зазвичай займає багато місця і може не містити саме того значення аргументу, яке нас цікавить, наприклад, якщо його немає в першому рядку таблиці. Зокрема, у прикладі 5 неможливо знайти значення функції, що відповідає значенню аргументу, наприклад, 8,5 або 14.

Задавати функцію можна також висловленням. Такий спосіб задання функції називають *описовим*, або *словесним*.

Приклад 6. Кожному натуральному числу поставимо у відповідність квадрат цього числа. Одержимо функцію, область визначення якої складається з усіх натуральних чисел, а область значень – з квадратів цих чисел.

Функціональна залежність як математична модель реальних процесів

Ми вже розглядали задачі практичного змісту, математичними моделями яких є рівняння. Моделями реальних процесів можуть бути і функціональні залежності.

Функціональні залежності, які ми розглянули у прикладах 2 і 5, є математичними моделями реальних процесів: модель руху автомобіля зі сталою швидкістю, модель вимірювання атмосферного тиску протягом деякого часу.

У подальшому під час вивчення алгебри ми будемо неодноразово звертатися до математичних моделей реальних процесів.

А ще раніше...

Функція – одне з найважливіших понять сучасної математики.



Б. Больцано (1781–1848)

Залежності між різними величинами цікавили ще давніх математиків. Зокрема, у Вавилоні було складено таблиці квадратів і кубів чисел, таблиці сум і добутків двох чисел, у Греції – знайдено співвідношення між елементами кола. У працях І. Ньютона, Р. Декарта, Г. Лейбніца, П. Ферма́ розглядалося багато функціональних залежностей, пов'язаних з геометрією та фізикою. Так, французькі математики П'єр Ферма (1601–1665) та Рене Декарт (1596–1650) розглядали функцію як залежність ординати точки кривої від її абсциси. Рене Декарт використовував поняття змінної величини.



П. Г. Діріхле (1805–1859)

Термін «функція» (від латинського *functio* – виконання, звершення) для назви залежностей уперше ввів Готфрід Лейбніц (1646–1716). Він пов'язував функцію з графіками.

Швейцарські математики Йоганн Бернуллі (1667–1748) та його видатний учень Леонард Ейлер (1707–1783) розглядали функцію як аналітичний вираз, тобто вираз, утворений із змінних і чисел за допомогою тих чи тих аналітичних операцій (дій).

Поняття функції як залежності однієї змінної від іншої ввів чеський математик Бернард Больцано, а узагальнив – німецький математик Петер Густав Діріхле.

Найзагальніше сучасне означення функції було запропоновано в середині XX ст. Свій внесок у становлення цього поняття в ці часи зробили математики М. Гюнтер, І. Гельфанд, С. Соболєв, Г. Шилов.

Наведіть приклади функціональної залежності однієї змінної від іншої, назвіть у них незалежну змінну і залежну. ○ Що називають функцією, аргументом функції, значенням функції? ○ Що називають областю визначення функції і що – областю значень функції? ○ Які є способи задання функції? ○ Наведіть власний приклад функції, заданої формулою. ○ Наведіть власний приклад функціональної залежності між величинами, що є математичною моделлю реальних процесів.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

973. (*Усно.*) Чи залежить периметр рівностороннього трикутника від довжини його сторони? Чи є периметр цього трикутника функцією від довжини сторони трикутника? Якщо так, то задайте цю функцію формулою за умови, що сторона трикутника дорівнює a.

974. (*Усно.*) Які з даних записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну:

1) $a = 4b + 2$; 2) $4 + 2x = 2x - 7$; 3) $y = \frac{1}{4x - 1}$;

4) $18 : 3 - 6 = 0$; 5) $p = t - t^3 - 2$; 6) $4a - 2 > 0$.

975. Які з даних записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну:

1) $m = 5n^2 - 2$; 2) $y = x^2 - x + 2$; 3) $40 - 30 > 5$;

4) $4x - 1 = 7 - 4x$; 5) $d = \frac{m - 1}{m^2 + 1}$; 6) $3 \cdot 8 = 2 \cdot 12$.

976. (*Усно.*) Площу круга знаходять за формулою $S = \pi r^2$, де r – радіус круга. Чи задає ця формула функцію? Якщо так, укажіть її аргумент та область визначення.

977. Площа прямокутника зі сторонами x см і 8 см дорівнює S. Виразіть формулою залежність S від x. Чи задає ця формула функцію?

978. Об'єм куба з ребром a см дорівнює V см^3. Виразіть формулою залежність V від a. Чи задає ця формула функцію? Знайдіть за цією формулою значення V, якщо:

1) $a = 5$; 2) $a = 7$; 3) $a = \frac{3}{4}$.

979. Периметр прямокутника зі сторонами x дм і 6 дм дорівнює P дм. Запишіть формулу залежності P від x. Для значень аргументу $x = 2; 4; 5; 15$ знайдіть відповідні значення функції P.

980. (*Усно.*) Функцію задано формулою $y = -2x$.
1) Яка змінна є незалежною, а яка – залежною?
2) Знайдіть значення функції, що відповідають значенням аргументу -3; 0; 8.

981. Обчисліть значення функції, заданої формулою $y = 5x - 7$, для значень аргументу, що дорівнюють -2; 0; 5; 10.

982. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = \frac{20}{x}$, для значень аргументу, що дорівнюють -40; -10; 4; 5.

983. Функцію задано формулою $y = -\frac{6}{x}$. У таблиці наведено значення її аргументу. Відтворіть цю таблицю в зошиті й заповніть її, обчисливши відповідні значення функції:

x	-12	-6	-5	-3	2	4	8	10
y								

984. Функцію задано формулою $y = 4x + 3$. У таблиці наведено значення її аргументу. Відтворіть цю таблицю в зошиті й заповніть її, обчисливши відповідні значення функції:

x	-7	-5	-3	-1	2	4	6	8
y								

985. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^2 - 3$, для значень аргументу -3; -2; -1; 0; 1; 2.

986. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = 5 - x^2$, для значень аргументу -2; -1; 0; 1; 2; 3.

987. Поїзд, рухаючись зі швидкістю 65 км/год, долає за t год відстань s км. Задайте формулою залежність s від t. Обчисліть значення функції, які відповідають значенням аргументу, що дорівнюють 1; 2,4; 3; 5,8.

988. Кожному натуральному значенню n відповідає втричі більше за нього число N. Задайте формулою залежність N від n. Знайдіть значення функції, що відповідають значенням аргументу 2; 7; 13; 20.

989. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 3x - 5$; 2) $y = \frac{2x + 3}{5}$; 3) $y = \frac{8}{x}$; 4) $y = \frac{7}{x + 2}$.

990. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = \frac{8x - 3}{7}$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x - 3}$.

991. Знайдіть значення аргументу, для якого:

1) функція $y = -3x$ набуває значення -6; 9; 15;

2) функція $y = 5x - 1$ набуває значення -1; 4; 14.

992. Знайдіть значення аргументу, для якого:

1) функція $y = 4x$ набуває значення -8; 0; 12;

2) функція $y = 3 - 2x$ набуває значення -1; 3; 17.

993. Функцію задано таблицею:

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-3	-1	2	7

Знайдіть:

1) значення функції для $x = -2$; 0; 1;

2) значення аргументу, для якого значення функції дорівнює -3; 2; 7;

3) область визначення функції;

4) область значень функції.

994. Функцію задано таблицею:

x	1	2	3	4	5
y	-2	0	2	5	7

Знайдіть:

1) значення функції для значень аргументу 1; 3; 4;

2) значення аргументу, для якого $y = 0$; 5; 7;

3) область визначення функції;

4) область значень функції.

995. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{4}x$. Відтворіть таблицю в зошиті й заповніть її порожні комірки:

x	-8		1,6		20,8		
y		-9		$-\frac{3}{8}$		$1\frac{5}{7}$	20,7

996. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{5}x$. Відтворіть таблицю в зошиті й заповніть її порожні комірки:

x	-10		0		$8{,}5$	
y		$-1{,}2$		$\frac{3}{5}$		$13{,}5$

997. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1) $y = \frac{5}{x^2 - 9}$; 2) $y = \frac{17}{x^2 + 4}$; 3) $y = \frac{9}{x(x - 3)}$;

4) $y = \frac{7x + 1}{x^2 + x}$; 5) $y = \frac{9}{(x - 1)(x + 4)}$; 6) $y = \frac{15}{x - 2} + \frac{7}{x + 3}$.

998. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{7}{x^2 - 4}$; 2) $y = \frac{13}{x^2 + 1}$; 3) $y = \frac{14}{(x + 2)x}$;

4) $y = \frac{9}{x^2 - x}$; 5) $y = \frac{7}{(x + 5)(x - 3)}$; 6) $y = \frac{14}{x + 3} + \frac{7}{x - 1}$.

999. Початкова температура води була 20 °С. Під час нагрівання вона щохвилини підвищувалася на 5 °С.

1) Задайте формулою залежність температури води T від часу t її нагрівання.

2) Знайдіть значення T, що відповідає значенню аргументу $t = 7; 9; 10$.

3) Знайдіть значення t, яким відповідає $T = 45; 60; 70$.

4) Знайдіть значення t, за якого вода закипить.

1000. Велосипедистка зупинилася на відстані 10 км від міста. А через деякий час продовжила рух зі швидкістю 15 км/год.

1) Задайте формулою залежність відстані s (у км), яку загалом подолала велосипедистка, від часу t (у год), який відраховується після зупинки.

2) Знайдіть значення s, що відповідає значенню $t = 1; 2; 5$.

3) Знайдіть значення t, для якого $s = 34; 55; 70$.

1001. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	-2	1	-3	5	1	6	-2	-3

Знайдіть: 1) значення y, якщо $x = -4; -1; 0; 3$;

2) значення x, яким відповідає $y = -3; -2; 5$;

3) значення x, якому відповідає рівне йому значення y;

4) область визначення функції;

5) область значень функції.

1002. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x.

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
y	-1	2	4	2	4	7	2	-1	9

Знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -8; -2; 4; 6$;
2) значення x, яким відповідає $y = -1; 4; 7$;
3) значення x, якому відповідає протилежне до x значення y;
4) область визначення функції;
5) область значень функції.

1003. Складіть таблицю значень функції $y = 0{,}6 - 0{,}3x$, де $-2 \leqslant x \leqslant 5$, з кроком, що дорівнює 1. Використовуючи цю таблицю, укажіть:
1) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює 0;
2) значення аргументу, для якого значення функції дорівнює 0.

1004. Знайдіть значення функції для $x = -5; 0; 3$, якщо:

1) $y = \begin{cases} 4x - 3, & \text{якщо } x < 0, \\ -2x, & \text{якщо } x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 7, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

1005. Знайдіть значення функції для значення аргументу, яке дорівнює $-2; 0; 4$, якщо:

1) $y = \begin{cases} 7x - 2, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ -3x, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 3, & \text{якщо } x \leqslant 2, \\ -x^2, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

1006. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 + 2x + 5$.

Вправи для повторення

1007. Обчисліть: $\dfrac{8}{15} \cdot 0{,}5625 - \left(\dfrac{11}{24} + 1\dfrac{13}{36}\right) \cdot 1{,}44 + 2\dfrac{8}{25}$.

1008. Якими одночленами потрібно заповнити клітинки, щоб рівність перетворилася на тотожність:
1) $(3x - 2y)(\square + \square) = 9x^2 - 4y^2$;
2) $(5m + \square)(5m - \square) = 25m^2 - 36$;
3) $(7c^2 - \square)(\square + 3p) = 49c^4 - 9p^2$;
4) $(4m + 9a^2)(\square - \square) = 81a^4 - 16m^2$?

1009. Сторона квадрата на 4 см більша за одну сторону прямокутника і на 5 см менша за другу. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа на 10 см^2 більша за площу прямокутника.

Життєва математика

1010. Відомо, що 60 кг макулатури зберігають одне дерево. Учні сьомих класів школи зібрали 300 кг макулатури. Скільки дерев зберегли учні?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

1011. У трьох коробках лежать кульки: у першій – дві білого кольору (ББ), у другій – дві чорного кольору (ЧЧ), у третій – білого й чорного (БЧ). На коробках є таблички з написами: ББ, ЧЧ і БЧ, але вміст жодної з коробок не відповідає напису на її табличці. З якої коробки достатньо навмання взяти лише одну кульку, щоб визначити колір кульок, які лежать у кожній коробці?

§ 23. Графік функції. Графічний спосіб задання функції

Поняття про графік функції

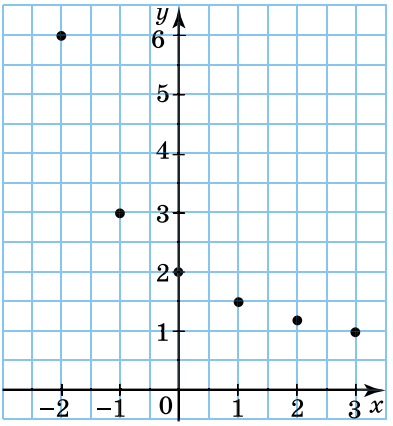
У 6 класі ми вже розглядали графік залежності між двома величинами. Розглянемо, що таке ***графік функції***.

Приклад 1. Нехай дано функцію $y = \dfrac{6}{x+3}$, де $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Знайдемо значення цієї функції для цілих значень аргументу й результати запишемо в таблицю:

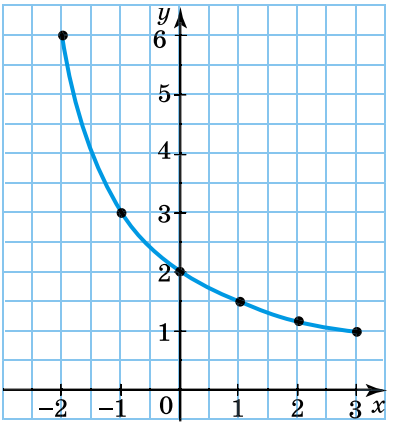
x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	1,5	1,2	1

Позначимо на координатній площині точки $(x; y)$, координати яких візьмемо з таблиці. Це точки $(-2; 6)$, $(-1; 3)$, $(0; 2)$, $(1; 1{,}5)$, $(2; 1{,}2)$, $(3; 1)$ (мал. 23.1). Якщо взяти інші значення x з проміжку від -2 до 3 і за формулою $y = \dfrac{6}{x+3}$ обчислити відповідні їм значення y, то одержимо інші пари значень x і y. Кожній із цих

пар відповідає певна точка координатної площини. Усі такі точки утворюють фігуру, яку називають *графіком функції* $y = \dfrac{6}{x+3}$, де $-2 \leqslant x \leqslant 3$ (мал. 23.2).



Мал. 23.1



Мал. 23.2

Графіком функції **називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких – значення аргументу, а ординати – відповідні значення функції.**

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = x^2 - 1$, якщо $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції для цілих значень аргументу:

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	8	3	0	–1	0	3

Позначимо точки, координати яких подано в таблиці, на координатній площині та сполучимо їх плавною лінією (мал. 23.3). Одержимо графік функції $y = x^2 - 1$ для $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

Зауважимо: що меншим буде крок (відстань) між значеннями аргументу, то щільніше розташуються точки на координатній площині, а отже, більш точним буде побудований графік.

Визначення окремих характеристик функції за її графіком

За графіком можна одразу вказати, для яких значень аргументу значення функції додатні, для яких – від'ємні, для яких

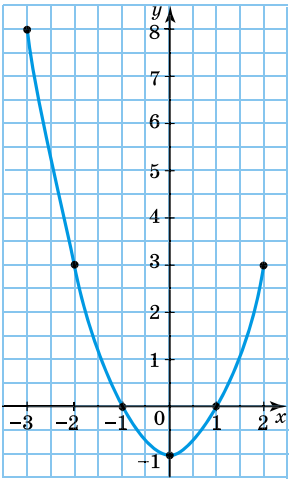
дорівнюють нулю. За графіком можна також установити область визначення та область значень функції.

Нулем функції **називають таке значення аргументу, для якого значення функції дорівнює нулю.**

Зрозуміло, що нулі функції – це абсциси точок перетину графіка функції з віссю абсцис, бо ордината – це значення функції, і саме в цих точках вона дорівнює нулю.

Приклад 3. Використовуючи графік функції $y = x^2 - 1$, де $-3 \leqslant x \leqslant 2$, знайти: 1) нулі функції; 2) область значень функції; 3) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень; 4) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.

Розв'язання. Графік функції $y = x^2 - 1$ зображено на малюнку 23.3.



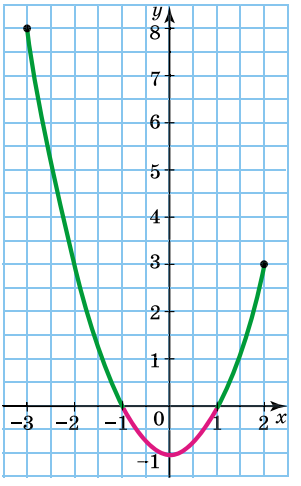
Мал. 23.3

1) Нулі функції – це абсциси точок перетину графіка функції з віссю x. Отже, $x = -1$ і $x = 1$ – нулі функції. Зауважимо, що нулі функції можна знайти, і не використовуючи графік даної функції. Наприклад, достатньо розв'язати рівняння $x^2 - 1 = 0$.

2) Функція може набувати будь-яких значень від -1 до 8. Тому областю значень функції є всі такі значення y, що $-1 \leqslant y \leqslant 8$.

3) Для значень x таких, що $-3 \leqslant x < -1$, точки графіка лежать вище від осі абсцис. Тому функція набуває додатних значень для $-3 \leqslant x < -1$. На мал. 23.4 цю частину графіка позначено зеленим кольором.

Так само вище від осі абсцис лежать точки графіка для $1 < x \leqslant 2$. Тому для $1 < x \leqslant 2$ функція знову набуває додатних значень (на мал. 23.4 цю частину графіка також позначено зеленим кольором). Отже, для $-3 \leqslant x < -1$ та $1 < x \leqslant 2$ функція набуває додатних значень.



Мал. 23.4

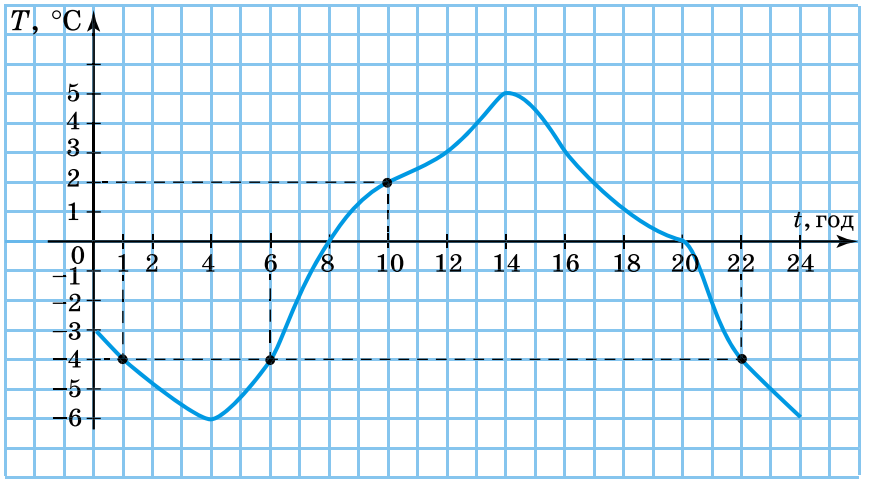
4) Для значень x таких, що $-1 < x < 1$, точки графіка лежать нижче від осі абсцис (на мал. 23.4 цю частину графіка позначено червоним кольором). Тому для $-1 < x < 1$ функція набуває від'ємних значень.

Графічний спосіб задання функції

Використовуючи графік функції, для будь-якого значення аргументу з області визначення можна знайти відповідне йому значення функції. Також за графіком можна скласти таблицю значень функції.

Так, доходимо висновку, що *функцію можна задати графіком*. Цей спосіб задання функції називають *графічним*. Він є зручним своєю наочністю, тому його часто використовують для відображення явищ, які супроводжують практичну діяльність людини або відбуваються в навколишньому світі.

Приклад 4. На малюнку 23.5 зображено графік зміни температури повітря протягом доби, одержаний за допомогою спеціального приладу – термографа. Використовуючи цей графік, знайти:
1) якою була температура о 10 год;
2) о котрій годині температура була -4 °С.

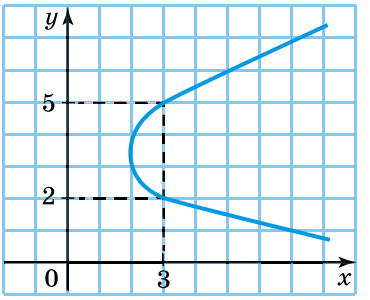


Мал. 23.5

Розв'язання. 1) Через точку осі t з координатами (10; 0) проведемо перпендикуляр до цієї осі (мал. 23.5). Точка перетину цього перпендикуляра з графіком температури має координати (10; 2). Отже, о 10 год температура повітря була 2 °С.

2) Через точку осі T з координатами (0; −4) проведемо перпендикуляр до цієї осі (мал. 23.5). Цей перпендикуляр перетинає графік у точках (1; −4), (6; −4) і (22; −4). Отже, температура повітря −4 °С була о 1 год, о 6 год і о 22 год.

Зауважимо, що не кожна фігура на координатній площині є графіком деякої функції. Наприклад, фігура на малюнку 23.6 не є графіком жодної з функцій, оскільки існують такі значення x, яким відповідають два значення y. Наприклад, значенню $x = 3$ відповідають значення $y = 2$ і $y = 5$.



Мал. 23.6

Це означає, що залежність між x і y, графік якої зображено на малюнку 23.6, не є функціональною через те, що існує хоча б одне значення x, якому відповідає більш ніж одне значення y. Графічно це означає, що існує хоча б одна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, яка перетинає цю фігуру більше ніж в одній точці. Враховуючи, що при функціональній залежності кожному значенню аргументу ставиться у відповідність єдине значення функції, то кожна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має перетинати графік функції не більше ніж в одній точці.

Отже,

щоб фігура, яку зображено на координатній площині, була графіком деякої функції, необхідно, щоб кожна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, перетинала цю фігуру не більше ніж в одній точці.

Що таке графік функції? ○ Як побудувати графік функції? ○ Поясніть, як за графіком знайти значення функції, що відповідає даному значенню аргументу, та значення аргументу, якому відповідає дане значення функції (на прикладі одного з графіків на мал. 23.2, 23.3 і 23.5). ○ Як з'ясувати, що фігура на координатній площині є графіком функції?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1012. На малюнку 23.7 зображено графік функції. За графіком:
1) заповніть у зошиті таблицю:

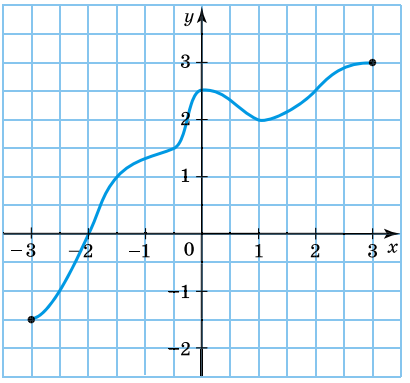
x	−3	−2,5	−2	−1,5	−0,5	0	1	2	3
y									

2) знайдіть область визначення та область значень функції.

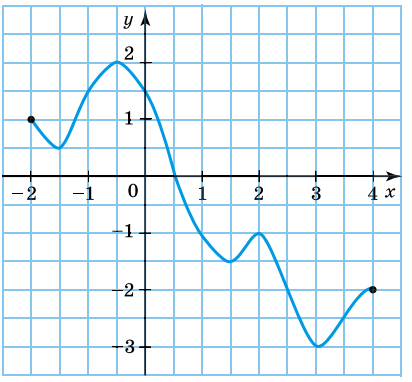
1013. На малюнку 23.8 зображено графік функції. За графіком:
1) заповніть у зошиті таблицю:

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4
y													

2) знайдіть область визначення та область значень функції.



Мал. 23.7



Мал. 23.8

1014. Побудуйте графік функції $y = x - 3$, де $-2 \leqslant x \leqslant 5$, склавши таблицю для цілих значень аргументу.
1) Чи належить графіку функції точка $A(3; 0)$; точка $B(-1; 2)$?
2) Знайдіть за графіком значення функції, якщо $x = 2$; $x = 4$.
3) Знайдіть за графіком значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = -3$; $y = 2$.

1015. Побудуйте графік функції $y = x + 2$, де $-4 \leqslant x \leqslant 3$, склавши таблицю для цілих значень аргументу.
1) Чи належить графіку функції точка $C(2; 5)$; точка $D(-2; 0)$?
2) Знайдіть за графіком значення функції для $x = -3$; $x = 1$.
3) Знайдіть за графіком значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = 1$; $y = 5$.

1016. Не виконуючи побудови графіка, знайдіть нулі функції:

1) $y = 5x$; 2) $y = 3x - 6$; 3) $y = -\frac{x}{10}$; 4) $y = \frac{5 - x}{8}$.

1017. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:

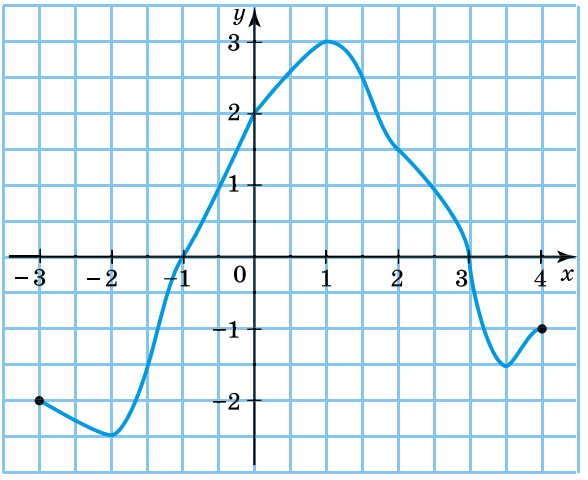
1) $y = -3x$; 2) $y = 12 - 4x$; 3) $y = \frac{x}{3}$; 4) $y = \frac{x + 2}{4}$.

1018. За графіком, який зображено на малюнку 23.5, знайдіть:
1) якою була температура повітря о 3 год; о 5 год; о 7 год;

о 21 год;
2) о котрій годині температура повітря була −5 °С; 0 °С; 5 °С.

3 **1019.** За графіком, який зображено на малюнку 23.5, знайдіть:
1) якою була температура повітря в 0 год; о 2 год; о 9 год; о 12 год; о 18 год;
2) о котрій годині температура повітря дорівнювала −6 °С; −2 °С; 1 °С; 3 °С;
3) якою була найнижча температура й о котрій годині;
4) якою була найвища температура й о котрій годині;
5) протягом якого часу температура підвищувалась;
6) протягом якого часу температура знижувалась;
7) протягом якого часу температура повітря була нижчою від 0 °С;
8) протягом якого часу температура повітря була вищою від 0 °С.

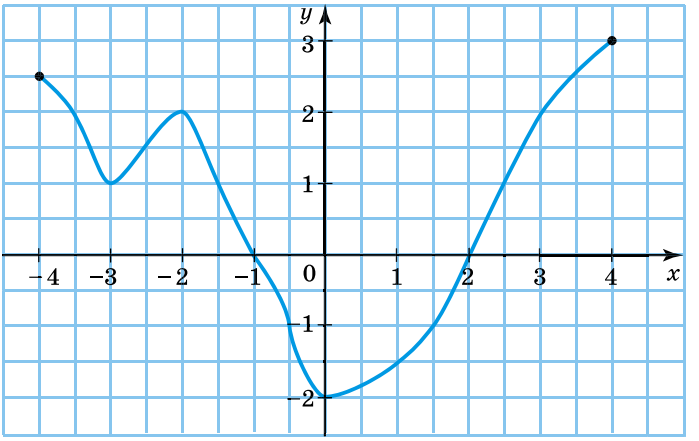
1020. За графіком, який зображено на малюнку 23.9, знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -3; -2; -0{,}5; 1{,}5; 4$;



Мал. 23.9

2) значення x, яким відповідає $y = -2{,}5; -1{,}5; 1$;
3) нулі функції;
4) значення аргументу, за яких функція набуває додатних значень;
5) значення аргументу, за яких функція набуває від'ємних значень.

1021. За графіком функції (мал. 23.10) знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -3{,}5; -2; -1{,}5; 0; 1; 2{,}5$;
2) значення x, яким відповідає $y = -1; 1; 2; 3$;
3) нулі функції;
4) значення аргументу, за яких функція набуває від'ємних значень;
5) значення аргументу, за яких функція набуває додатних значень.



Мал. 23.10

1022. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, чи належить графіку функції $y = x^2 - 3x$ точка:
1) $(1; -2)$; 2) $(-2; -2)$; 3) $(0; -3)$; 4) $(-1; 4)$.

1023. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 2x + x^2$, з'ясуйте, чи належить йому точка:
1) $(1; 3)$; 2) $(-1; 3)$; 3) $(0; 0)$; 4) $(-2; 4)$.

1024. Ламана ABC – графік деякої функції, причому $A(-3; 2)$, $B(1; 6)$, $C(4; 0)$. Побудуйте цей графік і за графіком знайдіть:
1) значення функції, які відповідають значенням $x = -2; 0; 1$;
2) значення аргументу, яким відповідає значення $y = 2; 4; 6$.

1025. Ламана MNL є графіком деякої функції, причому $M(-2; -1)$, $N(2; 3)$, $L(6; -1)$. Побудуйте графік цієї функції і за графіком знайдіть:
1) значення функції, які відповідають значенням $x = -2; 0; 2; 5$;
2) значення аргументу, яким відповідають значення $y = -1; 1; 3$.

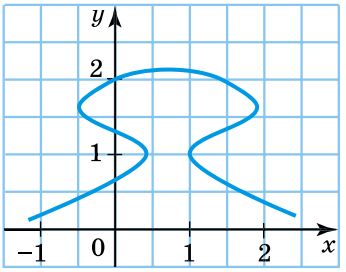
1026. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = 16 - x^2$; 3) $y = 2x^2 + 10x$.

1027. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 - 25$; 3) $y = 12x - 3x^2$.

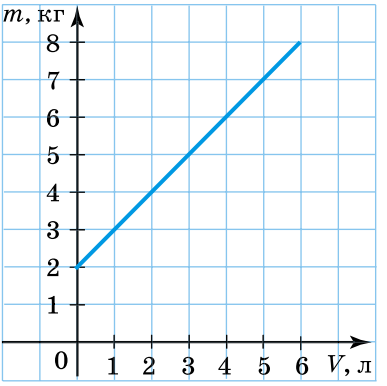
1028. Побудуйте графік функції:
1) $y = \frac{8 - x}{2}$, де $-2 \leqslant x \leqslant 10$; 2) $y = x(4 + x)$, де $-5 \leqslant x \leqslant 1$.

1029. Побудуйте графік функції:
1) $y = \frac{x + 3}{2}$, де $-5 \leqslant x \leqslant 7$; 2) $y = x\,(4 - x)$, де $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

1030. Чи є фігура на малюнку 23.11 графіком деякої функції?



Мал. 23.11



Мал. 23.12

4 **1031.** На малюнку 23.12 зображено графік залежності маси m (у кг) відра з водою від об'єму V (у л) води в ньому. Знайдіть за графіком:
1) масу порожнього відра;
2) масу відра, у якому 4 л води;
3) масу 1 л води;
4) об'єм води у відрі, якщо маса відра з водою – 8 кг.

Вправи для повторення

1032. Спростіть вираз:
1) $(a - 5)(a + 5) - a(a + 7)$; 2) $m(m - 4) + (9 - m)(m + 9)$;
3) $2a(a - b) - (a - b)^2$;
4) $(q + 5p)(5p - q) - (p - 5q)^2 - 10pq$.

1033. Доведіть, що різниця між будь-яким трицифровим натуральним числом і сумою його цифр кратна числу 9.

Життєва математика

1034. 1) Використання проточної води для миття посуду чи прання білизни призводить до марних витрат води в середньому до 15 л за хвилину. Скільки води можна зберегти під час півгодинного прання, якщо правильно ставитися до споживання води?

2) *Практична діяльність.* З'ясуйте, який тариф на воду (ціна за 1 $м^3$ води) у вашій місцевості, та обчисліть, скільки коштів за годину можна заощадити, якщо правильно ставитися до споживання води.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

1035. Доведіть, що якщо n — натуральне число ($n > 1$), то число $4^n - 3$ не може бути квадратом натурального числа.

§ 24. Лінійна функція, її графік та властивості

Поняття про лінійну функцію

Приклад 1. Нехай маса одного цвяха 4 г, а маса порожнього ящика — 600 г. Тоді залежність між масою m (у г) ящика із цвяхами та кількістю x цвяхів у ньому (x — натуральне число) можна задати формулою $m = 4x + 600$.

Приклад 2. Нехай щомісячна зарплата продавчині складається з окладу в розмірі 1500 грн та премії в розмірі 1 % від вартості реалізованого товару. Тоді залежність між зарплатою y (у грн) і вартістю x (у грн) реалізованого товару можна задати формулою $y = 0{,}01x + 1500$, де $x > 0$.

В обох цих прикладах функції задано формулами вигляду $y = kx + l$, де k і l — деякі числа.

Лінійною **називають функцію вигляду $y = kx + l$, де x — незалежна змінна, k і l — деякі числа.**

Числа k і l називають ***коефіцієнтами лінійної функції.***

Графік лінійної функції

З'ясуємо, який вигляд має графік лінійної функції.

У формулі $y = kx + l$ незалежній змінній x можна надавати будь-яких значень, тому областю визначення лінійної функції є

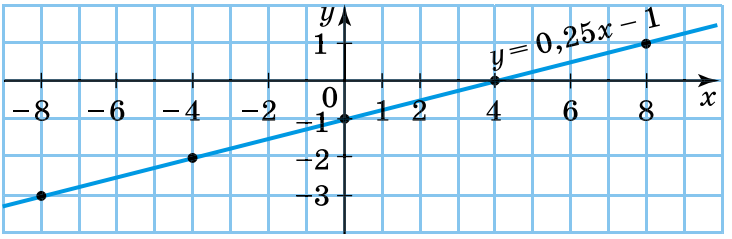
всі числа. Отже, для побудови графіка лінійної функції можна вибрати будь-які значення x, найкраще ті, що будуть зручними для обчислення значень y.

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = 0{,}25x - 1$.

Розв'язання. Функція є лінійною. Складемо для неї таблицю кількох значень незалежної змінної x та відповідних їй значень функції y:

x	-8	-4	0	4	8
y	-3	-2	-1	0	1

Позначимо на координатній площині точки, координати яких отримано в таблиці. За допомогою лінійки легко впевнитися, що всі позначені точки лежать на одній прямій. Ця пряма є графіком лінійної функції $y = 0{,}25x - 1$ (мал. 24.1).



Мал. 24.1

Графіком будь-якої лінійної функції є *пряма*.

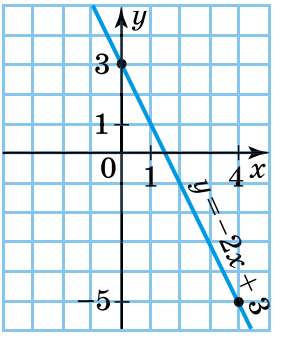
Оскільки пряма однозначно задається двома своїми точками, то для побудови прямої, що є графіком лінійної функції, достатньо знайти координати двох точок графіка, позначити їх на координатній площині і провести через них пряму.

Приклад 4. Побудувати графік функції $y = -2x + 3$.

Розв'язання. Складемо таблицю для двох довільних значень аргументу. Отримані точки позначимо на координатній площині та проведемо через них пряму.

x	0	4
y	3	-5

Графік функції $y = -2x + 3$ зображено на малюнку 24.2.



Мал. 24.2

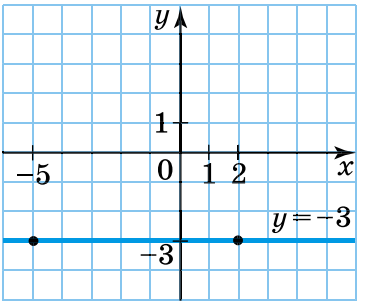
Якщо коефіцієнти лінійної функції є дробами, то для знаходження двох точок її графіка доцільно добирати такі цілі значення аргументу, щоб отримувати цілі значення функції. Наприклад, значення функції $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ будуть цілими для $x = -1$ та $x = 5$, і для побудови графіка отримаємо точки $(-1; -1)$ та $(5; 1)$.

Функція виду $y = l$

Якщо $k = 0$, формула $y = kx + l$ матиме вигляд $y = 0x + l$, тобто $y = l$. Лінійна функція вигляду $y = l$ набуває одних і тих самих значень для будь-яких значень x.

Приклад 5. Побудувати графік функції $y = -3$.

Розв'язання. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y, що дорівнює -3. Графіком функції є пряма, яка проходить через точки вигляду $(x; -3)$, де x – будь-яке число. Виберемо будь-які дві з них, наприклад $(-5; -3)$ і $(2; -3)$, та проведемо через них пряму (мал. 24.3). Ця пряма і є графіком функції $y = -3$. Вона паралельна осі x.



Мал. 24.3

Пряма вигляду $y = l$ паралельна осі x.

Щоб побудувати графік функції $y = l$, достатньо позначити на осі y точку з координатами $(0; l)$ та провести через неї пряму, паралельну осі x.

Пряма пропорційність

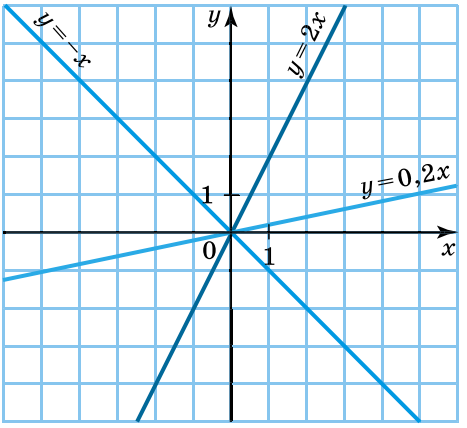
Для $l = 0$, $k \neq 0$, формула $y = kx + l$ набуває вигляду $y = kx$.

Функцію вигляду $y = kx$, де x – незалежна змінна, k – відмінне від нуля число, називають *прямою пропорційністю*.

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції і $y = 0$ для $x = 0$, то

графіком прямої пропорційності є пряма, що проходить через початок координат.

На малюнку 24.4 зображено графіки прямих пропорційностей $y = -x$; $y = 2x$ та $y = 0{,}2x$.



Мал. 24.4

Властивості лінійної функції

Узагальнимо *властивості лінійної функції* $y = kx + l$.

1. Область визначення функції складається з усіх чисел.
2. Область значень функції для $k \neq 0$ складається з усіх чисел; для $k = 0$ — лише з одного значення — числа l.
3. Графіком функції є пряма.

Перетин графіка функції з осями координат

Однією з важливих властивостей функції є існування *точок перетину її графіка з осями координат*.

Якщо на координатній площині графік функції вже зображено, то такі точки можна знайти безпосередньо з малюнка. Наприклад, на малюнку 24.1 точкою перетину графіка функції $y = 0{,}25x - 1$ з віссю абсцис є точка (4; 0), а з віссю ординат — точка (0; −1). У такому разі кажуть, що точки перетину знайдено графічно.

Але графічний спосіб не завжди дає змогу знайти точні координати цих точок. Приміром, на малюнку 24.2 визначити абсцису точки перетину графіка функції $y = -2x + 3$ з віссю абсцис можна лише наближено, наприклад, так: $x \approx 1{,}5$.

Отже, за допомогою графіка функції знайти точні значення абсциси точки перетину з віссю абсцис або ординати точки перетину з віссю ординат не завжди можливо.

Для багатьох функцій знайти координати точок перетину графіка з осями координат можна й не виконуючи побудови графіка, зокрема, якщо функцію задано формулою. У такому разі кажуть, що координати точок перетину знайдено аналітично, причому знайдені значення будуть точними, а не наближеними.

Приклад 6. Не виконуючи побудови, знайти координати точок перетину графіка функції $y = 2x - 6$ з осями координат.

Розв'язання. Точка перетину графіка з віссю абсцис належить цій осі, отже, її ордината має дорівнювати нулю. Тому для пошуку точки (або точок) перетину графіка функції з віссю абсцис достатньо у формулу, якою задано функцію, підставити значення $y = 0$ і розв'язати одержане рівняння.

Підставимо 0 замість y в рівняння $y = 2x - 6$. Одержимо рівняння $2x - 6 = 0$. Звідки $x = 3$. Отже, $(3; 0)$ – точка перетину графіка функції з віссю абсцис.

Точка перетину графіка з віссю ординат належить цій осі, отже, абсциса такої точки має дорівнювати нулю. Тому для знаходження точки перетину графіка функції з віссю ординат достатньо у формулу, якою задано функцію, підставити значення $x = 0$ та виконати обчислення.

Підставимо 0 замість x в рівняння $y = 2x - 6$. Одержимо: $y = 2 \cdot 0 - 6 = -6$. Отже, $(0; -6)$ – точка перетину графіка функції $y = 2x - 6$ з віссю ординат.

Відповідь: $(3; 0)$; $(0; -6)$.

Зауважимо, що існують функції, графіки яких не перетинають осі координат або хоча б одну з них.

Яку функцію називають лінійною? ○ Що є графіком лінійної функції? Як його побудувати? ○ Які властивості має лінійна функція? ○ Як знайти координати точок перетину графіка функції з осями координат? ○ Як побудувати графік функції $y = l$, де l – число? ○ Яку функцію називають прямою пропорційністю?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1036. (*Усно.*) Чи є лінійною функція:

1) $y = 2x - 3$; 2) $y = 4x - x^2$; 3) $y = 3$;

4) $y = \frac{4}{x}$; 5) $y = \frac{x}{3} - 1$; 6) $y = x - 1 - x^6$?

1037. Які з даних функцій є лінійними:

1) $y = 2x^2 - 7$; 2) $y = 3x - 1$; 3) $y = \frac{10}{x}$;

4) $y = \frac{x}{2} + 3$; 5) $y = -4$; 6) $y = 7x - x^3$?

1038. (*Усно.*) Які з функцій задають пряму пропорційність:

1) $y = 2x$; 2) $y = \frac{2}{x}$; 3) $y = x + 2$;

4) $y = 2$; 5) $y = -\frac{x}{2}$; 6) $y = \frac{x}{2}$?

1039. Чи є прямою пропорційністю функція, яку задано формулою:

1) $y = -3x$; 2) $y = -3x + 1$; 3) $y = -\frac{3}{x}$;

4) $y = -3$; 5) $y = \frac{x}{3}$; 6) $y = -\frac{x}{3}$?

1040. (*Усно.*) Назвіть коефіцієнти k і l для кожної з даних лінійних функцій:

1) $y = -0{,}8x + 7$; 2) $y = 6 - x$; 3) $y = \frac{x}{3}$;

4) $y = 2{,}4x$; 5) $y = -15$; 6) $y = 0$.

2

1041. Ширина прямокутника дорівнює x см, а його довжина на 3 см більша за ширину. Задайте формулою залежність:
1) периметра прямокутника від його ширини;
2) площі прямокутника від його ширини.
Яка із цих залежностей є лінійною функцією?

1042. Учениця купила щоденник за 15 грн і кілька зошитів по 4 грн. Задайте формулою залежність вартості покупки y (у гривнях) від кількості придбаних зошитів x. Чи є ця залежність лінійною функцією? Якою є область визначення цієї функції?

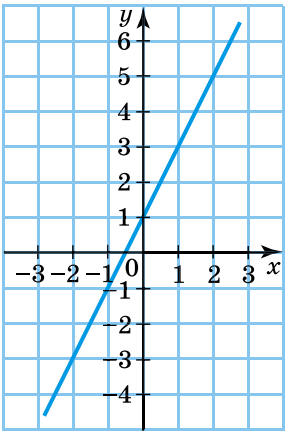
1043. Учень мав 30 грн. За ці кошти він придбав x олівців, по 1,5 грн кожен, після чого в нього залишилося y грн. Задайте формулою залежність y від x. Чи є ця залежність лінійною функцією?

1044. Лінійну функцію задано формулою $y = 0{,}5x + 3$. Знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -12; 0; 18$;
2) значення x, для якого $y = -4; 8; 2{,}5$.

1045. Дано лінійну функцію $y = -2x + 3$. Знайдіть значення:
1) y, якщо $x = 1{,}5; -4; -6{,}5$;
2) x, для якого $y = 5; 0; -8$.

1046. Використовуючи графік функції на малюнку 24.5, заповніть у зошиті таблицю:

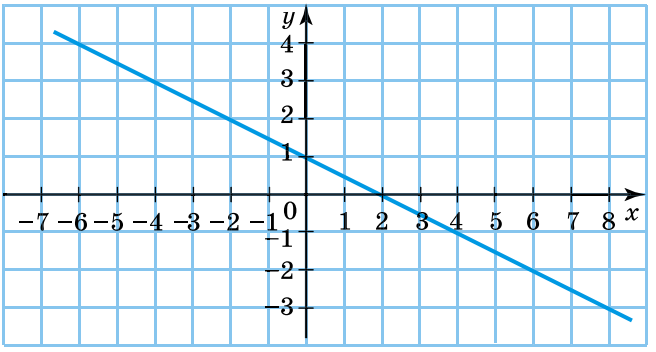
x	-2	0	1	3			
y					-5	-1	5



Мал. 24.5

1047. Використовуючи графік функції на малюнку 24.6, заповніть у зошиті таблицю:

x	-6	-2	2			
y				-3	-1	3



Мал. 24.6

1048. Запишіть координати будь-яких двох точок, що належать графіку функції $y = 5x - 2$.

1049. Заповніть у зошиті таблицю значень лінійної функції та побудуйте її графік:

1) $y = -x + 2$;

x	0	4
y		

2) $y = 2x - 3$.

x		
y		

1050. Заповніть у зошиті таблицю значень лінійної функції та побудуйте її графік:

1) $y = x - 3$;

x	0	3
y		

2) $y = -3x + 1$.

x		
y		

1051. Побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = x + 2$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = 0{,}5x - 3$;

4) $y = \frac{2}{3}x - 1$; 5) $y = -1$; 6) $y = -x + 2{,}5$.

1052. Побудуйте графік лінійної функції:
1) $y = x - 1$; 2) $y = -2x + 5$; 3) $y = -0{,}5x + 3$;
4) $y = \frac{3}{4}x + 1$; 5) $y = 4$; 6) $y = x - 1{,}5$.

1053. Мотоциклістка рухається зі швидкістю 65 км/год. Задайте формулою залежність відстані s (у кілометрах) від часу t (у годинах), за який вона подолає цю відстань. Чи є ця залежність прямою пропорційністю?

1054. Задайте формулою залежність:
1) довжини C кола від його радіуса r;
2) площі S круга, обмеженого цим колом, від радіуса r.
Яка із цих залежностей є прямою пропорційністю?

1055. Запишіть формули будь-яких двох лінійних функцій, графіки яких проходять через точку $P(1; -5)$.

1056. Серед даних функцій знайдіть ті, графіки яких проходять через точку $(1; -4)$:
1) $y = 4x$; 2) $y = 2x - 2$; 3) $y = 1$;
4) $y = -4$; 5) $y = -4x$; 6) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

1057. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 1{,}8x - 7$, з'ясуйте, чи проходить цей графік через точку:
1) $A(0; 7)$; 2) $B(-5; -16)$; 3) $C(5; -2)$; 4) $D(10; 11)$.

1058. Не будуючи графік функції $y = -3x + 7$, з'ясуйте, чи належить йому точка:
1) $A(1; -4)$; 2) $B(0; 7)$; 3) $C(-1; 10)$; 4) $D(10; -37)$.

1059. Не виконуючи побудови, знайдіть нулі функції:
1) $y = 2x - 6$; 2) $y = -\frac{1}{2}x + 8$; 3) $y = 7x$; 4) $y = -5x$.

1060. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = 4x + 12$; 2) $y = -8x$.

1061. Побудуйте графік прямої пропорційності:
1) $y = x$; 2) $y = -2{,}5x$; 3) $y = -x$; 4) $y = \frac{1}{2}x$.

1062. Побудуйте графік прямої пропорційності:
1) $y = 1{,}5x$; 2) $y = -2x$.

1063. Побудуйте графік функції $y = 5 - 2{,}5x$. За графіком знайдіть:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 0; 2;
2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює -5; 0; 10;
3) нулі функції;
4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;
5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень;
6) точки перетину графіка з осями координат.

1064. Побудуйте графік функції $y = 1{,}5x - 3$. За графіком знайдіть:
1) значення y, що відповідає значенню $x = -2$; 0; 4;
2) для якого значення x значення y дорівнює -3; 0; 6;
3) нулі функції;
4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;
5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень;
6) точки перетину графіка з осями координат.

1065. Графік функції $y = kx - 2$ проходить через точку $(6; -11)$. Знайдіть значення k.

1066. Знайдіть значення l, якщо графік функції $y = -\frac{1}{5}x + l$ проходить через точку $M(10; -5)$.

1067. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції з осями координат:

1) $y = 1{,}5x - 20$; 2) $y = 5 - \frac{x}{4}$.

1068. У яких точках перетинає осі координат графік функції:

1) $y = 0{,}2x - 40$; 2) $y = 18 - \frac{1}{3}x$?

1069. Точка $A(0{,}7; 70)$ належить графіку прямої пропорційності. Задайте цю функцію формулою.

1070. Задайте формулою пряму пропорційність, якщо її графік проходить через точку $B(-2; 18)$.

1071. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2}(6 - x)$; 2) $y = \frac{x-5}{5}$.

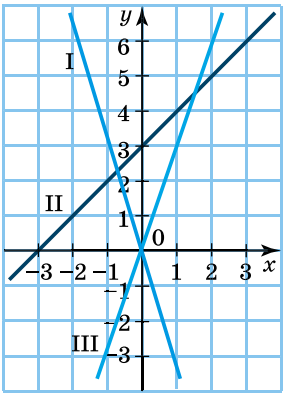
1072. Побудуйте графіки функцій в одній системі координат та знайдіть координати точки їх перетину:
1) $y = -0{,}5x - 1$ і $y = x - 4$;
2) $y = -2$ і $y = 3x - 5$.

1073. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 1{,}5x - 4$ і $y = 2$ та знайдіть координати точки їх перетину.

1074. Усі точки графіка функції $y = kx + l$ мають одну й ту саму ординату, яка дорівнює 5. Знайдіть k і l.

1075. Графік функції $y = kx + l$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $M(0; -5)$. Знайдіть k і l.

4 **1076.** Установіть відповідність між функціями $y = 3x$, $y = -3x$ і $y = x + 3$ та їхніми графіками I–III, зображеними на малюнку 24.7.



Мал. 24.7

1077. Функцію $y = 2x + 1$ задано для $-3 \leqslant x \leqslant 4$. Знайдіть область значень цієї функції.

1078. Не будуючи графіка функції $y = 4x - 6$, знайдіть таку його точку, у якої:
1) абсциса дорівнює ординаті;
2) абсциса й ордината — протилежні числа;
3) абсциса вдвічі менша від ординати.

1079. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x + 1, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x < -2, \\ 3x + 2, & \text{якщо } x \geqslant -2. \end{cases}$

1080. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 2 - 3x, & \text{якщо } x < 1, \\ 2x - 3, & \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$

* **1081.** Побудуйте графік функції.
1) $y = |x|$; 2) $y = |x| + x$;
3) $y = 4x - |x|$; 4) $y = |2x| + 3x + 1$.

1082. Побудуйте графік функції.

1) $y = -|x|$; 2) $y = |x| - x$;

3) $y = 2x + |x|$; 4) $y = |3x| - x - 1$.

Вправи для повторення

1083. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x + 5)^2 - (2x - 3)^2 = 16$;

2) $(7x + 1)^2 - (49x - 2)(x - 1) = -66$.

1084. Спростіть вираз:

1) $(5m - 2)(5m + 2) - m(10m - 1) + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2$;

2) $(a + 4y)^2 - (a - 2y)(a + 2y) - y(4a - 5y)$.

1085. На столі лежить 73 зошити, а в коробці – 17 зошитів. Скільки зошитів потрібно перекласти зі стола в коробку, щоб у коробці їх стало вдвічі менше, ніж на столі?

1086. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена, якщо це можливо:

1) $\frac{1}{9}p^2 + pq + 9p^2$; 2) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{15}xy + \frac{1}{25}y^2$;

3) $4x^2 - 20xy - 25y^2$; 4) $-36ab + 9a^2 + 36b^2$.

Життєва математика

1087. Вкладниця відкрила в банку «Щасливий» депозит на 20 000 грн. Через рік їй було нараховано 3200 грн відсоткових коштів.

1) Який відсоток річних нараховує банк?

2) Після сплати податку на доходи фізичних осіб вкладниця отримала відсоткові кошти в сумі 2624 грн. Скільки відсотків становить податок на доходи фізичних осіб?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

1088. *Давня аравійська задача.* В Аравії помер старий. Усе своє майно, 17 верблюдів, він заповів своїм синам, причому старший мав одержати половину, середній – третину, а найменший – дев'яту частину цього майна. Після смерті батька сини не змогли виконати заповіт, бо 17 не ділилося без остачі ані на 2, ані на 3, ані на 9. Довго сперечалися брати, аж тут на верблюді під'їхав до них мудрець. Довідався про

суперечку і дав братам слушну пораду, яка і допомогла розділити майно відповідно до батькового заповіту. Що саме порадив мудрець?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Укажіть формулу, що задає функцію.

А. $x^2 + y^2 = xy$

Б. $y = \dfrac{4}{x-3}$

В. $x^2 + x + y = zy$

Г. $y = \dfrac{x-1}{y+2}$

2. Яка з функцій є лінійною?

А. $y = x - 2$

Б. $y = \dfrac{1}{x-2}$

В. $y = x^2 - 2$

Г. $y = x^3 - 2$

3. Укажіть функцію, що задає пряму пропорційність.

А. $y = x - 3$

Б. $y = \dfrac{2}{x}$

В. $y = 2x$

Г. $y = 2 + x$

2 **4.** Обчисліть значення функції $y = -\dfrac{20}{x}$, для значення аргументу, що дорівнює -4.

А. 4 **Б.** -4

В. -5 **Г.** 5

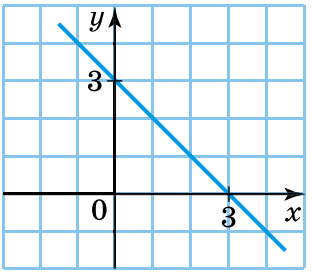
5. Не виконуючи побудови, знайдіть нуль функції $y = \dfrac{1}{3}x - 2$.

А. 2 **Б.** 4

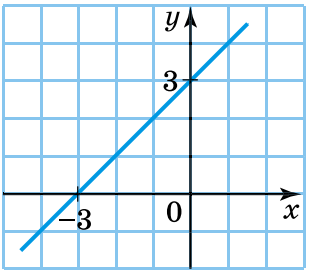
В. 6 **Г.** -6

6. На якому з малюнків зображено графік функції $y = 3 - x$?

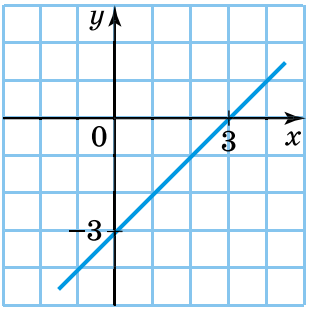
А.



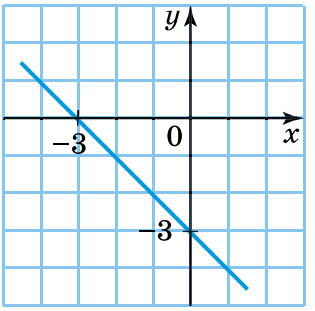
Б.



В.



Г.



3 **7.** Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$.

А. Усі числа
Б. Усі числа, крім 0
В. Усі числа, крім 0 і 1
Г. Усі числа, крім 0 і −1

8. Укажіть точку, що належить графіку функції $y = x^2 - 2x$.

А. (0; −2)
Б. (1; −1)
В. (−2; 0)
Г. (−1; −1)

9. Укажіть точку перетину графіка функції $y = 0{,}1x + 15$ з віссю абсцис.

А. (0; 15)
Б. (150; 0)
В. (−150; 0)
Г. Такої точки не існує

4 **10.** Знайдіть для $x = 2$ значення функції

$$y = \begin{cases} 7, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 \leqslant x < 3, \\ 5x, & \text{якщо } x \geqslant 3. \end{cases}$$

А. 4
Б. 7
В. 10
Г. Неможливо знайти

11. Графік прямої пропорційності проходить через точку $P(2; -4)$. Укажіть точку, через яку також проходить цей графік.

А. (0; −2)
Б. (3; 6)
В. (−3; −6)
Г. (3; −6)

12. Не будуючи графіка функції $y = 3x - 8$, знайдіть таку його точку, абсциса й ордината якої є протилежними числами.

А. $(-2; 2)$ **Б.** $(2; -2)$ **В.** $(4; -4)$ **Г.** $(-4; 4)$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між функціями (1–3) та точками, у яких графік функції перетинає осі координат (А–Г).

Функція	*Точки, у яких графік функції перетинає осі координат*
1. $y = 4 - 2x$	**А.** (0; 4)
2. $y = 4$	**Б.** (0; 4), (4; 0)
3. $y = x - 4$	**В.** (0; 4), (2; 0)
	Г. (0; −4), (4; 0)

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 22–24

1 **1.** Які з даних формул задають функцію:

1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \dfrac{x-1}{y+2}$;

3) $y = \dfrac{1}{x-8}$; 4) $xy = (x - y)^2$?

2. Чи є лінійною функція, яку задано формулою:

1) $y = 3x - 7$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = 4$; 4) $y = \dfrac{1}{2x-4}$?

3. Укажіть значення коефіцієнтів k і l для лінійної функції, заданої формулою:

1) $y = -2x + 6$; 2) $y = 7{,}4x$.

2 **4.** Функцію задано формулою $y = -2x + 7$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 5;

2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює 3.

5. Побудуйте графік функції $y = 2x - 5$. За графіком знайдіть:

1) значення функції для $x = 4$;

2) значення аргументу, для якого $y = -3$.

6. Функцію задано формулою $y = 0{,}8x - 7{,}2$. Не виконуючи побудови:

1) знайдіть нулі функції;

2) з'ясуйте, чи проходить графік функції через точку (10; 1).

7. Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{7}{x^2 - 5x}$.

8. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = -2{,}5x$ і $y = -5$ та знайдіть координати точки їх перетину.

9. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 6x + 11$.

Додаткові вправи

10. Функцію $y = 3x - 7$ задано для $-2 \leqslant x \leqslant 5$. Знайдіть область значень цієї функції.

11. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 2x + 6, & \text{якщо } x < 0, \\ 6 - x, & \text{якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$

За графіком знайдіть:

1) нулі функції;

2) значення аргументу, за яких функція набуває додатних значень;

3) значення аргументу, за яких функція набуває від'ємних значень.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 22

1089. Чи залежить площа квадрата від довжини його сторони? Чи є площа квадрата функцією від довжини сторони квадрата? Якщо так, то задайте цю функцію формулою за умови, що сторона квадрата дорівнює a.

1090. Функції задано формулами $y = \dfrac{x + 2}{x - 3}$ і $g = \dfrac{x - 4}{5}$.

Заповніть у зошиті таблицю, обчисливши відповідні значення функцій:

x	-4	-2	0	2	4
y					
g					

1091. Із села до міста, відстань між якими дорівнює 48 км, вирушив велосипедист зі швидкістю 14 км/год. Задайте формулою залежність змінної s від змінної t, де s – від-

стань, яку залишилося подолати велосипедисту до міста (у км), а t – час його руху (у год). За формулою знайдіть:
1) s, якщо $t = 1{,}5$; 2) t, якщо $s = 13$.

4 **1092.** Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{12}{9x^2 - 17x}$; 2) $y = \dfrac{x}{|x| - 1}$; 3) $y = \dfrac{2}{|x| + 5}$;

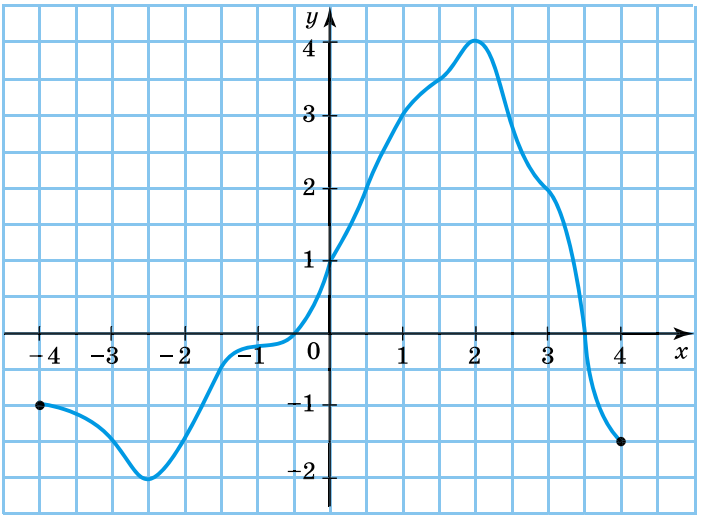
4) $y = \dfrac{9}{3 - |x - 1|}$; 5) $y = \dfrac{15}{|2x - 3| - 5}$; 6) $y = \dfrac{2}{1 - \dfrac{1}{x}}$.

До § 23

2 **1093.** Функцію задано формулою $y = 2x - 3$, де $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Заповніть у зошиті таблицю значень функції і побудуйте її графік.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
y											

3 **1094.** На малюнку 1 зображено графік функції. За графіком знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -3; -1{,}5; 0; 1{,}5; 3$;
2) значення x, для яких $y = -1{,}5; 2; 3$;
3) область визначення функції;
4) область значень функції;
5) нулі функції;



Мал. 1

6) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;
7) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.

4 **1095.** Побудуйте графік функції:
1) $y = |x|$, де $-2 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $y = |x + 3|$, де $-5 \leqslant x \leqslant 3$.

До § 24

1 **1096.** Які з даних функцій є лінійними? Які з них є прямою пропорційністю:
1) $y = -3x$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = -3x + 4x^2$;
4) $y = -3$; 5) $y = -\frac{3}{x}$; 6) $y = -\frac{1}{3}x$?

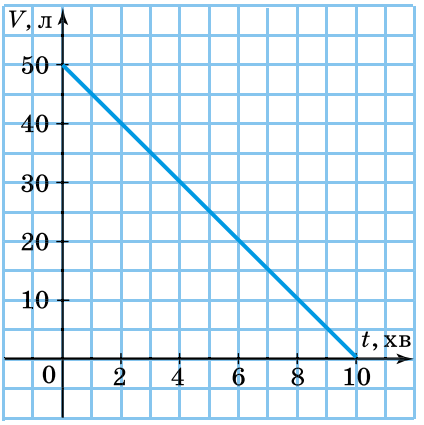
2 **1097.** Побудуйте графік функції:
1) $y = 2x$; 2) $y = 1 - x$; 3) $y = 2$;
4) $y = 4x - 1$; 5) $y = -3x$; 6) $y = 0{,}5x + 2$.

3 **1098.** Побудуйте графік прямої пропорційності $y = -\frac{3}{4}x$.
Знайдіть за графіком:
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -4; 0; 8;
2) значення аргументу, для якого значення функції дорівнює -6; 3; 6;
3) нулі функції;
4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;
5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.

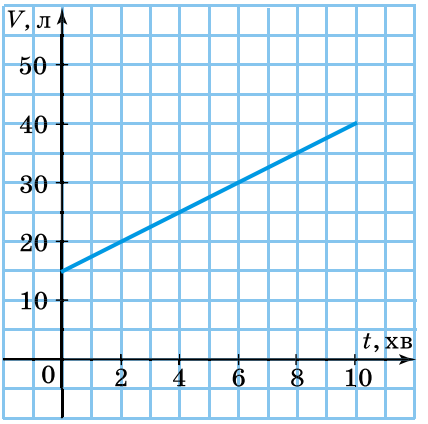
1099. Графіки функцій $y = kx$ і $y = 2x + l$ перетинаються в точці $A(-2; 6)$. Знайдіть k і l.

4 **1100.** На малюнках 2 і 3 зображено графіки двох процесів. Один з них описує процес наповнення резервуара водою, а другий – процес спорожнення резервуара від води. Який з графіків відповідає кожному зі згаданих процесів? По кожному з графіків знайдіть:
1) скільки літрів води було в резервуарі в початковий момент часу;
2) скільки літрів води буде в резервуарі через 1 хв; через 6 хв; через 8 хв від початку процесу;

3) через скільки хвилин від початку процесу в резервуарі буде 25 л води;
4) скільки літрів води надходить (виливається) щохвилини? Задайте формулою залежність об'єму V води в резервуарі від часу t для кожного із цих двох процесів.



Мал. 2



Мал. 3

1101. Побудуйте графік функції.

1) $y = 2|x|$;
2) $y = 5|x| + x$;
3) $y = \dfrac{|x| - 3x}{2}$;
4) $y = |x| + |-2x|$.

Головне в розділі 3

ФУНКЦІЯ

Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають ***функціональною залежністю***, або ***функцією***.

ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють ***область визначення функції***.

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ

Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють ***область значень функції***.

ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

Лінійною називають функцію вигляду $y = kx + l$, де x – незалежна змінна, k і l – деякі числа.

Графіком будь-якої лінійної функції є ***пряма***.

Для побудови графіка лінійної функції достатньо знайти координати двох точок графіка.

Пряма вигляду $y = l$ паралельна осі x.

ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Щоб побудувати графік функції $y = l$, достатньо позначити на осі y точку з координатами $(0; l)$ та провести через неї пряму, паралельну осі x.

ПРЯМА ПРОПОРЦІЙНІСТЬ

Прямою пропорційністю називають функцію вигляду $y = kx$, де x – незалежна змінна, k – відмінне від нуля число.

Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат.

РОЗДІЛ 4

$ax + by = c$

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases}$

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **ознайомитеся** з лінійними рівняннями з двома змінними, системами двох лінійних рівнянь з двома змінними;
- **навчитеся** розв'язувати системи лінійних рівнянь з двома змінними, текстові задачі за допомогою систем лінійних рівнянь; будувати графіки лінійних рівнянь з двома змінними.

§ 25. Лінійне рівняння з двома змінними

Рівняння з двома змінними та його розв'язок

У попередніх параграфах ми розглядали рівняння з однією змінною. Проте в алгебрі розглядають і рівняння з кількома змінними. Зокрема, ми розглянемо рівняння з двома змінними.

Приклад 1. Сума одного числа з квадратом другого дорівнює 17. Якщо перше число позначити через x, а друге – через y, то співвідношення між ними можна записати у вигляді рівності $x + y^2 = 17$, яка містить дві змінні x і y. Такі рівності називають ***рівняннями з двома змінними*** (або *рівняннями з двома невідомими*).

Якщо $x = 1$; $y = 4$, то рівняння $x + y^2 = 17$ перетворюється на правильну числову рівність. У такому разі кажуть, що пара значень змінних $x = 1$; $y = 4$ є *розв'язком* рівняння $x + y^2 = 17$. Або скорочено: пара чисел (1; 4) є розв'язком рівняння.

Розв'язком рівняння з двома змінними **називають пару значень змінних, яка перетворює рівняння в правильну числову рівність.**

Розв'язками рівняння $x + y^2 = 17$ також є пари (–8; 5); (8; 3); (16; –1). Для такого скороченого запису розв'язків рівняння важливо знати, що пара чисел має бути *впорядкованою*.

Якщо рівняння містить змінні x і y, → то на першому місці записують значення змінної x, а на другому – значення змінної y.

Щоб знайти розв'язок рівняння з двома змінними, можна підставити в рівняння довільне значення однієї змінної і, розв'язавши отримане рівняння, знайти відповідне їй значення другої змінної.

Знайдемо так ще кілька розв'язків рівняння $x + y^2 = 17$. Нехай $y = -2$, тоді $x + (-2)^2 = 17$, звідки $x = 13$; нехай $y = 6$, тоді $x + 6^2 = 17$, звідки $x = -19$.

Маємо ще два розв'язки рівняння: $(13; -2)$ і $(-19; 6)$.

Лінійне рівняння з двома змінними

Лінійним рівнянням з двома змінними **називають рівняння вигляду $ax + by = c$, де x і y – змінні.**
Числа a, b і c називають *коефіцієнтами* рівняння.

Рівняння з двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називають ***рівносильними***. Рівняння, які не мають розв'язків, також є рівносильними.

Рівняння з двома змінними мають ті самі *властивості*, що й рівняння з однією змінною:

1) **якщо в рівнянні розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;**
2) **якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;**
3) **якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.**

Приклад 2. Розглянемо рівняння $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$. Якщо в ньому розкрити дужки, потім перенести доданки, що містять змінні, в одну частину рівняння, а ті, що їх не містять, – у другу, далі звести подібні доданки, отримаємо рівняння $7x - 2y = -7$, рівносильне рівнянню $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$.

Використовуючи властивості рівнянь з двома змінними, можна знаходити їхні розв'язки і в інший спосіб.

Приклад 3. Розглянемо рівняння $3x + 5y = 2$. Використовуючи властивості рівносильності рівнянь, *виразимо* в цьому рівнянні *одну змінну через іншу*. Наприклад, змінну y через змінну x. Для цього спочатку $3x$ перенесемо у праву частину рівняння: $5y = -3x + 2$, потім обидві частини поділимо на 5 і одержимо $y = -0{,}6x + 0{,}4$. Це рівняння рівносильне рівнянню $3x + 5y = 2$. Тепер, маючи формулу $y = -0{,}6x + 0{,}4$, можна знайти скільки завгодно розв'язків рівняння $3x + 5y = 2$. Для цього достатньо взяти довільне значення змінної x і обчислити відповідне йому значення змінної y. Пари таких значень змінних x і y запишемо в таблицю:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	3,4	2,8	2,2	1,6	1	0,4	−0,2	−0,8	−1,4	−2	−2,6

Пари чисел, записані у стовпчиках таблиці, є розв'язками рівняння $3x + 5y = 2$. Це рівняння має безліч розв'язків.

Наведіть приклад рівняння з двома змінними. ○ Що називають розв'язком рівняння з двома змінними? ○ Сформулюйте означення лінійного рівняння з двома змінними. ○ Наведіть приклад лінійного рівняння з двома змінними. ○ Які рівняння з двома змінними називають рівносильними? ○ Які властивості мають рівняння з двома змінними?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1102. (*Усно.*) Укажіть рівняння, що є рівняннями з двома змінними:

1) $x^2 - 3xy = 5$; 2) $4x^2 - 5x - 1 = 0$;
3) $3x + 2y = 5$; 4) $x + y + z = 8$;
5) $x + 2x^2 = y - 3y^2$; 6) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3$.

1103. (*Усно.*) Чи є лінійним рівняння з двома змінними:

1) $4x - 5y = 9$; 2) $3x^2 - 4y = 5$; 3) $2x + 11y = 0$;
4) $\frac{x+2}{y-1} = 7$; 5) $0x + 3y = 12$; 6) $13x + 2y^2 = 3$?

1104. Укажіть рівняння з двома змінними. Які з них є лінійними:

1) $3x - 2y = 5$; 2) $2x^2 - 3y^2 = 1$; 3) $(x - 2)(y + 1) = 5$;
4) $4x - 0y = 8$; 5) $xyz = 12$; 6) $\frac{1}{7}x + \frac{1}{8}y = \frac{1}{9}$?

1105. (*Усно.*) Чи є пара чисел розв'язком рівняння $x - y = 0$:
1) (4; 4); 2) (–1; 1); 3) (0; 0)?

1106. Чи є пара чисел $x = 2$; $y = 3$ розв'язком рівняння $x + y = 5$? Знайдіть ще три розв'язки цього рівняння.

1107. Які з пар чисел (10; 1), (1; 10), (7; 2), (7; –2), (9; 0) є розв'язками рівняння $x - y = 9$?

1108. Які з пар чисел (2; 1), (2; –1), (0; 5), (1; 3), (–1; 5) є розв'язками рівняння $2x + y = 5$?

2

1109. Розв'язком яких рівнянь є пара чисел (–1; 3):
1) $2x - 17y = 53$; 2) $3x^2 + y^2 = 12$;
3) $(x - 3)(y + 2) = -20$; 4) $0x + 4y = -12$;
5) $0x + 0y = 0$; 6) $x^2 + 1 = y^2 - 7$?

1110. Розв'язком яких рівнянь є пара чисел $x = 2$; $y = -1$:
1) $3x + y = 5$; 2) $x^2 + y^2 = 3$;
3) $2x + 0y = 4$; 4) $x(y + 3) = 14$;
5) $0x + 0y = 7$; 6) $\frac{1}{2}x + y = 0$?

1111. Знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:
1) $x + y = -3$; 2) $x - 2y = 5$.

1112. Знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:
1) $x - y = 2$; 2) $x + 3y = 0$.

1113. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $x = 3$; $y = -2$.

1114. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел (–2; 0).

1115. Виразіть з рівняння $5x + y = 7$ змінну y через змінну x.

1116. Виразіть з рівняння $x - 3y = 9$ змінну x через змінну y.

3

1117. З лінійного рівняння $3x - 2y = 12$ виразіть:
1) змінну y через змінну x; 2) змінну x через змінну y.

1118. Виразивши в рівнянні змінну y через змінну x, знайдіть два будь-яких розв'язки рівняння:
1) $x + y = 29$; 2) $5x + y = 7$;
3) $3x - 2y = 15$; 4) $6y - x = 5$.

1119. Виразивши в рівнянні змінну y через змінну x або змінну x через змінну y, знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:
1) $x - 2y = -8$; 2) $7x - y = 9$;
3) $3x + 2y = 6$; 4) $5x - 7y = 12$.

1120. Пара чисел $(-5; p)$ є розв'язком рівняння $2x - y = -13$. Знайдіть p.

1121. Пара чисел $(n; -1)$ є розв'язком рівняння $3x + 5y = 4$. Знайдіть n.

1122. Знайдіть m, якщо пара чисел $(-1; -3)$ є розв'язком рівняння:
1) $8x + 9y = m$;
2) $mx - 2y = -9$.

1123. Для якого значення d пара чисел $(2; -1)$ є розв'язком рівняння:
1) $7x - 5y = d$; 2) $3x + dy = 8$?

1124. Знайдіть два деяких розв'язки рівняння

$$2(x - y) = 3(x + y) + 4.$$

1125. Серед розв'язків рівняння $x + 3y = 20$ знайдіть пару рівних між собою чисел.

1126. Знайдіть p, якщо:
1) пара $(p; p)$ є розв'язком рівняння $4x - 9y = -10$;
2) пара $(p; -p)$ є розв'язком рівняння $17x + 12y = 105$.

1127. Знайдіть усі пари натуральних чисел, які є розв'язками рівняння:
1) $2x + y = -7$;
2) $3x + 2y = 5$;
3) $x + 7y = 15$;
4) $xy = 7$.

Вправи для повторення

1128. Функцію задано формулою $y = \dfrac{2x + 1}{x - 6}$. Заповніть у зошиті таблицю, обчисливши відповідні значення функції:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y								

1129. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(x - 10)^2 - x(x + 80)$, якщо $x = -0{,}83$;
2) $(5m + 3)^2 - (5m - 3)^2$, якщо $m = -\dfrac{17}{60}$.

1130. Відомо, що $a + b = -1$, $ab = -6$. Знайдіть значення виразів:
1) $a^2b + ab^2$; 2) $a^2 + b^2$;
3) $(a - b)^2$; 4) $a^3 + b^3$.

Життєва математика

1131. Роздрібна ціна підручника для 7 класу становить 360 грн, що на 20 % вище за оптову ціну. Скільки коштуватимуть 28 таких підручників, придбаних для 7 класу, за оптовою ціною?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1132. Побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = x + 3$; 2) $y = -2x + 1$;
3) $y = 0{,}6x + 2$; 4) $y = -2$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

1133. Дано два трицифрових числа, сума яких ділиться на 37. Ці числа записали в рядок одне за одним. Доведіть, що отримане в такий спосіб шестицифрове число також ділиться на 37.

§ 26. Графік лінійного рівняння з двома змінними

Графік рівняння з двома змінними

Кожну пару чисел, що є розв'язком рівняння з двома змінними x і y, можна позначити на координатній площині точкою, абсциса якої – значення x, а ордината – значення y. Усі такі точки утворюють *графік рівняння з двома змінними*.

Графіком рівняння з двома змінними x **і** y **називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння.**

Графік рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля

З'ясуємо, як виглядає графік лінійного рівняння з двома змінними.

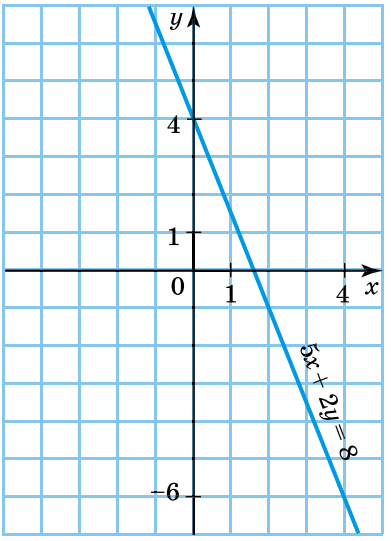
Приклад 1. Побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними $5x + 2y = 8$.

Розв'язання. Виразимо змінну y через змінну x, маємо: $2y = -5x + 8$. Отже, $y = -2{,}5x + 4$.

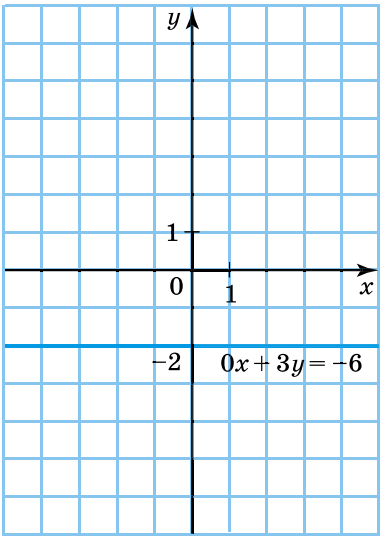
Формула $y = -2{,}5x + 4$ задає лінійну функцію, графіком якої є пряма. Для побудови графіка складемо таблицю значень x і y для двох його точок:

x	0	4
y	4	−6

Графік функції $y = -2{,}5x + 4$ зображено на малюнку 26.1. Оскільки рівняння $5x + 2y = 8$ та $y = -2{,}5x + 4$ є рівносильними, то побудована пряма є також і графіком рівняння $5x + 2y = 8$.



Мал. 26.1



Мал. 26.2

Приклад 2. Побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними $0x + 3y = -6$.

Розв'язання. Рівняння $0x + 3y = -6$ рівносильне рівнянню $y = -2$. Це лінійна функція, графіком якої є пряма, паралельна осі x, що проходить через точку $(0; -2)$. Цю пряму зображено на малюнку 26.2. Вона також є графіком рівняння $0x + 3y = -6$.

За допомогою аналогічних міркувань можна показати, що графіком будь-якого лінійного рівняння з двома змінними $ax + by = c$, де $b \neq 0$, є пряма.

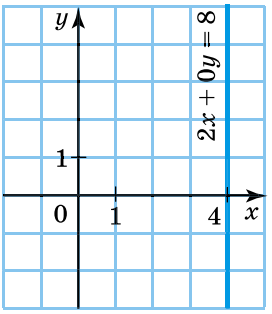
Розглянемо випадок, коли $b = 0$.

Приклад 3. Побудувати графік рівняння $2x + 0y = 8$.

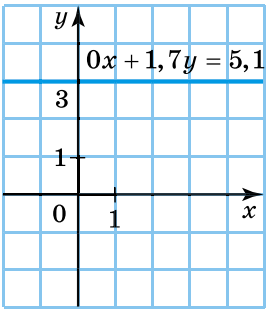
Розв'язання. Розв'язком даного рівняння є кожна пара чисел вигляду $(4; y)$, де y – будь-яке число. Наприклад, $(4; -2)$, $(4; 0)$, $(4; 3)$, $(4; 7{,}5)$ – теж розв'язки даного рівняння. Графік рівняння складається з усіх точок, абсциси яких дорівнюють 4, а ординати – будь-які числа. Такі точки утворюють пряму, яка прохо-

дить через точку (4; 0) паралельно осі y. Цю пряму зображено на малюнку 26.3.

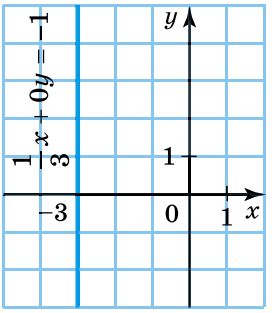
Графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля, є пряма.



Мал. 26.3



Мал. 26.4



Мал. 26.5

Приклад 4. На малюнку 26.4 зображено графік рівняння $0x + 1{,}7y = 5{,}1$, тобто це графік рівняння $y = 3$, а на малюнку 26.5 – графік рівняння $\frac{1}{3}x + 0y = -1$, тобто $x = -3$.

1) Щоб побудувати графік рівняння $y = m$, достатньо позначити на осі y точку $(0; m)$ та провести через неї пряму паралельно осі x.

2) Щоб побудувати графік рівняння $x = n$, достатньо позначити на осі x точку $(n; 0)$ та провести через неї пряму паралельно осі y.

Графік рівняння $0x + 0y = c$

Розглянемо випадок, коли в лінійному рівнянні $ax + by = c$ обидва коефіцієнти a і b дорівнюють нулю.

Приклад 5. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Тоді маємо рівняння $0x + 0y = c$, наприклад $0x + 0y = 2$. Це рівняння не має розв'язків, отже, його графік не містить жодної точки, а тому не існує.

Приклад 6. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Тоді маємо рівняння $0x + 0y = 0$. Будь-яка пара чисел є розв'язком цього рівняння, а його графіком – усі точки координатної площини.

Що називають графіком рівняння з двома змінними x і y? ○ Яка фігура є графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля? ○ Як побудувати графік рівняння $y = m$, де m – число; графік рівняння $x = n$, де n – число?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1134. (*Усно.*) Чи належить графіку рівняння $x + y = 6$ точка:
1) (5; 1); 2) (4; −2); 3) (1; 6); 4) (6; 0)?

1135. Які з точок $A(4; 0)$, $B(1; 3)$, $C(3; -1)$, $D(0; 4)$, $E(5; 1)$ належать графіку рівняння $x - y = 4$?

1136. Чи проходить графік рівняння $7x + 5y = 25$ через точку:
1) (7; −4); 2) (5; −2); 3) (−1,4; 7); 4) (35; −44)?

1137. Графіки яких рівнянь проходять через точку $P(-2; 3)$:
1) $7x + 9y = 15$; 2) $17y - 4x = 59$;
3) $0x + 5y = 15$; 4) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = -1$;
5) $0x + 0y = 5$; 6) $1{,}7x + 1{,}2y = 0{,}2$?

1138. Доведіть, що графіки рівнянь $5x - 8y = -66$, $0x + 3y = 21$ та $7y - 4x = 57$ проходять через точку $M(-2; 7)$.

1139. Назвіть дві довільні точки, які належать графіку рівняння $2x - 5y = 20$.

1140. Знайдіть дві точки, які належать графіку рівняння $3x + 2y = 12$, і дві точки, які йому не належать.

1141. Побудуйте графік рівняння:
1) $x - y = 5$; 2) $0{,}5x + y = 3$;
3) $x + 3y = 0$; 4) $0{,}2x - 0{,}4y = 2$.

1142. Побудуйте графік рівняння:
1) $x + y = 6$; 2) $y - 2x = 0$;
3) $x - 0{,}5y = 4$; 4) $2x + 3y = 5$.

1143. Запишіть яке-небудь лінійне рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точку $P(1; -3)$.

1144. На графіку рівняння $2x + 3y = 7$ вибрано точку з абсцисою −4. Знайдіть ординату цієї точки.

1145. На графіку рівняння $5x - 7y = 16$ взято точку з ординатою −2. Яка абсциса в цієї точки?

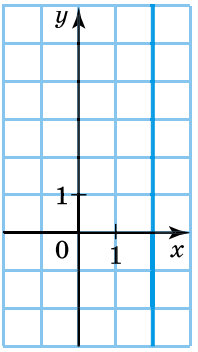
1146. Побудуйте графік рівняння:
1) $0x + 2{,}5y = 12{,}5$; 2) $7x + 0y = -14$;
3) $1{,}9x = 5{,}7$; 4) $3y = -7{,}5$.

1147. Побудуйте графік рівняння:

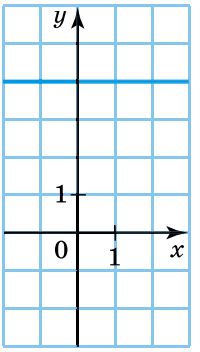
1) $3x + 0y = -12$; 2) $0x - 1{,}2y = 3{,}6$;

3) $1{,}8y = 7{,}2$; 4) $4x = 6$.

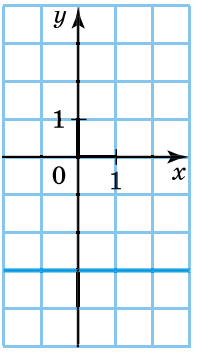
1148. Запишіть рівняння, графіки яких зображено на малюнках 26.6–26.9.



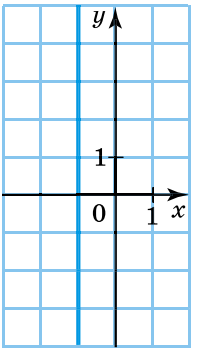
Мал. 26.6



Мал. 26.7



Мал. 26.8



Мал. 26.9

1149. За якого значення m графік рівняння:

1) $5x + 7y = m$ проходить через початок координат;

2) $mx + 2y = 14$ проходить через точку $(2; -3)$;

3) $3x - 4y = m + 2$ проходить через точку $(-1; 5)$?

1150. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків рівнянь з осями координат:

1) $x + 7y = -21$; 2) $5x - 3y = 15$.

1151. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків рівнянь з осями координат:

1) $3x + y = 18$; 2) $-7x - 2y = 28$.

1152. Побудуйте графік рівняння:

1) $2(x + y) - 3y = 1$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$.

1153. Побудуйте графік рівняння:

1) $5(x - y) - 4(x + y) = -7$; 2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

1154. Не виконуючи побудови, визначте, через які координатні кути проходить графік рівняння:

1) $2x - 6y = 0$; 2) $3x + y = 0$;

3) $1{,}9x = 190$; 4) $-8y = 720$.

1155. Побудуйте в одній системі координат графіки рівнянь $2x + 3y = 6$ і $4x + 6y = 8$. Чи перетинаються ці графіки?

1156. Побудуйте графік рівняння $\frac{x-3}{5}+\frac{y+4}{3}=\frac{7}{15}$.

Вправи для повторення

1157. Пряму пропорційність задано формулою $y=-\frac{1}{4}x$. Знайдіть:

1) значення y, якщо $x=-8;\ 0;\ 12;\ 20$;
2) значення x, якщо $y=-2;\ 3;\ 10$.

1158. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $64a^2-(8a-1)^2+14a$;
2) $m^2+4n^2-(m+2n)^2-12mn$;
3) $2m(m-5)-(m-5)^2$;
4) $(x-3)(x+5)-(x+1)^2$.

1159. Автомобіль та автобус одночасно виїхали назустріч один одному з пунктів A і B, відстань між якими 240 км. Швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість автобуса. Знайдіть швидкість автобуса та швидкість автомобіля, якщо вони зустрілися через 2 год після виїзду, при цьому автомобіль зробив на шляху півгодинну зупинку.

Життєва математика

1160. Маса новонародженої дитини в середньому має становити 3 кг 300 г. Якщо батько дитини є курцем, то її маса буде на 125 г меншою від середньої, якщо ж курить мати – меншою на 300 г. Визначте, скільки відсотків маси втрачає дитина при народженні, якщо:

1) курить її батько; 2) курить її мати.

Відповідь округліть до цілих відсотків.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1161. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=0{,}5x+2$ і $y=5-x$. За графіком знайдіть координати точки їх перетину.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

1162. Доведіть, що для будь-якого значення x значення виразу $x^8-x^5+x^2-x+1$ є числом додатним.

§ 27. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними та її розв'язок. Розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними графічно

Поняття про систему рівнянь з двома змінними та її розв'язок

Приклад 1. За набір фарб і набір пензлів разом заплатили 96 грн, причому набір фарб був на 16 грн дорожчий за набір пензлів. Скільки коштує набір фарб і скільки – набір пензлів?

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язати арифметичним способом (по діях) або за допомогою рівняння з однією змінною. А ще її можна розв'язати за допомогою лінійних рівнянь з двома змінними.

Якщо вартість набору фарб позначити через x грн, а набору пензлів – через y грн, то, враховуючи, що вони разом коштують 96 грн, отримаємо рівняння: $x + y = 96$.

Оскільки набір фарб дорожчий за набір пензлів на 16 грн, то маємо ще одне рівняння: $x - y = 16$.

Отримали два рівняння з двома змінними, які є математичною моделлю задачі.

Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти такі значення змінних x і y, які б одночасно перетворювали у правильну рівність кожне з отриманих рівнянь, тобто знайти спільний розв'язок цих рівнянь.

Якщо є кілька рівнянь, для яких потрібно знайти спільний розв'язок, то кажуть, що ці рівняння утворюють ***систему рівнянь***. Записують систему рівнянь за допомогою фігурної дужки. Складену за умовою даної задачі ***систему лінійних рівнянь з двома змінними*** записують так:

$$\begin{cases} x + y = 96, \\ x - y = 16. \end{cases}$$

Розв'язком кожного з рівнянь системи є пара значень змінних $x = 56$, $y = 40$. Її називають *розв'язком системи рівнянь*.

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними **називають пару значень змінних, яка є розв'язком кожного з рівнянь системи.**

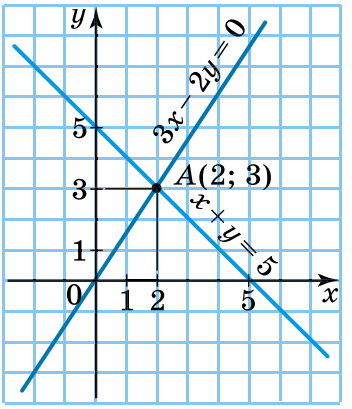
Розв'язати систему рівнянь **означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.**

Графічний спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними

Для розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними можна використовувати графіки рівнянь. Такий спосіб розв'язування систем рівнянь називають ***графічним***. Розглянемо його на прикладі.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Побудуємо в одній координатній площині графіки обох рівнянь (мал. 27.1). Координати кожної точки прямої, що є графіком рівняння $x + y = 5$, є розв'язками першого рівняння системи. Аналогічно координати кожної точки прямої $3x - 2y = 0$ є розв'язками другого рівняння системи. Координати точки перетину цих прямих є розв'язками і першого, і другого рівняння, тобто є розв'язком кожного з рівнянь, отже, і розв'язком даної системи рівнянь. Оскільки графіки перетинаються лише в точці (2; 3), то система має єдиний розв'язок $x = 2$; $y = 3$. Перевіркою (підстановкою в кожне з рівнянь системи) впевнюємося, що ця пара чисел дійсно є розв'язком даної системи. Цей розв'язок можна записати ще так: (2; 3), де на першому місці – значення змінної x, а на другому – значення змінної y.



Мал. 27.1

Відповідь: (2; 3).

Зауважимо, що графічний спосіб зазвичай дає змогу знаходити розв'язки лише наближено. У прикладі 2 перевіркою ми переконалися, що пара (2; 3) є точним розв'язком.

Розглянемо системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, у кожному з яких хоча б один з коефіцієнтів при змінних x і y відмінний від нуля. Графіками обох рівнянь системи є прямі. Тому якщо ці прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок, якщо прямі не перетинаються (паралельні), то система не має розв'язків, якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків.

Отже,

щоб розв'язати систему рівнянь графічно, доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

1) побудувати графіки рівнянь системи в одній координатній площині;

2) знайти координати точки перетину графіків або впевнитися, що вони не перетинаються (є паралельними) або збігаються;

3) якщо координати точки перетину є цілими числами, то виконати перевірку; якщо – ні, то розв'язок системи визначити наближено;

4) записати розв'язок у відповідь.

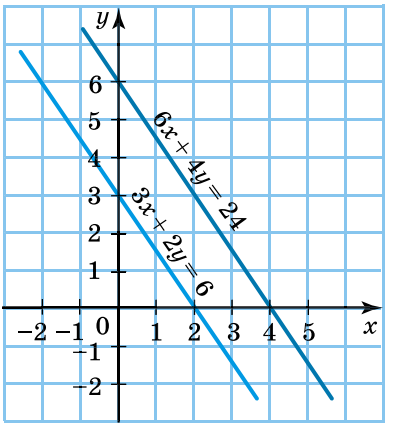
Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 6x + 4y = 24. \end{cases}$

Розв'язання. 1-й спосіб. Побудуємо графіки рівнянь в одній координатній площині (мал. 27.2). Графіки рівнянь є паралельними прямими, отже, не мають спільної точки, тому система розв'язків не має.

Оскільки малюнок не дає потрібної точності, пересвідчитися, що система не має розв'язків, можна й інакше.

2-й спосіб. Поділивши обидві частини другого рівняння на 2, матимемо:

$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$



Мал. 27.2

Очевидно, що не існує таких значень змінних x і y, для яких би одночасно виконувалися рівності $3x + 2y = 6$ і $3x + 2y = 12$.

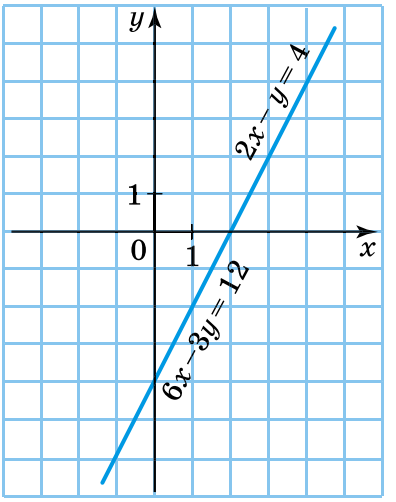
Отже, система рівнянь розв'язків не має.

Відповідь: немає розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 6x - 3y = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Побудуємо графіки рівнянь в одній координатній площині (мал. 27.3). Графіки рівнянь збігаються, тому дана система має безліч розв'язків. Будь-яка пара чисел, що є розв'язком першого рівняння, є розв'язком і другого. Щоб записати до системи відповідь, виразимо y через x з першого рівняння: $y = 2x - 4$. Так, будь-яка пара чисел вигляду $(x;\ 2x - 4)$, де x – довільне число, є розв'язком даної системи.



Мал. 27.3

2-й спосіб. Поділивши обидві частини другого рівняння на 3, матимемо:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Очевидно, що маємо два однакових рівняння, отже, їхні графіки збігаються. Далі міркуємо так само, як у *1-му способі*.

Відповідь: $(x;\ 2x - 4)$, де x – довільне число.

А ще раніше...

Китайські математики вміли розв'язувати системи лінійних рівнянь ще дві тисячі років тому. Вони винайшли загальний метод розв'язування таких систем, причому не тільки з двома, а й з більшою кількістю рівнянь і змінних.

А давньогрецький математик Діофант (бл. III ст. до н. е.) розв'язував і деякі системи нелінійних рівнянь з двома змінними. Тому надалі рівняння з кількома змінними, для яких потрібно знайти розв'язки в натуральних числах (натуральні розв'язки рівняння), стали називати **діофантовими** рівняннями.

Що називають розв'язком системи рівнянь з двома змінними? ○ Що означає розв'язати систему рівнянь? ○ Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними? ○ Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома змінними графічно?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **1163.** (*Усно.*) Яка з даних систем є системою двох лінійних рівнянь з двома змінними:

1) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 7x - 4y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y = 9, \\ xy = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ x - y = -9? \end{cases}$

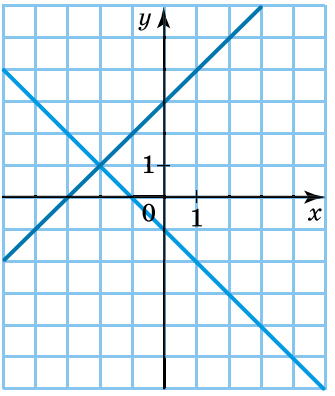
1164. (*Усно.*) Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1 \end{cases}$ пара чисел:

1) (3; 4); 2) (4; 3); 3) (6; 1)?

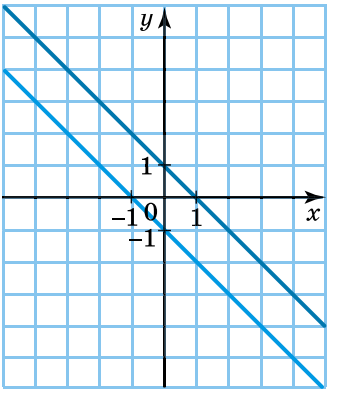
1165. Яка з даних пар чисел є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$

1) (5; 0); 2) (2; 3); 3) (3; 2)?

1166. (*Усно.*) Скільки розв'язків має система, графіки рівнянь якої зображено на малюнку 27.4? На малюнку 27.5?



Мал. 27.4



Мал. 27.5

2 **1167.** (*Усно.*) Чи є пара чисел (–2; 1) розв'язком системи:

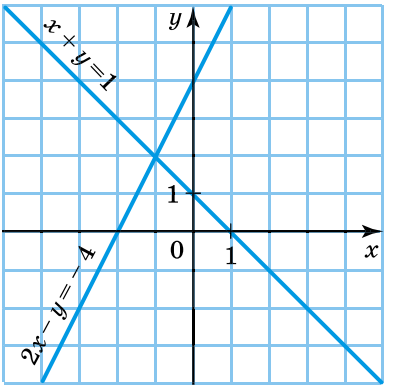
1) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3x - 7y = -13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 9x - 11y = 29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x = 5 - 9y, \\ 7y - 12x = 31? \end{cases}$

1168. Яка з пар (3; –4), (7; 2), (4; –3) є розв'язком системи:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 17, \\ 5x + 2y = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 7y = 0, \\ 3x + 5y = 31? \end{cases}$

1169. Складіть систему лінійних рівнянь з двома змінними, розв'язком якої є пара чисел:
1) (1; −3); 2) (4; 5).

1170. Знайдіть координати точки перетину прямих, які зображено на малюнку 27.6. Запишіть відповідну цим прямим систему рівнянь. Перевірте розв'язок, підставивши координати знайденої точки в кожне з рівнянь.



Мал. 27.6

1171. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = -x, \\ y = 4 + x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2x, \\ y = 3 + x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + 2y = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - y = 4. \end{cases}$

1172. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x, \\ y = 6 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -2x, \\ y = 4 - x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - 2y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x + y = 3. \end{cases}$

1173. Пара (2; −5) – розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 2x + by = 5, \\ ax - 6y = 13. \end{cases}$ Знайдіть a і b.

1174. Знайдіть a і b, якщо пара (10; −2) є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax - 5y = 17, \\ 3x + by = 9. \end{cases}$

1175. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 7y = 12, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$

1176. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = -10, \\ 6x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5y = -4, \\ 7x - 2y = 25. \end{cases}$

1177. З'ясуйте, чи має система розв'язки і скільки:

1) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0,5x - y = 4, \\ -x + 2y = -8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ y = -0,2x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

1178. Чи має система розв'язки і скільки:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 3x - y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 2x - 4y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2y, \\ 1,5x - 3y = 0? \end{cases}$

1179. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y = -3, \\ x + 5y = 4. \end{cases}$ Перевірте, чи є одержаний розв'язок точним. Чи є розв'язком даної системи пара чисел $\left(-2\frac{1}{9};\ 1\frac{2}{9}\right)$?

1180. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$ Перевірте, чи є одержаний розв'язок точним. Чи є розв'язком даної системи пара чисел $(1,9;\ 1,7)$?

1181. Не виконуючи побудови, доведіть, що система рівнянь $\begin{cases} x - 7y = 8, \\ -4x + 28y = -31 \end{cases}$ не має розв'язків.

1182. Не виконуючи побудови, доведіть, що система рівнянь $\begin{cases} 2x + 5y = 18, \\ -3x - 7,5y = -27 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

1183. Знайдіть які-небудь розв'язки системи $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ -9x - 3y = -15. \end{cases}$ Скільки всього розв'язків вона має? Розв'яжіть її.

1184. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ -6x + 4y = -10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 3y = -4, \\ 3x + 9y = 12. \end{cases}$

1185. До рівняння $x + 3y = 5$ доберіть друге рівняння так, щоб одержана система рівнянь мала:

1) лише один розв'язок;

2) безліч розв'язків.

1186. До рівняння $2x - y = 7$ доберіть друге рівняння так, щоб одержана система рівнянь не мала розв'язків.

Вправи для повторення

1187. Які з точок $A(4; -2)$; $B(0; 0)$; $C(-1; -5)$; $D(1; 2)$ належать графіку прямої пропорційності:
1) $y = -0{,}5x$; 2) $y = 5x$?

1188. Спростіть вираз:
1) $7m(m - 3) - 3(m - 2)(m + 2)$;
2) $(1 - 2x)(2x + 1) - (3x - 1)^2$;
3) $(2x + 3y)^2 - (x + 3y)(2x - y)$;
4) $(4a - 5b)(5b + 4a) - (2a - 5b)^2$.

1189. Доведіть, що вираз $-x^2 + 8x - 17$ для будь-яких значень x набуває лише від'ємних значень. Якого найбільшого значення набуває цей вираз і для якого значення x?

Життєва математика

1190. Тариф на послуги таксі в одній з компаній-перевізників формується так: пасажир сплачує по 6 грн за кожний кілометр шляху та додатково 30 грн за приїзд машини. Задайте формулою залежність витрат p (у грн) на одну поїздку від довжини шляху s (у км).

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1191. Виразіть з рівняння змінну y через x або x через y:
1) $x - 4y = -5$; 2) $8x - y = 1$;
3) $2x - 3y = 5$; 4) $3x + 5y = -10$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

1192. Припустимо, що вираз $(4 - 3x)^{2025}$ записано у вигляді многочлена. Знайдіть суму коефіцієнтів цього многочлена.

§ 28. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки

Поняття про спосіб підстановки

Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь є досить громіздким і до того ж не завжди допомагає знайти точні розв'язки.

Розглянемо інші (не графічні) способи розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними, їх називають *аналітичними*. Почнемо зі ***способу підстановки***.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -3x + 4y = -10. \end{cases}$ (1)

Розв'язання. З першого рівняння виразимо змінну y через змінну x: $y = 3 - 2x$.

Підставимо вираз $3 - 2x$ у друге рівняння замість y. Маємо:

$$\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ -3x + 4(3 - 2x) = -10. \end{cases} \quad (2)$$

Тепер друге рівняння системи (2) містить лише змінну x. Розв'яжемо його: $-3x + 12 - 8x = -10$;

$-11x = -22$;

$x = 2$.

Підставимо число 2 замість x у рівність $y = 3 - 2x$. Одержимо відповідне значення y: $y = 3 - 2 \cdot 2$;

$y = -1$.

Пара $(2; -1)$ є розв'язком кожного з рівнянь системи (2), отже, є розв'язком системи (2). Ця пара є розв'язком кожного з рівнянь системи (1) і тому є розв'язком системи (1).

Відповідь: $(2; -1)$.

Рівносильні системи рівнянь

Системи рівнянь з двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називають *рівносильними*. Системи, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Розв'язуючи систему (1) способом підстановки, ми замінили її рівносильною їй системою (2), друге рівняння якої містило лише одну змінну.

Алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки

Послідовність дій, якої слід дотримуватися, розв'язуючи систему лінійних рівнянь з двома змінними *способом підстановки*, розглянемо на прикладі системи $\begin{cases} 3x - 7y = 1, \\ 4x + 9y = 38. \end{cases}$

	Дія	*Результат*
1	Виразити з якого-небудь рівняння системи одну змінну через другу (наприклад, з першого)	$3x = 1 + 7y$, $x = \dfrac{1+7y}{3}$
2	Одержаний для цієї змінної вираз підставити в друге рівняння системи	$4 \cdot \dfrac{1+7y}{3} + 9y = 38$
3	Розв'язати одержане рівняння з однією змінною, тобто знайти значення цієї змінної	$4(1 + 7y) + 3 \cdot 9y = 3 \cdot 38$, $4 + 28y + 27y = 114$, $55y = 110$, $y = 2$
4	Знайти відповідне їй значення другої змінної	$x = \dfrac{1+7\cdot 2}{3}$, $x = 5$
5	Записати відповідь	*Відповідь*: (5; 2)

Спосіб підстановки зручно застосовувати тоді, коли хоча б один з коефіцієнтів при змінних x або y дорівнює 1 або -1. Саме змінну з таким коефіцієнтом доцільно виразити через іншу.

Способом підстановки можна розв'язати й інші системи.

Приклад 2. Розв'язати систему $\begin{cases} 4(y+3) - 3(x-1) = 40, \\ \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{y-4}{2} = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Розв'язання. У першому рівнянні системи розкриємо дужки, а обидві частини другого рівняння помножимо на 6. Матимемо:

$$\begin{cases} 4y + 12 - 3x + 3 = 40, \\ 2(x+2) + 3(y-4) = -2. \end{cases}$$

Спростивши кожне з рівнянь системи, зведемо її до вигляду:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 25, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Далі застосуємо спосіб підстановки. Виразимо з першого рівняння y через x: $y = \dfrac{25+3x}{4}$. Підставивши цей вираз у друге рівняння і розв'язавши його, одержимо, що $x = -3$.

Далі знайдемо відповідне йому значення y: $y = \dfrac{25 + 3 \cdot (-3)}{4}$, тобто $y = 4$.

Відповідь: $(-3; 4)$.

Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1193. (*Усно.*) У якій з рівностей 1–3 правильно виконано підстановку для розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} x = 7y - 5, \\ 2x + 3y = 9? \end{cases}$

1) $2x + 3(7y - 5) = 9$;
2) $2 + (7y - 5) + 3y = 9$;
3) $2(7y - 5) + 3y = 9$.

1194. Яка з рівностей є правильно застосованою підстановкою для розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} y = 4x + 3, \\ 7x + 2y = 9? \end{cases}$

1) $7(4x + 3) + 2y = 9$;
2) $7x + 2 - (4x + 3) = 9$;
3) $7x + 2(4x + 3) = 9$.

1195. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 7x = 21, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - y = 17, \\ -2y = 10. \end{cases}$

1196. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x = y + 2, \\ 4x - 8y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x - 3, \\ 5x + 2y = 29. \end{cases}$

1197. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} -4x = 8, \\ 5x - 2y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x + 5, \\ 7x + 3y = -5. \end{cases}$

1198. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = -2, \\ x - 2y = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 0, \\ 4x + y = 15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x + 2y = 2, \\ x - 2y = 10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ 2x - 3y = -3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 3y = -19, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$

1199. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x + y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x - 2y = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x = -5, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$

1200. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x + y = 4$ і $2x + 3y = 9$.

1201. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x - y = 3$ і $3x + 2y = 14$.

3 **1202.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 7y = 29; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x - 5y = 41, \\ 4x + 3y = -7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2a - 5b = 0, \\ -7a + 4b = 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10m - 2n = 39, \\ 9m + 4n = 38. \end{cases}$

1203. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x + 3y = 0, \\ 5x - 7y = -43; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 9y = -59, \\ 5x - 4y = 38; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3p - 7q = 0, \\ 2p + 9q = 41; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6a - 7b = 51, \\ 2a + 3b = -15. \end{cases}$

1204. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 7(x - 3) + 8 = 4 + 5x, \\ 4(x - y) - 7y = 6,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x + y) - 3y = 2, \\ 9(x - 2y) - 6x = -11. \end{cases}$

1205. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4(x + y) - 8y = -4, \\ 7(y + 1) - (y + 3) = 19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8(x + y) - 12y = 6, \\ 6(3x - y) + 18x = 13. \end{cases}$

1206. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{1}{8}(x - y) = 9, \\ \frac{1}{3}(x + y) = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0,2(2x + y) = 3, \\ 0,7(x - 4y) = -1,05. \end{cases}$

1207. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 0,4(x + y) = 12, \\ 0,6(x - y) = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{7}(2x + y) = 13, \\ \frac{1}{3}(x - 3y) = 14. \end{cases}$

1208. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{x+1}{5}+\frac{y-1}{3}=1, \\ \frac{x+2}{6}+\frac{y+2}{3}=2. \end{cases}$

1209. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{x-4}{2}+\frac{y+11}{4}=1, \\ \frac{x+7}{3}+\frac{y-4}{7}=2. \end{cases}$

1210. Доведіть, що графіки рівнянь $2x - 3y = 4$ і $4x - 6y = 9$ є паралельними прямими.

1211. Графік функції $y = kx + l$ проходить через точки $M(9; 1)$ і $N(-6; -4)$. Знайдіть k і l.

1212. Графіком функції $y = kx + l$ є пряма, що проходить через точки $A(-2; -4)$ і $B(4; 11)$. Задайте цю функцію формулою.

1213. Для яких значень m система рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 4x + my = 10 \end{cases}$ не має розв'язків;

2) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ mx - 12y = 20 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

Вправи для повторення

1214. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = \frac{2}{3}x$. За допомогою графіка знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -6; 0; 3$.
2) значення x, для яких $y = -2; 0; 4$.

1215. Розкладіть на множники многочлен:
1) $9m^2 + 12m^5 - 18m^3$;
2) $3x^4y^2 - 9x^2y^3 + 12x^3y$;
3) $a^6 - 6 - 2a^2 + 3a^4$;
4) $pq - 6p + p^2 - 6q$.

1216. Доведіть, що рівняння не має розв'язків:
1) $x^2 + 4 = 0$;
2) $x^2 - 6x + 13 = 0$;
3) $4x^2 - 12x + 16 = 0$;
4) $x^2 + x + 2 = 0$.

Життєва математика

1217. Під час чищення зубів мати витрачає воду економно (доки чистить зуби, кран закручує), а батько цього не робить.

За показниками лічильника води діти встановили, що мати витрачає щоранку 1,5 л води, а батько – вдвічі більше.
1) На скільки літрів води щомісяця більше витрачає батько, ніж мати?
2) *Практична діяльність*. Дізнайтеся, скільки коштує 1 $м^3$ води у вашій місцевості, та визначте, скільки коштів може заощадити ця родина за місяць (30 днів), якщо батько під час чищення зубів також буде економно витрачати воду.



Цікаві задачі – поміркуй одначе

1218. Якщо добуток чотирьох послідовних натуральних чисел збільшити на 1, то він дорівнюватиме квадрату деякого натурального числа. Доведіть це.

§ 29. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання

Поняття про спосіб додавання

Тепер розглянемо ще один аналітичний спосіб розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними – ***спосіб додавання***. Розв'язуючи систему способом додавання, ми переходимо до рівносильної їй системи, одне з рівнянь якої міститиме тільки одну змінну.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 4x - 5y = -22. \end{cases}$ (1)

Розв'язання. У цій системі коефіцієнти при змінній y є протилежними числами. Знайдемо суму лівих частин рівнянь системи і суму правих їхніх частин. Зрозуміло, що ці суми будуть між собою рівними. Сума лівих частин містить подібні доданки, тому в результаті додавання отримаємо рівняння з однією змінною: $7x = -21$.
Додавання рівнянь системи, яке ми застосували, називають *почленним додаванням*. Замінимо одне з рівнянь системи (1), наприклад перше, рівнянням $7x = -21$. Матимемо систему:

$$\begin{cases} 7x = -21, \\ 4x - 5y = -22. \end{cases} \quad (2)$$

З першого рівняння системи (2) маємо: $x = -3$. Підставивши це значення в друге рівняння системи (2), одержимо, що $y = 2$. Отже, пара чисел $(-3; 2)$ є розв'язком системи (2).

Переконаємося, що ця пара чисел є не тільки розв'язком системи (2), а й розв'язком системи (1). Для цього в кожне з рівнянь системи (1) підставимо замість x число -3, а замість y – число 2. Тоді в лівій частині першого рівняння одержимо $3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 1$, отже, значення лівої і правої частин збігаються, тому пара $(-3; 2)$ є розв'язком першого рівняння. У лівій частині другого рівняння одержимо $4 \cdot (-3) - 5 \cdot 2 = -22$, тобто значення лівої частини рівняння дорівнює значенню правої його частини. Отже, пара $(-3; 2)$ є розв'язком і другого рівняння системи. Оскільки пара чисел $(-3; 2)$ є розв'язком кожного з рівнянь системи (1), то вона є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) мають один і той самий розв'язок, тому є рівносильними.

Відповідь: $(-3; 2)$.

Алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання

Способом додавання зручно розв'язувати системи, у рівняннях яких коефіцієнти при одній і тій самій змінній є протилежними числами.

Зауважимо, що будь-яку систему лінійних рівнянь з двома змінними можна звести до вигляду, зручного для застосування способу додавання. Розглянемо це на прикладі.

Приклад 2. Розв'язати систему $\begin{cases} 5x + 2y = 10, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$

Розв'язання. Рівняння цієї системи не містять протилежних коефіцієнтів при однакових змінних, що не є зручним для способу додавання. Але якщо помножити обидві частини першого рівняння на число -2, то коефіцієнти при змінній y в обох рівняннях стануть протилежними. Після цього можна почленно додати рівняння системи. Запишемо це розв'язання:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 10, \\ 7x + 4y = 8; \end{cases} \Big| \cdot (-2)$$

$$\begin{cases} -10x - 4y = -20, \\ 7x + 4y = 8; \end{cases} \Big| +$$

$$-3x = -12,$$

$$x = 4.$$

Підставимо знайдене значення x у друге рівняння системи, щоб знайти y. Отримаємо: $7 \cdot 4 + 4y = 8$, звідки $y = -5$.

Остаточно маємо: $\begin{cases} x = 4, \\ y = -5. \end{cases}$

Відповідь: $(4; -5)$.

Послідовність дій, якої слід дотримуватися, розв'язуючи систему лінійних рівнянь з двома змінними *способом додавання*, розглянемо на прикладі системи

$$\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19. \end{cases}$$

	Дія	*Результат*
1	Помножити за потреби обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами	$\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19; \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{matrix}$ $\begin{cases} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76 \end{cases}$
2	Додати почленно рівняння системи	$41x = 82$
3	Розв'язати одержане рівняння з однією змінною	$x = 2$
4	Підставити знайдене значення змінної в одне з рівнянь початкової системи і знайти відповідне їй значення іншої змінної	$7 \cdot 2 - 4y = 2$, $-4y = -12$, $y = 3$
5	Записати відповідь	*Відповідь*: $(2; 3)$.

Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1219. (*Усно.*) Яке рівняння одержимо, якщо почленно додамо рівняння системи:

1) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - y = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x + 3y = 9, \\ -4x + y = 1? \end{cases}$

1220. (*Усно.*) На яке число потрібно помножити обидві частини першого рівняння системи, щоб у рівняннях коефіцієнти при змінній y стали протилежними:

1) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x - 2y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 3x + 21y = 7? \end{cases}$

1221. На яке число потрібно помножити обидві частини першого рівняння, щоб у рівняннях коефіцієнти при змінній x стали протилежними:

1) $\begin{cases} x - 4y = 9, \\ -2x + 7y = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 7y = 19, \\ 12x - 8y = 4? \end{cases}$

12

1222. (*Усно.*) Назвіть спосіб (підстановки чи додавання), яким зручніше розв'язувати систему:

1) $\begin{cases} 3x + y = 9, \\ 17x + 19y = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 7y = 8, \\ 10x - 7y = 17; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 15y = 27, \\ 12x + 17y = 49; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 10, \\ 2015x + 2016y = 2017. \end{cases}$

1223. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 3y = 7, \\ -4x - y = -5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 8y = 7, \\ -2x + 7y = 5. \end{cases}$

1224. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ -3x + 5y = -1. \end{cases}$

1225. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 4x + 3y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 2y = 5, \\ 7x - 3y = 45. \end{cases}$

1226. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 4x + y = 7, \\ 5x + y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 2x - 4y = -9. \end{cases}$

1227. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x - 5y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + 7y = 11. \end{cases}$

1228. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + y = 2, \\ 5x - 4y = 25. \end{cases}$

1229. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = -3, \\ -14x + 3y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 5y = 19, \\ 7x - 10y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 5y = 7, \\ 2x - 3y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 9y = -1, \\ 7x + 36y = -8. \end{cases}$

1230. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ -9x + 7y = 23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 2y = 2, \\ 5x - 4y = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 15x - 7y = 51; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4m + 5b = 5, \\ 7m + 20b = 11. \end{cases}$

3 **1231.** Знайдіть розв'язок системи способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2a - 3b = 7, \\ 3a + 4b = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10m - 6n = 18, \\ 15m + 7n = 59; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 14x - 8y = -6, \\ 21x + 10y = 2. \end{cases}$

1232. Знайдіть розв'язок системи способом додавання:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 10, \\ 5x - 7y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 15x - 3y = -15, \\ 20x - 7y = -41. \end{cases}$

1233. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5(x - 2) = 2y - 1, \\ 3(x + 3) = 12(y + 3); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(a + 2b) - 5a = 0,4, \\ 7(3a - 4b) + 3b = 5,9. \end{cases}$

1234. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 7(x + 3) = 3y + 1, \\ 4(2 - x) = 5(y + 1) + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(m - 2n) - 7m = 9,6, \\ 5(4m + 3n) + 8n = -18,5. \end{cases}$

4 **1235.** Складіть рівняння прямої, графік якої проходить через точки:

1) $A(4; -4)$ і $B(12; -1)$;

2) $M(-3; 6)$ і $N(9; -2)$.

1236. Графік лінійної функції проходить через точки $(-4; 5)$ і $(12; 1)$. Задайте цю функцію формулою.

1237. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{2-x}{6}+\dfrac{y+4}{3}=2\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{x+4}{12}-\dfrac{2-y}{6}=\dfrac{5}{12}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-1)^2+y=(x+2)^2-23, \\ (x+2)^2+(y-1)^2=x^2+(y+7)^2. \end{cases}$

1238. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{4}-\dfrac{y-4}{8}=1\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{x-4}{6}+\dfrac{y+2}{9}=-\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-1)(y+2)=x(y-1), \\ x(y+3)=(x+1)(y-2). \end{cases}$

1239. З'ясуйте, чи має система рівнянь розв'язки і скільки:

1) $\begin{cases} 3x-y=2, \\ -6x+2y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -4x+3y=7, \\ -8x+6y=14. \end{cases}$

Вправи для повторення

1240. Чи належать графіку функції $y=-4{,}5x+1$ точки: $A(-2;\ 10)$, $B(0;\ -1)$, $C(4;\ 17)$, $D(10;\ -44)$?

1241. Пара чисел $(-2;\ -3)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax-2y=8, \\ bx-ay=7. \end{cases}$ Знайдіть a і b.

1242. Які одночлени потрібно вписати у клітинки, щоб утворилася тотожність:

1) $(7m-\square)^2=\square-\square+25a^8$;
2) $(\square+\square)^2=36p^4+\square+121b^2$;
3) $(3p+\square)^2=\square+24p^2m^7+\square$;
4) $(\square-\square)^2=\square-32mn^2+16n^4$?

Життєва математика

1243. 1) Визначте масу складників у салаті «Вітамінний», маса якого 400 г, якщо моркви там у 4 рази менше від загальної маси салату, селери – стільки само, скільки й моркви, яблук – на 60 г більше, ніж селери, горіхів – у 5 разів менше, ніж моркви, лимонного соку – у 2 рази менше, ніж горіхів, і ще салат містить один зубчик часнику.

2) *Практичне завдання*. Дізнайтеся рецепти інших корисних і простих у приготуванні салатів, спробуйте їх приготувати та додайте до свого раціону.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

1244. Чи існують такі цілі числа x і y, для яких справджується рівність $x^2 + 2018 = y^2$?

§ 30. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь

Задача, математичною моделлю якої є система рівнянь

Ми вже розглядали задачі, які можна розв'язати за допомогою рівнянь. Математичною моделлю задачі може бути не тільки рівняння, а й система рівнянь. Зазвичай це стосується тих задач, де невідомими є значення двох або більше величин.

Приклад 1. За 7 шоколадних батончиків і 2 плитки шоколаду заплатили 85 грн. Скільки коштує батончик і скільки плитка шоколаду, якщо відомо, що три батончики дорожчі за одну плитку на 3 грн?

Розв'язання. Нехай батончик коштує x грн, а плитка шоколаду – y грн. Тоді сім батончиків коштують $7x$ грн, а дві плитки шоколаду – $2y$ грн. Оскільки разом за таку кількість батончиків і плиток шоколаду заплатили 85 грн, маємо рівняння: $7x + 2y = 85$.

Вартість трьох батончиків становить $3x$ грн, і вони дорожчі за плитку шоколаду на 3 грн. Тому одержимо ще одне рівняння: $3x - y = 3$.

Щоб відповісти на запитання задачі, ми маємо знайти такі значення x і y, які задовольняли б обидва рівняння, тобто задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 85, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо, що $x = 7$; $y = 18$. Отже, вартість шоколадного батончика – 7 грн, а вартість плитки шоколаду – 18 грн.

Відповідь: 7 грн; 18 грн.

Зауважимо, що цю задачу, як і деякі інші із цього параграфа, можна розв'язати і за допомогою рівняння з однією змінною. Але часто скласти систему рівнянь до задачі простіше, ніж скласти до неї рівняння з однією змінною.

Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи рівнянь

Розв'язуючи задачу за допомогою системи рівнянь, слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) *позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x і y);*
2) *за умовою задачі скласти систему рівнянь;*
3) *розв'язати одержану систему;*
4) *проаналізувати знайдені значення змінних відповідно до умови задачі, дати відповідь на запитання задачі;*
5) *записати відповідь.*

Приклад 2. За 2 год проти течії і 5 год за течією моторний човен долає 120 км. За 2 год за течією і 1 год проти течії цей самий човен долає 51 км. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії.

Розв'язання. Нехай власна швидкість човна x км/год, а швидкість течії – y км/год. Тоді швидкість човна за течією річки дорівнює $(x + y)$ км/год, а швидкість човна проти течії – $(x - y)$ км/год. За 5 год руху за течією човен долає $5(x + y)$ км, за 2 год проти течії – $2(x - y)$ км, а разом це становить 120 км. Маємо рівняння: $5(x + y) + 2(x - y) = 120$.

Міркуючи аналогічно, за умовою задачі можна скласти ще одне рівняння: $2(x + y) + (x - y) = 51$.

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} 5(x+y)+2(x-y)=120, \\ 2(x+y)+(x-y)=51. \end{cases}$

Розв'язавши яку, одержимо: $\begin{cases} x=16{,}5, \\ y=1{,}5. \end{cases}$

Отже, власна швидкість човна – 16,5 км/год, а швидкість течії – 1,5 км/год.

Відповідь: 16,5 км/год; 1,5 км/год.

Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи задачу за допомогою системи рівнянь?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1245. У легкоатлетичній секції тренуються 32 спортсмени, причому дівчат серед них на 4 більше, ніж хлопців. Скільки дівчат і скільки хлопців тренується в цій секції?

1246. За дві години кухар наліпив 260 пельменів, причому за першу годину – на 20 пельменів менше, ніж за другу. Скільки пельменів наліпив кухар за першу годину і скільки – за другу?

1247. За олівець і три зошити заплатили 32 грн, а за три олівці і зошит – 24 грн. Скільки коштує один олівець і скільки – один зошит?

1248. За 2 год пішки і 1 год на велосипеді туристка подолала 18 км, а за 1 год пішки і 2 год на велосипеді – 27 км. З якою швидкістю туристка рухалася пішки і з якою – на велосипеді?

1249. У касі крамниці після переобліку залишилося 12 монет по 50 к. і по 1 грн, усього на суму 8 грн. Скільки монет по 50 к. і скільки по 1 грн залишилося в касі?

1250. Було придбано 16 зошитів у клітинку і лінійку, усього на суму 328 грн. Зошит у клітинку коштує 22 грн, а в лінійку – 18 грн. Скільки зошитів у клітинку і скільки зошитів у лінійку було придбано?

1251. За 3 футбольних і 2 волейбольних м'ячі заплатили 1088 грн. Скільки коштує футбольний м'яч і скільки волейбольний, якщо два волейбольних м'ячі на 192 грн дорожчі за один футбольний?

1252. 2 акумулятори і 3 батарейки разом коштують 252 грн. Скільки коштує один акумулятор і скільки одна батарейка, якщо акумулятор коштує стільки само, скільки 3 батарейки?

1253. Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за його бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 26 см.

1254. Довжина прямокутника на 8 м більша за ширину. Знайдіть довжину і ширину прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 м.

1255. Човен за 3 год руху за течією і 2 год руху проти течії долає 92 км. За 9 год руху за течією човен долає відстань у 5 разів більшу, ніж за 2 год руху озером. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.

1256. Човен рухався 2 год за течією і 5 год проти течії, подолавши за цей час 110 км. Швидкість човна проти течії становить 70 % від швидкості човна за течією. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.

1257. З пунктів A і B, відстань між якими 168 км, одночасно вирушають велосипедистка і мотоцикліст. Якщо вони будуть рухатися назустріч одне одному, то зустрінуться через 3 год. А якщо рухатимуться в одному напрямку, то мотоцикліст наздожене велосипедистку через 6 год. Знайдіть швидкість кожного з них.

1258. Сума двох чисел дорівнює 62. Знайдіть кожне із чисел, якщо 70 % від одного і 60 % від другого разом становлять 39,6.

1259. 20 % від одного числа на 2,4 більше за 10 % від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 72.

1260. Матері разом з донькою 42 роки. Через рік мати стане втричі старшою за доньку. Скільки років кожній з них зараз?

1261. Розв'яжіть систему рівнянь. Складіть задачу, яка б розв'язувалася за допомогою цієї системи:

1) $\begin{cases} x + y = 17, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 15, \\ x - y = 1. \end{cases}$

1262. Розв'яжіть систему рівнянь. Складіть задачу, яка б розв'язувалася за допомогою цієї системи:

1) $\begin{cases} x - y = 8, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 18, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

1263. У ящику і кошику разом 95 яблук. Якщо кількість яблук у ящику зменшити вдвічі, а кількість яблук у кошику збільшити на 25, то яблук у ящику і кошику стане порівну. Скільки яблук у ящику і скільки – в кошику?

1264. Сума двох чисел дорівнює 45. Знайдіть ці числа, якщо 60 % від першого з них дорівнюють 75 % від другого.

1265. Знайдіть два числа, якщо їх сума дорівнює 200 і $\frac{11}{24}$ від одного з них дорівнюють $\frac{3}{8}$ від другого.

1266. Змішали два види цукерок вартістю 60 грн і 75 грн за кілограм. Після чого утворилося 20 кг суміші вартістю 66 грн за кілограм. По скільки кілограмів цукерок кожного виду взяли для суміші?

1267. З двох сортів печива вартістю 40 грн і 55 грн за кілограм утворили 25 кг суміші вартістю 49 грн за кілограм. По скільки кілограмів печива кожного виду взяли?

4 **1268.** У двох бідонах разом було 75 л олії. Після того як половину олії з першого бідона перелили в другий, там олії стало в 4 рази більше, ніж у першому. По скільки літрів олії було в кожному бідоні спочатку?

1269. На двох полицях разом 57 книжок. Після того як з першої полиці переставили 5 книжок на другу, там їх стало вдвічі більше, ніж на першій. По скільки книжок було на кожній полиці спочатку?

1270. За 5 світильників і 4 ліхтарики заплатили 896 грн. Після того як світильники подешевшали на 15 %, а ліхтарики подорожчали на 10 %, один світильник і один ліхтарик разом стали коштувати 196 грн. Якою була початкова вартість світильника і якою – ліхтарика?

1271. Два кондитерських цехи за день мали разом виготовити 300 тортів. Коли перший цех виконав 55 % свого завдання, а другий – 60 % свого, виявилося, що перший цех виготовив на 27 тортів більше, ніж другий. По скільки тортів мав виготовити кожен цех?

1272. Якщо чисельник даного дробу збільшити на 7, то дріб дорівнюватиме $\frac{2}{3}$. Якщо знаменник даного дробу збільшити на 2, то дріб дорівнюватиме 0,25. Знайдіть цей дріб.

1273. Якщо чисельник дробу зменшити на 2, то дріб дорівнюватиме 0,5. Натомість, якщо знаменник дробу збільшити на 11, то дріб дорівнюватиме $\frac{1}{3}$. Знайдіть цей дріб.

1274. Скільки грамів кожного з 2-відсоткового і 6-відсоткового розчинів солі потрібно взяти, щоб отримати 200 г 5-відсоткового розчину?

1275. В одному сплаві міститься 9 % цинку, а в другому – 24 %. По скільки грамів кожного сплаву потрібно взяти, щоб одержати зливок масою 260 г, що містить 15 % цинку?

1276. Чотири роки тому батько був у 8 разів старший за сина, а через 20 років батько стане вдвічі старший за сина. Скільки років кожному з них зараз?

1277. Якщо суму цифр двоцифрового числа збільшити в 5 разів, то вона дорівнюватиме самому числу. А якщо його цифри поміняти місцями, то воно збільшиться на 9. Знайдіть це число.

Вправи для повторення

1278. Розкладіть на множники многочлен:

1) $m^2 + 10m + 25$; 2) $c^2 - 8c + 16$;

3) $p^2 - 0{,}36$; 4) $-49a^2 + b^2$.

1279. Спростіть вираз:

1) $2x(3x - 4x^3) - (x + 3x^2)^2$;

2) $2p^2(2p^2 - 6pm) - (2p^2 - 3mp)^2$.

1280. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -3x, & \text{якщо } x < -1, \\ 3, & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x + 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

Життєва математика

1281. Діти 11–15 років на кожний кілограм своєї маси мають щоденно вживати 2,6 г білків, 2,3 г жирів, 10,4 г вуглеводів. Дізнайтеся власну масу тіла та визначте, скільки жирів, білків і вуглеводів маєте щоденно вживати ви.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

1282. *Задача Ньютона.* Трава на галявині росте рівномірно щільно й швидко. Відомо, що 70 корів з'їли би її за 24 дні, а 30 корів – за 60 днів. Скільки корів з'їли би всю траву за 96 днів?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Яке з рівнянь є лінійним рівнянням з двома змінними?

А. $2x^2 - 3x = 7$ **Б.** $2x^2 - 3y = 7$

В. $2x - 3y = 7$ **Г.** $2x - 3y^3 = 7$

2. Укажіть точку, що належить графіку рівняння $x + y = 6$.

А. (2; 3) **Б.** (2; 4)

В. (3; 4) **Г.** (−2; −4)

3. Укажіть пару чисел, що є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 1. \end{cases}$

А. (4; 3) **Б.** (−4; 3) **В.** (−4; −3) **Г.** (4; −3)

2 **4.** Розв'язком якого рівняння є пара чисел $(2; -1)$?

А. $x + 3y = 5$ **Б.** $3x + y = 5$
В. $2x + y = 5$ **Г.** $x + y = 3$

5. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 4x + 3y = 11. \end{cases}$

А. $(2; 1)$ **Б.** $(1; 2)$
В. $(3; 1)$ **Г.** $(1; 3)$

6. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь $\begin{cases} 4x - 7y = 11, \\ 3x + 7y = -4. \end{cases}$

А. $(1; 1)$ **Б.** $(-1; 1)$
В. $(-1; -1)$ **Г.** $(1; -1)$

3 **7.** Серед розв'язків рівняння $x + 2y = -18$ знайдіть пару рівних між собою чисел.

А. $(6; 6)$ **Б.** $(-6; -6)$
В. $(0; 0)$ **Г.** $(-9; -9)$

8. Для якого значення m графік рівняння $mx + 3y = 5$ проходить через точку $(-2; 3)$?

А. 2 **Б.** −2 **В.** 7 **Г.** −7

9. З пунктів A і B, відстань між якими 60 км, вирушили одночасно пішохід і велосипедистка. Якщо вони рухатимуться назустріч одне одному, то зустрінуться через 3 год, а якщо вони рухатимуться в одному напрямку, то велосипедистка наздожене пішохода через 5 год. Знайдіть швидкість пішохода.

А. 3 км/год **Б.** 4 км/год
В. 4,5 км/год **Г.** 5 км/год

4 **10.** Скільки є пар натуральних чисел, які є розв'язками рівняння $2x + y = 9$?

А. три **Б.** чотири
В. п'ять **Г.** безліч

11. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точки $(1; 4)$ і $(-2; 13)$. Знайдіть k.

А. 7 **Б.** 3
В. −3 **Г.** −5

12. Для якого значення a система рівнянь $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ ax - 6y = 16 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

А. 4 **Б.** 2 **В.** 0 **Г.** −4

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між графіком рівняння (1–3) та точками перетину графіка з осями координат (А–Г).

Графік рівняння	*Точки перетину графіка з осями координат*
1. $2x - 5y = 10$	**А.** (–4; 0), (0; 3)
2. $5x + 3y = 15$	**Б.** (5; 0), (0; 3)
3. $-3x + 4y = 12$	**В.** (5; 0), (0; –2)
	Г. (3; 0), (0; 5)

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 25–30

1 **1.** Яке з рівнянь є лінійним рівнянням з двома змінними:
1) $2x + 3y = 9$;
2) $2x + 3y^2 = 9$?

2. Чи є розв'язком рівняння $2x + y = 7$ пара чисел:
1) (3; –5); 2) (4; –1)?

3. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 11, \\ x - y = 3 \end{cases}$ пара чисел:
1) (6; 5); 2) (7; 4)?

2 **4.** Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 3x, \\ 2x + y = -5. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$

6. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь $\begin{cases} 5x + 3y = 3, \\ 4x - 3y = 24. \end{cases}$

3 **7.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2(x + 3) = 7y - 5, \\ 6(x - 3) - 5(y + 1) = -24. \end{cases}$

4 **8.** За 8 зошитів і 3 блокноти заплатили 93 грн. Після того як зошит подорожчав на 15 %, а блокнот подешевшав на 10 %, за один зошит і один блокнот заплатили 20,4 грн. Якими були початкові ціни зошита і блокнота?

Додаткові вправи

4 **9.** Побудуйте графік рівняння $\frac{x+2}{4}+\frac{y-3}{6}=-\frac{1}{12}$.

10. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точки $(3; -4)$ і $(-12; -9)$. Знайдіть k і b.

11. Для якого значення a система рівнянь $\begin{cases}7x-ay=5,\\21x+6y=15\end{cases}$ має безліч розв'язків?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 4

До § 25

1 **1283.** Чи є пара чисел $(7; 1)$ розв'язком рівняння $x - y = 6$? Знайдіть ще чотири розв'язки цього рівняння.

2 **1284.** Знайдіть два будь-яких розв'язки рівняння:
1) $2x + y = 4$; 2) $x - 3y = 7$.

3 **1285.** Виразіть:
1) змінну y через змінну x з рівняння $7x - y = 18$;
2) змінну x через змінну y з рівняння $3x + 9y = 0$;
3) змінну y через змінну x з рівняння $13x - 2y = 6$;
4) змінну x через змінну y з рівняння $8x + 15y = 24$.

1286. Замініть «зірочки» числами так, щоб кожна з пар $(*; 3)$; $(6; *)$; $(*; -3)$; $(15; *)$ була розв'язком рівняння $x - 3y = 9$.

4 **1287.** Доведіть, що рівняння з двома змінними не має розв'язків:
1) $x^2 + y^2 = -4$;
2) $|x| + y^2 + 1 = 0$;
3) $-|x| - |y| = 5$;
4) $2x^4 + 3|y| = -2$.

1288. Знайдіть усі пари цілих чисел, які є розв'язками рівняння $|x| + |y| = 2$.

До § 26

2 **1289.** Побудуйте графік рівняння:
1) $x - y = 1$;
2) $1{,}5x + y = 7$;
3) $x - 4y = 5$;
4) $0{,}1x + 0{,}2y = 0{,}8$.

3 **1290.** Побудуйте в одній координатній площині графіки рівнянь $x + y = 5$ і $7x - 4y = 2$. Знайдіть координати точки їх перетину. Переконайтеся, що знайдена пара є розв'язком кожного з рівнянь.

1291. Ордината деякої точки прямої, що є графіком рівняння $-9x + 5y = 27$, дорівнює нулю. Знайдіть абсцису цієї точки.

4 **1292.** Побудуйте графік рівняння:

1) $|x| + y = 0$; 2) $|x| + x - y = 0$.

1293. Побудуйте ту частину графіка рівняння $2x + y = 6$, яка міститься в першій координатній чверті.

До § 27

1 **1294.** Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 8 \end{cases}$ пара чисел:

1) $x = 5$; $y = 5$; 2) $x = 4$; $y = 4$?

2 **1295.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = -4x, \\ 2x - y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 3, \\ x + 2y = -3. \end{cases}$

3 **1296.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 0x + 3y = 6, \\ 3x - 2y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7,1x = -14,2, \\ 2x + 7y = 17. \end{cases}$

4 **1297.** Для якого значення a система рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ має безліч розв'язків;

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ -6x + 4y = a \end{cases}$ не має розв'язків?

До § 28

2 **1298.** Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} x = y - 7, \\ 2x - y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x - 5y = 21; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 4y = -19, \\ x + 7y = 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 8x - y = -17. \end{cases}$

3 **1299.** Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь:
1) $2x + 3y = 0$ і $4x - 5y = -22$;
2) $4x - 7y = 34$ і $2x + 7y = -4$.

1300. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3(y - x) - 4 = -7y, \\ 5(x + y) + 9 = 8x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 5, \\ x - \frac{y}{3} = 3. \end{cases}$

4 **1301.** Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} + \frac{y+7}{2} = 5, \\ \frac{3x-1}{5} + \frac{2y+1}{3} = \frac{6x+8y}{15}. \end{cases}$

1302. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:
1) $|x - y| + (x + 2y - 1)^2 = 0$;
2) $|x + y - 6| + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$.

До § 29

2 **1303.** Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 3x - y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 6, \\ 5x + 9y = 14; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 9y = -7, \\ 3x - 7y = 13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x - 5y = 2, \\ 7x + 15y = 51. \end{cases}$

3 **1304.** Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 3, \\ 4x + 3y = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 12y = 53, \\ 5x - 18y = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 7y = -5, \\ 6x + 9y = -6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5(a - 3b) + 6a = 7, \\ 0,5(a + 6b) - 1,5b = 2,5. \end{cases}$

4 **1305.** З'ясуйте кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + ay = 6 \end{cases}$ залежно від коефіцієнта a.

До § 27–29

1306. Розв'яжіть систему рівнянь трьома способами (графічним, підстановки, додавання):

1) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x + y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ -x + 3y = 0. \end{cases}$

1307. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 2 - 5x = 3(1 - y), \\ 2(x + y) = 0,5x + 5,5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4(x + 7) - 9(y - 13) = 139, \\ 5(x - 1) + 4(3 - y) = -15. \end{cases}$

1308. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{4y}{5} = 2\frac{4}{15}, \\ \frac{3x}{7} + \frac{2y}{5} = -\frac{13}{35}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{y}{4} = \frac{23}{40}, \\ \frac{4x}{15} - \frac{3y}{5} = 1\frac{1}{30}. \end{cases}$

1309. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{x + 2}{3} + \frac{y - 5}{3} = 2, \\ \frac{x + 2}{2} - \frac{y - 5}{6} = \frac{5}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2x + 1}{7} + \frac{2y + 2}{5} = \frac{1}{5}, \\ \frac{3x - 2}{2} + \frac{y + 4}{4} = 4. \end{cases}$

1310. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + y = -2, \\ -6x - 3y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x - 6y = 7. \end{cases}$

1311. Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 7x + 5y = 2, \\ 3x + 2y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 4y = 10, \\ 4x + 7y = 1, \\ 5x + 6y = 4? \end{cases}$

1312. Графік функції $y = kx + l$ перетинає вісь x у точці з абсцисою 4, а вісь y – у точці з ординатою -5.
1) Задайте функцію формулою.
2) З'ясуйте, чи проходить її графік через точку $(-80; -105)$.

1313. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3(x-2y)+x(7-2y)=2y(1-x), \\ 4(x-y-1)+5(x+y-1)=32; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=(x+3)^2+(y+1)^2, \\ (y-2)^2-(y+2)^2=(x+6)^2-(x-1)^2. \end{cases}$

1314. Для якого значення a система рівнянь $\begin{cases} 5x+4y=2, \\ 10x+8y=a \end{cases}$

1) має безліч розв'язків;
2) не має розв'язків?
3) Чи існує таке значення a, для якого система має єдиний розв'язок?

1315. Для якого значення b система рівнянь $\begin{cases} 12x-9y=15, \\ 4x+by=5 \end{cases}$

1) має безліч розв'язків;
2) має єдиний розв'язок? Знайдіть цей розв'язок.

До § 30

1316. За 3 год автобусом і 5 год поїздом туристка подолала 450 км. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість поїзда, якщо швидкість поїзда на 10 км/год більша за швидкість автобуса.

1317. За 7 порцій млинців і 2 салати заплатили 468 грн. Скільки коштує одна порція млинців і скільки — один салат, якщо дві порції млинців на 27 грн дешевші за три салати?

1318. Теплохід за 3 год за течією і 2 год проти течії долає 142 км. Цей самий теплохід за 4 год проти течії долає на 14 км більше, ніж за 3 год за течією. Знайдіть власну швидкість теплохода і швидкість течії.

1319. Майстер і його учень повинні були виготовити 114 деталей. Після того як учень пропрацював 2 год, до роботи приєднався майстер, і вони разом закінчили роботу за 3 год. Скільки деталей за годину виготовляв майстер і скільки учень, якщо майстер за 2 год виготовляє стільки само деталей, скільки учень за 3 год?

1320. Два ящики наповнено грушами. Якщо з другого ящика перекласти в перший 10 груш, то в обох ящиках груш стане порівну. Якщо з першого ящика перекласти в другий 44 груші, то груш у першому ящику залишиться в 4 рази менше, ніж у другому. Скільки груш у кожному ящику?

1321. Різниця між половиною одного числа і 0,75 другого дорівнює 8. Якщо перше число зменшити на його сьому частину, а друге збільшити на його дев'яту частину, то їх сума становитиме 100. Знайдіть ці числа.

1322. Сума трьох чисел, з яких друге в 5 разів більше за перше, дорівнює 140. Якщо друге число збільшити на 15 %, третє зменшити на 10 %, а перше число не змінювати, то сума цих чисел становитиме 139,5. Знайдіть ці числа.

1323. Периметр прямокутника на 154 см більший за одну з його сторін і на 140 см більший за другу. Знайдіть площу прямокутника.

1324. Сума цифр деякого двоцифрового числа дорівнює 8. Якщо його цифри поміняти місцями, то одержимо число, що на 18 більше за дане. Знайдіть це число.

1325. У двох бідонах місткістю 20 л і 15 л уже є певна кількість молока. Якщо в більший бідон вщерть долити молока з меншого, то в меншому бідоні залишиться половина початкової кількості. Якщо в менший бідон долити вщерть молока з більшого, то в більшому залишиться $\frac{2}{3}$ від початкової кількості. По скільки літрів молока в кожному бідоні?

Головне в розділі 4

РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Лінійним рівнянням з двома змінними називають рівняння вигляду $ax + by = c$, де x і y – змінні. Числа a, b і c називають *коефіцієнтами* рівняння.

Розв'язком рівняння з двома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює рівняння в правильну числову рівність.

Рівняння з двома змінними мають ті самі **властивості**, що й рівняння з однією змінною:

1) якщо в рівнянні розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

ГРАФІК ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Графіком рівняння з двома змінними x і y називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння.

Графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля, є пряма.

Щоб побудувати графік рівняння $y = m$, достатньо позначити на осі y точку $(0; m)$ та провести через неї пряму паралельно осі x.

Щоб побудувати графік рівняння $x = n$, достатньо позначити на осі x точку $(n; 0)$ та провести через неї пряму паралельно осі y.

СИСТЕМА ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, яка є розв'язком кожного з рівнянь системи.

Розв'язати систему рівнянь – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ПІДСТАНОВКИ

1) Виразити з якого-небудь рівняння системи одну змінну через другу.

2) Одержаний для цієї змінної вираз підставити в друге рівняння системи.

3) Розв'язати отримане рівняння з однією змінною, тобто знайти значення цієї змінної.

4) Знайти відповідне їй значення другої змінної.

5) Записати відповідь.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ДОДАВАННЯ

1) Помножити за потреби обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами.

2) Додати почленно рівняння системи.

3) Розв'язати отримане рівняння з однією змінною.

4) Підставити знайдене значення змінної в одне з рівнянь даної системи і знайти відповідне їй значення іншої змінної.

5) Записати відповідь.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

1) Позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x і y).

2) За умовою задачі скласти систему рівнянь.

3) Розв'язати одержану систему.

4) Проаналізувати знайдені значення змінних відповідно до умови задачі, дати відповідь на запитання задачі.

5) Записати відповідь.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

1

1. Перевірте, чи є число 7 коренем рівняння:

1) $x - 2 = 5$; 2) $56 : x = 6$.

2. Виконайте дії:

1) p^4p^3; 2) $t^9 : t^5$.

3. Чи проходить графік рівняння $x - y = 5$ через точку:

1) $M(6; 2)$; 2) $N(4; -1)$?

2

4. Спростіть вираз:

1) $(x - 3)(x + 3) - x(x - 5)$;

2) $(a + 2)^2 + (a - 7)(a + 3)$.

5. Розкладіть на множники:

1) $14p^3 - 21p^2m$;

2) $3a^2 - 12b^2$.

6. Розв'яжіть рівняння $5(x - 3) - 3(x + 2) = 3 - x$.

3

7. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 3x - 4$ і $y = 5$ та знайдіть координати точки їх перетину.

8. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ -4x + 3y = 16. \end{cases}$

4

9. З пункту A до пункту B вирушив пішохід. Через 1 год назустріч йому з пункту B виїхала велосипедистка. Відстань між пунктами A і B дорівнює 58 км, а швидкість велосипедистки на 10 км/год більша за швидкість пішохода. Знайдіть швидкість велосипедистки і швидкість пішохода, якщо вони зустрілися через 4 год після виходу пішохода.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Лінійні рівняння

1. Знайдіть усі цілі значення a, для яких корінь рівняння $(a + 2)x = 8$ є натуральним числом.

2. Перша цифра чотирицифрового числа дорівнює 7. Якщо цю цифру переставити на останнє місце, то одержимо число, менше від початкового на 1746. Знайдіть початкове число.

3. Не розв'язуючи рівняння $5(2024x + 2025) = 13$, доведіть, що його корінь не є цілим числом.

4. Розв'яжіть рівняння:
1) $|x| + |x - 2| = 0$;
2) $|x - 3| + |6 - 2x| = 0$.

5. Скільки розв'язків залежно від числа a (кажуть: *параметра* a) має рівняння:
1) $ax = 2$; 2) $ax = 0$?

6. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння відносно змінної x:
1) $2x - a = 15$;
2) $7x - a = 2x + 4a - 9$;
3) $(a - 3)x = 7$;
4) $ax = a$;
5) $ax + 1 = x + a$;
6) $a(x - 2) = x(a + 3)$.

Розв'язання. 4) Якщо $a = 0$, то маємо рівняння $0 \cdot x = 0$, тоді x – будь-яке число. Якщо $a \neq 0$, то, поділивши ліву і праву частини рівняння на a, одержимо $x = 1$.

Відповідь: якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$.

7. Для якого значення параметра a є рівносильними рівняння:
1) $7x + a = 5(x - a)$ і $7(x + a) = 4(10 - a)$;
2) $(a + 7)x = 18$ і $|x| = -1$?

8. Поїзд проїжджає повз нерухому пасажирку за 7 с, а уздовж платформи завдовжки 378 м – за 25 с. Знайдіть швидкість і довжину поїзда.

9. Поїзд проїжджає по мосту, 171 м завдовжки, за 27 с, а повз пішохода, який рухається зі швидкістю 1 м/с назустріч поїзду, – за 9 с. Знайдіть швидкість поїзда та його довжину.

10. Через першу трубу басейн заповнюється водою за половину того часу, за який друга труба заповнить $\frac{2}{3}$ цього басейну. Через другу трубу окремо басейн заповнюється на 4 год довше, ніж через першу трубу. За який час заповнює басейн кожна труба окремо?

11. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них становить 25 % від другого.

12. Для ремонту двох кімнат придбали шпалери. На ремонт першої кімнати використали на 2 рулони більше, ніж половина придбаного, а на ремонт другої кімнати – $\frac{2}{3}$ від кількості рулонів, що використали на ремонт першої кімнати. Скільки рулонів шпалер було придбано, якщо після ремонту обох кімнат залишився невикористаним один рулон?

13. Сплав міді й цинку містить на 320 г більше міді, ніж цинку. Після того як від сплаву відокремили $\frac{6}{7}$ тієї маси міді та 60 % тієї маси цинку, що в ньому містилися, маса сплаву стала дорівнювати 100 г. Якою була початкова маса сплаву?

Цілі вирази

14. Рівність $(\text{І} + \text{В} + \text{А} + \text{Н})^4 = \text{ІВАН}$ є правильною. Знайдіть число ІВАН, якщо різним буквам відповідають різні цифри.

15. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 15 %, а ширину – на 20 %?

16. Що більше: $\frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ чи $\frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$?

17. Доведіть, що число $2017 \cdot 2019 + 1$ є квадратом деякого натурального числа. Якого саме?

18. Доведіть, що значення виразу $8n^3 - 8n$ для будь-якого натурального значення $n > 1$ кратне числу 24.

19. Подайте вираз $2m^2 + 2n^2$ у вигляді суми двох квадратів.

20. Який многочлен потрібно записати замість «зірочки», щоб одержати тотожність:

1) $(x + 1) \cdot * = x^2 - 4x - 5$;

2) $(x^2 - x + 1) \cdot * = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$?

21. Розкладіть на множники:
1) $a^2b^2 - 2ab^2 + b^2 + a^4 - 2a^2 + 1$;
2) $1 - 3t + 3t^2 - t^3$;
3) $x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4$;
4) $2(m + 3n) + (m - n)(m + n) - 8$;
5) $a^3 + a^2 - b^3 - b^2$;
6) $8x^3 + 4x^2 - 2$.

22. Чи може сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел бути квадратом натурального числа?

23. Спростіть вираз:
$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1)$.

24. Число b є середнім арифметичним чисел a і c. Доведіть, що $a^2 + ac + c^2$ є середнім арифметичним чисел $a^2 + ab + b^2$ і $b^2 + bc + c^2$.

25. *Задача Лагранжа*. Доведіть тотожність
$$(x^2 + y^2 + z^2)(m^2 + n^2 + p^2) - (xm + yn + zp)^2 = \\ = (xn - ym)^2 + (xp - zm)^2 + (yp - zn)^2.$$

26. Доведіть, що число $\overline{abcabc}$ є кратним числам 7, 11 і 13.

27. Доведіть, що значення виразу $555^{777} + 777^{555}$ є кратним числу 37.

28. Яке трицифрове число є і квадратом двоцифрового числа, і кубом одноцифрового числа?

29. Доведіть, що значення виразу $191^6 + 734^6 - 593^3$ ділиться на 10.

30. Доведіть, що значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ для будь-якого натурального значення n є кратним числу 10.

31. Подайте вираз $2x(x^2 + 3y^2)$ у вигляді суми кубів двох многочленів.

32. Доведіть тотожність:
1) $(x - 2)(x - 1)x(x + 1) + 1 = (x^2 - x - 1)^2$;
2) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.

33. Використовуючи результат попередньої задачі, доведіть, що число $2017 \cdot 2018 \cdot 2019 \cdot 2020 + 1$ є квадратом деякого натурального числа y. Знайдіть y.

34. Доведіть, що різниця кубів двох послідовних натуральних парних чисел при діленні на 48 дає в остачі 8.

35. Розкладіть на множники:

1) $y^5 + y + 1$;
2) $m^4 + m^2 + 1$;
3) $x^4 + 5x^2 + 9$;
4) $n^4 + 4$;
5) $x^4 + 2a^2x^2 - 4a^2b^2 - 4b^4$;
6) $m^3 - 2m - 1$;
7) $m^3 - 5m - 2$;
8) $x^4 - 2x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4$.

36. Порівняйте 5^{15} і 3^{23}.

Функції

37. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2|x| + x$;
2) $y = |x| - 3x$;
3) $y = |2x| + 2x - 1$;
4) $y = 2x - |3x| + 3$.

38. Точка $A(a; b)$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, належить графіку функції $y = x^2$. Чи належить цьому графіку точка:

1) $B(-a; b)$; 2) $C(a; -b)$; 3) $D(-a; -b)$?

39. Точка $M(m; n)$, де $m \neq 0$, $n \neq 0$, належить графіку функції $y = x^3$. Чи належить цьому графіку точка:

1) $N(-m; n)$; 2) $K(m; -n)$; 3) $P(-m; -n)$?

40. Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = -4|x| + 3$ та

$$y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ -3x + 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Системи лінійних рівнянь

41. Оля може придбати без решти 7 рогаликів і 3 вертути або 3 рогалики і 4 вертути. Який відсоток становить ціна рогалика від ціни вертути?

42. Чи має розв'язки рівняння з двома змінними:

1) $x^2 + y^4 = -1$;
2) $|y| + x^2 = 0$;
3) $x^2 - |y| = 5$;
4) $5x^2 + y^8 + |x| = 0$?

43. У рівнянні $ax + by = 43$ коефіцієнти a і b – цілі числа. Чи може розв'язком цього рівняння бути пара чисел $(5; 10)$?

44. Скільки розв'язків має рівняння:

1) $(x + 1)^2 + y^2 = 0$;
2) $x^2 + y^2 + (y - 2)^2 = 0$;
3) $|x| + (y + 1)^2 = 0$;
4) $x((x - 3)^2 + (y + 4)^2) = 0$?

45. Сергій придбав кілька зошитів по 10 грн і кілька ручок по 12 грн 50 к., заплативши за всю покупку 150 грн. Скільки зошитів придбав Сергій?

46. Побудуйте графік рівняння:

1) $(x + 1)(x - 2y) = 0$;
2) $x^2 - xy = 0$;
3) $(x^2 - 4)(y^2 + 4) = 0$;
4) $(|x| + 1)(|y| - 3) = 0$;
5) $|x| + x = y$;
6) $x = y|x|$.

47. Доведіть, що рівняння $x^2 - y^2 = 26$ не має розв'язків у цілих числах (тобто розв'язками не можуть бути цілі числа).

48. Чи перетинає графік рівняння $y + x^2 = 4$ вісь x; вісь y? Якщо так, то вкажіть координати точок перетину.

49. Знайдіть усі пари натуральних чисел, що задовольняють рівняння $11x + 8y = 104$.

50. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіка рівняння $(x - 3)(y + 5) = 0$:

1) з віссю x;
2) з віссю y.

51. Яна загадала два двоцифрових числа, кожне з яких починається цифрою 6, причому інші цифри кожного із чисел відмінні від числа 6. Якщо переставити місцями цифри в кожному із загаданих чисел, то значення їх добутку не зміниться. Які числа загадала Яна?

52. Олесь народився у XX столітті. У 2009 році йому було стільки років, якою є сума цифр його року народження. У якому році народився Олесь?

53. За якого значення a прямі $3x + 4y = 5$ і $2x + 8y = a$ перетинаються в точці, що лежить на осі y?

54. Доберіть, якщо це можливо, таке значення m, для якого система рівнянь має єдиний розв'язок; не має розв'язків; має безліч розв'язків:

1) $\begin{cases} 2x - y = 7, \\ mx - y = 5; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 1,5x + y = m; \end{cases}$
3) $\begin{cases} mx - 2y = 1, \\ 4x - 8y = 4. \end{cases}$

55. Для якого значення a система рівнянь $\begin{cases} 4x - 3y = 10, \\ 2x + 5y = -8, \\ a(x + y) = 7 \end{cases}$ має розв'язок?

56. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ y - z = 3, \\ z + x = 5; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x + y = 7, \\ y + z = 5, \\ z + x = -4. \end{cases}$

57. У результаті множення многочлена $4x^3 - 2x^2 + 3x - 8$ на многочлен $ax^2 + bx + 1$ одержали многочлен, який не містить ані x^4, ані x^3. Знайдіть коефіцієнти a і b та многочлен, який одержали в добутку.

58. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}(x-1)(y-4x)=0,\\ x+y=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(x-y)(x+1)=0,\\ (y-2)(x+y-6)=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2-y^2=0,\\ 3x-y=4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2+2xy+y^2-1=0,\\ 3x-y=3.\end{cases}$

Розв'язання. 4) Перше рівняння системи перепишемо так: $x^2 + 2xy + y^2 = 1$, тобто $(x + y)^2 = 1$. Звідки $x + y = 1$ або $x + y = -1$. Отже, розв'язування початкової системи рівнянь звелося до розв'язування двох систем:

$$\begin{cases}x+y=1,\\ 3x-y=3\end{cases} \text{ та } \begin{cases}x+y=-1,\\ 3x-y=3.\end{cases}$$

Звідки $x = 1$; $y = 0$ та $x = 0{,}5$; $y = -1{,}5$.
Відповідь: $(1; 0)$; $(0{,}5; -1{,}5)$.

59. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

1) $(x - 2)^2 + (3x - y)^2 = 0$;
2) $(2x - y)^2 + x^2 + 8x + 16 = 0$;
3) $(7x + y - 3)^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 0$;
4) $|x - y + 5| + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
5) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$;
6) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$.

60. Число b на 10 % більше за число a і на 30 % більше за число c. Знайдіть числа a, b і c, якщо a на 8 більше за c.

61. Через 4 роки відношення віку брата до віку сестри дорівнюватиме 7 : 5. Скільки років нині кожному з них, якщо 2 роки тому брат був удвічі старший за сестру?

62. Загадали деяке двоцифрове число. Якщо це число поділити на суму його цифр, то одержимо неповну частку, що дорівнює 4 та 6 в остачі. Якщо ж від цього числа відняти потроєну суму його цифр, то одержимо 16. Яке число загадали?

63. Кількість десятків деякого трицифрового числа вдвічі більша за кількість одиниць. Сума цифр цього числа дорівнює 13. Якщо поміняти місцями цифри сотень і одиниць, то одержимо число, яке на 495 менше від даного. Знайдіть це число.

64. Якщо перше з двох даних чисел збільшити на 10 %, а друге – на 15 %, то їх сума збільшиться на 13 %. Якщо перше з даних чисел зменшити на 5 %, а друге – на 10 %, то сума чисел зменшиться на 48. Знайдіть ці числа.

65. Для проведення ремонту придбали пісок і цемент. Першого дня використали $\frac{1}{5}$ від маси придбаного піску і $\frac{1}{4}$ від маси придбаного цементу, що разом становило 205 кг. Другого дня використали чверть тієї маси піску, яка залишилася, що на 37 кг більше за масу п'ятої частини цементу, яка залишилася після першого дня. Скільки піску і скільки цементу було придбано для ремонту?

66. Одна сторона трикутника утричі більша за другу. Периметр трикутника на 22 см більший за їх півсуму і на 27 см більший за їх піврізницю. Знайдіть сторони трикутника.

67. Якщо довжину прямокутника збільшити на 3 см, а ширину – на 2 см, то його площа збільшиться на 37 $см^2$. Якщо кожну сторону прямокутника зменшити на 1 см, то його площа зменшиться на 12 $см^2$. Знайдіть периметр прямокутника.

68. Зливок складається з двох металів, маси яких відносяться як 3 : 4. Інший зливок містить ті самі метали, але у відношенні 1 : 2. По скільки кілограмів від кожного зливка потрібно взяти, щоб одержати зливок масою 10 кг, у якому маси тих самих металів відносяться як 2 : 3?

69. Дорога від села до міста спочатку пролягає горизонтально, а потім угору. Турист проїхав на велосипеді горизонтальну її частину зі швидкістю 10 км/год, а вгору йшов пішки зі швидкістю 3 км/год і прибув до міста через 1 год 40 хв після виїзду із села. У зворотному напрямку шлях униз турист проїхав зі швидкістю 15 км/год, а горизонтальну ділянку – зі швидкістю 12 км/год і прибув до села через 58 хв після виїзду з міста. Знайдіть відстань між містом і селом.

70. В одному резервуарі – 490 л води, а в другому – 560 л. Якщо перший резервуар ущерть долити водою з другого, то другий стане заповнений наполовину. Якщо другий резервуар ущерть долити з першого, то перший буде заповнений тільки на третину. Визначте місткість кожного з резервуарів.

71. Автобус і маршрутне таксі, які за розкладом вирушають назустріч одне одному о 8 год з пунктів A і B, зазвичай зу-

стрічаються о 8 год 12 хв. Але одного разу маршрутне таксі вирушило в рейс о 8 год 8 хв і зустрілося з автобусом о 8 год 17 хв. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість маршрутного таксі, якщо відстань між A і B дорівнює 24 км.

72. З пункту M до пункту N о 7 год і о 7 год 30 хв виїхали два автобуси з однаковою швидкістю. О 7 год 10 хв з пункту N до пункту M виїхала велосипедистка. Вона зустріла перший автобус о 7 год 40 хв, а другий – о 8 год 01 хв. Знайдіть швидкості велосипедистки та кожного з автобусів, якщо відстань між пунктами M і N дорівнює 37 км.

73. З міста в село, відстань між якими 24 км, вирушив турист. Через 1 год 20 хв услід за ним виїхав велосипедист, який через пів години наздогнав туриста. Після прибуття в село велосипедист, не зупиняючись, повернув назад і зустрівся з туристом через півтори години після першої зустрічі. Знайдіть швидкість туриста і швидкість велосипедиста.

74. З міста A в місто B о 9 год виїхали два автобуси. У той самий час з міста B в місто A виїхала велосипедистка. Один автобус трапився на її шляху о 10 год 20 хв, а другий – об 11 год. Знайдіть швидкості велосипедистки та кожного з автобусів, якщо швидкість одного автобуса становить $\frac{7}{12}$ від швидкості другого, а відстань між містами – 120 км.

75. По колу, довжина якого 500 м, рухаються дві точки. Вони зустрічаються через кожні 10 с, якщо рухаються у протилежних напрямках, і через кожні 50 с, якщо – в одному. Знайдіть швидкість кожної з точок.

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Повторюємо математику за 5–6 класи

11. 1834 р. **12.** 1816 р. **13.** 1) 9; 2) 2; 3) 6. **14.** 1) 9; 2) 2; 3) 2. **15.** 10 044; 99 944. **16.** 1014; 9984. **24.** 1) 29,384; 2) 4,855. **25.** 1) 3,026; 2) 0,6505. **41.** 250 грн. **42.** 50 кг. **43.** Збільшилася на 2 %. **44.** Зменшилася на 8 %. **53.** 1) 4,75; 2) 0,1. **54.** 1) 0,25; 2) 0,8. **55.** 1) На 25 %; 2) на 20 %. **56.** 1) Зменшилася на 10 %; 2) збільшилася на 5 %. **57.** 7,2 %. **58.** 62,5 %. **71.** 1) $-0{,}5$; 2) -2. **72.** 1) -23; 2) 1,35. **73.** VI ст. **74.** 1108 р. **75.** $a + 22b$; -36. **76.** $30y - x$; -35. **77.** $-2\frac{14}{65}$. **78.** 28,09. **79.** $-0{,}512$. **80.** 20. **81.** 12.

Розділ 1

§ 1

97. 1), 2), 4), 6), 7) Так; 3), 5), 8) ні. **100.** Через 16 місяців. **103.** 999.

§ 2

122. 1) -5; 2) -2; 3) $-4{,}75$; 4) -10. **123.** 1) 1; 2) -3; 3) $-2{,}5$; 4) -5. **124.** 1875 р. **125.** 1804 р. **126.** 1) 0; 2) $\frac{c-b}{2}$; 3) $-2m$; 4) $b - 3a$. **127.** 1) 0; 2) $\frac{2m-a}{2}$; 3) $2b$; 4) $2a - p$. **128.** 1), 5), 6) Так; 2), 3), 4) ні. **129.** 1) 4; 2) 1,6. **130.** 1) 1,2; 2) $-1{,}8$. **132.** 1) -4; 4; 2), 6) рівняння не має розв'язків; 3) -3; 3; 4) -5; 5) 6; 8; 7) 3; -4; 8) -6; 6; 9) -3; 5. **133.** 1) -9; 9; 2) рівняння не має розв'язків; 3) -8; 8; 4) 0,5; 5) 2; 5; 6) -4; 4. **134.** 1) 2; 2) $1\frac{5}{7}$; 3) -9. **135.** 1) 2; 2) 10. **136.** 1) Немає розв'язків; 2) x – будь-яке число. **137.** 1) x – будь-яке число; 2) немає розв'язків. **138.** 1) 5; 2) 3; 3) -5; 4) -1; 5) немає розв'язків; 6) x – будь-яке число. **139.** 1) 1; 2) 3; 3) 0,2; 4) x – будь-яке число. **140.** 1) $b = 11$; 2) $b = 4{,}5$. **141.** 1) $a = 24$; 2) $a = 3{,}5$. **142.** -4; -2; -1; 1; 2; 4. **143.** -6, -3, -2, -1. **144.** 1) 1; 2) -3; 3) немає таких значень a. **145.** 1) -1; 2) 3; 3) немає таких значень b. **146.** 1) 1; 2) -2; 3) немає таких значень m. **147.** 1) -2; 2) немає таких значень a; 3) 4. **148.** 1) Якщо $b = -1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $b \neq -1$, то $x = \frac{7}{b+1}$; 2) якщо $b = 5$, то x – будь-яке число; якщо $b \neq 5$, то $x = -1$; 3) якщо $b = 2$, то рівнян-

ня не має розв'язків; якщо $b = -2$, то x – будь-яке число; якщо $b \neq 2$, $b \neq -2$, то $x = \dfrac{b+2}{|b|-2}$. **149.** 1) 3; 2) -3; 4. **154.** 1) 250 мг; 2) 5 добових доз. **158.** $x = 6$, $y = 7$ або $x = 7$; $y = 6$.

§ 3

168. 48. **178.** 60 вареників; 63 вареники. **179.** 11 200 грн. **180.** 45 км/год; 18 км/год. **181.** 15 кг; 12 кг. **182.** 12 км. **183.** 7 см; 11 см; 77 см^2. **184.** 48 оповід., 24 оповід. **185.** 27 грн; 9 грн. **186.** 125, 137, 168 наборів. **187.** 24 см, 33 см, 48 см. **188.** Ні. **189.** Ні. **190.** Через 4 роки. **191.** 36 кущів; 12 кущів. **192.** По 40 відпочивальників. **193.** 24 кг. **194.** 15 зошитів; 10 зошитів. **195.** 7 коробок, 5 коробок. **196.** 28 учнів. **197.** 50 кг. **198.** 48 і 18. **199.** 90 і 120. **200.** 18 км/год. **201.** 2 км/год. **202.** 6,5 год; 78 км. **203.** 2,5 год; 10 км. **204.** 5 кг; 10 кг; 15 кг. **205.** 7 задач; 10 задач; 14 задач. **209.** 1) $a < 0$; 2) $a > 0$. **210.** Ні.

Вправи для повторення розділу 1

215. Ні. **218.** 1) x – будь-яке число; 2) немає розв'язків; 3) 2; 4) 0,4. **219.** 1) 0; 2) -3. **220.** Якщо $a = 1$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 1$, то $x = \dfrac{8}{a-1}$. **223.** 3 грн 60 к. **224.** 6 кг; 24 кг. **225.** 2 км/год. **226.** 60 км/год. **227.** 24 вареники; 48 вареників. **228.** 8 робітників; 90 000 грн. **229.** 5 днів. **230.** 45 г; 135 г.

Розділ 2

§ 4

251. $y - 6x$; 1996 р. **252.** $7a - b$; 1615 р. **254.** 1) 9; 2) $-2{,}25$; 3) $-\dfrac{4}{9}$; 4) $-\dfrac{3}{4}$. **255.** 1) 4; 2) $-\dfrac{4}{7}$; 3) $-1\dfrac{3}{4}$; 4) $-1\dfrac{1}{4}$. **256.** 1) $x^2 - y^2$; 2) $ab - mn$; 3) $d^2 - (d-a)(d-b)$, або $ad + b(d-a)$, або $bd + a(d-b)$. **259.** 84 км. **260.** 27 600 грн. **263.** 1) Так; 2) ні.

§ 5

283. 1) $2x - 3$; 2) $6m - 4n$; 3) $2p - 1$; 4) $2x - y$; 5) $3\dfrac{1}{4}a + 5\dfrac{3}{4}b$; 6) $2n - m$. **284.** 1) $3a - 1$; 2) $13m - 13a$; 3) $1 - 2y$; 4) $-0{,}6b$. **292.** 1) 5 %; 2) 0,25 %. **293.** 16 км/год. **294.** 120 км; 80 км.

§ 6

325. 1) 1; 2) 3; 3) −5. **326.** 1) 2; 2) 1; 3) 5. **328.** 1) $5\frac{2}{15}$; 2) $-2\frac{11}{25}$. **329.** Так. **330.** 1) 36 г.

§ 7

367. 1) 1000; 2) 25; 3) 1; 4) 128; 5) 2; 6) $\frac{4}{9}$. **368.** 1) 1; 2) 32; 3) $\frac{8}{9}$; 4) $\frac{4}{9}$. **369.** 1) 27; 2) 32; 3) 243; 4) 25. **370.** 1) 7; 2) 12; 3) 324; 4) $\frac{3}{16}$. **371.** 1) 7; 2) 12; 3) 20; 4) $\frac{81}{256}$. **372.** 1) $6^{10} = 36^5$; 2) $10^{20} > 20^{10}$; 3) $5^{14} < 26^7$; 4) $2^{3000} < 3^{2000}$. **374.** 1) 68 грн; 2) 74,8 грн; 3) зменшилася на 5,2 грн; 4) зменшилася на 6,5 %. **375.** 1) 7; 2) 9; 3) −1,5; 4) −26. **376.** $3{,}54a - 8{,}6b$; 103,7. **377.** 15 троянд. **379.** Лише одним способом.

§ 8

390. 1), 3), 4) Ні; 2) так. **391.** $18x^3$ см^3. **392.** $3b^2$ дм^2. **395.** Оксана отримала прибуток на 14,14 грн більше, ніж Леонід. **397.** 666 сторінок.

§ 9

410. 1) $2m^3$ або $-2m^3$; 2) $0{,}6p^4q^5$ або $-0{,}6p^4q^5$; 3) $-2c^3$; 4) $10c^2m^4$; 5) $2ab^2$ або $-2ab^2$; 6) c^3p^9. **411.** 1) $3m^5n^{11}$; 2) $\frac{1}{5}ab^6$; 3) $-12mp$; 4) $-\frac{1}{9}a$; 5) −1; 6) $-\frac{1}{64}n^7$. **412.** 1) $5mn^5$; 2) $-3x^6$; 3) $-\frac{1}{3}a^3b$; 4) $-\frac{1}{24}$. **413.** 1) $240m^8$; 2) $-8m^{17}$; 3) $-a^{13}b^{19}$; 4) $-5\frac{1}{3}a^8c^{13}$. **414.** 1) $24a^{13}$; 2) $-100a^{25}$; 3) $-2a^{31}b^9$; 4) $-12\frac{4}{5}m^7n^{13}$. **416.** 1) $8a^{11}b^9$; 2) $6\frac{3}{4}m^{20}n^{24}$; 3) $-49m^{14}n^{14}$; 4) $-32x^{20}c^{50}$. **417.** 1) $2700m^7n^8$; 2) $-2a^{13}b^9$; 3) $-27a^{26}m^{10}$; 4) $x^{28}y^{28}$. **420.** 1) $-0{,}1a^{2n+3}b^{2n+5}$; 2) $72a^{6n+6}b^{15+6n}$; 3) $a^{8n+10}b^{18n+3}$; 4) $x^{13n-5}y^{12n+5}$. **421.** 1) $2\frac{1}{3}$; 2) $11\frac{2}{3}$; 3) −49; 4) 343. **422.** 1) $1\frac{4}{5}$; 2) $12\frac{3}{5}$; 3) −81; 4) 729. **424.** 1) b^4; 2) $-m^8$; 3) a^7; 4) $-n^8$. **425.** 98. **426.** 3500 кг.

§ 10

447. 1) $-5a^2b^4 - 12a^2b + 2a^2b^2$, шостого степеня; 2) $7x^4y^3 - 10x^4y^2 + 21x^2y^4$, сьомого степеня. **448.** 1) $4a^2b^3 - a^4$, п'ятого степеня; 2) $2xy^3 + 15x^3y - 7xy^2$, четвертого степеня. **449.** $2xy^3 - 2x^3y + 748{,}75$; 748 км. **455.** 1), 6) Додатні; 3), 4) від'ємні. **459.** 1) 1500 кВт. **461.** 37; 38.

§ 11

474. 1) 3; 2) 3. **475.** 1) 0; 2) 3. **478.** 1) 1,2; 2) -7. **479.** 1) 6; 2) 2,25. **491.** 1) -9; 2) 101. **492.** 1) -11; 2) 4. **494.** 1) $2m^2 + 7mn$; 2) $12m^2 + 3mn - 2n^2$. **495.** *Порада*. Після спрощення різниці многочленів одержимо вираз $0{,}2x^4 + 0{,}5x^2 + 4$. Найменше значення цього виразу дорівнює 4, якщо $x = 0$. **498.** 1) $100x + 10y + z$; 2) $100z + 10y + x$; 3) $100x + 11y + 11z$; 4) $90y + 9x + z$. **501.** 1) 4^{30}; 2) 8^{20}; 3) 16^{15}; 4) 32^{12}. **502.** 1) 0,3 л. **504.** *Порада*. Натуральне число є кратним числу 36 тоді й тільки тоді, коли воно є кратним числам 4 і 9. Далі використати ознаки подільності на 4 (задача № 331) та на 9.

§ 12

528. 1) $2a$; -7; 2) $11 - 27x$; 12; 3) $3a^2 - 3b^2$; 0; 4) $2xy^3$; -2. **529.** 1) $13a^2$; $\frac{1}{13}$; 2) $8x^2 - 8y^2$; 0. **530.** 1) 2; 2) -27; 3) -1; 4) 0,25; 5) x – будь-яке число; 6) немає розв'язків. **531.** 1) $-0{,}75$; 2) -32; 3) $-0{,}25$; 4) 0,75; 5) немає розв'язків; x – будь-яке число. **532.** 1) $1\frac{2}{3}$; 2) $-1{,}5$. **533.** 16 г. **534.** 12 грн 50 к.; 30 грн; 45 грн. **535.** 18 котушок; 12 котушок. **536.** 18 км/год. **539.** 1) $-x^{n+4}$; 2) $-y^{2n}$; 3) $-3z^n$. **541.** 1) $\frac{1}{3}a^7b^{12}$; 2) $-10m^8n^{23}$. **542.** 1) 8; 2) 87,5. **543.** 1) $t_F = \frac{5}{9}(t_C - 32)$. **545.** *Порада*. Розгляньте суму $(6a + b) + (6b + a)$ та доведіть, що при натуральних a і b вона є кратною числу 7.

§ 13

568. 1) 74 300; 2) 1 103 000. **569.** 1) $-5{,}23$; 2) 0; 3) 4; 4) -27. **570.** 1) 10,11; 2) $1\frac{1}{5}$. **574.** 1) 0; $\frac{1}{4}$; 2) 0; -4; 3) 0; -9; 4) 0; 1,5. **575.** 1) 0; $-\frac{1}{12}$; 2) 0; 10; 3) 0; 14; 4) 0; $-\frac{1}{2}$. **576.** 1) $-\frac{2}{3}$; 5; 2) $-2{,}5$;

2. **577.** 1) $-1{,}25$; 7; 2) 3; $-3{,}5$. **580.** 1) $25(m-2)^2$; 2) $81(2a+3b)^2$. **581.** 1) 3; 7; 2) -2; 5. **582.** 1) 2; 4; 2) $-2\frac{1}{3}$; 4. **586.** 24 см і 8 см. **588.** Так, наприклад, $a=-2$; $b=0$; $c=1$.

§ 14

604. 1) -6; 2) 0. **605.** 1) 2; 2) 0. **608.** 1) $27m^3+8n^3$; 2) $8x^3-125y^3$; 3) $-x^3+x^2a+5xa^2-2a^3$; 4) $-3m^3+16m^2x-2mx^2-x^3$. **609.** 1) $27x^3-y^3$; 2) $27a^3+12a^2b-7ab^2-2b^3$. **610.** 1) $14-15m$; 2) $-18y^2-4$; 3) $4a+4$; 4) $b+15$. **611.** 1) $-x^2-15$; 2) $11a+10$; 3) $12-17x$; 4) 16. **620.** 1) x^2-5x^3; 44; 2) a^3; 27. **621.** 1) $-24x$; -27; 2) $27b^3$; 1. **622.** 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$. **623.** 1) -2; 2) -1. **626.** 14; 15; 16. **627.** На 2. **628.** На 3. **631.** 18; 19; 20; 21. **632.** 24; 25; 26; 27. **635.** 18 см; 12 см. **636.** 350 км. **637.** 1) 4; 2) $\frac{1}{5}$. **640.** 185 год. **641.** $27\frac{1}{125}$. *Порада.* Позначте $a=\frac{1}{125}$; $b=\frac{2}{129}$; тоді одержите вираз $(3-a)(4+b)+(3+a)(5+b)-6b$, який далі потрібно спростити.

§ 15

655. 1) 0; 2) $-\frac{5}{9}$. **656.** 1) 0; 2) $-0{,}1$. **657.** 1) $3x^2y(3xy^2-1)\times$ $\times(5y-x^2)$; 2) $(0{,}7m-0{,}9n)(3n^2-4p^2)$. **658.** 1) $2(m^2-2x^3)(4c-3x)$; 2) $xy(3y+4x^2)(0{,}4y-0{,}5x^4)$. **659.** 1) 5; 8; 2) $-0{,}4$. **660.** 1) -7; 1; 2) $-\frac{1}{7}$. **661.** 1) $(t^2-p)(a+t-b)$; 2) $(a-m)(x^2+y^2-1)$; 3) $(m-7)\times$ $\times(b-1+m^2)$; 4) $(a-b)(6x+3y-z)$. **662.** 1) $(ab+1)(a+b+9)$; 2) $(4x+5m)(2a+b-1)$. **663.** 1) $(x+1)(x+4)$; 2) $(x-1)(x-4)$; 3) $(x-2)(x+3)$; 4) $(a+b)(a+3b)$. **664.** 1) $(x-1)(x-5)$; 2) $(x-3)\times$ $\times(x+2)$; 3) $(x-3)(x+5)$; 4) $(a+2b)(a+3b)$. **666.** 1) -2; 2) -10. **667.** 3 : 2. **669.** Так, наприклад, $x=66$; $y=33$. *Порада.* Слід урахувати, що $33^6=33\cdot33^5=32\cdot33^5+1\cdot33^5=2^5\cdot33^5+33^5=$ $=66^5+33^5$.

§ 16

704. 1) 1; 2) 0. **705.** 1) -2; 2) -16. **707.** $a^{16}+b^{16}$. **709.** 1) a^3+6a^2+ $+12a+8$; 2) $8b^3-12b^2+6b-1$. **710.** 1) $x^3-6x^2+12x-8$; 2) $8m^3+12m^2+6m+1$. **711.** 1011 р. **712.** 24; 26; 28. **714.** 130 грн. **717.** *Порада.* $(n^2+n)(n+2)=n(n+1)(n+2)$ – добуток трьох послідовних натуральних чисел.

§ 17

731. 1) 5; 2) $-\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 1,75. **732.** 1) −8; 2) $\frac{1}{6}$; 3) −1,5; 4) 0,2. **735.** 1) $(x-1)^2$; 2) $(a+4)^2$. **737.** 1) $x^2-4x+4=(x-2)^2\geqslant 0$; 2) $-x^2+2x-1=-(x-1)^2\leqslant 0$. **739.** *Порада.* $x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1$. **740.** *Порада.* $x^2+6x+11=x^2+6x+9+2=(x+3)^2+2$. **743.** 1) 23; 2) 0. **744.** 1) $m^3-4m^2-11m+30$; 2) $p^{10}+1$. **745.** 87 грн.

§ 18

759. 1) −3; 2) 16. **760.** 1) −2; 2) 27. **770.** 1) 2; 2) 1; 3) $-\frac{8}{43}$. **771.** 1) −1,6; 2) −6; 3) $\frac{2}{3}$. **772.** 1) $6a+18$; 2) $55x^2+48xy-73y^2$; 3) b^4-18b^2+81; 4) $625-50a^2+a^4$. **773.** 1) $13-4c$; 2) $56x^2+20xy-8y^2$; 3) a^4-72a^2+1296; 4) $16-8m^2+m^4$. **775.** 1) $x^2+2xy+y^2-1$; 2) $a^2-b^2-2bc-c^2$; 3) $m^2+2mn+n^2-4p^2$; 4) x^2-y^2-4y-4. **776.** $9\frac{5}{6}$. **777.** 120 м²; 8 год.

§ 19

798. 1) −4; 6; 2) −6; 1; 3) −2,2; 1; 4) −1; 11. **799.** 1) −8; 4; 2) −1; 2,6; 3) −7; 0; 4) 1; 4. **801.** 1) $(6a^3-b)(b-4a^3)$; 2) $8p(2p-3m^2)$; 3) $(5x+9y)(9x-5y)$; 4) $4c(a+b)$; 5) $(a^2+a-c^4)(a^2+a+c^4)$; 6) $4b(1-5a)$. **802.** 1) $3(a^2-3b)(3a^2-b)$; 2) $3(m^4-c)(3c-m^4)$; 3) $4(4b-a)(3a-b)$; 4) $4t(x-y)$. **803.** 1) 2; 1,5; 2) −3; 3; 3) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 4) немає коренів. **807.** Швидкість корабля більша за швидкість велосипедиста. **810.** *Порада.* Використати зважену крупу як гирку.

§ 20

825. 1) $5a+8$; 2) $9b-27$; 3) 65; 4) $4b^6-4b^3-2$. **826.** 1) $4a-64$; 2) 35; 3) $125+b-2b^2$; 4) a^6-1. **827.** 1) −7; 2) −0,1. **828.** 1) 8; 2) −0,2; 3) 0,5; 4) −2. **829.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 2. **830.** 1) $9(a^2+3a+3)$; 2) $(x-2)(x^2-10x+28)$; 3) $(2p-1)(13p^2+5p+1)$; 4) $(5x-1)\times(13x^2+2x+1)$. **831.** 1) $(2a+1)(a^2+a+1)$; 2) $(b-4)\times(b^2-2b+4)$; 3) $(4b+1)(31b^2-7b+1)$; 4) $(5a+2)(13a^2-4a+4)$. **833.** Так. **836.** 50 зошитів і 10 зошитів. **837.** 132 грн. **839.** 7 курей.

§ 21

855. 1) $(a-3)(a+3)(a^2+9)$; 2) $(2-c)(2+c)(4+c^2)$; 3) $(x-1)\times$ $\times(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$; 4) $(a-b^2)(a+b^2)(a^2+b^4)$. **857.** 1) 0; −1; 1; 2) 0; −4; 4; 3) 0; 4) 0; −2. **858.** 1) 0; −1; 1; 2) 0; −6; 6; 3) 0; 4) 0; 1. **859.** 1) $7(a-1)(b+3)$; 2) $6(m-2)(n-5)$; 3) $-a(b+3)(c+4)$; 4) $a(a+1)(a-b)$. **860.** 1) $3(15-b)(2-a)$; 2) $-3(n+3)(m+6)$; 3) $a^3(a+1)(x+1)$; 4) $ap(p^2+1)(a-3)$. **861.** 1) $(a+b-4)\times$ $\times(a+b+4)$; 2) $(a-x-y)(a+x+y)$; 3) $(p+5-x)(p+5+x)$; 4) $(p-x+10)(p+x-10)$. **862.** 1) $(x+y-5)(x+y+5)$; 2) $(m-a+b)(m+a-b)$; 3) $(m-4-a)(m-4+a)$; 4) $(m-b-4)\times$ $\times(m+b+4)$. **863.** 1) $(a-9)(a+10)$; 2) $(a+m)(m-a-1)$; 3) $(x-y)(x+y-1)$; 4) $(x-y)(x+y+1)$; 5) $(a-3b)(1+a+3b)$; 6) $(4m+5n)(4m-5n-1)$. **864.** 1) $(a-b)(a+b-1)$; 2) $(p+b)\times$ $\times(p-b-1)$; 3) $(4x-5y)(4x+5y+1)$; 4) $(10m-9n)\times$ $\times(10m+9n-1)$. **865.** 1) $(m-3)(p-1)^2$; 2) $(1-a)(1+a)(1-2b)^2$. **867.** 1) $(a-b)(b-1)(b+1)$; 2) $(x-a)(x+a)(a+7)$; 3) $(p+q)\times$ $\times(p-2)(p+2)$; 4) $(a+5)(a-m)(a+m)$. **868.** 1) $(m+n)\times$ $\times(m^2-mn+n^2+1)$; 2) $(a-b)(1-a^2-ab-b^2)$; 3) $(a+2)\times$ $\times(a^2-3a+4)$; 4) $(2p-1)^3$. **869.** 1) $(m+n)(m-1)(m+1)$; 2) $(b-3)(a-2)(a+2)$; 3) $(a-b)(a^2+ab+b^2+1)$; 4) $(x+1)\times$ $\times(x^2-x-4)$. **870.** 1) 5; 1; −1; 2) 2; −2. **871.** 1) 1; −1; 2) 1; 3; −3. **872.** 1) $4(2a+b)(a+2b)$; 2) $-(3y+22m)(33y+2m)$. **873.** 1) $(a^2-2ab+4b^2)(a+2b+1)$; 2) $(m-2n)(m^2+2mn+$ $+4n^2+m-2n)$. **874.** 1) $(a-b)(a^2+ab+b^2+a-b)$; 2) $(c+d-x-y)(c+d+x+y)$. **875.** 1) $(x+1)(x-3)$; 2) $(x-1)\times$ $\times(x+9)$; 3) $(x+1)(x-4)$. **878.** −16. **879.** 8 год. **880.** Прибуток 2100 грн. **881.** Через 6 хв.

Вправи для повторення розділу 2

885. 1) 5; 2) 17; 3) −6; 4) −1,2; 5) 11; 6) 2,4. **890.** 1), 4) Ні; 2), 3) так. **894.** 1) 5; 2) 1; 3) 6; 4) 2. **895.** 1) Так; 2) ні. **899.** 1) a^{25-3n}; 2) a^{5n+3}. **900.** 1) 6; 2) 7. **906.** 1) $3m^2n$; 2) $-7p$. **908.** 1), 3), 4) Так; 2) ні. **909.** 3. **912.** a^3b; −5. **913.** Ні. **918.** $2xy+7xy^2$; −69. **922.** $x=2$. **923.** $x^3-\frac{5}{8}x^2$. **924.** 24 ц; 21 ц; 20 ц. **925.** 2. **929.** 1) 5; 3; 2) 2; 7; −7. **930.** 1) −2; 2) −12; 3) 28; 4) 8. **934.** 1) −1; 2) 8. **937.** 50 см; 40 см. **940.** 1) $(3c-2y)(4x^2-3y^3)$; 2) $(0{,}8m-0{,}5n)\times$ $\times(2n^2-3p^2)$. **941.** 1; −6. **945.** 25. **946.** Так. **947.** 1) x^2+2xy+ $+y^2+2xa+2ya+a^2$; 2) $b^2-2bc+c^2-2bd+2cd+d^2$; 3) $m^2+2mn+n^2+4m+4n+4$; 4) $a^2+6a+9-2ac-6c+c^2$.

951. 1) $\frac{1}{3}$. *Порада.* Помножити обидві частини рівняння на 3; 2) $-\frac{1}{5}$. **953.** 2) *Порада.* Вираз тотожно дорівнює виразу $(a - 2 + m)^2$. 3) *Порада.* Вираз тотожно дорівнює виразу $(a + b + 4)^2$. **958.** 1. **961.** 1) $-\frac{b}{a}; \frac{b}{a}$; 2) $0{,}3a; -0{,}3a$; **962.** 1) Так; 2) так. **963.** 1) $(5 - 4x)(5 + 4x)$; 2) $(3x - 5)(3x + 5)$. *Порада.* Спочатку спростіть вирази. **970.** 1) $9(a - b)(a^2 + ab + b^2)$; 2) $2(n + 3)(m - b)$; 3) $\left(\frac{1}{3}p - 1\right)\left(\frac{1}{3}p + 1\right)\left(\frac{1}{9}p^2 + 1\right)$; 4) $(m - 2n - 5) \times$ $\times (m - 2n + 5)$; 5) $(b - 6)(b + 7)$; 6) $(m - n)(m - 2)(m + 2)$. **971.** 1) $m^2(a - 1)(m - 1)(m + 1)$; 2) $a(b - 1)(a - 1)(a + 1)$; 3) $(b + 1) \times$ $\times (b - 1)^2$; 4) $(x - 3)(x^3 + 4x^2 + 3x + 9)$.

Розділ 3

§ 22

1003. 1) 0,6; 2) 2. **1004.** 1) Якщо $x = -5$, то $y = -23$; якщо $x = 0$, то $y = 0$; якщо $x = 3$, то $y = -6$; 2) якщо $x = -5$ або $x = 0$, то $y = 7$; якщо $x = 3$, то $y = 9$. **1005.** 1) Якщо $x = -2$, то $y = -16$; якщо $x = 0$, то $y = -2$; якщо $x = 4$, то $y = -12$; 2) якщо $x = -2$ або $x = 0$, то $y = 3$; якщо $x = 4$, то $y = -16$. **1006.** 4. **1007.** 0. **1009.** 10 см.

§ 23

1016. 1) 0; 2) 2; 3) 0; 4) 5. **1017.** 1) 0; 2) 3; 3) 0; 4) -2. **1022.** 1), 4) Так; 2), 3) ні. **1023.** 1), 3) Так; 2), 4) ні. **1026.** 1) 0; 4; 2) -4; 4; 3) -5; 0. **1027.** 1) 0; -2; 2) -5; 5; 3) 0; 4. **1030.** Ні. **1031.** 1) 2 кг; 2) 6 кг; 3) 1 кг; 4) 6 л. **1034.** 1) 450 л.

§ 24

1065. $k = -1{,}5$. **1066.** $l = -3$. **1067.** 1) $(0; -20)$; $\left(13\frac{1}{3}; 0\right)$; 2) $(0; 5)$; $(20; 0)$. **1068.** 1) $(0; -40)$; $(200; 0)$; 2) $(0; 18)$; $(54; 0)$. **1069.** $y = 100x$. **1070.** $y = -9x$. **1074.** $k = 0$; $l = 5$. **1075.** $k = 0$; $l = -5$. **1076.** *I*: $y = -3x$; *II*: $y = x + 3$; *III*: $y = 3x$. **1077.** $-5 \leqslant y \leqslant 9$. **1078.** 1) $(2; 2)$; 2) $(1{,}2; -1{,}2)$; 3) $(3; 6)$. **1083.** 1) 0; 2) -1. **1084.** 1) $16m^2 - 3\frac{3}{4}$; 2) $25y^2 + 4ay$. **1085.** 13 зошитів. **1087.** 1) 16 %; 2) 18 %.

Вправи для повторення розділу 3

1099. $k = -3$; $l = 10$.

Розділ 4

§ 25

1120. $p = 3$. **1121.** $n = 3$. **1122.** 1) $m = -35$; 2) $m = 15$. **1123.** 1) $d = 19$; 2) $d = -2$. **1125.** (5; 5). **1126.** 1) $p = 2$; 2) $p = 21$. **1127.** 1) Таких пар натуральних чисел немає; 2) (1; 1); 3) (8; 1), (1; 2); 4) (1; 7), (7; 1). **1130.** 1) 6; 2) 13. *Порада*. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$; 3) 25; 4) −19. **1131.** 8400 грн.

§ 26

1149. 1) $m = 0$; 2) $m = 10$; 3) $m = -25$. **1150.** 1) (0; −3), (−21; 0); 2) (0; −5), (3; 0). **1151.** 1) (0; 18), (6; 0); 2) (0; −14), (−4; 0). **1155.** Графіки не перетинаються. **1159.** 80 км/год; 60 км/год. **1160.** 1) $\approx 4\ \%$; 2) $\approx 9\ \%$. **1162.** *Порада*. Розгляньте три випадки: 1) $x \leqslant 0$; 2) $0 < x < 1$; 3) $x \geqslant 1$.

§ 27

1173. $a = -8{,}5$; $b = -0{,}2$. **1174.** $a = 0{,}7$; $b = 10{,}5$. **1175.** 1) (2; 3); 2) (−1; 2); **1176.** 1) (1; 4); 2) (3; −2). **1184.** $(x;\ 1{,}5x - 2{,}5)$, де x – будь-яке число; 2) немає розв'язків. **1189.** *Порада*. Виділити повний квадрат. **1190.** $P = 30 + 6s$. **1192.** 1.

§ 28

1200. (3; 1). **1201.** (4; 1). **1202.** 1) (4; −3); 2) (2; −5); 3) $a = -5$; $b = -2$; 4) $m = 4$; $n = 0{,}5$. **1203.** 1) (−3; 4); 2) (2; −7); 3) $p = 7$; $q = 3$; 4) $a = 1{,}5$; $b = -6$. **1204.** 1) (8,5; 2,5); 2) $\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$. **1205.** 1) (1,5; 2,5); 2) $\left(\frac{1}{6};\ -1\frac{1}{6}\right)$. **1206.** 1) (46,5; −25,5); 2) (6,5; 2). **1207.** 1) (22,5; 7,5); 2) (45; 1). **1208.** (4; 1). **1209.** (2; −3). **1211.** $k = \frac{1}{3}$; $l = -2$. **1212.** $y = 2{,}5x + 1$. **1213.** 1) $m = 2$; 2) $m = 4$.

§ 29

1231. 1) (−1; 1); 2) $a = 2$; $b = -1$; 3) $m = 3$; $n = 2$; 4) $\left(-\frac{1}{7};\ \frac{1}{2}\right)$. **1232.** 1) (2; 1); 2) (0,4; 7). **1233.** 1) (1; −2); 2) $a = 0{,}4$; $b = 0{,}1$. **1234.** 1) (−2; 2); 2) $m = 0{,}8$; $n = -1{,}5$. **1235.** 1) $y = \frac{3}{8}x - 5{,}5$;

2) $y = -\frac{2}{3}x + 4$. **1236.** $y = -0{,}25x + 4$. **1237.** 1) $(-1; 3)$; 2) $(3; -2)$. **1238.** 1) $(1; -2)$; 2) $(-2; -8)$. **1239.** 1) Розв'язків немає; 2) безліч розв'язків. **1244.** Ні, оскільки при цілих числах x і y значення виразу $y^2 - x^2$ є непарним або кратним числу 4.

§ 30

1250. 10 зошитів; 6 зошитів. **1251.** 224 грн, 208 грн. **1252.** 84 грн, 28 грн. **1253.** 10 см, 8 см, 8 см. **1254.** 18 м; 10 м. **1255.** 18 км/год; 2 км/год. **1256.** 17 км/год; 3 км/год. **1257.** 42 км/год; 14 км/год. **1258.** 24 і 38. **1259.** 32 і 40. **1260.** 32 роки; 10 років. **1263.** 80 яблук; 15 яблук. **1264.** 25; 20. **1265.** 90; 110. **1266.** 12 кг; 8 кг. **1267.** 10 кг; 15 кг. **1268.** 30 л; 45 л. **1269.** 24 книжки; 33 книжки. **1270.** 96 грн, 104 грн. **1271.** 180 тортів; 120 тортів. **1272.** $\frac{5}{18}$. **1273.** $\frac{7}{10}$. **1274.** 50 г; 150 г. **1275.** 156 г; 104 г. **1276.** 36 років; 8 років. **1277.** 45. **1282.** 20 корів.

Вправи для повторення розділу 4

1288. $(-2; 0)$; $(-1; 1)$; $(-1; -1)$; $(0; 2)$; $(0; -2)$; $(1; 1)$; $(1; -1)$; $(2; 0)$. **1297.** 1) $a = 3$; 2) $a \neq -14$. **1299.** 1) $(-3; 2)$; 2) $(5; -2)$. **1300.** 1) $\left(7\frac{1}{3}; 2\frac{3}{5}\right)$; 2) $(4; 3)$. **1301.** $(-28; 41)$. **1302.** 1) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; 2) $(4; 2)$. **1305.** Якщо $a = 2$, то безліч розв'язків; якщо $a \neq 2$, то єдиний розв'язок. **1307.** 1) $(1; 2)$; 2) $(-6; -2)$. **1308.** 1) $(1; -2)$; 2) $(0{,}5; -1{,}5)$. **1309.** 1) $(2; 7)$; 2) $\left(3\frac{7}{37}; -3\frac{5}{37}\right)$. **1310.** 1) $(x; -2 - 2x)$, де x – будь-яке число; 2) система не має розв'язків. **1311.** 1) Ні; 2) так; $(2; -1)$ – розв'язок системи. **1312.** 1) $y = 1{,}25x - 5$. **1313.** 1) $(4; 5)$; 2) $(-2{,}5; 0)$. **1314.** 1) $a = 4$; 2) $a \neq 4$; 3) не існує. **1315.** 1) $b = -3$; 2) якщо $b \neq -3$, то $x = 1{,}25$; $y = 0$. **1316.** 50 км/год; 60 км/год. **1317.** Порція млинців – 54 грн, салат – 45 грн. **1318.** 28 км/год; 2 км/год. **1319.** 18 деталей за годину виготовляє майстер і 12 – учень. **1320.** 80 груш; 100 груш. **1321.** 70 і 36. **1322.** 10; 50 і 80. **1323.** 2352 см^2. **1324.** 35. **1325.** 15 л і 10 л. *Порада.* Позначити x л – у першому бідоні, y л – у другому. Тоді маємо систему: $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 20, \\ y + \frac{1}{3}x = 15. \end{cases}$

Задачі підвищеної складності

1. -1; 0; 2; 6. **2.** 7583. *Порада*. Позначити шукане число $\overline{7abc}$, після чого $\overline{abc} = x$. **4.** 1) Рівняння не має розв'язків; 2) $x = 3$. **5.** 1) Якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок; 2) якщо $a = 0$, то рівняння має безліч розв'язків; якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок. **6.** 1) Для всіх a: $x = \frac{15 + a}{2}$; 2) для всіх a: $x = \frac{5a - 9}{5}$; 3) якщо $a = 3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 3$, то $x = \frac{7}{a - 3}$; 5) якщо $a = 1$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 1$, то $x = 1$; 6) для всіх значень a: $x = -\frac{2a}{3}$. **7.** 1) $a = -4$; 2) $a = -7$. **8.** 21 м/с; 147 м. *Порада*. Позначивши x м/с – швидкість поїзда, матимемо рівняння $25x = 378 + 7x$. **9.** 10 м/с; 99 м. *Порада*. Нехай x м/с – швидкість поїзда, тоді його довжина $9x + 9$. Одержимо рівняння $27x = (9x + 9) + 171$. **10.** 2 год; 6 год. **11.** 30°, 30° і 120° або 20°, 80° і 80°. **12.** 26 рулонів. **13.** 520 г. **14.** 2401. **15.** На 38 %. **16.** $\frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$. **17.** 2018^2. **19.** $(m + n)^2 + (m - n)^2$. **20.** 1) $x - 5$; 2) $x + 3$. **21.** 1) $(a - 1)^2(b^2 + a^2 + 2a + 1)$; 2) $(1 - t)^3$; 3) $(x - 1) \times (x + 1)(x^4 - 2x^2 + 4)$. *Порада*. $x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4 = (x^6 + 8) - 3(x^4 - 2x^2 + 4)$; 4) $(m - n + 4)(m + n - 2)$. *Порада*. $2(m + 3n) + (m - n)(m + n) - 8 = (m^2 + 2m + 1) - (n^2 - 6n + 9)$; 5) $(a - b) \times (a^2 + ab + b^2 + a + b)$; 6) $2(2x - 1)(2x^2 + 2x + 1)$. *Порада*. $8x^3 + 4x^2 - 2 = (8x^3 - 1) + (4x^2 - 1)$. **22.** Ні. **23.** $2^{128} - 1$. **24.** *Порада*. Розглянути вираз $\frac{(a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2)}{2}$ та використати, що $b = \frac{a + c}{2}$. **26.** *Порада*. $\overline{abcabc} = 100\,000a + 10\,000b + 1000c + 100a + 10b + c = 100\,100a + 10\,010b + 1001c = 1001 \times (100a + 10b + c) = 1001\overline{abc}$. **28.** 729. **30.** *Порада*. Довести, що $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 10(3^n - 2^{n-1})$. **31.** $(x + y)^3 + (x - y)^3$. **33.** $y = 4\,074\,341$. **34.** *Порада*. $(2n + 2)^3 - (2n)^3 = 24n(n + 1) + 8$. **35.** 1) $(y^2 + y + 1)(y^3 - y^2 + 1)$. *Порада*. $y^5 + y + 1 = y^5 - y^2 + y^2 + y + 1 = y^2(y^3 - 1) + y^2 + y + 1$; 2) $(m^2 + m + 1)(m^2 - m + 1)$. *Порада*. $m^4 + m^2 + 1 = m^4 - m + m^2 + m + 1$; 3) $(x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$. *Порада*. $x^4 + 5x^2 + 9 = (x^4 + 6x^2 + 9) - x^2$; 4) $(n^2 - 2n + 2) \times (n^2 + 2n + 2)$. *Порада*. $n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2$; 5) $(x^2 - 2b^2) \times (x^2 + 2a^2 + 2b^2)$. *Порада*. $x^4 + 2a^2x^2 - 4a^2b^2 - 4b^4 =$

$= (x^4 + 2a^2x^2 + a^4) - (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4)$; 6) $(m + 1)(m^2 - m - 1)$. *Порада*. $m^3 - 2m - 1 = (m^3 + m^2) - (m^2 + 2m + 1)$; 7) $(m + 2) \times$ $\times (m^2 - 2m - 1)$. *Порада*. $m^3 - 5m - 2 = (m^3 + 8) - (5m + 10)$ або $m^3 - 5m - 2 = (m^3 - 4m) - (m + 2)$; 8) $(x + y)(x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3)$. *Порада*. $x^4 - 2x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4 = (x^4 - y^4) - (2x^3y + 2x^2y^2) -$ $- (4x^2y^2 + 4xy^3)$. **36.** $5^{15} < 3^{23}$. *Порада*. $5^{15} = 5 \cdot (5^2)^7$, $3^{23} = 9 \cdot (3^3)^7$. **38.** 1) Так; 2), 3) ні. **39.** 1), 2) Ні; 3) так. **40.** $(-1; -1)$ і $(2; -5)$. **41.** 25 %. **42.** 1) Ні; 2), 3), 4) так. **43.** Ні. **44.** 1) Один; 2) жодного; 3) один; 4) безліч. **45.** 5 або 10. **46.** 1) Прямі $x = -1$ і $x -$ $- 2y = 0$; 2) прямі $x = 0$ і $y = x$; 3) прямі $x = 2$ і $x = -2$; 4) прямі $y = 3$ і $y = -3$; 5) $y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 2x, & \text{якщо } x \geqslant 0; \end{cases}$ 6) пряма $x = 0$ та промені $y = 1$ для $x \geqslant 0$ і $y = -1$ для $x \leqslant 0$. **48.** 1) Так; (2; 0), $(-2; 0)$; 2) так; (0; 4). **49.** (8; 2). **50.** 1) (3; 0); 2) (0; −5). **51.** 69 і 64. *Порада*. $\overline{6x} \cdot \overline{6y} = \overline{x6} \cdot \overline{y6}$, звідки $xy = 36$. **52.** У 1990 р. *Порада*. Нехай Олесь народився в $\overline{19xy}$ році. Тоді в 2009 р. йому буде $2009 - \overline{19xy}$, що за умовою дорівнює $(1 + 9 + x + y)$. **53.** $a = 10$. **54.** 1) $m = 2$ – немає розв'язків; $m \neq 2$ – єдиний розв'язок; 2) $m = 3$ – безліч розв'язків; $m \neq 3$ – немає розв'язків; 3) $m = 1$ – безліч розв'язків; $m \neq 1$ – єдиний розв'язок. **55.** $a = -7$. **56.** 1) $x = 5$, $y = 3$, $z = 0$. *Порада*. Додати почленно всі рівняння системи; 2) $x = -1$, $y = 8$, $z = -3$. **57.** $a = -2$; $b = -1$; $-8x^5 + 11x^2 + 11x - 8$. **58.** 1) (1; 2), (0,6; 2,4); 2) (2; 2), (3; 3), $(-1; 2)$, $(-1; 7)$; 3) (2; 2), (1; −1). **59.** 1) (2; 6); 2) (−4; −8); 3) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 4) (−10; −5); 5) (2; −1); 6) (−3; −3). **60.** $a = 52$; $b = 57{,}2$; $c = 44$. **61.** Брату зараз 10 років, сестрі – 6 років. **62.** 46. **63.** 742. **64.** 240 і 360. **65.** 500 кг піску; 420 кг цементу. **66.** 5 см; 15 см; 12 см. **67.** 26 см. **68.** 7 кг першого зливка, 3 кг другого зливка. **69.** 12 км. **70.** 630 л; 840 л. **71.** Швидкість автобуса 45 км/год, таксі – 75 км/год. **72.** Швидкість кожного з автобусів 42 км/год, велосипедистки – 18 км/год. **73.** 4,5 км/год; 16,5 км/год. *Порада*. Якщо x км/год – швидкість туриста, а y км/год – швидкість велосипедиста, то маємо систему: $\begin{cases} 1\frac{5}{6}x = \frac{1}{2}y, \\ 3\frac{1}{3}x + 2y = 48. \end{cases}$ **74.** 18 км/год; 42 км/год; 72 км/год. *Порада*. Якщо позначити швидкість вело-

сипедистки x км/год, швидкість першого автобуса – y км/год, тоді швидкість другого – $\frac{7}{12}y$ км/год. Матимемо систему

$$\begin{cases} 1\frac{1}{3}(x+y)=120, \\ 2\left(x+\frac{7}{12}y\right)=120. \end{cases}$$

75. 30 м/с і 20 м/с.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

Робота \ Завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	В	Г	Б	А	В	Г	В	Б	Г	В	Б	Г	1–Г; 2–Б; 3–А
2	В	Г	А	Б	В	Б	В	Г	В	А	Б	В	1–В; 2–Г; 3–А
3	А	Г	Б	Б	В	А	В	Б	Б	А	В	Г	1–Б; 2–А; 3–В
4	Г	Б	Г	В	В	А	Г	Б	Г	В	А	В	1–Б; 2–А; 3–Г
5	Б	А	В	Г	В	А	Г	Б	В	А	Г	Б	1–В; 2–А; 3–Г
6	В	Б	Г	Б	А	Г	Б	А	Б	Б	В	А	1–В; 2–Г; 3–А

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аргумент 178

Винесення спільного множника за дужки 105
Вирази зі змінними 42
Властивості рівняння з двома змінними 216
– – з однією змінною 15, 16
– степеня з натуральним показником 61–64

Графік лінійної функції 197
– рівняння $ax + by = c$ 222
– – з двома змінними 220
– функції 188
Графічний спосіб задання функції 190
– – розв'язування систем 227

Двочлен 85
Доведення тотожностей 50
Дробовий раціональний вираз 42

Залежна змінна 178
Зведення подібних членів многочлена 86
Значення функції 178
– числового виразу 41

Квадрат різниці 124
– суми 123
– числа 55
Коефіцієнт лінійної функції 196
– лінійного рівняння 19
– одночлена 70
Корінь рівняння 14
Куб числа 55

Лінійна функція 196
Лінійне рівняння з двома змінними 216
– – з однією змінною 19

Математична модель задачі 28
Многочлен 85
– стандартного вигляду 86
Множення многочлена на многочлен 110
– одночлена на многочлен 98
– одночленів 74

Незалежна змінна 178
Неповний квадрат різниці 146
– – суми 146
Нуль функції 189

Область визначення функції 178
– значень функції 178
Одночлен 70
– стандартного вигляду 70
Основа степеня 54
Основна властивість степеня 62

Піднесення до степеня 55
– одночлена до степеня 74
Подібні члени многочлена 86
Показник степеня 54
Почленне додавання 239
Правило ділення степенів 62
– множення степенів 62
– піднесення до степеня добутку 64
– – степеня до степеня 63
Пряма пропорційність 198

Раціональний вираз 42
Рівносильні рівняння з двома змінними 216
– – з однією змінною 15
– системи рівнянь з двома змінними 234
Рівняння 14
– з двома змінними 215
– з однією змінною першого степеня 20
Різниця квадратів 141
– кубів 146
– многочленів 92
Розв'язання рівняння 15
Розв'язок рівняння 14
– – з двома змінними 215
– системи рівнянь з двома змінними 226

Розкладання многочлена на множники 105
Система рівнянь 226
– лінійних рівнянь з двома змінними 226
Спосіб групування 117
– додавання 239
– підстановки 233
Спрощення виразу 49
Стандартний вигляд многочлена 86
– – одночлена 70
Степінь з натуральним показником 55
– многочлена 87
– одночлена 71
Сума кубів 146
– многочленів 92
Табличний спосіб задання функції 180
Тотожні вирази 48
– перетворення виразів 49
Тотожність 49
Тричлен 85
Формули скороченого множення 124
Функція 178
Цілий раціональний вираз 42
Числове значення виразу 42
Числові вирази 41
Члени многочлена 85

ЗМІСТ

Шановні семикласниці та семикласники! 3
Шановні вчительки та вчителі! 4
Шановні дорослі! 5
Повторюємо математику за 5–6 класи 6

Розділ 1. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

§ 1. Загальні відомості про рівняння 14
§ 2. Лінійне рівняння з однією змінною 19
§ 3. Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь. Рівняння як математична модель задачі 28
Домашня самостійна робота № 1 36
Завдання для перевірки знань до §§ 1–3 37
Вправи для повторення розділу 1 38
Головне в розділі 1 40

Розділ 2. ЦІЛІ ВИРАЗИ

§ 4. Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Числове значення виразу 41
§ 5. Тотожні вирази. Тотожність. Тотожне перетворення виразу. Доведення тотожностей 48
§ 6. Степінь з натуральним показником 54
§ 7. Властивості степеня з натуральним показником 61
§ 8. Одночлен. Стандартний вигляд одночлена 70
§ 9. Множення одночленів. Піднесення одночлена до степеня 74
Домашня самостійна робота № 2 80
Завдання для перевірки знань до §§ 4–9 81
З історії математичного олімпіадного руху України 82
§ 10. Многочлен. Подібні члени многочлена та їх зведення. Степінь многочлена 85
§ 11. Додавання і віднімання многочленів 91
§ 12. Множення одночлена на многочлен 98
§ 13. Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки 105
§ 14. Множення многочлена на многочлен 110
§ 15. Розкладання многочлена на множники способом групування 117
Домашня самостійна робота № 3 121
Завдання для перевірки знань до §§ 10–15 123

§ 16. Квадрат суми і квадрат різниці 123
§ 17. Розкладання многочленів на множники за допомогою формул квадрата суми і квадрата різниці 131
§ 18. Множення різниці двох виразів на їх суму 136
§ 19. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів 141
§ 20. Сума і різниця кубів 146
§ 21. Застосування кількох способів розкладання многочленів на множники 152
Домашня самостійна робота № 4 158
Завдання для перевірки знань до §§ 16–21 159
Вправи для повторення розділу 2 160
Головне в розділі 2 170
Про фундаторів математичних олімпіад в Україні 173

Розділ 3. ФУНКЦІЇ

§ 22. Функція. Область визначення та область значень функції. Способи задання функцій. Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів 177
§ 23. Графік функції. Графічний спосіб задання функції 187
§ 24. Лінійна функція, її графік та властивості 196
Домашня самостійна робота № 5 207
Завдання для перевірки знань до §§ 22–24 209
Вправи для повторення розділу 3 210
Головне в розділі 3 214

Розділ 4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

§ 25. Лінійне рівняння з двома змінними 215
§ 26. Графік лінійного рівняння з двома змінними 220
§ 27. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними та її розв'язок. Розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними графічно 226
§ 28. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки 233
§ 29. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання 239
§ 30. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь 245
Домашня самостійна робота № 6 250

Завдання для перевірки знань до §§ 25–30 252
Вправи для повторення розділу 4 253
Головне в розділі 4 259
Завдання для перевірки знань за курс алгебри 7 класу 261
Задачі підвищеної складності 262
Відповіді та поради до вправ 270
Предметний покажчик 283

Відеоуроки за темами підручника можна переглянути за посиланням *https://cutt.ly/0w8DhUM4* або *QR*-кодом.

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня/учениці	Клас	Навчальний рік	Оцінка	
				на початку року	в кінці року
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику використано ілюстративний матеріал з відкритих джерел інтернету, зокрема сайтів *vecteezy.com*, *depositphotos.com*. Усі матеріали в підручнику використано з навчальною метою відповідно до законодавства України про авторське право і суміжні права.

Редактор *Олена Мовчан*
Обкладинка *Олександра Павленка*
Макет, художнє оформлення *Олександра Павленка*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректор *Інна Борік*

Формат 70×100/16.
Ум. друк. арк. 23,4. Обл.-вид. арк. 19,15.
Тираж 319519 пр. Вид. № 0025.
Зам. № 24-04-0504

ТОВ «Генеза», 01133, Україна, місто Київ,
вул. Генерала Алмазова, 18/7 (літ. В), офіс 404.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Максиміліанівська, 17, м. Харків, 61024, Україна.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 6847 від 19.07.2019.