Ольга Біляніна, Григорій Білянін, Юлія Андрух,
Яна Гуцуляк, Аліна Мунтян, Жанна Шакун

# Алгебра

7 клас

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА




Видавництво Літера

**Ольга Білявіна, Григорій Білянін, Юлія Андрух,
Яна Гуцуляк, Аліна Мунтян, Жанна Шакун**

# АЛГЕБРА

## Підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

КИЇВ
Літера ЛТД
2024

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*
*(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124)*

Відповідно до Модельної навчальної програми
«Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(автори: Біляніна О.Я., Білянін Г.І., Семчук А.Р., Ілащук О.Г., Мар'янчук О.Т., Рябий С.І.)

# ЗМІСТ


**ТЕМА 1. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ**

Передмова . . . . . 4

§1.1. Рівняння та їхні корені. Рівносильні рівняння. Лінійні рівняння з однією змінною . . . . . 6

§1.2. Основні властивості рівнянь. Розв'язування лінійних рівнянь та найпростіших рівнянь, які зводяться до лінійних . . . . . 12

§1.3. Навчальні задачі, що моделюються лінійним рівнянням з однією змінною або рівнянням, що зводиться до лінійного . . . . . 19

§1.4. Компетентнісно орієнтовані задачі, що моделюються лінійним рівнянням з однією змінною або рівнянням, що зводиться до лінійного . . . . . 25

§1.5. Задачі на рух, що моделюються лінійним рівнянням із однією змінною або рівнянням, що зводиться до лінійного . . . . . 33

§1.6*. Дослідження та розв'язування лінійних рівнянь із параметром . . . . . 39

*Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми «Лінійні рівняння»* . . . . . 43

**ТЕМА 2. ЦІЛІ ВИРАЗИ. ОДНОЧЛЕНИ**

§2.1. Числові вирази та вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Тотожність . . . . . 49

§2.2. Тотожні перетворення виразів . . . . . 56

§2.3. Степінь із натуральним показником. Властивості степеня з натуральним показником . . . . . 63

§2.4. Стандартний вигляд багатоцифрового натурального числа. Застосування стандартного вигляду числа в природничій освітній галузі . . . . . 72

§2.5. Одночлен. Піднесення одночлена до степеня та множення одночленів. Стандартний вигляд одночлена . . . . . 78

*Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми «Цілі вирази. Одночлени»* . . . . . 84

**ТЕМА 3. ЦІЛІ ВИРАЗИ. МНОГОЧЛЕНИ**

§3.1. Многочлен. Подібні члени многочлена та їх зведення. Степінь многочлена . . . . . 90

§3.2. Додавання й віднімання многочленів . . . . . 95

§3.3. Множення одночлена на многочлен . . . . . 100

§3.4. Множення многочлена на многочлен. Стандартний вигляд многочлена . . . . . 105

§3.5. Формули скороченого множення: квадрат суми і квадрат різниці . . . . . 111

§3.6. Формули скороченого множення: різниця квадратів (добуток різниці двох виразів на їх суму) . . . . . 117

§3.7*. Формули суми кубів та різниці кубів, куба суми та куба різниці . . . . . 123

*Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми «Цілі вирази. Многочлени»* . . . . . 128

**ТЕМА 4. «РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ»**

§ 4.1. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки . . . . . 135

§ 4.2. Розкладання многочленів на множники способом групування . . . . . 140

§ 4.3. Розкладання многочленів на множники за допомогою формул скороченого множення . . . . . 145

§ 4.4. Застосування кількох способів для розкладання многочлена на множники . . . . . 150
§ 4.5. Навчальні задачі, що моделюються розкладанням на множники многочленом . . . . . 155
*Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми «Розкладання многочленів на множники»* . . . . . 161

**ТЕМА 5. «ФУНКЦІЇ»**

§ 5.1. Функціональна залежність між величинами. Функція. Способи задання функції . . . . . 167
§ 5.2. Графік функції. Область визначення та область значень функції. . . . . 176
§ 5.3. Лінійна функція, її графік та властивості. Пряма пропорційність, її графік та властивості. . . . . 183
§ 5.4. Побудова графіків лінійних функцій та їх читання . . . . . 190
§ 5.5. Дослідження взаємного розміщення графіків лінійних функцій . . . . . 198
§ 5.6. Застосування лінійної функції в практичних ситуаціях . . . . . 205
*Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми: «Функції»* . . . . . 210

**ТЕМА 6. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ**

§ 6.1. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними . . . . . 216
§ 6.2. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними графічно. . . . . 222
§ 6.3. Розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки. . . . . 229
§ 6.4. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання . . . . . 235
§ 6.5. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними різними способами . . . . . 241
§ 6.6. Розв'язування геометричних задач, що моделюються системою двох лінійних рівнянь з двома змінними . . . . . 247
§ 6.7. Система лінійних рівнянь як математична модель компетентнісно орієнтованих задач . . . . . 252
§ 6.8*. Дослідження та розв'язування систем лінійних рівнянь із параметром . . . . . 258
*Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми «Системи лінійних рівнянь із двома змінними»* . . . . . 264

**ТЕМА 7. «ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ»**

§ 7.1. Способи отримання даних. Читання та аналіз даних. Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення . . . . . 270
§ 7.2. Навчальні задачі на знаходження дробу (відсотка) від числа та числа за його дробом (відсотком) та складання дробового і відсоткового відношень . . . . . 278
§ 7.3. Випадкова подія та її ймовірність. Класичне та статистичне означення ймовірності події для обчислення ймовірностей подій. . . . . 285
§ 7.4. Застосування комбінаторних правил суми і добутку для обчислення ймовірностей подій. . . . . 291
§ 7.5. Компетентнісно орієнтовані задачі, що моделюються елементами стохастики . . . . . 296
*Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми: «Елементи стохастики»* . . . . . 302

## Привіт!

Ти як? Я Твій підручник. Маю велике бажання з тобою дружити... Я вмію дружити, а Ти? Запевняю Тебе, що я готовий допомагати тобі навчитися вчитися, а твоєму IQ – зростати! Для цього я запросив собі в помічники відомого Тобі Кубика Блума, а зрештою – довіряю тобі як щирому українцю / українці, які понад усе люблять, як і я, Україну!

Ти вже майже дорослий / доросла, адже Ти – Семикласник / Семикласниця, і добре розумієш, що те, чого ти навчився / навчилася сам / сама – це твоя життєва цінність! Тож пропоную тобі це врахувати: чим більше ти свідомо працюватимеш на себе, тим краще тобі буде жити й бути в спільноті!

Я склав для тебе спеціальні завдання від Кубика, які бажано робити самостійно, бо це розвиток саме твого мислення. Їх правильність ти завжди зможеш за потреби перевірити за покликанням поруч із коротким або ширшим – детальнішим поясненням розв'язання. Форма зв'язку – презентація у хмарі, тому ти зможеш її переглядати стільки разів, скільки тобі захочеться. Цими завданнями ти також зможеш за відповідними критеріями оцінювати себе «Як ти?», і разом із ближніми своїми успіхам радіти. Отже, твої мрії збуваються, твої очікування себе виправдовують і ти стаєш щасливішим / щасливішою!

Звісно, підручник має своє призначення для навчання в **Новій українській школі**, тому в ньому пропонуються окремі рубрики, які мають певні цілі.

- Завдання для дослідження в партнерстві: ***«Чи вмієш ти?»***, щоб ***проаналізувати*** й зробити ***висновки*** щодо формування ***індивідуальної траєкторії свого учіння*** з метою кращого засвоєння нової теми, оскільки **«Це варто знати й вміти застосовувати»**,
- Коротке нагадування про актуальні питання до нової теми, які ти знаєш і вмієш – ***«Зауваж!»***.
- Впізнання й осмислення нового матеріалу міститься в рубриці – ***«Зауваж! Це важливо!»***.
- ***«Тренувальні вправи»*** чотирьох рівнів, які укладено від найпростіших до складніших в тестовій і розгорнутій формі. Серед них є завдання для формування вміння досліджувати ситуації, працюючи в групі ***(«Чи маєш ти ідеї?»)***, вчитися ставити запитання до задач, працюючи *в класному кооперативі* ***(«Чи можеш ти?)***.

Кожна вивчена тема містить рубрику **«Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми»**, у якій тобою цікавляться («Як ти?»), довіряють твоїй відповідальності і доброчесності через запитання для самоконтролю. Також тобі пропонується зразок «Інтелектуальної карти» з теми, схеми, кластери тощо, які ти можеш доповнювати своїми творчими здобутками. Потім ти зможеш скласти свій «Сенкан», а я поділюся з тобою своїм. І неодмінно зайди в «Аркуш», щоб перевірити себе – («Як Я?»).

Ти знаєш народне прислів'я: «Мудрим ніхто не родився, а навчився». То ж учімося разом, щоб отримати життєву мудрість, мати відповідні компетенції, бути СОБОЮ, знайти своє Я в цьому світі. Я не проти! А як ти?

*Через рівняння, теореми*
*Я всякі вирішував проблеми.*

Джефрі Чосер

# ТЕМА 1. | Лінійні рівняння

У цій темі ти **зрозумієш**, що рівняння розрізняють за видами, **ознайомишся** із загальним виглядом лінійного рівняння, **навчишся** їх вирізняти з-поміж інших та **розв'язувати** зовсім новими, незвичними для тебе, способами.

Тепер ти частіше будеш використовувати слово **«корінь»** не тільки для рослин, а й як розв'язок рівняння. А ще **розумітимеш,** що рівняння бувають **рівносильними,** і щоб визначити цю рівносильність, потрібно ці рівняння розв'язати. Можливо, найважливішим для тебе стане те, що ти навчишся лінійними рівняннями **моделювати** алгебраїчні задачі та інші – практичні, компетентнісно орієнтовані, ситуаційні, – якими можна описати твій побут, діяльність і життя.



# §1.1 Рівняння та їхні корені. Рівносильні рівняння. Лінійні рівняння з однією змінною




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Прагну навчитися вчитися!»***.

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак — перейдемо до розв'язування вправ — «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про рівняння.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**ПРИДУМАЙ,**

як коротко записати: «від деякого числа відняли 2,5 і отримали 12,5»

| **НАЗВИ** | **ПОЯСНИ** | **ЧОМУ** | **ЗАПРОПОНУЙ** |
|---|---|---|---|
| результат кожної з арифметичних дій: додавання, віднімання, множення, ділення | відмінність між термінами: «удвічі більший» і «на 2 більший» | неправильним є твердження, що $2x-17+x+3$ — це рівняння? | зручний спосіб розв'язування рівнянь: $2{,}5x=10$ і $\frac{1}{3}x=4$. |

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

**ПОДІЛИСЯ**

своїми вміннями, як знайти значення $x$, якщо $2x+5=17$.

Відповіді на запитання Кубика Блума ширше:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

1) **Знайти** $x$, якщо:

а) $(1{,}2+3{,}8):x=-2$; б) $x:(1{,}2+2{,}5+3{,}8)=10$;

в) $(0{,}125\cdot x)\cdot 8=0{,}4$.

2) **Обчислити** зручним способом значення кожного з виразів, якщо $m=0{,}2$:

а) $2{,}3m+7{,}7m$; б) $27{,}36m-33{,}2m+105{,}84m$;

в) $1\frac{1}{2}m+1\frac{5}{6}m+1\frac{2}{3}m$.

3) **Визначити** рівняння серед пропонованих, розв'язком яких є одне й те саме число.

а) $2x-14=-8$ в) $2x-42=-34$

б) $2x+25=33$ г) $2x+14=22$

***Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** переставна і сполучна властивості додавання і множення:

$$a+b=b+a \qquad a\cdot b=b\cdot a$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c \qquad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

**2** розподільна властивість множення, яку читають зліва направо і справа наліво:

$$c\cdot(a\pm b)=ca\pm cb.$$

**3** арифметичні дії з раціональними числами:

✓ щоб додати два числа з різними знаками, потрібно:
*1) знайти модулі доданків;*
*2) від більшого модуля відняти менший модуль;*
*3) перед отриманим числом поставити знак доданка з більшим модулем;*

✓ щоб відняти від одного числа інше, треба до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику (або щоб від одного числа відняти інше, треба знайти таке третє число, яке в сумі з від'ємником дорівнює зменшуваному: $a-b=c$, адже $c+b=a$);

✓ добуток і частка двох чисел з однаковими знаками є числом додатним, а з протилежними знаками – від'ємним.

***Зауваж!***

***Рівняння** – це рівність, що містить змінну.*

Вираз, записаний у рівнянні зліва від знака «=», називають *лівою частиною рівняння*, а справа – *правою частиною рівняння*.

Число, яке перетворює рівняння на правильну числову рівність, називають ***коренем*** (*або* ***розв'язком***) ***рівняння***. Кажуть: корінь рівняння *задовольняє це рівняння*.

Процес пошуку таких значень змінних, які б перетворювали рівняння в правильну числову рівність, називають ***розв'язуванням рівняння***.

### *Зауваж! Це важливо!*

***Розв'язати рівняння*** означає знайти всі його корені або переконатися (довести), що коренів немає.

Якщо корені одного рівняння збігаються з коренями іншого рівняння, то такі рівняння називають ***рівносильними.*** Рівносильними також є рівняння, які не мають коренів.

Наприклад, рівняння $2x=1$ та $x+2{,}5=3$ – рівносильні, адже в обох рівнянь один і той самий корінь – число 0,5. Рівняння $|x|-7=0$ та $x-7=0$ не є рівносильними, оскільки коренями першого є числа 7 і $-7$, а другого – лише один корінь – число 7.

***Лінійним рівнянням*** називають рівняння вигляду $\boldsymbol{kx+b=0}$, де $k$ і $b$ – деякі числа, $k$ називають *коефіцієнтом* при змінній $x$, а $b$ – *вільним членом.*

Наприклад, $3x-1{,}5=0$, де $k=3$, $b=-1{,}5$;

$0{,}3x+2{,}16=0$, де $k=0{,}3$, $b=2{,}16$.

## *Тренувальні вправи*

**1.1°.** Розпізнати рівняння серед рівностей:

а) $2\cdot 55=110$;

б) $\frac{1}{6}p+3=7$;

в) $75-y=y$;

г) $2-k=1-(1-k)$.

**1.2°.** Навести приклади рівнянь та виразів або рівностей, які не є рівняннями (заповнити таблицю в зошиті).

| Рівняння | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Вираз або рівність, що не є рівнянням | | | | |

**1.3°.** Перевірити, чи є число 2 коренем рівняння:

а) $5-y=3$;

б) $-\frac{1}{2}y+2=3y$;

в) $1\frac{1}{2}x+5=2$;

г) $x^2-5=-1$.

**1.4°.** Перевірити, чи є число $-0{,}5$ коренем рівняння:

а) $3-2x=2$;

б) $-\frac{1}{2}x+2=2{,}25$;

в) $4x+14=16$;

г) $x^2+6=6{,}25$.

**1.5°.** Навести три приклади лінійних рівнянь, у яких коефіцієнт при змінній – ціле число, а вільний член – раціональне число.

**1.6°°.** Поставити у відповідність кожному рівнянню (1–4) його розв'язок (А–Д).

| *Рівняння* | *Розв'язок рівняння* |
|---|---|
| 1. $3-x=10$ | А. 9 |
| 2. $-\frac{1}{3}x+2=-1$ | Б. $-3$ |
| 3. $5x+1=0$ | В. $-7$ |
| 4. $x^2-9=0$ | Г. $-0,2$ |
| | Д. 3 |

**1.7°°.** Поставити у відповідність кожному рівнянню (1–4) його розв'язок (А–Д).

| *Рівняння* | *Розв'язок рівняння* |
|---|---|
| 1. $7-x=-3$ | А. 1,4 |
| 2. $\frac{2}{5}x+4=10$ | Б. $-5$ |
| 3. $-5x+7=0$ | В. 5 |
| 4. $x^2-16=9$ | Г. 10 |
| | Д. 15 |

**1.8°°.** Вибрати ДВА рівняння, коренями яких є число 7:

а) $21-2x=35$; в) $3x-15=6$;

б) $\frac{3}{7}x+5=8$; г) $0,5x-1,5=5$.

**1.9°°.** Вибрати рівняння, коренем якого є число 0,7:

а) $2,4-5x=1,1$; в) $-x+27=20$;

б) $\frac{10}{49}x+\frac{6}{7}=1$; г) $3\frac{1}{8}x-2\frac{3}{16}=0$.

Розв'язати рівняння та вибрати серед них рівносильні (**1.11–1.12**):

**1.10°.** а) $4x-0,36=0$; в) $3x-1,23=0$;

б) $-2x+7=0$; г) $9x+0,81=0$.

**1.11°.** а) $6x+0,72=0$; в) $5x+0,125=0$;

б) $-3x-8=0$; г) $-6x-0,15=0$.

**1.12*.** Критично оцінити процес розв'язання рівняння.

| а) $2-5x=7$; | б) $\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}=1$; | в) $-2x+7=3$; | г) $0{,}5x-1=0$; |
|---|---|---|---|
| $5x=7-2$; | $\frac{2}{3}x=1-\frac{5}{6}$; | $-2x=3-7$; | $0{,}5x=1$; |
| $x=5:5$; | $\frac{2}{3}x=\frac{1}{6}$; | $-2x=-4$; | $x=1:0{,}5$; |
| $x=1$. | $x=\frac{1}{6}:\frac{2}{3}$; | $x=(-4):(-2)$; | $x=0{,}5$. |
| | $x=\frac{1}{4}$. | $x=2$. | |

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**1.13**.** Розв'язати рівняння $kx+b=0$ у загальному вигляді й дослідити кількість коренів залежно від значень коефіцієнта $k$ та вільного члена $b$.

**1.14**.** Побудувати кластер розв'язання рівняння $kx+b=0$ у загальному вигляді.

Самоперевірка 1.13

Самоперевірка 1.14

**1.15**.** Визначити кількість коренів у кожному з рівнянь:

а) $mx-n=0$, $m\neq 0$, $n\neq 0$;

б) $mx+n=0$, $m\neq 0$, $n=0$;

в) $mx-n=0$, $m=0$, $n=0$;

г) $mx+n=0$, $m=0$, $n\neq 0$.

**1.16**.** Розв'язати рівняння:

а) $123\cdot(200-x)=12\,300$;

б) $246\cdot(x+150)=24\,600$;

в) $157\cdot(x-125)=62\,800$;

г) $266\cdot(160+x)=133\,000$;

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**1.17.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Рух річкою»*. Відстань між двома пристанями – 236 км. Катер плив 3 год за течією річки, швидкість якої – 2,5 км/год, подолавши $\frac{3}{4}$ відстані між пристанями.

б) Задача *«Мої кишенькові гроші»*. Петро витратив 26 % своїх кишенькових грошей на покупку зошитів, 40 % – на поповнення рахунку телефона, 27 % – на обід, після чого в нього залишилася 21 гривня.

в) Задача *«Ландшафтний дизайн»*. Для оформлення гімназійної клумби купили готові кущі хризантем трьох кольорів – фіолетові, жовті та білі. Фіолетові хризантеми становили 34 % від усіх куплених кущів, жовті – 42 %, а білі – пораховані – 120 кущів.

г) Задача *«Здорове харчування»*. Меню для комплексних обідів деякого кафе складається з 5 овочевих салатів, 4 основних страв та 6 десертів. Відвідувачка хоче зробити замовлення, що містило б салат, основну страву і десерт.

ґ) STEM-задача *«Вода – основа життя»*. Відомо, що кожна людина в середньому споживає 1700 мл води на день. Учені ж пропонують населенню України зважати на такі орієнтовні норми споживання води:

| Вікова категорія | До 1 року | Діти 1–9 років | Дівчата 10–18 років | Хлопці 10–18 років | Чоловіки | Жінки | Вагітні жінки | Жінки, що годують немовлят |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Рекомендована кількість споживання води (у мл/добу) | 700–1000 | 1250–1750 | 1900–2000 | 2100–2500 | 2500 | 2000 | 2300 | 2700 |

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 1.1. Рівняння та їхні корені. Рівносильні рівняння. Лінійні рівняння з однією змінною»**



# §1.2 Основні властивості рівнянь. Розв'язування лінійних рівнянь та найпростіших рівнянь, які зводяться до лінійних




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Не кажи: „не вмію", а кажи „навчуся!"».***

Сьогодні Кубик Блума знову допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування рівнянь – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про те, як можна спростити процес розв'язування рівнянь.

**Отже, шість завдань від Кубика Блума:**

**НАЗВИ** корені лінійних рівнянь $4x-5=0$ та $-5x+4=0$.

**ПОЯСНИ**, як знайти розв'язки рівняння $mx-n=0$, де $m=0$, $n=0$.

**ЧОМУ** рівняння $x-0{,}5x-0{,}5x=4$ і $2(x-1)-2x=0$ – рівносильні?

**ПРИДУМАЙ** три лінійних рівняння, коренем яких є число 2,5.

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями розв'язувати рівняння $3x-4{,}5-7{,}5=0$.

**ЗАПРОПОНУЙ** зручний для тебе спосіб розв'язання рівняння

$$\frac{4-x}{3}=\frac{9}{2}.$$

Самоперевірка і самооцінювання тут:

Ширше про запитання Кубика Блума тут:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти значення $x$**, якщо:

а) $2+2(x-1)=0$; б) $12x-4x-8x-10+10=0$;

в) $8-2(x-6)=0$.

**2) Вибрати вираз**, яким можна знайти витрати Катрусі на придбання нею $m$ зошитів «Мрія» – по 6 грн та 8 зошитів «Лідер» – по $n$ грн кожний.

а) $m\cdot 6+8+m$; б) $m\cdot 6+8\cdot n$; в) $6m\cdot 8n$.

**3) Визначити** серед рівнянь ті, які є рівносильними.

а) $3x-24=6$; в) $2x+x-12{,}5=17{,}5$;

б) $3x+26=-4$; г) $2(1{,}5x+9)=12$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Уміння розкривати дужки – це правильне застосування розподільної властивості множення, що сприяє правильному розв'язанню рівнянь. Тому важливо знати, що

$$c(a \pm b) = ca \pm cb \quad \text{та} \quad -c(a \pm b) = -ca \mp cb$$

**2** Особливі випадки множення:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \text{та} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

**3** Інколи трапляються «рівняння-пропорції», для яких можна застосувати основну властивість пропорції, – *добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх її членів*, – і у такий спосіб спростити процес розв'язування.

$$\text{Якщо } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } ad = bc.$$

### *Зауваж!*

***Рівність можна читати*** як зліва направо, так і справа наліво. Оскільки рівняння – це також рівність, то згадане правило справджується і для рівняння.

Якщо прочитати рівняння зліва направо і справа наліво, то отримаємо рівняння, які будуть рівносильними. Це твердження називають властивістю рівняння.

Наприклад, рівняння $7{,}5 = 5x + 4{,}5$ і $5x + 4{,}5 = 7{,}5$ – рівносильні *(перевір цей факт самостійно)*.

Отже, за допомогою певних перетворень можна з одного рівняння отримати інше, простіше, яке буде рівносильне початковому.

### *Зауваж! Це важливо!*

#### ВЛАСТИВОСТІ РІВНЯНЬ

**1** Якщо в рівнянні ***поміняти місцями ліву і праву частини***, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

**2** Якщо в будь-якій частині рівняння ***розкрити дужки або звести подібні доданки***, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

**3** Якщо в рівнянні ***перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний***, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

**4** Якщо ***до обох частин рівняння додати одне й те саме число*** або ***від обох частин рівняння відняти одне й те саме число***, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

**5** Якщо обидві частини рівняння ***помножити або поділити на одне й те саме, відмінне від нуля, число***, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

Ці п'ять властивостей є основними властивостями рівнянь та ***рівносильними перетвореннями***.

## *Тренувальні вправи*

Перевірити, які з поданих пар рівнянь є рівносильними (**1.18–1.19**).

**1.18°**. а) $-x+5=0$ і $5-x=0$; в) $2x-4=0$ і $4-2x=0$;
б) $2-x+2=0$ і $-x+2=0$; г) $4x-2=0$ і $2-4x=0$.

**1.19°**. а) $2x+12=0$ і $2x=-12$; в) $5x-10=0$ і $5x=10$;
б) $12-3x=0$ і $3x=12$; г) $9-3x=0$ і $3x=9$.

Вибрати пари рівнянь, у яких збережено рівносильність за властивістю множення або ділення його обох частин на одне й те саме, відмінне від 0, число (**1.20–1.21**).

**1.20°**. а) $7(x-3)=49$ та $x-3=7$; в) $\frac{2}{3}x=10$ та $2x=15$;
б) $9(x+1{,}5)=27$ та $x+1{,}5=3$; г) $\frac{3}{10}x=9$ та $3x=90$.

**1.21°**. а) $3(x+7)=81$ та $x+7=27$; в) $\frac{3}{4}x=6$ та $3x=24$;
б) $11(x-2)=132$ та $x-2=12$; г) $\frac{5}{8}x=3$ та $5x=24$.

Застосувати основні властивості рівнянь і вибрати ДВА рівняння серед (а–г), які рівносильні заданому (**1.22–1.23**).

**1.22°**. Маємо рівняння $3x-5=6x+22$. Рівносильними йому будуть:
а) $6x+22=3x-5$; в) $-5-22=6x-3x$;
б) $3x+6x=22-5$; г) $3x+6x=22+5$.

**1.23°**. Маємо рівняння $2(x-1{,}4)=1{,}2$. Рівносильними йому будуть:
а) $x-1{,}4=1{,}2$; в) $x=1{,}2+1{,}4$;
б) $x-1{,}4=1{,}2:2$; г) $x=1{,}2:2+1{,}4$.

**1.24°°.** Визначити рівняння, рівносильне рівнянню $43-(13-y)=6y+5$.

а) $43-13-y=6y+5$; в) $43-13-5=6y+y$;

б) $43-13+y=6y+5$; г) $43-13+5=6y-y$.

**1.25°°.** Визначити рівняння, яке не є рівносильним рівнянню $5-2(x+4)=19$.

а) $-2(x+4)=19-5$; в) $x+4=(19+5):(-2)$;

б) $(5-19):2=2(x+4):2$; г) $x+4=(5-19):2$.

**1.26°°.** Визначити, які з наведених рівнянь можна отримати внаслідок рівносильних перетворень рівняння $\frac{5}{7}x+7{,}25=x-2{,}75$.

а) $\frac{5}{7}x=x-2{,}75+7{,}25$; в) $5x=x-2{,}75-7{,}25$;

б) $7{,}25+2{,}75=x-\frac{5}{7}x$; г) $7x-5x=(7{,}25+2{,}25)\cdot 7$.

**1.27°°.** Визначити, які з рівнянь неможливо отримати внаслідок рівносильних перетворень рівняння $3x+123=\frac{3}{8}x+18$.

а) $3x+105=\frac{3}{8}x$; в) $x+35=\frac{1}{8}x$; д) $24x-3x=105$;

б) $3x+\frac{3}{8}x=105$; г) $8x+280=x$; е) $8x-x=-280$.

**1.28°°.** Записати рівняння, яке отримають після послідовного виконання запропонованих рівносильних перетворень рівняння $-0{,}5(x+10)=13-4x$:

1) поміняти місцями ліву і праву частини рівняння;
2) помножити обидві частини рівняння на $(-2)$;
3) перенести числовий доданок із лівої частини рівняння в праву;
4) відняти від обох частин рівняння доданок $x$;
5) поділити обидві частини рівняння на коефіцієнт перед змінною.

**1.29°°.** Придумати рівняння та скласти покроковий план його розв'язання, який передбачав би використання основних властивостей рівнянь.

**1.30°°.** Увідповіднити рівняння (1–4) з йому рівносильним (А–Д).

| *Рівняння* | *Рівносильне рівняння* |
|---|---|
| 1. $3x+1=x+3$ | А. $2x=-1$ |
| 2. $x+1=3x+3$ | Б. $2x=1$ |
| 3. $2+x=1+3x$ | В. $2x=2$ |
| 4. $1-3x=x+2$ | Г. $4x=-1$ |
| | Д. $2x=-2$ |

**1.31°°.** Увідповіднити рівняння (1–4) з йому рівносильним (А–Д).

| *Рівняння* | *Рівносильне рівняння* |
|---|---|
| 1. $4(x-3)=12$ | А. $x+3=-4$ |
| 2. $4(3-x)=12$ | Б. $x-3=4$ |
| 3. $3(x-3)=12$ | В. $x-3=-3$ |
| 4. $3(x-3)=-12$ | Г. $x-3=-4$ |
| | Д. $x-3=3$ |

Розв'язати рівняння та визначити серед них рівносильні (1.32–1.35).

**1.32•.** а) $3x-6,5=14,5$; в) $5x-12,3=27,7$;
б) $6x-10,2=49,8$; г) $4x-2,7=30,3$.

**1.33•.** а) $8-5x=26$; в) $7x+18=16x-9x+10$;
б) $4x-12=4(x-3)$; г) $x^2+6=-10$.

**1.34•.** а) $3x-8,5=5x+3,5$; в) $5x-12,3=9x+7,7$;
б) $6x-10,4=8x+7,6$; г) $4x-8,7=7x+1,3$.

**1.35•.** а) $8-5x=-3x+16$; в) $7x+16,2=3x-20,2$;
б) $4x-12,5=2x-16,5$; г) $9x+4,8=-18,2-x$.

**1.36•.** Навести по ТРИ приклади рівнянь, які зводяться до лінійних та:
а) мають безліч коренів; б) не мають жодного кореня.

**1.37•.** Знайти корінь рівняння:
а) $\frac{1}{3}(x+5)=10$; б) $1-\frac{1}{3}x=7$; в) $1+\frac{1}{3}(x-5)=5$.

**1.38•.** Довести, що число 1,5 є коренем рівняння:
а) $5x+3=6x+1,5$; в) $8-4x=2(3x-3,5)$;
б) $\frac{2}{3}x-2(2x-5)=4x-1$; г) $1\frac{5}{6}x-0,75=0,25(6x-1)$.

**1.39*.** Довести, що число 2,5 є коренем рівняння:

а) $4x+3=2(2x+1,5)$;

б) $-x-7(0,2x-0,5)=21-8x$;

в) $7-3x=5(2x-5,1)$;

г) $\frac{7}{25}x-0,3=\frac{4}{5}(3x-7)$.

Розв'язати рівняння (**1.40–1.41**).

**1.40*.** а) $3,4-x=-2(x-3,2)$;

б) $\frac{2}{3}x+11=20-\frac{5}{6}x$;

в) $14,8-2,5(x+4)=1,5x+22$;

г) $\frac{7,5-x}{6}=\frac{x+2,5}{2}$.

**1.41*.** а) $2,6-x=-2(x-1,8)$;

б) $\frac{1}{4}x+10=25-\frac{3}{8}x$;

в) $9,5-1,5(x+6)=3,5x+16$;

г) $\frac{10,5-x}{3}=\frac{x+4,2}{4}$.

**1.42*.** Критично оцінити процес розв'язування рівнянь.

| | |
|---|---|
| а) $4(2,5x+3)=4x-6;\ \vert:4$<br>$2,5x+3=x-1,5;$<br>$2,5x-x=-1,5-3;$<br>$1,5x=-4,5;$<br>$x=-4,5:1,5;$<br>$x=-3.$ | б) $4(2,5x+3)=4x-6;$<br>$10x+3=4x-6;$<br>$10x-4x=-6-3;$<br>$6x=-9;$<br>$2x=-3;$<br>$x=-1.5.$ |
| в) $\frac{5}{12}x-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}+\frac{7}{24}x;$<br>$\frac{5}{12}x-\frac{7}{24}x=\frac{5}{6}+\frac{4}{6};$<br>$\frac{3}{24}x=\frac{9}{6};\ \frac{1}{8}x=\frac{3}{2};$<br>$x=\frac{3}{2}:\frac{1}{8};$<br>$x=12.$ | г) $\frac{5}{12}x-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}+\frac{7}{24}x;\ \vert\cdot 24$<br>$10x-16=20+7x;$<br>$10x-7x=20+16;$<br>$3x=36;$<br>$x=12.$ |

Розв'язати рівняння (**1.43–1.44**).

**1.43**.** а) $\frac{x+0,3}{2}=\frac{3x-2,4}{4}$;

б) $\frac{x-6}{2}=\frac{7x-2,4}{6}$;

в) $\frac{x-9,6}{2}=\frac{x-9,3}{3}$;

г) $\frac{x-2,46}{3}=\frac{x-2,1}{5}$.

**1.44**.** а) $\frac{x-2}{6}+\frac{x-1}{15}=1-\frac{3-x}{12}$;

б) $\frac{3x-1}{3}+\frac{2x+5}{6}=\frac{x+2}{9}+7$.

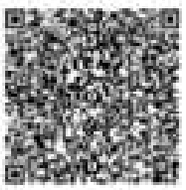
## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**1.45°.** Знайти відсоткове відношення коренів рівнянь

$$\frac{5(3x-1)}{8}-2=3 \quad \text{та} \quad 18y-8=15y+4$$

**1.46°.** Побудувати кластер розв'язання рівняння з модулем, яке зводиться до лінійного: а) $|x|=a$; б) $|x-k|=a$.

Самоперевірка



**1.47°.** Знайти значення $x$, для якого значення виразу $3(x-0{,}8)+2{,}4$ на 12,4 більше за значення виразу $7x-3(1{,}5x+4)$.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**1.48.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Рух річкою»*. Швидкість байдарки в стоячій воді дорівнює 10 км/год. Веслувальник проплив річкою на байдарці 60 км між двома пристанями за 5 год, а на зворотний шлях витратив на 2,5 год більше.

б) Задача *«Депозит у банку»*. Фермер відкрив у банку депозит і через рік отримав 6000 грн прибутку, що становить 12% річних від розміру депозиту.

в) Задача *«Ландшафтний дизайн»*. На центральній площі одного з обласних центрів України ростуть кущі червоних, жовтих і білих троянд. Семикласники й семикласниці порахували, що червоні троянди становлять $\frac{2}{5}$ від усіх кущів, жовті – $\frac{5}{8}$ решти, а білих троянд – 63 кущі.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 1.2. Властивості лінійних рівнянь з однією змінною. Розв'язування лінійних рівнянь та найпростіших рівнянь, які зводяться до лінійних».**



# §1.3 Навчальні задачі, що моделюються лінійним рівнянням з однією змінною або рівнянням, що зводиться до лінійного




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Хочу вміти застосовувати знання!»***.

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування навчальних задач – «чи ти можеш?» та навчимося їх моделювати лінійним рівнянням або рівнянням, що зводиться до лінійного.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** три позитивні зміни у своїх знаннях чи вміннях про властивості рівнянь.

**ПОЯСНИ** рівносильність трьох рівнянь:

1) $\frac{4}{7}x-9=2x+1$; 2) $\frac{4}{7}x=2x+10$; 3) $14x-4x=-70$.

**ЧОМУ** НЕ МАЄ коренів рівняння $1{,}5(2y+1{,}5)=7{,}25+3y$?

**ПРИДУМАЙ** таке рівняння, щоб загадане тобою число було його коренем.

**ПОДІЛИСЯ**, як ти плануєш розв'язувати рівняння

$$\frac{2}{3}x+1{,}2=\frac{1}{4}x+3{,}2.$$

**ЗАПРОПОНУЙ** свій спосіб моделювання ситуації: «Якщо до одного числа, яке удвічі менше за друге, додати 3, а від другого числа відняти 7, то отримані числа будуть рівними».

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

1) **Знайти** значення змінної, при якому рівними будуть вирази, які задано умовами:

а) $3x+47$ та $5x+33$; б) $8x-47$ та $-5x+33$;

в) $-3x-47$ та $-5x+33$.

**2) Обчислити** суму коренів для кожного з рівнянь (а–в):

а) $(0{,}5p-3)(5-0{,}5m)=0$; б) $(0{,}4-2k)(1{,}6+2k)=0$;

в) $(2{,}4-0{,}4m)(7{,}5-1{,}5m)=0$.

**3) Визначити** з-поміж рівнянь (а–г) рівносильні.

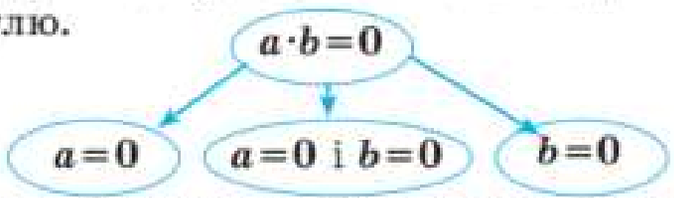
а) $-\frac{1}{4}x=-2$; б) $-\frac{2}{3}y=-6$; в) $1\frac{1}{3}x=2$; г) $3\frac{3}{4}x=30$.

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Прирівнюючи два вирази зі змінними, завжди отримують рівняння. Тому значення змінних, при яких ці вирази будуть рівними, – це розв'язки отриманого рівняння.

Добуток дорівнює нулю, коли хоча б один із множників дорівнює нулю.




**2** Інколи під час розв'язування рівнянь, зручно користуватися властивістю взаємно обернених чисел, адже добуток таких чисел дорівнює 1.

Якщо $c\neq 0$, $d\neq 0$, то числа $\frac{c}{d}$ і $\frac{d}{c}$ – **взаємно обернені.**

**3** Щоб знайти число, обернене до мішаного числа, його спочатку перетворюють у неправильний дріб.

Наприклад, $8\frac{1}{3}=\frac{3\cdot 8+1}{3}=\frac{25}{3}$, тоді $\frac{25}{3}$ і $\frac{3}{25}$ – взаємно обернені, $\frac{25}{3}\cdot\frac{3}{25}=1$.

### *Зауваж!*

Процес утворення рівняння з деякого твердження, наприклад: «...рівними будуть вирази, які задано умовами», називають ***моделюванням,*** а це рівняння – ***математичною моделлю*** ситуації.

***Математичне моделювання*** використовують як один із найзручніших та найефективніших засобів дослідження природи та навколишнього світу. Тобто задачі, які виникають у життєвих ситуаціях, переформульовують мовою математики (математичною термінологією) – *математично моделюють* задачі.

Отже, математичну модель реального об'єкта або деякого процесу можна подати у вигляді рівняння, формули, таблиці, діаграми, геометричної фігури, пропорції тощо.

У курсі алгебри спочатку описують реальні процеси та ситуації математичною мовою у вигляді моделей, а далі працюють вже безпосередньо з цими моделями.

***Зауваж! Це важливо!***

***Моделювання задачі у формі лінійного рівняння*** або рівняння, що зводиться до нього – це процес, під час якого:

1. аналізують умову задачі та визначають, що буде початковими даними, кінцевими та проміжними результатами;
2. уводять позначення для певних даних – змінну;
3. записують рівняння, яке пов'язує початкові дані з кінцевими результатами – ***математичну модель задачі***, та розв'язують його;
4. аналізують отримані результати та дають відповідь на запитання задачі.

Наприклад, задача *«Брати»*. Вік трьох братів 30, 20 і 6 років. Через скільки років вік старшого брата дорівнюватиме сумі віку обох молодших

*Розв'язання.* Через $x$ років старшому брату буде $(30 + x)$ років, середньому – $(20+x)$ років, а найменшому – $(6 + x)$ років. Однак, вік старшого брата дорівнює сумі віку обох молодших, маємо математичну модель задачі – рівняння:

$$(30+x)=(20+x)+(6+x).$$

$30+x=20+x+6+x$; $30+x=26+2x$; $30-26=2x-x$; $x=4$.

Отже, через 4 роки старшому брату виповниться 34 роки, середньому – 24 роки, а молодшому – 10 років, причому $34=24+10$ (умова задачі виконується).

*Відповідь:* 4 роки.

## *Тренувальні вправи*

Вибрати ДВА рівняння, що моделюють пропоновану задачу **(1.49–1.50)**, якщо через $x$ позначено одне з невідомих чисел.

**1.49°.** Відомо, що одне число удвічі більше за друге, а їхня сума дорівнює 1248.

а) $2\cdot 2x=1248$;
б) $x+2x=1248$;
в) $0{,}5x+x=1248$;
г) $2(x+x)=1248$.

**1.50°.** Одне число на 10 більше за друге, а їхня сума дорівнює 990.

а) $a+a+10=990$; в) $a-10+a=990$;

б) $(a+10)-a=990$; г) $a+10a=990$.

**1.51°.** Знайти менше число, якщо сума двох чисел, одне з яких менше від другого на 5, дорівнює 55.

**1.52°.** Знайти більше число, якщо сума двох чисел, одне з яких більше за друге на 4, дорівнює 104.

**1.53°.** Мати старша за дочку в 4 рази. Разом їм – 40 років. Вибрати рівняння, що моделює цю ситуацію.

а) $4x=40$; в) $x+x+4=40$;

б) $x+4x=40$; г) $x+x-4=40$.

**1.54°.** Знайти, скільки років мамі і скільки дочці, використовуючи умову задачі 1.53.

**1.55°°.** Скласти задачу, користуючись даними з таблиці, та змоделювати ситуації рівняннями. Записати в зошиті.

| Перше число, $a_1$ | $x$ | $2x$ | $x$ | $2x-9$ |
|---|---|---|---|---|
| Друге число, $a_2$ | $x+1$ | $x$ | $x-1$ | $x+9$ |
| Сума, $2a_1+a_2$ | 31 | 57 | 62 | 71 |
| Математична модель ситуації – рівняння | | | | |

**1.56°°.** Критично оцінити процес розв'язування задачі: «Скільки років мамі і скільки дочці, якщо мати старша за дочку на 24 роки, а разом їм 40 років?»

| а) Нехай дочці $x$ років, тоді мамі $(x+24)$ роки, а разом їм – 40 років. Математична модель – рівняння: $x+x+24=40$. $2x=40-24$; $x=16:2$; $x=8$, $x+24=8+24=32$. *Відповідь:* 32 р., 8 р. | б) Нехай мамі $x$ років, тоді дочці $(x-24)$ роки, а разом їм – 40 років. Математична модель – рівняння: $x+x-24=40$. $2x=40+24$; $x=64:2$; $x=32$. *Відповідь:* 32 р., 8 р. | в) Нехай мамі $x$ років, тоді дочці $(40-x)$, що на 24 роки менше, ніж мамі. Математична модель – рівняння: $x-(40-x)=24$. $x-24=40-x$; $x+x=40+24$; $x=64:2$; $x=32$. *Відповідь:* 32 р., 8 р. |
|---|---|---|

**1.57°°.** Син удвічі молодший від свого батька. Знайти, скільки років синові, якщо він молодший від батька на 22 роки.

**1.58°°.** Батько старший за доньку в 5 разів. Знайти, скільки років батькові, якщо він старший за доньку на 28 років.

**1.59°°.** Через 20 років Оленка буде втричі старша, ніж тепер. Знайти, скільки років Оленці тепер.

**1.60°.** Середнє арифметичне двох чисел дорівнює 15, а менше з них дорівнює 11. Знайти більше число.

**1.61°.** Середнє арифметичне двох чисел дорівнює 25, а більше з них дорівнює 37. Знайти менше число.

**1.62°°.** В Олега і Владислава разом 300 поштових марок. Поставте у відповідність кожній умові (1–4) кількість марок, які були у Владислава спочатку (А–Д).

| *Умова* | *Кількість марок спочатку* |
|---|---|
| 1. Олег віддав Владиславу 30 марок і марок у них стало порівну. | А. 180 |
| 2. Владислав віддав Олегу 50 марок і марок у нього стало удвічі менше | Б. 100 |
| 3. Олег віддав Владиславу 60 марок і марок у нього стало удвічі менше | В. 110 |
| 4. Владислав віддав Олегу 40 марок і марок у нього стало в 4 рази менше | Г. 120 |
| | Д. 150 |

**1.63°°.** Скільки гривневих купюр номіналом 100 грн і 200 грн було в гаманці, якщо разом їх 24, що складає 3500 грн.

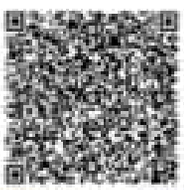
**1.64°°.** Тато із сином разом виготовили 60 спинок для стільців за 5 днів. Визначити, скільки спинок за день виготовляв син, якщо тато за день виготовляв на 2 спинки менше.

**1.65°°.** Мати з донькою разом сплели 56 українських віночків для дівчат ансамблю «Марічка». Донька плела за день на 2 віночки більше, ніж мати, і працювала 6 днів, а мати працювала 5 днів. Визначити, скільки віночків плела за день мати.

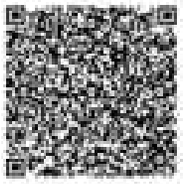
## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**1.66°°.** Морська вода містить 5% солі. Скільки прісної води треба додати до 15 кг морської, щоб морська вода містила:

а) 3% солі; б) 1,5% солі; в) 0,5% солі.



**1.67**.** Побудувати ментальну карту пошуку суми грошей Ґ (у грн) за наявності 18 купюр двох номіналів української валюти по $m$ грн і $n$ грн, не менших, ніж 10 грн.



## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**1.68.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Рух річкою»*. Відстань між двома пристанями – 54 км. Швидкість течії річки – 2,5 км/год. Моторний човен, пливучи 2 год за течією, подолав $\frac{4}{9}$ відстані між пристанями.

б) Задача *«Скільки?»*. У корчмі «Чичері» двом кумам Стецьку та Грицьку на вечерю запропонували: вареники – 6 видів, деруни – 4 види, м'ясні страви – 5 видів, напої – 8 видів.

в) Задача *«Бізнес»*. За 25 днів фірма планувала пошити 300 костюмів, однак щодня шили на $n$ костюмів більше, ніж планували.

г) Задача *«Оберіг воїну»*. Школярі й школярки виготовили більше ніж 230, але менше ніж 250 оберегів для воїнів ЗСУ. Коли вони розклали обереги в коробочки по 5 штук, то один оберіг залишився, а коли – по 3 штуки, то залишилося 2 обереги.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ: «Як ти?»*



**Аркуш «§ 1.3. Навчальні задачі, що моделюються лінійним рівнянням з однією змінною або рівнянням, що зводиться до лінійного».**

# §1.4 Компетентнісно орієнтовані задачі, що моделюються лінійним рівнянням з однією змінною або рівнянням, що зводиться до лінійного




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Старайся – і ти досягнеш успіху!»***.

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування компетентнісно орієнтованих задач – «чи ти можеш?» та навчимося їх моделювати рівняннями.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** три числа $n$, $n+2$, $n+4$ натурального ряду, якщо їхнє середнє арифметичне дорівнює 17.

**ПОЯСНИ,** як скласти задачу за її математичною моделлю:

$$x+(x+17)=53.$$

**ЧОМУ** саме менше з двох чисел зручніше позначати змінною під час математичного моделювання?

**ПРИДУМАЙ,** як знайти, скільки яблук продано з першого ящика, якщо у двох ящиках було по 30 кг, з першого продали вдвічі більше, ніж з другого, а залишок в обох ящиках разом склав 24 кг.

**ПОДІЛИСЯ,** як ти плануєш складати математичну модель до задачі: «Ціна ручки становить 20 % від ціни пеналу, а разом ручка з пеналом коштують – 84 грн».

**ЗАПРОПОНУЙ** свій спосіб знаходження значення $k$, якщо рівняння $2(x-4)=5x-53$ та $x-3k=24$ – рівносильні.

Самоперевірка і самооцінювання тут:

Ширше про запитання Кубика Блума тут:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

1) **Знайти,** як зрівняли кількість дітей у двох групах, якщо відомо, що з групи, в якій було дітей вдвічі більше, перейшло в меншу групу: а) 5 дітей; б) 7 дітей; в) 9 дітей; г) 10 дітей.

2) **Обчислити** добуток коренів рівнянь

$$\left(\frac{2}{3}x-3\right)\left(5-\frac{5}{6}x\right)=0 \text{ та } \left(\frac{2}{5}-2x\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}x\right)=0.$$

3) **Увідповіднити** умову (1–4) та вираз (А–Г), яким можна замінити «зірочку» в рівнянні $3x+5=x+*$.

| *Умова* | *Вираз* |
|---|---|
| 1. Коренем рівняння є число 0 | А. $3x-5$ |
| 2. Коренем рівняння є число не 0 | Б. $2x+5$ |
| 3. Рівняння має безліч коренів | В. $2x-5$ |
| 4. Рівняння не має коренів | Г. $3x+5$ |

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Створюючи математичну модель до задачі 1 на дослідження важливо проявити спостережливість. Так, позначивши через $x$ кількість дітей у менш численній групі, отримують $2x$ дітей у більш численній групі. Відтак виконують переведення дітей з однієї групи в іншу та записують рівняння, з якого одразу можна отримати значення $x$.

**2** Незмінними залишаються твердження: «Добуток дорівнює нулю, коли хоча б один із множників дорівнює нулю» та «Добуток взаємно обернених чисел дорівнює 1».

**3** Бувають випадки, коли чітко треба прийняти рішення щодо кількості коренів рівняння. Такі випадки підпорядковуються правилу: на нуль ділити не можна. Якщо «$0x=1$», то жодного кореня, однак рівність «$0x=0$» правильна при будь-якому значенні змінної, отже, матимемо безліч коренів. В усіх інших випадках – єдиний корінь.

| **ПРИКЛАДИ** | | |
|---|---|---|
| **$0x=17$** | **$0x=0$** | **$2x=5$** |
| жодного кореня | безліч коренів | один корінь |

*Зауваж!*

*Математична задача* – це будь-яка вимога обчислити, перетворити, побудувати або дещо довести методами математики.

*Розв'язування математичної задачі* – це процес встановлення (знаходження) зв'язків між даними величинами, між даними

та шуканими величинами, формулювання цих зв'язків мовою математики у вигляді арифметичних дій, виконання послідовності дій для знаходження числового значення шуканої величини.

*Навчальна задача* – засіб формування деякого загального способу розв'язання шляхом переходу думки від окремого до загального під час розв'язування окремих задач.

*Мета розв'язування задач* – не тільки отримання відповіді, а й опанування процесом та способом її пошуку. Тому надзвичайно важливим є заключний етап роботи над задачею – аналіз, дослідження й осмислення одержаної відповіді.

## *Зауваж! Це важливо!*

***Текстова (сюжетна) задача*** – відображення ситуації, близької до життєвої, практичної, у якій описується кількісний аспект реального явища, події і міститься вимога знайти невідоме значення деякої величини. Кожний вид текстових задач має певні загальні підходи в розв'язанні.

***Компетентнісно орієнтовані*** – це задачі з різних галузей діяльності людини, які потребують від неї вміння використовувати набуті знання на практиці. Така задача може містити в умові надлишкові дані. Розв'язання компетентнісно орієнтованої задачі полягає у вирішенні деякої життєвої стандартної або нестандартної ситуації із застосуванням математичних компетентностей та знань, умінь і навичок, які отримано із різних джерел та з інших предметних галузей.

Наприклад, компетентнісно орієнтованою є задача, що популяризує ментальне здоров'я школярів та школярок, бо ґрунтується на знаннях з математики.

*Задача.* Вітаміни беруть участь у більш, ніж 100 000 процесів, які відбуваються в організмі людини. Зокрема, вітамін С є особливим, адже йому не властиво синтезуватися (накопичуватися) в організмі, а тому він має надходити в організм щоденно з їжею або у вигляді вітамінних добавок відповідно до норми за віком і статтю. Рекомендована добова норма вітаміну С для хлопчиків віком 10–14 років, отже, і для семикласників, складає 75 мг.

Забезпечити свій організм добовою нормою вітаміну С семикласник може, наприклад, з'ївши 17,5 % від 1 кг свіжої або квашеної білокачанної капусти.

Знайти (у грамах та міліграмах), скільки білокачанної капусти потрібно з'їсти семикласнику Семену, щоб задовольнити добову потребу свого організму у вітаміні С.

## *Тренувальні вправи*

**1.69°.** Загальна площа лісів в Україні 94 тисячі квадратних кілометрів, а на Землі – 38 мільйонів квадратних кілометрів (близько однієї третини всієї Землі). Ліси України щорічно з атмосфери поглинають 206 000 000 тонн вуглекислого газу і виділяють 149 000 000 тонн кисню. Відомо, що 10 га ялинового деревостану затримує за місяць 2,486 тонни пилу, сажі й кіптяви.

а) Визначити, скільки пилу, сажі і кіптяви затримують 10 га цього деревостану за рік. Відповідь округлити до цілих.

б) Обчислити, скільки зайвого пилу, сажі і кіптяви отримає атмосфера упродовж року (скільки шкоди буде нанесено екології), якщо вирубати 3,5 га здорового ялинового лісу. Відповідь округлити до десятих.

**1.70°.** Важкий ранець та ранець без ортопедичної спинки негативно впливають на осанку школярів / школярок. Тому бажано заповнювати ранець лише потрібними речами, навіть більше – домовлятися з однокласниками / однокласницями – співпрацювати в партнерстві.
Повний ранець семикласниці Соломійки важить у 5 разів більше, ніж порожній. Визначити вагу порожнього ранця, якщо його вага разом з речами Соломійки – 9 кг.

**1.71°°.** Сашко переглянув список нових слів з англійської мови, які він мав вивчити, і розпланував їх засвоєння на 10 днів. Його здатність виявилася продуктивнішою, і він щодня вивчав на 3 слова більше, тому виконав план за 8 днів. Визначити, скільки нових слів з англійської мови вивчив Сашко.

**1.72°°.** Оленка вирішила потренуватися в розв'язуванні задач. Для цього обрала збірник та спланувала в кожний із 12 днів розв'язувати з нього однакову кількість задач. Проте щодня вона розв'язувала на 1 задачу менше, тому виконала заплановане на 2 дні пізніше. Визначити, скільки задач розв'язала Оленка.

**1.73°.** Кожний автомобіль має певні характеристики. Зокрема, існує обмеження на максимальну масу вантажу (вантажопідйомність), яке не можна порушувати.
Щоб завезти 22 т гравію для новобудови, господар замовив у транспортній компанії два автомобілі, перший з яких за рейс перевозить на 0,5 т більше, ніж другий.

а) Визначити вантажопідйомність кожного автомобіля, якщо перший виконав 4 рейси, а другий – 6 рейсів.

б) Обчислити загальні транспортні витрати господаря на доставку гравію, якщо оренда кожного автомобіля коштувала 850 грн, а витрати пального склали 28 літрів, вартість 1 л якого – 53 грн.

в) Дослідити, чи можливо за однакову кількість рейсів обох автомобілів перевезти 27 т гравію.

**1.74*.** Земельна ділянка прямокутної форми межує з цегляним житловим будинком, тому огороджена лише з трьох сторін. Довжина огорожі – 32 м.

а) Знайти виміри ділянки, якщо її ширина на 4 м менша від довжини, а межа з будинком пролягає по ширині ділянки.

б) Знайти виміри ділянки, якщо її довжина на 2 м більша за ширину, а межа з будинком проходить по довжині ділянки.

в) Визначити, скільки 25-грамових пакетиків насіння календули потрібно придбати, щоб вистачило засіяти всю ділянку, якщо рекомендована норма висіву становить 2 г/м² (2 грами насіння – на 1 м² площі).



**1.75**.** Критично оцінити процес розв'язання задачі: «Господарі на городі прямокутної форми, розміри якого 20 м×35 м, посадили одну грядку редьки, одну – огірків, а решту городу – засадили квасолею. Знайти, яку площу займатиме квасоля, якщо площі грядок із редькою, огірками та квасолею відповідно пропорційні числам 9, 16, 150».

*Розв'язання.*

| | |
|---|---|
| а) Нехай $k$ – коефіцієнт пропорційності, тоді площі грядок<br>із редькою – $9k$ м²,<br>із огірками – $16k$ м²,<br>із квасолею – $150k$ м²,<br>а разом – 700 м²<br>(20 м × 35 м = 700 м²).<br>Математична модель – рівняння:<br>$9k+16k+150k=700$.<br>$175k=700$;<br>$k=700:175$;<br>$k=4$.<br>$9k=36$, $16k=64$, $150k=600$.<br>*Відповідь:* 600 м². | б) Нехай $k$ – коефіцієнт пропорційності, тоді<br>$9k$ м², $16k$ м² і $150k$ м² – відповідно площі грядок із редькою, огірками та квасолею,<br>що разом складає 700 м²<br>(20 м × 35 м = 700 м²).<br>Математична модель – рівняння:<br>$9k+16k+150k=700$.<br>$175k=700$;<br>$k=700:175$;<br>$k=4$.<br>$150k=600$.<br>*Відповідь:* 600 м². |

**1.76*.** Обчислити, за умовою задачі 1.75, скільки вторгують господарі за зібраний урожай квасолі, що склав 700 г/м², якщо 10 кг вони залишать для себе, а решту продадуть за гуртовою ціною – 105 грн/кг.



**1.77**•• Сім'я Дмитра щотижня складає меню для здорового і корисного харчування, плануючи витрати на закупівлю продуктів. На ринку батько Дмитра купив моркву, цибулю, буряк і картоплю загальною вагою 15 кг.



а) Визначити, скільки овочів кожного виду купив батько, якщо вага моркви, цибулі, буряка і картоплі відповідно пропорційна числам 5, 6, 8 та 11.

б) Обчислити, скільки батько Дмитра заплатив за придбані овочі, якщо 1 кг моркви коштував 10 грн, цибулі – 15 грн, буряка – 12 грн, картоплі – 14 грн.

**1.78**•• Фірма, яка виграла тендер на капітальний ремонт доріг, зобов'язалася в 4-тижневий термін оновити асфальтове покриття на ділянці автошляху завдовжки 80 км. Менеджер фірми, який моніторить виконання робіт, у кінці третього тижня зазначив, що за перший тиждень фірма оновила покриття найменшої довжини, проте за другий тиждень оновлено на 5,7 км більше, ніж за перший, а за третій – на 5 км менше, ніж за другий. Залишилося оновити – 18,1 км.



а) Визначити, скільки км автошляху оновлено за три тижні разом.

б) Знайти, скільки днів орієнтовно знадобиться фірмі, щоб так само оновити покриття на ділянці завдовжки 100 км цього самого автошляху. (Урахувати, що неділя – вихідний день).

**1.79**•• Відомо, що верба добре відфільтровує воду від усіляких домішок. Її коріння довге та міцне, тому вона не боїться ані хвиль, ані повені. У природі верба укріплює береги річок і ставків.



а) Уздовж берега місцевої річки висадили живці верби у два ряди однакової довжини. У тому, що ближче до річки, висадили 37 живців на відстані один від одного на 50 см меншій, ніж 28 живців у другому ряду. Визначити, яку довжину берега річки зайняли ці живці.

б) У народному господарстві з вербових прутиків (лози) плетуть кошики. Визначити, який дохід (у гривнях) отримає Іван упродовж одного тижня від продажу кошиків, якщо на їх плетіння пішло 15 кг лози, на один кошик іде 0,75 кг лози, ціна кошика – 180 грн, а тижневе мито базару складає 300 грн.

**1.80**•• Українська фабрика «Трембіта», виконуючи замовлення італійських бізнесменів, упродовж трьох тижнів мала пошити 5600 чоловічих костюмів. У перший тиждень виконали 30 % замовлення, а в другий тиждень було пошито на 280 костюмів більше, ніж у третій.

а) Визначити, на скільки більше костюмів було пошито за третій тиждень, ніж за перший.

б) Обчислити прибуток фабрики в найбільш результативний робочий тиждень з виконання замовлення для італійців, якщо ціна костюма 4500 грн, загальні витрати на його пошиття – тканина, зарплата працівників, податки та інше – склали 92,3 % від вартості усіх пошитих за три тижні костюмів.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**1.81**•• Абрикос – солодкий ніжний фрукт, що містить бета-каротин, фосфор, калій, вітаміни групи В і є джерелом вітаміну А, що так необхідні для здоров'я шкіри, волосся, слизових оболонок та нормалізації зору людини. Сухофрукт абрикоса (курага) містить значно вищу концентрацію згаданих цілющих речовин. Відомо, що з 25 кг свіжих абрикосів отримали 7 кг кураги. Заповнити в зошиті таблицю кількісного співвідношення між свіжими абрикосами і курагою.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Кількість свіжих абрикосів (у кг) | 2,5 | | 150 | | 1200 | |
| Кількість кураги (у кг) | | 10,5 | | 63 | | 560 |

**1.82**•• Під час випікання чорного хліба припічка становить 44 % від маси борошна.

а) Заповнити в зошиті таблицю співвідношення між масами борошна та випеченого з нього чорного хліба.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Кількість борошна (у кг) | 25 | | 175 | | 900 | |
| Кількість чорного хліба (у кг) | | 72 | | 1080 | | 2160 |

б) Обчислити, скільки вторгує пекарня за продаж 2,16 т випеченого хліба, якщо буханець масою 0,5 кг коштує 28,5 грн.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**1.83.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Мужні воїни»*. За 2 дні українські сапери розмінували 160 га території, звільненої від окупантів, причому першого дня вони розмінували на 36 га більше, ніж другого.

б) Задача *«Мій власний банк»*. У Михайла є 3100 грн різними купюрами. Серед них кілька купюр номіналом 50 грн, кількість купюр по 200 грн складає 40 % від кількості 50-гривневих купюр, а решта – купюри по 100 грн – становлять $\frac{5}{8}$ від кількості 200-гривневих купюр.

в) Задача *«Українська нива»*. За два дні трактористи підготували під посів 140 га поля, причому першого дня вони зорали на 30 га більше, ніж другого.

г) Задача *«Чисте повітря»*. На сьогодні в світі близько 400 млн автомобілів. Один автомобіль щороку в середньому викидає в повітря близько 10 кг гуми, поглинає близько 4800 кг кисню та забруднює повітря, викидаючи 3200 кг вуглекислого газу.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*



**Аркуш «§ 1.4. Компетентнісно орієнтовані задачі, що моделюються лінійним рівнянням з однією змінною або рівнянням, що зводиться до лінійного».**

# §1.5 Задачі на рух, що моделюються лінійним рівнянням із однією змінною або рівнянням, що зводиться до лінійного




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Уважними на дорозі будьте та правил руху не забудьте!»***.

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування задач на рух – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про їх моделювання рівнянням, що зводиться до лінійного.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** рекомендований час твого сну для нормального розвитку, який обчислюють за формулою $t = 16 - \frac{N}{2}$, де $N$ – вік дитини до 18 років.

**ПОЯСНИ,** як точно порахувати час, який у жовтні витратив Юрко на чищення зубів, якщо він проводив цю процедуру двічі на день по 3 хв, а у вихідні – по 5 хв.

**ЧОМУ** рівняння $x + 2x = 148$ може бути моделлю до задачі: «148 грн заплатила мати за квитки до Національного музею космонавтики імені Сергія Корольова, які вона придбала для себе і двох своїх дітей».

**ПРИДУМАЙ,** як змоделювати ситуацію: «У кожного з трьох сусідів – по три кішки, кожна з яких народила по троє кошенят. Скільки котів можуть згодом прогулюватися біля їхнього будинку?».

**ПОДІЛИСЯ,** як виправити ситуацію, щоб можна було визначити відстань між Ігорем та Іваном, якщо вони бігли 10 с назустріч один одному по прямій зі швидкостями 4 м/с і 6 м/с.

**ЗАПРОПОНУЙ,** як знайти довжину товарного поїзда, швидкість якого 90 км/год, якщо повз Оксану, яка стояла на місці, поїзд проїхав за 10 секунд.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

*Задача.* Друзі Ігор та Іван, що живуть на одній прямій вулиці, побачили один одного на відстані 60 метрів. Ігор бігає зі сталою швидкістю 4 м/с, а Іван – 6 м/с.

**1) Знайти,** через скільки секунд:

а) Іван підбіжить до Ігоря, якщо Ігор стоятиме на місці;

б) Ігор підбіжить до Івана, якщо Іван стоятиме на місці;

в) хлопці зустрінуться, якщо вони одночасно побіжать назустріч один одному.

**2) Обчислити** відстань, яка буде між хлопцями, якщо вони одночасно рушать у протилежних напрямах, через 1 хв? 2 хв? 5 хв?

**3) Визначити,** яка відстань буде між хлопцями через 10 секунд, якщо:

а) Ігор почне тікати, а Іван одразу почне його наздоганяти;

б) Іван почне тікати, а Ігор одразу почне його наздоганяти.

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Відстань, швидкість і час взаємопов'язані між собою формулою $s = v \cdot t$, звідки $v = \frac{s}{t}$, $t = \frac{s}{v}$, де

*$s$ – відстань, $v$ – швидкість руху, $t$ – час на подолання цієї відстані.*

**2** Відстань, швидкість і час – величини, які характеризують рух. Зокрема: **відстань** – вказує на довжину шляху, який подолав рухомий об'єкт за певний час у сантиметрах (см), метрах (м), кілометрах (км) тощо; **час** – за скільки секунд (с), хвилин (хв), годин (год) тощо об'єкт руху подолав певну відстань; **швидкість** – який шлях подолав рухомий об'єкт за одиницю часу – метрів за секунду (м/с), кілометрів за годину (км/год), метрів за хвилину (м/хв), метрів за секунду (м/с) тощо.

**1 км = 1000 м**
**1 год = 60 хв**
**1хв = 60 с**

**3** Перетворювати одні одиниці вимірювання в інші. Наприклад, якщо ракета летить 6 км/с, то за 1 хвилину вона пролетить у 60 разів більше, тому швидкість – 360 км/хв, за 1 годину – у 3600 разів більше, тому її швидкість – 21 600 км/год.

***Зауваж!***

У кожному транспортному засобі для вимірювання швидкості є спеціальний прилад – спідометр.

**Основна одиниця довжини в метричній системі – метр** (одна сорокамільйонна частина довжини земного меридіана, який проходить через Париж). Інші міри довжини дістали назви від латинських (деци, санти, мілі) і грецьких (дека, гекто, кіло) числівників. ***Метрична система мір*** – система вимірювання, заснована на метрі як мірі довжини та кілограмі (грамі) як мірі маси. Зокрема, метричною є Міжнародна система SI, яка є найуживанішою системою одиниць для вимірювання та розрахунків у різних галузях науки, техніки тощо.

***Зауваж! Це важливо!***

**Види текстових задач на рух:**

1. **рух із одного пункту в одному напрямку одночасний і з перервою в часі** *(навздогін і з відставанням);*
2. **рух із одного пункту в протилежних напрямках** *(одночасно і з перервою в часі);*
3. **рух із різних пунктів назустріч один одному** *(одночасно і з перервою в часі);*
4. **рух із різних пунктів в одному напрямку** *(навздогін і з відставанням).*

$$s = v \cdot t$$

***Моделювання задач на рух у формі лінійного рівняння*** або рівняння, що зводиться до нього, – це процес, під час якого визначають:

1) що відомо (перелік початкових даних);
2) що треба знайти (перелік потрібних результатів);
3) який зв'язок між величинами (математичні співвідношення, що пов'язують початкові дані і результати);
4) які є обмеження на дані (умови допустимості початкових даних).

## *Тренувальні вправи*

**1.84°.** Постійні швидкості двох спортсменок, які тренуються на деякій спортбазі, – 6 км/год та 8 км/год. 1) Вранці обидві спортсменки одночасно вирушають з бази і рухаються в одному напрямку. 2) Пополудні спортсменка, швидкість якої менша, виходить із бази на 10 хвилин раніше, ніж інша. Указати правильні висновки для ситуацій 1) і 2):

а) відстань між спортсменками зменшується;

б) відстань між спортсменками збільшується;

в) існує швидкість зближення спортсменок;

г) існує швидкість віддалення спортсменок.

**1.85°.** Заповнити таблицю в зошиті, використовуючи формулу відстані.

| Відстань, $s$ | 140 км | 120 | | 750 м | |
|---|---|---|---|---|---|
| Час, $t$ | | 3 год | 2 год | 6 хв | $x$ с |
| Швидкість, $v$ | 28 км/год | | 32 км/год | | 12 м/с |

Вибрати ДВА рівняння, що моделюють ситуацію в задачах **(1.88–1.89)**.

**1.86°.** Два автомобілі одночасно вирушили з одного паркінгу Києва в протилежних напрямках. Швидкість одного з них була на 15 км/год більша за швидкість другого. Через 3 год відстань між ними стала 465 км.

а) $3x+3\cdot 15=465$;

б) $3x+3(x+15)=465$;

в) $3x+3x+15=465$;

г) $3x+3(x-15)=465$.

**1.87°.** Відстань між двома містами, рухаючись на власних автівках Назар проїхав за 3,5 год, а Орест – за 4 год. Назар їхав із постійною швидкістю на 10 км/год більшою, ніж Орест.

а) $3{,}5(x+10)=4x$;

б) $4x-10=3{,}5x$;

в) $3{,}5x+10=4x$;

г) $3{,}5x=4(x-10)$.

**1.88°°.** Знайти відстань між містами, якщо якщо на мотоциклі її можна подолати за 1,2 год, а на тракторі – за 1,5 год, і швидкість мотоцикла на 15 км/год більша, ніж швидкість трактора.

**1.89°°.** Швидкість тракториста більша від швидкості велосипедистки на 4 км/год. Тракторист долає шлях між селами за 36 хв, а велосипедистка – за 45 хв. Знайти відстань між селами.

**1.90°°.** Іван і Василь живуть у центрах сусідніх територіальних громад A і B. Іван ходить пішки з A в B, витрачаючи на дорогу 3 год, а Василь цією самою дорогою їздить на велосипеді й витрачає на 1 год 24 хв менше. Знайти швидкості Василя та Івана, якщо швидкість руху Василя на велосипеді на 4,2 км/год більша за швидкість Івана.

**1.91°°.** Критично оцінити процес розв'язування задачі: «Маршрутний автобус подолав відстань від міста Чернівці до міста Львів за 5 год, а на зворотний шлях тією самою дорогою

витратив на 0,5 год менше. Визначити швидкість автобуса на маршруті від Чернівців до Львова, якщо вона на 8 км/год менша від швидкості на зворотному шляху».

*Розв'язання.*

а) Нехай $x$ км/год – швидкість автобуса під час руху з міста А в місто В, тоді за 5 год він подолає шлях завдовжки $(5x)$ км.

Його швидкість на зворотному шляху – $(x + 8)$ км/год,

час – 4,5 год $(5 - 0{,}5 = 4{,}5)$ і шлях $4{,}5(x + 8)$ км.

Проте довжина маршруту автобуса туди і назад однакова.

Отже, отримуємо рівняння:

$5x = 4{,}5(x + 8)$.

$5x = 4{,}5x + 36$;

$0{,}5x = 36$;

$x = 72$.

***Відповідь:*** **72 км/год.**

б) Нехай довжина маршруту автобуса $x$ км $(AB = BA = x)$. Тоді його швидкість з міста А в місто В становить $\frac{x}{5}$ км/год, а швидкість на зворотному шляху $\frac{2x}{9}$ км/год $\left(\frac{x}{5-0{,}5} = \frac{x}{4{,}5} = \frac{2x}{9}\right)$, що на 8 км/год більше.

Математична модель – рівняння:

$$\frac{2x}{9} - \frac{x}{5} = 8.$$

$$\frac{10x - 9x}{45} = 8;\ x = 45 \cdot 8;\ x = 360.$$

$360 : 5 = 72$ (км/год).

***Відповідь:*** **72 км/год.**

**1.92*.** Із двох міст, відстань між якими – 270 км, одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі. Через 2 год відстань між ними стала 30 км. Знайти швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість одного з них на 10 км/год більша за швидкість другого.

**1.93*.** Із двох міст, відстань між якими дорівнює 500 км, виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. Через 3 год відстань між ними стала 125 км. Знайти швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість одного з них на 15 км/год менша за швидкість другого.

**1.94**.** Відстань між містами Ворзель і Васильків 64 км. Із Ворзеля до Василькова виїхали одночасно два автомобілі. Швидкість одного з них була на 16 км/год більша, ніж швидкість другого, тому він прибув до Василькова на 12 хв раніше, ніж другий автомобіль. Знайти швидкість кожного автомобіля.

**1.95**.** Із Снятина одночасно виїхали й одночасно прибули до Луцька два автомобілі. Перший їхав зі сталою швидкістю, а другий – перші 2 год їхав зі швидкістю на 6 км/год меншою від швидкості першого автомобіля, а решту шляху – упродовж 3 год – зі швидкістю на 4 км/год більшою. Знайти відстань між Снятином і Луцьком.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**1.96••.** Зі Львова до Києва, відстань між якими – 520 км, виїхав поїзд, а через годину назустріч йому з Києва виїхав інший поїзд, який за годину долав на 4 км більше, ніж перший. Поїзди зустрілися через 4 год після виїзду іншого поїзда з Києва. Знайти швидкість кожного поїзда.

**1.97••.** Турист, рухаючись з міста до гірського села, вибрав маршрут завдовжки 45 км. Частину шляху він їхав на велосипеді, а решту – йшов пішки. Відомо, що на велосипеді він їхав 2,5 год, а пішки йшов на 1 год 15 хв довше. Знайти швидкість руху туриста на велосипеді, якщо за 1 год пішки він долає на 8 км менше, ніж проїжджає на велосипеді.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**1.98.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Рух річкою»*. Швидкість човна в стоячій воді дорівнює 22,5 км/год. Човен проплив шлях між двома пристанями за течією річки за 1,2 год, а на зворотний шлях витратив 1,5 год.

б) Задача *«Улюблені онуки»*. Дідусь старший за свого онука в 4 рази, а онучка на 3 роки молодша від свого брата. Якби дідусь був роком молодший, то був би старшим за свою онучку в 5 разів.

в) Задача *«Семикласники й семикласниці»*. У школі є три сьомих класи. У 7-А класі навчається 33 дітей. Кількість дітей у 7-Б становить 32 % від усієї кількості семикласників та семикласниць школи, а в 7-В навчається на 3 дітей більше, ніж у 7-Б.

г) Задача *«Вода – джерело життя»*. Біля приватного будинку стоять дві бочки – ялова і дубова, по 100 л кожна. У яловій бочці є 20 л дощової води, а в дубовій – на 5 л менше. Під час дощу в ялову бочку щохвилини наливалося 2 л води, а в дубову – 2,5 л.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 1.5. Задачі на рух, що моделюються лінійним рівнянням з однією змінною або рівнянням, що зводиться до лінійного».**

# § 1.6* Дослідження та розв'язування лінійних рівнянь із параметром




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Будь з параметром на «Ти», щоб корені будь-якого рівняння міг/могла ти знайти».***

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» застосувати знання та вміння для рівнянь, які потребують дослідження, ознайомишся з новими підходами до аналізу ситуацій.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** ТРИ таких рівняння, які точно мають корені.

**ПОЯСНИ,** коли виникає ситуація, що рівняння не має коренів.

**ЧОМУ** рівняння $x+3x+5x-a=5x-a$ має єдиний корінь?

**ПРИДУМАЙ,** як знайти, яких значень може набувати $a$, щоб рівняння $(a-1)x=0$ мало безліч коренів.

**ПОДІЛИСЯ** вміннями досліджувати, яких значень може набувати $a$, щоб число 1 було коренем рівняння $(a-1)x=5$.

**ЗАПРОПОНУЙ** характеристику «поведінки» рівняння $(a-5)x=10$ для будь-якого значення $a$.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

1) **Знайти** значення $a$, при якому рівняння $ax=35$:
   а) має корінь, що дорівнює 5;
   б) має корінь, що дорівнює 0,2;
   в) коренів не має.

2) **Обчислити** суму будь-яких коренів рівняння $(a-2)x=0$ при $a=2$.

3) **Визначити** усі цілі значення $a$, при яких корінь рівняння $ax=-15$ є цілим числом.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

1. Рівняння має свою характеристику, якщо в ньому з'являється деяке «біжуче» число $a$, яке може як завгодно змінюватися. Надаючи йому певного значення, отримують рівняння, яке матиме або не матиме коренів.
2. Коли коренем рівняння є будь-яке число, то коренів – безліч.
3. Якщо рівняння лінійне і його вільний член відмінний від нуля, то корінь рівняння може бути цілим або дробовим числом.

### *Зауваж!*

***Лінійним рівнянням з параметром*** називають рівняння вигляду $\boldsymbol{ax+b=0}$, де $x$ – невідоме число, $a$, $b$ – деякі параметри.

Таке рівняння було досліджено раніше.

Розглянемо приклад лінійного рівняння з параметром $ax-27=0$. Тоді, очевидно, що для параметра можуть бути різні ситуації, зокрема:

1) якщо $a=0$, то рівняння коренів не має;

2) якщо $a\neq 0$, то рівняння має єдиний корінь $x=\dfrac{27}{a}$.

Наприклад, якщо $a=27$, то $x=1$, якщо $a=-27$, то $x=-1$.

Вибираючи певне значення параметра $a$, отримують відповідний йому корінь рівняння.

### *Зауваж! Це важливо!*

Нехай $a$ – кількість голів у кролів і фазанів разом, а $b$ – кількість їхніх ніг. Якщо кролів було $x$, то фазанів – решта – $(a-x)$, тоді ніг у кролів – $4x$, а у фазанів – $2(a-x)$. А разом у них $b$ ніг.

Математична модель ситуації – рівняння $\boldsymbol{4x+2(a-x)=b}$.

$4x+2a-2x=b$; $2x=b-2a$; $x=0{,}5b-a$.

Отже, кількість кролів: $-0{,}5b-a$. Тоді кількість фазанів:

$$(a-x)=a-(0{,}5b-a)=a-0{,}5b+a=2a-0{,}5b.$$

Ось так виникають задачі з параметрами – шляхом дослідження.

Маючи математичну модель – рівняння з параметром, легко знайти розв'язки до ситуації. Якщо $a=15$, $b=42$, то $x=6$ – кількість кролів, а кількість фазанів: $a-x=9$. У такий спосіб отримують частковий випадок загальної задачі. Але, якщо $a=30$, $b=50$, то $x=-5$, що неможливо.

## *Тренувальні вправи*

**1.99°.** Знайти всі натуральні значення $n$, при яких натуральним числом є корінь рівняння:

а) $nx=5$; в) $nx=12$;

б) $nx=6$; г) $nx=24$.

**1.100°°.** Знайти всі натуральні значення $n$, при яких натуральним числом є корінь рівняння:

а) $(n-1)x=5$; в) $(n+3)x=5$;

б) $(n-3)x=6$; г) $(n+4)x=6$.

**1.101°°.** Знайти всі цілі значення $m$, при яких є цілим числом корінь рівняння:

а) $mx=9$; в) $(m+4)x=3$;

б) $(m+2)x=10$; г) $(m-1)x=-7$.

**1.102°°.** Знайти всі цілі значення $a$, при яких корінь рівняння $ax=-8$ є натуральним числом.

**1.103•.** Знайти, при якому значенні $a$ мають один і той самий корінь рівняння:

а) $2x+3=3x-5$ і $2x+3a=3ax-5a$;

б) $4x-5=2x+3$ і $9x+2a=2ax+6a$.

**1.104•.** Знайти, при якому значенні $a$:

а) коренем рівняння $3ax=42$ є число 7;

б) рівняння $(a-3x)=6$ не має коренів;

в) рівняння $(a+2)x=0$ має безліч коренів.

**1.105•.** Склади математичну модель до задачі: «Купили кілька однакових ручок, за які заплатили 120 грн. Відомо, що ціна ручки є цілим числом. Якою може бути кількість ручок?»

**1.106••.** Знайти, при якому значенні $a$ не має коренів рівняння:

а) $ax=5$; в) $(a+3)x=5$;

б) $(a-3)x=6$; г) $(a-4)x=a+4$.

**1.107**••. Знайти, при якому значенні $a$ будь-яке число є коренем рівняння:

а) $ax=0$; в) $(a-1)x=a-1$;

б) $ax=a$; г) $(a-4)x=4-a$.

**1.108**••. Знайти, при якому значенні $a$ має єдиний корінь рівняння:

а) $ax=7$; в) $(a-5)x=6$;

б) $ax=$ a; г) $(a+1)x=1+a$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**1.109.** Розв'язати рівняння $2ax-4=8a$. Чи може це рівняння мати безліч розв'язків?

**1.110.** Критично оцінивши процес розв'язування рівняння $2x+3=2x-5$, визначити, при яких значеннях параметра $a$ рівняння $2ax+3a=2ax-5a$ матиме безліч розв'язків.

Самоперевірка 1.109

Самоперевірка 1.110

**1.111.** Розв'язати рівняння відносно змінної $x$.

а) $5ax-a=ax+a$;

б) $2a-3ax=2ax+12a$.

**1.112.** Розв'язати рівняння:

а) $3ax+2a=2ax+6a$, $a\neq0$;

б) $3ax+2a=2ax+6a$, $a=0$;

в) $7ax+5a=7ax+6a$, $a\neq0$.

# Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми «ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ»

*Знати – це означає насамперед уміти користуватися знаннями*
(Василь Сухомлинський)

Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Я знаю, що успіх приходить до того, хто його прагне!»***.

Сьогодні не Кубик Блума буде допомагати тобі діагностувати, «чи ти знаєш?», «чи ти вмієш?» і «чи ти можеш?», а ти сам/сама формуватимеш свою «Я – особистість!» шляхом самостійної перевірки своєї доброчесності та власної діяльності.

**Завдання 1. Вправа: «Постав собі «*», якщо так».**

**І. Перевір свою доброчесність**

- ✓ Чи виконував/виконувала **Я** всі завдання домашньої роботи?
- ✓ Чи розв'язав/розв'язала **Я** домашні завдання самостійно?
- ✓ Чи пробував/пробувала **Я** перевіряти свої вміння хоча б після одного уроку?
- ✓ Чи вів/вела **Я** облік: «знаю», «хочу дізнатися», «дізнався(лася)»?
- ✓ Чи запланував/запланувала **Я** навчатися краще, ніж це було вчора?

**ІІ. Запитання для самоконтролю власної діяльності**

**1)** Чи розумію **Я**, яке рівняння є лінійним?

**2)** Чи вирізняю **Я** коефіцієнти в лінійному рівнянні?

**3)** Чи знаю **Я**, що лінійне рівняння може мати єдиний корінь, безліч або не мати жодного?

**4)** Чи вирізняю **Я** ситуацію, коли рівняння не має коренів?

**5)** Чи знаю **Я**, які рівняння називають рівносильними?

**6)** Чи знаю **Я** основні властивості рівнянь?

**7)** Чи вмію **Я** визначати рівносильність рівнянь, якщо їх більше двох?

**8)** Чи вмію **Я** правильно виконувати рівносильні перетворення рівнянь?

**9)** Чи вмію **Я** розв'язувати лінійні рівняння та ті, що зводяться до лінійних?

**10)** Чи вмію **Я** моделювати найпростіші текстові задачі лінійним рівнянням або рівнянням, що зводиться до лінійного?

**11)** Чи розумію **Я**, що навчальні задачі складають основу для формування вміння розв'язувати компетентнісно орієнтовані задачі?

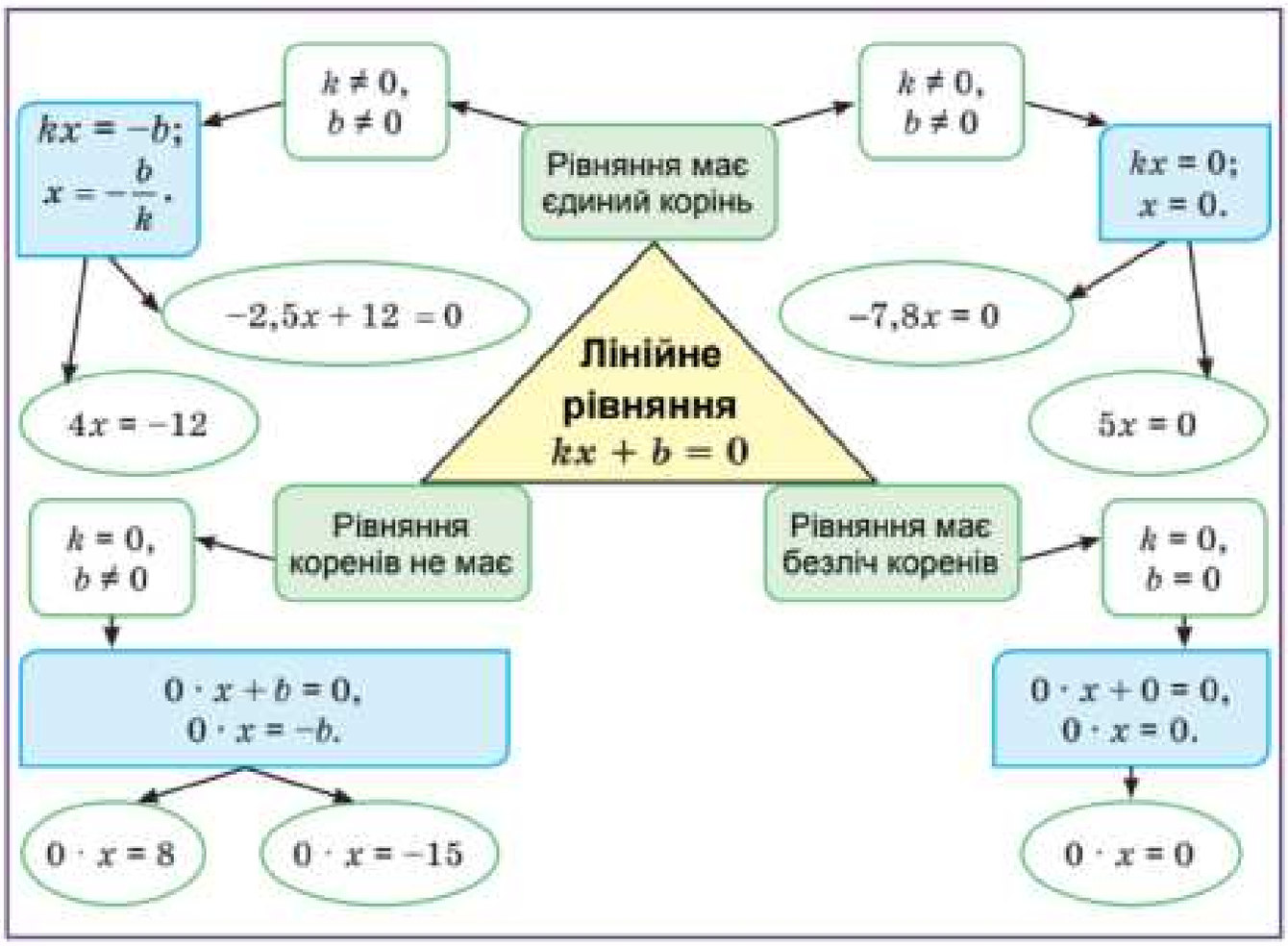
**12)** Чи вирізняю **Я** ситуації наявності швидкостей зближення і віддалення у задачах на рух?

Зроби висновок: «Як Ти?». Чи можеш собі сказати: «Тепер **Я** усвідомлюю, що можу, хочу і буду вчитися!».

Похвали себе, якщо ти «Молодець!»

**Завдання 2.** Розглянь інтелектуальну карту з теми «Лінійні рівняння» та схему створення математичної моделі до задачі та склади власні.

## ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА КАРТА «ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ»




Інтелектуальна карта

## СХЕМА СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДО ЗАДАЧІ




Схема створення математичної моделі

### *Тренувальні вправи*

**1.113°.** Розв'язати рівняння:

а) $5x-7=13$; в) $7x+32=12x+27$;

б) $18-3y=6$; г) $4-3y=6y+32$.

**1.114°.** Два брати, Дмитро і Руслан, посадили саджанці волоського горіха, висотою 1 м кожний. Саджанець Дмитра щороку підростав на 7 см більше, ніж саджанець Руслана, і через 3 роки став заввишки 3,1 м. Визначити, якої висоти сягатимуть дерева кожного з братів через 5 років; 10 років; 20 років.

**1.115°°.** Розв'язати рівняння та вибрати серед них рівносильні:

а) $2(x+0{,}6)=5x-7{,}8$; в) $2x-4{,}5=-5(x-3{,}3)$;

б) $-4(x+6{,}2)=8x-12{,}8$; г) $6x+10{,}4=-4(x-5{,}1)$.

**1.116°°.** Троє майстрів та майстринь приватного цеху машинної вишивки жіночих і чоловічих сорочок прийняли замовлень на п'ять днів, однак змогли щодня вишивати на 3 сорочки більше, а тому виконали замовлення за чотири дні.

а) Визначити, скільки сорочок вишила кожний / кожна майстер / майстриня, якщо їхня продуктивність праці однакова.

б) Обчислити, яка зарплата у цих майстрів / майстринь за 24 робочі дні, якщо продуктивність праці однакова,

а вартість роботи за одну вишиту сорочку – 250 грн, не враховуючи ПДВ, що складає 0,2 від загальної суми.

(ПДВ – обов'язковий платіж, форма податку, який сплачується державі з кожної проданої речі або послуги).

**1.117°°.** Микола проїхав на велосипеді із міста Сторожинець до селища Глибоке за 1 год 20 хв, а повертаючись назад, збільшив швидкість на 1 км/год і тому витратив на 5 хв менше. Знайти, з якою швидкістю їхав Микола із міста Сторожинець до селища Глибоке, і яка відстань між цими населеними пунктами.

**1.118°.** Розв'язати рівняння:

а) $2(x-11)-5(5-2x)=-23$; в) $8(4-3x)+13(2x+3)=1$;

б) $3x-5(4x+3)=12(3-x)$; г) $0,5x-1,7=0,1(2x-5)$.

**1.119°.** Ганнуся придбала в магазині цукерки по 168 грн/кг та печиво по 124 грн/кг, заплативши на касі 98 грн. Знайти, по скільки грамів солодощів узяла Ганнуся, якщо вона має знижку від магазину в розмірі 2% від вартості придбаного товару.

**1.120°.** Фарфор складається з білої глини, кварцового піску і польового шпату, маси яких пропорційні числам 25, 2, 1. Визначити, скільки треба білої глини, щоб виготовити 700 г фарфору.

**1.121°°.** Холодний фарфор можна виготовити, взявши клей ПВА, крохмаль, вазелінове масло або гліцерин, та застосувати певні технології підігріву цієї маси. Визначити, скільки треба взяти крохмалю, щоб виготовити 280 г холодного фарфору, якщо маси його складників відповідно пропорційні числам 12, 15, 1.

**1.122°°.** Розв'язати рівняння:

а) $\frac{x-1}{5}+\frac{x-2}{3}=\frac{30-x}{15}$; в) $\frac{x+1}{6}-\frac{x-2}{8}-\frac{x-3}{12}=0,25$;

б) $\frac{x-3}{2}-\frac{2x+1}{6}=\frac{11x+4}{9}$; г) $\frac{x-1}{4}+\frac{x+4}{3}-\frac{29-x}{15}=10,2$.

**1.123°°.** Автомобіль мав подолати шлях завдовжки 140 км за 2 год. Деяку частину шляху він їхав зі швидкістю 60 км/год, а на решті шляху збільшив швидкість на 15 км/год. Визначити, яку відстань проїхав автомобіль зі швидкістю 60 км/год, якщо відомо, що до місця призначення він прибув вчасно.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**1.124.** Місячний прибуток приватної підприємницької фірми NatDim у жовтні склав на 0,11 млн грн менше, ніж у вересні, і на 0,29 млн грн менше, ніж у листопаді, а за три осінні місяці прибуток склав – 7,15 млн грн. Фірма щомісяця перераховує 20 % прибутку до бюджету держави – сплачує податок. Визначити, на скільки більше податку сплатила фірма у листопаді, ніж у жовтні.

**1.125.** Сушена вишня – один із найкорисніших продуктів для дітей. Вона має бактерицидні властивості, які допоможуть в разі вірусних захворювань. За рахунок наявності в ній заліза поліпшується склад крові, а високий вміст фруктози забезпечить заряд енергії на тривалий час.

Відомо, що з 20 кг свіжих вишень отримали 3 кг сушених. Заповнити в зошиті таблицю кількісного співвідношення свіжих і сушених вишень.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Кількість свіжих вишень (у кг) | 10 | | 130 | | 1200 | |
| Кількість сушених вишень (у кг) | | 4,5 | | 24 | | 540 |

**1.126.** Узагальнити отриману інформацію з теми «Лінійні рівняння» у формі вірша **«Сенкан»** за такими правилами:

1. *Перший рядок – **тема** (іменник).*
2. *Другий – **опис теми** (два прикметники).*
3. *Третій – **назва дії**, пов'язаної з темою, складається з трьох дієслів.*
4. *Четвертий рядок – **фраза**, переважно з 4-х слів, висловлює ставлення до теми, почуття.*
5. *П'ятий рядок – одне слово – **синонім до слова (теми)**, ніби висновок вірша.*

(**«Сенкан»** – це неримований вірш, що складається з п'яти рядків (слово «сенкан» походить від французького слова «п'ять»), які формулюють складне і об'ємне декількома словами за допомогою певних правил).

Приклад сенкана

*Те, що я встиг пізнати, – чудово.*
*Сподіваюся, таке ж чудове те,*
*Що мені ще доведеться пізнати.*

Сократ

# ТЕМА 2. | Цілі вирази. Одночлени

У цій темі ти **працюватимеш** із виразами, **ознайомишся** з їхніми видами, розглянеш їх місце в цілому «колі їхніх друзів», **навчишся** вирази класифікувати, із громіздких **перетворювати** на простіші, інакше кажучи, спрощувати, а відтак – ще й обчислювати значення цих виразів для певних значень змінних.

Тепер ти частіше будеш використовувати слова **«цілий»**, **«ціле»** не лише для яблука, кавуна, параграфа, числа, а й для **виразів**, з якими працюватимеш у 7 класі на уроках алгебри, геометрії, фізики тощо. Нехай тебе не дивує слово **«стандартний»**, яке траплятиметься тобі в підручнику, адже зазвичай його використовують у побуті. Це слово знадобилося й математикам для зручного запису великого числа або виразу зі змінними. А також **розумітимеш**, наскільки зручно подавати добутки у вигляді **степеня**.

А ще навчишся **моделювати** задачі цілими раціональними виразами, що допоможе тобі їх розв'язати й впевнено підніматися сходинками свого успіху.



# §2.1 Числові вирази та вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Тотожність




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання:

***«Завзятість – кольчуга мудреців!»*** (Платон).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про вирази.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**ПРИДУМАЙ**

як коротко записати «від суми двох послідовних натуральних чисел відняли 1».

**НАЗВИ**

будь-які три числа, для яких значення виразу $\frac{18}{a-5}$ буде натуральним числом.

**ПОЯСНИ**

важливість правильної послідовності виконання дій: $100+2\cdot 670-256:4$.

**ЧОМУ**

вираз при будь-яких значеннях змінної не може перетворитися на рівняння, а рівняння – на вираз?

**ЗАПРОПОНУЙ**

зручний спосіб розв'язування рівнянь: $0{,}125x-7=0$ та $\frac{1}{8}y=12{,}5$.

**ПОДІЛИСЯ**

своїми вміннями пошуку значення $a$, якщо $\frac{a-1}{2}+\frac{a-1}{3}=20$.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** $x$, якщо:

а) $(0{,}02+0{,}1+0{,}005)\cdot x=-2$; б) $x\cdot(1{,}2-0{,}85-0{,}1)=13$;

в) $(0{,}0625\cdot x)\cdot 8=0{,}5$.

**2) Обчислити** зручним способом значення кожного з виразів, якщо $m=12$:

а) $2{,}25m+7{,}75m$; б) $1\frac{1}{2}m+2\frac{5}{6}m+3\frac{2}{3}m$;

в) $17{,}44m-43{,}16m+125{,}72m$.

**3) Визначити,** використовуючи дані таблиці, яких значень набуватимуть відстань і час, якщо автомобіль рухатиметься з постійною швидкістю 80 км/год.

| $v$, км/год | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$, год | | 5 | | $t$ | | $2t$ | $0{,}5t$ |
| $s$, км | 240 | | $8s$ | | $20s$ | | |

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Для додавання (віднімання) десяткових дробів з різною кількістю десяткових знаків потрібно цю кількість знаків зрівняти, дописавши відповідну кількість нулів праворуч останньої цифри після коми.

$$0{,}02+0{,}10+0{,}005=0{,}100+0{,}020+0{,}005=\mathbf{0{,}125.}$$

**2** Записувати деякі десяткові дроби у вигляді звичайних і навпаки, звичайні – у вигялді десяткових.

$$0{,}5 \quad -; \quad 0{,}25=\frac{1}{4}; \quad 0{,}125=\frac{1}{8}; \quad 0{,}0625=\frac{1}{16}.$$

**3** Властивості додавання, віднімання і множення, які використовують для спрощення виразів.

$$1{,}2-0{,}85-0{,}1=1{,}2-(0{,}85+0{,}10)=1{,}20-0{,}95=\mathbf{0{,}25.}$$

**4** Формула, яка пов'язує між собою відстань $s$, швидкість $v$ і час $t$:

$$s=v\cdot t.$$

***Зауваж!***

Терміни «вираз», «числовий вираз», «буквений вираз» тобі знайомі.

***Числовий вираз*** – це вираз, що містить числа, знаки арифметичних дій і дужки. Окремо взяте число – це також числовий вираз. Наприклад, $-\frac{5}{6}+\frac{1}{5}$; $125-2^2$; 100 – числові вирази.

Число, яке одержують у результаті виконання дій у числовому виразі, називають *значенням виразу*.

Наприклад, 121 – значення числового виразу $125-2^2$.

***Виразом зі змінними*** називають вираз, який містить числа, змінні, знаки арифметичних дій і дужки.

Наприклад, $-\frac{5x}{6}$; $5x^2-2x$; $\frac{x+y}{x-y}$; $-7y$; $5(m+2{,}5)$ – вирази зі змінними.

Вирази зі змінними також використовують для запису формул. Наприклад,

$s=v\cdot t$ – формула відстані;

$S=a\cdot b$ – формула площі прямокутника;

$S=a^2$ – формула площі квадрата зі стороною завдовжки $a$;

$V=a\cdot b\cdot c$ – формула об'єму прямокутного паралелепіпеда;

$V=a^3$ – формула об'єму куба.

***Зауваж! Це важливо!***

Числові вирази та вирази зі змінними називають ***раціональними*** або ***алгебраїчними***.

Алгебра навчає спрощувати громіздкі вирази, тобто перетворювати їх на більш прості за допомогою відповідних правил, властивостей арифметичних дій та формул.

Вирази, які не містять ділення на вираз зі змінними, називають ***цілими раціональними виразами***, або просто ***цілими***.

Наприклад, $\frac{a-1}{5}$; $m+2$; $4(x+y)$; $\frac{2}{3}n$ – цілі вирази. Тому усі числові вирази також є цілими.

А от вирази $\frac{1}{5x}$; $\frac{x+y}{x-y}$ – не є цілими, бо містять змінну (змінні) в знаменнику, тобто містять ділення на вираз зі змінною.

Вирази, які містять ділення на вираз зі змінною, називають ***дробовими раціональними виразами***, або просто ***дробовими***.

**У 7 класі ти працюватимеш лише з цілими виразами!**

## *Тренувальні вправи*

**2.1°.** Вибрати два цілих вирази серед запропонованих:

а) $2a\cdot 5{,}5:c$; в) $7{,}5x-y^2$;

б) $\frac{1}{6}b+3a$; г) $(2k-1):(1-k)$.

**2.2°.** Вибрати два дробових вирази серед запропонованих:

а) $\dfrac{2x-10y+5z}{20}$;

б) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{7}$;

в) $\dfrac{2}{9}y-\dfrac{1}{3}y^2+1$;

г) $\dfrac{2x}{3-y^2}+15$.

**2.3°.** Навести приклади цілих і дробових раціональних виразів (заповнити таблицю в зошиті).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Цілі вирази | | | | |
| Дробові вирази | | | | |

**2.4°.** Перевірити, чи є число 0 значенням виразу:

а) $5-y-3$, якщо $y=2$;

б) $3y+\dfrac{1}{2}y+2$, якщо $y=2$;

в) $1\dfrac{1}{2}x+5-9$, якщо $x=4$;

г) $x^2-5-11$, якщо $x=4$.

**2.5°.** Навести три приклади цілого раціонального виразу, який не містив би ані звичайних, ані десяткових дробів.

**2.6°°.** Знайти значення виразів, використовуючи подані в таблиці значення змінної, та заповнити таблицю в зошиті.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $0{,}2$ | $1$ | $2$ | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5x-4$ | | | | | | | |
| $4-5x$ | | | | | | | |

**2.7°°.** Поставити у відповідність кожному цілому раціональному виразу (1–4) його значення (А–Д) для $a=3$, $b=4$.

| *Вираз* | *Значення виразу* |
|---|---|
| 1. $a^2-b^2$ | А. 25 |
| 2. $a^2+b^2$ | Б. 1 |
| 3. $(a-b)^2$ | В. $-7$ |
| 4. $(a+b)^2$ | Г. 49 |
| | Д. 7 |

**2.8°°.** Поставити у відповідність кожному цілому раціональному виразу (1–4) його значення (А–Д) для $p=-3$, $q=5$.

| *Вираз* | *Значення виразу* |
|---|---|
| 1. $7-2p+q$ | А. 9 |
| 2. $\frac{2}{5}q+4-p$ | Б. 6 |
| 3. $-5p+7-q$ | В. 3 |
| 4. $p^2-16+2q$ | Г. 18 |
| | Д. 17 |

Записати у вигляді цілого раціонального виразу **(2.9–2.10)**.

**2.9°°.** а) Суму числа 9 та виразу $x^2$;
б) частку від ділення суми 9 і $x$ на 5;
в) різницю виразів 4 і $(b+c)$;
г) добуток виразів $0{,}5x$ і $(1-x)$.

**2.10°°.** а) Півсуму виразів $2x$ і $3y$;
б) квадрат суми виразів $a$ і 5;
в) різницю квадратів виразів 12 і $b$;
г) квадрат різниці виразів 4 і $5c$.

Знайти серед поданих виразів той, значення якого не залежить від значення змінної **(2.11–2.12)**.

**2.11°.** а) $2(3-3{,}5m)-20+17m$;
б) $2{,}8n-2(4{,}2-1{,}4n)$;
в) $6{,}8k+2(3{,}6k+3{,}4)$;
г) $-(3{,}6x+1)-(-3{,}6x+2)$.

**2.12°.** а) $4(2-2{,}5a)-20+12a$;
б) $2{,}5b-5(9{,}6-0{,}5b)$;
в) $6(3c-1)-2(9c+2{,}1)$;
г) $-(1{,}5q+2)-(1{,}5q+5)$.

**2.13°.** Критично оцінити процес спрощення виразу $4{,}5-(6-1{,}2m)$ та обчислення його значення для $m=-2{,}5$.

а) $4{,}5-(6-1{,}2m)=4{,}5-6-1{,}2m=-1{,}2m+(4{,}5-6)=$
$=-1{,}2m-1{,}5=-0{,}3(4m+5)$.
Якщо $m=-2{,}5$, то $-0{,}3(4m+5)=-0{,}3(4\cdot(-2{,}5)+5)=$
$=-0{,}3(-10+5)=-0{,}3(-5)=1{,}5$.

б) $4{,}5-(6-1{,}2m)=4{,}5-6+1{,}2m=1{,}2m+(4{,}5-6)=1{,}2m-1{,}5=$
$=0{,}3(4m-5)$.
Якщо $m=-2{,}5$, то $0{,}3(4m-5)=0{,}3(4\cdot(-2{,}5)-5)=0{,}3\cdot(-15)=-4{,}5$.

в) Якщо $m=-2{,}5$, то $4{,}5-(6-1{,}2m)=4{,}5-(6-1{,}2\cdot(-2{,}5))=$
$=4{,}5-(6-3)=4{,}5-6+3=7{,}5-6=1{,}5$.

Скласти математичну модель – вираз до задачі (2.14–2.15).

**2.14°.** Від гімназії надійшло замовлення на $a$ автобусів по 17 місць та $b$ автобусів – по 18 місць у кожному для екскурсії до Кам'янець-Подільської фортеці. Знайти, скільки гімназистів і гімназисток може поїхати на цю екскурсію. Обчислити кількість гімназистів і гімназисток, які відвідали фортецю, якщо для поїздки задіяли 3 автобуси по 17 місць і 2 автобуси по 18 місць, причому вільних місць в автобусах не було.

**2.15°.** Поле розбили на дві частини. Площа першої частини – $m$ га, а другої – $n$ га. З кожного гектара першої частини фермер зібрав по 24 ц пшениці, а з кожного гектара другої частини – по 25,5 ц. Знайти, скільки пшениці зібрав фермер з усього поля. Обчислити, скільки пшениці зібрав фермер, якщо $m = 50$ га, $n = 100$ га.

**2.16°°.** Обчислити значення виразу $10(a + b)(b - a)$, якщо:

а) $a = 0{,}1$; $b = 0{,}2$;

б) $a = 0$; $b = 1{,}5$;

в) $a = -2{,}4$; $b = 2{,}6$;

г) $a = b = -4$.

**2.17°°.** Відомо, що $m + n = 8$, $k = -2$. Знайти значення виразу:

а) $m + n + k$;

б) $3k(m + n)$;

в) $m - k + n$;

г) $8(m + n) - 2k$.

**2.18°°.** Відомо, що $m + n = 4$, $a - b = 6$. Знайти значення виразу:

а) $(a - b)(m + n)$;

б) $5m + 5n - a + b$;

в) $7a + 6m - 7b + 6n$;

г) $(m + n)2 + (a - b)^2$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**2.19°°.** Скласти формулу числа, яке:

а) кратне числу 3;

б) кратне числу 3 і є парним;

в) кратне числу 3 і є непарним.



**2.20°°.** Порівняти значення виразів $x^2 + 2xy + y^2$ і $(x + y)^2$, якщо:

а) $x = -2$, $y = 5$

б) $x = 3$, $y = -5$

в) $x = 0$, $y = 0{,}4$

г) $x = -3$, $y = 3$



**2.21*.** Довести, що різниця, у якій зменшуване містить $a$ сотень $b$ десятків $c$ одиниць, а від'ємник – $c$ сотень $b$ десятків $a$ одиниць, буде ділитися на 9, на 11 і на 99.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**2.22.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Рух річкою»*. Швидкість катера в стоячій воді дорівнює 20 м/год, а швидкість течії річки – 2 км/год. Рейс туди і назад катер здійснює за 3 год.

б) Задача *«Школа Піфагора»*. Коли Піфагора запитали, скільки учнів у його школі, він відповів так: «Половина всіх моїх учнів вивчають математику, чверть – музику, сьома частина – мовчать і, крім того, ще є три жінки».

в) Задача *«Довжини»*. Мотузку завдовжки 84 м розрізали на дві частини, одна з яких утричі довша за іншу. Потім більшу частину розрізали на дві частини, одна з яких удвічі довша за іншу. А потім більшу частину, яку отримали з попереднього розрізання, розрізали у відношенні 2 : 5.

г) Задача *«Торгівля»*. Власник магазину аксесуарів для мобільних телефонів мав у продажу 100 чохлів для смартфонів та вирішив на 25 % підвищити на них ціну. Проте протягом тижня жодного чохла ніхто не купив, тому він вирішив знизити нову ціну на 25 %.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 2.1. Числові вирази та вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Тотожність».**

Перевір себе
«Як ти?»

# §2.2 Тотожні перетворення виразів




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання:

***«Не кажи «не вмію», а кажи «навчуся!»».***

Сьогодні Кубик Блума знову допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до завдань – «чи ти можеш?» відрізняти числові вирази від виразів зі змінними та здобудемо нових знань про те, як перевірити, чи є вирази тотожно рівними.

**Отже, шість завдань від Кубика Блума:**

**НАЗВИ** число, що дорівнює значенню виразу $4(x+y)-3(x-y)$, якщо $x=7{,}5$; $y=2{,}5$.

**ПОЯСНИ** правильність твердження:

«$\frac{1}{3}+2x-(2x-y):2xy$ – не є цілим раціональним виразом».

**ЧОМУ** вирази $6x-2{,}5x+0{,}5x-4$ та $2(x-1)+2x-2$ – рівні?

**ПРИДУМАЙ**, як записати виразом твердження: «потроєний добуток виразів $2x$ і $5y$».

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями записувати твердження, що містять слова: «півсума», «піврізниця», «подвоєний добуток», «потроєна частка».

**ЗАПРОПОНУЙ** зручний для тебе спосіб обчислення значення виразу $\frac{1}{4}\left(8-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{5}$.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** значення виразів для $x=-4$.

а) $4{,}6+2(x-1{,}3)$; б) $7-3(x-5)$;

в) $18x-4x-12x-8{,}5+8{,}5$.

**2) Обчислити** відношення $m:n$, якщо

$m-8=13+3m$ та $2(3n-7)=2n+6$.

**3) Визначити,** чи є серед виразів (а–г) ті, що рівні виразу $2x-5$.

а) $3x-24+x+19$; в) $2x+x-12+17$;

б) $3x+6-x-11$; г) $2(x+4)+5$.

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Складати й обчислювати відношення – це наші вміння повсякдень – «оце є, а оце має бути».

**2** У більшості випадків значення виразу обчислюють після того, як вираз спрощено. Однак іноді можна не виконувати спрощення, а одразу обчислювати.

Наприклад, якщо $x=-4$, то $7-3(x-5)=7-3(-9)=7+27=34$.

**3** Часто буває, що для спрощення виразів потрібно розкривати дужки – вміння правильно застосовувати розподільну властивість множення. Вона є дуже важливою в математиці, тепер ти її застосовуватимеш в алгебрі. Отже, носи цей кейс, не втомлюючись:

$$c(a \pm b) = ca \pm cb \quad \text{та} \quad -c(a \pm b) = -ca \mp cb$$

### *Зауваж!*

Вирази, відповідні значення яких рівні для будь-яких значень змінних, називають ***тотожно рівними*** (або ***тотожними***) ***виразами***.

Наприклад, тотожно рівними (тотожними) є вирази $a+3a$ та $4a$.

Вирази $12{,}8+9x-4{,}8$ та $9x-6{,}3+14{,}3$ також тотожно рівні, адже $12{,}8+9x-4{,}8=4x+8$ та $9x-6{,}3+14{,}3=4x+8$.

*Заміну виразу іншим, йому тотожно рівним, називають* ***тотожним перетворенням*** (або просто ***перетворенням***) ***виразу***.

Наприклад, відомі перетворення – розкриття дужок, зведення подібних доданків – це тотожні перетворення виразів.

Якщо два вирази тотожно рівні, то між ними можна записати знак «=». Отриману рівність називають ***тотожністю***.

Наприклад, зі згаданих вище тотожно рівних виразів можна утворити тотожності $a+3a=4a$ та $12{,}8+9x-4{,}8=9x-6{,}3+14{,}3$.

### *Зауваж! Це важливо!*

Деякі тотожності є очевидними. Наприклад, $a+b=b+a$.

Якщо тотожність не є очевидною, то вона потребує доведення.

Довести тотожність можна за допомогою тотожних перетворень, застосувавши один із таких способів:

**1** *перетворити ліву частину до вигляду правої;*

**2** *перетворити праву частину до вигляду лівої;*

**3** *перетворити ліву і праву частини тотожності до отримання одного й того самого виразу;*

**4** *записати різницю обох частин і довести, що вона дорівнює нулю.*

Наприклад, доведемо тотожність

$$0{,}4y-0{,}6(y-4)+2(-1+0{,}1y)+0{,}6=1.$$

*Доведення.* Оскільки права частина тотожності є числом, то перетворимо ліву її частину: $0{,}4y-0{,}6(y-4)+2(-1+0{,}1y)+0{,}6=$ $=0{,}4y-0{,}6y+2{,}4-2+0{,}2y+0{,}6=-\cancel{0{,}2y}+\cancel{0{,}2y}+0{,}4+0{,}6=1.$

Отримали вираз, що дорівнює правій частині: $1=1$. Отже, ліва і права частини є тотожно рівними виразами, а це означає, що задана в умові рівність є тотожністю. *Доведено.*

## Тренувальні вправи

Перевірити, чи є рівності тотожностями (**2.23–2.26**).

**2.23°.** а) $4-x+2=6-x$; в) $2-x=x-2$;
б) $4-12+x=8-x$; г) $2x+5-7=2x-7$.

**2.24°.** а) $5-2x+7=2-2x$; в) $9-4x=4x-9$;
б) $7-12+3x=5-3x$; г) $5x+3-9=5x-6$.

**2.25°.** а) $4(m-n)=4n+m$; в) $2(x-4)=2x+8$;
б) $4-(x+1)=-x+5$; г) $3(x-2)=3x-6$.

**2.26°.** а) $3(m-n)=3m+n$; в) $2(3{,}5+x)=7-2x$;
б) $6+x-2{,}5=x+3{,}5$; г) $4(2{,}5+x)=10+4x$.

Записати тотожність, якщо задано її ліву частину (**2.27–2.28**).

**2.27°°.** а) $7(2x-3)-11$; в) $12-5(x-2)$;
б) $6(x+1{,}5)+2$; г) $3-4(2x-2{,}5)$.

**2.28°°.** а) $\frac{2}{3}(6x-3)+3x$; в) $\frac{2}{5}(5x-15)+8x$;
б) $\frac{3}{10}(10x-25)+4x$; г) $\frac{3}{8}(8x-24)+2x$.

**2.29°°.** Маємо вираз $(5-2x)-(3x-7)$. Знайти йому тотожно рівний серед виразів:
а) $x-2$; б) $-2-5x$; в) $12+5x$; г) $12-5x$.

**2.30°°.** Маємо вираз $(3x-7)-(3-5x)$. Знайти йому тотожно рівний серед виразів:
а) $8x-10$; б) $-8x-4$; в) $10-8x$; г) $8x-4$.

**2.31°°.** Заповнити в зошиті таблицю значень виразів.

| $x$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | 2 | $-1$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2(4x-1)+3$ | | | | | | | |
| $8x+1$ | | | | | | | |

**2.32°°.** Перевірити за допомогою числових значень, чи є вирази $2(4d-1)+3$ та $8d+1$ тотожно рівними. Якщо так, то скласти відповідну тотожність і довести її.

**2.33°°.** Визначити пари тотожно рівних виразів.

а) $2x+4$ та $2(2+x)$;

б) $\frac{2m+6}{2}$ та $m+6$;

в) $3(a+3)$ та $a+9$;

г) $2(m-x)$ та $2m-2x$.

**2.34°°.** Вибрати серед виразів (а–г) той, що тотожно рівний числу 5.

а) $(7-x)-(-2-x)$;

б) $(7-x)-(2-x)$;

в) $(x+7)+(x-2)$;

г) $-(x-7)-(-x-2)$.

**2.35•.** Скласти довільну тотожність та довести її.

**2.36•.** Увідповіднити вираз (1–4) з йому тотожним (А–Д).

| *Вираз* | *Тотожний вираз* |
|---|---|
| 1. $(x-4)+2{,}5(2x+4)$ | А. $5(x+1)$ |
| 2. $-3(4x+6)-(8x+2)$ | Б. $2(x+1)$ |
| 3. $2(4-x)-(-7x+3)$ | В. $6(x+1)$ |
| 4. $6(-x-4)-(4x-14)$ | Г. $-20(x+1)$ |
| | Д. $-10(x+1)$ |

**2.37•.** Увідповіднити вираз (1–4) з йому тотожним (А–Д).

| *Вираз* | *Тотожний вираз* |
|---|---|
| 1. $(x-6)+2{,}5(4x-2)$ | А. $5(x-1)$ |
| 2. $2(4x+6)-(2x+6)$ | Б. $11(x-1)$ |
| 3. $3(4+x)-(-7x+2)$ | В. $6(x-1)$ |
| 4. $6(x-2)-(x-7)$ | Г. $2(x-1)$ |
| | Д. $10(x-1)$ |

**2.38*.** Критично оцінити процес доведення тотожностей.

а) Довести тотожність: $12x-\frac{1}{3}(6x+9)=10x-3$.

*Доведення.*

$12x-\frac{1}{3}(6x+9)=12x-2x+3=10x+3.$

Отримали: $10x+3=10x-3$.

б) Довести тотожність: $15x-\frac{1}{3}(9x+6)=12x-2$.

*Доведення.*

$15x-\frac{1}{3}(9x+6)=15x-3x-2=12x-2.$

Отримали: $12x-2=12x-2$.

Доведено.

Довести тотожність (**2.39–2.40**).

**2.39*.** а) $3(x+1{,}5)-2x-2{,}5=x+2$;

б) $6x-4(2x+5)+28=2x-8$;

в) $5{,}8x+2(0{,}6x-7{,}2)+4{,}4=6x-10$;

г) $8{,}4x+2(0{,}8x-5{,}6)+3{,}2=10x+8$.

**2.40*.** а) $4(x+3{,}5)-7x-5=3x+9$;

б) $10{,}2x-4(0{,}3x+3)=9x-12$;

в) $8{,}8x+2(2{,}6x-9{,}3)+6{,}6=14x-12$;

г) $4{,}4x+2(1{,}8x-5{,}2)+1{,}4=8x+9$.

**2.41*.** Навести по три приклади рівностей, що є тотожностями і не є тотожностями.

**2.42*.** Визначити, який із виразів (а–г) буде тотожний виразу

$$6(m-2)-3(2m-5)-1{,}4\cdot 5.$$

а) $(m-1)+2m-(5m-4)$;

б) $2(-m+5)+4a-(4a+10)+2m-3$;

в) $(m+2)-2(m-3)+3(m+4)$;

г) $(m+1)-(m-2)+(m-3)-(m+4)$.

**2.43*.** Критично оцінити процес доведення тотожностей.

а) Довести тотожність $4(2{,}5x+3)-(4x+6)=6(x+1)$.

*Доведення.* $4(2{,}5x+3)-(4x+6)=10x+12-4x+6=6x+18.$

$6(x+1)=6x+6.$

$6x+18=6x+6.$

б) Довести тотожність $4(3x-2)=6(2{,}5x-2)-5x+4$.

*Доведення.* Перетворимо ліву частину тотожності:
$4(3x-2)=12x-8$.
Перетворимо праву частину:
$6(2{,}5x-2)-5x+4=15x-12-5x+4=12x-8$.
Отримали: $12x-8=12x-8$.
Доведено.

в) Довести тотожність $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}x=x-1{,}5$.

*Доведення.*
$$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}=\frac{2+1}{3}x-\frac{4+5}{6}x=$$
$$=\frac{3}{3}x-\frac{9}{6}=x-1{,}5;$$
Отримали: $x-1{,}5=x-1{,}5$.
Доведено.

г) Довести тотожність $x+0{,}5=\frac{4}{5}x-\frac{3}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{5}x$.

*Доведення.*
$$\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}x-\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{4+1}{5}x+\frac{7-3}{8}=\frac{5}{5}x+\frac{4}{8}=x+0{,}5;$$
Отримали: $x+0{,}5=x+0{,}5$;
Доведено.

**2.44**.** Довести тотожність:

а) $\frac{x+3}{2}-\frac{3x-2{,}4}{4}+\frac{4x-0{,}8}{8}=\frac{x+8}{4}$;

б) $\frac{x-6}{2}+\frac{7x-2{,}4}{6}-\frac{6x-12{,}6}{9}=x-2$.

***Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»***

**2.45**.** Скласти цілий раціональний вираз для розв'язування задачі.

а) Учні та учениці 7-А класу щогодини виготовляли по $a$ окопних свічок для воїнів ЗСУ, а 7-Б – по $m$ свічок. Скільки свічок виготовили семикласники та семикласниці разом, якщо вони працювали протягом тижня по 4 год щодня?



б) Обчислити, скільки окопних свічок передадуть семикласники та семикласниці воїнам ЗСУ, якщо $a=4$, $m=5$, та ще в них є 54 свічки залишку з минулого разу.

**2.46**••. Перевірити, чи буде вираз

$$\frac{1}{2}(2a-4m)+6\left(\frac{1}{3}m-a+1\right)+(9a-16+4m)+10$$

тотожно рівним виразу, який отримано в задачі **2.45**••.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**2.47.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Лижний спорт»*. Перший лижник пробіг $x$ м, другий – на 124 м більше, ніж перший, а третій – удвічі більше, ніж перший і другий разом.

б) Задача *«Доставка Укрпошти»*. Автомобілі «Укрпошти» щоденно доставляють посилки та кореспонденцію до найвіддаленіших куточків нашої країни. У понеділок автомобілі перевезли $12\frac{4}{5}$ тонн вантажу, у вівторок – $\frac{5}{16}$ від обсягу понеділка, а в середу – у $2\frac{1}{5}$ рази більше, ніж за два попередніх дні разом.

в) Задача *«Фруктовий фреш»*. Для приготування фруктового фрешу купили 4,5 кг апельсинів по $x$ грн за кг та 2,5 кг бананів, ціна яких на 22 грн більша за ціну апельсинів.

г) Задача *«Здорове харчування»*. Сім'я Романа щотижня складає для себе меню здорового й корисного харчування та проводить закупівлю відповідних продуктів, слідкуючи за витратами зі свого бюджету. Батько Романа купив 6,2 кг цибулі по $x$ грн за кг, 2,8 кг моркви – по 16 грн, 3 кг буряків – по 14,5 грн, а також 4 кг курятини, заплативши за неї в 5 разів більше, ніж за всі овочі разом.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§ 2.2. Тотожні перетворення виразів».**

# §2.3 Степінь із натуральним показником. Властивості степеня з натуральним показником




Привіт! Ти як?

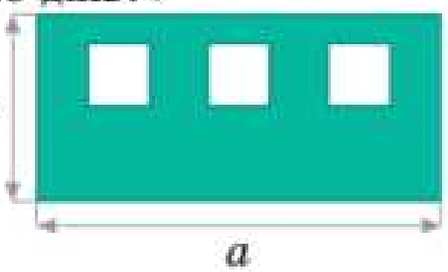
Пропоную девіз до уроку: ***«Якщо ти працюєш над поставленими цілями, то ці цілі будуть працювати на тебе!»***.

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про окремий вид добутків.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** математичну модель до задачі «На скільки більше заробляє майстер, ніж його учень за один робочий день, якщо майстер заробив $a$ грн за 15 днів, а учень – $b$ грн за 20 днів?»

**ПОЯСНИ,** як знайти площу фігури, користуючись даними, поданими на малюнку, якщо кожний отвір – це квадрат зі стороною $x$.




**ЧОМУ** рівність $|x^2 + 10| = x^2 + 10$ є тотожністю?

**ПРИДУМАЙ** раціональний спосіб швидкого обчислення значення виразу:

$$12(4m - 3) + 3(4m - 3) - 7(4m - 3), \text{ якщо } m = 0{,}75.$$

**ПОДІЛИСЯ,** як визначити, при яких значеннях змінної значення виразів

$$7(x+1)-9 \text{ та } 6x-13 - \text{рівні.}$$

**ЗАПРОПОНУЙ** математичну модель до твердження «Трійкою послідовних парних натуральних чисел подано довжини сторін трикутника, периметр якого дорівнює 42 см».

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** добуток $x \cdot y$ коренів рівнянь:

а) $6(x - 2) - 3(x - 2) = 9$ та $18(y - 5) - 5(3y - 2) = 8y - 105$;

б) $14(2x + 1) = 7(5x - 7)$ та $5(x + 15) - 7(2x + 1) = -13$.

**2) Обчислити** значення одного з виразів (а–г):

а) $2\cdot 3^2-2\cdot(-2)^3$ в) $0{,}5\cdot(-4)^2+21\cdot(-2)^2$

б) $7\cdot(-2)^2-\frac{1}{3}\cdot(-9)^2$ г) $-3\cdot(-1)^3+5\cdot(-5)^3$

**3) Визначити,** чи є серед пар виразів (а–б) тотожно рівні.

а) $\frac{hm}{2}+\frac{hn}{2}$ та $\frac{1}{2}h(m+n)$ б) $ah+\frac{b-a}{2}h$ та $\frac{a+b}{2}h$

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Якщо в обчисленні є звичайні й десяткові дроби, і з ними потрібно виконати дію додавання або віднімання, то часто для цього зручніше записати звичайні дроби у вигляді десяткових, а якщо потрібно виконати дії множення або ділення, то навпаки, – записати десяткові у вигляді звичайних.

Наприклад, $\frac{1}{8}+1\frac{3}{5}=0{,}125+1{,}600=1{,}725$;

$$0{,}125\cdot 1{,}6=\frac{1}{8}\cdot\frac{16}{10}=\frac{2}{10}=0{,}2.$$

**2** Визначаючи тотожно рівні вирази, звертають увагу на вигляд виразів і аналізують ситуацію, чи можна їх звести до однакового вигляду. Наприклад, дроби вище (у завданні 3 дослідницької роботи) зручніше записати як добуток дробу на цілий вираз: $\frac{1}{2}\cdot hm=\frac{hm}{2}$.

**3** Кожний вираз на обчислення має свою ідею в розв'язуванні, при якому дотримання порядку виконання дій є обов'язковим: спочатку – піднесення до квадрата / куба; потім – множення / ділення, і наприкінці – додавання / віднімання.

**4** Якщо корені рівнянь $x$ і $y$ (із завдання 1 дослідницької роботи) мають однакові значення, то їхній добуток – це квадрат відповідного числа.

### *Зауваж!*

Пригадай, що:

- суму однакових доданків замінюють на добуток, тобто переходять для зручності від дії I ступеня до дії II ступеня;

- добуток *двох* однакових множників замінюють на *квадрат* числа / виразу, *трьох* – на *куб*, більше трьох – на *степінь*, тобто переходять для зручності від дії II ступеня до дії III ступеня.

Степенем називають добуток кількох однакових множників.

Його записують, називають і читають так:

| Запис | Назва | Читання |
|---|---|---|
| $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ | $3^4$ – степінь<br>3 – основа степеня<br>4 – показник степеня | «3 в степені 4», або<br>«3 в четвертому степені» |
| $\underbrace{7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7}_{100 \text{ множників}} = 7^{100}$ | $7^{100}$ – степінь<br>7 – основа степеня<br>100 – показник степеня | «7 в степені 100», або<br>«7 в сотому степені» |
| $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{25 \text{ множників}} = a^{25}$ | $a^{25}$ – степінь<br>$a$ – основа степеня<br>25 – показник степеня | «$a$ у степені 25», або<br>«$a$ у двадцять п'ятому степені» |
| $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}} = a^n$ | $a^n$ – степінь<br>$a$ – основа степеня<br>$n$ – показник степеня | «$a$ в $n$-му степені», або<br>«$n$-й степінь числа $a$» |

***Степенем числа a з натуральним показником n*** називають добуток $n$ однакових множників, кожний з яких дорівнює $a$.

Отже, $a^n$ – степінь, $a$ – основа степеня, $n$ – показник степеня, де $n$ – натуральне число (1, 2, 3, 4, 5, ...).

Наприклад:

$(0,2)^4 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,0016$; $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$; $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;

$(-5)^4 + (-3)^5 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) + (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) =$

$= 625 - 243 = 375$.

Як відомо, $a^2$ – другий степінь числа, його називають *квадратом*, а $a^3$ – третій степінь, його називають *кубом*.

Першим степенем числа вважають саме це число: $a^1 = a$.

Основою степеня з натуральним показником може бути будь-яке число: додатне, від'ємне або нуль.

Якщо $a > 0$, то $a^n > 0$; якщо $a < 0$, то $a^{2n} > 0$ і $a^{2n-1} < 0$.

Інколи зручно обчислювати степінь за допомогою калькулятора, і якщо ти знатимеш окремі секрети, то робитимеш це обчислення безпроблемно.

Секрет нижче.

***Зауваж! Це важливо!***

Обчислювати значення степенів допомагають певні правила, які називають властивостями степеня.

## ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ

Нехай $m$, $n$ – натуральні числа. Тоді для степеня справджуються такі властивості:

**1** *Множення степенів з однаковими основами:* при множенні степенів з однаковими основами основу залишають без змін, а показники степенів додають:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

**2** *Ділення степенів з однаковими основами:* при діленні степенів з однаковими основами основу залишають без змін, а від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

**3** *Піднесення степеня до степеня:* при піднесенні степеня до степеня основу залишають без змін, а показники степенів перемножують:

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}.$$

**4** *Піднесення добутку до степеня:* при піднесенні добутку до степеня можна піднести до степеня кожний множник, а результати – перемножити:

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

**5** *Піднесення дробу (частки) до степеня:* при піднесенні дробу до степеня можна окремо піднести до степеня чисельник і знаменник, а результати записати відповідно у чисельник і знаменник нового дробу:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0.$$

Кожну з властивостей можна легко довести, користуючись означенням степеня. Наприклад,

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множників}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множників}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множників}}}_{n \text{ разів}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \cdot n \text{ множників}} = a^{mn}. \text{ Отже, } (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}.$$

Якщо $b \neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ множників}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ множників}}} = \frac{a^n}{b^n}.$

Отже, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Може постати питання, як виконати ділення степенів, коли $m < n$.

Відповідь: потрібно замінити дію ділення рискою дробу й виконати скорочення дробу. Наприклад, $3^7 : 3^{11} = \frac{3^7}{3^{11}} = \frac{3^7}{3^7 \cdot 3^4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$.

Отже тепер ти знаєш, що $323^5 = (323)^4 \cdot 323 = (323^2)^2 \cdot 323$, а це означає, що натиснувши один раз 323 треба натиснути «×», і одержиш $323^2$, ще раз «×», і результат – $323^4$, а тепер «×»323 і відповідь знайдено.

## *Тренувальні вправи*

Вибрати правильну рівність **(2.48–2.49)**.

**2.48°.** а) $4x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = 4x^6$; в) $0{,}5n \cdot 2n \cdot n = 0{,}5(2n)^3$;
б) $4m \cdot 4m \cdot 4m = (4m)^3$; г) $0{,}2y \cdot 5y \cdot 4y = 4y^3$.

**2.49°.** а) $0{,}5a \cdot a \cdot 0{,}5a \cdot a = 0{,}5a^4$; в) $7x \cdot 2x \cdot x = 14x^3$;
б) $2c \cdot 2c \cdot 2c = 8c$; г) $0{,}25x \cdot 4x = x^2$.

**2.50°.** Указати правильне подання виразу $2m \cdot x^3$ у вигляді добутку
а) $2m \cdot x \cdot m \cdot x \cdot m \cdot x \cdot m \cdot x$; в) $2mx \cdot 2mx \cdot 2mx$;
б) $2m \cdot x \cdot m \cdot x \cdot m \cdot x$; г) $2m \cdot x \cdot x \cdot x$.

**2.51°.** Перенести таблицю в зошит та заповнити її.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | | | | | | | | | | |

Обчислити, значення степеня (2.52–2.53), використовуючи результати № 2.51.

**2.52°.** а) $-2^3$; $1^5$; $(-2)^3$; $2^5$; $(-2)^6$; в) $-2^4$; $-(-1)^9$; $(-2)^2$; $2^7$; $(-2)^5$;
б) $-2^5$; $(-1)^5$; $(-2)^4$; $(-2)^7$; $2^8$; г) $-22$; $-(-1)^7$; $(-2)^7$; $2^6$; $2^{10}$.

**2.53°.** а) $-(0{,}2)^3$; $(-0{,}2)^3$; $(0{,}2)^5$; $(-0{,}2)^6$;
б) $-(0{,}2)^5$; $(-0{,}2)^4$; $(-0{,}2)^7$; $(0{,}2)^8$;
в) $-(0{,}2)^4$; $(-0{,}2)^2$; $(0{,}2)^7$; $(-0{,}2)^5$;
г) $-(0{,}2)^2$; $(-0{,}2)^7$; $(0{,}2)^6$; $(0{,}2)^{10}$.

**2.54°.** Указати степінь, яким правильно записано вираз
$7xm \cdot 7xm \cdot 7xm \cdot 7xm$.
а) $7xm^4$; б) $(7xm)^4$; в) $7(xm)^4$; г) $28x^4m$.

**2.55°.** Указати вираз, тотожно рівний виразу $6(ab)^3$.

а) $6a \cdot a \cdot a \cdot b$; в) $6ab \cdot ab \cdot ab$;

б) $6ab \cdot 6ab \cdot 6ab$; г) $6a \cdot b \cdot b \cdot b$.

**2.56°.** Перенести таблицю в зошит і заповнити її.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $3^n$ | | | | | | |
| $4^n$ | | | | | | |
| $5^n$ | | | | | | |
| $6^n$ | | | | | | |
| $7^n$ | | | | | | |
| $8^n$ | | | | | | |
| $9^n$ | | | | | | |
| $10^n$ | | | | | | |

Обчислити (**2.57–2.61**).

**2.57°°.** а) $2^3$; $-(-1)^5$; $(-3)^3$; $6^3$; $7^5$;

б) $-4^3$; $-(-1)^7$; $5^4$; $(-7)^3$; $6^6$

в) $3^5$; $-(-1)^9$; $(-10)^6$; $6^5$; $(-7)^4$;

г) $9^5$; $-8^3$; $-(-1)^3$; $(-4)^5$; $7^6$; $(-10)^4$.

**2.58°°.** а) $(-3)^8$; $(-8)^3$; $6^3$; $-(-9)^3$; $10^5$;

б) $-3^3$; $4^6$; $-(-5)^5$; $(-6)^4$; $10^3$;

в) $5^5$; $(-3)^6$; $-4^4$; $-(-7)^4$; $(-10)^5$;

г) $(0{,}5)^2$; $-5^3$; $-(-8)^3$; $(-11)^2$; $10^6$.

**2.59°°.** а) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4$; б) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^2$; в) $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$; г) $-\left(1\frac{1}{3}\right)^2$; д) $\left(4\frac{1}{2}\right)^2$.

**2.60°°.** а) $2 \cdot 3^3$; б) $-2 \cdot (-2)^3$; в) $-3 \cdot (-2)^7$ г) $7 \cdot (-2)^5$; д) $8 \cdot (-5)^3$.

**2.61°°.** а) $-\frac{1}{3} \cdot (-9)^2$; б) $\frac{1}{2} \cdot (-4)^2$; в) $-\frac{1}{4} \cdot 4^3$; г) $-\frac{1}{9} \cdot 9^6$; д) $\frac{1}{8} \cdot (-4)^5$.

**2.62°°.** Критично оцінити процес перетворення виразу.

| | |
|---|---|
| а) $x^5 \cdot x^3 = x^{5 \cdot 3} = x^{15}$; | г) $a^{32} : a^4 = a^{32:4} = a^8$; |
| б) $a^{22} \cdot a = x^{22+1} = a^{23}$; | д) $x^{17} : x^2 = x^{17-2} = x^{15}$; |
| в) $t^{17} : t = 17 : 1 = 17$; | е) $x^{12} \cdot x^3 = 12 + 3 = 15$. |

**2.63•.** Замінити «зірочку» степенем.

а) $a^{13}=a\cdot *$; в) $*:y^{11}=y^3$; д) $(*)^5=a^{60}$;

б) $y^{15}:*=y^{10}$; г) $(*)^3=t^9$; е) $(t^2)^6=t^2\cdot *$.

**2.64•.** Вибрати дві правильні тотожності із запропонованих.

а) $(m^2)^3=m^5$; в) $(2m^3)^4=16m^{12}$; д) $(-7x^2yab^7)^2=14x^4y^2a^2b^{14}$;

б) $(a^3)^2\cdot a=a^6$; г) $(2a^3b^4)^2=4a^6b^6$; е) $(-3ab^3xy^2)^2=9xa^2b^6x^2y^4$.

**2.65•.** Визначити, які з пар виразів є тотожно рівними виразами.

а) $7m^4$ і $(7m)^4$; в) $2xy^9$ і $(2xy)^9$;

б) $2(a+b)^2$ і $(2(a+b))^2$; г) $\frac{1}{3}x^3y^3$ і $\left(\frac{1}{3}xy\right)^3$.

**2.66•.** Визначити, які з нерівностей є правильними для будь-яких значень $t$.

а) $t^6>0$; б) $t^9+10<0$; в) $t^2+1>0$; г) $(-1)^7<0$.

**2.67•.** Заповнити в зошиті таблицю.

| $a$ | $x^2$ | $x^5$ | $m$ | | $n^{19}$ | $m^{11}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | | $x^9$ | | $y^{15}$ | | $m^{24}$ | $x^3$ |
| $a\cdot b$ | $x^{10}$ | | $m^{12}$ | $y^{16}$ | $n^{19}$ | | $x^{33}$ |

**2.68•.** Заповнити в зошиті таблицю.

| $a$ | $x^7$ | $a^{12}$ | $m^{30}$ | | $y^{11}$ | $a^{2000}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | $x^4$ | $a^7$ | | $n^5$ | $y^7$ | $a^{100}$ | $y^{200}$ |
| $a:b$ | | | $m^{10}$ | $n^3$ | | | $y^{100}$ |

Подати вираз у вигляді степеня (**2.69–2.71**).

**2.69•.** а) $a^6\cdot(a^2)^7$; б) $(m^2)^3\cdot(m^3)^4$; в) $x\cdot(x^4)^2\cdot x^7$; г) $(-t^2)^3\cdot(t^3)^5$.

**2.70•.** а) $a^{18}:(a^2)^4$; б) $(m^6)^3:(m^4)^3$; в) $x^6\cdot(x^3)^2:x^7$; г) $(-t^3)^7:(t^5)^3$.

**2.71•.** а) $((-a)^3)^2\cdot(-a)^6$; в) $((-m)^3)^4\cdot(-m)^7$;

б) $((-x)^4)^5:(-x)^{18}$; г) $((-t)^3)^3:(-t)^4$.

Знайти значення виразу (**2.72–2.74**).

**2.72••.** а) $\frac{4^8\,3^8}{12^9}$; б) $\frac{5^3\,7^3}{35^4}$; в) $\frac{17^2\,11^2}{187^2}$; г) $\frac{9^{18}}{27^{13}}$.

**2.73••.** а) $\frac{27^2\,3^5}{(3^4)^3}$; б) $\frac{25^{10}\,0{,}04^{10}}{2^3}$; в) $\frac{4^9\,(2^2)^6}{(2^{15})^2}$; г) $\frac{7^{11}\,49^4\,7}{(7^2)^{11}}$.

**2.74**** а) $\frac{15^{17}\cdot 25^{3}}{3^{17}\cdot (5^{2})^{11}}$; б) $\frac{2\cdot 26^{10}\cdot 13}{2^{10}\cdot 13^{11}}$; в) $\frac{11^{15}\cdot 14^{16}}{7^{16}\cdot 22^{15}}$; г) $\frac{5^{6}\cdot (5^{2})^{11}\cdot 25^{9}}{(5^{6})^{4}\cdot 5^{5}\cdot (5^{4})^{4}}$.

**2.75**** Сталевий квадрат широко застосовується у виробництві, будівлях, ремеслі, автомобілебудівній галузі, а також під час виготовлення устаткування.



Визначити, яку площу займатиме виріб, якщо майстри використали сталевий квадрат розмірами:

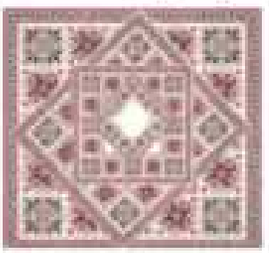
а) 1480 мм × 1480 мм – для віконних грат;

б) 1520 мм × 1520 мм – для секції огорожі;

в) 1270 мм × 1270 мм – для сходової конструкції;

г) 1050 мм × 1500 мм – для балконної конструкції.

**2.76**** Українська вишивка популярна далеко за межами України, тому скатертини з вишивкою прикрашають інтер'єри по всьому світу, а не тільки в наших будинках, чи будинках нашої діаспори. Сім'я Кирила очікувала гостей із діаспори і придбала для них в якості сувеніра набір вишитих скатертин.



Визначити, яку площу має скатертина, якщо її розміри дорівнюють:

а) 75 см × 75 см;

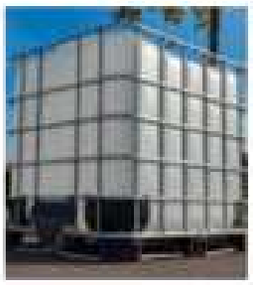
б) 85 см × 85 см;

в) 88 см × 88 см;

г) 120 см × 120 см.

**2.77**** Різьблення по дереву – це мистецтво, яким славилися слов'яни ще в XI ст. В Україні цим мистецтвом захоплюються гуцули, виконуючи твори технікою рельєфного різьблення та готуючи їх до продажу. Вартість шкатулки у формі куба залежить від її об'єму. Для об'єму до 1400 см$^3$ – це 800 грн, до 1700 см$^3$ – 1200 грн, до 1800 см$^3$ – 1500 грн. Визначити, скільки заплатить турист, якщо придбає дві шкатулки: одну розмірами 100 × 100 × 100 мм, а іншу – 120 × 120 × 120 мм.





**2.78**••. В Україні з'явилася нова легка тара під назвою «єврокуб», яка виготовлена з полімеру і є досить легкою. Розрізняють харчові єврокуби, які призначені для зберігання харчової рідини або сипучих, та технічні – для зберігання і транспортування кислоти, палива, технічних масел тощо.

Визначити об'єм єврокуба у $дм^3$, якщо його ребро дорівнює:

а) 1000 мм; б) 950 мм; в) 900 мм; г) 850 мм.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**2.79**••. Визначити, як зміниться площа квадрата, якщо його сторону збільшити:

а) у 5 разів; б) у 10 разів; в) у $k$ разів; г) у $2n$ разів.

**2.80**••. Визначити, як зміниться об'єм куба, якщо його ребро зменшити:

а) у 2 рази; б) у 5 разів; в) у 10 разів; г) в $m$ разів.

**2.81**••. При якому значенні $n$ є правильною рівність:

а) $3^n = 27$; в) $(4^n)^2 = 16$; д) $2^{3n} = 64$; є) $2^{n-1} = 8$;

б) $(5^2)^n = 25$; г) $4^{2n} = 256$; е) $4^{5-n} = 16$; ж) $5^{n+2} = 125$.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**2.82.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Домашня економія»*. Господар дізнався про три винаходи: перший із них заощаджує 30 % твердого палива, другий – 45 %, а третій – 25 %. Він прийняв рішення, виходячи з найбільшої економії.

б) Задача *«Якісна продукція»*. Приватне підприємство працює 3 роки. Виробництво продукції за другий рік зросло на $p$ %, за третій – на 10 % більше, ніж за другий, а за ці 2 роки виробництво зросло на 48,59 %.

Перевір себе «Як ти?»

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 2.3. Степінь із натуральним показником. Властивості степеня з натуральним показником».**

# § 2.4 Стандартний вигляд багатоцифрового натурального числа. Застосування стандартного вигляду числа в природничій освітній галузі




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз до уроку: ***«Найкраща підготовка до завтрашнього дня – це зробити все можливе сьогодні»*** (Х. Джексон Браун мол.).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про застосування степеня числа.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** число, яке є значенням виразу $\dfrac{4^5\cdot 2^6}{32^3}+\dfrac{9^5\cdot 3^3}{81^3}$.

**ПОЯСНИ**, як визначити $k$ в кожній із рівностей:

а) $k\cdot 4^3=640$; б) $k\cdot 3^4=405$; в) $k\cdot 5^3=875$.

**ЧОМУ** НЕ є тотожністю рівність $|x+65|=x+65$?

**ПРИДУМАЙ** способи подання числа 5 006 400 у вигляді добутку, одним із множників якого є степінь числа 10, округлюючи його до розряду: а) тисяч; б) десятків тисяч; в) мільйонів.

**ПОДІЛИСЯ**, як визначити відсотковий вміст солі в розчині, якщо в 1 л води розчинили: а) 250 г солі; б) 600 г солі; в) 1 кг солі.

**ЗАПРОПОНУЙ** математичну модель до задачі «Знайти периметр трикутника, якщо одна його сторона дорівнює $\dfrac{10}{3}a$ м, інша – становить 40 % від першої, а третя – у 2 рази більша за другу».

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

1) **Знайти** товщину книжки, в якій 300 сторінок, якщо відомо товщину одного паперового аркуша книжки – 0,09 мм та товщину обкладинки – 3 мм.

**2) Обчислити,** скільки ударів зробить серце людини за:

1) 1 год; 2) 1 добу; 3) 1 тиждень,

якщо воно в середньому робить 75 ударів за хвилину.

**3) Визначити,** чи буде число $10^{10} + 12^{12}$ кратним числу:

а) 2; б) 5; в) 10; г) 29.

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Виявляється, що товщину книжки завжди можна знайти. Для цього досить знати товщину одного паперового аркуша, товщину обкладинки книжки та кількість сторінок у ній. Але чи було враховано, що один аркуш – це дві сторінки? Зрозуміло, що товщину книжки вимірюють у міліметрах, і такі числа не є великими.

**2** Здавалося б 75 ударів за хвилину – це мало, але кількість ударів серця за тиждень – це багато, за місяць – це вже 3 402 000 ударів, за пів року – 20 412 000 ударів і т. д. Висновок: це велике число є показником серцебиття людини – це вік – це життя, і бажано, щоб у кожної людини воно було якомога більшим.

**3** Якщо потрібно довести кратність, то це те саме, що довести подільність націло. Для цього розкладають число на множники, наприклад, $12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$, звідки можна дійти висновку, що число 12 кратне числам 2, 3, 4, 6 і, звичайно, числу 12. Однак, у завданні 3 на дослідження доведеться застосувати і властивості степеня, і розподільну властивість множення. Отже, довести кратність можливо лише записавши числовий вираз у вигляді добутку.

### *Зауваж!*

Якщо округлити кількість ударів серця людини до мільйонів, то матимемо: $20\,412\,000 \approx 20\,000\,000 = 2{,}0 \cdot 10^7$. І отримане число стало записуватися значно коротше, ніж до округлення. У такому разі кажуть, що число подали в *стандартному вигляді*.

Будь-яке число $A$, яке більше за 10, можна записати в *стандартному вигляді* так: $A = a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$, $n$ – натуральне число. При цьому $a$ називають *значущою частиною числа*, а $n$ – *порядком числа*. Для вищезгаданого числа маємо, що 2,0 – значуща його частина, а 7 – його порядок.

Запис числа в стандартному вигляді використовують у багатьох науках, серед них математика, фізика, астрономія, біоло-

гія, географія, адже з числами-велетнями працювати незручно. Але саме такі числа використовують у макросвіті та мегасвіті.



***Макросвіт*** – світ стійких форм і пропорційних величин, а також кристалічні комплекси молекул, організми, групи організмів; світ макрооб'єктів, розмірність яких співвідносна з масштабами людського досвіду. Просторові величини подають у міліметрах, сантиметрах і кілометрах ($10^{-4}$...$10^{6}$ м), а час – у секундах, хвилинах, годинах, роках.



***Мегасвіт*** – це планети, зоряні комплекси, галактики, метагалактики – світ величезних космічних масштабів і швидкостей, відстань в якому вимірюють світловими роками (відстань, яку світло долає за один рік $\approx 9{,}46 \cdot 10^{15}$ м), а час існування космічних об'єктів – мільйонами і мільярдами років.

***Зауваж! Це важливо!***

Як записати число в стандартному вигляді?

Наприклад, число $A = 5\,450\,000$.

Для цього в багатоцифровому числі ставлять кому так, щоб у цілій частині числа була одна цифра, відмінна від нуля. Тобто комою в числі $A$ потрібно відокремити 6 цифр справа. Одержимо число 5,45. Відокремлення комою зменшило наше число $A$ в 1 000 000 разів, тобто в $10^6$ разів, тому далі ми його в стільки само разів збільшимо.

Отже, $5\,450\,000 = \mathbf{5{,}45 \cdot 10^6}$.

## *Тренувальні вправи*

**2.83°.** Виконати дію:

а) $3{,}62 \cdot 10000$; в) $9{,}42 \cdot 100000$;

б) $0{,}00512 \cdot 1000000$; г) $8{,}003 \cdot 10000000$.

**2.84°.** Визначити, як зміниться число, якщо в ньому перенести кому вліво на:

а) 3 цифри; б) 5 цифр; в) 6 цифр; г) 7 цифр.

Указати числа, які записано в стандартному вигляді (**2.85–2.86**).

**2.85°°.** а) $10{,}01 \cdot 10^4$; б) $0{,}6 \cdot 10^3$; в) $8{,}6 \cdot 10^2$; г) $10{,}0 \cdot 10^5$.

**2.86°°.** а) $12{,}12 \cdot 10^7$; б) $9{,}99 \cdot 10^8$; в) $105{,}6 \cdot 10^3$; г) $0{,}01 \cdot 10^{12}$.

**2.87°°.** Назвати порядок числа і значущу цифру.

а) $1{,}212 \cdot 10^{11}$; б) $3{,}2 \cdot 10^3$; в) $1{,}88 \cdot 10^{10}$; г) $9{,}11 \cdot 10$.

Записати в стандартному вигляді число (2.87–2.88).

**2.88*.** а) $122 \cdot 10^5$; б) $544 \cdot 10^2$; в) $1542 \cdot 10^4$; г) $1875 \cdot 10^3$.

**2.89*.** а) 678 000 000; в) 12 536 000;
б) 902 000 000; г) 987 320 000.

**2.90*.** Критично оцінити запис числа в стандартному вигляді.

| | |
|---|---|
| а) $6290 = 629 \cdot 10$; | в) $6290 \cdot 100 = 6{,}29 \cdot 10^4$; |
| б) $6290 \cdot 10 = 6{,}29 \cdot 100$; | г) $6290 \cdot 1000 = 6{,}29 \cdot 10^6$; |

**2.91*.** *Україна була, є і буде!*



Площа території України становить 603 628 км$^2$, площа Автономної Республіки Крим – 26 081 км$^2$, басейну Дніпра – 516 300 км$^2$, а площа Одеської області – найбільшої в Україні – 33 310 км$^2$. Записати подані значення площі в стандартному вигляді.

**2.92*.** Відомо, що планета Земля існує $4{,}2 \cdot 10^9$ років, а відстань від Землі до найближчої після Сонця зорі Проксима Центавра дорівнює $4{,}1 \cdot 10^{13}$ км. Записати подані числа у вигляді звичайного багатоцифрового натурального числа.

**2.93*.** Найбільший звір фауни України – зубр. Його маса становить $1{,}2 \cdot 10^3$ кг. Записати масу зубра в тоннах.



**2.94*.** Китова акула – найбільша з акул і найбільша риба на планеті, її маса – 34 тонни. Подайте масу китової акули в кілограмах та запишіть отримане число в стандартному вигляді.



**2.95*.** Швидкість світла у вакуумі – $2{,}998 \cdot 10^5$ км/с. Записати цю швидкість в м/с.

Записати числом у стандартному вигляді (2.96–2.97).

**2.96*.** За день сім'я мурашок знищує до 100 тисяч шкідників лісу. Визначити, скільки шкідників лісу знищить сім'я мурашок за місяць (30 днів).

**2.97*.** Бджола спроможна за 1 секунду зробити до 330 помахів крилами. Визначити, скільки помахів крилами зробить бджола за 10 хвилин.

**2.98*.** Щоб зібрати 400 г меду, бджола-трудівниця мусить налітати щонайменше 80 000 км. Визначити, скільки км треба налітати бджолі, щоб зібрати 1 кг меду.

**2.99•.** Одна пляшка йогурту містить 180 000 калорій. Визначити, скільки калорій щодня отримує Даринка з цього продукту, якщо до її щоденного раціону входить три такі пляшки йогурту.



**2.100•.** Записати в стандартному вигляді число $m$, що дорівнює масі:

а) Місяця, $m = 73\,500\,000\,000\,000\,000$ кг;

б) Землі, $m = 6\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ кг;

в) Марса, $m = 640\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ кг;

г) Юпітера, $m = 1\,900\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ кг;

д) Меркурія, $m = 3\,300\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ кг;

е) Сонця, $m = 2\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ кг.

**2.101•.** Записати число $V = 1\,083\,000\,000\,000$ км$^3$, що дорівнює об'єму Землі, в стандартному вигляді.

**2.102••.** Порівняти: а) масу Землі і масу Марса;

б) масу Юпітера і масу Меркурія;

в) масу Сонця і масу Землі.



**2.103••.** Найближчою до Землі планетою Сонячної системи є Венера. В Україні на неї кажуть Зоря, оскільки за нею можна спостерігати ввечері після заходу сонця або вранці перед світанком. Записати числа, що характеризують Венеру, у стандартному вигляді:

а) 460 000 000 000 000 м$^2$ – площа поверхні Венери;

б) 4868 500 000 000 000 000 000 000 кг – її маса.

в) 9 380 000 000 000 000 000 км$^3$ – її об'єм.

### *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**2.104••.** У таблиці наведено обсяги запасів прісної води на Землі.

| Джерела прісної води | Обсяг запасів, км$^3$ |
|---|---|
| Льодовики | 24 000 000 |
| Підземні джерела | 10 500 000 |
| Річки та озера | 93 000 |
| Інші джерела | 340 000 |



а) Записати подані числа в стандартному вигляді;

б) визначити і записати в стандартному вигляді, у скільки разів обсяг прісної води в льодовиках перевищує її обсяг у: 1) підземних джерелах; 2) річках та озерах.

**2.105**.** Заповнити таблицю в зошиті та, користуючись її даними, розмістити планети в порядку зростання їхньої віддалі від Сонця.

| Планета | Відстань до Сонця, км | | Планети в порядку зростання відстані до Сонця |
|---|---|---|---|
| | у стандартному вигляді | у звичайному вигляді | |
| Венера | $1{,}08 \cdot 10^8$ | | |
| Земля | $1{,}495 \cdot 10^8$ | | |
| Марс | $2{,}280 \cdot 10^8$ | | |
| Меркурій | $5{,}790 \cdot 10^7$ | | |
| Нептун | $4{,}497 \cdot 10^9$ | | |
| Сатурн | $1{,}427 \cdot 10^9$ | | |
| Уран | $2{,}871 \cdot 10^9$ | | |
| Юпітер | $7{,}781 \cdot 10^8$ | | |

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**2.106.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Аналіз даних»*. Площа всієї поверхні Землі дорівнює 510 100 000 км$^2$, з якої 71 % займають океани, а решту – суша, що складається з материків і островів. Ліси займають 30 % світового суходолу, або майже 4 мільярди гектарів.

б) Задача *«Маленькі трудівниці»*. Щоб зібрати 1 кг меду, бджолі доводиться принести у вулик близько 150 000 порцій нектару та пилку з квітів, а для цього – обробити близько мільйона квітів та налітати майже 300 тис. км.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§ 2.4. Стандартний вигляд багатоцифрового натурального числа. Застосування стандартного вигляду числа в природничій освітній галузі».**

# § 2.5 Одночлен. Піднесення одночлена до степеня та множення одночленів. Стандартний вигляд одночлена




Привіт, друже! Ти як?

Наш девіз сьогодні: ***«Мало мати хороший розум, головне добре його застосовувати»*** (Рене Декарт).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та навчимося виконувати дії з одночленами.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** правильні рівності:

а) $4^2=8$; б) $9^2=81$; в) $3^2+4^2=5^2$; г) $3^4=12$.

**ПОЯСНИ**, як записати у вигляді виразу:

а) суму виразів $b$ і $c$; б) добуток виразів $-6$ і $x^2$;

в) частку виразів $5x$ і $\frac{3}{4}a$; г) різницю виразів $-9$ і $2pm$.

**ЧОМУ** вирази $-5(2x-4y)$ і $(-10x+12y)-(-8y)$ є тотожно рівними?

**ПРИДУМАЙ** цілий вираз, який складається зі змінної $a$, числа, яке кратне числу 8, та степеня з парним показником.

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями, як спростити вираз

$$3m(m-2)+6m+2^4.$$

**ЗАПРОПОНУЙ** зручний спосіб обчислення значення виразу

$$2x-x(5+x)+(x^2)^2, \text{ якщо } x=-2.$$

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** суму та різницю виразів:

а) $34s$ і $12s$; б) $0{,}8xk$ і $(-6{,}2xk)$; в) $\frac{1}{2}mk$ і $\frac{4}{6}mk$.

**2) Обчислити** значення виразів, якщо $k=5$:

а) $2k+4k$; б) $3k\cdot 2k$; в) $k^2+0{,}28$.

**3) Визначити,** який із виразів після спрощення матиме показник степеня 8.

а) $n^4n^3$; б) $(m^4)^2$; в) $(x^2)^2 \cdot (x^3)^2$; г) $\dfrac{d^{11}d}{(d^2)^2}$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Переставна і сполучна властивості множення:

$a \cdot b = b \cdot a$ $\qquad$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

**2** Множення раціональних чисел:

- добуток двох чисел з однаковими знаками є числом додатним, а з протилежними знаками – від'ємним.

$(-a) \cdot (-b) = ab$ $\qquad$ $a \cdot (-b) = -ab$ $\qquad$ $(-a) \cdot b = -ab$

**3** Властивості степеня:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

***Зауваж!***

Найпростіші вирази – числа, змінні, їхні степені і добутки називають ***одночленами.***

Наприклад, $34s$; $5xc^3$; $0{,}8xk$; $-3{,}6k^5$; $45$; $a^2b^7$ – одночлени.

***Степінь одночлена*** – це сума показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Якщо одночлен не містить змінних, то вважають, що його степінь дорівнює нулю.

Наприклад, $7c^3b^2x^8$ – одночлен 13-го степеня, оскільки $3 + 2 + 8 = 13$, одночлен $7c^3$ – третього степеня, одночлен $7x$ – першого степеня, а одночлен $7$ – нульового степеня.

***Зауваж! Це важливо!***

Вирази $3k \cdot 2k \cdot c$ та $6k^2c$ – одночлени, однак перший з них ще можна спростити, а другий – ні.

В одночлена $6k^2c$ на першому місці число, а кожна змінна записана лише один раз. Такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду.*

***Одночленом стандартного вигляду*** називають одночлен, що містить тільки один числовий множник, відмінний від нуля, який стоїть на першому місці, і степені різних змінних.

Наприклад, одночлени $6m^{10}n^2$, $0{,}8x$, $-23m$, $-17$ записано в стандартному вигляді.

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають ***коефіцієнтом*** *цього одночлена.*

Наприклад, коефіцієнтами одночленів $45acy$, $-9y^3$, $0{,}6x^8$ є відповідно числа 45, −9 та 0,6.

*Звести одночлен до стандартного вигляду* – означає виконати множення двох чи кількох одночленів.

*Щоб перемножити одночлени, потрібно* перемножити числові множники, а до змінних застосувати правило множення степенів з однаковими основами.

Наприклад, знайдемо добуток одночленів $4c^2x^3a$ та $-5x^4a$.

$4c^2x^3a\cdot(-5x^4a)=-5\cdot4\cdot x^4\cdot x^3\cdot a\cdot a\cdot c^2=-20x^7a^2c^2.$

*Щоб піднести одночлен до степеня,* потрібно піднести до цього степеня кожний множник одночлена і знайдені степені перемножити.

Наприклад, $\left(\frac{3}{4}x^4c\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(x^4\right)^2\cdot c^2=\frac{9}{16}x^8c^2.$

***ПОМІРКУЙ! Чи можна додавати, віднімати або ділити одночлени?***

## Тренувальні вправи

**2.107°.** Вибрати вирази, які є одночленами.

а) $8a^2x$; в) $\frac{m}{6x}$; д) 23;

б) $2+3x$; г) $-7\cdot y^5\cdot a$; е) $n^{12}:n^3$.

**2.108°.** Вибрати вирази, які є одночленами стандартного вигляду.

а) $12xa$; в) $-\frac{1}{7}a\cdot a\cdot a^2$; д) $m^5m^2m$;

б) $-3xa\cdot4x$; г) $13x^2b^4$; е) $-k$.

**2.109°.** Звести одночлен до стандартного вигляду і знайти його степінь.

а) $6\cdot x\cdot a\cdot4$; в) $m^2\cdot10nm$; д) $t\cdot p^2\cdot p^4\cdot t^4$;

б) $-3c\cdot(-4k^3)$; г) $-0{,}3\cdot x\cdot y^2\cdot2x^2$; е) $1{,}8\cdot2$.

**2.110°.** Звести одночлен до стандартного вигляду і знайти його коефіцієнт.

а) $-2 \cdot m \cdot x \cdot 5$; в) $c \cdot c^6 \cdot 5{,}5 \cdot 10$; д) $a^2 \cdot a^2$;

б) $0{,}2y \cdot k^3 \cdot y^4$; г) $\frac{2}{3} \cdot b3 \cdot \frac{1}{8} \cdot (-b3)$; е) $-90 \cdot x^5 \cdot \frac{1}{9}$.

**2.111°.** Записати одночлен $20x^4p^5$ у вигляді добутку двох одночленів трьома різними способами.

**2.112°.** Намалювати схему в зошит. Заповнити порожні комірки.




**2.113°°.** Заповнити в зошиті таблицю:

| Одночлен | Стандартний вигляд одночлена | Коефіцієнт одночлена | Степінь одночлена |
|---|---|---|---|
| $7m^3 \cdot t$ | | | |
| $2 \cdot x^3 \cdot c \cdot (-0{,}4c^4)$ | | | |
| $b$ | | | |
| 11 | | | |

**2.114°°.** Знайти значення одночлена.

а) $4x^2$, якщо $x = 3$; $-0{,}1$;

б) $-3c^3t$, якщо $c = -1$, $t = 12$;

в) $\frac{2}{7}y^3x^2c$, якщо $y = -2$, $x = 3$, $c = \frac{14}{16}$.

**2.115°°.** Знайти добуток одночленів.

а) $8x$ та $9y$; г) $32x^3$ та $\frac{1}{8}b^3x^5$;

б) $4t^4c^2$ та $t^2c$; д) $n$ та $nx$;

в) $-51m^3n^6c$ та $2mn^4$; е) $1{,}2c^2t^4$ та $-0{,}3ty$.

**2.116°°.** Піднести одночлен до степеня.

а) $(cbx)^3$; в) $\left(\frac{1}{4}bc\right)^2$; д) $(-2nt)^5$;

б) $(3p)^4$; г) $\left(5\frac{1}{5}m\right)^2$; е) $(1{,}1a)^2$.

**2.117°°.** Увідповіднити дію з одночленами (1–4) та її результат (А–Е).

| *Дія з одночленами* | *Результат дії* |
|---|---|
| 1. $0,2m^3 \cdot a^2m^4$ | А. $0,04m^4a^2$ |
| 2. $(0,2m^2a)^2$ | Б. $-0,08m^9a^6$ |
| 3. $2m^3 \cdot (-2am^4)$ | В. $0,08m^9a^6$ |
| 4. $(-0,2a^2m^3)^3$ | Г. $0,2m^7a^2$ |
| | Д. $-4m^7a$ |
| | Е. $0,4m^7a^2$ |

**2.118°°.** Увідповіднити дію з одночленами (1–4) та її результат (А–Е).

| *Дія з одночленами* | *Результат дії* |
|---|---|
| 1. $(-3x^4t^3)^2$ | А. $-9x^8t^2$ |
| 2. $-3x^3 \cdot t^6x^3$ | Б. $9x^8t^6$ |
| 3. $-3x^2 \cdot (-t^2) \cdot 2x^4x^6$ | В. $6x^{12}t^{\wedge 2}$ |
| 4. $(2x^3t^4 \cdot x)^3$ | Г. $-3x^6t^6$ |
| | Д. $8x^{12}t^{12}$ |
| | Е. $-6x^{12}t^2$ |

**2.119°.** Знайти добуток та записати степінь отриманого одночлена.

а) $-4,3n^3 \cdot p^2a^5 \cdot npa^4$;

б) $\frac{3}{8}y \cdot x^3\left(-\frac{2}{15}y^6x^2\right)$;

в) $1\frac{2}{3}m^5y^4 \cdot \left(m^2\right)^3 \cdot \left(-1\frac{4}{5}\right)$;

г) $8,4p^3n^4 \cdot \frac{1}{2}p^2n^3$.

**2.120°.** Піднести одночлен до степеня та вказати коефіцієнт отриманого одночлена.

а) $\left(\frac{3}{5}x^4\right)^3$;

б) $\left(-2\frac{1}{3}n^2f^3\left(a^2\right)^3\right)^2$;

в) $(-0,5k^4s^2)^3$;

г) $\left(\left(\left(\frac{1}{2}md^3\right)^3\right)^2\right)^2$.

**2.121°.** Подати вираз у вигляді квадрата одночлена.

а) $36x^2n^4$; б) $100p^4y^8t^{12}$; в) $\frac{16}{121}m^4d^6$; г) $\frac{n^{10}k^2}{81}$.

**2.122°.** Знайти, який одночлен потрібно записати замість *, щоб отримати правильну рівність.

а) $-4x^2y^6 \cdot * = 12x^6y^8$;

б) $0,8p^2c^2 \cdot * = -8p^6c^3t^2$;

в) $* \cdot \left(\frac{2}{5}xd^3\right)^2 = -x^4d^6$;

г) $(*)^5 = -32k^5m^{15}$.

**2.123••.** Спростити вираз.

а) $(2d^3)^3 \cdot (-3d^4)^2$;

б) $\left(\frac{3}{10}p^4\right)^2 \cdot (5pc^3)^3$;

в) $\left(\left(1\frac{1}{2}x^2a\right)^3 \cdot (xa)^5\right)^2$;

г) $-(-2c^3y^2)^3 \cdot (n^2c^3y^4)^4$.

**2.124••.** Відомо, що $3x^3m^4 = 25$. Знайти значення виразу.

а) $9x^3m^4$; б) $x^3m^4$; в) $\frac{3}{5}x^3m^4$; г) $6x^6m^8$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**2.125••.** Розв'язати задачу. Для Іринки батько змайстрував з дерева триповерховий ляльковий будиночок. На кожному поверсі є 2 однакові кімнати. Підлога в цих кімнатках має форму прямокутника зі сторонами $2a$ см і $3a$ см. Іринка вирішила використати матеріал – фетр, щоб застелити підлогу в кожній кімнаті. Знайти, скільки фетру потрібно придбати для цих кімнат? Скласти вираз для знаходження вартості фетру, якщо 1 см$^2$ коштує $1{,}5y$ грн. Записати цей вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду та знайти його степінь.

Самоперевірка 2.125



**2.126••.** Побудувати кластер «Одночлен». Що ти знаєш про одночлен? Які дії ти вмієш виконувати з одночленами?

Самоперевірка 2.126



## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**2.127.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Наші дрони»*. В апробації беруть участь три дрони – A, B і C, кожний з яких має свою унікальну швидкість. Дрон A літає зі швидкістю 15 м/с, швидкість дрона B – на 3 м/с більша, ніж у дрона C, а дрон C долає 900 м за 1 хв 40 с.

б) Задача *«Єдиний соціальний внесок»*. Заробітна плата 15 працівників фірми «ЕКО-сад» складає 25 000 – 50 000 грн залежно від виду виконуваної роботи, а зарплата голови фірми – 100 000 грн. Голова сплачує єдиний соціальний внесок на загальнодержавне соціальне страхування за себе та своїх працівників у розмірі 22% від фонду заробітної плати.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*



**Аркуш «§ 2.5. Одночлен. Піднесення одночлена до степеня та множення одночленів. Стандартний вигляд одночлена»**

# Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми «Цілі вирази. Одночлени»

*Багато чого не зробиш, поки не вивчишся.*
*Але багато треба зробити,*
*щоб навчитись.* (Конфуцій)

Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Якби я тримав в одній руці істину, а в іншій – прагнення до неї, я би обрав друге!»***
***(Фердинанд Лассаль).***

Сьогодні не Кубик Блума буде тобі допомагати діагностувати, «чи ти знаєш?», «чи ти вмієш?» і «чи ти можеш?», а ти сам / сама формуватимеш свою «Я-особистість!» шляхом самостійної перевірки своєї доброчесності та власної діяльності.

**Завдання 1. Вправа: «Постав собі «*», якщо так».**

**І. Перевір свою доброчесність**

- ✓ Чи виконував / виконувала **Я** всі завдання домашньої роботи?
- ✓ Чи розв'язав / розв'язала **Я** домашні завдання самостійно?
- ✓ Чи пробував / пробувала **Я** перевіряти свої вміння хоч після одного уроку?
- ✓ Чи вів / вела **Я** облік: «знаю», «хочу дізнатися», «дізнався / дізналася»?
- ✓ Чи запланував / запланувала **Я** навчатися краще, ніж це було вчора?

**ІІ. Запитання для самоконтролю власної діяльності**

1) Чи вирізняю **Я** цілі вирази серед інших?
2) Чи вмію **Я** знаходити значення числового виразу?
3) Чи розкриваю **Я** правильно дужки?
4) Чи володію **Я** властивостями арифметичних дій?
5) Чи знаю **Я**, як застосовувати хоч один спосіб доведення тотожності?
6) Чи розумію **Я**, як отримують степінь з натуральним показником?
7) Чи вмію **Я** обчислювати степінь числа?
8) Чи можу **Я** обчислювати степінь числа на калькуляторі?
9) Чи вмію **Я** множити степені з однаковою основою та підносити степінь до степеня?
10) Чи знаю **Я**, коли показники степеня віднімають, залишаючи ту саму основу?
11) Чи вмію **Я** підносити добуток / частку до степеня?

12) Чи вмію Я прочитати число в стандартному вигляді та перетворити його на звичайне натуральне число?

13) Чи вирізняю Я серед виразів ті, що є одночленами?

14) Чи вмію Я визначати степінь одночлена?

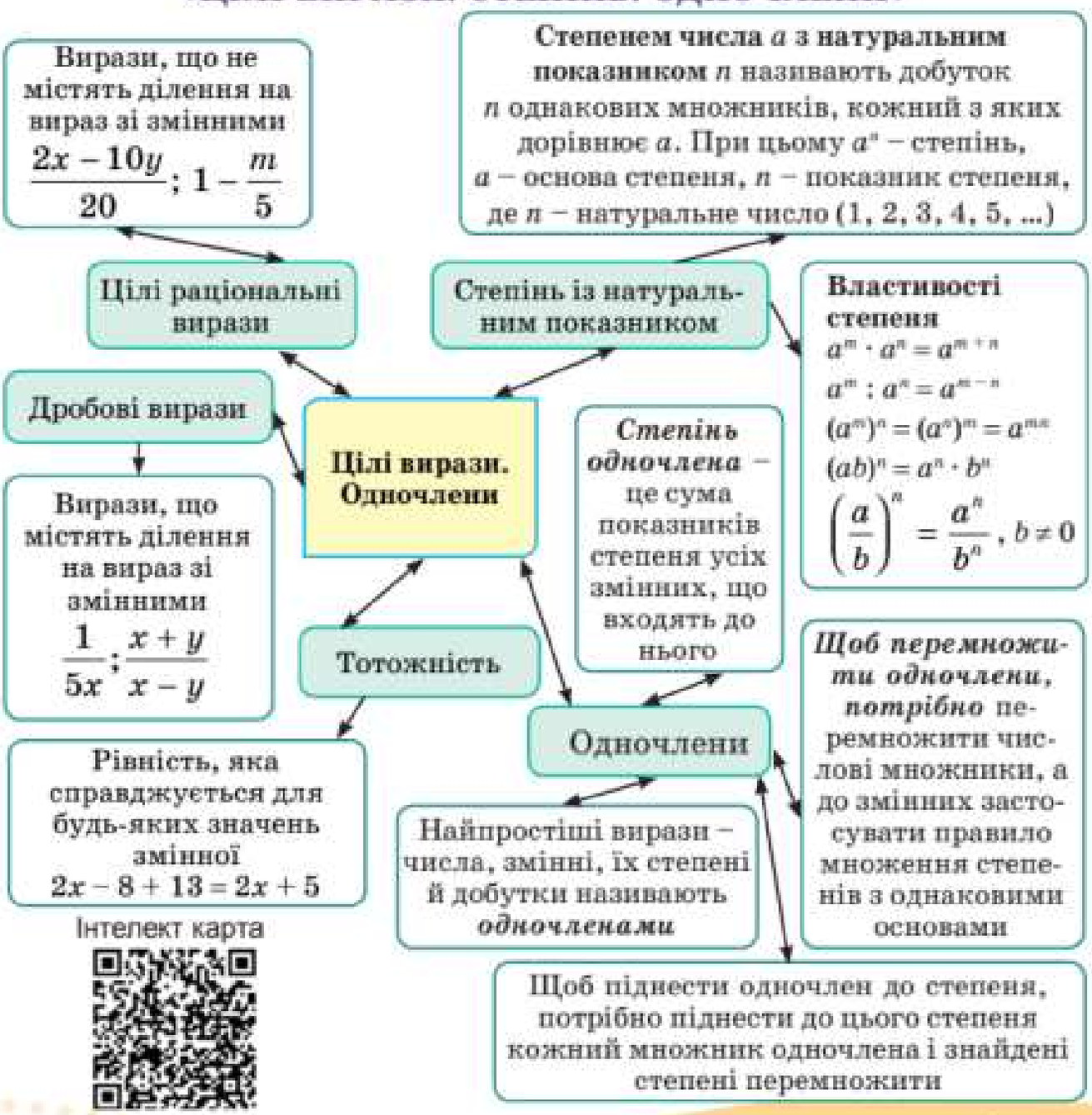
15) Чи вмію Я зводити одночлен до стандартного вигляду?

16) Чи знаю Я, як множити одночлени та підносити їх до степеня?

Зроби висновок: «Як Ти?». Чи можеш собі сказати: «Тепер Я усвідомлюю, що можу, хочу і буду вчитися!». Похвали себе, якщо ти «Молодець!»

**Завдання 2.** Розглянь інтелектуальну карту з теми «Цілі вирази. Одночлени», обміркуй, проаналізуй та подумай над своєю розробкою.

## ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА КАРТА «ЦІЛІ ВИРАЗИ. СТЕПІНЬ. ОДНОЧЛЕНИ»




Інтелект карта

## *Тренувальні вправи*

**2.128°.** Вибрати два цілих вирази.

а) $\frac{1}{3}a+b$; б) $\frac{a+b}{3a}$; в) $0{,}7a+0{,}8b$; г) $\frac{3}{a}+b$.

**2.129°.** Вибрати число, яке записано в стандартному вигляді.

А. $22{,}5\cdot10^3$; Б. $225\cdot10^2$; В. $2{,}25\cdot10^4$; Г. $0{,}225\cdot10^5$.

**2.130°.** Вибрати два вирази серед (1–5), які є тотожно рівними.

1) $2(7+x)$; 2) $2x+7$; 3) $2x+14$; 4) $7-2x$; 5) $14-2x$.

А. 1 і 2; Б. 2 і 4; В. 1 і 3; Г. 3 і 5.

**2.131°°.** Вибрати вираз, що є сумою квадратів виразів $2x$ і $3y$.

А. $2x+3y$; Б. $2x^2+3y^2$; В. $4x^2+9y^2$; Г. $4x+9y$.

**2.132°°.** Визначити показник степеня одночлена $x^6\cdot x^8\cdot(x^2)^3$, звівши його до стандартного вигляду.

А. 16; Б. 12; В. 20; Г. 14.

**2.133°°.** Знайти значення виразу $a^3-b^4$, якщо $a=2$, $b=3$.

А. $-75$; Б. $-6$; В. $-73$; Г. $-19$.

**2.134°°.** Подати добуток $3^{15}\cdot27$ у вигляді степеня.

А. $3^{45}$; Б. $3^{18}$; В. $3^{15}$; Г. $3^5$.

**2.135•.** Обчислити значення виразу $2(a+b)-c$, якщо $a+b=8$, $c=5$.

А. 21; Б. 3; В. 5; Г. 11.

**2.136•.** Увідповіднити вираз (1–4) з йому тотожним (А–Д).

| *Вираз* | *Тотожний вираз* |
|---|---|
| 1. $2(x+3)-5$ | А. $3x+20$ |
| 2. $5x+17-2x+3$ | Б. $10x-3$ |
| 3. $4-(x-7)-3x$ | В. $3x+5$ |
| 4. $8-(11-8x)+2x$ | Г. $2x+1$ |
| | Д. $11-4x$ |

**2.137•.** Визначити, який серед виразів (А–Г) тотожно рівний виразу $8-(x-5)+(12x-3)-6x$.

А. $7x-6x$; Б. $5x+10$; В. $7x-10$; Г. $5x+7$.

**2.138•.** Спростити вираз: а) $\frac{a^{10}\cdot a^7}{a^3\cdot a^6}$; б) $\frac{\left(a^3\right)^{11}\cdot a^7}{\left(\left(a^5\right)^2\right)^3}$; в) $\frac{\left(a^2\right)^7\cdot\left(a^3\right)^7}{\left(a^3\right)^{10}}$.

**2.139•.** Знайти значення виразу:

а) $(2-8x)-(8x-3)$, якщо $x=\frac{1}{4}$;

б) $12a^2b^4$, якщо $2ab^2=-11$.

**2.140•.** Довести тотожність $\left(\frac{1}{2}a^2b^3\right)^3\cdot 16a^4\cdot b^3=2a^{10}b^{12}$.

**2.141•.** Визначити показник степеня числа $a$, спростивши вираз:
а) $((-a)^3)^2\cdot(-a)^4\cdot a^5$; б) $(-(-a)^2)^3\cdot(-a)^5:a^7$.

**2.142•.** Знайти, на скільки відсотків збільшиться площа квадрата, якщо його сторону збільшити на 10 %.

**2.143•.** Знайти, на скільки відсотків зменшиться об'єм куба, якщо його ребро зменшити на 10 %.

**2.144•.** Записати в стандартному вигляді число:

а) 23 000 000; в) 1 394 500 000;

б) 12 700 000 000; г) 98 761 000 000.

**2.145••.** Визначити серед виразів (а–г) той, значення якого не залежить від значення змінної.

а) $9y-(12y-3(y-4))$;

б) $(12y-3(y-4))+9y$;

в) $(-3y(y-4)+12y)+9y$;

г) $(-12y-3(y-4))+9y$.

**2.146••.** Знайти значення виразу $\frac{3a^2-b^3}{3a-b(a-4b)}$, якщо $a=3$, $b=-2$.

**2.147••.** Скласти числовий вираз для визначення часу, за який робітник самостійно виконає певну роботу, якщо інший робітник виконує її самостійно за 15 год, а якщо вони працюватимуть разом, то виконають її за 6 год.

**2.148••.** Приватний підприємець вклав $x$ грн під 13 % річних. Скласти вираз для обчислення суми коштів, яка буде на його депозитному рахунку через:

а) 2 роки; б) 5 років; в) 30 років.

**2.149••.** Спростити вираз $a^{n+3}b^{n-2}a^{n-4}b^{4-n}$.

**2.150••.** Знайти значення виразу $\left(\frac{100^3\cdot 10^7}{2^{13}\cdot 5^{13}}\right)^3$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**2.151.** Знайти, як і на скільки відсотків зміниться площа поверхні куба, якщо спочатку його ребро збільшити на 20 %, а потім зменшити на 20 %?

**2.152.** Знайти, як і на скільки відсотків зміниться площа поверхні куба, якщо спочатку його ребро зменшити на 10 %, а потім збільшити на 10 %?

**2.153.** Узагальнити отриману інформацію з теми «Цілі вирази. Одночлени» у формі вірша – «Сенкан» за такими правилами:

1. *Перший рядок – **тема** (іменник).*
2. *Другий – **опис теми** (два прикметники).*
3. *Третій – **назва дії**, пов'язана з темою, складається з трьох дієслів.*
4. *Четвертий – **фраза**, переважно з 4-х слів, висловлює ставлення до теми, почуття.*
5. *П'ятий – одне слово – **синонім до слова (теми)**, ніби висновок вірша.*

Приклад сенкана

*Алгебра щедра, вона часто*
*дає більше, ніж у неї просять.*

Жан Лерон Д'Аламбер

# ТЕМА 3. | Цілі вирази. Многочлени

**У** цій темі ти **записуватимеш** суми і різниці одночленів одним виразом, який має спеціальну назву, і **виконуватимеш** із цими виразами всі арифметичні дії, крім ділення. Деякі з таких виразів будуть записані в стандартному вигляді, а деякі до такого вигляду **зводитимеш** ти. Для цього ти **ознайомишся** з новими поняттями і формулами. За допомогою цих **формул** ти зможеш спрощувати або обчислювати вирази і навіть використовувати ці формули для розв'язування інших вправ. Ти працюватимеш із виразами в дужках і без дужок, виконуватимеш рівносильні перетворення виразів, за потреби **розкриватимеш** дужки, перед якими будуть різні знаки, але ти зумієш і зможеш, бо **ти хочеш знати, вміти і вчитися.**

**Отже, у такому разі успіх чекає на тебе!**



# §3.1 Многочлен. Подібні члени многочлена та їх зведення. Степінь многочлена




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Невеликий прогрес щодня дає великі результати!»***.

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про вирази, які утворюють за допомогою додавання і віднімання одночленів.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**ПРИДУМАЙ**

яким одночленом замінити «зірочку», щоб отримати правильну рівність

$$* \cdot \frac{2}{3}a^3b^2 = 2a^5b^4$$

**ПОДІЛИСЯ**

як подати многочленом, на скільки км зблизяться два поїзди через 1 год 20 хв зустрічного руху зі швидкостями $a$ км/год і $b$ км/год відповідно.

**ПОЯСНИ**

як записати одночлен

$$\frac{2}{5}x^2y \cdot \frac{5}{8}xy^3$$

в стандартному вигляді.

**ЧОМУ**

вираз $0{,}81a^{12}b^{18}$ можна подати у вигляді квадрата одночлена?

**ЗАПРОПОНУЙ**

зручний спосіб обчислення значення одночлена $54x^6y^8$, якщо $3x^2y^3 = 4$.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

**НАЗВИ**

коефіцієнт одночлена $0{,}2y^3 \cdot 13x \cdot 50m$.

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Спростити** вирази:

а) $a^3 \cdot a^5 : a^7$; б) $(x^4)^3 : x^6 \cdot x^7$; в) $\dfrac{x^9 \cdot y^5}{x^8 \cdot y^6}$; г) $\dfrac{a^3 \cdot b^8 \cdot c^3}{a^4 \cdot b^8 \cdot c}$.

**2) Обчислити** значення виразів:

а) $5^3 : 5^4 \cdot 5^2$; б) $2^7 : (2^2)^3 \cdot 2^4$; в) $\dfrac{15^5}{5^5 \cdot 3^4}$.

**3) Порівняти вирази,** не обчислюючи їхніх значень:

а) $(-6)^7$ і $-6^7$; б) $(-0{,}1)^4$ і $0{,}1^4$;

в) $(-5)^3$ і $1^7$; г) $(-3)^2$ і $(-3)^3$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Усі завдання, запропоновані для дослідження в партнерстві, потребують використання властивостей степеня, а також розуміння того, що риска дробу означає дію ділення. Ці знання сприятимуть правильному виконанню дій зі степенями.

**2** Одночлен стандартного вигляду відрізняється від інших тим, що він:
- містить лише один числовий множник, який записано на першому місці;
- є добутком числа і змінних у певному степені;
- змінні в добутку не повторюються.

**3** Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, є коефіцієнтом цього одночлена.

**4** Для перетворення виразів зі степенями доцільно використовувати раніше вивчені властивості степенів.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad (a^m)^n = a^{mn}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ $\quad (ab)^n = a^n \cdot b^n$

### *Зауваж!*

Для запису одночлена використовують лише дію множення, у тому числі піднесення до степеня. Якщо записати суму одночленів, то отримаємо многочлен.

***Многочлен – це сума одночленів.***

Одночлени, з яких складається многочлен, називають *членами* цього *многочлена*.

Якщо многочлен містить два члени, то його називають ***двочленом***, а якщо три – то ***тричленом***.

Члени многочлена можна міняти місцями.

Наприклад, $2x + 3y^2 = 3y^2 + 2x$.

Члени многочлена називають *подібними*, якщо їхні буквені частини однакові. Подібні члени многочлена це те саме, що й подібні доданки.

Додавання подібних членів многочлена називають *зведенням подібних членів*.

*Щоб звести подібні доданки*, треба додати їхні коефіцієнти і отриманий результат помножити на спільну буквену частину.

Наприклад, $2a + 3a - a = (2 + 3 - 1)a = 4a$.

***Зауваж! Це важливо!***

***Степенем многочлена*** називають найбільший зі степенів одночленів, що до нього входять.

Наприклад, $2x + 1$ та $5a - 3b + 9c$ – многочлени 1-го степеня; $-23a^2 + 4c + c^2$ та $0{,}2 + mn$ – многочлени 2-го степеня.

## *Тренувальні вправи*

**3.1°.** Вибрати многочлени серед пропонованих виразів:

$2mn^2$; $\frac{2}{3}xyz + 54$; $5a - 4b$; $20 : 4k$.

**3.2°.** Перенести таблицю в зошит і заповнити її.

| Многочлен | Члени многочлена | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Перший | Другий | Третій | Четвертий |
| $7a - 3d + 4c - 14$ | | | | |
| $-3{,}5x^2 + 1{,}2y - 4xy - 1$ | | | | |
| | $5m^3$ | $-3n^2$ | $-5mn$ | 100 |

**3.3°.** Визначити степінь многочлена:

а) $100 - a$;

б) $-\frac{1}{2}y^2 + 2 + 3y$;

в) $\frac{5}{7}d^6 + \frac{2}{3}k^8$;

г) $x^2 - 5y^3$.

**3.4°.** Звести подібні члени многочлена:

а) $3x - 2x + 7x$;

б) $-\frac{1}{2}m + 2{,}5m - m$;

в) $5ab - 2b + 5ab$;

г) $2{,}7x^2 + 3{,}9x^2 - 7{,}1x$.

**3.5°.** Навести приклади многочленів, що містять подібні доданки, та многочленів, що їх не містять, а також вказати їхній степінь.

**3.6°°.** Упорядкувати парами многочлени (1–4) та тотожні їм вирази (А–Е).

| *Многочлен* | *Тотожний вираз* |
|---|---|
| 1. $a + (b + c)$ | А. $a - b - c$ |
| 2. $a - (b + c)$ | Б. $a + b - c$ |
| 3. $a - (b - c)$ | В. $-a - b - c$ |
| 4. $a + (b - c)$ | Г. $a + b + c$ |
| | Д. $-a - b + c$ |
| | Е. $a - b + c$ |

**3.7°°.** Поставити у відповідність кожному многочлену (1–4) його степінь (А–Д).

| *Многочлен* | *Степінь многочлена* |
|---|---|
| 1. $\frac{2}{3}mn+\frac{1}{3}m-\frac{1}{3}n$ | А. 1 |
| 2. $2a^2-5a^3$ | Б. 2 |
| 3. $p^4-k^5$ | В. 3 |
| 4. $y-x$ | Г. 4 |
| | Д. 5 |

**3.8°°.** Обчислити значення многочлена:

а) $x^2+7x-3$, якщо $x=9$;

б) $\frac{2}{3}a+\frac{4}{5}b$, якщо $a=18$, $b=25$;

в) $-y^3+y^2-y+1$, якщо $y=-1$.

**3.9°°.** Вибрати многочлен, значення якого після зведення подібних членів дорівнюватиме 2:

а) $2a^2-a^2$; б) $\frac{2}{5}x+1\frac{3}{5}x$; в) $-6k+2+4k+2k$; г) $mn+mn$.

**3.10•.** Критично оцінити процес зведення подібних доданків.

| |
|---|
| а) $-3x^2+8x^2=8x^2-3x^2=(8-3)x^2=5x^4$; |
| б) $2{,}45x^2y-3{,}75x^2y=(2{,}45-3{,}75)x^2y=-1{,}3x^2y$; |
| в) $3{,}5ab^2+1{,}5a^2b=(3{,}5+1{,}5)a^2b=5a^2b^2$; |
| г) $y^{10}-y^4-y^4=y^{10-4-4}=y^2$. |

**3.11•.** Звести подібні члени многочлена:

а) $13xx-8x^2$; б) $2{,}4xxx-1{,}8x^3$;

в) $-2xy+7x-2y+0{,}5xy-5x-2x+y$;

г) $7{,}3ab^2-1{,}2a^2b+2{,}5a^2b-ab^2+a^2b^2$.

***Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»***

**3.12••.** Одна сторона прямокутника – $x$ см, а інша – втричі довша. Скласти вираз для знаходження периметра прямокутника. Отриманий вираз спростити.

**3.13**••. Одна сторона прямокутника завдовжки $a$ см, а інша – на 3,5 см довша. Скласти вираз для знаходження периметра прямокутника. Отриманий вираз спростити.

**3.14**••. Звести подібні члени многочлена та обчислити його значення:

а) $\frac{5}{2}xy^2 + 2{,}8x^2y - 0{,}4xy^2$, якщо $x=2$, $y=\frac{5}{7}$;

б) $\frac{5}{12}m + \frac{7}{9} + \frac{2}{3}m - \frac{4}{9}n - \frac{1}{12}m$, якщо $m=4{,}7$, $n=27$;

в) $-5c^2 - 2c + 15c^2 + 12c$, якщо $c = -0{,}1$.

**3.15**••. Подати вираз у вигляді многочлена, якщо запис $\overline{abc}$ означає трицифрове число: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

а) $\overline{kpr}$ б) $\overline{2mn}$; в) $\overline{xy}$;; г) $\overline{abcd}$.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**3.16.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Рух річкою»*. Швидкість катера за течією річки дорівнює 23,5 км/год, а швидкість течії – $v$ км/год. Катер плив проти течії 2 год.

б) Задача *«Магазин канцтоварів»*. Василько купив 5 ручок по $a$ грн, 8 олівців по $b$ грн та кольоровий папір за $c$ грн.

в) Задача *«Ландшафтний дизайн»*. Клумба має форму прямокутника, одна зі сторін якого – 12 м. Клумбу огороджено парканом завдовжки $p$ м.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 3.1. Многочлен. Подібні члени многочлена та їх зведення. Степінь многочлена».**

Перевір себе
«Як ти?»

# §3.2 Додавання й віднімання многочленів




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Секрет просування вперед – це почати»*** (Марк Твен).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та навчимося нових знань про многочлени.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** степінь многочлена $12xy^3+9x^2-50x^2y$.

**ПОЯСНИ** процес утворення формули площі поверхні куба, ребро якого дорівнює $2a$.

**ЧОМУ** значення виразів $(3x)^2-(5y)^2$ і $(3x-5y)^2$ будуть різними для $x=3$, $y=2$, але рівними для $x=10$, $y=6$?

**ПРИДУМАЙ** ідею швидкого обчислення значення виразу

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}.$$

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями обчислювати значення виразу

$$\frac{1}{6}a^3+1\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{6}a^3, \text{ якщо } a=3.$$

**ЗАПРОПОНУЙ** вираз, щоб записати, скільки кілограмів борошна у двох мішках, якщо в одному $a$ кг, а в другому на $2b$ кг більше.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Звести** подібні члени многочленів:

а) $-4,5c-7,8c+3,2c$;

б) $-\frac{5}{8}x+\frac{1}{2}x-0,5$;

в) $19a-23b+17b-25a$;

г) $5,1y^3-4,8y+4,9y^3-y$.

**2) Обчислити** значення многочленів:

а) $6,7xy^2+12,5xy^2-3,8xy^2$, якщо $x=25$, $y=2$;

б) $\frac{4}{15}a+\frac{2}{7}b+\frac{2}{3}a+\frac{5}{7}b-\frac{1}{5}a$, якщо $a=15$, $b=48$;

в) $-31k^2-29k^3+25k^2+43k^3-15k^4$, якщо $k=-1$.

**3) Визначити** степінь многочленів:

а) $mn-m+n$; в) $4edc-6kp$;

б) $\frac{2}{9}y^2+\frac{5}{8}y^3+y^5$; г) $a^2-5b^3+3a^2b^2$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Зводити подібні члени многочлена – це вміння виконувати додавання цілих і раціональних чисел, адже побачити однакові буквені вирази не складно. Кількість членів многочлена дорівнює кількості доданків-одночленів.

**2** Під час обчислення значення многочлена, спочатку зводять його подібні члени, а відтак – шукають значення. Важливо при цьому дотримуватися порядку виконання дій та правильно застосовувати їхні властивості.

**3** Степінь многочлена визначають за означенням: це найбільший зі степенів одночленів, що до нього входять.

***Зауваж!***

**Щоб знайти суму многочленів потрібно:**

1) скласти відповідний вираз, узявши кожний многочлен в дужки та записавши між ними знак «+»;
2) в одержаному виразі розкрити дужки та звести подібні доданки, якщо такі є.

Наприклад, знайдемо суму многочленів $5a+3b$ та $4a-7b$:
$(5a+3b)+(4a-7b)=5a+3b+4a-7b=9a-4b$.

**Щоб знайти різницю многочленів потрібно:**

1) скласти відповідний вираз, узявши кожний многочлен в дужки та записавши між ними знак «–»;
2) в одержаному виразі розкрити дужки та звести подібні доданки, якщо такі є.

Наприклад, знайдемо різницю многочленів $-4x^2+11y$ та $2y+8x^2$:
$(-4x^2+11y)-(2y+8x^2)=-4x^2+11y-2y-8x^2=9y-12x^2$.

***Зауваж! Це важливо!***

Якщо перед дужками стоїть знак «+», то розкриваючи дужки, всі знаки доданків у дужках залишаємо без змін.

Наприклад: $a+(2,3-b)=a+2,3-b$.

Якщо перед дужками стоїть знак «$-$», то розкриваючи дужки, знаки всіх доданків у дужках замінюємо на протилежні.

Наприклад, $-(y-3,2)=-y+3,2=3,2-y$;

$2x-(y+7,4)=2x-y-7,4$.

## Тренувальні вправи

**3.17°.** Виконати дію:

а) $(3x+7y)+(10x-12y)$;

б) $-(9k+12m)+(15m-k)$;

в) $(-16a+24b)-(37a+21b)$;

г) $(2,3x^3+4,1c)-(1,2c-0,5x^2)$.

**3.18°.** Знайти суму многочленів:

а) $2c-4d$ та $7c+4d$;

б) $\frac{3}{5}x+\frac{3}{4}y$ та $0,25x-0,5y$;

в) $33a+25b$ та $8b-45a$;

г) $-6,4a^2-9,2$ та $4,7+0,3a^2$.

**3.19°.** Знайти різницю многочленів:

а) $7a+6b$ та $12a-2b$;

б) $0,2x-8,3y$ та $-2,5x+1,4y$;

в) $\frac{3}{4}m+\frac{2}{5}n$ та $\frac{1}{2}n-\frac{2}{15}m$;

г) $1,4y^2-1,7y$ та $-9,2y-0,9y^2$.

**3.20°.** Записати вираз та спростити його, якщо це можливо:

а) потроєна сума чисел $a$ і 34;

б) подвоєний добуток квадратів чисел $x$ і $y$;

в) піврізниця чисел $m$ і $c$;

г) третина добутку чисел $b$ і $d$.

**3.21°.** Записати словами вираз:

а) $2(x+y)$; б) $0,5(c-k)$; в) $\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$; г) $3n\cdot p^3$.

**3.22°°.** Увідповіднити суму многочленів (1–4) з тотожно рівним їй виразом (А–Е).

| *Сума многочленів* | *Тотожно рівний вираз* |
|---|---|
| 1. $(a-b)+(b+a)$ | А. 0 |
| 2. $(a-b)+(b-a)$ | Б. $-2b$ |
| 3. $(b-a)+(b+a)$ | В. $-2a$ |
| 4. $(a-b)+(b-a)$ | Г. $2b$ |
| | Д. $-2a-2b$ |
| | Е. $2a$ |

**3.23°°.** Увідповіднити різницю многочленів (1–4) з тотожно рівним їй виразом (А–Е).

| *Різниця многочленів* | *Тотожно рівний вираз* |
|---|---|
| 1. $(x-y)-(y+x)$ | А. $2x$ |
| 2. $(x-y)-(y-x)$ | Б. $-2y$ |
| 3. $(y-x)-(y+x)$ | В. $-2x$ |
| 4. $(x-y)-(-y-x)$ | Г. $2y$ |
| | Д. $2x-2y$ |
| | Е. $0$ |

**3.24°°.** Знайти суму і різницю многочленів:

а) $-5a^2+3ab-8b^3$ та $9a^2+ab+2b^3$;

б) $\frac{1}{5}x+\frac{3}{20}y$ та $\frac{1}{15}x-\frac{1}{2}y$;

в) $5q^3-6q^2+q$ та $-q^3+2q^2-4q$.

**3.25°°.** Вибрати пару многочленів, сума яких за даних умов дорівнюватиме 100:

а) $2a^2-25a$ та $a^2+a$, якщо $a=5$;

б) $7\frac{3}{4}x-1\frac{2}{3}y$ та $2\frac{1}{4}x-8\frac{1}{3}y$, якщо $x=15$, $y=5$;

в) $3{,}6m+2{,}2n$ та $-4{,}85m+5{,}3n$, якщо $m=20$, $n=10$;

г) $-1{,}2c^2-3{,}9d^2$ та $c^2+0{,}5d^2$, якщо $c=-2$, $d=-4$.

**3.26•.** Критично оцінити процес знаходження суми або різниці многочленів.

а) $(15b^2-31cd)+(-3b^2+17cd)=15b^2-31cd-3b^2+17cd=$
$=(-15b^2-3b^2)+(-17cd-31cd)=-18b^2-48cd$;

б) $\left(\frac{5}{12}m-\frac{2}{7}n\right)-\left(\frac{3}{14}n-\frac{1}{24}m\right)=\frac{5}{12}m+\frac{1}{14}n-\frac{2}{7}n=\frac{11}{24}m-\frac{1}{2}n$;

в) $(-12{,}3x+32{,}5y)+(-24{,}8y+4{,}7x)=$
$=-12{,}3x-32{,}5y+24{,}8y+4{,}7x=-7{,}6x+57{,}3y$;

г) $(7{,}2k^2q-1{,}4kq^2)-(3{,}6k^2q+8{,}3kq^2)=$
$=7{,}2k^2q-1{,}4kq^2-3{,}6k^2q-8{,}3kq^2=3{,}6k^2q-9{,}7kq^2$.

**3.27•.** Записати вираз до умови задачі.

а) Знайти периметр квадрата, сторона якого дорівнює $2x$ см.

б) Знайти периметр трикутника зі сторонами $a$ см, $b$ см і $c$ см.

в) Знайти периметр прямокутника, одна сторона якого дорівнює $a$ см, а інша – на $(2a+7)$ см довша.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**3.28**•• Довести, що сума трьох послідовних натуральних чисел кратна числу 3.

**3.29**•• Довести, що сума чотирьох послідовних натуральних чисел НЕ є кратною числу 4.

**3.30**•• Знайти суму многочленів та обчислити її значення.

а) $9x^2-xy+8y^2$ та $x^2+5xy-11y^2$, якщо $x=4$, $y=3$;

б) $\frac{3}{8}a \quad \frac{5}{6}b$ та $\frac{1}{12}a+\frac{2}{9}b$, якщо $a=24$, $b=18$;

в) $-2{,}5k^2-31k$ та $1{,}5k^2+21k$, якщо $k=-1$.

**3.31**•• Подати вираз у вигляді многочлена, якщо запис тризначного числа $\overline{abc}$ має вигляд: $\overline{abc}=100a+10b+c$.

а) $\overline{2ab5}$; б) $\overline{5m9n}$; в) $\overline{xy2}+\overline{yx8}$; г) $\overline{abc}-\overline{cba}$.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**3.32**•• Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Рух туриста»*. У першу годину турист рухався зі швидкістю $v$ км/год, а далі його швидкість щогодини зменшувалася на 0,5 км/год.

б) Задача *«Книжкова крамниця»*. Марійка придбала собі збірку казок за $x$ грн, брату – пригодницький роман, що на 50 грн дорожчий за збірку казок, а мамі – збірку віршів, яка вдвічі дорожча за збірку казок.

в) Задача *«Ландшафтний дизайн»*. Клумба має форму прямокутника, одна сторона якого – $a$ м, а інша – втричі довша.

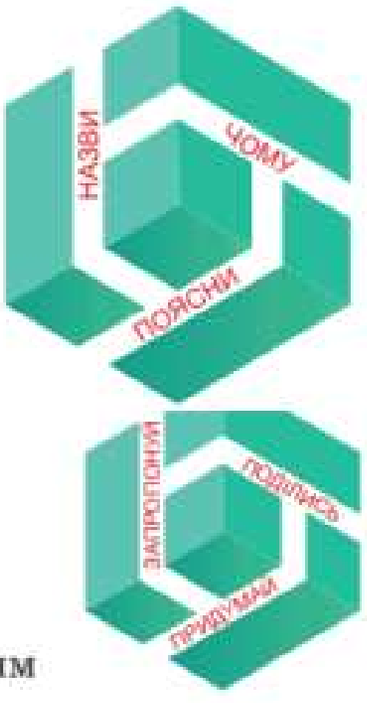
г) Задача *«Сімейний бюджет»*. Вартість одного кубометра води – $k$ грн. Сім'я складається з 3 осіб, кожний з яких використовує 20 л води щодня.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§ 3.2. Додавання, віднімання многочленів».**

# §3.3 Множення одночлена на многочлен




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Навчання ніколи не виснажує розум»*** (Леонардо да Вінчі).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про многочлени.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** значення виразу $\left(\frac{11}{20}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^3$ десятковим дробом.

**ПОЯСНИ**, як знайти різницю многочленів $6{,}1a-0{,}5b$ і $-7{,}3a+2$.

**ЧОМУ** рівняння $\frac{2{,}4x+48}{8}=0$ має один корінь, а рівняння $(2{,}4x+48)(x-8)=0$ – два корені?

**ПРИДУМАЙ** спосіб доведення подільності виразу $11^9-11^8-11^7$ на 109.

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями пошуку швидкості течії річки, якщо моторний човен за течією річки плив зі швидкістю $a$ км/год, а проти течії – зі швидкістю $b$ км/год.

**ЗАПРОПОНУЙ** спосіб доведення тотожності

$$(3a^2+2b^2+c^2)+(b^2-2a^2-3c^2)-(a^2+3b^2-2c^2)=0.$$

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти,** до якого многочлена треба додати $5x^2-x+12$, щоб одержати многочлен:

а) $3x^3-9x^2+5x+7$; б) $2x^3+4x^2-8x-2$.

**2) Обчислити** значення многочленів:

а) $6{,}7xy^2+12{,}5xy^2-3{,}8xy^2$, якщо $x=25$, $y=2$;

б) $\frac{7}{12}n+\frac{11}{15}m+\frac{2}{3}m+\frac{5}{4}n$, якщо $m=30$, $n=6$.

3) **Визначити,** чи при будь-яких значеннях змінної набуватиме невід'ємних значень вираз

$$(7m^7+5m^5-1)-(m^8+6m^7-7m^5)-(m^7+5m^4+12m^5).$$

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Завдання 1 для дослідження в партнерстві можна було сформулювати інакше, наприклад так: за відомою сумою многочленів і одним з доданків-многочленів, знайти інший доданок-многочлен. Тобто в алгебрі також трапляються випадки, коли потрібно скористатися правилом пошуку невідомого компонента арифметичної дії. Але пошук доданка-многочлена буде складнішим, ніж пошук доданка-числа.

**2** Обчислення насправді дуже просте, якщо правильно згрупувати доданки та помітити, що сума чисел 7 і 8 закінчується на 5, а сума 0,5 і 0,5 – це 1. Тобто спочатку потрібно провести дослідження завдання, проаналізувати його дані, а вже наостанок виконати дію – реалізацію плану (ДАР), це формує здатність шукати способи розв'язування.

**3** Знаки «+» і «–» перед дужками – це вибір способу розкриття дужок: або переписують всі доданки без зміни, або перед кожним доданком змінюють знак на протилежний.

***Зауваж!***

Дослідження *розподільної властивості множення*

$$c(a+b)=ca+cb.$$

| Ліва частина рівності | Права частина рівності |
|---|---|
| Це добуток чи сума? | |
| Добуток одночлена на двочлен | Сума добутків кожного члена двочлена на одночлен |
| Чи можна стверджувати, що розподільна властивість множення – це математична модель множення одночлена на многочлен, у тому числі, коли доданків буде більше, ніж два? | |
| Відповідь: ? | |

***Зауваж! Це важливо!***

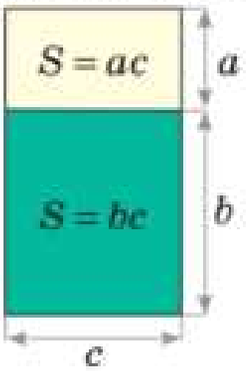
*Щоб помножити многочлен на одночлен, потрібно кожний член многочлена помножити на цей одночлен і результати додати.*

Отже, *добутком многочлена на одночлен* є многочлен, члени якого є добутками кожного члена многочлена на цей одночлен.

Наприклад, $a\cdot(b+c+d+k)=ab+ac+ad+ak$.

Множення одночлена на многочлен можна зобразити схемою:






Многочлени, як і числа, бувають *протилежними*. Це такі два многочлени, які відрізняються знаком, інакше кажучи, один многочлен дорівнює іншому, помноженому на $(-1)$.

Наприклад, многочлени $7a-4b+c$ та $-7a+4b-c$ – протилежні, оскільки $-7a+4b-c=-(7a-4b+c)$.

## Тренувальні вправи

**3.33°.** Виконати дію.

а) $3(x+y)$; б) $-16(k+c)$; в) $-3{,}5(p-b)$; г) $2{,}8(-x^2-x)$.

**3.34°.** Помножити одночлен на многочлен.

а) $(a+3)\cdot 5$; б) $\frac{2}{3}(x+15)$; в) $(b-c)\cdot a$; г) $-5{,}9\,(x^2-1)$.

**3.35°.** Розкрити дужки.

а) $5(a+b-c)$; б) $0{,}7(x-3+y)$; в) $\frac{3}{4}(m+n-8)$; г) $-4a(p-k+c)$.

**3.36°.** Заповнити в зошиті таблицю, перемноживши вирази на перетині рядків і стовпців.

| | $a-7$ | $4a-3b$ | $1{,}3a+0{,}2b-5{,}4c$ | $\frac{2}{15}a^3-0{,}1a^5$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | | | |
| $3a$ | | | | |
| $-5a$ | | | | |

**3.37°.** Записати многочлен, протилежний даному.

а) $2a-8b+5c$; в) $-m^3+22mn-5n$;

б) $-7x^3y+5x^3-4y$; г) $6fg+2f^2-3g^3$.

**3.38°.** Виконати дію.

а) $x(x+3)$; б) $5c(c+d)$; в) $a(1-a)$; г) $\frac{1}{3}x(6x-3)$.

**3.39°°.** Увідповіднити добутки (1–4) та тотожні їм вирази (А–Е).

| *Добуток* | *Тотожний вираз* |
|---|---|
| 1. $3(a-b)$ | А. $-3a+3b$ |
| 2. $3(b-a)$ | Б. $-3a-3b$ |
| 3. $(b+a)\cdot 3$ | В. $6ab$ |
| 4. $3(-a-b)$ | Г. $3a-3b$ |
| | Д. $-6ab$ |
| | Е. $3a+3b$ |

**3.40°°.** Увідповіднити добутки (1–4) та тотожні їм вирази (А–Е).

| *Добуток* | *Тотожний вираз* |
|---|---|
| 1. $5x(x-4)$ | А. $5x^2+20x$ |
| 2. $5x(x+4)$ | Б. $20x-5x^2$ |
| 3. $-5x(x+4)$ | В. $5x^2-4$ |
| 4. $-5x(x-4)$ | Г. $-20x+5x^2$ |
| | Д. $-20x-5x^2$ |
| | Е. $5x^2-20x$ |

**3.41°°.** Виконати дію.

а) $a(a^3+15)$; б) $-\frac{2}{5}c\left(c^2+c\right)$; в) $-c(2-c^2)$; г) $-6{,}3y(y^2-10)$.

**3.42°°.** Розв'язати рівняння.

а) $5(x+1)=7$; в) $-\frac{3}{4}(24-y)=16$;

б) $2(c-11)=-3$; г) $2{,}5(z-10)=-5$.

**3.43°°.** Помножити одночлен на многочлен.

а) $3ab(5a+6b)$; в) $(4b+7c)\cdot(-10bc)$;

б) $-9xy(x-11y)$; г) $(4m-7n)\cdot(-0{,}2mn)$.

**3.44*.** Критично оцінити процес множення одночлена на многочлен.

| |
|---|
| а) $8mk(3k+m)=8mk\cdot 3k+8mk\cdot m=24mk+8m^2k$; |
| б) $-5ab(a-0{,}2b)=-5ab\cdot a+5ab\cdot(-0{,}2b)=5a^2b-ab^2$; |
| в) $(15m-8n)\cdot 0{,}5mn=15m\cdot 0{,}5mn-8n\cdot 0{,}5mn=7{,}5m^2n-4mn^2$; |
| г) $(12x+27y)\cdot\left(-\frac{1}{3}xy\right)=12x\cdot\left(-\frac{1}{3}xy\right)+27y\cdot\left(-\frac{1}{3}xy\right)=4x^2y+9xy^2$. |

**3.45*.** Записати, використовуючи степені числа 10:

а) двоцифрове число, у якому $m$ десятків і $n$ одиниць;

б) трицифрове число, у якому $a$ сотень, $b$ десятків та $c$ одиниць;

в) трицифрове число, у якому $k$ сотень, 5 десятків та 8 одиниць;

г) чотирицифрове число, у якому $p$ тисяч, $t$ сотень, $f$ десятків і $r$ одиниць.

**3.46**.** Знайти добуток.

а) $6a^2b(2a^3b^2-7ab^5+9a^2b^2)$;

б) $(2x^2y-1{,}5x^2y^3-0{,}3x^4y)\cdot(-xy)$;

в) $(-6{,}4c^3d^6+0{,}7c^2d^3-5{,}1c^5d)\cdot(-c^3d^2)$;

г) $\left(-\frac{2}{3}kn\right)^2\cdot\left(-3kn^4+1{,}5k^2n+21kn^3\right)$.

**3.47**.** Розв'язати рівняння.

а) $6(x-1)-x=9$;

б) $5(2-3x)-7=1$;

в) $(2x+1)\cdot 7=3{,}5$;

г) $8(x-3)+3(x+5)=15$;

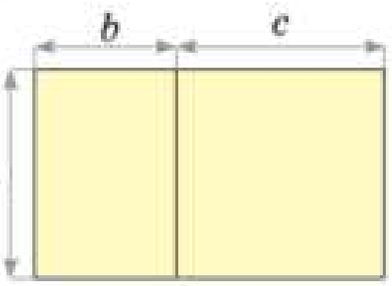
д) $-3(8+6y)-7(5-2y)=0$;

е) $\frac{1}{2}(z-4)+\frac{1}{5}(z+10)=1$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**3.48**.** Довести, що сума чисел $\overline{xyz}$, $\overline{yzx}$, $\overline{zxy}$ ділиться на 111.

**3.49**.** Записати двома способами формулу для обчислення площі фігури, яку зображено на малюнку.




## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**3.50.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Рух річкою»*. Катер за течією річки плив 4 години, а проти течії – 3 години. Швидкість катера – $x$ км/год, а швидкість течії – $y$ км/год.

б) Задача *«Сімейний бюджет»*. Сім'я з 4 осіб використовує $a$ м$^3$ газу на місяць, з яких 0,1 витрачається на приготування їжі. Тариф на газ складає $b$ грн/м$^3$.

Перевір себе «Як ти?»

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 3.3. Множення одночлена на многочлен».**

# §3.4 Множення многочлена на многочлен. Стандартний вигляд многочлена




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Чим більше знаєш, тим більше можеш»*** (Едмон Абу).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про многочлени.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** значення $x$, при якому є рівними значення многочленів $x^2-6x+12$ та $x^2+4x-18$.

**ПОЯСНИ**, як знайти значення $a$, при якому рівняння $(a-2)\cdot x=15$ не має коренів.

**ЧОМУ** вираз $\frac{a}{8}-\frac{b}{6}-1$ можна подати у вигляді дробу?

**ПРИДУМАЙ** ідею швидкого обчислення значення виразу

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}.$$

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями спрощення виразу

$$a(a+3)-a(4a-1)+3a(a+7).$$

**ЗАПРОПОНУЙ**, скільки потрібно заплатити за 3 блокноти і 6 зошитів, якщо блокнот коштує $a$ грн, а 12 зошитів – $k$ грн.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** добуток одночлена на многочлен:

а) $-9b(5-2b)$; б) $1{,}7x(2{,}3y-0{,}6x)$.

**2) Обчислити** значення виразу $2(2{,}5x+y)+3(5x-3y)$, якщо $x=0{,}4$, $y=-0{,}2$.

**3) Визначити** значення змінної, щоб справджувалася рівність:

а) $9(x-4)=7$; в) $\frac{1}{2}(3{,}6-z)=-0{,}8$;

б) $-5(y-6)=12$; г) $-1{,}5(-a-3)=-4$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** У першому завданні на дослідження потрібно уважно виконати множення одночлена, який в одному випадку від'ємний, в іншому – додатний, на кожний член двочлена, які також мають свої знаки. Добуток двох одночленів, що мають однакові знаки, буде із знаком «+», а добуток двох одночленів, знаки яких різні, буде із знаком «–».

**2** Застосування розподільної властивості множення (у завданні 2 на дослідження) збільшить коефіцієнти одночленів, а також утворить многочлен, що міститиме подібні члени. Щоб уникнути громіздких обчислень, потрібно звести подібні доданки, і вже насамкінець підставити значення змінних та виконати обчислення.

**3** Визначити значення змінної, щоб справджувалась рівність (завдання 3 на дослідження) – це те саме, що й розв'язати рівняння. Розпочати розв'язання цих рівнянь можна двома способами: або одразу поділити обидві частини рівняння на число, що є множником перед дужкою, або розкрити дужки, застосувавши розподільну властивість множення. А далі залишиться розв'язати отримані рівняння, а отже, знайти значення змінної.

### *Зауваж!*

Досліджуючи *розподільну властивість множення* $c(a+b)=ca+cb$ *для* $c=m+n$, отримаємо:

$$(m+n)(a+b)=(m+n)a+(m+n)b=ma+na+mb+nb.$$

Отже, $(m+n)(a+b)=ma+na+mb+nb$.

Щоб **помножити многочлен на многочлен** потрібно кожний член одного многочлена помножити на кожний член іншого многочлена, записати суму цих добутків і звести подібні доданки, якщо такі є.

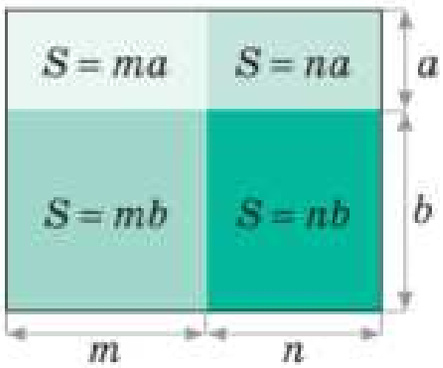
### *Зауваж! Це важливо!*

**Добуток двох многочленів** – це вираз, що є сумою добутків кожного члена одного многочлена на кожний член іншого многочлена.

Наприклад, $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

Множення многочлена на многочлен можна зобразити схемою:






Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають *многочленом стандартного вигляду*.

Наприклад, $a+b$; $x^2-7xy+4$; $2m^3-0{,}4n^2+mn$ – многочлени, які записано в стандартному вигляді.

**Щоб звести многочлен до стандартного вигляду потрібно:**

1) звести кожний член многочлена до стандартного вигляду;
2) звести подібні члени многочлена, якщо такі є.

## Тренувальні вправи

**3.51°.** Указати многочлен, який записано в стандартному вигляді.

а) $10x+5y$;
б) $3b-7c+b$;
в) $-3ab-5ba+1$;
г) $4{,}6x^2z-xz+1{,}7xz^2$;
д) $8y\cdot y^2-5x^3$;
е) $23mn-18mn^2-34m^3$.

**3.52°.** Звести многочлен до стандартного вигляду.

а) $0{,}2a+5{,}6a-2{,}5a$;
б) $2y-3z+1-5y-7z+6$;
в) $\frac{1}{5}ac-\frac{1}{6}bc-\frac{2}{15}ac-\frac{1}{3}bc$;
г) $3x^2-2xy+5x^2+xy$.

**3.53°.** Виконати дію.

а) $(3+a)(b+1)$;
б) $(x-2)(y+3)$;
в) $(m+5)(n-2)$;
г) $(a+8)(1+c)(p-k)$.

**3.54°.** Помножити многочлен на многочлен.

а) $(x+y)(c+a)$;
б) $(b-5)(b+5)$;
в) $(m+1)(m+1)$;
г) $(-p-k)(p+k)$.

**3.55°.** Виконати дію.

а) $(2a+b)(a+2b)$;
б) $(3c-2d)(3c+2d)$;
в) $(2a-1)(1-2a)$;
г) $(3x-5)(7-2x)$.

**3.56°°.** Увідповіднити многочлен (1–4) та його стандартний вигляд (А–Е).

| *Многочлен* | *Стандартний вигляд многочлена* |
|---|---|
| 1. $a(a-b)-a^2$ | А. $b^2$ |
| 2. $(b-a)\cdot b+ab$ | Б. $-b^2$ |
| 3. $(b+a)\cdot a-a^2$ | В. $-ab$ |
| 4. $a(a-b)+ab$ | Г. $-a^2$ |
| | Д. $ab$ |
| | Е. $a^2$ |

**3.57°°.** Увідповіднити рівняння (1–4) і його корінь (А–Е).

| *Рівняння* | *Корінь рівняння* |
|---|---|
| 1. $5(x+4)-x=24$ | А. немає коренів |
| 2. $(x+1)(x+4)=x^2-1$ | Б. 1 |
| 3. $-x(x+4)=x(1-x)$ | В. 0 |
| 4. $(x+3)(x-3)=x^2$ | Г. 2 |
| | Д. $-1$ |
| | Е. $-2$ |

**3.58°°.** Виконати множення.

а) $(4a^2+8)(a^3+15)$;
б) $(5x^2+1)(3-2x)$;
в) $(5y^3-y)(3y+2y^2)$;
г) $(-9z^2-2z^4)(z^2+7z)$.

**3.59°°.** Звести многочлен до стандартного вигляду та обчислити його значення.

а) $(x-2)(x+6)-x^2$, якщо $x=2{,}5$;
б) $(a-3b)(a+3b)$, якщо $a=-4$, $b=12$;
в) $(-0{,}4m+1{,}8n)(0{,}5m-n)-0{,}5mn$, якщо $m=-5$, $n=2$;
г) $\left(\frac{1}{4}x+2y\right)\left(\frac{1}{4}x+2y\right)-xy$, якщо $x=4$, $y=-3$.

**3.60°°.** Скласти вираз за умовою задачі.

В актовій залі гімназії $x$ рядів по $y$ стільців у кожному. Знайти:

а) загальну кількість стільців у залі;
б) кількість стільців, якщо кількість рядів подвоїти;
в) кількість стільців, якщо рядів стане на 2 більше, а місць у кожному ряду – на 5 менше;
г) кількість стільців, якщо рядів стане на 3 менше, а місць у кожному ряду – на 3 більше.

**3.61•.** Критично оцінити процес множення многочлена на многочлен.

| |
|---|
| а) $(b+5)(b-8)=b(b-8)+5(b-8)=2b-8b+5b-40=6b-40$; |
| б) $(5a-c)(a-2c)=5a(a-2c)-c(a-2c)=5a^2+10ac-ac-2c^2=$ $=5a^2+9ac-2c^2$; |
| в) $(10x^2-4y)(8x+3y^2)=10x^2\,(8x+3y^2)-4y(8x+3y^2)=$ $=80x^2+30x^2y^2-32x^2y^2-12y^3=80x^2+-32x^2y^2-12y^3$; |
| г) $(-1{,}5m-2n)(4m-0{,}2n)=-1{,}5m(4m-0{,}2n)-2n(4m-0{,}2n)=$ $=-6m^2n+0{,}3mn-8mn-0{,}4n^2=-6m^2n-7{,}7mn-0{,}4n^2$. |

**3.62•.** Розв'язати рівняння.

а) $(x-3)(x-1)-x^2=8$;

б) $(5-y)(4+y)=21-y^2$;

в) $2z(1-z)-3(z+2)=z(1-2z)$;

г) $a(a-12)-(a^2+6)=0$;

д) $(c+3)(2+3c)=c(2+3c)$;

е) $(2x-13)(6x+8)=(3x-7)(4x+16)$.

**3.63••.** Знайти добуток.

а) $(8a^2b^3+3a^3b)(ab^6+2a^2b^4)$;

б) $(2x^7y-1{,}5x^2y^3)\,(0{,}5x^4y-4xy^2)$;

в) $(-3ck^5+6c^2k^3)(4c^6k-c^3k^2)$;

г) $\left(\frac{4}{5}mn^4-\frac{1}{5}mn^2\right)\left(\frac{5}{8}m^2n^7+2m^5n^3\right)$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

Розв'язати задачі **(3.64–3.66)**.

**3.64••.** У двох сувоях 10 м тканини. Тканина в першому сувої коштує 125 грн за метр, а в другому – 210 грн за метр. За обидва сувої заплатили 1760 грн. Знайти кількість метрів тканини в кожному сувої.

**3.65••.** Марійка загадала три послідовних натуральних числа. Добуток двох більших із них на 12 більший за добуток двох менших. Знайти, які числа загадала Марійка.

**3.66****. а) Одну сторону квадрата збільшили на 3 см, а іншу зменшили на 2 см, отримавши прямокутник. Площа отриманого прямокутника виявилася більшою за площу квадрата на 4 см$^2$. Знайти довжину сторони квадрата.

б) Маємо прямокутник. Якщо одну його сторону збільшити на 1 см, а іншу – на 2 см, то площа прямокутника збільшиться на 17 см$^2$. Знайти сторони прямокутника.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**3.67.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Фермерське господарство»*. Довжина поля дорівнює 65 метрів, а ширина – 80 метрів. Фермер планує збільшити на $a$ м кожну зі сторін поля.

б) Задача *«Банківська справа»*. На банківському рахунку мами Петрика – $x$ грн, а на рахунку його батька – $y$ грн. Річний прибуток по рахунку мами складає 5%, а батька – 10%.

в) Задача *«Кабінет інформатики»*. Для кабінету інформатики гуртом закупили 12 ноутбуків та 5 планшетів. Роздрібна ціна ноутбука – $n$ грн, а гуртова знижка складає 8%. Роздрібна ціна планшета – $m$ грн, а гуртова знижка – 3%.

г) Задача *«Юні філателісти»*. В Оленки – $k$ марок. В Андрійка – на 23 марки більше, ніж у Оленки, а в Іринки – удвічі більше, ніж в Оленки і Андрійка разом.

д) Задача *«Туристична подорож»*. Група з 10 дітей і 1 дорослого вирушила на відпочинок до Буковелю. Вартість відпочинку в Буковелі для дорослого становить $b$ грн. Для дитини вартість складає 70% від вартості для дорослого. На груповий відпочинок надається знижка в розмірі 3%.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§ 3.4. Множення многочлена на многочлен. Стандартний вигляд многочлена».**

# §3.5 Формули скороченого множення: квадрат суми і квадрат різниці




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Навчання і терпіння ведуть до уміння!»***.

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про тричлени певного вигляду.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** число, яке є значенням многочлена $10m^2-n^3$, якщо $m=-3$, $n=4$.

**ПОЯСНИ,** чи будуть тотожними вирази $(2x+1)(2x-1)$ і $4x^2-1$.

**ЧОМУ** множення двох многочленів можна виконувати двома способами і якими?

**ПРИДУМАЙ** два многочлени, добуток яких дорівнює такій сумі одночленів

$$ab+bx+cx+by+ac+cy.$$

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями, як вираз $(6-5n)^2$ подати у вигляді многочлена.

**ЗАПРОПОНУЙ** свою математичну модель до задачі: Скільки потрібно заплатити за 4 кг капусти та 1,5 кг моркви, якщо 1 кг капусти коштує $2m$ грн, а 1 кг моркви – $3n$ грн?

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Подати** у вигляді многочлена вирази:

а) $(a+b+c)(m+n)$;

б) $(c-d)(m-n)$;

в) $(k+m)(k+m)$;

г) $(x-y)(x-y)$.

**2) Обчислити** значення виразів:

а) $(-3)^2$; $(-5)^3$; $\left(-\frac{5}{9}\right)^2$;

б) $\left(-\frac{3}{64}t^5k^7\right)^2$, якщо $t=-1$, $k=2$.

**3) Записати** подвоєний добуток одночленів:

а) $x$ і $3y$; б) $a^2$ і $b$; в) $4m$ і $\frac{1}{2}$; г) $6$ і $\frac{1}{3}y$.

**4) Дати назву** виразам кожної пари:

а) $a+b$ і $-a-b$; б) $(a+b)^2$ і $(-a-b)^2$; в) $(a+b)^2$ і $-(a+b)^2$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Добуток двох многочленів, один з яких містить $n$ членів, а другий – $m$ членів, дорівнює многочлену, що містить $n \cdot m$ членів, серед яких можуть бути і подібні члени.

**2** Читання і запис виразів, що містять арифметичні дії, відрізняються тим, що при читанні спочатку називають ту дію, яка має бути виконана останньою. Наприклад, $a^2$ – квадрат числа $a$; $(a+b)^2$ – квадрат суми чисел $a$ і $b$. Добуток однакових двочленів – це квадрат двочлена.

**3** Подвоєний добуток будь-яких виразів відрізняється від добутку цих самих виразів тим, що містить на один множник більше, і цим множником є число 2.

Наприклад, $\boldsymbol{ab}$ – добуток, тоді $\boldsymbol{2ab}$ – подвоєний добуток; $\boldsymbol{-4c}$ – добуток, тоді $\boldsymbol{-8c}$ – подвоєний добуток (бо $\boldsymbol{-8c = 2\cdot(-4c)}$); $\boldsymbol{m(x+y)}$ – добуток, тоді $\boldsymbol{2m(x+y)}$ – подвоєний добуток.

***Зауваж!***

Перетворимо квадрат суми $(a+b)^2$ на многочлен стандартного вигляду. Для цього помножимо двочлен сам на себе за правилом множення многочленів:

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$.

Отримали тотожність для квадрата суми: $\boldsymbol{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$.

Її називають ***формулою квадрата суми*** двох виразів і читають так: *квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток першого на другий плюс квадрат другого виразу.*

Так само можна перетворити на многочлен і квадрат різниці: $\boldsymbol{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$.

Цю формулу називають ***формулою квадрата різниці*** двох виразів. (Спробуй прочитати її так само, як для квадрата суми двох виразів).

Надалі перетворювати квадрат двочлена на многочлен можна саме за цими формулами замість того, щоб множити двочлен сам

на себе. Тоді процес відбуватиметься швидше і простіше, тобто скорочено. Тому ці формули ще називають ***формулами скороченого множення***.

### *Зауваж! Це важливо!*

Формули квадрата суми і квадрата різниці можна об'єднати в одну:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

За цією формулою можна підносити до квадрата будь-які двочлени.

Наприклад, $(5x+7)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 7 + 7^2 = 25x^2 + 70x + 49$.

Піднесемо до квадрата двочлен $b-a$:

$(b-a)^2 = b^2 - 2ba + a^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

Отримали, що $(b-a)^2 = (a-b)^2$.

Аналогічно можна перевірити, що $(-a-b)^2 = (a+b)^2$.

Двочлени $a-b$ і $b-a$ є протилежними виразами, протилежними є також і вирази $-a-b$ та $a+b$, отже, можна дійти висновку, що *квадрати протилежних виразів, як і квадрати протилежних чисел, між собою рівні.*

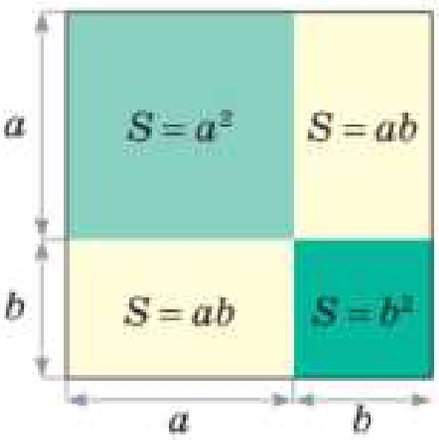
Формулу квадрата двочлена застосовують як для спрощення виразів, так і для спрощення громіздких обчислень квадратів деяких чисел без виконання дії в стовпчик.

Наприклад,

$23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$.

Ураховуючи, що площа квадрата дорівнює квадрату числа, а площа прямокутника – добутку двох чисел, формули скороченого множення набувають геометричного змісту.

На малюнку зображено геометричний зміст формули квадрата суми.




## *Тренувальні вправи*

**3.68°.** Знайти серед виразів $x^2 - y^2$; $x^2 + 2xy + y^2$; $x^2 - 2xy + y^2$; $x^2 + y^2$ ті, що тотожно дорівнюють виразу:

а) $(x+y)^2$; б) $(x-y)^2$.

**3.69°.** Прочитати рівності. Чи є вони тотожностями? Чому?

а) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$; б) $(x+y)^2 = x^2 + xy + y^2$;

в) $(x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; г) $(x-y)^2 = x^2 + 2xy - y^2$.

**3.70°.** Перенести таблицю в зошит та заповнити її.

| Квадрат суми / різниці двох виразів | = квадрат першого виразу | ± подвоєний добуток першого та другого виразів | + квадрат другого виразу | = отриманий многочлен стандартного вигляду |
|---|---|---|---|---|
| $(x+6)^2$ | $=x^2$ | $+2\cdot x\cdot 6$ | $+6^2$ | $=x^2+12x+36$ |
| $(m-9)^2$ | $=m^2$ | $-2\cdot m\cdot 9$ | $+9^2$ | |
| $(a+1)^2$ | | | | |
| $(1-y)^2$ | | | | |
| $(2m-3)^2$ | | | | |
| $(4x+5y)^2$ | | | | |
| $\left(4-\frac{1}{2}n\right)^2$ | | | | |

**3.71°°.** Перетворити на многочлен стандартного вигляду.

а) $(5+x)^2$; б) $(7y+3x)^2$; в) $(3m-2)^2$; г) $(4-9k)^2$.

**3.72°°.** Подати вираз у вигляді многочлена, застосувавши формули скороченого множення.

а) $(10x+0{,}1)^2$; б) $(5m-0{,}2)^2$; в) $\left(9x+\frac{1}{3}\right)^2$; г) $\left(\frac{1}{4}-6n\right)^2$.

**3.73°°.** Виконати дію.

а) $(x^2+1)^2$; б) $(t^4-t^2)^2$; в) $(1+m^4)^2$; г) $(y^3-y)^2$.

**3.74•.** Навести приклади квадратів двочленів, які рівні між собою.

**3.75•.** Увідповіднити квадрат двочлена (1–4) та тотожний йому тричлен (А–Д).

***Квадрат двочлена***

1. $(6+x)^2$
2. $\left(6-\frac{1}{2}x\right)^2$
3. $(x-6)^2$
4. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)^2$

***Тричлен***

А. $36-12x+x^2$

Б. $36+6x+\frac{1}{4}x^2$

В. $36-6x+\frac{1}{4}x^2$

Г. $x^2+12x-36$

Д. $36+12x+x^2$

**3.76•.** Обчислити, застосовуючи формули скороченого множення, за зразком.

ЗРАЗОК. $99^2=(100-1)^2=100^2-2\cdot100\cdot1+1^2=10000-200+1=9801$.

а) $59^2$; б) $38^2$; в) $41^2$; г) $72^2$.

**3.77•.** Спростити вираз:

а) $(a+4)^2-16$;
б) $7y+(y-3)^2$;
в) $10m-(m+5)^2$;
г) $10k-(4-k)^2$;
д) $(a+4)^2+(a-3)^2$;
е) $(x+2y)^2-(2x-y)^2$.

**3.78•.** Критично оцінити процес піднесення двочлена до квадрата.

а) $(1,2x+0,3y)^2=(1,2x)^2+2\cdot1,2\cdot0,3xy+(0,3y)^2=$
$=1,2x^2+0,72xy+0,3y^2$.

б) $(x-1,4y)^2=x^2-1,4xy+(1,4y)^2=x^2-1,4xy+0,96y^2$.

в) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y\right)^2=\left(\frac{2}{3}x\right)^2+2\cdot\frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{4}y+\left(\frac{1}{4}y\right)^2=\frac{4}{9}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{2}{16}y^2$.

г) $\left(\frac{1}{6}x-\frac{3}{8}y\right)^2=\left(\frac{1}{6}x\right)^2-\frac{1}{6}x\cdot\frac{3}{8}y+\left(\frac{3}{8}y\right)^2=\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{16}xy+\frac{9}{16}y^2$.

**3.79•.** Розв'язати рівняння:

а) $(x+3)^2=x^2+15$;
б) $(x-2)^2=x^2-16$;
в) $(3x+1)^2=9x^2+8$;
г) $(5x-4)^2=30+25x^2$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**3.80••.** Знайти число, якщо після збільшення його на 2, його квадрат збільшується на 20.

**3.81••.** Знайти число, якщо після зменшення його на 5, його квадрат зменшується на 10.

**3.82••.** Кожну сторону квадрата зменшили на 6 см, після чого його площа зменшилася на 144 см$^2$. Знайти довжину сторони квадрата після її зменшення.

**3.83••.** Зовнішній радіус кругового кільця на 3 см більший від його внутрішнього радіуса. Знайти зовнішній радіус, якщо площа кільця дорівнює $45\pi$ см$^2$.

**3.84****. Переписати рівності в зошит, заповнюючи пропуски:

а) $(\ldots\ldots + 6x)^2 = 25y^2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots$ ;

б) $(2ab - \ldots\ldots)^2 = \ldots\ldots - \ldots\ldots + \frac{1}{9}c^8$ ;

в) $(\ldots\ldots + \ldots\ldots)^2 = 1 + \ldots\ldots + 81a^6$;

г) $(\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2 = 16m^2 - 24mn + \ldots\ldots$ .

**3.85****. Подати вираз у вигляді многочлена, застосовуючи формули скороченого множення:

а) $(3a^2 + 4b)^2$; б) $(-7b + 2a^3)^2$; в) $(-0{,}2a - 5b)^2$;

г) $\left(\frac{1}{2}x^4 + y^2\right)^2$; д) $\left(-\frac{3}{4}x^4 + y^2\right)^2$.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**3.86.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Samsara»*. Андрій зі своєю сестричкою Юлею після виконання домашнього завдання щовечора виділяють трохи часу на розвивальні комп'ютерні ігри. Щоб пройти тур у грі «Samsara», їм потрібно утворити п'ять чотирицифрових чисел вигляду *55*, які діляться націло на 18.

б) Задача *«Ландшафтний дизайн»*. У сквері квадратної форми, який огороджено по периметру, на відстані 7 м від огорожі засіяно газон. Простір між газоном і огорожею є пішохідною зоною, площа якої 476 м$^2$.

в) Задача *«Кондитерська»*. Печиво круглої форми вкрито джемом на відстані 5 мм від краю. Площа невкритої джемом поверхні печива дорівнює 2,25 см$^2$.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 3.5. Формули скороченого множення: квадрат суми і різниці».**

Перевір себе
«Як ти?»

# §3.6 Формули скороченого множення: різниця квадратів (добуток різниці двох виразів на їх суму)




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Успіх приходить лише до того, хто його прагне!»***.

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про формули скороченого множення.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** результат спрощення виразу $(2n+5)^2-4n^2$.

**ПОЯСНИ**, як подати вираз $1+8x+16x^2$ у вигляді квадрата двочлена.

**ЧОМУ** квадрати різниці $(2m-3n)^2$ і $(3n-2m)^2$ є тотожними?

**ПРИДУМАЙ**, як обчислити $97^2$ без калькулятора і множення в стовпчик.

**ПОДІЛИСЯ** своїми міркуваннями щодо стратегічного планування пошуку коренів рівняння $(x-12)^2+x^2=0$.

**ЗАПРОПОНУЙ** свою математичну модель до задачі: «Визначити, як зміниться площа квадрата, якщо його сторону завдовжки $(k+3)$ см збільшити на 2 см».

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Подати** у вигляді многочлена стандартного вигляду вирази:

а) $(a+b)(a-b)$; б) $(c-d)(c+d)$;

в) $(k-m)(k+m)$; г) $(x+y)(x-y)$.

**2) Обчислити** значення виразів:

а) $15^2$; $25^2$; $35^2$; $45^2$; $55^2$; $65^2$; б) $\left(-\frac{7}{12}t^4k^3\right)^2$, якщо $t=3$, $k=-2$.

**3) Визначити** одночлен, який в рівності позначено «*», якщо рівності є тотожностями:

а) $(*+7)^2=a^2+14a+49$; б) $(b+*)^2=b^2+8b+*$;

в) $(x-*)^2=x^2-*+25$; г) $(*-2x)^2=*-20x+4x^2$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

**1** Вміння визначати одночлен, який позначено «*» у тотожності, що містить квадратний тричлен, є основною ідеєю для формування здатності аналізувати ситуацію. Таких завдань тобі траплятиметься багато й в інших класах. З їхньою допомогою ти навчишся «згортати» тричлен у квадрат двочлена, наприклад у разі потреби скоротити дріб.

**2** Дуже цікавим є спосіб обчислення квадратів двоцифрових чисел, які закінчуються на 5. Якщо ти навчишся користуватися цим прийомом, тебе це виручатиме в майбутньому.

Наприклад, $35^2 = 3 \cdot (3+1) \cdot 100 + 25 = 1225$.

**3** При множенні суми двох виразів на їх різницю в результаті після спрощення отримаємо двочлен.

### *Зауваж!*

Перетворимо добуток $(a-b)(a+b)$ на многочлен стандартного вигляду: $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Отже, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

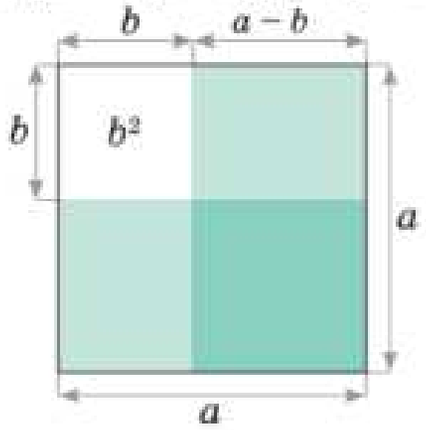
Отриману тотожність називають ***формулою різниці квадратів,*** а читають так: *добуток різниці двох виразів на їх суму дорівнює різниці квадратів цих виразів.*

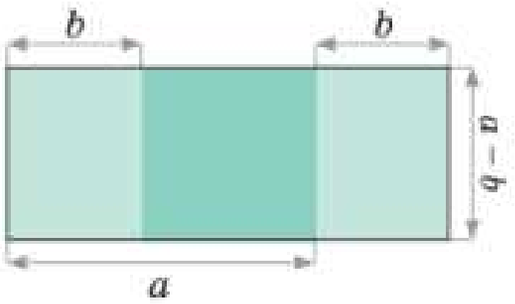
Надалі множити різницю двох виразів на їх суму можна саме за цією формулою замість того, щоб множити двочлен на двочлен. Тоді процес відбуватиметься швидше і простіше, тобто скорочено. Тому цю формулу також називають *формулою скороченого множення.*

Наприклад, $(x-9)(x+9) = x^2 - 9^2 = x^2 - 81$.

### *Зауваж! Це важливо!*

На малюнку зображено геометричний зміст формули різниці квадратів $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.



Оскільки за переставною властивістю множення $(a+b)(a-b)=(a-b)(a+b)$, то добуток суми двох виразів на їхню різницю також дорівнює різниці квадратів цих виразів:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Наприклад, $(y+5)(y-5)=y^2-5^2=y^2-25$.

Причому зменшуваним у різниці квадратів буде квадрат того виразу, який був зменшуваним у різниці.

Наприклад, $(c+d)(d-c)=d^2-c^2$.

## Тренувальні вправи

**3.87°.** Знайти серед виразів $y^2+x^2$; $x^2-2xy+y^2$; $y^2-x^2$; $x^2-y^2$ ті, що тотожно рівні виразу:

а) $(x-y)(x+y)$; б) $(y+x)(y-x)$.

**3.88°.** Прочитати рівності. Чи є вони тотожностями? Чому?

а) $(m-n)(m+n)=m^2+n^2$; б) $(t+k)(t-k)=k^2-t^2$;

в) $(x-y)(x+y)=2x-2y$; г) $(g+h)(g-h)=g^2-h$.

**3.89°.** Перетворити добуток на многочлен стандартного вигляду:

а) $(a-x)(a+x)$; в) $(p-7)(p+7)$;

б) $(11-n)(11+n)$; г) $(2x-1)(2x+1)$.

**3.90°.** Подати вираз у вигляді многочлена, застосовуючи формули скороченого множення:

а) $(5y+9)(5y-9)$; в) $(1+8b)(1-8b)$;

б) $(10t+0{,}2)(10t-0{,}2)$; г) $(3a+b)(3a-b)$.

**3.91°.** Подати вираз у вигляді многочлена.

а) $\left(\frac{3}{4}y-6\right)\left(6+\frac{3}{4}y\right)$; в) $(12t+1{,}3g)(1{,}3g-12t)$;

б) $\left(7m+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}-7m\right)$; г) $\left(\frac{5}{6}x+1\right)\left(1-\frac{5}{6}x\right)$.

**3.92°°.** Перенести таблицю в зошит та заповнити її.

| Перший одночлен | Другий одночлен | Добуток різниці одночленів та їх суми | = Різниця квадратів одночленів |
|---|---|---|---|
| $3a$ | $b$ | $(3a-b)(3a+b)$ | $=9a^2-b^2$ |
| $5x$ | 4 | | |
| 1 | $7m$ | | |

*Продовження таблиці*

| Перший одночлен | Другий одночлен | Добуток різниці одночленів та їх суми | =Різниця квадратів одночленів |
|---|---|---|---|
| $6n$ | $8k$ | | |
| $0,1t$ | $1,2$ | | |
| $tk$ | $10m$ | | |
| $\left(\frac{1}{3}\right)^m$ | $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ | | |

**3.93°°.** Навести приклади рівних між собою добутків різниці двох виразів на їх суму.

**3.94°°.** Увідповіднити добутки (1–4) і тотожні їм вирази (А–Е).

| ***Добуток різниці двох виразів на їх суму*** | ***Тотожні вирази*** |
|---|---|
| 1. $\left(1,3x-\frac{1}{2}y\right)\left(1,3x+\frac{1}{2}y\right)$ | А. $\frac{1}{9}y^2-1,44x^2$ |
| 2. $\left(\frac{1}{3}y+1,2x\right)\left(1,2x-\frac{1}{3}y\right)$ | Б. $1,69x^2-\frac{1}{4}x^2$ |
| 3. $\left(\frac{1}{3}x-1,2y\right)\left(1,2y+\frac{1}{3}x\right)$ | В. $\frac{1}{4}y^2-1,69x^2$ |
| 4. $\left(1,3x+\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}y-1,3x\right)$ | Г. $1,44x^2-\frac{1}{9}y^2$ |
| | Д. $\frac{1}{9}x^2-1,44y^2$ |
| | Е. $\frac{1}{4}x^2-1,69y^2$ |

**3.95°°.** Порівняти, застосовуючи формули скороченого множення, за зразком.

ЗРАЗОК. Порівняти $357^2$ та $356\cdot358$.

*Розв'язання:* $356\cdot358=(357-1)(357+1)=357^2-1<357^2$.

Отже, $357^2>356\cdot358$.

а) $346^2$ та $345\cdot347$;

б) $564\cdot566$ та $565^2$;

в) $1294^2$ та $1293\cdot1295$.

**3.96°°.** Обчислити за зразком.

ЗРАЗОК. $97\cdot103=(100-3)(100+3)=100^2-3^2=10000-9=9991$.

а) $99\cdot101$;
б) $198\cdot202$;
в) $1001\cdot999$;
г) $1,02\cdot0,98$;
д) $3,01\cdot2,99$;
е) $9,7\cdot10,3$.

**3.97°.** Критично оцінити процес множення різниці двох виразів на їх суму.

| |
|---|
| а) $(x-3y)(x+3y)=(x)^2-3(y)^2=x^2-3y^2$. |
| б) $(x-5y)(x+5y)=(x)^2-(5y)^2=x^2-25y$. |
| в) $(x-7y)(x+7y)=x^2+(7y)^2=x^2+49y^2$. |
| г) $(1-3y)(1+3y)=1+1-3y\cdot3y=2-9y^2$. |

**3.98°.** Розв'язати рівняння:

а) $(3x-2)(3x+2)-x(9x-22)=0$;
б) $y(4-y)+(y+5)(y-5)=-10$;
в) $(4x-1)(4x+1)-(16x^2+17)=2x+9$;
г) $16x(x-1)-7=(1+4x)(4x-1)-6x$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**3.99°°.** Дві протилежні сторони квадрата збільшили на 4,5 м, а дві інші зменшили на 4,5 см. Знайти сторону квадрата, якщо площа отриманого прямокутника дорівнює 10 см$^2$.

**3.100°°.** Дві протилежні сторони квадрата збільшили на 3 см, а дві інші зменшили на 3 см. Знайти сторону квадрата, якщо площа отриманого прямокутника дорівнює 16 см$^2$.

**3.101°°.** Дописати пропущене в зошиті:

а) (.....$-6x$)($5y+$.....)=.....$-$.....;
б) ($1,5n-$.....)($4+$.....)=.....$-$.....;
в) (.....$-$.....)(.....$-5y$)$=0,81x^2-$.....;
г) (.....$-$.....)(.....$+$.....)$=\frac{9}{16}x^2-64y^2$.

**3.102**••. Обчислити значення виразу:

а) $(n-8)(n+8)-(n-5)(n+5)$, якщо $n=999{,}99$;

б) $(b-14)(b+14)-(b-15)(b+15)$, якщо $b=47\frac{54}{91}$;

в) $(x-2)(2+x)-x(x-6)$, якщо $x=23{,}5$;

г) $m(m-9)+(10-m)(m+10)$, якщо $m=8{,}3$.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**3.103**••. Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Земельні баталії»*. Дві протилежні сторони земельної ділянки квадратної форми збільшили на 8 м, а дві інші – на стільки ж зменшили.

б) Задача *«Ландшафтний дизайн»*. Ширина клумби прямокутної форми на 4 м менша за її довжину. Ширину клумби збільшили на 2 м, а довжину зменшили на 2 м.

в) Задача *«Кондитерська»*. Кондитер створив ескіз весільного торта у формі прямокутника, довжина якого на 12 см більша за ширину. Після зауважень молодят кондитер змінив розміри торта, зменшивши довжину на 5 см та збільшивши ширину на 5 см.

г) Задача *«Фермерське господарство»*. Одне поле має форму прямокутника завдовжки $a$ м та завширшки $b$ м, а розміри іншого поля такої ж форми – $a$ м та $(b-15)$ м.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 3.6. Формули скороченого множення: різниця квадратів (добуток різниці двох виразів та їх суми)».**

Перевір себе
«Як ти?»

# § 3.7* [Формули суми кубів та різниці кубів, куба суми та куба різниці]




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Вчитися треба весело... Щоб перетравлювати знання, треба поглинати їх з апетитом»*** (Анатоль Франс).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про формули скороченого множення, які тобі знадобляться, якщо ти захочеш більше займатися математикою.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** корені рівняння $(x+4)(x+1)=x-(x-5)(5-x)$.

**ПОЯСНИ,** як знайти значення виразу $203\cdot197$ без калькулятора чи множення в стовпчик.

**ЧОМУ** для будь-яких значень $x$ вираз $(x-1)^2+2$ набуває лише додатних значень?

**ПРИДУМАЙ** спосіб пошуку, через скільки хвилин у двох резервуарах стане води порівну, якщо щохвилини в перший, де 1900 м³ води, надходить 400 м³ води, а з другого, де 7500 м³ води, забирають 300 м³ води.

**ПОДІЛИСЯ** своїми міркуваннями щодо доведення тотожності

$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2.$$

**ЗАПРОПОНУЙ** спосіб пошуку двох чисел, одне з яких на 20 % більше за друге, а якщо від більшого відняти 45, а до меншого додати 16, то отримані числа стануть рівними.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Подати** у вигляді многочлена стандартного вигляду вираз:

а) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$; б) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

в) $(m+1)(m^2-m+1)$; г) $(m-1)(m^2+m+1)$.

**2) Обчислити** значення виразів:

а) $4^2$; $7^2$; $\left(\frac{6}{11}\right)^2$; б) $(3x)^2$, якщо $x=-3$; в) $3^2+6\cdot 7+7^2$.

**3) Розв'язати** рівняння $(2x-3)(2x+3)=4x^2-81$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ

1. Вибирати зручний спосіб для обчислення значень виразів, у тому числі застосовувати формули скороченого множення.
2. Хоч рівняння, вибране в завданні 3 на дослідження, і містить квадрат змінної, проте воно зводиться до лінійного.
3. У завданні 1 на дослідження ми отримали тотожності, які нагадують раніше вивчені формули скороченого множення (квадрат двочлена або різницю квадратів), але замість квадратів маємо куби.

### *Зауваж!*

Розрізняють *повні* і *неповні квадрати* залежно від того, чи можна тричлен записати як квадрат двочлена. Повний квадрат, на відміну від неповного, завжди можна подати у вигляді квадрата двочлена. Наприклад вирази $a^2+2ab+b^2$ і $a^2-2ab+b^2$ – це точно квадрати суми і різниці, тобто повні квадрати, а вирази $a^2+ab+b^2$ і $a^2-ab+b^2$ – це неповні квадрати суми і різниці. Повний квадрат від неповного відрізняється лише множником 2 перед добутком.

Розгляньмо ще чотири формули, які є тотожностями, і які називають відповідно формулами *суми кубів; різниці кубів; куба суми; куба різниці:*

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$; (1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; (3)

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$; (2) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. (4)

### *Зауваж! Це важливо!*

Кожну з формул (1)–(4) можна довести як тотожність. Наприклад, перетворимо ліву частину формули (1):

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3=a^3+b^3$.

Отримали праву її частину. Отже,

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

Формули (1)–(4) також є *формулами скороченого множення*, оскільки дають можливість знайти добуток многочленів без використання правила множення многочлена на многочлен.

Читають ці формули так:

(1) *добуток суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці дорівнює* ***сумі кубів*** *цих виразів;*

(2) *добуток різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми дорівнює* ***різниці кубів*** *цих виразів;*

(3) ***куб суми*** *двох виразів дорівнює кубу першого виразу плюс потроєний добуток квадрата першого виразу на другий плюс потроєний добуток першого виразу на квадрат другого плюс куб другого виразу;*

(4) ***куб різниці*** *двох виразів дорівнює кубу першого виразу мінус потроєний добуток квадрата першого виразу на другий плюс потроєний добуток першого виразу на квадрат другого мінус куб другого виразу.*

Наприклад, $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3=x^3+8$;

$(x-0{,}5)(x^2+0{,}5x+0{,}25)=x^3-0{,}5^3=x^3-0{,}125$;

$x^3+64=x^3+4^3=(x+4)(x^2-4x+16)$;

$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3=x^3+6x^2+12x+8$;

$(x-4)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2-4^3=x^3-12x^2+48x-64$.

## *Тренувальні вправи*

**3.104°.** Знайти серед виразів $x^2-y^2$; $x^2+2xy+y^2$; $x^2-2xy+y^2$; $x^2+y^2$ ті, що тотожно рівні виразу:

а) $(x+y)^2$; б) $(x-y)^2$.

**3.105°.** Прочитати рівності. Чи є вони тотожностями? Чому?

а) $(x+y)^2=x^2+y^2$; б) $(x+y)^2=x^2+xy+y^2$;

в) $(x-y)^2=x^2+2xy+y^2$; г) $(x-y)^2=x^2+2xy-y^2$.

**3.106°.** Перенести таблицю в зошит і заповнити її.

| сума / різниця двох виразів | · неповний квадрат різниці / суми | = сума / різниця кубів | = утворений многочлен стандартного вигляду |
|---|---|---|---|
| $(n+2)$ | $\cdot(n^2-2n+4)$ | $=n^3+2^3$ | $=n^3+8$ |
| $(a+1)$ | $\cdot(a^2-a+1)$ | | |
| $(2-x)$ | $\cdot(4+2x+x^2)$ | | |
| | | $=t^3+4^3$ | |
| | | | $=n^3-216$ |

**3.107°.** Перетворити добуток на многочлен стандартного вигляду:

а) $(p-4)(p^2+4p+16)$; в) $(6+y)(36-6y+216)$;

б) $(5+m)(25-5m+m^2)$; г) $(k-1)(k^2+k+1)$.

**3.108°.** Спростити вираз:

а) $(y+1)(y^2-x+1)-(x^2-1)x$;

б) $(x+3)(x^2-3x+9)-x^3$;

в) $(2k-1)(4k^2\ 2k+1)+1$;

г) $(x^4+y^4)(x^8-x^4y^4+y^8)-x^{12}-y^{12}$.

**3.109°.** Обчислити значення виразу:

а) $125-(5-3n)(25+15n+9n^2)$, якщо $n=-\frac{3}{4}$;

б) $25-(2-3y)(4+6y+9y^2)$, якщо $y=-1\frac{1}{3}$;

в) $27+(5c-3)(25c^2+15c+9)$, якщо $c=-1\frac{1}{5}$;

г) $64-(4-3x)(16+12x+9x^2)$, якщо $x=-\frac{2}{3}$.

**3.110°.** Перетворити вираз на многочлен, застосовуючи формули куба суми або різниці двох виразів:

а) $(x+5)^3$; б) $(2-t)^3$; в) $(1-x^2)^3$; г) $(3+b)^3$.

**3.111°°.** Увідповіднити суми / різниці кубів (1–4) і тотожні їм вирази (А–Е).

| *Сума / різниця кубів* | *Тотожний вираз* |
|---|---|
| 1. $n^3-1000$ | А. $(2n-3m)(4n^2+6nm+9m^2)$ |
| 2. $n^3+1000$ | Б. $(n-10)(n^2-10n+100)$ |
| 3. $8n^3+27m^3$ | В. $(n+10)(n^2-10n+100)$ |
| 4. $8n^3-27m^3$ | Г. $(2n+3m)(4n^2-6nm+9m^2)$ |
| | Д. $(2n-3m)(4n^2+6nm-9m^2)$ |
| | Е. $(n-10)(n^2+10n+100)$ |

**3.112°°.** Обчислити значення виразу:

а) $\frac{9^3-7^3}{0,4}$; б) $\frac{15^3+12^3}{162}$.

**3.113°°.** Указати всі натуральні числа, що є дільниками суми:

а) $5^3+3^3$; б) $8^3+6^3$; в) $7^3+5^3$.

**3.114•.** Довести тотожність:

а) $(x+y)^3-x^3-y^3=3xy(x+y)$;

б) $3xy(y-x)=(x-y)^3-x^3+y^3$.

**3.115•.** Визначити, при яких значеннях $x$ і $y$ рівність $(x-y)^3=(y-x)^3$ є правильною.

**3.116••.** Розв'язати рівняння:

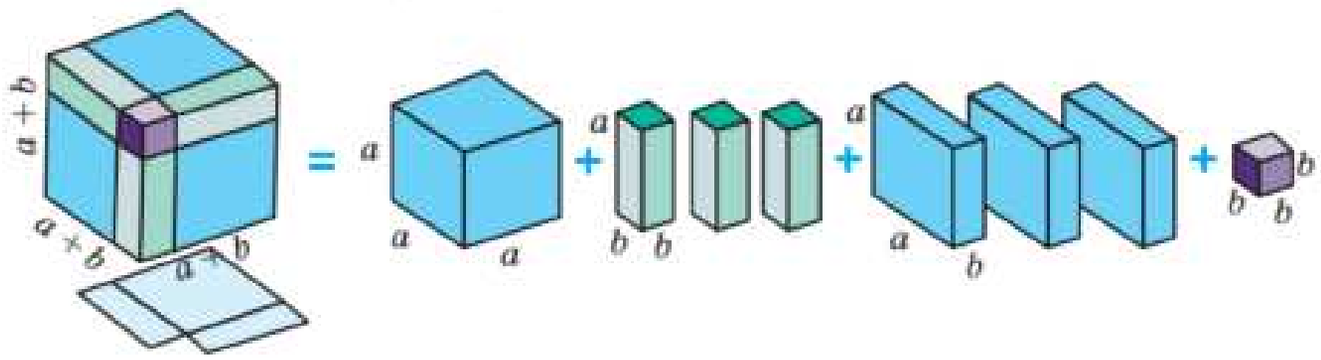
а) $(2x+1)^3=4x^2(2x+3)$;

б) $27x^2(1-x)=(1-3x)^3$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**3.117••.** Користуючись малюнком, пояснити геометричний зміст формули

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$




## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 3.7*. Формули суми кубів та різниці кубів, куба суми та куба різниці».**

Перевір себе
«Як ти?»

# Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми «ЦІЛІ ВИРАЗИ. МНОГОЧЛЕНИ»

*Багато чого не зробиш, поки не вивчишся.*
*Але багато треба зробити,*
*щоб навчитись.* (Конфуцій)

Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Я знаю, що успіх приходить до того, хто його прагне!».***

Сьогодні не Кубик Блума буде тобі допомагати діагностувати, «чи ти знаєш?», «чи ти вмієш?» і «чи ти можеш?», а ти сам / сама формуватимеш свою «Я-особистість!» шляхом самостійної перевірки своєї доброчесності та власної діяльності.

**Завдання 1. Вправа: «Постав собі «*», якщо так».**

**І. Перевір свою доброчесність:**

- ✓ Чи виконував / виконувала Я всі завдання домашньої роботи?
- ✓ Чи розв'язав / розв'язала Я домашні завдання самостійно?
- ✓ Чи пробував / пробувала Я перевіряти свої вміння хоч після одного уроку?
- ✓ Чи вів / вела Я облік: «знаю», «хочу дізнатися», «дізнався / дізналася»?
- ✓ Чи запланував / запланувала Я навчатися краще, ніж це було вчора?

**ІІ. Запитання для самоконтролю власної діяльності**

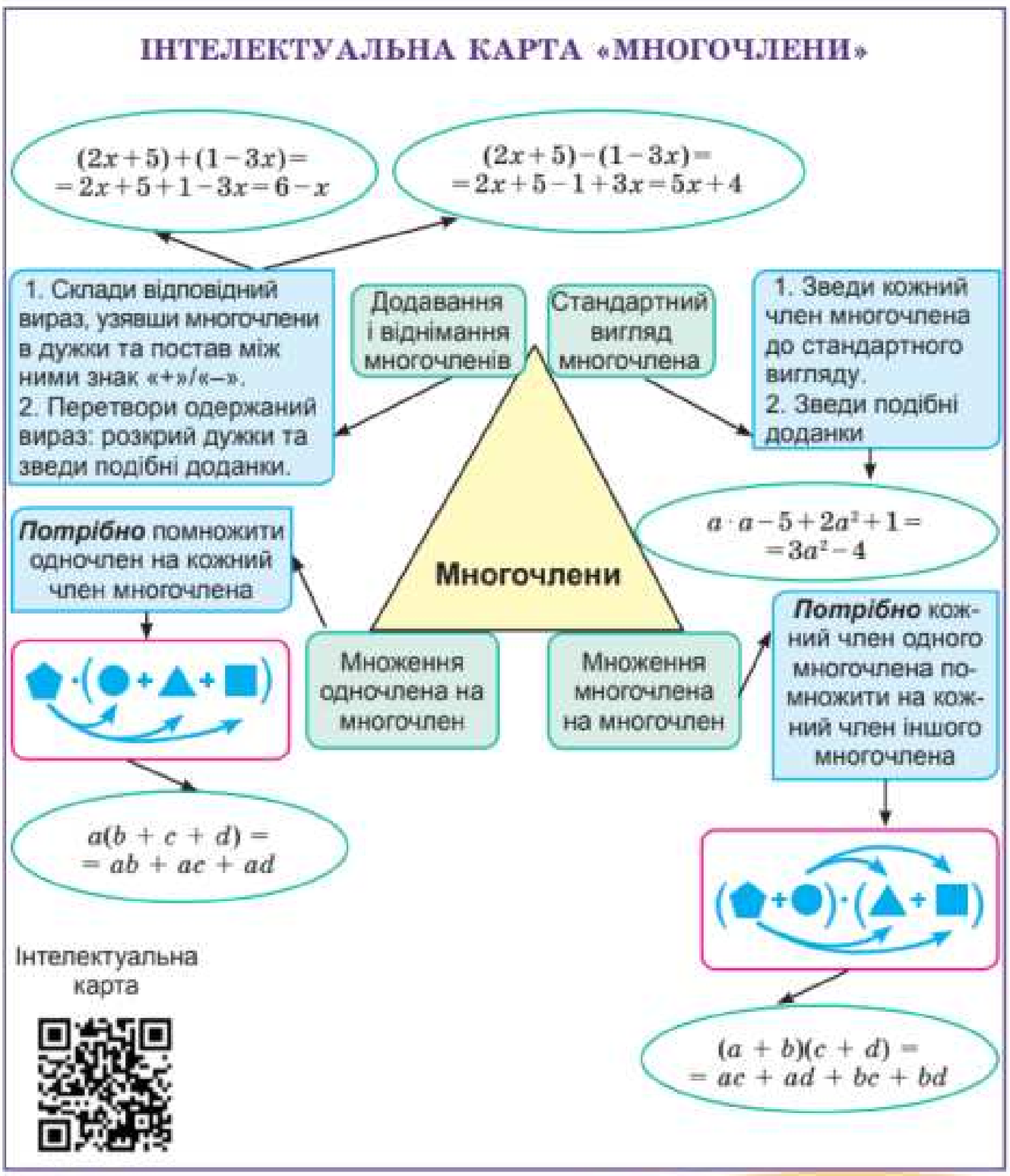
**1)** Чи розумію Я, що таке многочлен?
**2)** Чи знаю Я, які члени многочлена називають подібними?
**3)** Чи вмію Я визначити степінь многочлена?
**4)** Чи вмію Я додавати / віднімати многочлени, розкривати дужки?
**5)** Чи вмію Я множити одночлен на многочлен?
**6)** Чи вмію Я множити многочлен на многочлен?
**7)** Чи вирізняю Я многочлени стандартного вигляду серед інших?
**8)** Чи знаю Я, як звести многочлен до стандартного вигляду?
**9)** Чи знаю і розумію Я формули квадрата суми і квадрата різниці?
**10)** Чи відрізняю Я квадрат різниці від різниці квадратів?
**11)** Чи застосовую Я формули скороченого множення для спрощення виразів?
**12)** Чи вмію Я знаходити значення виразу, що є многочленом?
**13)** Чи ознайомився / ознайомилася Я з формулами куба суми і куба різниці, суми кубів і різниці кубів?

**14)** Чи з'ясував / з'ясувала **Я** для себе різницю між повним і неповним квадратами?

Зроби висновок: «Як Ти?». Чи можеш собі сказати: «Тепер **Я** усвідомлюю, що можу, хочу і буду вчитися!».

Похвали себе, якщо ти «Молодець!»

**Завдання 2.** Розглянь інтелектуальну карту з теми «Многочлени» та інтелектуальну карту з теми «Формули скороченого множення»



## ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА КАРТА «ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ»

| Число | Квадрат числа |
|---|---|
| 10 | 100 |
| 11 | 121 |
| 12 | 144 |
| 13 | 169 |
| 14 | 196 |
| 15 | 225 |
| 16 | 256 |
| 17 | 289 |
| 18 | 324 |
| 19 | 361 |
| 20 | 400 |

Квадрат суми $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Квадрат різниці $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Різниця квадратів $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Куб суми $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Куб різниці $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Сума кубів $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Різниця кубів $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Інтелектуальна карта

## *Тренувальні вправи*

**3.118°.** Визначити степінь многочлена:

а) $100x - y^3$; в) $a^3b^5 + c^6$;

б) $y^2 + 15y + 23$; г) $k^5 - k^5p^4 - k^3$.

**3.119°.** Звести подібні члени многочлена:

а) $2{,}3x - 5{,}1x + 4{,}7x$; в) $-5a - 7{,}5b + 2{,}5a - b$;

б) $2\frac{3}{4}k + 0{,}5k - 1\frac{1}{8}k$; г) $-6{,}3n^2 + 2{,}8m - 3{,}9n^2 + 6{,}9m$.

**3.120°.** Спростити вираз:

а) $(2a - b)(2a + b) + b^2$; в) $(6x + y)(6x - y) + y^2$;

б) $(n + m)^2 + (n - m)^2 - 2n^2$; г) $(t - p)^2 + (t + p)^2 - 2p^2$.

**3.121°.** Довести тотожність:

а) $(x - y)^2 + 2xy = x^2 + y^2$; б) $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$.

**3.122°°.** Обчислити значення многочлена:

а) $-a^3+3a^2+4a-2$, якщо $a=5$;

б) $\frac{9}{14}a+\frac{5}{7}b$, якщо $a=49$, $b=14$;

в) $5m^4+n^5-m^3+n^2-mn$, якщо $m=2$, $n=-1$.

**3.123°°.** Записати вираз до умови задачі.

а) Знайти периметр прямокутника, сторони якого дорівнюють $x$ см та $(x+3)$ см.

б) Знайти периметр трикутника зі сторонами $a$ см, $2a$ см і $(a+5)$ см.

в) Знайти периметр прямокутника, одна сторона якого дорівнює $c$ см, а інша втричі довша.

**3.124°°.** Спростити вираз:

а) $(y-4)(y+4)-(y+3)^2$;

б) $(a+1)(a-1)-(a-5)(a+5)$;

в) $(k+7)^2-(k-5)(k+5)$;

г) $(x+3)^2-(x-9)(x+9)$.

**3.125°°.** Розв'язати рівняння:

а) $(a-12)(a+12)=2(6-a)^2-a^2$;

б) $(2y-5)^2=40+(2y+5)^2$;

в) $(x+6)^2=79+(x-5)(x+5)$;

г) $2(b+1)^2+3(b-1)^2=5(x-1)(x+1)-4$.

**3.126°°.** Довести, що квадрат непарного натурального числа, зменшений на одиницю, ділиться на 8.

**3.127°°.** Довести, що різниця квадратів двох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 8.

**3.128°°.** Довести, що число $x^4+8x^2+16$ є складеним для будь-якого цілого значення $x$.

**3.129°°.** Довести, що число $x^4+9x^2+81$ є простим для будь-якого цілого значення $x$.

**3.130°°.** Довести, що $x^2-x^4$ для будь-якого цілого $x$ ділиться на 6.

**3.131°°.** Довести, що $a^6-a^2$ для будь-якого цілого $a$ ділиться на 12.

**3.132°°.** Знайти суму і різницю многочленів:

а) $8x^2+3y-8y^2$ та $-4x^2+7y^2-9y$;

б) $\frac{1}{3}a+\frac{2}{15}b$ та $\frac{7}{9}a-\frac{3}{5}b$;

в) $5k^3-11k^3-9k$ та $-k^3+24k^2+6k$.

**3.133•.** Подати у вигляді многочлена вираз:

а) $\overline{xyz}$; б) $\overline{3x9y}$; в) $\overline{ab}+\overline{abc}$; г) $\overline{mn}-\overline{nm}$.

**3.134•.** Розв'язати рівняння:

а) $2(7-x)=15$; в) $(3-y)=6$;

б) $0{,}1(b+10)=-1$; г) $0{,}5(28-z)=-34$.

**3.135•.** Виконати множення:

а) $(2x^2+6)(3x-16)$; в) $(5b^3-b)(3b+2b^2)$;

б) $(4a^2+7)(15-12a)$; г) $(-4k^5+5k^4)(2k+3k^2)$.

**3.136•.** Записати у вигляді добутку:

а) $x^3-1$; б) $y^3+t^3$; в) $a^3-(2b)^3$; г) $(4n)^3+1$.

**3.137•.** Деяке натуральне число при діленні на 8 дає в остачі 7. Довести, що і куб цього числа при діленні на 8 дає в остачі 7.

**3.138•.** Деяке натуральне число при діленні на 5 дає в остачі 1. Довести, що сума цього числа і його куба ділиться на 5.

**3.139••.** Знайти добуток:

а) $5ab^2(-3a^3b+4a^2b^6-9a^2b^3)$;

б) $(2x^2y-1{,}5x^2y^3-0{,}3x^4y)\cdot(-xy)$;

в) $(-5{,}2c^7+0{,}3c^4-2{,}8c^5)\cdot(-c^2)$;

г) $\left(-\frac{2}{5}m^2n\right)\cdot\left(-15mn^4+10m^2n+2{,}5m^2n^3\right)$.

**3.140•.** Довести, що різниця $54^3-24^3$ ділиться на 1080.

**3.141•.** Довести, що сума $328^3+172^3$ ділиться на 2000.

**3.142••.** Одну сторону клумби квадратної форми збільшили на 2 м, а іншу зменшили на 1 м. При цьому площа клумби збільшилася на 3 м$^2$. Знайти, якими були сторони клумби до змін.

**3.143••.** Мати для шкільного ярмарку придбала 5 кг печива з шоколадними крихтами та з родзинками. Печиво з шоколадними крихтами коштує 54 грн за кг, а з родзинками – 42 грн за кг. За всю покупку мати заплатила 246 грн. Знайди, скільки кг кожного виду печива було придбано.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**3.144••.** Картина вставлена в раму, що має ширину 1 дм і площу 78 дм$^2$. Чому дорівнює площа картини без рами, якщо довжина картини на 3 дм більша за її ширину?

**3.145**••. На ділянці, що має форму прямокутника, один з вимірів якого на 17 м більший від іншого, зроблено прямокутний газон, який знаходиться на відстані 7 м від огорожі. Знайти площу ділянки, якщо відомо, що вона більша від площі газону на 1414 м$^2$.

**3.146**••. Коли довжину прямокутника зменшили на 6 м, а ширину збільшили на 2 м, то одержали квадрат, площа якого менша від площі прямокутника на 24 м$^2$. Визначити сторону квадрата.

**3.147**••. Визначити, яке число потрібно додати до виразу

$$2x(2x-3)^2-(6x-11)^2,$$

щоб отриманий вираз можна було подати у вигляді куба двочлена.

**3.148**••. Узагальнити інформацію з теми «Цілі вирази. Многочлени» у формі вірша **«Сенкан»** за такими правилами:

*Перший рядок – **тема** (іменник).*

*Другий – **опис теми** (два прикметники).*

*Третій – **назва дії**, пов'язаної з темою, складається з трьох дієслів.*

*Четвертий рядок – **фраза**, переважно з 4-х слів, висловлює ставлення до теми, почуття.*

*П'ятий рядок – одне слово – **синонім до слова (теми)**, ніби висновок вірша.*

(**«Сенкан»** – це неримований вірш, що складається з п'яти рядків (слово «сенкан» походить від французького слова «п'ять»), які формулюють складне і об'ємне декількома словами за допомогою певних правил).

Приклад сенкану

*Уся глибина думки, яка закладена*
*формулюванням математичних понять,*
*згодом розкривається тим умінням,*
*з якими ці поняття використовуються.*

Юджин Пол Вігнер

# ТЕМА 4. | Розкладання многочленів на множники

Ти навчилася / навчився **перетворювати** на многочлени вирази, що задані сумою, різницею, добутком, оволодівши при цьому певними підходами зведення многочленів до стандартного вигляду. У цій темі тобі доведеться **виконувати обернену операцію,** скориставшись прийомом оберненої теореми. Тобто задано те, що раніше треба було довести, а довести тепер потрібно те, що було задано.

Отже, потрібно **навчитися** подавати многочлен у вигляді добутку. Для цього ти використовуватимеш все, що знаєш і вмієш – властивості арифметичних дій, формули скороченого множення та рівносильні перетворення. Саме за цими правилами ти «згортатимеш» многочлени в добутки. Тому є велика надія, що всі **лабіринти** алгебраїчних таємниць ти подолаєш і станеш ще успішнішою / успішнішим, ніж була / був учора!



# § 4.1 Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Світ освітлюється сонцем, а людина – знаннями!»*** (Народне прислів'я).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**ПРИДУМАЙ**

як обчислити вираз $154 \cdot 146$ без калькулятора і множення в стовпчик.

**НАЗВИ**

як знайти площу у м² частини, що залишилася, коли від плити ДСП 1750 × 1750 мм, відрізали шматок 420 × 420 мм.

**ПОЯСНИ**

як знайти остачу від ділення квадрата будь-якого натурального числа на 3.

**ЧОМУ**

є правильною рівність $(5 - c)(c + 1) = 4c - c^2 + 5$?

**ЗАПРОПОНУЙ**

свій спосіб перетворення добутку $(2+x)(x^2+4)(x-2)$ на многочлен.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

**ПОДІЛИСЯ**

як знайти три послідовних натуральних числа, якщо квадрат меншого з них на 41 менший, ніж добуток двох інших.

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди у парі тверстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** значення виразу:

а) $(x - 3)^2 + 2(3 - x)(3 + x) + (x + 3)^2$, якщо $x = -1{,}25$;

б) $(x - 5)^2 - 2(x - 5)(x + 5) + (x + 5)^2$, якщо $x = 0{,}4$.

**2) Обчислити** значення виразу при $y = -2$:

а) $\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - 3^2 - \left(1 - 3^3\right) - (1{,}5)^2$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}-3$.

**3) Перетворити** на многочлен стандартного вигляду вираз:
а) $(x+2)^2$; б) $(2m-n)^2$; в) $(4b-k)(4b+k)$; г) $(3a-2k)^2$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

**ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:**

**1** Знаходження значення виразу потребує вміння застосовувати формули скороченого множення. У такий спосіб відбувається спрощення. Після спрощення отримали числові вирази, у які не було потреби підставляти значення.

**2** Обчислення нам нагадало про дроби та вміння виконувати дії з ними. Є така потреба життєва, коли від цілого забирають половину, то залишається половина, коли чверть, то залишається три чверті, коли від половини забирають чверть, то залишається чверть. Можна було б так собі виконувати дії, але ще є й інші дії, тому є потреба вчитися.

**3** Потреба зводити многочлени до стандартного вигляду є загальноприйнятою, тому його спрощують і виносять в одночленах числові множники (коефіцієнти одночленів) на перше місце.

***Зауваж!***

Розкласти многочлен на множники – означає записати його у вигляді добутку двох або більше множників.

Для розкладання многочлена на множники будемо використовувати різні способи.

Першим розглянемо спосіб ***винесення спільного множника за дужки.***

Щоб винести спільний множник за дужки, потрібно скористатись розподільною властивістю множення $c(a+b)=ca+cb$, а точніше її записом у зворотному порядку

$$c\cdot a+c\cdot b=c\cdot(a+b).$$

Наприклад: $3p-3c=3\cdot p-3\cdot c=3(p-c)$.

***Зауваж! Це важливо!***

**Алгоритм розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки:**

1) Знайти найбільший спільний дільник усіх коефіцієнтів одночленів многочлена (якщо це цілі числа, то шукають НСД коефіцієнтів).

2) Винести його за дужки.

3) Винести за дужки змінну з найменшим показником степеня.

Наприклад, потрібно розкласти на множники многочлен

$$6x^4m^2+4y^2x^3.$$

1) НСД(6; 4) = 2.

2) Спільний буквений множник – одночлен $x^3$.

Отже, виносимо за дужки $2x^2$, маємо:

$6x^4m^2+4y^2x^3=2\cdot3\cdot x\cdot x^3\cdot m^2+2\cdot2\cdot y^2\cdot x^3=2x^3(3xm^2+2y^2)$. Отримано добуток, це означає, що многочлен розкладено на множники.

## *Тренувальні вправи*

**4.1°.** Знайти спільний множник у виразі:

а) $6c-6x$; в) $am+bm$;

б) $3m+4mc$; г) $5nb-5mb$.

**4.2°.** Винести спільний множник за дужки:

а) $3c-3c^2x$; в) $m^3+bm^3$;

б) $7ba+7bc$; г) $10p^2-10p^2b$.

**4.3°.** Обчислити зручним способом:

а) $12\cdot5+12\cdot95$; в) $8\cdot23+8\cdot77$;

б) $30\cdot15-15\cdot20$; г) $36\cdot54-44\cdot36$.

**4.4°.** Подати різницю у вигляді добутку:

а) $3xp-2xm-7xc$; в) $-b^2+4b$;

б) $4c^2-4c^2n$; г) $0{,}5d^4-0{,}5md^4$.

**4.5°.** З'ясувати, чи правильно виконано розкладання на множники:

а) $7nc+8ncm=7nc(1+1m)$;

б) $5mdx^2-5mb=5m(dx^2-b)$;

в) $c^2p^3-p^2c^3=pc(c^2p^2-p^2c^2)$;

г) $7s^2b+2s^2d=2s^2(5b+d)$.

**4.6°°.** Упорядкувати парами многочлени (1–4), розклавши многочлени на множники та тотожні їм вирази (А–Д).

| *Многочлен* | *Тотожний вираз* |
|---|---|
| 1. $y^2b+5y^2$ | А. $y^3(b^2+5)$ |
| 2. $y^3b+5y^2$ | Б. $y^2(b+5)$ |
| 3. $5y^2+y^4b$ | В. $y^3(b^2+5y)$ |
| 4. $y^3b^2+5y^3$ | Г. $y^2(yb+5)$ |
| | Д. $y^2(5+y^2b)$ |

**4.7°°.** Знайти спільний числовий множник, який можна винести за дужки:

а) $8c-12b^2y$; в) $15n^3+20m^3$;

б) $7-14xc$; г) $49m^2-35m$.

**4.8°°.** Винести спільний множник за дужки:

а) $12x^4-8x^3-6x^5$; в) $35b^2c+20b^4c^3$;

б) $21d^2c^4+14d^2$; г) $18ynm^3-45ym^2+27$.

**4.9°°.** Критично оцінити процес розкладання многочлена на множники.

| |
|---|
| а) $x^4-x^7-x^5=x^4(-x^3-x)$; |
| б) $2c^8+8c^2-4c^6=2c^2(c^6+4-2c^4)$; |
| в) $-m^{12}+m^{10}-m^{13}=m^{10}-m^{12}-m^{13}=m^{10}\,(1-m^2+(-m^3))$; |
| г) $-3p^2+3p^4-3p=-3p(p+p^3-1)$. |

**4.10•.** Винести спільний множник за дужки.

а) $24c^3m^4+18c^4m^3+20c^5m^2$; б) $-py^2+3py+3p^2y$;

б) $-10x^2n-15x^2-25x^3n$; в) $45mn^3\,d+81m^4n^4d-72mnd$.

**4.11•.** Знайти значення виразу.

а) $24{,}5b-b^2$, якщо $b=14{,}5$;

б) $0{,}919c^2m+c^4$, якщо $m=10$, $c=0{,}9$.

**4.12••.** Розв'язати рівняння.

а) $2{,}3c-c^2=0$; в) $2(16-a^2)+(4-a)^2=0$;

б) $x(6x-8)-(3x-4)=0$; г) $\frac{5}{6}m^2+\frac{1}{3}m=0$.

**4.13**••. Розкласти многочлен на множники:

а) $p(c-3)-6(c-3)$;

б) $(x^2-3)(c+4)+(x^2-3)(c-4)-c(x^2-3)$;

в) $-(m^2-a^2)+(m-a)^2$;

г) $3(c^2-25k^2)-(c^2-10k+25k^2)$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**4.14**••. Одна сторона трикутника дорівнює $m$ см, друга – в 1,5 рази довша за неї, а третя – удвічі коротша від другої. Скласти вираз для знаходження периметра трикутника. Чому дорівнює кожна сторона трикутника, якщо $P = 39$ см?

**4.15**••. Довести, що число:

а) $41^4-41^3$ ділиться на 40;

б) $36^5-6^8$ ділиться на 7;

в) $16^4-8^5-4^5$ ділиться на 31.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**4.16**••. Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Периметр прямокутника»*. Кімната Іринки має форму прямокутника завдовжки 4,5 м і завширшки – $c$ м. Довжина плінтуса в кімнаті дорівнює 19 м.

б) Задача *«Солодощі для Сашка»*. Сашко протягом трьох днів купував в магазині цукерки. Кожного дня на 1 цукерку більше, ніж попереднього. Усього він купив 33 цукерки.

в) Задача *«Рукоділля»*. У гуртку «Рукоділля», який відвідує Марійка та Максим, виготовляють патріотичні браслети для продажу на благодійних ярмарках, кошти з яких йдуть на підтримку ЗСУ. Придбавши для виготовлення браслетів декілька різнокольорових стрічок, вони виявили, що їх кількість ділиться і на 6, і на 9, і на 15.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§ 4.1. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки».**

# § 4.2 Розкладання многочленів на множники способом групування



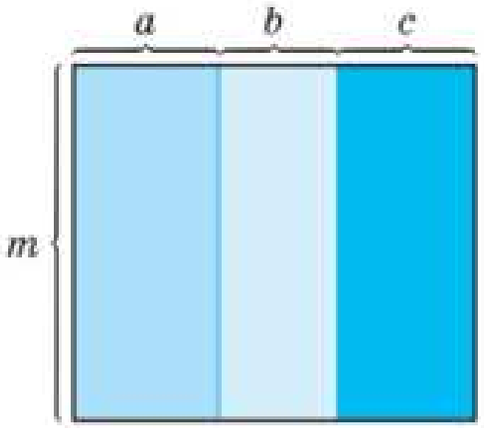

Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Чого б ти не навчався, ти навчаєшся для себе»*** (Петроній).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про розкладання многочленів на множники ще одним способом – способом групування.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** тотожність за її геометричним змістом, який подано на малюнку.




**ПОЯСНИ,** як знайти відсотковий вміст цукру в чаї Наталки, якщо вона поклала у 200-грамовий кухлик 2 ложечки по 5 г цукру.

**ЧОМУ** число $8^{100}+2\cdot 8^{99}$ націло ділиться на 10, 20, 40?

**ПРИДУМАЙ** число, на яке треба збільшити кожний із чотирьох множників двох добутків $20\cdot 31$ і $15\cdot 40$, щоб нові добутки були рівними.

**ПОДІЛИСЯ** своїми міркуваннями щодо зручного способу обчислення значення виразу $223^2+777\cdot 223$.

**ЗАПРОПОНУЙ,** як перетворити многочлен $3a^{k+5}-27a^{k+3}$ на добуток.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди у партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Подати** у вигляді добутку многочленів вираз:

а) $5xm+3ym+4pm$; б) $24c^2rt+15rtm-6rc$;

в) $tc^4+3t^2c^2$; г) $n(m+s)-(m+s)^2$.

**2) Знайти** значення виразу, якщо $x=2$, $y=-10$:

а) $8x^2y+16y^2x$; б) $x^3y^2+x^2y^3+x^2y^2$.

**3) Визначити** серед многочленів (а–г) такі, які можна розкласти на множники:

а) $9x^2+6x-3$; б) $\frac{1}{25}-49n^2$;

в) $16c^2-16c+4b^2$; г) $3x^2d+6d^2c-2c^2x$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

**ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:**

**1** Винесення спільного множника за дужки потребує уважного оцінювання змісту завдання. Навіть, якщо не одразу вдається розкласти на множники, то можна цей процес виконувати поетапно, прагнучи отримати правильний добуток.

**2** Якщо вираз є сумою добутків степенів, то виносять спільний множник – степінь з найменшим показником. Тому властивості степенів – це твій кейс разом із властивостями арифметичних дій.

**3** Без знання формул скороченого множення неможливо впізнати, які саме многочлени розкладаються на множники.

| |
|---|
| $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ |
| $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ |
| $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ |

***Зауваж!***

**Нагадаймо!** Якщо значення виразу

$64\cdot121+22\cdot29+18\cdot29+36\cdot121$

обчислювати зручним способом, то потрібно застосувати:

**1)** переставну властивість додавання:

$64\cdot121+22\cdot29+18\cdot29+36\cdot121=$

$=64\cdot121+36\cdot121+22\cdot29+18\cdot29;$

**2)** розподільну властивість множення:

$\ldots=64\cdot\mathbf{121}+36\cdot\mathbf{121}+22\cdot\mathbf{29}+18\cdot\mathbf{29}=$

$=(64\cdot\mathbf{121}+36\cdot\mathbf{121})+(22\cdot\mathbf{29}+18\cdot\mathbf{29})=$

$=\mathbf{121}\cdot(64+36)+\mathbf{29}\cdot(22+18)=\mathbf{121}\cdot100+\mathbf{29}\cdot40=$

$=12\,100+1\,160=13\,260.$

Отже, $64\cdot121+22\cdot29+18\cdot29+36\cdot121=13\,260$.

Насправді, таке об'єднання доданків у дужки і є способом групування.

### *Зауваж! Це важливо!*

Розгляньмо ще один спосіб розкладання многочлена на множники – *спосіб групування.*

**Алгоритм розкладання многочлена на множники способом групування:**

1) Згрупувати (об'єднати в групи) доданки, які мають спільний множник.

2) В кожній групі знайти спільний множник і винести його за дужки.

3) Знайти в отриманих добутках спільний множник і винести його за дужки.

Наприклад, розкласти на множники вираз $mn+ab+ma+nb$.

*1 крок:* $mn+ab+ma+nb=(mn+ma)+(ab+nb)$;

*2 крок:* $(mn+ma)+(ab+nb)=m(n+a)+b(a+n)$;

*3 крок:* $m(n+a)+b(a+n)=(a+n)(m+b)$.

Отже, $mn+ab+ma+nb=(a+n)(m+b)$.

## *Тренувальні вправи*

**4.17°.** Назвати члени многочлена, які мають спільний множник:

а) $9kf+bf+9ka+ab$;

б) $y^2x+bc^2+bx+y^2c^2$;

в) $3kd+nd-3ks-ns$;

г) $11a+ay-11m-ym$.

**4.18°.** Розкласти многочлен на множники способом групування:

а) $4m+4b+xm+xb$;

б) $bp-bx+7p-7x$;

в) $pk+mk-ps-ms$;

г) $11a+my+11m+ya$.

**4.19°.** Установити правильний порядок процесу розкладання многочлена $4cp+ny+4cn+yp$ на множники способом групування (з'єнати лініями):

| | |
|---|---|
| $4c(p+n)+y(n+p)$ | 1 крок |
| $(4c+y)(p+n)$ | 2 крок |
| $(4cp+4cn)+(ny+yp)$ | 3 крок |

**4.20°.** Подати у вигляді добутку вираз:

а) $m^2+m^3+1+m$;

б) $4n^2+4c+4n^2b+4cb$;

в) $vc+c^2+3v+3c$;

г) $bg^3-8y+8b-g^3y$.

**4.21°°.** Подати у вигляді добутку многочленів вираз $4c+p+4cp+p^2$ та знайти його значення для $c=\frac{1}{4}$; $p=-0{,}3$.

**4.22°°.** Упорядкувати парами многочлени (1–4), застосувавши розкладання многочлена на множники способом групування, та тотожні їм вирази (А–Е).

| *Многочлен* | *Тотожний вираз* |
|---|---|
| 1. $b^3c+x^2+bx+bxc$ | А. $(y^2-m)(k+yx)$ |
| 2. $ky^2-mk+xy^3-myx$ | Б. $(b^2+1)(b^4+1)$ |
| 3. $b^4+b^6+b^2+1$ | В. $(k-d)(6x-d)$ |
| 4. $dk-6d^2+xak-6xad$ | Г. $(b+x)(bc+x)$ |
| | Д. $(k-6d)(d-xa)$ |
| | Е. $(b-x)(bc-x)$ |

**4.23°°.** Розкласти на множники:

а) $mn-10n+m^2-10m$; в) $k^2+fk-f^2d-kfd$;

б) $8b-8c+yb-yc$; г) $13ml^2-ml-1+13nl$.

**4.24°°.** Обчислити:

а) $23\cdot45+45\cdot12+55\cdot23+55\cdot12$;

б) $56\cdot46-46\cdot46+19\cdot54-19\cdot46$;

в) $0{,}91\cdot3{,}4+0{,}91\cdot6{,}6-1{,}21\cdot3{,}4+1{,}21\cdot6{,}6$.

**4.25•.** Критично оцінити процес розкладання многочлена на множники.

а) $y^2m-y^3x^2+mx-yx^3=(y^2m-y^3x^2)+(mx-yx^3)=$
$=(y^5mx^2)+(myx^4)=(m-y)(y^4+x)$.

б) $7mb^4+7m^2b+7b^3+7m=(7mb^4+7m^2b)+(7b^3+7m)=$
$=7mb(b^3+m)+7(b^3+m)=7(mb+1)(b^3+m)$.

в) $xcv+xnv-pcd+pnd=(xcv+xnv)-(pcd+pnd)=$
$=xv(c+n)-pd(c+n)=(c+n)(xv-pd)$.

г) $9l^4m^4n-6a^5m^4-6l^4c^2n-4a^5c^2=(3l^4n-2a^5)(3m^4-c^2)$.

**4.26•.** Розв'язати рівняння:

а) $8x-14-x^2=-2$; в) $b^3+b^2=b+1$;

б) $4y-2y^2+2-y=0$; г) $8m^2-m+m^3-8=0$.

**4.27••.** Записати вираз у вигляді добутку:

а) $ac^2+p^2c-acp+p^3-8ac+8p^2$;

б) $7mt^4-6a^4+5x^6+7mt-6t^3a^4+5x^6t^3$;

в) $-9vcx-12vcm-6vc-3xc^3y-4c^3my-2yc^3$;

г) $(x-y)(a-b)+(y-x)(a+b)^2+(b-a)(x^2-y^2)$.

**4.28**••. Знайти значення виразу:

а) $c^3b^2+c^3n^2-c^4n^2+c^4b^2$, при $c=\frac{1}{5}$, $n=3$, $b=4$;

б) $(y^2-a^2)(b-2)+(a-y)(b-2)^2+(2-b)(y-a)$, при $y=0{,}7$; $a=1{,}3$; $b=1$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**4.29**••. Розкласти тричлен на множники:

а) $b^2+7b+6$; в) $l^4+6l^2+5$;

б) $5m^3+7m^2+2m$; г) $c^2-c-6$.

**4.30**••. Розкласти на множники многочлен

$$m^2+y^2+b^2+2my+2mb+2yb.$$

**4.31**••. Розв'язати рівняння:

а) $y^2-25+y(5-y)+\frac{y}{2}(5+y)=0$;

б) $a^2-10a+24=0$;

в) $(16b+2b^2)-8-b=0$.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**4.32.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Подруги»*. Оля і Катруся одночасно вийшли зі своїх будинків назустріч одна одній. Швидкість руху Олі становить 42,3 м/хв, а Катрусі – 47,7 м/хв.

б) Задача *«Велоспорт»*. Із двох міст одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти. Швидкість одного з них становить $a$ км/год, другого – $b$ км/год, зустрілись вони через $t$ год.

в) Задача *«Приватний підприємець»*. За два дні підприємець продав 1240 кг помідорів. Протягом першого дня він продавав помідори по 50 грн за кг, а протягом другого – по 65 грн за кг, однак вторгував на 11 400 грн менше, ніж першого дня.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§ 4.2. Розкладання многочленів на множники способом групування».**

# § 4.3 Розкладання многочленів на множники за допомогою формул скороченого множення




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Хіба ти не помітив, що здібний до математики успішний у всіх науках про природу?»*** (Платон).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та навчимося нового способу розкладання на множники – за допомогою формул скороченого множення.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** зручний спосіб обчислення та обчисли значення виразу $12{,}3x+12{,}3y$, якщо $x=0{,}75$, $y=0{,}25$.

**ПОЯСНИ**, як довести, що число $49^{20}+49^{19}$ ділиться на 50.

**ЧОМУ** рівність $(5x+10)^2=5(x+2)^2$ не є тотожністю?

**ПРИДУМАЙ** двоцифрове число, сума цифр якого дорівнює 7, а при читанні числа в зворотному порядку воно зменшується на 45.

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями, як у виразі $(3b-12m)^2$ винести число за дужки.

**ЗАПРОПОНУЙ** змінні, якими можна замінити □ і ■ в рівності $12\square^2x+3\square x^2+16a\blacksquare+4x\blacksquare=(4a+x)(3ax+4b)$

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди у партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** корені рівняння:

а) $(2x+7)^2=0$; в) $(3-x)(3+x)=0$;

б) $x(2-x)=0$; г) $(2x-9)(2-x)=0$.

**2) Обчислити** значення виразу:

$85{,}5\cdot12+14{,}5\cdot12+0{,}16\cdot85{,}5+0{,}16\cdot14{,}5$.

**3) Визначити,** чи буде ділитися на 500 числовий вираз:

$5^{12}\cdot2^{10}+5^{12}\cdot2^8+5^{10}\cdot2^{10}+5^{10}\cdot2^8$.

**4) Дати назву** виразу:

а) $(a+b)^2$; б) $a^2-b^2$; в) $(a-b)^2$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Якщо добуток дорівнює нулю, то хоча б один із множників дорівнює нулю. Тому, прирівнюючи кожний множник до нуля, отримують два корені. Винятком є квадрат виразу, оскільки це добуток рівних множників.

**2** Якщо застосувати спосіб групування, то таке обчислення є зовсім нескладним. Звертаємо увагу, що $85{,}5+14{,}5=100$, а далі правильно групуємо.

**3** Дуже подібним до обчислення є з'ясування подільності. Завжди у таких випадках зручно виносити за дужки степінь з найменшим показником, застосувавши властивості степеня. Результат $10^8\cdot 130\cdot 25$, а кожна 1000 ділиться на 500.

**4** Формули скороченого множення називають так:

| | |
|---|---|
| $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ | Різниця квадратів |
| $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ | Квадрат суми |
| $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ | Квадрат різниці |

**5** При винесенні за дужки від'ємного множника усі знаки в дужках змінюються на протилежні

| | |
|---|---|
| $a-b=-(b-a)$ | $a+b=-(-a-b)$ |

***Зауваж!***

Якщо потрібно подати вираз $16-m^4$ у вигляді добутку, то формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ застосовують двічі:

$16-m^4=(4-m^2)(4+m^2)=(2-m)(2+m)(4+m^2)$.

Маємо: $16-m^4=(2-m)(2+m)(4+m^2)$.

Отже, многочлен, що є різницею квадратів, подано у вигляді добутку множників-многочленів, тобто *многочлен розкладено на множники.*

***Зауваж! Це важливо!***

Оскільки формули скороченого множення – це добутки, то їх також використовують для розкладання на множники.

**1** Якщо потрібно розкласти на множники двочлен, то доцільно перевірити, чи не є він різницею квадратів, тоді його можна буде перетворити на добуток суми і різниці: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Наприклад, $9-c^2=3^2-c^2=(3-c)(3+c)$.

**2** Якщо потрібно розкласти на множники тричлен, то доцільно перевірити, чи не є він повним квадратом, тоді його можна буде перетворити на квадрат двочлена: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.
Наприклад, $4a^2 + 12am + 9m^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3m + (3m)^2 = (2a + 3m)^2 = (2a + 3m)(2a + 3m)$.

## *Тренувальні вправи*

**4.33°.** Вибрати правильні рівності:
а) $(m+4)^2 = (m+4)(m+4)$; в) $(m-b)^2 = (m-b)(m+b)$;
б) $9 - a^2 = (9-a)(9+a)$; г) $m^2 - 1 = (m-1)(m-1)$.

**4.34°.** Подати вираз у вигляді добутку:
а) $(c+8)^2$; б) $(3b-m)^2$; в) $n^2 - k^2$; г) $(2x+11y)^2$.

**4.35°.** Розкласти многочлен на множники:
а) $x^2 + 2xb + b^2$; в) $1 + 2c + c^2$;
б) $p^2 - 2py + y^2$; г) $k^2 - 2k + 1$.

**4.36°.** Поставити замість смайлика ☺ такі одночлени, щоб утворилася тотожність:
а) $c^2 - b^2 = (c-b)(☺ + b)$; в) $3^2 - ☺ = (3 - ☺)(☺ + k)$;
б) $b^2 - ☺ = (b-1)(☺ + 1)$; г) $49 - ☺ = (7 - 5b)(7 + ☺)$.

**4.37°.** Обчислити, скориставшись формулою $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
а) $13^2 - 7^2$; б) $23^2 - 13^2$; в) $19^2 - 11^2$; г) $35^2 - 15^2$.

**4.38°.** Обчислити, скориставшись формулами $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.
а) $13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 7 + 7^2$; в) $26^2 + 104 + 4^2$;
б) $15^2 - 150 + 5^2$; г) $32^2 - 2 \cdot 32 \cdot 2 + 4$.

**4.39°.** Обчислити, скориставшись формулами скороченого множення:
а) $24^2 - 14^2$; в) $12^2 + 2 \cdot 12 \cdot 8 + 8^2$;
б) $0{,}62^2 - 0{,}38^2$; г) $51^2 - 2 \cdot 51 \cdot 1 + 1^2$.

**4.40°°.** Поставити замість смайлика ☺ такі одночлени, щоб утворилась тотожність:
а) $(☺ + 1)^2 = c^2 + 2c + 1$; в) $(3t + m)^2 = (☺ + m)(☺ + m)$;
б) $c^2 - ☺^2 = (c - 3x)(c + 3x)$; г) $y^2 - 16 = (y - ☺)(y + ☺)$.

**4.41°°.** Упорядкувати парами тотожно рівні вирази (1–4) і (А–Е).

| *Тричлен* | *Добуток* |
|---|---|
| 1. $16-8c+c^2$ | А. $(c+4)(c+4)$ |
| 2. $c^2+12c+36$ | Б. $\left(8+\frac{1}{2}c\right)\left(8+\frac{1}{2}c\right)$ |
| 3. $16+8c+c^2$ | В. $\left(8+\frac{1}{2}c\right)\left(8-\frac{1}{2}c\right)$ |
| 4. $64+8c+\frac{1}{4}c^2$ | Г. $(c-4)(c+4)$ |
| | Д. $(4-c)(4-c)$ |
| | Е. $(c+6)(c+6)$ |

**4.42°°.** Знайти значення виразу:

а) $n^2-a^2$, якщо $n=45$, $a=35$;

б) $x^2-9m^2$, якщо $x=101$, $m=\frac{1}{3}$;

**4.43°°.** Знайти значення виразу:

а) $m^2+8m+16$, якщо $m=96$;

б) $x^2-6x+9$, якщо $x=43$.

**4.44•.** Розкласти на множники вираз:

а) $0{,}81-a^4m^{16}$;

б) $1-(c-12)^2$;

в) $(6d+5a)^2-1$;

г) $(5x-4)^2-36a^2$.

**4.45•.** Критично оцінити процес розкладання на множники.

а) $0{,}64-a^2c^6=(0{,}8)^2-(ac^3)^2=(0{,}8-ac^3)(0{,}8+ac^3)$;

б) $1-\frac{9}{16}b^2n^2=\left(1-\frac{9}{16}bn\right)\left(1+\frac{9}{16}bn\right)$;

в) $(5-m)^2-9=(5-m-3)(5-m+3)=(2-m)(8-m)$;

г) $36x^2-12xd+d^2=(6x-d)(6x+d)$.

Розкласти на множники (**4.46–4.48**).

**4.46•.** а) $(a+b+c)^2-1$;

б) $4-(a+b+c)^2$;

в) $(a+b+3)^2-1$;

г) $4-(a+b+5)^2$.

**4.47•.** а) $(5a^2-a+2)^2-25a^4$;

б) $(x+2y-3)^2-4y^2$;

в) $(a^2-4a+1)^2-16a^2$;

г) $16-(x^2+x+4)^2$.

**4.48•.** а) $(y-5)^2-(y+5)^2$; в) $4(k+3)^2-(k-12)^2$;
б) $(2x+y)^2-(x-y)^2$; г) $(2m+3n)^2-(2m-3n)^2$.

**4.49•.** Розв'язати рівняння:
а) $x^4-16=0$; в) $y^2+12y+36=0$;
б) $(x+3)^2-36=0$; г) $\frac{4}{9}-4y+9y^2=0$.

**4.50••.** Довести тотожність:
а) $(m-4p)^2-(4m+p)^2=-16mp$;
б) $(m+4p)^2-(4m+p)^2=15(p-m)(p+m)$;
в) $(x-a+y)^2-(x+a-y)^2=4x(y-a)$;
г) $a^8-b^8=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$.

**4.51••.** Розв'язати рівняння:
а) $(x-2)^2-(x+5)^2=0$; б) $(3x-1)^2-(x+4)^2=0$;
в) $(3x-1)^2-8(3x-1)+16=0$; г) $(2x+1)^2+6(2x+1)+9=0$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**4.52••.** Подати многочлен $(2m-3)^2+2(2m-3)+1$ у вигляді добутку.

**4.53••.** Довести, що значення виразу

$$(5b-4)^2-2(5b-4)(5b+12)+(5b+12)^2$$

не залежить від значення змінної.

**4.54••.** Подати многочлен у вигляді добутку.
а) $n^4+3n^2+1$; б) $x^8+2x^4+9$.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**4.55.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Земельна ділянка»*. Земельна ділянка має форму трикутника. Її огородили парканом завдовжки 858 м. Довжина однієї сторони на 42 м більша за другу.

б) Задача *«Вітальна листівка»*. Марта намалювала на картоні квадрат, готуючись заклеювати його кольоровим папером та робити вітальну листівку. Однак передумала і одну сторону цього квадрата збільшила на 1 см, а іншу – зменшила на 1 см.

Перевір себе «Як ти?»

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 4.3. Розкладання многочленів на множники за допомогою формул скороченого множення».**

# §4.4 Застосування кількох способів для розкладання многочлена на множники




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Скажи мені що-небудь, щоб я тебе побачив»*** (Сократ).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та об'єднаємо отримані знання про розкладання многочленів на множники одразу для кількох способів розкладання.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**




**НАЗВИ** кількість способів, якими можна дібрати пару з однієї голосної і однієї приголосної букви у слові «стежка».

**ПОЯСНИ**, як для ментального здоров'я отримати близько 1500–2000 Ккал на день за 4 прийоми їжі, щоб зберегти кратність калорій числам 120, 160, 180 і 240.

**ЧОМУ** многочлен $(a-x)^2-a^2$ можна подати у вигляді добутку двома способами?

**ПРИДУМАЙ**, як обчислити без калькулятора і письмових записів значення виразу

$$23^2-46\cdot 13+13^2.$$

**ПОДІЛИСЯ**, як визначити, скількома способами Сергій зможе купити для сестри або печиво, або цукерки, якщо в магазині є 3 види печива і 10 видів цукерок.

**ЗАПРОПОНУЙ** свій спосіб розв'язування рівняння

$$x^3-25x^2+x-25-0.$$

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди у партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Подати** у вигляді добутку вираз:

а) $a^2-100$;

б) $12a^3n-15an^2$;

в) $m^2-2ma+a^2$;

г) $(x+y)(2-y)+3(2-y)$.

**2) Обчислити** значення виразу:

а) $32^2-22^2$; б) $1{,}123^2-0{,}123^2$;

в) $78^2+2\cdot78\cdot22+22^2$ г) $12\cdot35+12\cdot65$.

**3) Знайти** найменший розв'язок рівняння:

а) $x^2-25=0$; б) $x^2-x=0$;

в) $m^2-64=0$; г) $x(x-3)+6(x-3)=0$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Щоб подати у вигляді добутку вирази, спочатку з'ясовують, скільки доданків у виразі. Якщо два доданки, то потрібно шукати застосування формули різниці квадратів $a^2-b^2$ або винесення спільного множника за дужки, або і застосування формули, і винесення спільного множника за дужки. Якщо три доданки, то шукають застосування формули квадрата двочлена $(x\pm a)^2$, при цьому, можливо, спочатку доведеться винести за дужки спільний множник. Якщо ж доданків більше, то їх спочатку групують, щоб далі виносити спільні множники за дужки.

**2** Формули скороченого множення сприяють утворенню добутків із різниці квадратів, – добуток суми і різниці однакових виразів, та з тричленів спеціального вигляду, – повний квадрат суми або різниці виразів. У такий спосіб складний числовий вираз набуває значно простішого вигляду для обчислень.

**3** Також розкладання многочлена на множники застосовують для розв'язування рівнянь. Тут важливо не загубити жодного з отриманих множників, які можуть дорівнювати нулю. Варто також пам'ятати, що є такі вирази, які не можуть дорівнювати нулю при жодних значеннях змінної. Наприклад, $x^2+1$, $x^2+2$, ..., $x^2+n$, де $n$ – будь-яке додатне число, бо $x^2+1>0$, $x^2+2>0$, ..., $x^2+n>0$, якщо $n$ – будь-яке додатне число.

***Зауваж!***

**Розкладання многочленів на множники**

- Винесення спільного множника за дужки
- Формули скороченого множення
- Спосіб Групування

***Зауваж! Це важливо!***

**Алгоритм розкладання многочлена на множники.**

1. Якщо можливо, то винеси спільний множник за дужки.
2. Якщо спільний множник винесено, то до многочлена, який залишився в дужках спробуй застосувати формулу скороченого множення.
3. Якщо застосування формули неможливе, то спробуй застосувати спосіб групування.

Застосуємо цей алгоритм, наприклад для многочлена $3b^2+6ba+3a^2$.

*Крок 1.* Винесемо спільний множник – число 3 – за дужки:

$$3b^2+6ba+3a^2=3(b^2+2ba+a^2)=\dots$$

*Крок 2.* Перевіримо, чи є тричлен в дужках повним квадратом.

Так, тричлен $b^2+2ba+a^2$ є квадратом суми.

*Крок 3.* «Згорнемо» тричлен $b^2+2ba+a^2$ у квадрат суми:

$b^2+2ba+a^2=(b+a)^2$.

*Крок 4.* Маємо: $3b^2+6ba+3a^2=3(b+a)^2=3(b+a)(b+a)$.

## *Тренувальні вправи*

**4.56°.** Заповнити пропуски в розкладі на множники.

а) $x^2-y^2=(x-y)(\dots)$ в) $7nb^2-7n=7n(\dots)(\dots)$

б) $b^2-16=(\dots)(b-4)$ г) $4mc^3-mc=mc(\dots)(\dots)$

Розкласти многочлен на множники (4.57–4.60).

**4.57°.** а) $7m^2-7$; б) $10x^2-10y^2$; в) $ac^2-9ac$; г) $80ab-5b^2$.

**4.58°.** а) $ay^2-3y^2$; б) $a^2x-25x$; в) $16x^2-9y^2$; г) $4x^2-25y^2$.

**4.59°.** а) $m^2-2m+1$; б) $x^2+6x+9$; в) $t^2-12t+36$; г) $p^2+16p+64$.

**4.60°.** а) $a^2-8a+16$; б) $a^2+10a+25$; в) $x^2-4x+4$; г) $1+2k+k^2$.

Подати вираз у вигляді добутку (4.61–4.63).

**4.61°°.** а) $6m+6b+xm+xb$; в) $2p+2m-px-mx$;

б) $10mp-10mx+50p-50x$; г) $7a+8my+7m+8ya$.

**4.62°°.** а) $8m^2+16mn+8n^2$; в) $2t^2+4t+2$;

б) $bp^2-2bpn+bn^2$; г) $3y^2+6yc+3c^2$.

**4.63°°.** а) $3ax+3ay-3bx-3by$; в) $4am-12kn-4km+12an$;

б) $6ax-b-2bx+6a$; г) $5mx+10my-10ay-5ax$.

**4.64°°.** Увідповіднити спосіб розкладання на множники (1–4) та многочлен, для якого його можна застосувати (А–Д).

| *Спосіб розкладання на множники* | *Многочлен* |
|---|---|
| 1. Формула скороченого множення | А. $4mn+16mcx$ |
| 2. Винесення спільного множника за дужки | Б. $b^2-49n^2$ |
| 3. Спосіб групування | В. $8t^3-8m^3$ |
| 4. Кілька способів | Г. $7x+cx-7b-cb$ |
| | Д. $p^2+46pb+10b^2$ |

Подати многочлен у вигляді добутку, попередньо його спростивши (4.65–4.66).

**4.65°°.** а) $(x-2)^2+8x$; в) $(x-7)^2+28x$;
б) $(5+a)^2+20a$; г) $(y-4)^2+16y$.

**4.66°°.** а) $(m+3)^2-9$; в) $20x-(x+5)^2$;
б) $32m-(8-m)^2$; г) $49-(7-y)^2$.

**4.67°°.** Подати вираз $4p^3-4p$ у вигляді добутку та знайти його значення, якщо $p=3$ .

Розкласти многочлен на множники (4.68–4.70).

**4.68•.** а) $6x^2+12xy+6y^2$; в) $3a^2+108+36a$;
б) $4p^2-8pq+4q^2$; г) $128+2b^2+32b$.

**4.69•.** а) $10+10x^2-20x$; в) $4n^2+16n+16$;
б) $3+3y^2-6y$; г) $50b^2-20b+2$.

**4.70•.** а) $5t^2+30ty+45y^2$; в) $-x^2-4xc-4c^2$;
б) $8mk^2-8mkn+2mn^2$; г) $c^2y^2-10c^2+25c^2$.

**4.71•.** Знайти значення виразу, якщо $a=9$.
а) $4a^3-4a$; б) $-5a^2-10a-5$; в) $16a^4-a^2$; г) $5a^2-45$

**4.72•.** Критично оцінити процес розкладання многочлена на множники.

| |
|---|
| а) $y^3n-y^2m-n-m=(y^3n-y^2m)-(n-m)=$<br>$=y^2(n-m)-(n-m)=(n-m)(y^2-1)=(n-m)(y-1)(y+1)$. |
| б) $b^2-p+p^2-b=(b^2-b)+(p^2-p)=b(b-1)p(p-1)=bp(b-1)(p-1)$. |
| в) $c^2-9+c-3=(c^2-9)+(c-3)=(c-3)(c+3)+(c-3)=(c-3)(c+3+1)$. |
| г) $81b^5-36b^3=9b^3(9b^2-4)=9b^3(2-3b)(2+3b)$. |

**4.73•.** Розкласти вираз на множники двома способами:
1) як різницю квадратів; 2) за допомогою групування.
а) $(3x-2)^2-(3x+5)^2$; в) $(2m-5)^2-(2m+1)^2$;
б) $(a-m)^2-(a+m)^2$; г) $(6a-1)^2-(2-3a)^2$.

**4.74••.** Довести, що при будь-яких значеннях змінної вираз набуває лише додатних значень:
а) $m^2+2m+3$; в) $x^2-4x+5$; д) $b^2-14b+62$;
б) $t^2+10t+30$; г) $a^2+18a+100$; е) $k^2-20k+100{,}5$.

**4.75••.** Розв'язати рівняння:
а) $x^3-x=0$; в) $m^6-m^8=0$;
б) $6a-3a^2+2-a=0$; г) $0{,}04y^4-0{,}2y^2=0$.

### *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**4.76••.** Записати вираз у вигляді добутку:
а) $2y^3-2yt^2-6y^2+6t^2$;
б) $144-36a^2-144a+36a^3$;
в) $(n+m)(49-b^2)-(n^2-m^2)(7-b)$.

**4.77••.** Розкласти тричлен на множники.
а) $c^2-8c+17$; б) $m^3-10m^2+24$.

**4.78••.** Заповнити пропуски в зошиті:
а) $4((\ldots-3x)(\ldots+3x))=144a^4-36x^2$;
б) $p((0{,}5-\ldots)(0{,}5+\ldots))=0{,}25p-64pm^2$;
в) $n\left(\left(1{,}2x^2-\frac{1}{4}y\right)\left(1{,}2x^2-\frac{1}{4}y\right)\right)=1{,}44x^4n-\ldots$ .

**4.79••.** Довести тотожність $(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2$.

### *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**4.80.** Скласти запитання до умови задачі.
а) Задача *«Біг Бен»*. Діаметр циферблата годинника Біг Бен дорівнює 7 м, а довжина його хвилинної стрілки – 4,2 м.

Перевір себе «Як ти?»

### *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 4.4. Застосування кількох способів для розкладання многочлена на множники».**

# §4.5 Навчальні задачі, що моделюються розкладеним на множники многочленом.



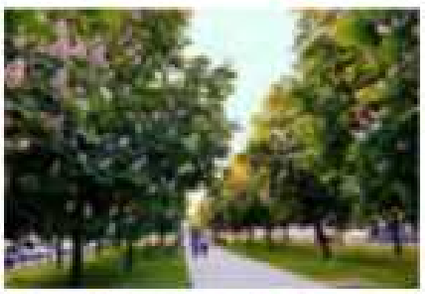

Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Наука в ліс не веде, а з лісу виводить»*** (народне прислів'я).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування навчальних задач – «чи ти можеш?» та навчимося їх моделювати залежно від ситуації.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** число, що визначає об'єм повітря у $м^3$, яке зможуть очистити 25 каштанів, що ростуть уздовж дороги, якщо одне дерево очищує зону завдовжки 100 м, завширшки 12 м і заввишки 10 м.



**ПОЯСНИ**, як можна записати в стандартному вигляді числа, що дорівнюють віку Дуба Чемпіон – найстарішого дуба в Україні, якому близько 1300 років, його «сина» – Дідо-Дуба, якому 1150 років і найстарішої липи України – липи Богдана Хмельницького, якій 700 років.



**ЧОМУ**, на твою думку, лелека, відлітаючи у вирій восени, долає 1200 км за 5 год, а навесні, повертаючись із вирію, – за 3 год?



**ПРИДУМАЙ**, як дізнатися обсяг (у тоннах) світових запасів марганцевої руди, якщо в Україні він найбільший у світі, і складає $2{,}3 \cdot 10^9$ т або 11 % від світових запасів.



**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями знаходити час, за який на українському транспортному літаку Ан-225 «Мрія» можна облетіти Землю вздовж екватора на висоті 10 км, рухаючись зі швидкістю 1020 км/год, якщо дозаправка літака відбувається в повітрі, а радіус екватора наближено дорівнює 6370 км.



**ЗАПРОПОНУЙ** таке трицифрове число, цифри якого зліва направо збільшуються, а якщо його промовляти, то усі слова в ньому починаються з однакової літери.

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

1) **Записати** виразом вартість покупки 7,5 кг рису і 7,5 кг гречки, якщо 1 кг рису на 22 грн дорожчий від 1 кг гречки.

2) **Обчислити** зручним способом:
$12{,}3\cdot 0{,}05+87{,}7\cdot 0{,}9+12{,}3\cdot 0{,}95+87{,}7\cdot 0{,}1$

3) **Визначити,** на які три множники можна розкласти многочлен $x^4-625$.

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Вирази часто використовують в побуті, не називаючи їх. Наприклад, точної ціни не знати, але знати те, що 1 кг рису дорожчий за 1 кг гречки на 20 грн. Тому, якщо $x$ грн – ціна гречки, то $(x+20)$ грн – ціна рису, тоді 10 кг рису коштують $10(x+20)$ грн, а 10 кг гречки – $10x$ грн, а разом це буде $10(x+20)+10x=10(2x+20)=20(x+10)$ (грн).

**2** Для вибору стратегії обчислення значення виразу потрібно проаналізувати дані. Наприклад, як у завданні 2 на дослідження, – наявність спільного множника у кожній парі доданків, які допомагають звести це обчислення до усного. Адже другим множником стала 1 і тоді залишилося знайти суму, яка також не є складною. Якщо ж не будувати стратегії для обчислення, то це марні витрати часу.

**3** Достатньо часто треба вміти застосовувати властивості степенів, читаючи їх зліва на право і справа на ліво. Наприклад, властивість піднесення степеня до степеня $(a^n)^m=a^{nm}$ можна застосувати так: $a^4=(a^2)^2$ і $625=25^2$, але $25=5^2$, тому $625=(5^2)^2$.

У такий спосіб, застосувавши двічі різницю квадратів, можна знайти три шукані множники. При цьому важливо, що лише різницю квадратів можна подати добутком. Сума квадратів на множники не розкладається!

### *Зауваж!*

Очевидно, що кожне з поданих вище завдань для дослідження в партнерстві є навчальним, адже вони охоплюють значний обсяг знань, які мають практичне застосування, і їх можна розбивати на менші задачі, якими можна вчитися розв'язувати інші завдання. Якщо ти навчишся шукати такі навчальні задачі, які

стануть твоїм засобом для формування загального способу розв'язування інших задач, то це допоможе тобі формувати шлях мислення – вміння переходити думкою від окремого до загального, і від загального до окремого. Тоді ти зможеш навчитися вирішувати багато інших задач, не лише математичних. Це вимагає в першу чергу від тебе відповідальності та твоєї активної розумової діяльності, що безпосередньо спирається на наявні в тебе знання та уміння застосовувати їх на практиці.

Нагадаємо, що для опису деякого реального процесу ми використовуємо моделювання засобами математики – створюємо ***математичні моделі*** у формі рівнянь, виразів, таблиць, схем тощо.

**Алгоритм математичного моделювання.**

1) Побудова математичної моделі (що відомо і що треба знайти);

2) Робота з математичною моделлю (математичні співвідношення, що пов'язують дані і результати);

3) Складання відповіді до задачі в термінології її сюжету (перевірка умови допустимості початкових даних).

## *Тренувальні вправи*

**4.81°.** У кінотеатрі $b$ рядів, а стільців в кожному ряді – на 12 більше, ніж кількість рядів. Визначити, яка найбільша кількість глядачів може прийти на перегляд фільму в цей кінотеатр, якщо:

а) кількість стільців в кожному ряді не змінювати;

б) кількість стільців в кожному ряді зменшити на 5;

в) кількість рядів зменшити на 3;

г) кількість рядів збільшити на 2, а стільців в кожному ряді зменшити на 4.

**4.82°°.** Заповнити в зошиті таблицю, використовуючи формулу об'єму прямокутного паралелепіпеда $V=a\cdot b\cdot c$, де $a$, $b$, $c$ – виміри прямокутного паралелепіпеда.

| Об'єм, $V$ | | 80 м$^3$ | | $(x^3-4x)$ см$^3$ |
|---|---|---|---|---|
| Довжина, $a$ | 2 см | 4 м | $(x-1)$ м | $(x+2)$ см |
| Ширина, $b$ | 3 см | 5 м | $(x+1)$ м | $(x-2)$ см |
| Висота, $c$ | 4 см | | $(x^2+1)$ м | |

**4.83°°.** Скласти вирази до задачі. Довжина прямокутника на 5 см більша, ніж його ширина. Визначити, як зміниться площа цього прямокутника, якщо:

а) збільшити його ширину в 5 разів, а довжину – в 3 рази;

б) зменшити його ширину вдвічі, а довжину – втричі;

в) збільшити його довжину вдвічі, а ширину зменшити в 4 рази;

г) і довжину, і ширину збільшити вдвічі.

**4.84°°.** Площу деякого квадрата спочатку збільшили у 2 рази, а потім зменшили на 8 м$^2$. Вибрати вираз (А–Г), який моделює ситуацію, якщо довжина сторони початкового квадрата дорівнює $a$.

**А.** $2(a-8)^2$; **Б.** $2(a+8)^2$; **В.** $2a^2-8$; **Г.** $2a^2+8$.

**4.85°°.** Площу квадрата спочатку зменшили на 8 м$^2$, а потім збільшили вдвічі. Указати вираз для знаходження площі отриманого квадрата.

**А.** $2(x-8)(x-8)$; **В.** $2(x-8)$;

**Б.** $8(x-2)(x-2)$; **Г.** $2(x-4)(x+4)$.

**4.86°°.** Клумба біля школи має форму квадрата. На уроках технологій семикласники спочатку кожну сторону клумби зменшили на 1 м, а потім передумали, і з одного боку прокопали ще 3 м. Визначити, як змінилася площа клумби. Вибрати вираз, який моделює цю ситуацію, якщо $x$ – початкова довжина клумби.

**А.** $(x-1)^2-(x+2)(x-1)$; **В.** $(x+2)(x-1)-x^2$;

**Б.** $(x+2)(x-1)-(x-1)^2$; **Г.** $(x+2)-(x-1)$.

**4.87°°.** Знайти відстань між селами, якщо брат Іванки на скутері може проїхати цю відстань за 18 хв, а на велосипеді – за 45 хв, оскільки його швидкість на скутері на 12 км/год більша, ніж на велосипеді.

**4.88°°.** Катер за течією річки проплив за 8 год таку саму відстань, як проти течії за 10 год. Знайти власну швидкість катера, якщо швидкість течії дорівнює 1,5 км/год.

**4.89°°.** Критично оцінити процес розв'язання задачі.

Задача *«Аркуш картону»*. Дмитро відрізав від аркуша картону квадратної форми з однієї сторони смужку завширшки 3 см, а з іншої – завширшки 5 см. Богдан відрізав від такого самого аркуша з обох сторін по смужці завширшки 3 см.

1) Визначити, на скільки відрізняються площі вирізаних хлопцями фігур, якщо розміри аркуша $a\times a$ см.

2) Обчислити значення отриманого виразу, якщо $a=20$ см.

а) Нехай $a$ см – сторона аркуша картону, тоді:
1) $(a-3)$ см і $(a-5)$ см – сторони прямокутника, який вирізав Дмитро, $(a-3)(a-5)$ см$^2$ – його площа;
2) $(a-3)$ см – сторона квадрата, який вирізав Богдан, $(a-3)^2$ см$^2$ – його площа;
3) різниця площ фігур дорівнює $(a-3)^2-(a-3)(a-5)=$
$=(a-3)(a-3-a+5)=2(a-3)$ (см$^2$).
Якщо $a=20$ см, тоді $(a-3)\cdot 2=(20-3)\cdot 2=34$ (см$^2$).
Відповідь: $2(a-3)$ см$^2$; 34 см$^2$.

б) Нехай $a$ см – сторона аркуша картону, тоді:
1) $(a-3)$ см і $(a-5)$ см – сторони прямокутника, який вирізав Дмитро, а $(a-3)(a-5)$ см$^2$ – його площа;
2) $(a-3)$ см – сторона квадрата, який вирізав Богдан, $(a-3)^2$ см$^2$ – його площа;
3) різниця площ фігур дорівнює: $(a-3)(a-5)-(a-3)^2=$
$=(a-3)(a-5-a+3)=-2(a-3)$ (см$^2$).
Якщо $a=20$ см, то $-2(a-3)=-2(20-3)=-34$ (см$^2$).
Відповідь: $-2(a-3)$ см$^2$; $-34$ см$^2$.

**4.90****. Олеся купила в магазині поштучно $m$ апельсинів по 45 грн кожний і $n$ лимонів по 12 грн кожний. Під час оплати з'ясувалося, що їй не вистачає коштів, і вона повернула 2 апельсини і 3 лимони продавчині. Як змінилася вартість Олесиної покупки?

**4.91****. Визначити, у скільки разів збільшиться об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо:
а) збільшити його ширину в 5 разів, а довжину – в 3 рази;
б) зменшити його висоту в 2 рази, а ширину – в 3 рази;
в) збільшити його довжину в 2 рази, а ширину зменшити в 4 рази;
г) кожний вимір збільшити в 2 рази.

**4.92****. У супермаркеті ціна бананів – $a$ грн за кг, а ціна нектаринів – на 20 грн більша. На банани за умови купівлі від 3 кг діє знижка в розмірі 15%. Мама купила 3,5 кг бананів і 1 кг нектаринів. Яка вартість цієї покупки? Знайти цю вартість, якщо $a=38$. Яку суму заощадила мама, скориставшись умовами акції?

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**4.93****. Діти допомагали мамі купувати продукти. Наталка взяла $x$ кг цукерок по $c$ грн/кг та $x$ кг печива по $k$ грн/кг. Ігор

приніс $b$ кг мандаринів по $k$ грн/кг і $b$ кг ківі по $c$ грн/кг. Мама попросила вибрати такі цукерки, печиво і фрукти, які коштують однаково, а маса, щоб залишалася без змін. Як зміниться вартість покупки, якщо діти в результаті вибрали дорожчі продукти, ніж було спочатку?

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**4.94.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Спортивний клас»*. У 7 класі навчається 32 учнів / учениць. 25 % з них займаються плаванням, а волейболом – на 2 дітей більше, ніж плаванням.

б) Задача *«Готель»*. У готелі $m$ поверхів, на кожному поверсі по $t$ номерів і всі вони 3-місні. Улітку в 4 номерах відбувався ремонт, тому там ніхто не проживав.

в) Задача *«Улюблене число»*. Одне число на 5 більше за інше. Добуток чисел дорівнює 96. Сашко від першого числа відняв 4, а до другого додав 3 і отримав своє улюблене число.

г) Задача *«Магазин електротоварів»*. У магазині Миколка вибрав собі комп'ютерну клавіатуру, яка коштує $x$ грн, його сестричці сподобався електрочайник, який удвічі дорожчий за клавіатуру, а їхня мама вибрала собі тостер, який удвічі дорожчий за клавіатуру і чайник разом.

д) Задача *«Картинна галерея»*. Картина квадратної форми вставлена в раму, ширина якої 1 дм, а площа – 54 дм$^2$.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 4.5. Навчальні задачі, що моделюються розкладеним на множники многочленом».**

Перевір себе
«Як ти?»

# Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми «Розкладання многочленів на множники»

*Єдиний шлях, що веде до знання – це діяльність.*

(Бернард Шоу

Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Що більше знаєш, то більше можеш!»*** (Едмон Абу).

Сьогодні не Кубик Блума буде тобі допомагати діагностувати, «чи ти знаєш?», «чи ти вмієш?» і «чи ти можеш?», а ти сам/сама формуватимеш свою «Я-особистість!» шляхом самостійної перевірки своєї доброчесності та власної діяльності.

**Завдання 1. Вправа: «Постав собі «+», якщо так».**

**І. Перевір свою доброчесність:**

- ✓ Чи виконував / виконувала **Я** всі завдання домашньої роботи?
- ✓ Чи розв'зував / розв'зувала **Я** домашні завдання самостійно?
- ✓ Чи пробував /пробувала) **Я** перевіряти свої вміння хоча б після одного уроку?
- ✓ Чи вів / вела **Я** облік: «знаю», «хочу дізнатися», «дізнався / дізналася»?
- ✓ Чи запланував / запланувала **Я** навчатися краще, ніж це було вчора?

**ІІ. Самоконтроль власної діяльності:**

1) Чи знаю **Я**, що таке многочлен?
2) Чи знаю **Я**, що означає «розкласти многочлен на множники»?
3) Чи знаю **Я** способи розкладання многочлена на множники?
4) Чи вмію **Я** виносити спільний множник за дужки?
5) Чи вмію **Я** шукати спільний числовий множник?
6) Чи вмію **Я** використовувати спосіб групування для розкладання многочлена на множники?
7) Чи знаю **Я** формули скороченого множення?
8) Чи можу **Я** розкласти многочлен на множники за формулами скороченого множення?
9) Чи вмію **Я** застосовувати кілька способів розкладання на множники?
10) Чи вмію **Я** розв'язувати рівняння способом розкладання на множники?

11) Чи вмію **Я** моделювати найпростіші текстові задачі за допомогою лінійного рівняння або рівняння, що зводиться до лінійного?

12) Чи розумію **Я**, що навчальні задачі складають основу для формування вміння розв'язувати компетентнісно орієнтовані задачі?

Зроби висновок: «Як Ти?». Чи можеш собі сказати: «Тепер **Я** усвідомлюю, що можу, хочу і буду вчитися!».

Похвали себе, якщо ти «Молодець!»

**Завдання 2.** Розглянь інтелектуальну карту з теми **«Розкладання многочленів на множники»** та пригадай схему створення математичної моделі до задачі і склади власні →

## ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА КАРТА «СПОСОБИ РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ»

| | |
|---|---|
| $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ | Різниця квадратів |
| $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | Квадрат суми |
| $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | Квадрат різниці |

**Розкласти многочлен на множники** – це означає записати многочлен у вигляді добутку двох або декількох множників.

**Способи розкладання многочленів на множники**

**Формули скороченого множення**

**Алгоритм**

1. Якщо потрібно розкласти на множники двочлен, то доречно перевірити, чи можливо використати формулу різниці квадратів.
2. Якщо потрібно розкласти на множники тричлен, то перевіряємо, чи можна його перетворити на квадрат двочлена.

**Винесення спільного множника за дужки**

**Алгоритм**

1. Знайти спільний дільник коефіцієнтів (якщо цілі числа, то шукають НСД коефіцієнтів) і винести його за дужки;
2. Винести за дужки змінну з найменшим показником.

**Спосіб групування**

**Алгоритм**

1. Згрупувати доданки, які мають спільний множник.
2. У кожній групі знайти спільний множник і винести його за дужки.
3. Знайти в отриманих добутках спільний множник і винести його за дужки.

**СХЕМА**
**«ЗАСТОСУВАННЯ СПОСОБІВ РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ»**




## *Тренувальні вправи*

**4.95°.** Розкласти на множники многочлен:

а) $x^2-b^2$;
б) $(5+m)^2$;
в) $9-36t^2$;
г) $c^2-2cp+p^2$.

**4.96°.** Винести спільний множник за дужки:

а) $20m+10mn-30cm$;
б) $c^2yk^4+y^4c^3k^2$;
в) $6(a-3)+2b(a-3)-c(a-3)$;
г) $0{,}2a(n^3-2)+0{,}04(n^3-2)$.

**4.97°°.** Обчислити значення виразу:

а) $3{,}2a+3{,}2m$, якщо $a=0{,}49$, $m=0{,}51$;
б) $y^2-34{,}45y$, якщо $y=44{,}45$;
в) $k^2-kb+4k-4b$, якщо $k=11{,}11$, $b=0{,}11$;
г) $a^2-m^2$, якщо $a=45{,}4$, $m=54{,}6$.

**4.98°°.** Подати у вигляді добутку трьох множників:

а) $16y^4-1$; б) $64d^3-\mathrm{d}$; в) $81b^4-16$; г) $m^3-m^2-m+1$.

**4.99°°.** Перенести рівність у зошит, замінивши ☼ таким одночленом, щоб утворилася тотожність:

а) $☼-4=(☼-2)(6n+☼)$;
б) $k^2+☼+☼=(☼+2m)^2$;
в) $(☼+☼)^2=☼+30by+25y^2$.

**4.100°°.** Довести тотожність $mp+c^2+c(m+p)=(c+m)(c+p)$.

**4.101°.** Розв'язати рівняння:

а) $2y^2+2y^3=0$; в) $x^2+12x+36=0$;

б) $3(x-4)+2x(x-4)=0$; г) $y^4-y^2=0$.

**4.102°.** Добуток двох послідовних парних натуральних чисел, які загадав Андрійко, дорівнює 528. Які числа загадав хлопчик?

**4.103°.** Розкласти вираз на множники:

а) $(2a-1)^2+7n(2a-1)+(1-2a)$;

б) $25b^3-10b^2+b$;

в) $3a^4-243$;

г) $(4-a^2)(x-y)+(x^2-y^2)(4-a^2)$.

**4.104°°.** Розв'язати рівняння:

а) $5m+m^2=5m^2+m^3$;

б) $x^2-0{,}3(x+3)=0{,}1(x-9)$;

в) $x^2+6x+8=0$;

г) $y^2(y^2-8y+16)-25(y^2-8y+16)=0$.

**4.105°°.** Довести, що при будь-якому значенні $y$ вираз $\frac{y^2}{25}-\frac{2}{5}y+3$ набуває тільки додатних значень.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

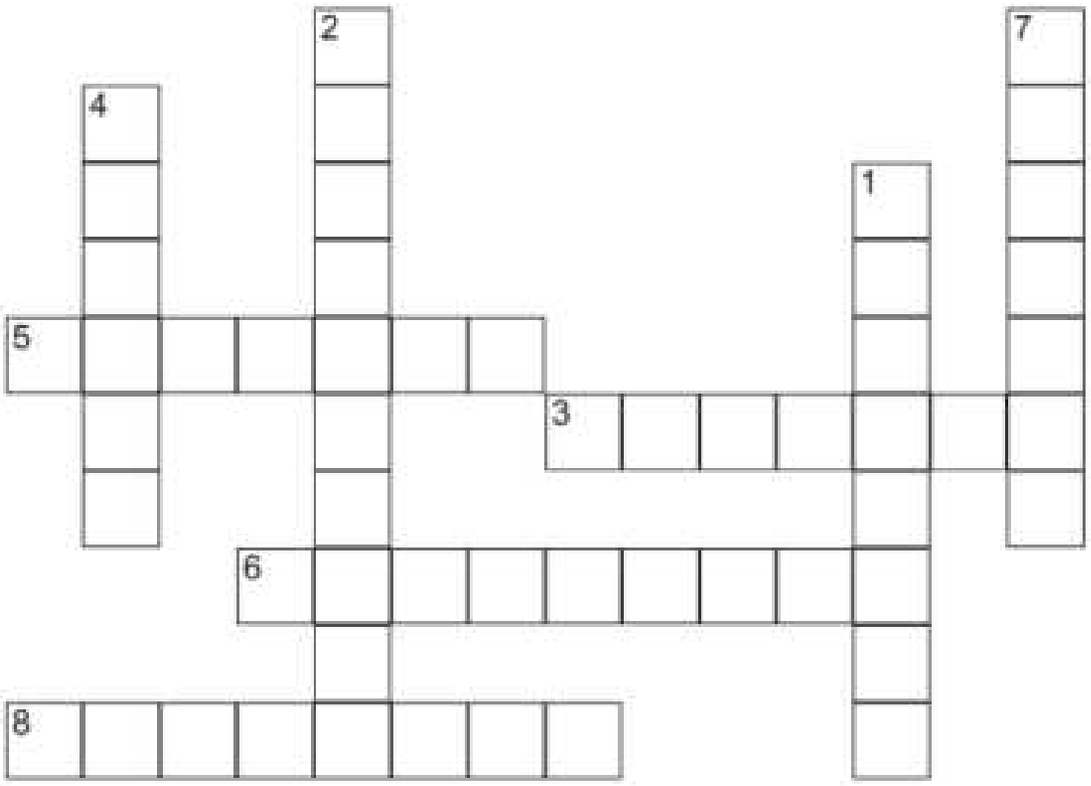
**4.106°°.** Розкласти на множники вираз

$$m^2(a-y)+a^2(y-m)+y^2(m-a).$$

**4.107°°.** Яблук двох сортів разом було 60 кг. Яблука одного сорту продали по 15 грн/кг, а другого – по 20 грн/кг. За всі яблука вторгували 1000 грн. По скільки кг яблук кожного сорту було?

**4.108°°.** Радіус першого круга на 4 м більший, ніж радіус другого. Знайти, як зміниться площа кожного з кругів, якщо радіус першого збільшити у 2 рази, а радіус другого зменшити на 2 м. Знайти, у скільки разів площа першого круга стане більшою, ніж площа другого, після таких змін. Обчислити площу першого круга, якщо радіус другого дорівнює 0,4 дм.

**4.109**••. Узагальнити отриману інформацію з теми **«Розкладання многочленів на множники»** у формі кросворда.




1. Як називають множник, який можна винести за дужки?
2. Один із способів розкладання на множники.
3. Як називають многочлен, який складається з двох одночленів?
4. Скількома способами можна розкладати многочлени на множники?
5. Квадрат різниці, квадрат суми, різниця квадратів – це ... скороченого множення.
6. Сума одночленів.
7. Добуток кількох однакових множників.
8. Рівність, яка містить невідоме число.

**4.110**••. Узагальнити отриману інформацію з теми «Розкладання многочленів на множники» у формі вірша – **«Сенкан»**.

Приклад сенкану

*Функції – це не просто арифметичні правила, це магія математики, яка дозволяє нам відкривати захоплюючі світи чисел і взаємозв'язків між ними!*

Артур Т. Бенджамін

# ТЕМА 5. | Функції

Із цією темою ти знайомий / знайома ще з дитинства, адже життя – це функціональна залежність – від одних величин залежать інші. Математики уніфікували ці залежності, дослідили й класифікували їх так, щоб і ти зумів / зуміла відчути цей процес пізнання життя з наукової точки зору. Можна сказати, що **«функція»** – це чарівне математичне відображення, яке перетворює одні числа в інші! Це ніби чарівний скринькар, який у свою скриньку приймає одні числа – **«область визначення»**, а виймає з неї інші числа, але за певними правилами, – **«область значень»**. Або **«функція»** – це спеціальна машина, яка приймає певний час – «аргумент» і повертає лише ті події, які сталися в цей час – **«значення функції»**. Ось бачиш, який чарівний світ математики, а в ньому ти крокуєш, впізнаєш, освоюєш, застосовуєш сьогодні, але застосовуватимеш і упродовж життя. Тож на початку – лінійна функція, разом зі своїм аналітичним виглядом та графічною інтерпретацією, своїми областю визначення і областю значень. За свого бажання ти зможеш їх засвоїти, і сам / сама **будувати,** використовуючи координатну площину, заздалегідь з'**ясовуючи як**, та розміщуючи їхні моделі – **графіки** – окремо або разом.



# §5.1 Функціональна залежність між величинами. Функція. Способи задання функції




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Функції – ключ до математичного розуміння світу: вивчаю, застосовую, творю!»***

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та через дослідження здобудемо нових знань про залежність між величинами.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**ПРИДУМАЙ**
Вираз «мої щоденні кишенькові витрати протягом тижня не змінювалися і становлять...».

**НАЗВИ**
відомі тобі формули про геометричні фігури; відстань, швидкість і час

**ПОЯСНИ**
як залежить відстань їзди на велосипеді, від часу, який ти визначаєш для цього

**ЧОМУ**
значення функцій $y = x^2 - 5$ і $y = (x-5)^2$ різні, якщо $x \neq 3$, і однакові, якщо $x = 3$?

**ЗАПРОПОНУЙ**
формулу підрахунку кількості навчальних місяців у школі (з 1 вересня до 1 жовтня) протягом 7 років.

**ПОДІЛИСЯ**
своїми спостереженнями щодо зміни траєкторії польоту м'яча залежно від часу.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди у партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** периметр квадрата, якщо його сторона дорівнює:

а) 7 дм; б) 4,5 м; в) $a$ см.

**2) Задати** формулою залежність $V$ від $a$, де $a$ – довжина ребра куба в см, а $V$ – його об'єм у см$^3$. Знайти $V$, якщо ребро куба дорівнює:

а) 5 см; б) 7 см; в) 12,5 см.

**3) Дослідити** прямокутник, якщо його сторони дорівнюють $x$ см і 6 см, а саме:

а) Виразити формулою залежність периметра $P$ від $x$.

б) Знайти значення $P$, якщо $x = 5$ см.

в) З'ясувати, чи можна знайти інше значення $P$, якщо значення $x$ не змінювати.

## *Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Для формування відповіді кожного завдання на дослідження, потрібно проаналізувати дані, щоб розробити стратегію розв'язання. Зокрема: 1) виконати певне дослідження і вийти на формулу периметра квадрата, який у 4 рази більший за його сторону; 2) дослідити ситуацію і записати формулу об'єма куба; 3) дослідити ситуації: а) для сторін завдовжки 5 см і 6 см периметр прямокутника завжди дорівнює 22 см; б) якщо одна зі сторін дорівнює 6 см, а інша – набуває різних значень, то периметр прямокутника можна подати залежністю – формулою.

**2** Мабуть, якби виникла потреба знайти значення периметра для 50 квадратів, сторони яких відомі, то така рутинна робота здалася б тобі нудною і ти б створив / створила комп'ютерну програму, яка б знаходила ці периметри і фіксувала в таблицю даних.

**3** Отже, кожне завдання для дослідження вимагало твоєї здатності використовувати логічні прийоми, розуміння взаємозв'язків та вміння узагальнювати, зокрема і знань відповідних формул:

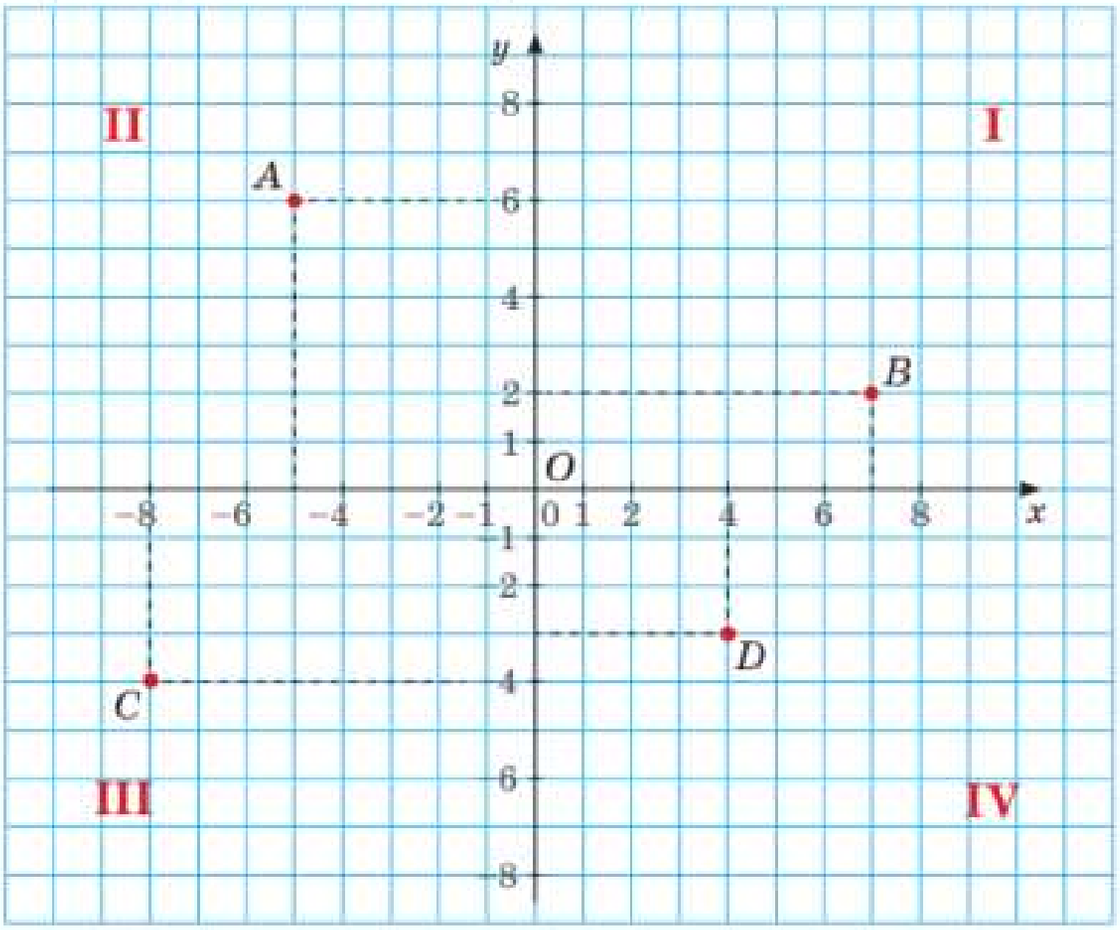
| | | | |
|---|---|---|---|
| $S=a^2$<br>$S=ab$ | $P=4a$<br>$P=2(a+b)$ | $V=a^3$<br>$V=abc$ | $s=vt;\ v=\frac{s}{t};\ t=\frac{s}{v}$ |

*Зауваж!*

Якщо на площині провести дві взаємно перпендикулярні координатні прямі, які перетинаються в точці О – початку відліку, то кажуть, що задано *прямокутну систему координат*. Площину, на якій задано прямокутну систему координат називають ***координатною площиною***, а координатні прямі – ***осями координат***. Горизонтальну вісь називають ***віссю абсцис***, а також віссю $x$ або $Ox$. Вертикальну вісь називають ***віссю ординат***, а також віссю $y$ або $Oy$. Точку О називають ***початком координат***.

Осі координат поділяють координатну площину на чотири чверті, які називають ***координатними чвертями***.

На малюнку зображено координатну площину, на якій позначено кілька точок та пронумеровано чверті. Наприклад, точка B(7; 2) є точкою I чверті, а 7 і 2 є відповідно абсцисою і ординатою цієї точки; A (– 5; 6) – точка II чверті; C (–8; –4) – точка III чверті; D (4; –3) – IV чверті.




Отже, на координатній площині кожній парі чисел відповідає єдина точка, і навпаки, кожній точці координатної площини відповідає єдина пара чисел.

Розгляньмо таблицю вартості картоплі, ціна якої 15 грн за кг

| Кількість картоплі, $x$ кг | 3 | 5 | 10 | ... | $x - 1$ | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Вартість покупки, $y$ грн | 45 | 75 | 150 | ... | $15(x - 1)$ | $15x$ |

Використовуючи дані цієї таблиці, можна скласти формулу для знаходження значення $y$ за відомим значенням $x$, тобто формулу залежності вартості покупки від кількості придбаної картоплі. Кількість картоплі $x$ і вартість покупки $y$ – це величини, які змінюються, тому їх називають ***змінними*** $x$ і $y$. Причому кожному значенню $x$ відповідає тільки одне значення $y$. Таку залежність однієї змінної від іншої називають *функціональною залежністю* або *функцією*.

Оскільки значення $x$ можна обирати довільно, а значення $y$ залежить від вибраного значення $x$, то $x$ називають ***незалежною змінною*** або ***аргументом***, а $y$ – ***залежною змінною*** або ***значенням функції***.

Щоб показати що $y$ залежить від $x$, для назви функції зазвичай використовують запис $y(x)$ або $y=f(x)$.

Користуючись цим записом, залежність значень функції від значень аргументу, наприклад вартість придбаної картоплі від кількості кг, можна записати так:

$f(3)=45$, $f(5)=75$, $f(10)=150$, ..., $f(x)=15(x-1)$, $f(x)=15x$.

***Зауваж! Це важливо!***

Залежність однієї змінної від іншої називають **функцією**, якщо кожному значенню незалежної змінної за деяким правилом відповідає єдине значення залежної змінної.

Існує чотири основних способи задання функції: *словесний*, *табличний*, *графічний*, *аналітичний*.

Їх застосування розглянемо на такому прикладі.

**Задача 1.** Загальна вартість поїздки на таксі залежить від відстані. Задати функцією залежність вартості поїздки на таксі від довжини маршруту, якщо поїздка на відстань, що не перевищує 2 км, коштує 35 грн, а за кожний додатковий км відстані потрібно сплатити 9 грн.

**1** **Словесний (описовий) спосіб.** Цей спосіб полягає в тому, що правило, за яким одній змінній ставиться у відповідність інша, описують словами. Тоді описом функції для задачі 1 і є умова задачі.

**2** **Табличний спосіб.** Цей спосіб полягає в тому, що відповідність між змінними $x$ і $y$ задають у вигляді таблиці.

Задамо функцію вартості поїздки на таксі таблицею.

| Вартість поїздки на таксі залежно від відстані | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Відстань, $x$ (км)* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ... |
| *Вартість, $y$ (грн)* | 35 | 35 | 44 | 53 | 62 | 71 | 80 | 89 | 98 | ... |

**3** **Аналітичний спосіб.** Цей спосіб полягає в тому, що функцію задають за допомогою формули $y=f(x)$, де $f(x)$ – вираз зі змінною $x$.

Формула для розрахунку вартості $y$ (грн) послуги таксі залежно від відстані $x$ (км) матиме вигляд $y=35+9(x-2)$.

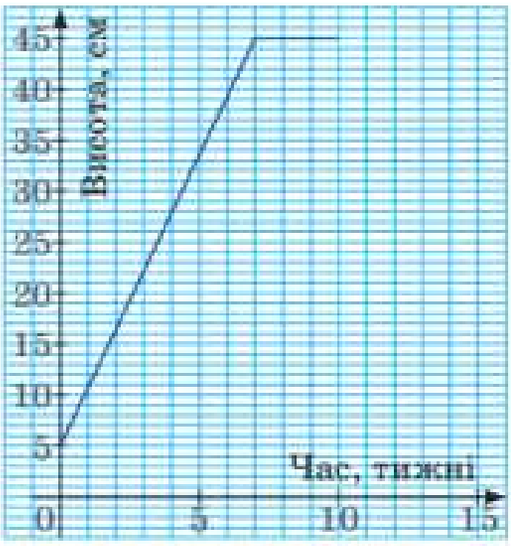
**4** **Графічний спосіб.** Цей спосіб полягає в тому, що функцію задають графіком.

***Графіком функції*** називають множину точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють аргументу функції, а ординати відповідному значенню функції.

На мал. 1 зображено графік залежності вартості поїздки на таксі від відстані.




Мал. 1




Мал. 2

Розглянемо приклад застосування графіка функції.

**Задача 2.** Марійка впродовж 10 тижнів спостерігала, як зростає саджанець її улюбленого сорту ранньостиглих помідорів «Українські». Залежність висоти саджанця від його віку подано графічно (мал. 2). За графіком можна дійти висновку, що:

1) спостереження велося з моменту, коли саджанець вже досяг висоти 5 см;

2) протягом перших 7 тижнів рослина підросла до 45 см;

3) протягом наступних 3 тижнів висота рослини залишилася незмінною.

## *Тренувальні вправи*

**5.1°.** Вибрати із поданих у вигляді таблиць залежностей (А–Г) між змінними $x$ і $y$ ту, яка не є функціональною. Чому саме так?

| А | | | | | Б | | | | | В | | | | | Г | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $x$ | 1 | 1 | 3 | 4 | $x$ | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $y$ | 3 | 6 | 9 | 12 | $y$ | 2 | 3 | 4 | 1 | $y$ | 2 | 3 | 4 | 1 | $y$ | 4 | 1 | 2 | 3 |

**5.2°.** Бідон, маса якого 7 кг, що містить 38 л води, поставили на терези і потім долили в нього ще три рази по 1 л води. Перенести таблицю в зошит і заповнити її.

| Маса води | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Маса бідона з водою | | | | |

**5.3°.** Функцію задано формулою $y=2x+3$. Перенести таблицю в зошит та заповнити її.

| $x$ | −2 | −1 | 0 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | | |

**5.4°.** Знайти значення $x$ для функції $y=-3x+2$, при яких $y=0$.

**5.5°.** Знайти значення $f(3)$, якщо $f(x)=2x^2-x+3$.

Подати формулою функціональну залежність (**5.6–5.10**).

**5.6°.** У гаманці із 1500 грн залишилося решта $y$ грн при витрачених $x$ грн.

**5.7°.** Турист подолав відстань $y$ км за $x$ год зі швидкістю 4,5км/год.

**5.8°°.** Кількість яблук $y$, що принесли у перший рік молоді яблуні, залежить від кількості $x$ молодих дерев. Відомо, що кожна така яблуня мала на дереві по 6 плодів і лише 5 яблук лежали на землі.

**5.9°°.** Висота у рослини залежить від кількості $x$ днів, у які вона щоденно підростає на 1 см, починаючи із саджанця заввишки 15 см.

**5.10°°.** Термометр показував 12°С, однак впродовж $x$ год температура Т знижувалася на 3°С.

**5.11°°.** Функцію задано формулою $y=-0,5x-12$. Перенести таблицю в зошит та заповнити її,

| $x$ | − 0,5 | 4,2 | | | 60 | −1 | | | − 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | −15,7 | −12 | | | −11 | 15,5 | |

**5.12°°.** Увідповіднити функцію (1–4) та її значення (А–Е) для значення аргументу, яке дорівнює (−6).

| *Функція* | *Значення функції* |
|---|---|
| 1. $y=3-x$ | А. 9 |
| 2. $y=-\frac{1}{3}x+2$ | Б. −3 |
| 3. $y=5x+24$ | В. 2 |
| 4. $y=x^2-39$ | Г. −0,2 |
| | Д. 4 |
| | Е. −6 |

**5.13°°.** Каструлю наповнили водою, температура якої 15°С. Під час нагрівання каструлі температура води в ній щохвилини підвищувалася на 8°С.

а) Задати формулою залежність температури води $y$ від часу $t$ її нагрівання.

б) Знайти значення $y$, що відповідає значенням аргументу $t=7;\ 9;\ 10$.

в) Знайти значення $t$, для яких $y = 45;\ 55;\ 70$.

г) Знайти значення $t$, при якому вода закипить (вода закипає при 100 °C).

**5.14°°.** Вивчаючи кількість опадів у регіоні впродовж 4 місяців, метеорологи вирішили визначити, як це впливає на кількість води в річці. Узагальнені дані подано у вигляді таблиці:

| Місяць | Опади «О» (см) | Вода «В» у річці (л) |
|---|---|---|
| Січень | 3 | 150 |
| Лютий | 5 | 200 |
| Березень | 2 | 125 |
| Квітень | 4 | 175 |

Вибрати із запропонованих варіантів (А–Д) той, що правильно передає залежність між кількістю опадів (О) і кількістю води (В) в річці.

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| $B=50O$ | $B=75O$ | $B=75O+25$ | $B=25O+75$ | $B=50O+75$ |

**5.15•.** Критично оцінити процес розв'язання задач.

*Задача.* У залі кінотеатру $n$ рядів по 16 місць у кожному. Задати формулою загальну кількість $N$ місць в залі та знайти максимально можливий дохід $P$ за продаж квитків на один сеанс, якщо ціна квитка 80 грн.

*Розв'язання.* Запишемо формулою загальну кількість місць $N$ у залі кінотеатра: $N = n \cdot 16$

Тепер, щоб знайти дохід, отриманий за один сеанс, потрібно кількість місць на ціну квитка: $P = N \cdot 80$.

Підставимо в цю рівність отриманий вище вираз для $N$, отримаємо: $P = (n \cdot 16) \cdot 80 = 1280 \cdot n$.

*Відповідь:* $P = 1280n$.

*Задача.* Олег мав 240 грн. Після того, як він придбав кілька пиріжків за ціною 15 грн, в нього залишилося $y$ грн. Задати формулою залежність $y$ від кількості придбаних пиріжків.

Чи є ця залежність функцією?

*Розв'язання.* Позначимо кількість придбаних пиріжків через $x$, тоді вартість пиріжків буде $15x$.

Решту грошей, що залишилися в Олега, можна обчислити за формулою $y = 15x - 240$.

Ця залежність є функцією, оскільки кожному значенню $x$ відповідає тільки одне значення $y$.

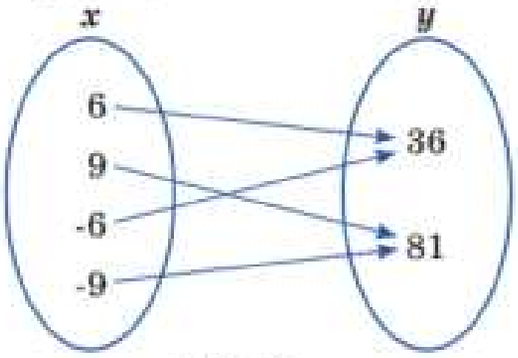
*Відповідь:* функція $y = 15x - 240$.

**5.16•.** Деяку функцію $f(n)$ задано словесним способом: кожному натуральному числу ставиться у відповідність сума подвоєного числа з квадратом числа 4. Вибрати серед формул (А–Г) формулу, якою можна задати цю функцію.

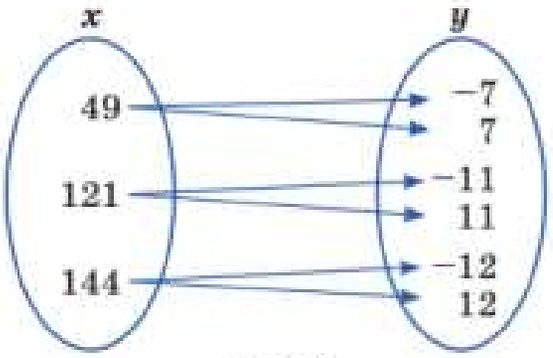
А. $f(n)=2(n^2+4)$; В. $f(n)=(n+4)^2$;

Б. $f(n)=2n+4^2$; Г. $f(n)=2n+2^2$

**5.17•.** Визнач, чи є залежність на кожному з малюнків 3 і 4 функцією.




Мал. 3




Мал. 4

**5.18•.** У дитячому кафе «СмакоЛюб» продають чай (Ч) та печиво (П). Ціна чашки чаю – 30 грн, а печива – 10 грн. Однак, якщо купуєш чашку чаю та печиво разом, можна отримати знижку в розмірі 5 грн. З'ясувати, формула якої з функціональних залежностей (А–Г) вказує на покупку зі знижкою (В – вартість покупки).

А. $В=30Ч+20П$; В. $В=20Ч+30П-5$;

Б. $В=50(Ч+П)-5$; Г. $В=30Ч+20П-5$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**5.19••.** Михайлик допомагав батькові закачувати воду в резервуар, щоб далі поливати город. На малюнку 5 зображено графік зміни об'єму води в резервуарі протягом 30 хвилин.




Мал. 5

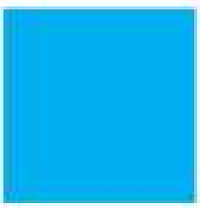
1. Чи можна стверджувати, що перед початком закачування в резервуарі була вода? Якщо так, то скільки?
2. До якого показника і на скільки збільшився об'єм води в резервуарі за перші 14 хвилин?
3. Протягом якого часу об'єм води в резервуарі не змінювався?

4. Скільки часу Михайлик з батьком поливали город, якщо води в резервуарі залишилося 700 літрів?

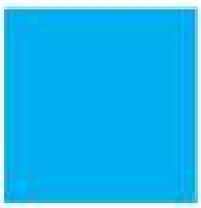
**5.20**••. Припустимо є шкільна таблиця з такими атрибутами: «Прізвище», «Ім'я», «Вік», «Клас», «Середній бал». Визначити, чи можливі такі функціональні залежності:

а) «Середній бал» та «Вік»;
в) «Клас» та Середній бал»;
б) «Вік» та «Клас»;
г) «Ім'я» та «Прізвище»;
д) «Прізвище» та «Вік».

Самоперевірка 5.19



Самоперевірка 5.20



**5.21**••. Знайти найменше значення функції $y = x^2 - 2x + 2$.

**5.22**••. Функцію задано формулою $y = x^2 + 5x + 7$, де $x$ – довільне додатне число. Визначити, чи може ця функція набувати від'ємних значень.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**5.23.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Подорожуємо країною»*. Потяг «Чернівці-Київ», рухаючись зі швидкістю 60 км/год, за $x$ год проїхав $y$ км.

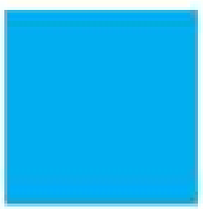
б) Задача *«Здорове харчування»*. Світланка купує фрукти в супермаркеті. Ціна за кг складає 25 грн.

в) Задача *«Енергетичний бюджет родини»*. Сім'я має газовий котел, який витрачає 4 кубічних метри газу за годину.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 5.1. Функціональна залежність між величинами. Функція. Способи задання функції».**

Перевір себе «Як ти?»



# §5.2 Графік функції. Область визначення і область значень функції




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Успіх – це стан розуму, який дозволяє зробити те, що не здається можливим»*** (Волт Дісней).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про функцію та її графік.

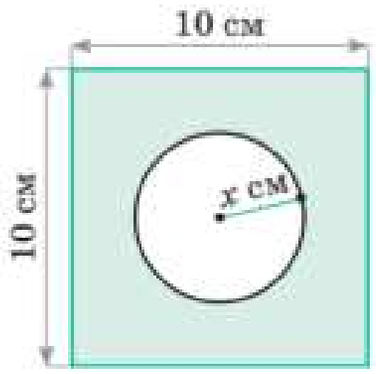
**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ**, скільки тон зерна можна змолоти за 6 год у млині, якщо його продуктивність стала і за 2 год він змелює 15 т зерна.

**ПОЯСНИ**, як подати функціональну залежність площі квадрата і його сторони $(a+5)$ см.

**ЧОМУ** функція $y=x^2-5$ має найменше значення, а функція $y=5-x^2$ – не має?

**ПРИДУМАЙ**, як записати формулою залежність площі зафарбованої частини фігури від радіуса круга, скориставшись поданими на малюнку даними, та укажи її область визначення.




**ПОДІЛИСЯ**, як аналітичним способом задати функцію, значення якої протилежні подвоєним значенням аргументу $x$.

**ЗАПРОПОНУЙ** формулу залежності кількості сої $m$ ц, що зберігається у фермера на складі, від кількості $n$ ц, – щоденного поповнення із нового урожаю, якщо залишкок минулого року складає 500 ц сої.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди у партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** суму абсцис та добуток ординат точок
а) $A$ (3; 4); б) $B$ (−8,5; −6); в) $C$ (0,5; −1); г) $D$ (0; − 0,5).

**2) Обчислити** значення функції $f(x) = 2x^2+3$, якщо $x$ дорівнює:
а) 0; б) 2; в) −4; г) −0,5.

3) **Побудувати** таблицю значень функції $y(x)=2x+1$ для цілих значень $x$ від $-3$ до 3.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

**ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ І ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:**

**1** Не відрізняючи абсцису від ординати для точок координатної площини, виконати завдання 1 неможливо. Отже, важливо вміти і читати, і позначати точки на координатній площині. Це завдання важливе й актуальне, тому виноситься на контроль на Зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО).

**2** Якщо потрібно виконати завдання «знайти значення функції», маючи певні значення аргументу, то єдиний спосіб його виконати – підставити значення. Далі записати числовий вираз і обчислити його результат. Відповідей – чотири, бо задано 4 значення $x$.

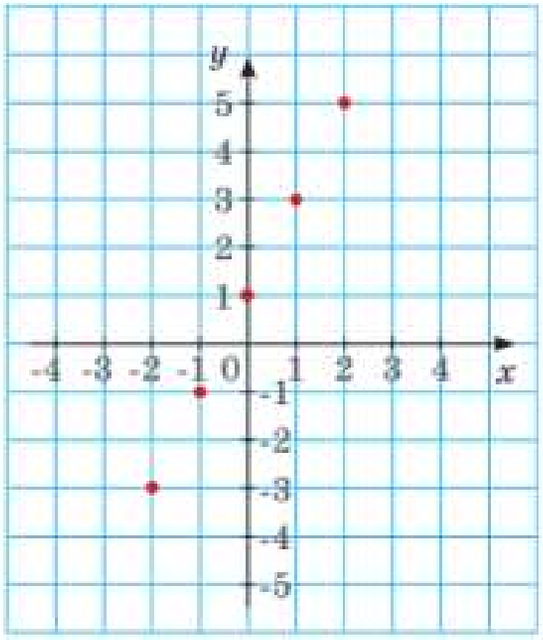
**3** Якщо ж знаходити значення функції для табличного вигляду, то потрібно, окрім обчислення, правильно вписувати в таблицю аргументи та відповідні значення функції. Оскільки аргументами є цілі числа від $-3$ до 3, то тут треба знати, що всього аргументів буде сім: $-3$, $-2$, $-1$, 0, 1, 2, 3, 2, і шукати для них відповідні значення. За допомогою таблиці зручно читати дані й порівнювати значення аргументів або функцій.

***Зауваж!***

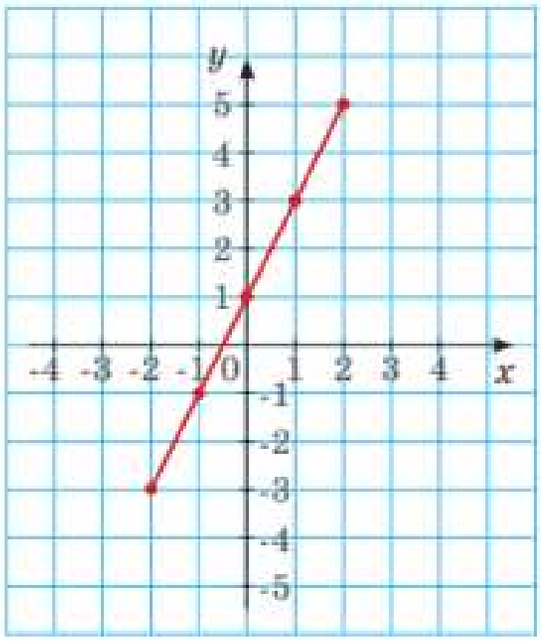
Маючи таблицю значень функції $y(x)=2x+1$ для п'яти значень аргументу, отримали п'ять точок, які можна позначити на координатній площині (мал. 6) та сполучити лінією (мал. 7).

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y(x)=2x+1$ | $-3$ | $-1$ | 1 | 3 | 5 |

Відрізок на малюнку 7 є графіком функції $y(x)=2x+1$ для $-2\le x\le 2$. Ці значення $x$ утворюють область визначення цієї функції, а відповідні їм значення $-3\le y\le 5$ утворюють її область значень.



Мал. 6

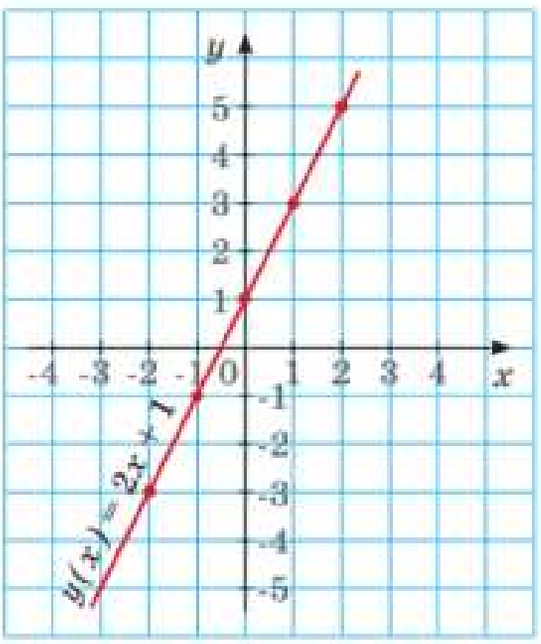


Мал. 7

Зважмо, що точок для побудови графіка цієї функції можна взяти значно більше, і тоді побудований відрізок можна нескінченно продовжити в обидва боки і одержати пряму. Ця пряма є графіком функції $y(x)=2x+1$, але її областю визначення є всі числа, і областю значень також.

Графік функції $y(x)=2x+1$, областю визначення і областю значень якої є множина всіх чисел зображено на малюнку 8.

Отже, малюнки 6–8 – це кроки побудови на координатній площині графіка функції $y(x)=2x+1$, і цим графіком є *пряма*.




Мал. 8

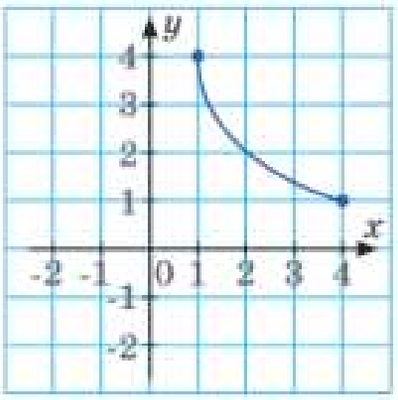
## *Зауваж! Це важливо!*

Оскільки ***графік функції*** – це множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції, то вище описаним способом завжди можна побудувати графіки й інших функцій.

Наприклад,

побудуємо графік функції $y=\frac{2}{x}$ за умови, що $0{,}5\le x\le 4$.

Позначивши кілька точок графіка на координатній площині і сполучивши їх плавною лінією, отримаємо криву, яку зображено на малюнку 9.



Мал. 9

Маючи графік функції, можна для будь-якого значення аргументу вказати відповідне значення функції.

Якщо координати деякої точки перетворюють формулу функції на правильну рівність, то ця точка належить графіку функції. І навпаки, якщо точка належить графіку функції, то її координати перетворюють формулу функції в правильну рівність.

Усі значення, яких може набувати аргумент функції, називають *областю визначення функції*, а всі відповідні їм значення функції – *областю значень функції*.

Наприклад, область визначення функції $y(x)=2x+1$ – множина всіх чисел, а область визначення функції $y=\frac{4}{x}$ – множина всіх чисел, крім числа 0, оскільки на 0 ділити не можна.

***Важливо!***

Областю визначення функції, яку задано:

– ***многочленом з однією змінною,*** – є усі числа;

– ***дробом, знаменник якого містить змінну,*** – є усі числа, крім тих значень змінної, при яких знаменник дорівнює нулю.

**Алгоритм побудови графіка функції:**

1) скласти таблицю значень функції;

2) позначити отримані точки на координатній площині;

3) сполучити позначені точки плавною лінією.

## *Тренувальні вправи*

**5.24°.** Функцію задано формулою: $y=-2x+10$. Заповнити в зошиті таблицю.

| $x$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | |

**5.25°.** Функцію задано формулою: $y=5x-7$. Заповнити в зошиті таблицю.

| $x$ | $-1$ | | 2 | | 0,5 | | | | 3,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-12$ | 0 | | $-2$ | $-4,5$ | $-1$ | | 8 | 9 |

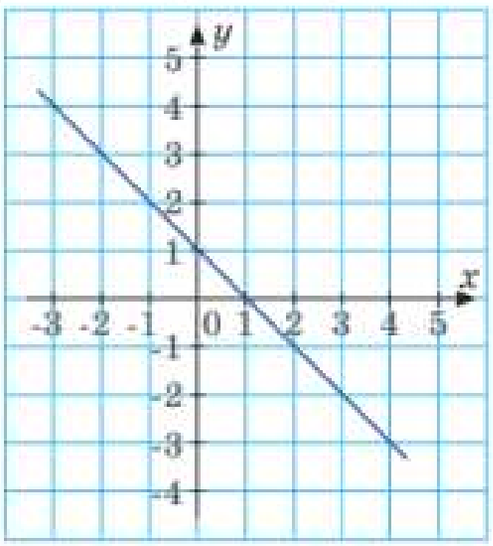
**5.26°.** Побудувати графік функції $y=x+2$, де $-1\le x\le 5$, попередньо склавши таблицю її значень.

**5.27°.** Функцію задано формулою $y=\frac{6}{x}$, де $1\le x\le 6$. Побудувати її графік, попередньо склавши таблицю значень функції.

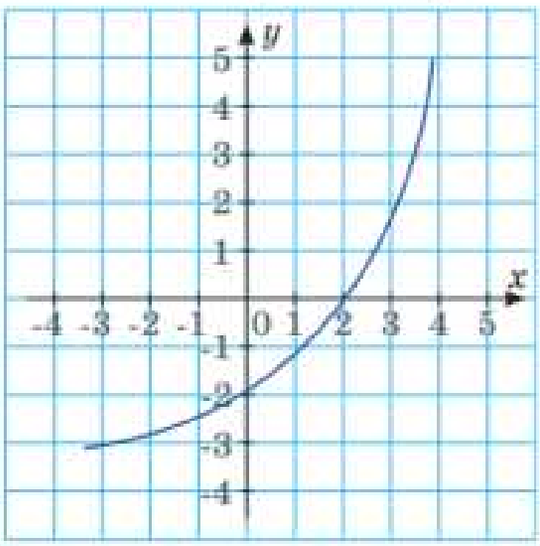
**5.28°.** З'ясувати, які з точок $A(-2; 7)$, $B(-6; 11)$, $C(4; -1)$, $D(7; 2)$ належать графіку функції $y=5-x$.

**5.29°°.** Перенести таблицю в зошит та заповнити її, скориставшись графіком функції $y=f(x)$, який зображено на малюнку 10.

| $x$ | $-3$ | $-1{,}5$ | $0$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | | |




Мал. 10




Мал. 11

**5.30°°.** Перенести таблицю в зошит та заповнити її, скориставшись графіком функції $y=f(x)$, який зображено на малюнку 11.

| $x$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | |

**5.31°°.** На малюнку 12 зображено графік деякої функції. Користуючись графіком, знайти:

а) значення $y$, якщо $x=-5; -3; 0; 2; 4; 6; 7$;

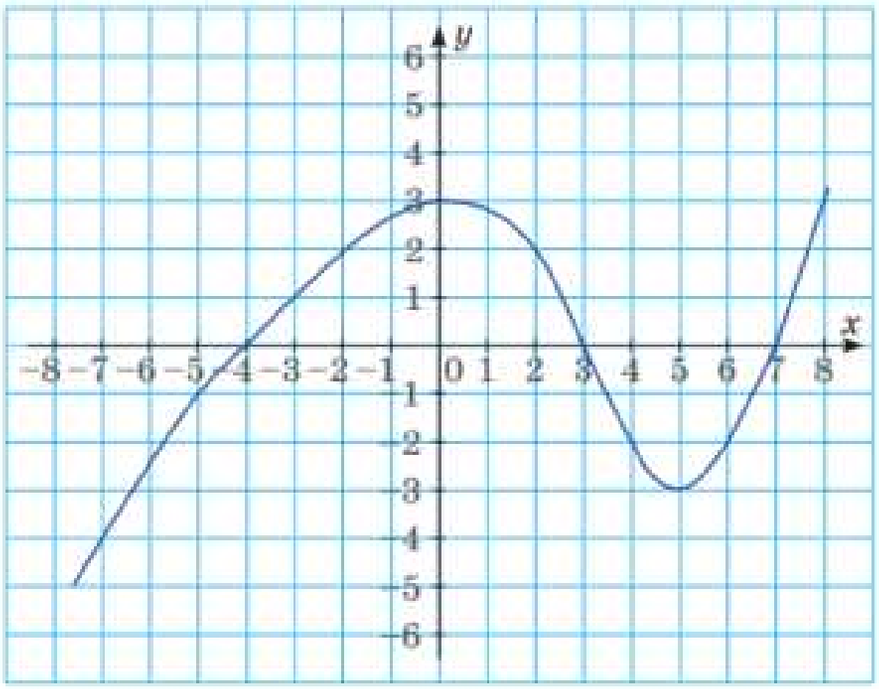
б) значення $x$, якщо $y=-3; -2; 0; 1; 2{,}6$;

в) значення аргументу, при яких значення функції дорівнюють нулю;

г) область визначення та область значень функції;

д) значення аргументу, при яких значення функції додатні;

е) значення аргументу, при яких значення функції від'ємні.




Мал. 12

**5.32•.** Скласти таблицю для трьох точок графіка функції:

а) $y=-3x+8$; б) $y=x^2+4$; в) $y=0{,}5x^3-6$; г) $y=\frac{10}{x}+7$.

**5.33•.** З'ясувати, чи проходить через початок координат графік функції:

а) $y=-8x$;

б) $y=x^2+1$;

в) $y=\frac{1}{4}x^3-6$;

г) $y=\frac{10}{x}+2$.

**5.34•.** Знайти координати точок перетину графіка з осями координат:

а) $y=-2{,}5x+4$; в) $y=0{,}25x-4$;

б) $y=0{,}7x+4{,}9$; г) $y=10x-5$.

### *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**5.35••.** Побудувати графіки функцій (а–г) в одній координатній площині та визначити, яку спільну властивість вони мають.

а) $y=4$; б) $y=-5$; в) $y=\frac{1}{2}$; г) $y=\pi$.

**5.36****. Побудувати пряму $AB$, якщо $A(2;\ 2)$, $B(-4;\ 3{,}5)$. Визначити координати ще трьох точок цієї прямої.

**5.37****. Поставити у відповідність кожному натуральному числу суму його потроєного квадрата з числом, протилежним до числа 2.

**5.38****. Знайти координати точок перетину з осями координат функції $y=9-x$ та периметр прямокутного трикутника, утвореного цими точками і початком координат.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**5.39.** Скласти запитання до умов задач:

а) Задача *«Супермаркет»*. У вівторок до супермаркету завезли 4 ящики енергетичних батончиків «Power» по 5 кг у кожному. Третій день поспіль їх продаж стабільний – по 2,5 кг щодня.

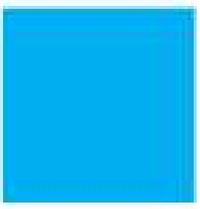
б) Задача *«Пошиття шопера»*. Шопер – це сумка для покупок з одним відділенням і ручками середньої довжини. Якщо тканина, з якої її виготовлено, натуральна, то її називають еко-сумкою. Для пошиття одного шопера потрібно 0,8 м тканини.

в) Задача *«Жирність продуктів»*. У першому бідоні було молоко, масова частка жиру якого становить 3 %, а в другому – вершки жирністю 18 %. Змішуючи молоко з масовою часткою жиру 6 %, отримують інші жирності.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 5.2. Графік функції. Область визначення та область значень функції».**

Перевір себе
«Як ти?»



# § 5.3 Лінійна функція, її графік і властивості. Пряма пропорційність, її графік і властивості.




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Блаженство тіла полягає в здоров'ї, а блаженство розуму – у знанні»*** (Фалес).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про функцію та її графік.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

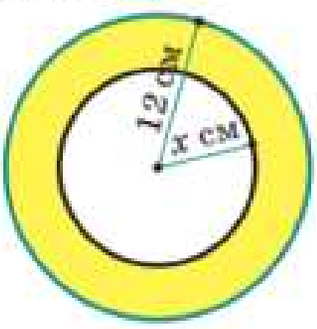
**НАЗВИ**, при якому значенні аргументу значення функції $y=0{,}5x+3$ дорівнює 3.

**ПОЯСНИ**, чи проходить графік функції $y=5x-3$ через точку $A(3;\ 12)$?

**ЧОМУ** Сашко отримав неправильне значення функції $y = x^2-3$ в точці $x=-2$, якщо обчислення він виконав так: $y(-2)=-2^2-3=-7$?

**ПРИДУМАЙ** формулу функції, яка описує залежність між площею квадрата $S$ і його периметром, який дорівнює $(4a+12)$ см.

**ПОДІЛИСЯ** своєю формулою задання залежності площі замальованої частини фігури від радіуса кола, скориставшись поданими даними на малюнку.




**ЗАПРОПОНУЙ** спосіб знаходження значення $m$, якщо відомо, що графік функції $y=x^2-m$ проходить через початок координат.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди у партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** область визначення функції:

а) $y=1-2x+4x^2-x^3$; б) $y=\dfrac{4}{x^2-16}$.

**2) Обчислити** значення виразу

$3(2{,}5+y)+4(5-3y)$, якщо $y=-0{,}2$.

**3) Визначити,** при яких значеннях аргументу функція $k(x)=2x-2$ набуває від'ємних значень.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Область визначення функції вказує на допустимі значення аргументу, тому важливо знати випадки обмежень на значення аргументу. Зокрема, якщо є ділення на 0, яке виконати неможливо, то потрібно досліджувати значення аргументу. Отже, вміння знаходити область визначення та область значень функції, за її формулою, – це два напрямки нових питань у твоїй діяльності.

**2** Значення виразу шукають, в більшості випадків, після спрощення, однак у цьому випадку можна одразу підставляти значення й обчислювати.

**3** Нестандартне для тебе запитання «визначити, коли функція набуває від'ємних значень». Якби був побудований графік, то можна було б побачити, чи міститься графік на якомусь проміжку аргументу нижче осі $Ox$. Отже, спочатку можна побудувати графік, а відтак – виконати дослідження.

***Зауваж!***

У реальних процесах і явищах часто доводиться проводити дослідження за допомогою математичних моделей, якими є функції. Наприклад:

**1** Якщо автомобіль рухається з постійною швидкістю 90 км/год, то за $t$ год він подолає відстань (у км): $\mathbf{s(t)=90t}$.

**2** Якщо автомобіль за першу годину подорожі подолав 80 км, а далі рухався з постійною швидкістю 90 км/год, то $t$ год він подолає відстань (у км): $\mathbf{s(t)=90t+80}$.

**3** Якщо на будівельному майданчику стоїть цистерна, в якій міститься 500 л технічної води, а з неї виливається щосекунди 0,5 л води, то через $t$ с у цистерні залишиться (у л): $\mathbf{V(t)=500-0{,}5t}$.

**4** Якщо густина $\rho$ срібла становить 10,5 г/см$^3$, то маса $m$ шматка срібла (у г), об'єм якого $V$, дорівнює: $\boldsymbol{m(V)=10{,}5V}$.

**5** Якщо шматок срібла, густина якого 10,5 г/см$^3$, з об'ємом $V$ упакували в подарункову коробочку вагою 25 г, то маса цього подарунка зі срібним злитком (у г) дорівнює: $\boldsymbol{m=10{,}5V+25}$.

**6** Якщо Микола купив $n$ зошитів по 5 грн кожний і ручку – за 3 грн, то вартість $N$ цієї покупки (у грн) становить:

$$N(n)=5n+3.$$

Згадані приклади реальних процесів та явищ об'єднує те, що вони моделюються функціями, формули яких мають вигляд $y=kx+b$, де $x$ – змінна, а $k$ і $b$ – деякі числа.

## *Зауваж! Це важливо!*

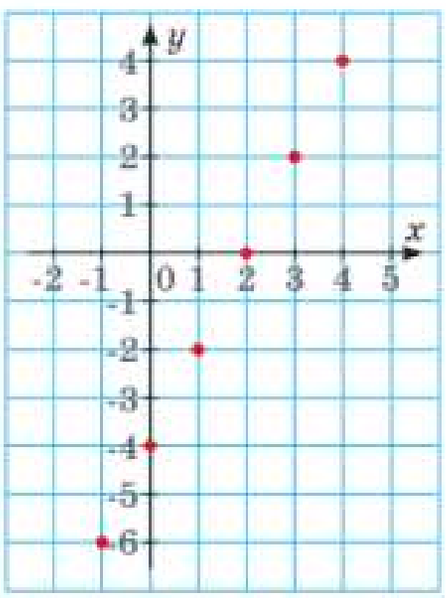
***Лінійною функцією*** називають функцію, вигляду $y=kx+b$, де $x$ – змінна, $k$ і $b$ – деякі числа, які називають *коефіцієнтами лінійної функції.*

Розгляньмо дві лінійні функції $y=2x-4$ і $y=-0{,}5x+3$ та побудуємо їхні графіки.

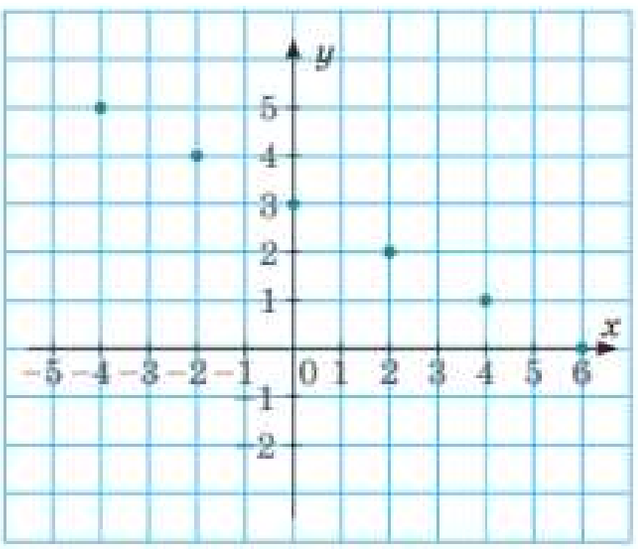
Для кожної функції побудуємо таблицю значень та позначимо отримані точки на координатній площині (мал.13 (а, б)).

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ |

| $x$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $5$ | $4$ | $3$ | $2$ | $1$ | $0$ |



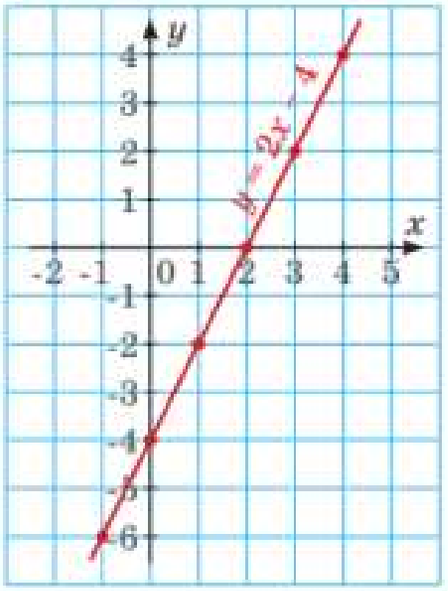

Мал. 13а



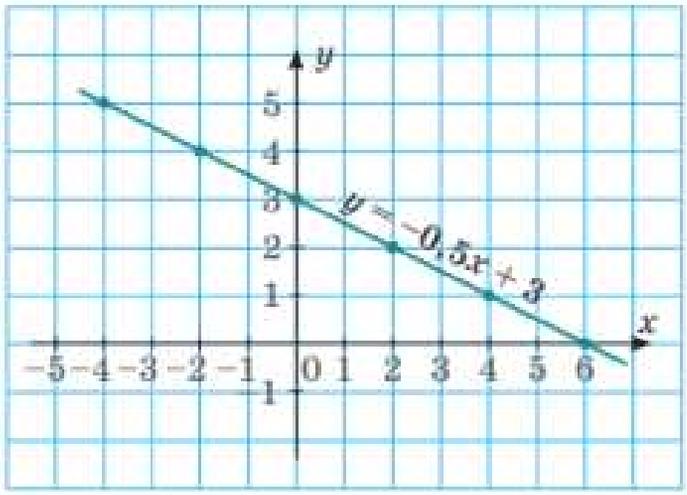

Мал. 13б

Далі отримані точки потрібно сполучити плавною лінією. Помічаємо, що для кожної з функцій ці точки лежать на прямій, у чому легко пересвідчитися, приклавши до точок лінійку. Проведемо ці прямі.

Отримали графіки функцій $y=2x-4$ та $y=-0{,}5+3$ (мал.13 (в, г)).




Мал. 13в




Мал. 13г

Побудувавши ще кілька графіків лінійних функцій (зробіть це самостійно), можна пересвідчитися, що також отримаємо прямі.

Отже, *графіком будь-якої лінійної функції є пряма.*

Оскільки для побудови прямої достатньо мати дві її точки (за аксіомою планіметрії), то для побудови графіка лінійної функції достатньо також знайти координати лише двох його точок.

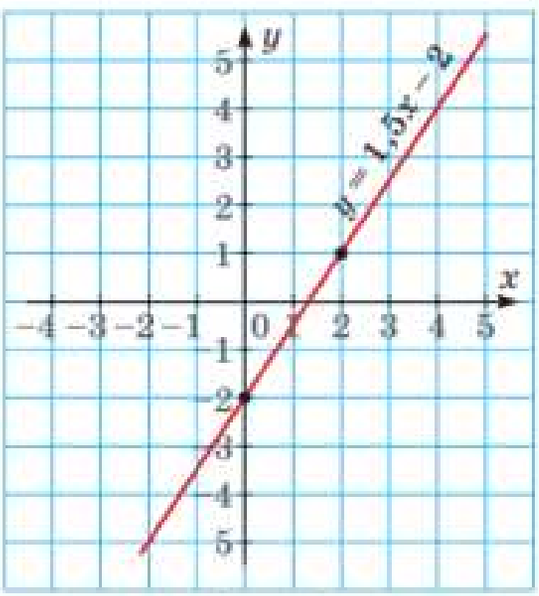
Наприклад для функції $y=1{,}5x-2$, зручно взяти парні значення аргументу, наприклад, 0 і 2.

| $x$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $y$ | −2 | 1 |

Далі позначити отримані точки (0; −2) і (2; 1) на координатній площині, і провести через них пряму (малюнок 14), яка і буде графіком функції $y=1{,}5x-2$.

Ця пряма з додатним напрямком осі $Ox$ утворює гострий кут, а на малюнку 13(г) – тупий. У функції $y=2x-4$ коефіцієнт $k=2>0$, а у функції $y=-0{,}5x+3$ коефіцієнт $k=-0{,}5<0$. Оскільки кут, який утворює графік лінійної функції з додатним напрямком осі $Ox$ залежить від $k$, то $k$ називають *кутовим коефіцієнтом прямої.*

Отже, *пряма утворює з додатним напрямком осі Ox* **гострий кут**, якщо $k>0$, і **тупий кут**, якщо $k<0$.




Мал. 14

***Зауваж! Це важливо!***

З'ясуймо, як характеризує лінійну функцію коефіцієнт $b$.

Звернімо увагу, наприклад, на точку перетину графіка функції $y=2x-4$ з віссю $Oy$. Це точка $(0;\ -4)$. А для функції $y=-0{,}5x+3$ – це точка $(0;\ 3)$.

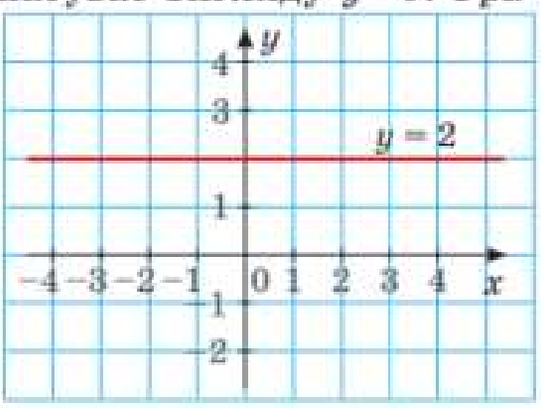
Тобто, якщо $x=0$, то $y=b$, і $(0;\ b)$ – точка перетину з віссю $Oy$.

Отже, коефіцієнт $b$ у формулі лінійної функції $y=kx+b$ є ординатою точки перетину її графіка з віссю $Oy$.

**Окремі випадки лінійної функції**

**1** Якщо $k=0$, то функція $y=kx+b$ набуває вигляду $y=b$. Графік такої функції – пряма, паралельна осі $Ox$.

Розглянемо функцію $y=2$. Точки графіка цієї функції мають вигляд $(x;\ 2)$, де $x$ – будь-яке число. Отже, графіком функції $y=2$ є пряма, паралельна осі $Ox$. Її графік зображено на мал. 15.



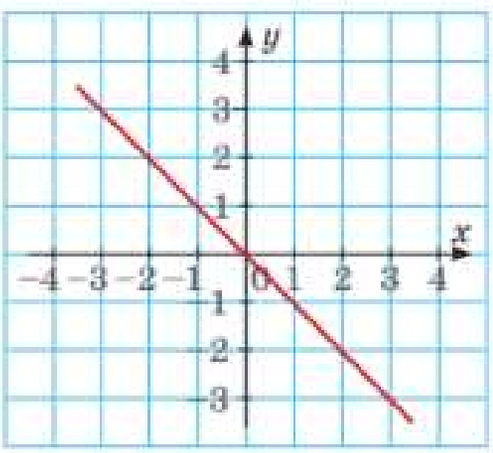
Мал. 15

**2** Якщо $k\neq 0$, $b=0$, то лінійна функція набуває вигляду $y=kx$.

Функцію вигляду $y=kx$, де $x$ – змінна, $k$ – деяке число, називають ***прямою пропорційністю.*** Значення такої функції прямо пропорційні значенням аргумента, а $k$ – коефіцієнт цієї пропорційності.

Якщо $x=0$, то $y=k\cdot 0=0$, отже, графік прямої пропорційності завжди проходить через початок координат – точку $(0;\ 0)$.

І навпаки, якщо графіком деякої функції є пряма, що проходить через початок координат, то ця функція є прямою пропорційністю (мал.16).



Мал. 16

## *Тренувальні вправи*

**5.40°.** Назвати кутовий коефіцієнт лінійної функції.

а) $y=-5x+3$; б) $y=x+4$; в) $y=0{,}4x-1$; г) $=--+$ .

**5.41°.** З'ясувати, які з поданих функцій є лінійними функціями та назвати значення $k$ і $b$.

а) $y=\frac{1}{3}x^4+1$; б) $y=\frac{7}{3x}+3$; в) $y=\frac{x}{7}+9$; г) $y=\frac{3-3x}{3}$.

**5.42°.** Побудувати графік лінійної функції.

а) $y=2x$; б) $y=-3x$; в) $y=4$; г) $y=x+1$; д) $y=2{,}5-x$.

**5.43°.** Відомо, що графік функції $y=kx+b$ перетинає вісь $Oy$ у точці $A(0;\ -2)$. Знайти значення $b$.

**5.44°.** Побудувати графік функції $y=-2x+1$. Користуючись графіком, знайти:

а) $y$, якщо $x=-2{,}5$; $x=3{,}5$, $x=-2$; б) $x$, якщо $y=-4{,}5$; $y=3$.

**5.45°.** Побудувати графік функції $y=4-3x$ та заповнити в зошиті таблицю.

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | $-1$ | | $-2{,}5$ | | $2$ | $5$ |

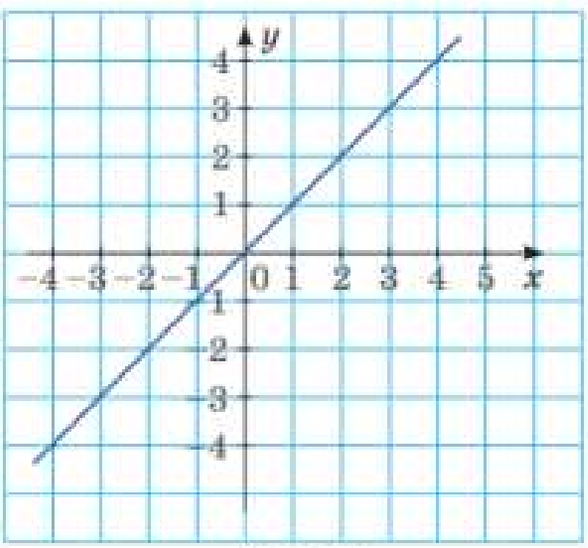
**5.46°°.** Визначити серед наведених функцій пряму пропорційність.

1) $y+x=4$; 3) $y-10=0$; 5) $y-3x=0$; 7) $y=0{,}25x$;

2) $y-x=7$; 4) $y+7x=0$; 6) $y+5x=4$; 8) $y+\frac{6}{7}x=0$.

**5.47°°.** На малюнку 17 зображено графік деякої функції. За графіком знайти:

1) значення $y$, якщо $x=-1$; 0; 2; 4;
2) значення $x$, якщо $y=-3$; 0; 1;
3) два значення аргументу, для яких значення функції будуть додатними;
4) два значення аргументу, для яких значення функції будуть недодатні.




Мал. 17

**5.48°°.** Побудувати графік лінійної функції:

а) $y=7x-5$; б) $y=2x+1$; в) $y=-2x+5$; г) $y=2{,}5-x$.

**5.49°°.** З'ясувати, чи проходить через початок координат графік функції:

а) $y=-1{,}7x$; б) $y=7x-2$; в) $y=6$; г) $y=\frac{3}{4}x$.

**5.50°°.** Побудувати графік прямої пропорційності:

а) $y=2x$; б) $y=-2x$; в) $y=0,5x$; г) $y=-0,5x$.

**5.51°.** З'ясувати, не виконуючи побудови, які з точок $A$ (−2; 7), $B$ (−4; 11), $C$ (9; −1,5), $D$(7; 2,5), $K$ (0; 6) належать графіку функції $y=6-0,5x$.

**5.52°.** Визначити, не виконуючи побудови, точки перетину графіка функції з осями координат:

а) $y=-0,5x+1$; в) $y=0,4x+0,8$;

б) $y=\frac{x}{2}-3$; г) $y=-\frac{x}{3}+1$.

**5.53°.** Скласти таблицю значень функції $y=\frac{x}{5}+1$ для всіх цілих значень $x$, якщо $-5\le x\le 5$.

**5.54°°.** Знайти значення $m$ і $n$, якщо графік функції $y=mx+n$ проходить через точки $A$ (−2; −6) і $B$ (0; 4).

**5.55°.** Знайти координати точок перетину графіка функції з осями координат:

а) $y=-3,5x+7$; в) $y=0,2x-5$;

б) $y=0,3x+1,8$; г) $y=10x-1$.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**5.56°°.** Задати формулою будь-які дві лінійні функції, графіки яких проходять через точку:

а) $A(0; 2)$; б) $B(3; 0)$; в) $C(2; 5)$; г) $D(-2; 3)$.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**5.57.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Конкурс»*. На математичному конкурсі в гімназії запровадили таку систему оцінювання: учень / учениця отримує на старті бонус – 20 балів для заохочення, а за кожну правильно розв'язану задачу – по 7 балів.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§5.3. Лінійна функція, її графік та властивості. Пряма пропорційність, її графік та властивості».**

# §5.4 Побудова і читання графіків лінійних функцій




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Недостатньо тільки отримати знання, їх треба застосувати. Недостатньо тільки бажати, треба діяти»*** (Йоганн Вольфганг фон Гете).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та більш детально осмислимо отримані знання і вміння про графіки лінійних функцій.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ**, через які координатні чверті проходить пряма $y=-5x-2$.

**ПОЯСНИ**, як задати формулою функцію, що є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку $M(5;\ -4)$.

**ЧОМУ** формула $x=a$ не може задавати функцію, а формула $y=b$, – може?

**ПРИДУМАЙ** текстову задачу, яка моделюється лінійною функцією.

**ПОДІЛИСЯ** своїм алгоритмом побудови графіка функції $y=|x-3|$.

**ЗАПРОПОНУЙ** ідею формулювання задачі на встановлення залежності між масою бочки, наповненої бензином, і об'ємом бензину в ній, якщо відомо густину бензину – $0{,}8\,кг/дм^3$ та масу порожньої бочки – $5\,кг$.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди у партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** для функції $y(x)=2x+1$ значення:

а) функції, якщо значення аргументу дорівнює 0;

б) аргументу, якщо значення функції дорівнює 0.

**2) З'ясувати,** чи проходить через початок координат графік функції:

а) $y=-12{,}9x$;

б) $y=5x+4$;

в) $y=10$;

г) $y=\frac{4}{15}x$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

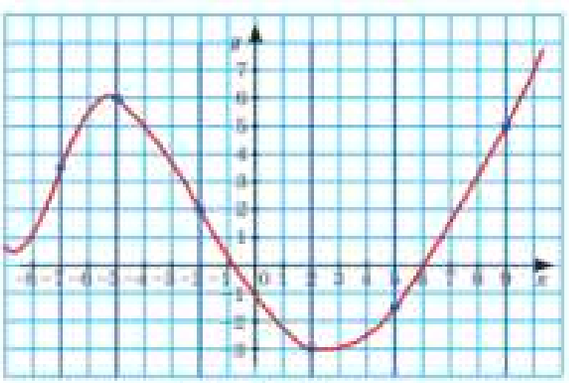
**1** Для розуміння змісту поняття функції важливо чітко розрізняти аргумент і значення функції. Інакше можна переплутати, що і куди підставляти у формулу, і які саме значення підставляти замість $x$ і замість $y$. Якщо, як у випадку на дослідження, і замість $x$, і замість $y$ потрібно підставляти число 0, то важливо пам'ятати, що у точки, яка розміщена на осі абсцис має вигляд $(a; 0)$, тобто її абсциса відмінна від 0. Точка, яка розміщена на осі ординат, має вигляд $(0; b)$, тобто її ордината відмінна від 0. Винятком є початок координат – точка (0; 0).

**2** Щоб з'ясувати, який графік може проходити через початок координат, потрібно проаналізувати ситуації, коли можна утворити тотожність $0 = 0$.

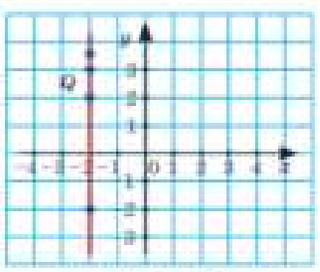
***Зауваж!***

Для функції **характерно**, що кожному значенню аргумента відповідає **єдине** значення функції. Це означає, що за графіком ти завжди зможеш визначити, чи є він графіком саме функції, Для цього достатньо провести уявно пряму, паралельну осі ординат. Якщо ця пряма перетне графік лише в одній точці, то це графік функції, а якщо більше, то це графік НЕ функції!

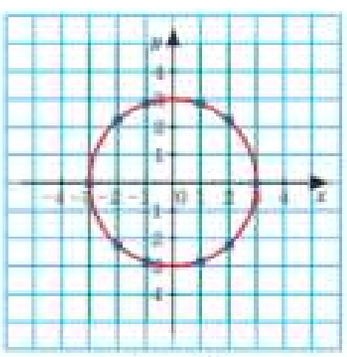
Наприклад на мал. 18 – функція, а на мал. 19 і 20 – не функція.



Мал. 18



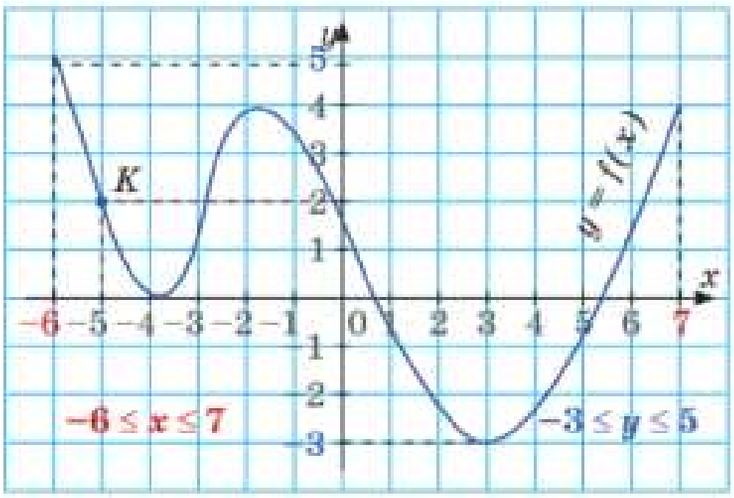
Мал. 19



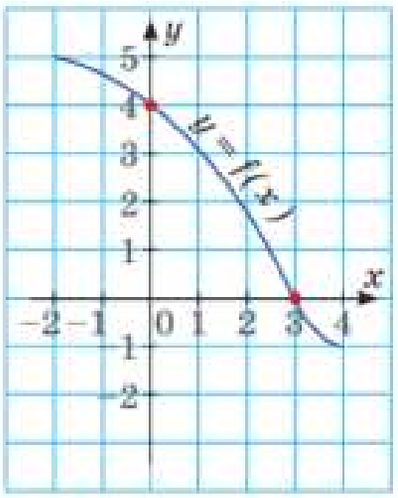
Мал. 20

За графіком функції можна визначити:

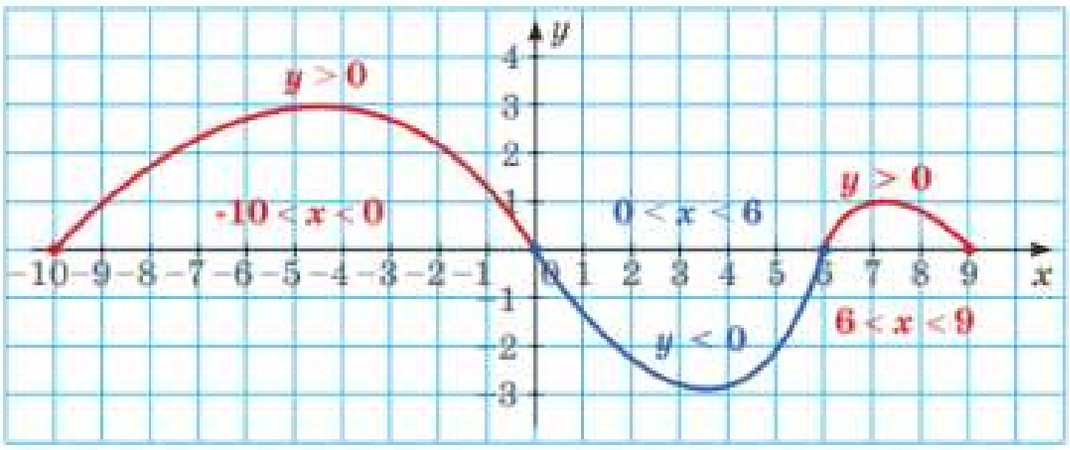
1) координати точки, яка належить графіку (мал. 21);
2) область визначення функції (мал. 21);
3) область значень функції (мал. 21);
4) точки перетину графіка із осями координат (мал. 22);
5) значення аргументу, при яких $y > 0$, і при яких $y < 0$ – (мал. 23).




Мал. 21




Мал. 22




Мал. 23

Уміння визначати згадані властивості функції за її графіком ще називають *читанням* графіка. Ці вміння в тебе щороку будуть набувати вищого гатунку, адже ти вивчатимеш й інші функції та ще більше їхніх властивостей, і зрештою читатимеш графіки подібно до таблиць і діаграм.

## *Зауваж! Це важливо!*

Розглянемо властивості деяких функцій за їхнім графіком.

**Приклад 1.** Властивості функції $y = 0{,}5x + 2$.

1) Область визначення: *всі числа*.

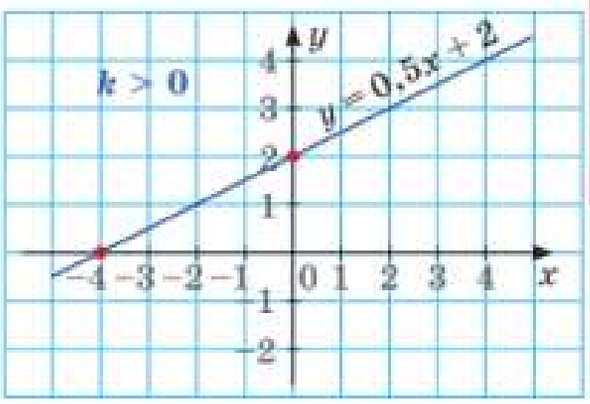
2) Область значень: *всі числа*.

3) Якщо $x = 0$, то $y = 2$, отже, $(0; 2)$ – точка перетину графіка з віссю $Oy$.

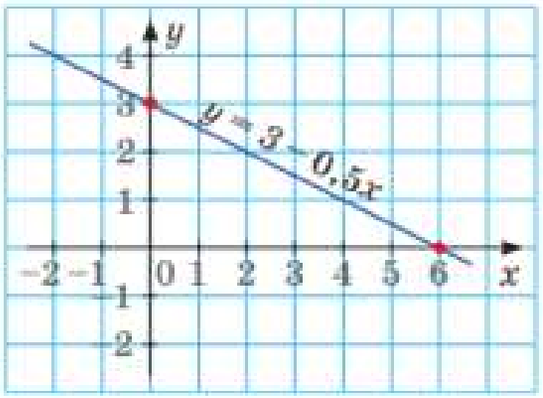
4) Якщо $y = 0$, то $x = -4$, отже, $(-4; 0)$ – точка перетину графіка з віссю $Ox$.

5) Функція набуває додатних значень, тобто $y > 0$, якщо $x > -4$;

6) Функція набуває від'ємних значень, тобто $y < 0$, якщо $x < -4$;



**Приклад 2.** Властивості функції $y=3-0{,}5x$.




1) Область визначення: *всі числа*.

2) Область значень: *всі числа*.

3) Якщо $x=0$, то $y=3$, отже, $(0;3)$ – точка перетину графіка з віссю $Oy$.

4) Якщо $y=0$, то $x=6$, отже, $(6;0)$ – точка перетину графіка з віссю $Ox$.

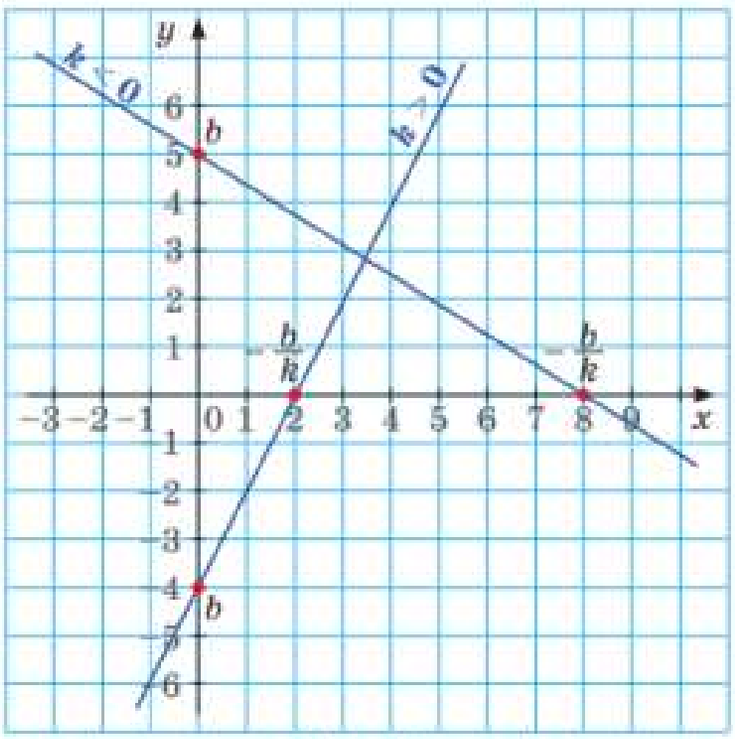
5) Функція набуває додатних значень, тобто $y>0$, якщо $x<6$;

6) Функція набуває від'ємних значень, тобто $y<0$, якщо $x>6$;

7) $k=-2<0$, кут нахилу графіка до додатної півосі $Ox$ – тупий.

## *Зауваж! Це важливо!*

**Розглянемо властивості лінійної функції $y=kx+b$ у загальному випадку за малюнком 24.**




**Мал. 24**

1) Область визначення: всі числа.

2) Область значень: всі числа.

3) Якщо $x=0$, то $y=b$;

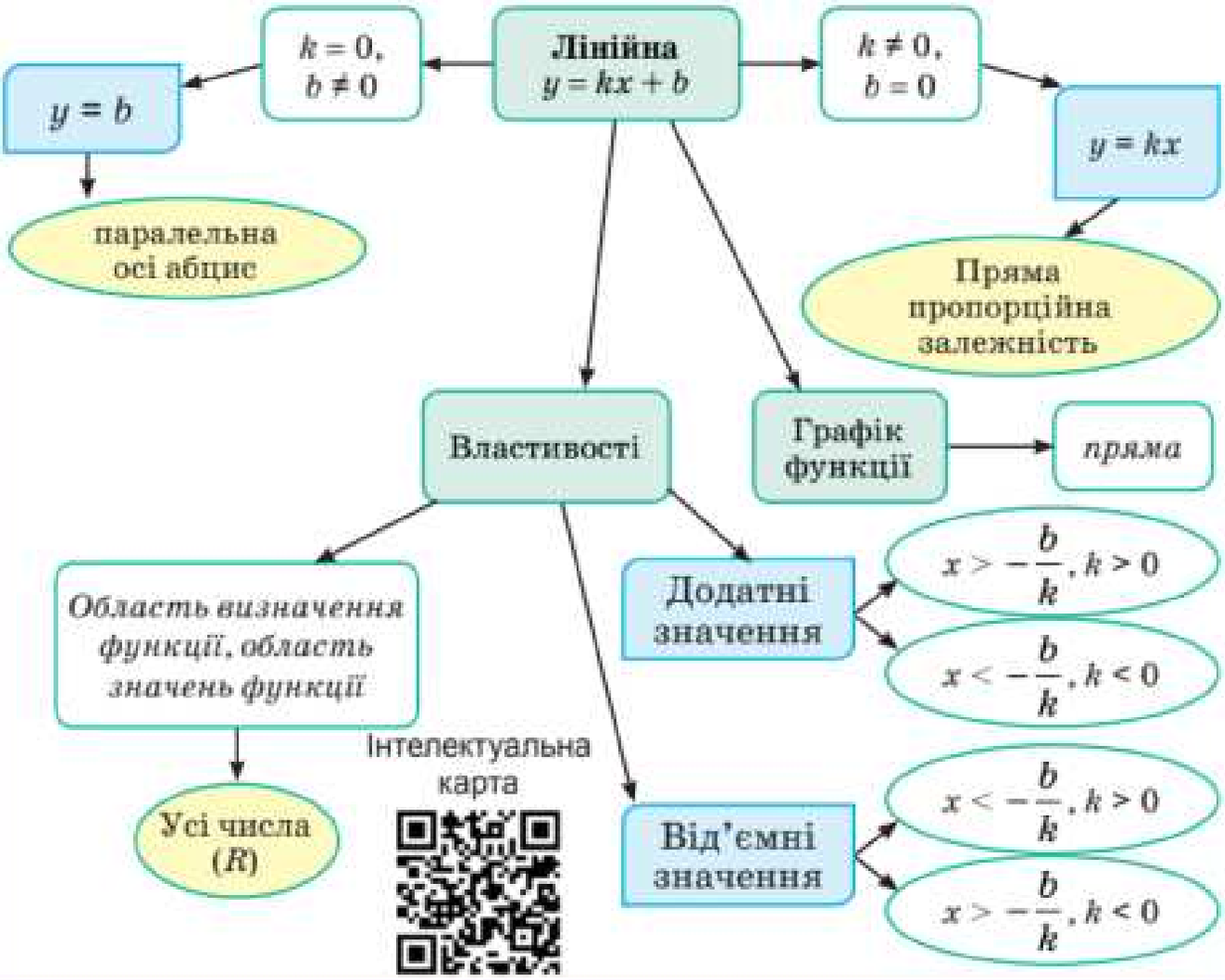
4) Якщо $y=0$, то $x=-\frac{b}{a}$;

5) Функція набуває додатних значень, тобто $y>0$, при $x>-\frac{b}{k}$, якщо $k>0$, та при $x<-\frac{b}{k}$, якщо $k<0$;

6) Функція набуває від'ємних значень, тобто $y<0$, при $x<-\frac{b}{k}$, якщо $k>0$, та при $x>-\frac{b}{k}$, якщо $k<0$;

7) кут нахилу графіка до додатної півосі $Ox$ – гострий, якщо $k>0$, тупий, якщо $k<0$.

## ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА КАРТА «ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ»



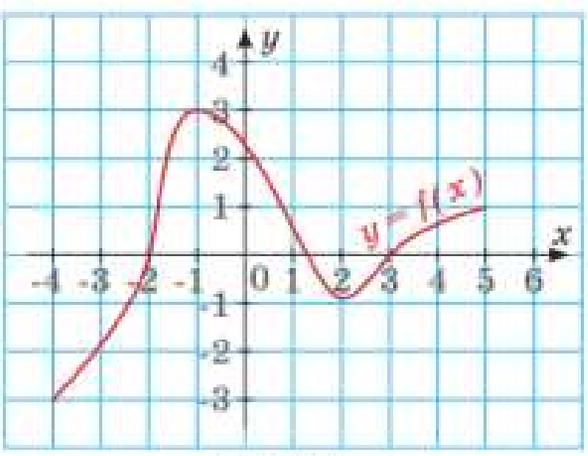

## Тренувальні вправи

**5.58°.** На малюнку 25 зображено графік функції $y=f(x)$, визначеної для $-4\le x\le 5$. Визначити за малюнком через які з пропонованих точок проходить графік цієї функції.

а) (3; 0); г) (−1; 5);

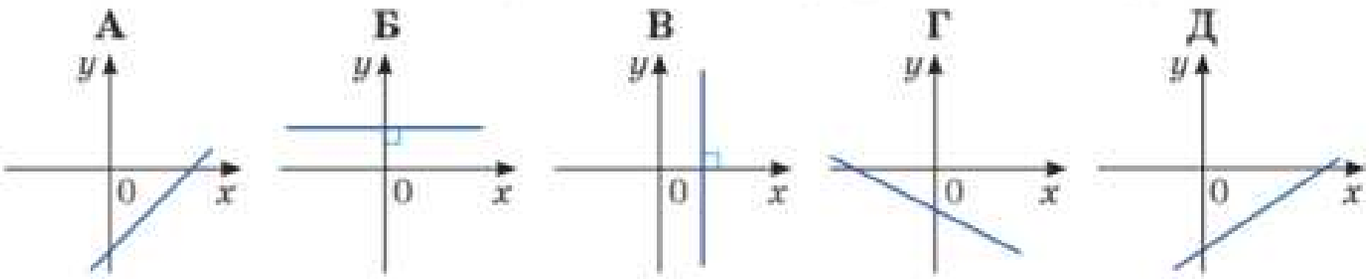
б) (−2; −1); д) ( 4; −1).

в) (−1; 3);



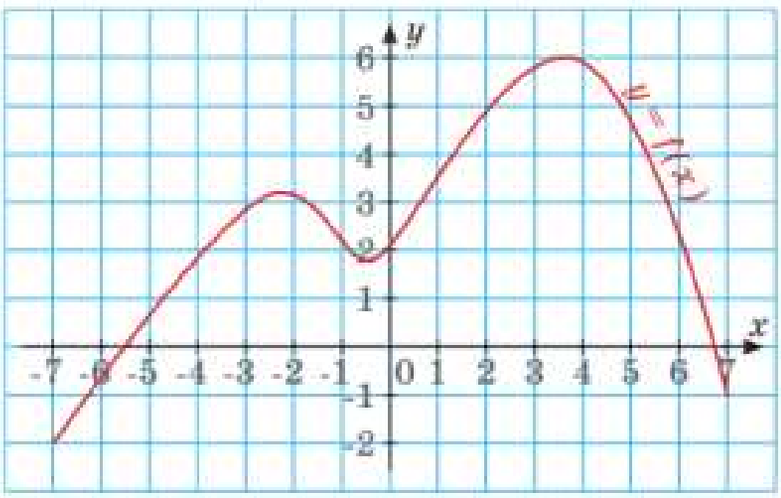

Мал. 25

**5.59°.** Указати, на якому з малюнків графік не задає функцію.




**5.60°.** На малюнку 26 зображено графік функції $y=f(x)$, визначеної для $-7\le x\le 7$. Користуючись графіком, знайти:

а) $f(-4)$;
б) $f(-2)$;
в) $f(2)$;
г) $f(6)$.



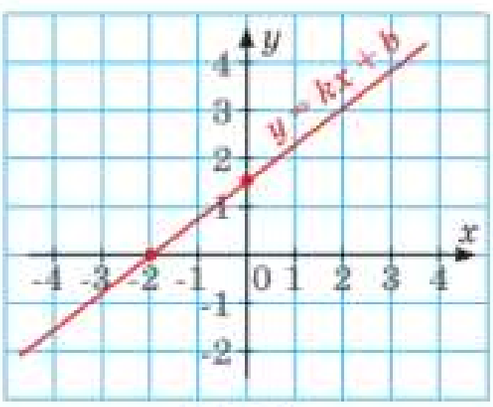

Мал. 26

**5.61°°.** Знайти координати точки перетину графіка лінійної функції з віссю ординат.

а) $y=-x+3$; в) $y=-2x-7$; д) $y=-6x$;
б) $y=-x-4$; г) $y=-7x-3$. е) $y=17$.

**5.62°°.** Визначити, користуючись графіком функції $y=kx+b$ (мал. 27) знаки коефіцієнтів $k$ і $b$ та вказати правильне твердження (А–Е).

А. $k>0$ і $b<0$; Г. $k>0$ і $b>0$;
Б. $k<0$ і $b>0$; Д. $k=0$ і $b>0$;
В. $k<0$ і $b<0$; Е. $k=0$ і $b<0$.




Мал. 27

**5.63°°.** Маємо лінійну функцію $y=-5x+3$. Побудувати графік цієї функції та заповнити в зошиті таблицю:

| $x$ | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | |

**5.64°°.** Маємо лінійну функцію $y=\frac{1}{4}x-4$. Побудувати графік цієї функції та за графіком встановити її властивості.

**5.65°°.** Побудувати графік функції $y=x+6$ та вказати точки його перетину з осями координат.

**5.66•.** Знайти точки перетину графіка лінійної функції з осями координат і перевірити результат графічно:

а) $y=-x+6$; б) $y=-4+3x$; в) $y=-x-7$; г) $y=-0{,}5x-6$.

**5.67•.** Не виконуючи побудови, знайти точки перетину графіка функції $y=-\frac{1}{4}x+8$ з осями координат.

**5.68•.** Побудувати графік функції $y=x-3$. Указати область визначення цієї функції та область значень. При яких значеннях $x$ функція набуває додатних значень, а при яких – від'ємних?

**5.69•.** Побудувати графік лінійної функції $y=1{,}5x+4$. Користуючись графіком, знайти:

а) значення $y$, якщо $x=-3{,}5;\ 1{,}5$;

б) значення $x$, якщо $y=-0{,}5;\ 4{,}5$;

в) при яких значеннях $x$ значення $y$ додатні, а при яких – від'ємні.

**5.70•.** Побудувати графік функції $y=-3x+6$ та вказати, при яких значеннях $x$:

а) $y=0$; б) $y>0$; в) $y<0$.

**5.71••.** Побудувати графік функції $y=4x-10$. За допомогою графіка вказати, як змінюється $y$, коли $x$ змінюється: а) від $-4$ до 0; б) від 0 до 12.

**5.72••.** Виразити з поданих рівнянь $y$ через $x$ та побудувати графік отриманої лінійної функції:

д) $3y-x=6$; в) $x-y=5$; д) $-x-y=8$; є) $y-9=0$;

е) $y-x=2$; г) $5x+y=-10$; е) $y+7x=0$; ж) $y+3{,}5=0$.

***Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»***

**5.73••.** Побудувати в одній координатній площині графіки функцій $y=\frac{1}{4}x-6$ і $y=3-4x$. Сформулювати їх властивості та вказати взаємне розміщення графіків.

**5.74**.** На малюнку 28 зображено графік деякої функції.

1) Задати функцію формулою.

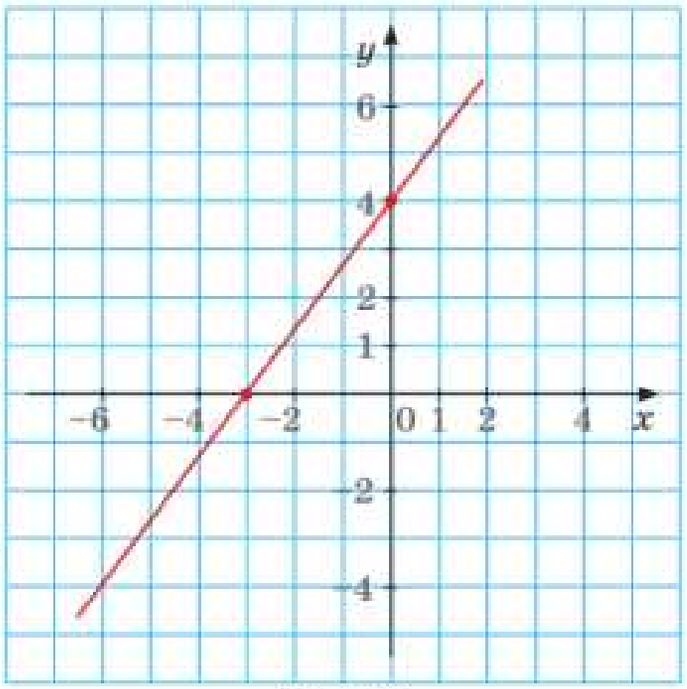
2) За графіком знайти:

а) значення $y$, якщо $x = -3; -1; 0; 1; 4$;

б) значення $x$, якщо $y = -2; 0; 1$;

в) значення $x$, при яких $y > 0$;

г) значення $x$, при яких $y < 0$.

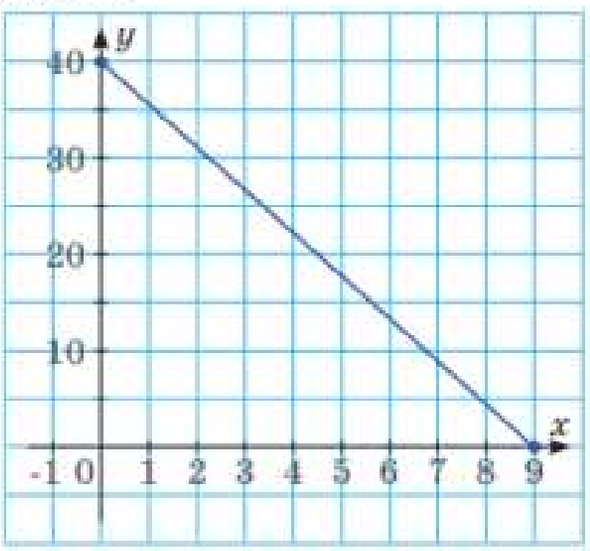



Мал. 28

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**5.75.** Скласти запитання до умови задачі.

У початковий момент часу біатлоністка перебувала на відстані 40 м від фінішу. На малюнку 29 зображено графік зміни відстані від біатлоністки до фінішу залежно від часу.




Мал. 29

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§ 5.4. Побудова графіків лінійних функцій та їх читання».**

# §5.5 Дослідження взаємного розміщення графіків лінійних функцій




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«І сила перед розумом никне»*** (Прислів'я).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та навчимося досліджувати взаємне розміщення графіків лінійних функцій, побудованих в одній координатній площині.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** функцію, яка показує залежність часу від швидкості, з якою ти рухаєшся, йдучи до школи.

**ПОЯСНИ**, чи є залежність між масою печива і його вартістю?

**ЧОМУ** точка $A(-2;\ 8)$ належить графіку функції $y=-x+6$, а точка $B(2;\ 8)$ йому не належить?

**ПРИДУМАЙ**, як задати формулою залежність кількості витрат бензину на відстань, яку проїхав скутер, якщо 2 км з 16 км дороги скутерист скористався переправою через річку.

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями, як знайти $f(-2)+f(4)$, якщо $f(x)=-x+x^2$.

**ЗАПРОПОНУЙ** формулу лінійної функції, яку задано таблицею

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-4$ | $-1$ | $2$ | $5$ |

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди у партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** значення функції для заданого значення аргументу:

а) $f(x)=-2x+1$, якщо $x=-2$;

б) $g(x)=x-4$, якщо $x=-0{,}2$;

в) $f(x)=-12x$, якщо $x=\frac{5}{6}$;

г) $g(x)=\frac{1}{6}x-1$, якщо $x=12$.

**2) Записати** формулу прямої пропорційності, графік якої проходить через точку: а) $B(2;\ 4)$; б) $C(-5;\ 15)$.

**3) Визначити,** який з графіків не перетинає вісь абсцис.

а) $f(x)=-3x+1$; б) $f(x)=6$; в) $f(x)=-0{,}5$; г) $x=6$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Навіть якщо добре знати алгоритм знаходження значення функції для певних значень аргументу, але допускати помилки в обчисленнях, це псуватиме твою оцінку – «завдання виконано неправильно». Отже, правила множення чисел з різними знаками, множення числа на дріб, множення дробів, які обов'язково трапляються у лінійних функціях, потрібно час від часу повторювати.

**2** Дуже цікавим є завдання скласти функцію прямої пропорційності, якщо її графік проходить через задану точку. Знаючи загальний вигляд такої функції $y = kx$ замість $x$ і $y$ підставляють значення, утворюючи нове рівняння, яке містить невідому змінну $k$. Здавалося б працюєш у темі «Функція», а повертаєшся до теми «Рівняння, що зводяться до лінійних».

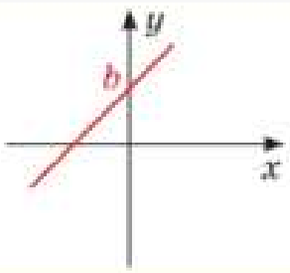
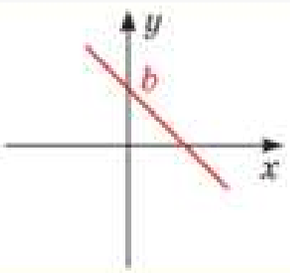
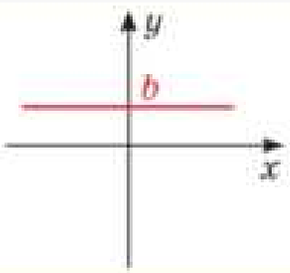
**3** Графіком лінійної функції є пряма. Якщо в одній системі координат побудувати дві різні прямі, то вони можуть не перетинатися або перетинатися лише в одній точці (аксіома). Причому, перетинаючись утворювати кути. Кутом між прямими – є лише гострий або прямий кут. Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.

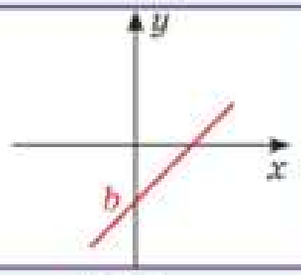
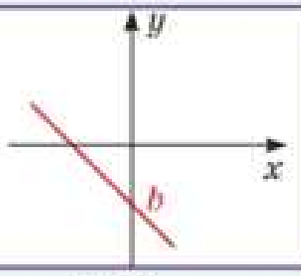
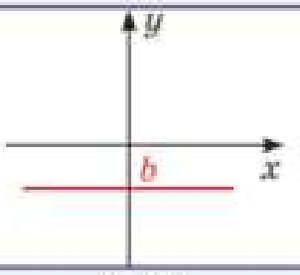
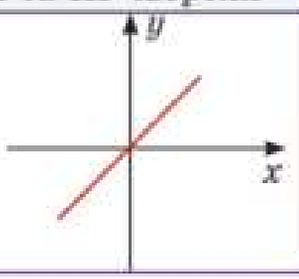
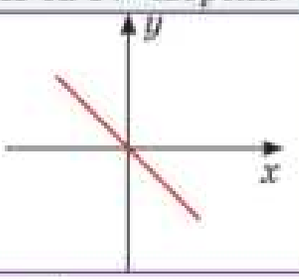
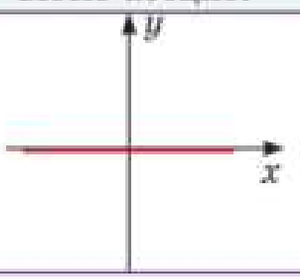
## *Зауваж! Це важливо!*

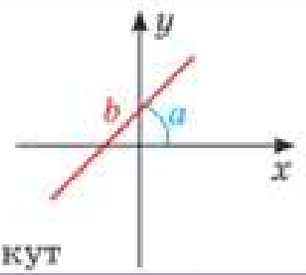
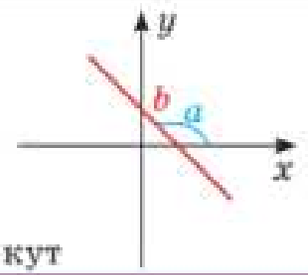
Лінійна функція має вигляд $y = kx + b$.

Оскільки в означенні лінійної функції немає обмежень на значення $k$ або $b$, то вони можуть набувати будь-яких значень.

Розгляньмо різні значення коефіцієнтів $k$ і $b$ та відповідне розташування їх графіків.

| | $k>0$<br>графік розміщується у I, II та III чвертях | $k<0$<br>графік розміщується у I, II та IV чвертях | $k=0$<br>графік розміщується у I та II чвертях |
|---|---|---|---|
| $b>0$ |  |  |  |

| | $k>0$<br>графік розміщується у I, III та IV чвертях | $k<0$<br>графік розміщується у II, III та IV чвертях | $k=0$<br>графік розміщується у III та IV чвертях |
|---|---|---|---|
| $b<0$ |  |  |  |
| | $k>0$<br>графік розміщується у I та III чвертях | $k<0$<br>графік розміщується у II та IV чвертях | $k=0$<br>графік збігається з віссю абсцис. |
| $b=0$ |  |  |  |

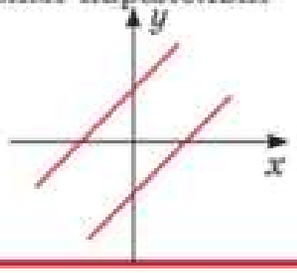
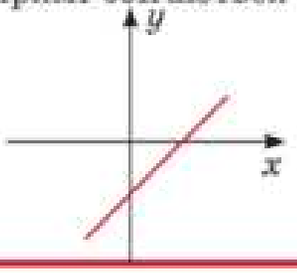
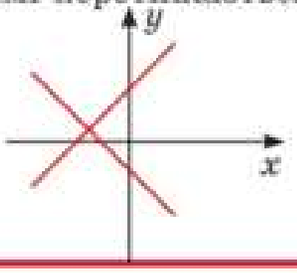
| $k>0$ | $k<0$ |
|---|---|
| <br>α – гострий кут | <br>α – тупий кут |

## *Зауваж! Це важливо!*

**Прямі, у яких кутові коефіцієнти рівні, паралельні.**

Щоб побудувати графік функції $y=kx+b$, достатньо побудувати графік відповідної прямої пропорційності $y=kx$ і змістити його на $b$ одиниць вгору, якщо $b>0$, або на $b$ одиниць вниз, якщо $b<0$.

Розгляньмо взаємне розміщення графіків функцій $y=k_1x+b_1$ та $y=k_2x+b_2$.

| Взаємне розміщення прямих | | |
|---|---|---|
| 1) $k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$ | 2) $k_1=k_2$, $b_1=b_2$ | 3) $k_1\neq k_2$ |
| прямі паралельні | прямі збігаються | прямі перетинаються |
|  |  |  |

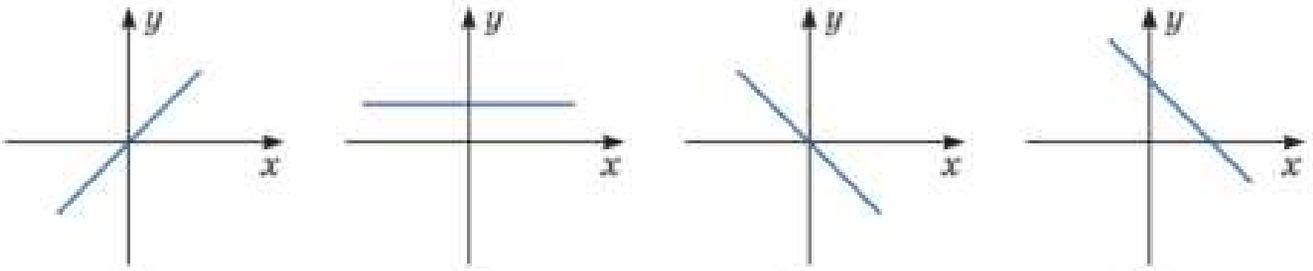
## *Тренувальні вправи*

**5.76°.** Вибрати дві функції, графіки яких не проходять у IV чверті:

а) $y=x+1$; в) $y=\frac{x}{3}+2{,}1$; д) $y=-4x-3$;

б) $y=-2x+11$; г) $y=0{,}4x-6$; е) $y=-9{,}76x$.

**5.77°.** З'ясувати, на якому з малюнків (А–Г) зображено графік функції $y=kx+b$, де $k<0$, $b=0$.




А. Б. В. Г.

**5.78°°.** Побудувати графіки функцій в одній координатній площині. Зробити висновок про їх взаємне розміщення.

а) $y=3$; б) $y=4x+3$; в) $y=-2x+3$; г) $y=\frac{2}{5}x+3$

**5.79°.** З'ясувати, графік якої з функцій утворює тупий кут із додатним напрямком осі $Ox$.

а) $y=25x+1$; в) $y=-x-3$;

б) $y=0{,}25x-1$; г) $y=0{,}7-4x$.

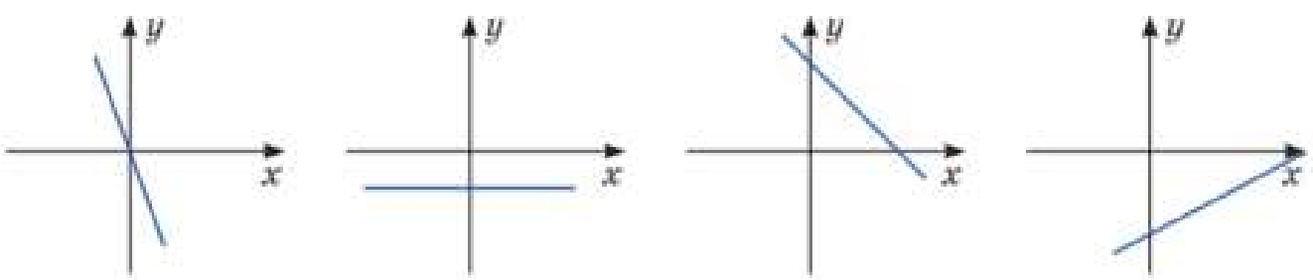
**5.80°°.** Побудувати графік функції $y=-2x+6$. Визначити за графіком точки перетину з осями координат.

**5.81°°.** Побудувати в одній координатній площині графіки функцій (а–г). Записати висновок про їх взаємне розміщення.

а) $y=-3x$; в) $y=-3x+3$;

б) $y=-3x+1$; г) $y=-3x-4$.

**5.82°°.** Визначити для кожного графіка лінійної функції (А–Г) знак коефіцієнта $b$.




А. Б. В. Г.

**5.83°°.** З'ясувати не виконуючи побудови, взаємне розташування кожної пари графіків функцій в координатній площині.

а) $y=5x+4$, $y=5x+3$; в) $y=x+2$, $y=-x+3$;

б) $y=-3x+1$, $y=-3x+1$; г) $y-4=0$, $y=-6$.

**5.84°°.** Увідповіднити функцію (1–4) та розміщення її графіка на координатній площині (А–Г).

| *Функція* | *Розміщення графіка* |
|---|---|
| **1.** $y=-3x$ | **А.** I та III чверті |
| **2.** $y=0,2x$ | **Б.** II та IV чверті |
| **3.** $y=-6$ | **В.** I та II чверті |
| **4.** $y=6$ | **Г.** III та IV чверті |

**5.85•.** Не виконуючи побудови, знайти точку перетину графіка функції з віссю $Oy$, Пояснити два способи знаходження такої точки.

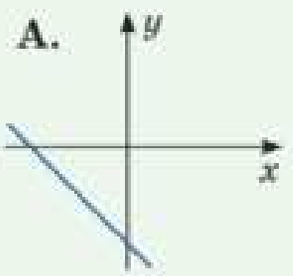
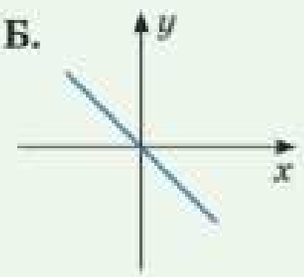
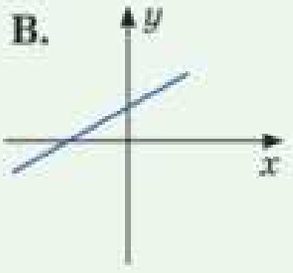
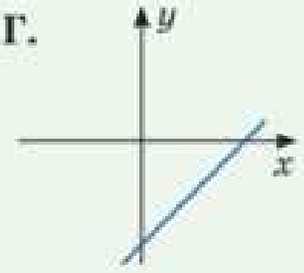
а) $y=-x+2$; б) $y=3x-4$; в) $y=-4x+2,3$; г) $y=5x-5$.

**5.86•.** Побудувати в одній координатній площині графіки трьох функцій та дослідити їхнє взаємне розміщення.

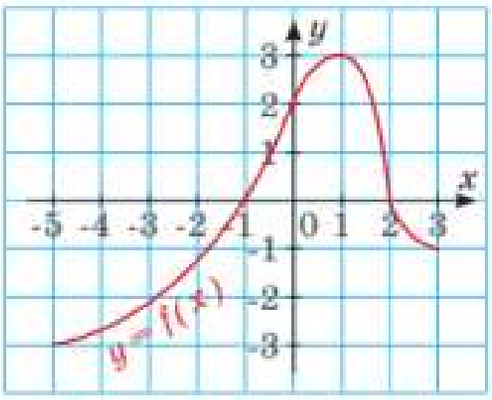
а) $y=-0,5x+4$, якщо $-8\le x\le 0$; б) $y=-2$, якщо $-6\le x\le 0$;
$y=x+8$, якщо $-3<x<0$; $y=5x-2$, якщо $0<x<1$;
$y=8$, якщо $-8\le x\le 0$; $y=-2x+5$, якщо $1\le x\le 4$.

**5.87•.** Увідповіднити функцію (1–4) з її графіком (А–Г).

1) $y=x-4$; 2) $y=0,5x+1$; 3) $y=-2x-4$; 4) $y=-4x$.

| *Функція* | *Графік функції* |
|---|---|
| **1.** $y=x-4$ | **А.**  |
| **2.** $y=0,5x+1$ | **Б.**  |
| **3.** $y=-2x-4$ | **В.**  |
| **4.** $y=-4x$ | **Г.**  |

**5.88*.** Критично оцінити процес заповнення таблиці за графіком деякої функції $y=f(x)$.




| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| а) | −5 | −3 |
| б) | −3 | 2 |
| в) | −2 | 1 |
| г) | 0 | 2 |
| д) | 1 | 3 |
| е) | 2 | 0 |
| є) | 3 | −1 |

**5.89**.** Знайти, не виконуючи побудови, таку точку графіка функції $y=5x+10$, у якої абсциса дорівнює ординаті.

**5.90**.** Лінійну функцію задано формулою $y=kx+13$. Визначити значення $k$, для якого графік цієї функції проходитиме через точку:

а) $A\ (-2;-10)$; б) $B\ (4;0)$; в) $C\ (0{,}1;-1)$.

**5.91**.** Визначити формулу для обчислення суми на оплату мобільного зв'язку за тарифом «Святковий», якщо щомісячна абонплата становить 135 грн, а за кожну хвилину розмови сплачується по 35 коп. Побудувати графік отриманої функції.

**5.92**.** Лінійну функцію задано формулою $y=kx+4$. При якому значенні $k$ графік функції:

а) паралельний графіку функції $y=-2x+1$;

б) проходить через точку $A(-2;\ 3)$;

в) перетинає вісь $Ox$ в точці $C(5;0)$;

г) має спільну точку з графіком функції $y=ax+4$ ?

### *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**5.93**.** Графіки функцій $y=-3x-2$, $y=\frac{2}{3}x+1$ та $y=ax$ мають спільну точку. Знайти значення $a$.

**5.94**.** Побудувати в одній системі координат графіки лінійних функцій $y_1=1{,}5x+6$ і $y_2=6-1{,}5x$. Знайти координати точок їх перетину з координатними осями. Дослідити вид утвореного графіками та віссю $Ox$ трикутника, обчислити його площу.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**5.95.** Скласти запитання до умови задачі.

а) Задача *«Червона книга»*. Зубри занесені до Червоної книги. Їх чисельність можна знайти за формулою $y = 50 + 30t$, де $t$ – це роки, а $y$ – це кількість зубрів.

б) Задача *«Черепахи»*. Існує помилкова думка, що черепахи дуже повільні тварини. Насправді це не зовсім так. Шкірясті черепахи здатні пересуватися зі швидкістю 15 км/год. Щоб дійти до сусідньої водойми їй потрібно $t$ год.

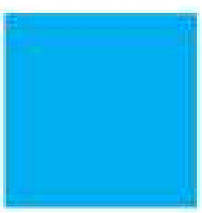
в) задача *«Оплачуємо електроенергію»*. Щомісячний об'єм спожитої електроенергії родини, яка складається з 4 осіб, поданий у таблиці, де ціна 1 кВт/год з ПДВ – 2,64 грн.

| Січень | Лютий | Березень | Квітень | Травень | Червень | Липень | Серпень | Вересень | Жовтень | Листопад | Грудень |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 320 | 280 | 230 | 186 | 165 | 140 | 148 | 155 | 175 | 180 | 210 | 300 |

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 5.5. Дослідження розміщення графіків лінійних функцій, побудованих в одній координатній площині».**

Перевір себе
«Як ти?»



# §5.6 Застосування лінійної функції в практичних ситуаціях




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Якщо ти народжений без крил, не заважай їм рости»*** (Анрі Гідель).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ «чи ти можеш?» та дослідимо окремі ситуації застосування лінійних функцій.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

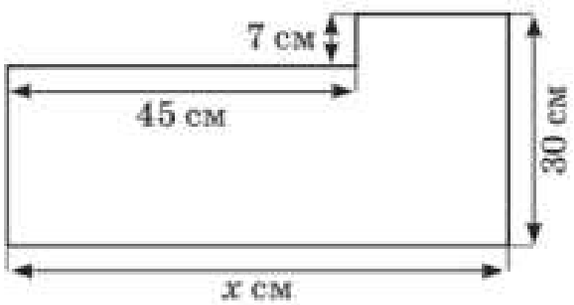
**НАЗВИ**, за якої умови графіки функцій $y=k_1x-2$ і $y=k_2x+1$ перетинатимуться в точці M(3; 4).

**ПОЯСНИ** взаємне розміщення графіків лінійних функцій залежно від значення кутового коефіцієнта $k$ та вільного члена $b$.

**ЧОМУ** пряма є графіком функції $y=4x$, а не графіком функції $y=\frac{4}{x}$?

**ПРИДУМАЙ** приклад лінійної функції, графік якої паралельний до графіка функції $y=-\frac{1}{8}x+3$.

**ПОДІЛИСЯ** вмінням складати задачі за малюнком та створювати до них відповідні математичні моделі на прикладі заданого малюнка.




**ЗАПРОПОНУЙ** завдання на залежність ціни страхування від нещасного випадку під час стрибка з парашутом за певною фіксованою ціною та ціною за один стрибок, її модель в алгебраїчному та графічному вигляді.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди у партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Увідповіднити** пару функцій (1–4) ) та їх взаємне розміщення на координатній площині (А–В).

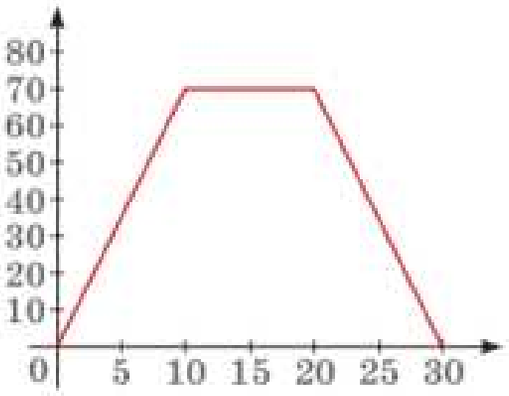
| **Функції** | **Розміщення прямих** |
|---|---|
| 1. $y=3x+1$ і $y=3x+2$; | А. перетинаються; |
| 2. $y=-5x+7$ і $y=-5x+7$; | Б. перпендикулярні; |

3. $y=x+4$ і $y=-x+2$; В. паралельні.

4. $y-6=0$ і $y=-7$;

**2) Визначити,** за якого значення $k$ графік функції $y=kx+3$ проходитиме через точку А (−5; 8).

**3) Прочитати** графік функції, який відображає кількість осіб деякої територіальної громади, які взимку минулого року хворіли на грип, та дати відповідь на запитання:




1) Скільки частин містить графік кожного процесу?

2) Що відбувається на першому етапі процесу?

3) На якому етапі ситуація досягла піку?

4) Як довго протрималася пікова ситуація?

5) На який день кількість хворих почала зменшуватися?

6) Що відбувалося на останньому етапі процесу?

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

**ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ І ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:**

**1** Вміння з'ясовувати розміщення графіків двох лінійних функцій, не виконуючи їх побудови, – одне з важливих досягнень опрацювання теми. Мабуть, найважче було побачити, коли прямі будуть перпендикулярними. Тобто вашу увагу акцентовано на те, що прямі, перетинаючись, можуть утворювати прямий кут. Це буде тоді, коли добуток коефіцієнтів $k$ цих двох функцій дорівнює $-1$.

Отже, якщо $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ і $\boldsymbol{k_1\cdot k_2=-1}$, то прямі перпендикулярні.

**2** У другому завданні ви звично перейшли до рівняння зі змінною $k$ і розв'язавши його, отримали відповідь до завдання.

**3** Завдання 3 на дослідження відображало звичну ситуацію з грипом у зимовий період, коли ще не всі адаптувалися до зими й не дуже обережно поводилися в громадських місцях. На практиці такі ступінчасті графіки трапляються часто, їх зокрема використовують у медицині, економіці, соціології тощо. Це лінійні функції, областю визначення яких є відрізок, а графіком – ламана. Такі питання ви будете вивчати пізніше.

*Зауваж!*

Можна сказати, що функції – скрізь! Адже насправді функції трапляються всюди, усе, що програмується, усі комп'ютерні системи, мобільні телефони, застосунки, розрахунки цін/доходів, податки, оренди, прогнози зростання населення/сталого розвитку тощо. Це далеко не все, де застосовуються функції. Кожний графік дає наочне зображення залежності між величинами, описує різні процеси. Лінійні функції відіграють ключову роль у розумінні та моделюванні різноманітних явищ у реальному світі та широко застосовуються в різних галузях життя і науки через їхню простоту та математичну чіткість.

Зазначимо, що на практиці часто використовуються прилади для автоматичної реєстрації того чи іншого процесу. Ці прилади викреслюють графіки відповідних функціональних залежностей. Кожний вчений уміє не тільки «читати» побудовані приладами графіки, а й будувати ці графіки самостійно, без використання приладів. Отже, функції мають застосування, і можуть бути використані для дослідження різноманітних економічних процесів, фізичних явищ тощо.

У цьому параграфі досліджуватимемо застосування лінійної функції $y=kx+b$ в ситуаціях, де вона є невід'ємною складовою для вирішення практичних завдань.

## *Тренувальні вправи*

**5.96°°.** У кінотеатрі квиток на фільм «Довбуш» коштує 120 грн. Заплативши додатково 35 грн, глядач/глядачка може отримати попкорн. Скласти лінійну функцію, щоб визначити загальну суму вартості квитка і попкорну залежно від кількості глядачів.

**5.97°°.** Мобільний оператор встановив щомісячну абонплату в розмірі 10 грн, а кожна хвилина розмови коштує 1,5 грн. Записати формулу, за якою можна визначити загальну вартість телефонного рахунку залежно від тривалості розмов.

**5.98°°.** Температура в печі збільшується на 75 °C за годину. Нехай початкова температура у печі – 22 °C. Скласти лінійну функцію для визначення температури в печі у будь-який момент часу $t$, де $0<t<4$.

**5.99°°.** Рослина протягом місяця підростає на 8 см. Визначити формулу для визначення її висоти в будь-який місяць, якщо початкова висота – 5 см.

**5.100°°.** У супермаркеті одна ручка коштує 12 грн. Скласти лінійну функцію, що моделює дохід супермаркету залежно від кількості проданих ручок.

**5.101°°.** Від бази відпочинку до залізничної станції турист йшов спочатку 2 км пішки, а потім продовжив рух на велосипеді зі швидкістю 18 км/год. Задати формулою залежність змінної $s$ від змінної $t$, де $s$ – відстань до станції (у кілометрах), а $t$ – час його руху (у годинах). Знайти за формулою:

а) $s$, якщо $t = 0{,}5$ год; б) $t$, якщо $s = 38$ км.

**5.102°.** Щосекунди в басейн надходить $0{,}8\,м^3$ води. Скільки кубометрів води буде в басейні через $x$ с, якщо зараз у ньому $130\,м^3$ води? Задати формулою залежність об'єму води в басейні від часу його заповнення. Обчислити об'єм води в басейні через 20 с; через 35 с.

**5.103°.** Побудувати графік залежності вартості тканини (в гривнях) від її кількості (в метрах), знаючи, що 3 м тканини коштують 750 грн. Побудувати графік цієї залежності та визначити за графіком, скільки коштує 4,5 м тканини.

**5.104°°.** Косметична фірма платить продавцю-консультанту за $x$ одиниць проданого товару $(2x + 35)$ грн, якщо товару продано менше, ніж 32 одиниці, і доплачує йому 30 % комісійних, якщо товару продано 32 одиниці і більше. Описати залежність між кількістю проданого товару та заробітною платою продавця і побудувати відповідний графік.

**5.105°°.** При перевезенні вантажу двома видами транспорту витрати обчислюють за формулами: $y_1 = 25x + 90$, $y_2 = 120 + 20x$, де $x$ – відстань перевезень у сотнях кілометрів, $y_1$ і $y_2$ – транспортні витрати при перевезені вантажу першим і другим видами транспорту в сотнях гривень. Визначити, на яку відстань та яким видом транспорту краще перевозити вантаж.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**5.106°°.** Водонагрівач заповнили водою, температура якої 10 °С, і нагріли до 60 °С. У процесі нагрівання щохвилини температура підвищувалася на 2 °С. Задати формулою залежність температури води $y$ (у градусах Цельсія) від часу нагрівання $x$ (у хвилинах). Побудувати графік цієї залежності та визначити за графіком:

а) якою була температура води через 7 хв, через 15 хв після початку нагрівання?

б) через який час вода нагрілася до температури 58 °С?

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**5.107.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Рух річкою»*. За 2 год проти течії і 5 год за течією моторний човен долає 120 км. За 2 год за течією і 1 год проти течії цей самий човен долає 51 км.

б) Задача *«Дохід автомеханіка»*. Щомісячна заробітна плата автомеханіка нараховується за принципом: фіксована ставка 4 200 грн плюс 3 % від доходу авторемонтного закладу за місяць. Щомісячний дохід закладу становив: у червні – 120 560 грн; у липні – 132 150 грн; у серпні – 127 300 грн.

в) Задача *«Економічна складова»*. Два кондитерських цехи за день мали разом виготовити 300 тортів. Коли перший цех виконав 55 % свого завдання, а другий – 60 % свого, виявилося, що перший цех виготовив на 27 тортів більше, ніж другий.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§ 5.6. Застосування лінійної функції в практичних ситуаціях».**

# Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми: «Функції»

*Подорож у тисячу миль починається з одного кроку*

(Лао-цзи)

Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Щоб досягти успіху, тобі потрібно вірити у себе, свої здібності та свої мрії!»***.

Сьогодні не Кубик Блума буде тобі допомагати діагностувати, «чи ти знаєш?», «чи ти вмієш?» і «чи ти можеш?», а ти сам/сама формуватимеш свою «Я-особистість!» шляхом самостійної перевірки своєї доброчесності та власної діяльності.

**Завдання 1. Вправа: «Постав собі «*», якщо так».**

**1). Перевір свою доброчесність:**

- ✓ Чи виконував/виконувала Я всі завдання домашньої роботи?
  Чи розв'язував/розв'язувала Я домашні завдання самостійно?
- ✓ Чи пробував/пробувала Я перевіряти свої вміння хоч після одного уроку?
- ✓ Чи вів (вела) Я облік: «знаю», «хочу дізнатися», «дізнався/дізналася»?
- ✓ Чи запланував/запланувала Я навчатися краще, ніж це було вчора?

**2). Запитання для самоконтролю власної діяльності**

1) Чи розумію Я, що таке функція?
2) Чи відрізняю Я аргумент від значення функції?
3) Чи знаю Я способи задання функції?
4) Чи вмію Я знаходити область визначення та область значень функції?
5) Чи знаю Я, що називають графіком функції?
6) Чи знаю Я, яку функцію називають лінійною?
7) Чи вирізняю Я лінійну функцію серед інших функцій?
8) Чи вмію Я будувати графік лінійної функції?
9) Чи застосовую Я різні способи побудови графіка лінійної функції?
10) Чи вмію Я застосувати теорію в практичній ситуації?
11) Чи вмію Я наводити приклади функціональних залежностей?
12) Чи вмію Я знаходити за графіком функції значення функції та значення аргументу?
13) Чи вмію Я визначати окремі характеристики функції за її графіком?

14) Чи знаю **Я**, чим відрізняються формули, що задають пряму пропорційність, від формули лінійної функції?

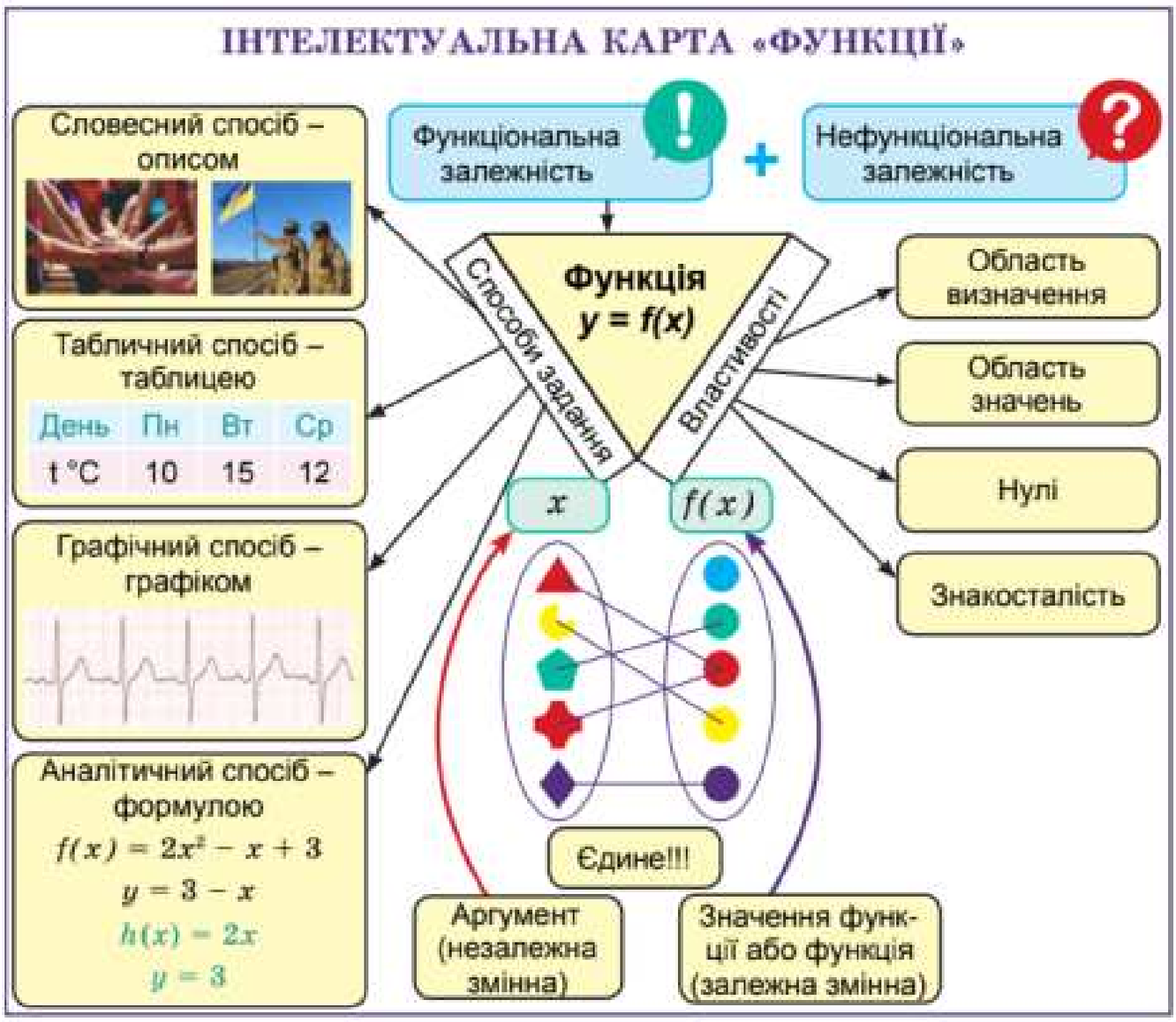
15) Чи знаю **Я**, як впливає значення коефіцієнта $k$ на розміщення графіка лінійної функції $y=kx+b$ в координатній площині?

16) Чи з'ясував/з'ясувала **Я** для себе, яка різниця між формулами, що задають лінійні функції, графіки яких перетинаються, або паралельні, або збігаються?

Зроби висновок: «Як Ти?». Чи можеш собі сказати: «Тепер Я усвідомлюю, що можу, хочу і буду вчитися!».

Похвали себе, якщо ти «Молодець!»

**Завдання 2. Розглянь інтелектуальну карту з теми «ФУНКЦІЯ» та склади власну.**




Інтелектуальна карта

## *Тренувальні вправи*

**5.108°.** Маємо функцію $y=-2x+3$. Перенести таблицю в зошит та заповнити її.

| $x$ | $-4$ | $-2$ | | | $0$ | $1$ | | | $1{,}5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | $-6$ | $3$ | | | $11$ | $15$ | |

**5.109°.** Не виконуючи побудови графіка функції $y=5x-9$, укажіть, через які з точок $A(2;9)$, $B(-3;6)$, $C(1;-4)$, $D(1{,}8;0)$, $K(0;9)$ він проходить.

**5.110°.** Функцію задано формулою $y=1{,}5x-2$. Визначити:

а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 6;

б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 5,5.

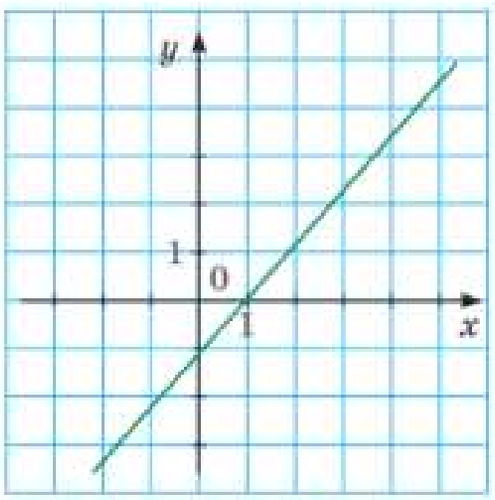
**5.111°°.** На малюнку 30 зображено графік деякої функції. Знайти, користуючись графіком:

а) значення $y$, якщо $x=-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 3{,}5;\ 5$;

б) значення $x$, якщо $y=-3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 3$;

в) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю;

г) значення функції, при якому значення аргументу дорівнює нулю;



Мал. 30

д) область визначення та область значень функції;

е) значення аргументу, при яких значення функції додатні;

є) значення аргументу, при яких значення функції від'ємні.

**5.112•.** Знайти точки перетину графіка з осями координат.

а) $y=-2{,}4x+4{,}8$; в) $y=0{,}6x+3{,}6$;

б) $y=\frac{1}{8}x-2$; г) $y=\frac{10}{x}+5$.

**5.113°.** Побудувати графік лінійної функції, указати її кутовий коефіцієнт та вільний член $b$.

а) $y=4{,}5x-9$; б) $y=-x+3$; в) $y=-3x$; г) $y=\frac{1}{3}x+6$.

**5.114°.** Побудувати графік функції $y=-7x+4$. Сформулювати її властивості.

**5.115°°.** Знайти точки перетину графіка функції з осями координат і перевірити результат графічно.

а) $y=-x+5$; в) $y=-x-3,5$;

б) $y=-4+2x$; г) $y=-0,5x-7$.

**5.116°°.** Побудувати графіки функцій в одній координатній площині. Зробити висновок про їх взаємне розміщення.

а) $y=2$; в) $y=-7x+2$;

б) $y=4x+2$; г) $y=\frac{2}{3}x+2$.

**5.117°°.** Знайти область визначення функції.

а) $y=x^3-3x+4$; б) $y=\frac{5}{x+6}$.

**5.118•.** Одна сторона прямокутника дорівнює $x$ см, а друга – втричі більша. Записати формулою залежність площі $S$ прямокутника від $x$. Скласти таблицю значень отриманої функції для перших шести натуральних значень аргументу.

**5.119•.** Маємо лінійну функцію $y=2x+b$. Визначити значення $b$, для якого графік функції буде проходити через точку:

а) $A(-2;-5)$; б) $B(3;0)$; в) $C(0,6;-1)$.

**5.120•.** Якщо $x=4$, то лінійна функція $y=0,5x+b$ набуває значення 9. Знайти значення $b$.

**5.121•.** Побудувати графік функції $y=-3x-6$. Визначити:

а) значення $x$, при якому значення функції дорівнює нулю;

б) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

**5.122•.** Задати формулою лінійну функцію, графік якої проходить через початок координат і точку $A(-2;-8)$.

**5.123•.** Щоб пошити одну вишиванку з домотканого полотна, потрібно 2,5 м тканини. Скласти формулу для обчислення залишку тканини після пошиття $x$ вишиванок з одного сувою, якщо в сувої 150 м тканини. Яких значень може набувати $x$?

### *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**5.124••.** Графік функції $y=kx+b$ перетинає осі координат у точках $A(2;0)$ і $B(0;-4)$. Знайти значення $k$ і $b$.

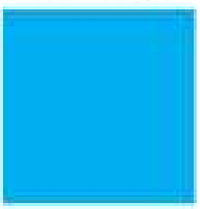
**5.125**••. При якому значенні $n$ графік функції $y = nx + 3n - 6$ перетинає вісь $Ox$ в точці з абсцисою 2?

**5.126**••. Графік лінійної функції проходить через точки $A(1; -2)$ і $B(-2; 1)$. Скласти формулу функції.

**5.127**••. Узагальнити отриману інформацію з теми «Функція» у формі вірша – «Сенкан» за такими правилами:

1. Перший рядок – тема (іменник).
2. Другий – опис теми (два прикметники).
3. Третій – називає дію, пов'язану з темою, складається з трьох дієслів.
4. Четвертий рядок – фраза, переважно з 4-х слів, висловлює ставлення до теми, почуття.
5. П'ятий рядок – одне слово – синонім до слова (теми), ніби висновок вірша.

Приклад сенкану



*Люди які не знайомі з алгеброю,*
*не здатні уявити тих речей,*
*яких можна досягти за допомогою*
*зазначеної науки.*

Ґотфрід Лейбніц

# ТЕМА 6. | Системи лінійних рівнянь із двома змінними

У цій темі ти **зрозумієш,** як лінійні рівняння з двома змінними утворюють систему рівнянь, **ознайомишся** із загальним виглядом системи лінійних рівнянь, **навчишся** їх вирізняти з-поміж інших та **розв'язувати** різними способами, а також навчишся складати систему рівнянь, знаючи її розв'язок.

Тепер ти частіше будеш використовувати слово **«пара чисел»**, як розв'язок системи рівнянь. А ще **розумітимеш,** що системи рівнянь бувають **рівносильними**, і щоб цю рівносильність визначити, треба замінити кожне рівняння системи рівносильним йому рівнянням, використовуючи властивості лінійних рівнянь із двома змінними. Мабуть, найважливішим для тебе буде те, що ти навчишся системами лінійних рівнянь **моделювати** алгебраїчні задачі та інші – практичні, компетентнісно орієнтовані, ситуаційні – якими можна описати твій побут, діяльність і життя.






# §6.1 Лінійне рівняння з двома змінними та його графік. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними

Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Навчання без роздумів – шкідливе, роздуми без навчання – небезпечні».***

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про лінійні рівняння з двома змінним та їх системи.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**ПРИДУМАЙ**

як перетворити квадрат двочлена $\left(5a^2+\frac{1}{10}b\right)^2$ на многочлен стандартного вигляду.

**НАЗВИ**

яка з функцій
$y=x(1-x)$;
$y=4-0{,}5x$;
$y=\frac{1}{2x}$;
$y=12x^2-10$
є лінійною.

**ПОЯСНИ**

чи існують такі цілі значення $x$, для яких значення многочлена $4x^2+2x+11$ є парним числом?

**ЧОМУ**

різниця многочленів $(9a+2b)$ і $(5a+6b)$, де $a$, $b$ – деякі натуральні числа, ділиться на 4?

**ЗАПРОПОНУЙ**

Запропонуй свій спосіб розв'язання рівняння
$\frac{5x-11}{6}+\frac{3x-1}{9}=12$

**ПОДІЛИСЯ**

своїми вміннями, як подати тричлен $a^2-20ak+100k^2$ у вигляді квадрата різниці.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) З'ясувати,** чи є серед заданих функцій (а–г) ті, графіки яких паралельні.

а) $y=x+0{,}5$; б) $y=-0{,}5x+4$; в) $y=5x-1$; г) $y=0{,}5x+1$.

**2) Обчислити,** якою може бути кількість населення через рік у містечку, де проживає 3600 осіб, і передбачається приріст у розмірі 2 %.

3) **Скласти** математичну модель до задачі, якщо відомо, що в одному мішку $m$ кг борошна, в другому – $n$ кг, причому:
а) в обох мішках разом – 20 кг борошна;
б) в першому мішку на 5 кг більше, ніж у другому.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

**ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:**

**1** Якщо не знати властивості коефіцієнтів, для яких графіки лінійних функцій – прямі – будуть паралельними, то доведеться будувати 4 графіки, і це складає певні незручності. Паралельними будуть ті графіки, у яких коефіцієнти $k$ мають однакові значення.

**2** Уміння шукати відсоток від числа – це щоденна задача життя, адже кожний магазин, щоб утримати клієнта видає картку знижки. Відсоток від числа – це дія множення цього відсотка на це число.

**3** Очевидно, що коли відомо: «скільки разом», то математичною мовою – це сума, звідки отримують математичну модель до задачі: (а) – рівняння $m+n=20$. Коли ж відомо «на скільки більше», то це різниця, тому математична модель до задачі (б): $m-n=5$.

***Зауваж!***

Обидва рівняння з третього завдання на дослідження містять не одну, а *дві змінні*. І якщо розглядати кожне рівняння окремо, то розв'язків у кожного з них – безліч. Наприклад,
$5 + 15 = 20$, $12 + 8 = 20$, ... або $15 - 10 = 5$, $12 - 7 = 5$, ...

Рівняння вигляду $ax+by=c$, де $a$, $b$ і $c$ – деякі числа, називають ***лінійним рівнянням з двома змінними.*** Для певних значень $a$, $b$ і $c$ таке рівняння може перетворюватися на лінійне рівняння з однією змінною.

**Запитання:**

**1** *Чи можуть обидві умови цієї задачі виконуватися одночасно?*

Тобто маємо ситуацію, коли подія відбувається одночасно: «У двох мішках є 20 кг борошна, причому в одному з них – на 5 кг більше, ніж в другому». Така ситуація, звичайно, змінює математичну модель до задачі – це рівняння: 1) $x+x+5=20$ або 2) $x+x-5=20$, які мають різний вигляд залежно від того, масу якого мішка позначено через $x$, але розв'язки у рівнянь однакові: 7,5 кг борошна – у меншому мішку і 12,5 кг – у більшому.

**2** *Чи є інший спосіб запису таких одночасних подій?*

Так, є! Математики таку ситуацію передбачили: якщо потрібно знайти спільний розв'язок двох або більшої кількості рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють **систему рівнянь.**

Для такого запису використовують символ «{» – фігурну дужку.

Отже, маємо нову математичну модель до задачі – систему двох лінійних рівнянь з двома змінними: $\begin{cases} m+n=20, \\ m-n=5. \end{cases}$

***Зауваж! Це важливо!***

Рівняння вигляду $ax+by=c$, де $a$ і $b$ відмінні від нуля числа, є рівнянням першого степеня. Числа $a$, $b$ і $c$ називають ***коефіцієнтами такого рівняння з двома змінними.***

Кожну пару чисел, яка задовольняє це рівняння, тобто перетворює його в правильну рівність, називають ***розв'язком рівняння з двома змінними.***

*Щоб знайти розв'язки рівняння з двома змінними, потрібно підставити в рівняння довільне значення однієї змінної і розв'язавши отримане рівняння, знайти відповідне значення другої змінної.*

Наприклад, рівняння $2x+5y=22$ матиме розв'язками такі пари чисел:

$$\left(2;\ \frac{18}{5}\right),\ \left(1;\ \frac{20}{5}\right),\ \left(3;\ \frac{16}{5}\right),\ \left(-2;\ \frac{26}{5}\right),\ \left(-4;\ \frac{30}{5}\right).$$

Два рівняння з двома змінними називають ***рівносильними,*** якщо їхні розв'язки збігаються. Рівняння, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Для рівняння з двома змінними справджуються такі самі властивості, як і для рівнянь з однією змінною. Тому, будь-яке лінійне рівняння з двома змінними можна звести до вигляду:

$$by=c-ax;\ y=\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x, \text{ якщо } b\neq 0;\ y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}, \text{ якщо } b\neq 0.$$

Аналогічно, обидві частини рівняння можна було поділити на $a\neq 0$.

Отримане рівняння є формулою лінійної функції, тому графіком лінійного рівняння з двома змінними є пряма. І навпаки, кожна пряма координатної площини – це графік деякого лінійного рівняння з двома змінними.

Щоб побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними, достатньо знайти два його розв'язки, тобто дві впорядковані

пари чисел, які є координатами точок, що належать графіку цього рівняння. Позначивши ці точки на координатній площині та провівши через них пряму, отримаємо графік цього лінійного рівняння.

***Зауваж! Це важливо!***

Два рівняння з двома невідомими змінними, які описують умову однієї певної задачі, називають системою двох рівнянь з двома змінними.

Систему рівнянь називають ***лінійною,*** якщо всі рівняння, що входять до неї, є лінійними. У загальному вигляді систему двох лінійних рівнянь з двома змінними можна подати так:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

***Розв'язком системи рівнянь із двома змінними*** називають таку впорядковану пару значень змінних, які кожне рівняння системи перетворюють у правильну рівність.

Наприклад, щоб перевірити, чи є пара чисел (9; 1) розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = 8, \end{cases}$ підставляють значення $x = 9$ та $y = 1$ в кожне з рівнянь системи.

Якщо отримано правильні рівності $9 + 1 = 10$ і $9 - 1 = 8$, то кажуть, що ця пара чисел є ***розв'язком*** системи рівнянь.

## *Тренувальні вправи*

Вибрати серед (а–г) лінійне рівняння з двома змінними **(6.1–6.2)**.

**6.1°.** а) $2x + 55 = 110$ в) $75 - y^3 = y$

б) $\frac{1}{6}p + 3c = 7$ г) $k = 1 - k(1 - k)$

**6.2°.** а) $2x - x^2 = 0$ в) $2{,}36x + 1{,}14y = 2{,}25$

б) $0{,}25x + 0{,}75 = 1$ г) $2 : x = 8 : 4x$.

Вибрати серед систем рівнянь (а–г) систему лінійних рівнянь з двома змінними (6.3–6.4)

**6.3°.** а) $\begin{cases} x^2 - 9y = 25, \\ x + y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 9y = 7, \\ x + y = 27; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + y^2 = 4, \\ -5x + y = -4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 6y = 3, \\ 3x + 6y = 15. \end{cases}$

**6.4°.** а) $\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x - y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + \dfrac{2}{y} = 1, \\ x^2 - y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x - 6y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2 - 8y = 12, \\ 5x - 7y = 14. \end{cases}$

**6.5°.** Перенести таблицю в зошит та заповнити її, якщо $(x; y)$ – пара чисел, яка є розв'язком лінійного рівняння $4x - 5y = 12$.

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | $0$ | | $4$ | |

**6.6°.** Вибрати варіант серед (а–г), у якому правильно виражено з рівняння $3x - 4y = 7$ змінну $y$ через змінну $x$.

а) $y = \dfrac{3x + 7}{4}$ б) $y = \dfrac{3x - 7}{4}$ в) $y = \dfrac{7x - 3x}{4}$ г) $y = \dfrac{4x - 7}{4}$

**6.7°.** Вибрати варіант серед (а–г), у якому правильно виражено з рівняння $2x + 7y = 10$ змінну $x$ через змінну $y$.

а) $x = \dfrac{5 + 7y}{2}$ б) $x = \dfrac{7x - 2}{10}$ в) $x = \dfrac{10 - 7y}{2}$ г) $x = \dfrac{7y + 10}{2}$

**6.8°°.** З'ясувати, чи є пара чисел $(2; -1)$ розв'язком системи рівнянь.

а) $\begin{cases} x - 2y = 6, \\ x + y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 3y = 11, \\ x + y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + y = 8. \end{cases}$

**6.9°°.** З'ясувати, які з пар чисел $(-3; 2)$, $(3; -2)$, $(3; 2)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x - 5y = 2, \\ x + 2y = 7. \end{cases}$$

**6.10°°.** Перевірити, чи є пара чисел $(4; 1)$ розв'язком системи рівнянь.

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 10, \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 5y = 12, \\ x + y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 4x + y = 10? \end{cases}$

**6.11*.** Знайти координати точки перетину графіків рівнянь:
а) $2x+y=0$ і $x-y=-3$; б) $2x+y=2$ і $2x-y=6$.

**6.12*.** Скласти систему рівнянь, розв'язком якої є пара чисел:
а) $(3;5)$; б) $(-2;1)$; в) $(0;4)$; г) $(5;0)$.

**6.13*.** Скласти математичну модель до задачі. Павлина купила 400 г цукерок і 300 г пряників, заплативши 126 грн. А Михайло за 600 г таких самих цукерок і 200 г таких самих пряників заплатив 134 грн. Скільки коштує 100 г цукерок і скільки 100 г пряників, які купували діти? Знайти розв'язок задачі шляхом підбору.

**6.14*.** На прямій, яка є графіком рівняння $4x+9y=1$, узято точку, ордината якої дорівнює 1. Знайти абсцису цієї точки.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**6.15**.** Скласти кластер побудови графіка лінійного рівняння $ax+by=c$ в загальному вигляді.

**6.16**.** Дослідити для яких значень коефіцієнтів $a$ і $b$ розв'язком системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x-ay=10, \\ bx+2y=4 \end{cases}$ є пара чисел $(2;\ -1)$;

б) $\begin{cases} 9x+by=4, \\ ax+y=3 \end{cases}$ є пара чисел $(2;\ -7)$.

**6.17**.** Дослідити взаємне розташування графіків на координатній площині двох лінійних рівнянь з двома змінними залежно від їх коефіцієнтів.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**6.18.** Скласти запитання до умови задачі.

Задача *«Мої кишенькові гроші»*. Якщо купувати 7 шоколадних батончиків і 2 плитки шоколаду, то потрібно заплатити 265 грн, а якщо брати 3 батончики, то вони на 30 грн дорожчі за одну плитку шоколаду.

Перевір себе «Як ти?»

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ: «Як ти?»*

**Аркуш «§ 6.1. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними»**




# §6.2 Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними графічно

Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Недостатньо мати лише гарний розум, головне раціонально його використовувати».***

Сьогодні Кубик Блума знову тобі допоможе продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та застосуємо знання про лінійну функцію і рівняння з двома змінними для розв'язування систем рівнянь.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**



**НАЗВИ**, скільки яблук залишилося в кошику, якщо спочатку з нього взяли 3 яблука, потім – третину решти, а відтак добрали ще 3 яблука.

**ПОЯСНИ**, як знайти таке значення коефіцієнта $k$ для функції $y=kx+3$, щоб графік утвореної функції проходив через точку $(2;4)$.

**ЧОМУ** рівняння $(k-2)x+2=k$ для деяких значень $k$ не має жодного кореня?

**ПРИДУМАЙ** таку систему двох лінійних рівнянь з двома змінними, розв'язком якої була б пара чисел $(1;-1)$.

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями скласти задачу за готовою математичною моделлю

$$\begin{cases} x+4y=-12; \\ x-4y=32. \end{cases}$$

**ЗАПРОПОНУЙ**, як можна довести, що для будь-якого цілого значення $n$ значення виразу $(n+2)^2-(n-2)^2$ ділиться на 8.

*Відповіді на запитання* Кубика Блума коротко:

*Відповіді на запитання* Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Визначити,** які серед систем рівнянь (а–в) є системами лінійних рівнянь із двома змінними.

а) $\begin{cases} x^2+y=6, \\ x-y=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y=6, \\ x-6y=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+\dfrac{2}{y}=1, \\ x^2-y^2=2. \end{cases}$

**2) З'ясувати,** яка з перелічених пар чисел є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

а) (4; 2); б) (2; 4); в) (−2; 4); г) (−4; 2)

**3) Побудувати** в одній системі координат графіки рівнянь.

а) $y - x = 5$; б) $x + y = 5$; в) $x - y = 1$; г) $x - y = -5$.

## *Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Система двох рівнянь буде лінійною, якщо обидва рівняння системи є лінійними або одне рівняння системи є лінійним з двома змінними, а друге – з однією змінною.

Наприклад:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x = c_2; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ b_2y = c_2; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1x = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Також розглядають випадок, коли одне із рівнянь – лінійне з двома змінними, а інше має вигляд $y = a$, де $a$ – довільне число, – це пряма паралельна до осі $Ox$.

**2** Пара чисел є розв'язком системи рівнянь, якщо перетворює кожне з рівнянь у правильну числову рівність: $2 = 2$, $3 = 3$, $100 = 100$.

Якщо маємо рівняння першого степеня з двома змінними, то його графіком завжди є пряма, для побудови якої потрібно мати дві точки (це твердить аксіома: *через дві точки можна побудувати пряму і до того ж тільки одну*). Але, якщо таких прямих побудовано на одній площині чотири, то безперечно, що вони можуть не перетинатися – бути паралельними, перетинатися в одній точці (у тому числі бути перпендикулярними) або – збігатися. Це взаємне розміщення прямих на площині, яке залежить від коефіцієнтів лінійних рівнянь.

*Зауваж!*

Аналізуючи результати дослідження третього завдання, маємо висновки:

1. графіки рівнянь $y-x=5$, $x-y=1$ та $x-y=5$ не перетинаються, тобто не мають такої точки, яка б належала кожному з графіків;
2. графіки рівнянь $y-x=5$ і $x+y=5$ та $y-x=-5$ і $x-y=1$ перетинаються, тобто мають таку точку, яка належить кожному з графіків;
3. графіки рівнянь $y-x=5$ і $x-y=-5$ накладаються і мають безліч спільних точок.

У цьому й суть одного зі способів розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними.

**Графічний метод — один із засобів розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними.**

**Алгоритм розв'язування:**

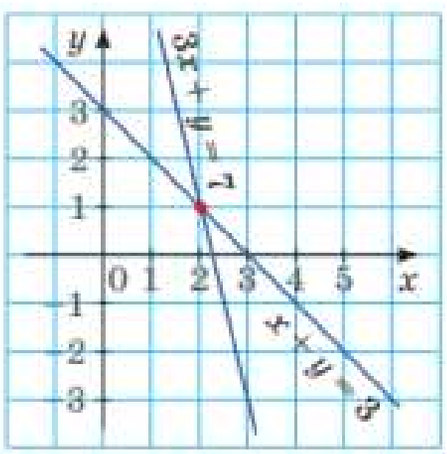
1. для кожного рівняння системи скласти таблицю значень $x$ і $y$;
2. побудувати в одній координатній площині графіки обох рівнянь системи;
3. за побудованими графіками знайти координати точки їх перетину;
4. записати знайдену пару координат, яка і є розв'язком системи рівнянь.

**Наприклад,** розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x+y=3, \\ 3x+y=7, \end{cases}$ графічно.

*Розв'язання*

| $x+y=3$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 3 |
| $y$ | 3 | 0 |

| $3x+y=7$ | | |
|---|---|---|
| $x$ | 2 | 3 |
| $y$ | 1 | −2 |




Будуємо дві прямі, записуємо точку їх перетину (2; 1).
Отже, система рівнянь має один розв'язок (2;1).

***Відповідь.*** **(2; 1).**

### *Зауваж! Це важливо!*

Отже, на площині можливі ***три випадки*** взаємного розміщення двох прямих – графіків рівнянь системи:

1. **Прямі перетинаються,** тобто мають одну спільну точку. Тоді система **має єдиний розв'язок.**
2. **Прямі паралельні,** тобто не мають спільних точок. Тоді система рівнянь **не має розв'язків.**
3. **Прямі збігаються.** Тоді система рівнянь **має безліч розв'язків.**

### *Зауваж! Це важливо!*

***Кількість розв'язків системи лінійних рівнянь з двома змінними:***

1. система не має розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$
2. система має єдиний розв'язок, якщо $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$
3. система має нескінченне число розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

**Приклад.**

1) $\begin{cases}3x-4y=15,\\6x-8y=11.\end{cases}$ $\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}\neq\frac{15}{11}$ – розв'язків немає;

2) $\begin{cases}3x-4y=13,\\x+y=9.\end{cases}$ $\frac{3}{1}\neq\frac{-4}{1}$ – єдиний розв'язок (7; 2);

3) $\begin{cases}3x-4y=15;\\6x-8y=30.\end{cases}$ $\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}=\frac{15}{30}$ – безліч розв'язків.

### *Зауваж! Це важливо!*

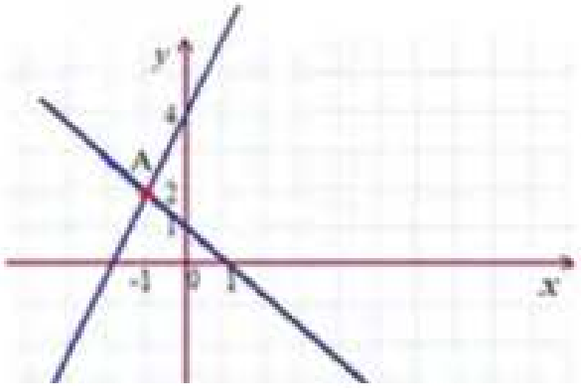
**Графічний метод розв'язування систем лінійних рівнянь громіздкий і не точний.** Точність знайденого цим методом розв'язку залежить від акуратності побудови та точності зображення графіків рівнянь системи. Тому, розв'язавши систему лінійних рівнянь графічно, варто виконати перевірку.

## *Тренувальні вправи*

**6.19°.** Знайти координати точки $A$, що є розв'язком системи рівнянь, графічне розв'язування якої зображено на малюнку.

а) $(1; 2)$ в) $(-1; 2)$

б) $(1; -2)$ г) $(2; 1)$




**6.20°.** Вибрати серед функцій (а–г) таку, яка матиме із прямими, зображеними на малюнку, єдину точку перетину.

а) $y-2=0$ б) $y+2=0$ в) $y-4=0$ г) $y+2=0$

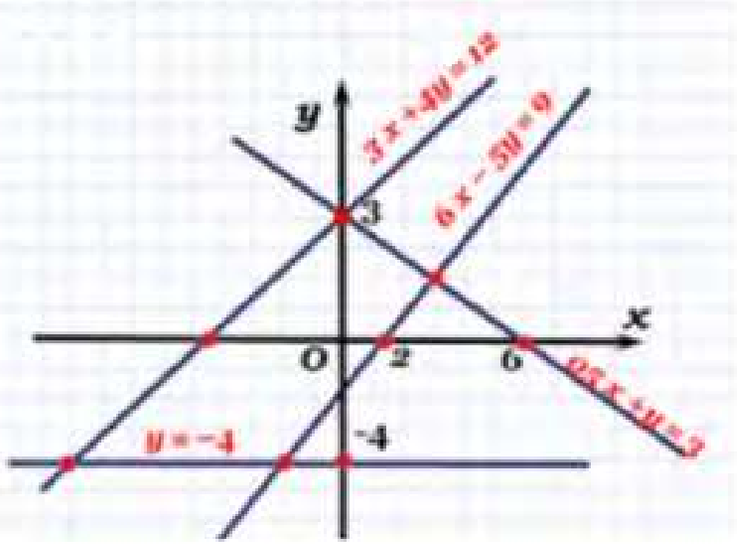
**6.21°.** Розв'язати систему рівнянь графічно, скориставшись малюнком.

а) $\begin{cases} 0,5x+y=3, \\ y-2=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0,5x+y=3, \\ y+4=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0,5x+y=3, \\ 6x-5y=9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 0,5x+y=3, \\ 3x+4y=12. \end{cases}$




**6.22°°.** Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+3y=9, \\ 2x-y=4; \end{cases}$ побудувавши в одній координатній площині графіки рівнянь $2x-y=4$ та $x+3y=9$ і знайшовши точку їх перетину.

**6.23°°.** Розв'язати систему рівнянь графічно:

а) $\begin{cases} 4x-y=5, \\ 3x+2y=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y=6, \\ x-2y=-4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x+6y=14, \\ 2x+3y=7. \end{cases}$

**6.24°°.** Скільки розв'язків має система рівнянь

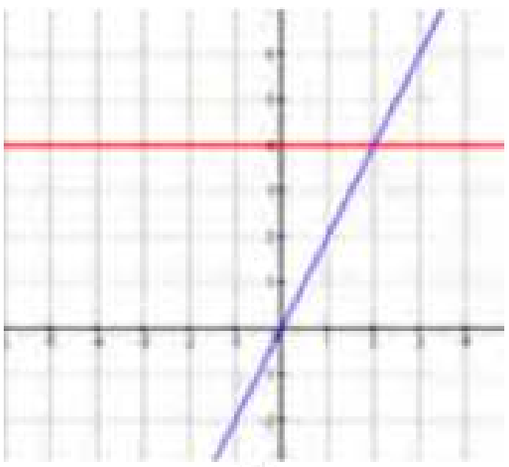
$$\begin{cases} 6x+10y=36, \\ 3x+5y=18? \end{cases}$$

Знайти ТРИ будь-яких її розв'язки.

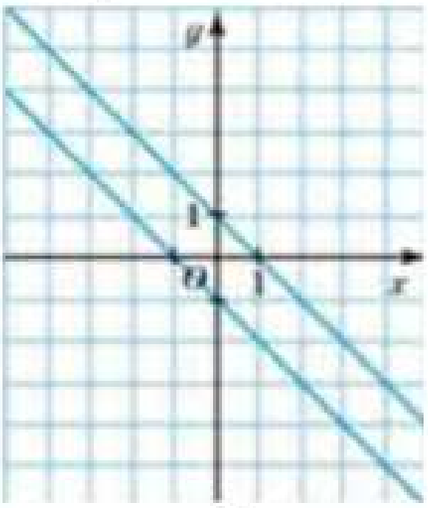
**6.25°°.** Визначити правильність утворення із рівнянь (1–5) такої системи (А–Д), яка матиме безліч розв'язків.

| *Рівняння* | *Система рівнянь* |
|---|---|
| 1. $2x-3y=-9$ | А. 1 і 4 |
| 2. $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=-3$ | Б. 1 і 5 |
| 3. $-3x+2y=18$ | В. 2 і 5 |
| 4. $3x-2y=-3$ | Г. 2 і 4 |
| 5. $6x-4y=-6$ | Д. 2 і 3 |

**6.26•.** Скласти систему рівнянь, графіки рівнянь якої зображено на малюнках (а–б), та знайти за малюнком її розв'язок. А також таку, що (1; 4) буде її розв'язком.



а)




б)

**6.27•.** Розв'язати графічно систему рівнянь:

а) $\begin{cases} y = x + 5, \\ 0,5x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + y = -3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 2, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$

**6.28•.** З'ясувати, чи має розв'язки система рівнянь:

а) $\begin{cases} y = x + 5, \\ 0,5x + y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 2, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + y = -3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = -1, \\ 3x + 3y = -2. \end{cases}$

**6.29•.** Довести, не будуючи графіків, що система рівнянь розв'язків не має.

а) $\begin{cases} 8x + 2y = 15, \\ 8x + 2y = 35; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ 3x - y = 16. \end{cases}$

**6.30**•• Підібрати до рівняння $3x - y = 2$ таке рівняння, щоб отримати систему рівнянь двох рівнянь, яка:

а) має єдиний розв'язок;

б) має безліч розв'язків;

в) не має розв'язків.

**6.31**•• Добрати, якщо це можливо, таке значення $a$, за якого дана система має єдиний розв'язок, не має розв'язку, має безліч розв'язків:

а) $\begin{cases} 5x - y = 7, \\ ax - y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ ax - 3y = 6. \end{cases}$

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**6.32**•• Побудувати кластер кількості розв'язків системи лінійних рівнянь з двома змінними $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ у загальному вигляді.

**6.33**•• Визначити кількість розв'язків кожної системи, використовуючи відношення коефіцієнтів:

а) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 2x + 3y = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x + y = -3. \end{cases}$

**6.34**•• Розв'язати графічно систему рівнянь $\begin{cases} 4(x - 3y) + 33y = 50, \\ 5(x + 2y) - 3 = 18. \end{cases}$

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**6.35**•• Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Швидкість на дорозі»*. Турист подорожував потягом і автобусом. Швидкість потяга на 10 км / год більша за швидкість автобуса, тому за 3 год автобусом і 5 год потягом він подолав 450 км.

б) Задача *«Рахую гроші»*. За 7 зошитів і 4 ручки я заплатив / заплатила 130 грн. У магазині діє акція на такі самі зошити і ручки: 40 % – на зошити і 20 % – на ручки. Ручка стала дорожчою за один зошит на 6 грн.

Перевір себе «Як ти?»

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§6.2. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними графічно».**

# §6.3 Розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Усе що ти робиш зараз, це для твого майбутнього. Подумай про це».***

Сьогодні Кубик Блума знову тобі допоможе продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про те, як можна іншим способом розв'язувати системи двох лінійних рівнянь з двома змінними.

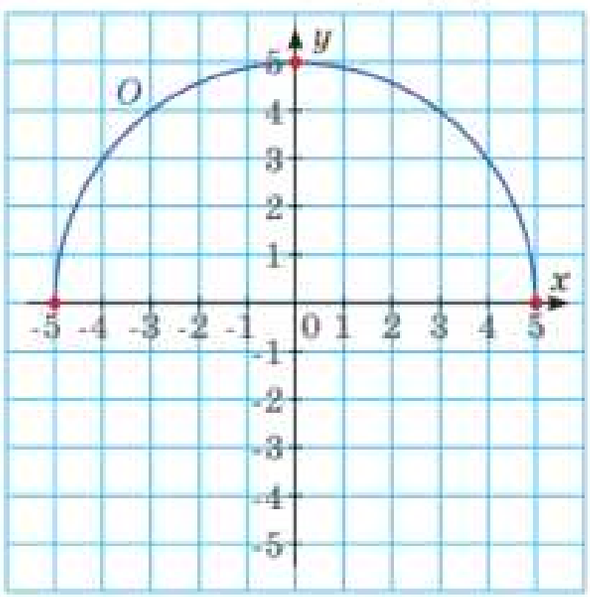
**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** п'ять точок, що належать графіку лінійного рівняння з двома змінними

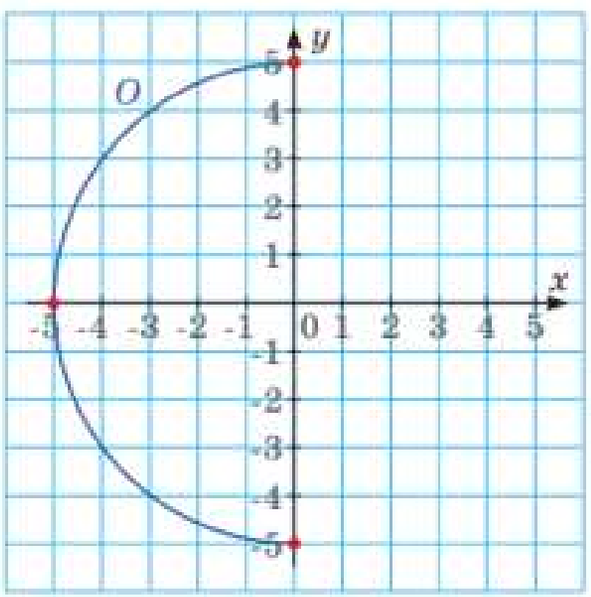
$$5x-2y=7.$$

**ПОЯСНИ,** як одночлен $4((x^2)^3)^4\cdot(-2(x^4)^4)^2$ можна подати в стандартному вигляді.

**ЧОМУ** один із побудованих графіків на малюнку 1 (а) є функцією, а інший – на малюнку 1 (б) – ні?




Мал 1, а




Мал 1, б

**ПРИДУМАЙ,** як знайти останню цифру числа $4^{45}$.

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями розв'язувати рівняння

$$\frac{x+1}{6}+\frac{2-x}{8}-\frac{x-3}{12}=\frac{1}{4}.$$

**ЗАПРОПОНУЙ** зручний для тебе спосіб пошуку всіх значень $a$, для яких одним із розв'язків рівняння

$$2(a+1)^2x-5(2a-1)^2y=7 \text{ є пара чисел } (2;5).$$

*Відповіді на запитання* Кубика Блума коротко:

*Відповіді на запитання* Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** ординату точки, яка належить графіку лінійної функції, якщо відомо значення її абсциси.

а) $y=3x-11$ для $x=5$; в) $y=\dfrac{5-7x}{8}$ для $x=6$.

б) $4x+5y=16$ для $x=-4{,}5$;

**2) Обчислити** значення виразу зручним способом.

а) $99\cdot101$; б) $49\cdot51$; в) $2{,}8\cdot3{,}2$; г) $10{,}1\cdot9{,}9$; д) $5{,}3\cdot4{,}7$.

**3) Назвати** по три пари цілих чисел, які є коренями рівняння.

а) $3x+2y=5$; в) $2x-5y=7$.

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Якщо потрібно знайти ординату точки, що належить графіку лінійної функції за відомим значенням її абсциси, чи значення функції за відомим значенням її аргумента, то це рівносильні завдання і єдиний спосіб – підставити замість x число у формулу, яка набуде вигляду рівняння, звідки знайти значення y. координати кожної точки графіка функції перетворюють формулу у правильну рівність.

**2** Для обчислення значення виразів, запропонованих у завданнях для дослідження, важливо вміти аналізувати умову. Тут у кожному добутку можна множники замінити на суму й різницю однакових чисел, і тоді застосувати формулу різниці квадратів: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Таке обчислення значно зручніше, ніж задане.

**3** Третє завдання вимагало вміння аналізувати ситуацію, щоб підібрати пари цілих чисел, які є коренями рівняння. Якщо виразити значення однієї змінної через іншу, вважаючи одну із них як відому величину, то, наприклад: $2y=5-3x$,

звідки $y=\dfrac{5-3x}{2}$, і тепер на багато зручніше вибирати такі значення $x$, щоб вираз ділився на 2.

**4*** Якби було завдання «Розв'язати рівняння в цілих числах», то тут ще більше дослідження, адже це пошук усіх пар цілих чисел, які перетворюють рівняння у правильну рівність. Тому висновку про подільність значення $y$ на 2 мало, досліджують праву частину рівності і її подільність на 2.

$$y=2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}x=2+\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}x=(2-x)+\frac{1}{2}(1-x).$$

Отже, вираз $\dfrac{1}{2}(1-x)$ буде цілим числом, якщо $(1-x)$ ділиться на 2, тобто $1-x=2k$, де $k$ – ціле число, звідки $x=1-2k$, де $k$ – ціле число.

$$y=\frac{5-3(1-2k)}{2}=\frac{5-3+6k}{2}=\frac{2+6k}{2}=\frac{2(1+3k)}{2}=1+3k.$$

Отже, розв'язками рівняння є пари цілих чисел вигляду $(1-2k;\ 1+3k)$, де $k$ – ціле число.

***Зауваж!***

Розгляньмо систему рівнянь: $\begin{cases}2y=6;\\4x-2y=14.\end{cases}$

Очевидно, що в друге рівняння системи замість $2y$ можна одразу підставити 6, і це рівняння набуде вигляду $4x-6=14$, $4x=20$, $x=5$.

Тоді $y=10$.

*Відповідь:* (5; 10).

Спосіб, коли замість одного значення змінної, підставляють інше, називають ***способом підстановки***. Ним розв'язують системи двох лінійних рівнянь з двома змінними.

Наприклад, $\begin{cases}y=2x-1,\\2x+3y=5,\end{cases}$ тоді у друге рівняння можна замість $y$ підставити вираз $(2x-1)$, і рівняння набуде вигляду:

$2x+3(2x-1)=5$.

$2x+6x-3=5$, $8x=8$, $x=1$.

Тоді $y=2x-1=2\cdot1-1=2-1=1$.

*Відповідь:* (1; 1).

***Зауваж! Це важливо!***

**АЛГОРИТМ розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки.**

**Крок 1.** Виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через іншу *(зазвичай вибирають легшу ситуацію, наприклад, коефіцієнт перед змінною дорівнює* 1; 2; 5 *тощо).*

**Крок 2.** Підставити в інше рівняння системи вираз, одержаний на першому кроці.

**Крок 3.** Розв'язати утворене рівняння з однією змінною для того, щоб знайти значення змінної, яка фігурує в рівнянні.

**Крок 4.** Підставити знайдене значення змінної у вираз, який одержали при вираженні однієї змінної через іншу (крок 1).

**Крок 5.** Знайти значення іншої змінної.

**Крок 6.** Записати відповідь.

Наприклад, розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} 3x + y = 9; \\ 8x + 2y = 24. \end{cases}$

Очевидно, що з першого рівняння легко виразити у через $x$, залишивши значення у зліва, а все інше – перенести у праву частину рівності.

$\begin{cases} y = 9 - 3x; \\ 8x + 2(9 - 3x) = 24; \end{cases}$

$8x + 18 - 6x = 24;\ 8x - 6x = 24 - 18;$
$2x = 6;\ x = 3;\ y = 9 - 3 \cdot 3;\ y = 0.$

**Відповідь:** (3; 0)

## *Тренувальні вправи*

**6.36°.** Вибрати, яка з підстановок (а–г) є правильною для системи рівнянь

$$\begin{cases} x = 4y - 5, \\ 3x + 2y = 11. \end{cases}$$

а) $3x + 2(4y - 5) = 11$;
б) $3(4y - 5) + 2y = 11$;
в) $3x + 2(5 - 4y) = 11$;
г) $3(5 - 4y) + 2y = 11$.

**6.37°.** Вибрати серед рівностей (а–г) ті, в яких допущено помилку під час підстановки однієї змінної замість іншої для розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} y = 7x + 2, \\ 5x - 4y = 17. \end{cases}$

а) $5x + 4(7x + 2) = 17$;
б) $5x - 4(7x + 2) = 17$;
в) $5x - 28x - 8 = 17$;
г) $5(7x + 2) - 4y = 17$.

Розв'язати систему рівнянь способом підстановки (6.38–6.40).

**6.38°°.** а) $\begin{cases} 6x = 24, \\ 5x - 2y = 14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x - y = 4, \\ 3y = -18. \end{cases}$

**6.39°°.** а) $\begin{cases} 5y = 30, \\ 7x - y = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 7, \\ 4x = -36. \end{cases}$

**6.40°°.** а) $\begin{cases} x = y + 4, \\ 2x - 5y = 29; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = x + 5, \\ 7x + 3y = -5. \end{cases}$

**6.41°°.** Знайти розв'язок системи рівнянь, використовуючи спосіб підстановки:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = -13, \\ 2x - 5y = 22; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 3y = -14, \\ 4x + 5y = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 10, \\ 2x - 3y = 27; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + y = -13, \\ 5x - 2y = -19. \end{cases}$

**6.42•.** Знайти координати точки перетину графіків рівнянь $x - y = 3$ та $3x + 2y = 14$, не виконуючи побудови.

**6.43•.** Знайти координати точки перетину графіків рівнянь $5x - 2y = 12$ та $x + y = 8$, не виконуючи побудови.

**6.44•.** Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = -13, \\ 2x - 5y = 22; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8x - 2y = 6, \\ 9x + 3y = 33; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ 7x + 4y = -2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x - 6y = 24, \\ 10x - 2y = 34. \end{cases}$

**6.45•.** Знайти розв'язок системи рівнянь.

а) $\begin{cases} 4(x + y) = 8y - 4, \\ 7(y + 1) = 22 + y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9(x - 2y) - 6x = -11, \\ 8(x + y) = 6y + 4. \end{cases}$

**6.46•.** Довести, що графіки рівнянь $6x + 3y = 14$ та $4x + 2y = 18$ паралельні.

**6.47••.** Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2, \\ 5x - y = 34; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6y - 5x = 1, \\ \dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{3y - x}{4} = -4\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**6.48**•• Відомо, що графіком функції $y=kx+l$ є пряма, що проходить через точки $A(2;-2)$ і $B(-3;-17)$. Придумати, як можна знайти $k$ і $l$.

**6.49**•• Визначити, для яких значень $p$ система рівнянь:

а) $\begin{cases} 3x-y=7; \\ 6x+py=11 \end{cases}$ не має розв'язків;

б) $\begin{cases} 15x+10y=30; \\ px+2y=6 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**6.50.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Рух річкою»*. Відстань між двома пристанями 72 км. Човен, рухаючись за течією, подолав цю відстань за 3 години. Власна швидкість човна – 21 км/год.

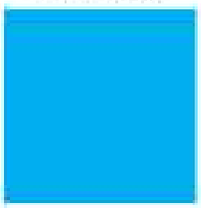
б) Задача *«Юні волонтери»*. Данилко виготовив 15 окопних свічок за 3 год, Наталка – 12 свічок за 4 год, а Іванко за одну годину зробив 4 свічки.

в) Задача *«Починаємо будівництво»*. Для будівництва гаража використовують один з двох типів фундаменту: або бетонний, або з піноблоків. Для фундаменту з піноблоків потрібно 3 кубометри піноблоків і 6 мішків цементу. Для бетонного фундаменту потрібно 3 т щебеню і 30 мішків цементу. Кубометр піноблоків коштує 800 грн, щебінь – 180 грн за тонну, мішок цементу – 60 грн.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§ 6.3. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки».**

Перевір себе
«Як ти?»



# §6.4 Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Успіх – це сума маленьких зусиль, які повторюються день у день»*** (Роберт Кольє).

Сьогодні Кубик Блума знову тобі допоможе продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування рівнянь і систем рівнянь – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про те, як можна розв'язувати систему рівнянь способом додавання.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** три будь-які пари чисел, які є розв'язками рівняння $0x-2y=10$.

**ПОЯСНИ**, як знайти точку перетину графіка рівняння $2x+by=10$ з осями координат і чи для всіх значень $b$ це можливо.

**ЧОМУ** пара чисел $(1;3)$ не є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases}2x+y=7,\\3x-y=-2\end{cases}$?

**ПРИДУМАЙ** систему рівнянь, яка матиме безліч розв'язків.

**ПОДІЛИСЯ** досвідом, як знайти точку перетину графіків двох рівнянь $4x-3y=-10$ і $2x+3y=4$, не виконуючи побудови.

**ЗАПРОПОНУЙ** дві системи рівнянь, які зручно розв'язувати способом підстановки.

*Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:*

*Відповіді на запитання Кубика Блума широко:*

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** значення виразу для $x=5$, $y=-2$:

а) $(2x-3)-(4x+5y-8)+7y$; б) $9x+5y-(-3x+8y-11)+y$;

**2) Вибрати** систему рівнянь, де рівняння НЕ містить протилежних коефіцієнтів для однойменних змінних.

а) $\begin{cases}4x-2y=8,\\3x+2y=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-5x+9y=11,\\5x-2y=10;\end{cases}$ в) $\begin{cases}7y+3x=5,\\5y-2x=-1.\end{cases}$

**3) Визначити,** серед систем (а–г) ті, що є рівносильними.

а) $\begin{cases} x+2y=5, \\ 3x-y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-3y=9, \\ 4x-12y=24; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+1{,}5y=9, \\ x-3y=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+4y=10, \\ 6x-2y=12. \end{cases}$

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Знайти значення виразу вимагає першочергового спрощення. У цьому разі вміння правильно розкривати дужки, перед якими знак «+» або «–», а далі – зведення подібних, підставляння значення замість змінної, і – обчислення утвореного числового виразу.

**2** Оскільки коефіцієнтами в загальній системі рівнянь є числа, то протилежними будуть ті, модуль яких однаковий, а знаки – протилежні, тобто $-2$ і $2$, $-5$ і $5$. Сума двох протилежних чисел завжди дорівнює нулю: $a+(-a)=0$.

**3** Якщо обидві частини рівняння ***помножити або поділити на одне й те саме, відмінне від нуля, число,*** то отримують рівняння, рівносильне даному. Тому простежуючи за такою властивістю, можна вибрати рівносильні системи рівнянь без їхнього розв'язання.

**4** Почленне додавання рівнянь системи дає можливість виключити одну зі змінних, якщо коефіцієнти при в обох рівняннях є протилежними.

***Зауваж!***

Системи рівнянь а) $\begin{cases} 4x-2y=8, \\ 3x+2y=6 \end{cases}$ і б) $\begin{cases} -5x+9y=11, \\ 5x-2y=10 \end{cases}$ відрізняються від інших тим, що у них коефіцієнти *перед однойменними змінними є протилежними числами.* Оскільки сума протилежних чисел дорівнює нулю, то цей факт використовують для розв'язування таких систем способом почленного додавання. Це означає, що потрібно виконати додавання лівих частин рівнянь і правих, утворивши нове рівняння з однією змінною, звідки знайти значення цієї змінної, а далі – шукати значення другої змінної.

Наприклад:

а) $4x-2y+3x+2y=8+6$; $7x=14$; $x=2$;

б) $-5x+9y+5x-2y=11+10$; $7y=21$; $y=3$.

Маючи значення однієї змінної, можна підставити в будь-яке рівняння системи й знайти інше значення:

а) $4 \cdot 2 - 2y = 8$, $y = 0$; б) $5x - 2 \cdot 3 = 10$, $x = 3{,}2$.

**Відповідь:** а) $(2; 0)$; б) $(3{,}2; 3)$.

***Зауваж! Це важливо!***

**АЛГОРИТМ розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання.**

**Крок 1.** Утворити протилежні коефіцієнти перед однойменними змінними за допомогою множення обидвох частин рівнянь системи на відповідні множники.

**Крок 2.** Почленно додати ліві й праві частини рівнянь.

**Крок 3.** Розв'язати отримане рівняння з однією змінною.

**Крок 4.** Підставити знайдене значення змінної в будь-яке рівняння системи і знайти відповідне значення другої змінної.

**Крок 5.** Записати відповідь.

Наприклад, розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} 3x - 5y = 2, \\ 2x + 3y = -5. \end{cases}$

Протилежними коефіцієнтами можна зробити і перед змінною $x$, і перед змінною $y$. Оскільки знаки перед змінною $y$ уже протилежні, то помножимо перше рівняння на 3, а друге – на 5.

Отримаємо рівносильну систему рівнянь: $\begin{cases} 9x - 15y = 6, \\ 10x + 15y = -25. \end{cases}$

Далі виконаємо почленне додавання і знаходження однієї змінної:

$9x - 15y + 10x + 15y = 6 + (-25)$; $19x = -19$; $x = -1$.

Підставляємо отримане значення у перше рівняння системи:

$3 \cdot (-1) - 5y = 2$; $-3 - 2 = 5y$; $5y = -5$; $y = -1$.

*Відповідь:* $(-1; -1)$.

## *Тренувальні вправи*

**6.51°.** Вибрати систему рівнянь, яку зручніше розв'язувати способом додавання:

а) $\begin{cases} 2x + y = 6, \\ 3x + y = 11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 10, \\ 2x - 8y = 27; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 3y = -14, \\ 4x + 3y = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x + y = -10, \\ 7x - 2y = -16. \end{cases}$

**6.52°.** Вибрати серед рівностей (а–г) таку, в якій правильно виконано почленне додавання рівнянь $\begin{cases}7x+5y=-14;\\-7x-4y=17.\end{cases}$

а) $7x+7x+5y-4y=-14+17$;

б) $-7x-7x-5y+4y=-14+17$;

в) $7x-7x+5y-4y=-14+17$;

г) $7x+7x+5y-4y=14-17$.

**6.53°.** Вибрати правильні твердження, щодо розв'язування системи рівнянь $\begin{cases}2x+y=4,\\3x-y=11.\end{cases}$

а) Якщо додати перше рівняння до другого, то одержимо рівняння $5x=15$.

б) Із заданої системи випливає, що $x=2$.

в) Із першого рівняння системи маємо: $y=2x+4$.

г) Розв'язком заданої системи є пара чисел $(3;-2)$.

Розв'язати систему рівнянь способом додавання **(6.54–6.56)**.

**6.54°°.** а) $\begin{cases}3x-y=6,\\2x+y=14;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-7x+2y=13,\\7x-5y=8.\end{cases}$

**6.55°°.** а) $\begin{cases}-4x-y=-9,\\6,5x+y=19;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x-2y=6,\\x+2y=-18.\end{cases}$

**6.56°°.** а) $\begin{cases}x+3y=-5,\\-3y-4x=23;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-3y-x=5,\\7x+3y=1.\end{cases}$

Знайти розв'язок системи, використовуючи спосіб додавання **(6.57–6.58)**.

**6.57•.** а) $\begin{cases}x-y=3,\\3x+2y=-21;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-3y=-1,\\4x-8y=12;\end{cases}$

б) $\begin{cases}3x-6y=33,\\x-3y=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2x+5y=-13,\\x-2y=16.\end{cases}$

**6.58•.** а) $\begin{cases}2x-3y=1,\\x+3y=5;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-3y=-5,\\-x+4y=7;\end{cases}$

б) $\begin{cases}-3x+2y=10,\\3x+y=5;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x-8y=11,\\4x-6y=17.\end{cases}$

**6.59*.** Визначити системи лінійних рівнянь з двома змінними, що мають однаковий розв'язок.

а) $\begin{cases} x+y=1, \\ x-y=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 4x-3y=25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=-1, \\ x-y=-7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-5y=-3, \\ 3x+2y=5. \end{cases}$

**6.60*.** Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x-3y=-1, \\ 3x+4y=24; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-4y=11, \\ 4x+6y=26; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x+2y=2, \\ x+4y=-2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x-5y=-22, \\ 3x+2y=18. \end{cases}$

**6.61**.** Знайти розв'язок системи:

а) $\begin{cases} 2(3x+2y)+9=8x+20, \\ 2x+10=4-(6x+3y); \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3(2x+y)-26=3x-2y, \\ 15-(x-3y)=2x+5. \end{cases}$

**6.62**.** Знайти розв'язок системи:

а) $\begin{cases} 2(3x-y)=2x-10, \\ 5-(x-2y)=4x+13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -3(2x-y)-3=2x-5y, \\ 7-(x+2y)=-5x+18. \end{cases}$

**6.63**.** Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{x+10}{6}=\dfrac{y+9}{3}, \\ 3y+7x=24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-10}{3}=\dfrac{y+6}{2}, \\ 4x+5y=-12. \end{cases}$

**6.64**.** Розв'язати систему рівнянь:

а) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{y-2}{3}=2, \\ \dfrac{x-1}{4}-\dfrac{y+1}{3}=4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=6, \\ \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=6. \end{cases}$

### *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**6.65**.** Знайти добуток коефіцієнтів $k_1$ і $k_2$, якщо відомо, що пряма $k_1x-y=b_1$ проходить через точки $A(6;1)$ і $B(0;5)$, а пряма $k_2x-y=b_2$ – через точки $C(3;3)$ і $K(1;0)$.

**6.66**•• З'ясувати для яких значень $a$ система рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ -2x + ay = 6 \end{cases}$ не має розв'язків;

б) $\begin{cases} 5x + 10y = -6, \\ ax - 10y = 6 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**6.67.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Солодощі в супермаркеті»*. У супермаркеті за стандартом розфасовано окремо цукерки, окремо печиво. Три пакети цукерок на 60 г важчі, ніж два пакети печива, а п'ять таких же пакетів цукерок та чотири пакети печива важать 1 кг 860 г.

б) Задача *«Притулок для тварин»*. Волонтери в притулок для тварин закупили $x$ упаковок корму для котів і $y$ упаковок корму для собак на суму 5400 грн. Відомо, що 3 упаковки корму для котів дорожчі від 4 упаковок корму для собак на 300 грн.

в) Задача *«Оплата за природній газ»*. Українські споживачі природного газу крім щомісячної абонентної плати за спожитий газ сплачують ще за його транспортування. Плата за транспортування газу є сталою щомісячною платою протягом календарного року. А вираховується вона так: середньомісячна кількість спожитого газу множиться на тариф. Щомісячний об'єм спожитого газу поданий у таблиці, де тариф за 1 кубічний метр блакитного палива для побутових споживачів коштує 7,96 гривень, а тариф на послуги з транспортування природного газу складає 2,11 грн. за 1 кубометр газу.

| Січень | Лютий | Березень | Квітень | Травень | Червень | Липень | Серпень | Вересень | Жовтень | Листопад | Грудень |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 150 | 185 | 102 | 54 | 22 | 25 | 18 | 24 | 32 | 64 | 124 | 220 |

Перевір себе «Як ти?»

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§6.4. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання».**

# §6.5 Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними різними способами




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Багато чого не зробиш, поки не вивчишся. Але багато треба зробити, щоб навчитись»*** (Конфуцій).

Сьогодні Кубик Блума знову тобі допоможе продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та узагальнимо свої вміння застосовувати будь-який зі способів розв'язування системи рівнянь на прикладах.

**Отже, Кубика Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** значення суми $a+b$, де $(a;\ b)$ – розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 2x-4y=3, \\ 3x+4y=7? \end{cases}$

**ПОЯСНИ** алгоритм розв'язання системи рівнянь $\begin{cases} 3x-2y=3, \\ -2x+5y=7 \end{cases}$ способом додавання.

**ЧОМУ** пара чисел $(1;3)$ не є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x+y=7; \\ 3x-y=-2? \end{cases}$

**ПРИДУМАЙ** систему рівнянь, яка не має розв'язків.

**ПОДІЛИСЯ** досвідом, як визначити значення $x$ у системі двох лінійних рівнянь $\begin{cases} 12x-3y=-26, \\ -5x+3y=5. \end{cases}$

**ЗАПРОПОНУЙ** систему рівнянь, яку зручно розв'язувати способом додавання.

*Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:*

*Відповіді на запитання Кубика Блума широко:*

## *Досліди у партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Вибрати** системи лінійних рівнянь з двома змінними.

а) $\begin{cases} 2x - y^2 = 1, \\ -7x + y = -6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x - 4y = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 3y = 6, \\ x + y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -x + 6y = 7, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

**2) Вибрати** систему рівнянь серед (а–в), в якій правильно здійснено перехід від заданої системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 6, \\ -x + 6y = 1. \end{cases}$

а) $\begin{cases} y = 6 - x, \\ -x + 6 - x = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 6 - x, \\ -x + 6(6 - x) = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = 6 + x, \\ -x - 6(x - 6) = 1. \end{cases}$

**3) Вибрати** систему рівнянь, яку можна розв'язувати способом додавання без додаткових кроків перетворень.

а) $\begin{cases} 9x - 4y = 6, \\ 2x + 5y = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -6x + 3y = 12, \\ 6x - 2y = -8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -2y + 4x = 8, \\ 5y - 2x = -3. \end{cases}$

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ І ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Система рівнянь є лінійною, коли кожне з її рівнянь має вигляд: $ax + by = c$, де $a$, $b$, $c$ – дані числа.

**2** Першим кроком переходу під час розв'язування систем рівнянь способом підстановки є вираження однієї змінної через іншу. Цей процес виконують, використовуючи властивості рівнянь.

**3** Кількість розв'язків системи лінійних рівнянь з двома змінними залежить від коефіцієнтів перед змінними, а саме:

**1** система не має розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

**2** система має єдиний розв'язок, якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;

**3** система має нескінченне число розв'язків, якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

## Зауваж!

**Системи лінійних рівнянь з двома змінними**

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

**Способи розв'язування**

- **Графічний спосіб**
- **Спосіб підстановки**
- **Спосіб додавання**

## Зауваж! Це важливо!

Розв'яжемо одну й ту ж саму систему двох лінійних рівнянь різними способами: $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x - 2y = 6? \end{cases}$

| $x$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|
| $y$ | $4$ | $2$ |

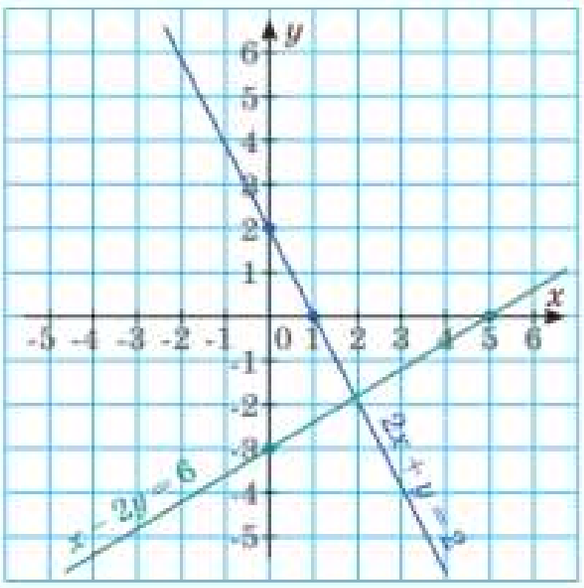
**1** **Графічний метод:**

1) $2x + y = 2$.

2) $x - 2y = 6$.

| $x$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-2$ |

*Відповідь:* **(2; −2)**




**2** **Спосіб підстановки.**

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x - 2y = 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - 2x, \\ x - 2(2 - 2x) = 6. \end{cases}$$

$x - 4 + 4x = 6$;

$x + 4x = 6 + 4$; $5x = 10$; $x = 2$.

$y = 2 - 2 \cdot 2$;

$y = -2$;

**Відповідь:** $(2; -2)$

**3** **Спосіб додавання.**

$$\begin{cases} 2x + y = 2, /(\cdot 2) \\ x - 2y = 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 4, \\ x - 2y = 6. \end{cases}$$

$4x + x + 2y - 2y = 4 + 6$;

$5x = 10$; $x = 10 : 5$; $x = 2$.

$2 \cdot 2 + y = 2$; $4 + y = 2$;

$y = 2 - 4$; $y = -2$.

**Відповідь:** $(2; -2)$

## *Тренувальні вправи*

**6.68°.** Вибрати систему лінійних рівнянь з двома змінними:

а) $\begin{cases} 3x^2 - 2y = 5, \\ \dfrac{x}{4} + 2y = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -8x - y^2 = 0, \\ 8x + y = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2y - 3x = 2, \\ 4x + y = 13; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 9x^2 - y = 12, \\ x + 4y = 6. \end{cases}$

**6.69°.** Вибрати, яка серед рівностей (а–г) є правильно застосованою підстановкою для розв'язування системи рівнянь

$\begin{cases} y = -3x - 1, \\ 2x + 4y = 16? \end{cases}$

а) $2x + 4(-3x - 1) = 16$;

б) $2(-3x - 1) + 4y = 16$;

в) $2x - 4x - 4 = 16$;

г) $2x + 12x + 4 = 16$.

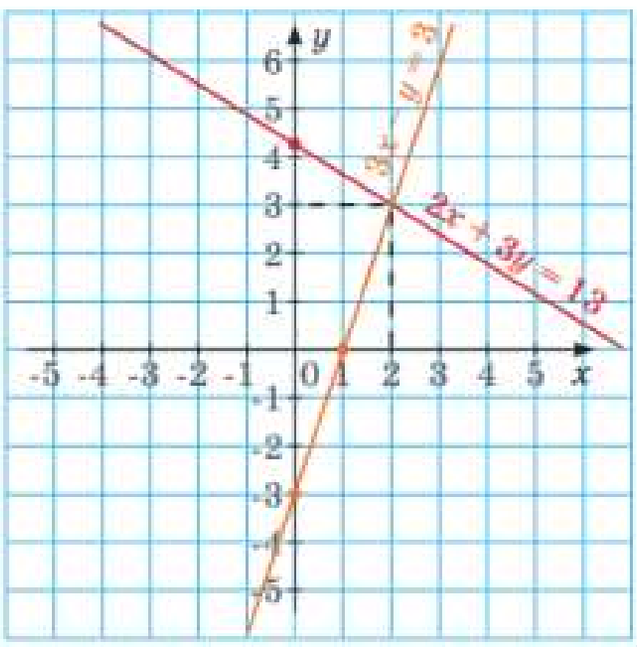
**6.70°.** Записати пару чисел, яка є розв'язком системи рівнянь:

а) (3; 2)

б) (2; −3)

в) (2; 3)

г) (3; 1)




**6.71°.** Вибрати системи, які зручніше розв'язувати способом додавання:

а) $\begin{cases} 0,7x - 2y = 3, \\ -2,7x + 2y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x - 3y = 27; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - 3y = -14, \\ 4x + 3y = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4x + y = -10, \\ 7x - 2y = -16. \end{cases}$

Розв'язати системи рівнянь різними способами (**6.72–6.73**).

**672°°.**

Графічний: а) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = -2; \end{cases}$

Підстановки: б) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + y = 13; \end{cases}$

Додавання: в) $\begin{cases} x + 3y = 14, \\ 4x - 3y = 11. \end{cases}$

**6.73°°.** Графічний Підстановки Додавання

а) $\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=2, \\ x+2y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7x-2y=4, \\ 7x+2y=10. \end{cases}$

Розв'язати системи рівнянь будь-яким із способів (6.74–6.77).

**6.74°°.**

а) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+2y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x-y=-7, \\ x+2y=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y=5, \\ x+y=-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x-2y=16, \\ 5x+2y=4. \end{cases}$

**6.75•.**

а) $\begin{cases} 2x-7y=3(x-3y)-4, \\ 3x+5y=12-2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-1=-2(x+2y), \\ 4x-3y=1+2(2,5x+2y). \end{cases}$

**6.76•.**

а) $\begin{cases} 6x-3(y+4)=5x-2(2y+4,5), \\ -2(x+1)+6y=-3x+2(2y+1); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5(x+1)-3y=2(2x-y)+8, \\ 7x-3(y+2)=6x-2(2,5y+1). \end{cases}$

**6.77•.** Увідповіднити систему рівнянь (1–4) і суму $x_0+y_0$ (А–Д) її розв'язків $(x_0;\ y_0)$:

| Система рівнянь | Сума $(x_0+y_0)$ |
|---|---|
| 1 $\begin{cases} 4(x+y)-5(x-y)=15, \\ 5(x+y)-4(x-y)=21; \end{cases}$ | А 2 |
| 2 $\begin{cases} 8+5x=3(4-y), \\ 5-(2x+3)=4y-8; \end{cases}$ | Б 4 |
| 3 $\begin{cases} 4-2x=4(2y+5), \\ 5(x+y)=-10; \end{cases}$ | В 5 |
| 4 $\begin{cases} 3(x-6)=4x-10y, \\ 6x-7=2(y-2)+5. \end{cases}$ | Г −5 |
| | Д −2 |

**6.78•.** Визначити системи лінійних рівнянь з двома змінними, що мають однаковий розв'язок.

а) $\begin{cases} x+2y=7, \\ 3x-2y=3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+3y=17, \\ 3x-2y=-7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y=6, \\ x-y=-4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 4x-3y=17. \end{cases}$

**6.79••.** Розв'язати системи лінійних рівнянь з двома змінними:

а) $\begin{cases} 2(x+7)-y=15, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{6y}{5}=4{,}6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y=\dfrac{13}{4}, \\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}y=\dfrac{7}{4}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-10y=-13, \\ \dfrac{5-6x}{11}+\dfrac{4y+1}{5}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y+1}{4}=-1, \\ 3x+5y=-4. \end{cases}$

### *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**6.80••.** До рівняння $2x-y=3$ підібрати друге рівняння так, щоб отримати систему рівнянь, яка не має розв'язків.

**6.81••.** Пара чисел $(1{,}5;-2)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x-by=3; \\ ax+4y=-5. \end{cases}$ Знайти значення $a$ та $b$.

### *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**6.82••.** Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Туристи»*. У понеділок туристи пройшли $x$ км, у вівторок – на 20% більше, ніж у понеділок, а в середу таку саму відстань, як у понеділок і вівторок разом, а за три дні туристи подолали 17,6 км.

б) Задача *«Вітамінний коктейль»*. Щоб приготувати корисний для здоров'я коктейль, треба змішати молоко, малину, полуницю, чорницю та мед. Причому, беручи певну кількість молока, відповідно визначають від нього: 0,6 частин малини, 0,3 частин полуниці, 0,75 – чорниці та 0,15 – меду.

### *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§6.5. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними різними способами».**

# §6.6 Розв'язування геометричних задач, що моделюються системою двох лінійних рівнянь з двома змінними




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Бути зібраним, цілеспрямованим і наполегливим, а також... уважним!»***.

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування задач за допомогою систем двох лінійних рівнянь з двома змінними – «чи ти можеш?».

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** основні способи розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними.

**ПОЯСНИ,** як розв'язувати систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання.

**ЧОМУ** система двох лінійних рівнянь з двома змінними $\begin{cases} x+3y=5, \\ 3x+9y=15 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

**ПРИДУМАЙ** рівняння за такою умовою: «В одній коробці $x$ кг печива, а в другій $y$ кг печива. Якщо з першої коробки перекласти в другу 3 кг печива, то в коробках печива стане порівну».

**ПОДІЛИСЯ** алгоритмом розв'язування задач, що моделюються лінійним рівнянням з двома змінними.

**ЗАПРОПОНУЙ** умову задачі, математичною моделлю якої будуть одночасно два рівняння $x-y=5$ та $2(x+y)=42$.

*Відповіді на запитання* Кубика Блума коротко:

*Відповіді на запитання* Кубика Блума широко:

## *Досліди у партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Записати** мовою математики (у вигляді рівності):

а) $a$ більше за $b$ на 3; б) $a$ більше за $b$ утричі

в) якщо $a$ зменшити на 3, а $b$ збільшити на 3, то отримаємо рівні вирази.

**2) Обчислити** різницю $x_0 - y_0$, де $(x_0; y_0)$ – розв'язок системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x - y = 11, \\ 5x + y = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 3x + y = 4 \end{cases}$

**3) Визначити,** скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} ax - 3y = 5, \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$ залежно від значень коефіцієнта $a$.

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Уміння коротко записати умову задачі сприяє створенню правильної математичної моделі до задачі. Зокрема, якщо одне число «на» якесь число більше (або менше) за інше, то це різниця, якщо більше (або менше) «у» кілька разів за інше, то це добуток (або частка). Якщо ж «вирази рівні», то це рівняння.

**2** Уміння застосовувати будь-який спосіб до розв'язування систем рівнянь допомагає розв'язати їх швидко і правильно. Досить часто у завданнях потрібно знайти суму, чи добуток значень пари чисел, що є розв'язком системи, тому завжди читають вимоги до завдань, щоб дати відповідь на запитання.

**3** Уміння розв'язувати системи лінійних рівнянь з двома змінними дозволяє розв'язувати різноманітні текстові задачі, зокрема геометричного змісту. Під час аналізу змісту задачі створюється математична модель, а саме система рівнянь з двома змінними. Розв'язавши її, знаходимо розв'язки, що відповідають умові та вимогам задачі.

***Пригадай! Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою лінійного рівняння!***

### *Зауваж!*

Аналогічно до алгоритму розв'язування текстової задачі за допомогою лінійного рівняння можна скласти ***алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи двох лінійних рівнянь з двома змінними:***

**1** Проаналізувати умову задачі.

**2** Позначити дві невідомі величини, наприклад, через $x$ і $y$.

**3** Створити математичну модель даної задачі у вигляді системи двох рівнянь з двома змінними.

**4** Розв'язати отриману систему рівнянь.

**5** Проаналізувати її розв'язки.

**6** Записати відповідь.

***Зауваж! Це важливо!***

Розгляньмо застосування вище згаданого алгоритму для розв'язування задачі геометричного змісту.

Задача. Периметр прямокутника дорівнює 30 см, а довжина однієї сторони більша за довжину іншої на 6 см. Знайти довжину сторін прямокутника.

*Розв'язання.*




**1** Аналіз умови задачі: невідомими і є довжини сторін прямокутника.

**2** Позначимо через $x$ см – довжину однієї сторони прямокутника, через $y$ см – довжину іншої його сторони.

**3** Складемо математичну модель.

За формулою периметра прямокутника $P=2(a+b)$, де $a$ і $b$ – сторони прямокутника, маємо рівняння: $2(x+y)=30$.

Оскільки довжина однієї сторони більша за довжину іншої на 6 см, маємо ще одне рівняння: $x-y=6$. Отримали математичну модель задачі – систему двох лінійних рівнянь з двома змінними:

$$\begin{cases} 2(x+y)=30, \\ x-y=6. \end{cases}$$

Маючи математичну модель – систему рівнянь з двома змінними, знаходимо розв'язки цієї геометричної задачі.

$$\begin{cases} 2(x+y)=30 \,|:2, \\ x-y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=15, \\ x-y=6 \end{cases} \; +$$

$$2x=21,$$

$$x=10{,}5;$$

$10{,}5-y=6$; $y=10{,}5-6$; $x=4{,}5$.

Отже, 10,5 см та 4,5 см – довжини сторін.

**Відповідь:** 10,5 см, 4,5 см.

## *Тренувальні вправи*

**6.82°.** Периметр прямокутника дорівнює 34,2 см. Знайти довжини його сторін, якщо одна з них на 1,8 см коротша від іншої.

**6.83°.** Довжина бічної сторони рівнобедреного трикутника на 8 см менша від довжини основи. Знайти довжину основи трикутника, якщо периметр трикутника – 41 см.

**6.84°.** Периметр паралелограма – 60 см. Довжина однієї його сторони більша за довжину другої на 10 см. Знайти довжини сторін паралелограма.

**6.85°.** Градусна міра одного з кутів трикутника – 80°, а різниця двох інших дорівнює 40°. Знайти невідомі градусні міри кутів трикутника.

**6.86°°.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 57,3 дм. Довжина бічної сторони на 6,6 дм більша за довжину основи. Знайти довжини сторін трикутника.

**6.87°°.** Градусна міра одного з кутів, що утворилися на перетині двох прямих, на 50° менша від градусної міри іншого кута. Знайти градусні міри обох цих кутів.

**6.88°°.** Змоделювати математично задачу за її умовою, заданою таблицею, та розв'язати цю задачу.

| | Сторона 1-го квадрата | Сторона 2-го квадрата | Сума периметрів (см) |
|---|---|---|---|
| Було | $x$ | $y$ | 60 |
| Стало | $2x$ | $y-3$ | 80 |

**6.89•.** Периметр прямокутника дорівнює 56 см. Якщо дві протилежні його сторони збільшити на 12 см, а дві інші зменшити на 4 см, то площа прямокутника збільшиться на 48 см$^2$. Знайти сторони прямокутника.

**6.90•.** Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а різниця периметрів квадратів, побудованих на двох його сусідніх сторонах – 12 см. Знайти сторони прямокутника.

**6.91•.** Периметр прямокутника дорівнює 56 см. Якщо одну його сторону зменшити на 3 см, а другу – на 2 см, то його площа зменшиться на 60 см$^2$. Знайти сторони прямокутника.

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**6.92••.** Придумати, як поділити відрізок завдовжки 81 см на дві частини так, щоб менша частина становила 80 % від більшої.

**6.93**••. Знайти периметр рівнобедреного трикутника, якщо його основа більша за бічну сторону на 3 см і менша від суми бічних сторін на 4 см.

## *Спробуй сформувати запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**6.94**••. Скласти запитання до умов задач.

а) Задача *«Облаштування клумби»*. Матвій вирішив облаштувати клумбу у формі трапеції. Відомо, що одна її сторона – 3 метри, друга – на 1 м більша за першу, третя – у 3 рази менша від другої, а четверта на 1 м довша за першу і третю разом.

б) Задача *«Тренування в басейні»*. Басейн для тренувань команди з плавання має периметр 150 м. Довжина коротшої сторони басейну – 25 м. Щоб виграти конкурс плавець щоденно повинен пропливати мінімум 8 разів в обидва боки вздовж довшої сторони басейну.

в) Задача *«Дослідна станція»*. На ділянці прямокутної форми дослідної станції висадили пагони різних видів кущів аґрусу та смородини, дотримуючись вимог, що відстань між кущами має становити 1 м 20 см, а між рядами – 2 м.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§ 6.6. Розв'язування геометричних задач, що моделюються системою двох лінійних рівнянь з двома змінними».**

# § 6.7 Система лінійних рівнянь як математична модель компетентнісно орієнтованих задач




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Старайся – і ти досягнеш успіху!»***

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак навчимося створювати математичну модель систему лінійних рівнянь – для компетентнісно орієнтованих задач та розв'язувати їх – «чи ти можеш?».

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ**, які ти знаєш способи розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними.

**ПОЯСНИ**, як розв'язати текстову задачу за допомогою систем лінійних рівнянь з двома змінними.

**ЧОМУ** пара чисел $(7; 5)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x + 2y = 31. \end{cases}$$

**ПРИДУМАЙ** словесну модель задачі за її математичною моделлю

$$\begin{cases} 8x - 4y = 84, \\ 5y - 7x = 3. \end{cases}$$

**ПОДІЛИСЯ** своїм вмінням розв'язувати графічно систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x - y = 5, \\ 3x + y = -1. \end{cases}$

**ЗАПРОПОНУЙ**, як заповнити пропуски так, щоб отримані записи були правильними (спосіб підстановки)

$$\begin{cases} x - 2y = 4, \\ 2x - 5y = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \ldots, \\ 2 \cdot (\ldots) - 5y = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \ldots, \\ y = \ldots \end{cases}$$

*Відповіді на запитання* Кубика Блума коротко:

*Відповіді на запитання* Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

1) **Знайти** значення параметра $a$, при якому прямі $2x-y=6$ і $x+2y=a$ перетинаються в точці, що лежить на осі:

а) абсцис; б) ординат?

2) **Придумати** рівняння, яке б разом із рівнянням $x+2y-5=0$ утворювало систему лінійних рівнянь з двома змінними, яка:

а) має один розв'язок; в) не має розв'язків.

б) має безліч розв'язків;

3) **Визначити,** яким способом можна розв'язати систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 5, \\ 2x + y^2 = 7. \end{cases}$$

## *Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Якщо точка лежить на осі $Ox$, то значення $y=0$. Тому, підставляючи в рівняння замість у нуль, отримують рівняння з однією змінною, звідки шукають її значення. Точка для обох прямих спільна, тому її координати задовольняють і те рівняння, яке містить параметр, звідки його і отримують.

**2** Утворити систему, яка має один розв'язок, не має розв'язків або має безліч – це уміння використовувати коефіцієнти й опис, зроблений у попередньому параграфі.

**3** Варто знати, що відомі нам способи розв'язування систем лінійних рівнянь застосовуються не лише для лінійних рівнянь.

### *Зауваж!*

**Пригадай! Компетентнісними** називають задачі з різних галузей діяльності людини, які потребують від неї вміння використовувати набуті знання на практиці.

***Компетентнісно орієнтовані задачі*** – це задачі, метою розв'язування яких є розв'язання стандартної або нестандартної ситуації з обов'язковим використанням математичних знань.

Уміння бачити і застосовувати математику в реальному житті дозволяє вирішувати прикладні завдання у різних сферах діяльності, будувати математичні моделі для вирішення проблем.

Розгляньмо задачі, в яких системи лінійних рівнянь використовують як математичні моделі реальних ситуацій, на прикладі компетентнісно орієнтованої задачі, яка популяризує культурні надбання українського народу.

***Зауваж! Це важливо!***

**Задача.** Для посіву червоного буряку мама виділила ділянку прямокутної форми. Коли Назар додав довжини трьох її сторін, то отримав 33 м, а коли Надія додала довжини трьох інших сторін, то отримала 21 м. Визначити розміри ділянки.

*Розв'язання.*

**1** Аналіз умови задачі: невідомими і шуканими є розміри ділянки – довжина і ширина прямокутника.

**2** Позначення невідомих величин: нехай $x$ м – довжина прямокутника, $y$ м – його ширина.

**3** Створення математичної моделі:
за умовою, сума довжин трьох сторін $2x+y=33$, а сума довжин трьох інших сторін – це інше рівняння: $x+2y=21$.
Отже, маємо систему рівнянь: $\begin{cases} 2x+y=33, \\ x+2y=21. \end{cases}$

**4** Розв'язуємо отриману систему:

$$\begin{cases} 2x+y=33 \mid \cdot(-2), \\ x+2y=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x-2y=-66, \\ x+2y=21 \end{cases} \quad +$$

$$-3x=-45,$$

$$x=15.$$

$2\cdot 15+y=33$, $y=33-30$, $y=3$.

**5** Робимо висновок: 15 м, 3 м – розміри ділянки.

**6** *Відповідь:* 15 м; 3 м.

## *Тренувальні вправи*

**6.95°.** Поле площею 400 га поділили на дві частини так, що площа однієї з них на 10 га більша за площу другої. Знайти площі обох частин.

**6.96°.** У сараї є кури і кролі. У них 50 голів і 160 ніг. Знайти, скільки курей і скільки кролів у сараї.

**6.97°.** У змаганнях з бігу взяли участь 225 осіб. Кількість учасників / учасниць, які випередили Дарину, втричі менша, ніж кількість осіб, яких випередила Дарина.

а) Скласти математичну модель задачі та обчислити кількість учасників / учасниць, що випередили Дарину.

б) Які з фруктів ви б порадили з'їсти Дарині, щоб відновити втрачені калорії, якщо за годину бігу вона витрачає 532 ккал, а забіг тривав 15 хвилин?

**6.98°.** Туристична група здійснила похід на 14 човнах. Частина човнів були двомісними, а частина – тримісними. Скільки було двомісних і скільки тримісних човнів, якщо група складалася з 37 туристів та туристок й усі місця були зайняті?

**6.99°.** Тетянка і Марійка допомагали мамі ліпити пиріжки. Якби Тетянка зліпила на 5 пиріжків більше, то у неї було б удвічі більше, ніж у Марійки, а якщо б на 4 менше, то удвічі менше, ніж у Марійки.

а) Скільки пиріжків зліпила Тетянка і скільки Марійка?

б) Хто і на скільки більше зліпив пиріжків наступного дня, якщо вони працювали з такою ж продуктивністю і зліпили разом 52 пиріжки?

**6.100°°.** На складі було 1500 м³ березових і соснових дров. За перший місяць використали 15 % соснових і 20 % березових дров, а разом – 270 м³. Скільки соснових і скільки березових дров було на складі?

**6.101°°.** Два автоматичні верстати за 8 год спільної роботи виготовляють 2000 деталей. Перший верстат за 2 год і другий за 3 год разом виготовляють 60 деталей. Скільки деталей виготовляє за годину кожний верстат?

**6.102°°.** Микола з татом змагаються у їзді на велосипеді. Якщо вони одночасно вирушають у протилежних напрямках, то через 2 хв відстань між ними стає 1 км, а якщо в одному напрямку – то за такий самий час тато випереджає Миколу на 200 м.

а) Знайти, з якою швидкістю рухається Микола і з якою тато.

б) Обчислити середнє арифметичне швидкостей Миколи й тата. Виразити отриманий результат у км/год.

**6.103 ·.** Молоко однієї корови містить 5 % жиру, а іншої – 3,5 %. Змішавши молоко обох корів, одержали 10 л молока, жирність якого дорівнює 4 %. Скільки літрів молока від кожної корови для цього використали?

**6.104** · . Микола Петрович отримав премію в розмірі 1000 гривень. Гроші він вирішив покласти в банк на депозитний рахунок. Стабільний банк А пропонує відсоток дещо менший, ніж новостворений банк С. В банку А він отримає річних на 200 гривень менше, ніж в банку С. Якщо гроші на два депозити він розділить порівну, то річний прибуток становитиме 1700 гривень. Які відсотки пропонують банки Миколі Петровичу?

**6.105** · . Звичайна лампа розжарювання споживає за 2 год на 145 Вт електроенергії більше, ніж енергозберігаюча за 3 год. Якщо їх використовувати разом, то за 8 год вони споживуть 920 Вт електроенергії.

а) Скільки електроенергії споживає лампа розжарювання?

б) Скільки електроенергії заощадить мешканець будинку за 8 год, якщо використовуватиме лише енергозберігаючі лампи?

**6.106** · . На рахунку мобільного телефону Максима було 160 грн. Після кількох хвилин розмов з Марійкою та Оксанкою у нього залишилося 135 грн. Розмова з Оксаною була вдвічі довшою за час розмови з Марійкою. Скільки хвилин тривала розмова з кожною із дівчат, якщо вартість 1 хвилини розмови складає 25 к.?

### *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**6.107** ·· . Для яких значень $a$ і $b$ розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax - y = 7, \\ x + by = -5 \end{cases}$ буде пара чисел: а) $(2; -1)$ ; б) $(3, 8)$?

**6.108** ·· . Артем придбав для друзів 2 шоколадні батончики та 2 Кіндер Сюрпризи, заплативши за все 80 гривень. Кіндер Сюрприз на 12 гривень дорожчий за шоколадний батончик.

а) Скільки коштує 1 шоколадний батончик і 1 Кіндер Сюрприз?

б) Яка маса одного шоколадного батончика і одного Кіндер Сюрприза, якщо 3 батончики і 4 Кіндери важать 194 грами, а 4 батончики і 2 Кіндери – 192 грами.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**6.109**••. Скласти запитання до умов задач.

а) Задача «Ангели-обереги». Коробка, що має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 25 см, 20 см і 15 см, заповнена кубиками з ребром 5 см, в кожному з яких Ангели-обереги для воїнів ЗСУ.

б) задача «Банківські розрахунки». Вкладник поклав до банку на два різних рахунки 12 000 грн. За першим з них банк виплачує 6 % річних, а за другим – 8 % річних. Через рік вкладник отримав 800 грн відсоткових грошей. Скільки грошей він поклав на кожний рахунок?

в) задача «Омріяний велосипед». Василько планує з грошей, отриманих на день народження та заощаджених кишенькових протягом двох місяців купити велосипед за 7000 грн. З дня народження він має 40 % суми, а щоденно він відкладав четвертину від отриманих у батька 100 грн.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§ 6.7. Система лінійних рівнянь як математична модель компетентнісно орієнтованих задач».**

# §6.8* Дослідження та розв'язування систем лінійних рівнянь із параметром.




Привіт! Ти унікальним стати бажаєш?
Логіку гарну маєш! Звісно, добре пам'ятаєш!
Щоб математичним генієм стати,
Треба з «Параметром» як з другом спілкуватись:
Всі таємниці його пізнати
І до вершини «Олімпу знань» піднятись.
Загадай!
Першу сходинку Ти вже подолав / подолала.
Параметр у лінійних рівняннях тут опанував/опанувала.
Пам'ятай!
Ще треба системи параметричних рівнянь сміло розв'язати,
Дослідження кількості коренів, власне, презентувати.
І тоді ж, Ти з «Параметром» – просто на ти,
Тож мерщій, юний Друже, біжи до мети.

Пропоную девіз для навчання: ***«Будь з параметром на «Ти», щоб розв'язки будь-якої системи міг/могла ти знайти».***

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» застосувати знаюче і вміюче для рівнянь із дослідженням, ознайомишся з новими підходами до аналізу ситуацій.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** серед перелічених систем лінійних рівнянь ту, що має єдиний розв'язок:

а) $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 3x+2y=4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 4x+6y=6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ x+1{,}5y=3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x+4{,}5y=7, \\ 2x+3y=12. \end{cases}$

**ПОЯСНИ** за яких умов система лінійних рівнянь з двома невідомими:

а) має безліч розв'язків;

б) не має розв'язків.

**ЧОМУ** система рівнянь $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=4 \end{cases}$ має єдиний розв'язок? Що є графічним зображенням системи лінійних рівнянь?

**ПРИДУМАЙ** за яких a і b система рівнянь $\begin{cases} ax+2y=4 \\ 4x+by=8 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

**ПОДІЛИСЯ** вміннями розв'язувати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 0,1x + 3y = 5 \\ 0,3 - 7y = -1 \end{cases}$ способом додавання. Вкажи його алгоритм.

**ЗАПРОПОНУЙ** математичну модель прикладної задачі та знайди її розв'язок: відстань між двома містами 53 км. Із них назустріч один одному вирушили 2 велосипедисти і зустрілися через 2 години. Знайдіть швидкість кожного, якщо другий за 3 години проїжджає на 17 км більше, ніж перший за 2 год.

Самоперевірка

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

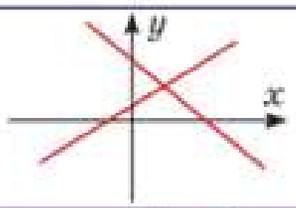
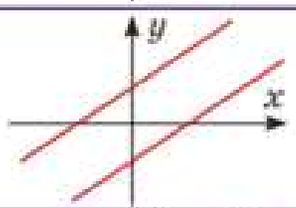
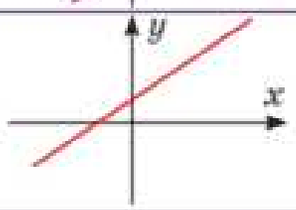
## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

Системою двох лінійних рівнянь з двома невідомими $x$ і $y$ називають систему рівнянь вигляду $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$

де $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ – довільні числа.

Дослідити систему означає за її коефіцієнтами встановити, який із випадків має місце:

1. система має єдиний розв'язок;
2. система не має розв'язків;
3. система має безліч розв'язків.

| Характеристика системи лінійних рівнянь | Графічна ілюстрація | Залежність між коефіцієнтами |
|---|---|---|
| Система має єдиний розв'язок *(прямі перетинаються)* |   | $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ |
| Система не має розв'язків *(прямі паралельні)* |   | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ |
| Система має безліч розв'язків *(прямі збігаються)* |   | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ |

Дослідити систему рівнянь означає встановити:

- чи є система визначеною, тобто має єдиний розв'язок, і коли;
- чи є система несумісною, тобто не має розв'язків, і коли;
- чи має вона безліч розв'язків, і коли.

Нехай дано систему лінійних рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, де $x$, $y$ – невідомі; $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ – параметри.

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними є така пара чисел (x;y), яка при підстановці в кожне з рівнянь даної системи перетворює на правильні рівності.

Графіком лінійного рівняння з двома змінними є пряма. Геометричною інтерпретацією системи двох лінійних рівнянь є дві прямі, що перетинаються, дві паралельні прямі або дві прямі, що співпадають.

Якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, тобто прямі, що характеризують відповідні рівняння, перетинаються, тоді система має єдиний розв'язок.

Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, тобто прямі, що характеризують відповідні лінійні рівняння з параметром, паралельні, тоді система не має розв'язків.

Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, тобто прямі, що характеризують відповідні лінійні рівняння з параметром, співпадають, тоді система має безліч розв'язків.

При розв'язуванні систем лінійних рівнянь з параметром можна використати **метод Крамера правило обчислення коренів лінійної системи за допомогою визначників,** а також способом, дослідження розв'язків залежно від них – одне з найкращих відкриттів у алгебрі.

*Зауваж!*

Метод Крамера – правило обчислення розв'язків лінійної системи за допомогою визначників

Отже, системи лінійних рівнянь можна розв'язувати за допомогою визначників: $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta$.

ОБЧИСЛЮЄМО ЇХ ЗА ФОРМУЛАМИ:

$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2$ – визначник змінної $x$;

$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot a_2$ – визначник змінної $y$;

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ – визначник системи.

Далі оцінюємо їх.

***Зауваж!***

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то **система має один розв'язок** $(x; y)$, який знаходимо $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$. Графічною ілюстрацією є точка перетину двох прямих.

***Зауваж!***

Якщо визначник системи $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників $\Delta x \neq 0$ або $\Delta y \neq 0$, то **система несумісна**, тобто **не має розв'язків.**

Графічною ілюстрацією дві паралельні прямі.

***Зауваж!***

Якщо всі визначники дорівнюють 0: $\Delta = 0$, $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, то система має безліч розв'язків.

Графічною ілюстрацією є дві паралельні прямі.

## *Тренувальні вправи*

**6.110°.** Установити відповідність між кількістю розв'язків системи (1–3) та значеннями параметра $a$ (А–Д).

| *Кількість розв'язків системи* | *Значення параметра a* |
|---|---|
| 1. $\begin{cases} ax + 3y = 9 \\ 12x + ay = 18 \end{cases}$, безліч розв'язків | А. $a = -6$; |
| 2. $\begin{cases} ax + 3y = 9 \\ 12x + ay = 18 \end{cases}$, жодного розв'язку | Б. $a = 2$; |
| 3. $\begin{cases} ax - 2y = 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$, жодного розв'язку | В. $a = 1$; |
| | Г. $a = 6$; |
| | Д. $a = -4$. |

**6.111°.** Установити відповідність між кількістю розв'язків системи (1–3) та значеннями параметра $a$ (А–Д).

| *Кількість розв'язків системи* | *Значення параметра $a$* |
|---|---|
| 1. $\begin{cases} x+7y=1 \\ 2x+ay=3 \end{cases}$, один розв'язок | А. $a=4$ |
| 2. $\begin{cases} x+5y=4 \\ 2x+ay=8 \end{cases}$, безліч розв'язків | Б. $a=10$ |
| 3. $\begin{cases} ax+2y=3 \\ 18x+ay=5 \end{cases}$, жодного розв'язків | В. $a=\pm 6$ |
| | Г. $a=-10$ |
| | Д. $a=14$ |

**6.112°°.** Визначити, при якому значенні параметра $m$ система рівнянь

$$\begin{cases} (2m-5)x+3y=4 \\ 5x+12y=16 \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

**6.113°°.** Визначити, при якому значенні параметра $a$ система рівнянь

$$\begin{cases} 2x+(3a-1)y=6 \\ 3x+4y=12 \end{cases}$$

не має розв'язків?

**6.114°°.** Визначити, при яких значеннях параметра a розв'язок системи

$$\begin{cases} x+ay=1 \\ ax-3ay=2a+3 \end{cases}$$

не має розв'язків?

**6.115°°.** Визначити, при яких значеннях параметра $a$ система рівнянь

$$\begin{cases} (a-1)x+3y=a \\ x+(a+1)y=2 \end{cases}$$

має:

а) єдиний розв'язок і знайти його;

б) безліч розв'язків;

в) не має розв'язків.

**6.116°°.** Визначити, при яких значеннях параметра $a$ система рівнянь

$$\begin{cases} (a-1)x+3y=a+1 \\ x+(a+1)y=3 \end{cases}$$

має:

а) єдиний розв'язок і знайдіть його;

б) безліч розв'язків;

в) не має розв'язків.

**6.117°°.** Розв'язати систему лінійних рівнянь з параметром

$$\begin{cases} 2x - ay = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}.$$

**6.118•.** Розв'язати систему рівнянь для всіх значень $a$ $\begin{cases} ax + 5y = 2 \\ 2x - 5y = a \end{cases}$.

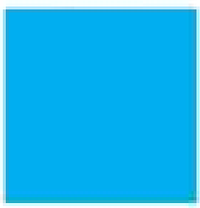
**6.119•.** Розв'язати систему лінійних рівнянь з параметром

$$\begin{cases} ax + 2y = 2 \\ (a+2)x + 2ay = a + 2 \end{cases}.$$

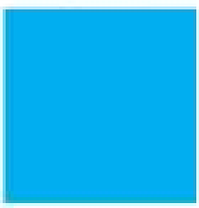
**6.120••.** Визначити, при якому найбільшому натуральному значенні числа $a$ $x < y$, де $x$, $y$ – розв'язки системи

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 4x + 7y = a - 1 \end{cases}.$$

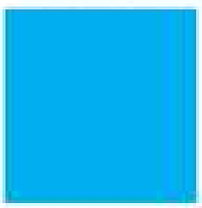
Самоперевірка 6.117



Самоперевірка 6.118

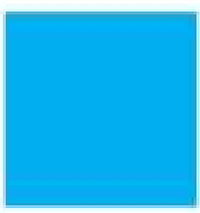


Самоперевірка 6.120

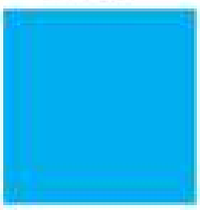


**6.121••.** Визначити, при яких значеннях параметра $a$ розв'язок системи $\begin{cases} 6x + 3y = -1 \\ ax - 5y = 2 \end{cases}$, де $x$, $y$ – розв'язки системи, при чому $x < 0$, $y > 0$.

Самоперевірка 6.112–6.121



Перевір себе 6.121



# Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми «Системи лінійних рівнянь із двома змінними»

*Знати – це означає насамперед уміти користуватися знаннями*
(Василь Сухомлинський)

Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Я знаю, що успіх приходить до того, хто його прагне!».***

Сьогодні не Кубик Блума буде тобі допомагати діагностувати, «чи ти знаєш?», «чи ти вмієш?» і «чи ти можеш?», а ти сам/сама формуватимеш свою «Я-особистість!» шляхом самостійної перевірки своєї доброчесності та власної діяльності.

**Завдання 1. Вправа: «Постав собі «*», якщо так».**

**І. Перевір свою доброчесність:**

- ✓ Чи виконував/виконувала **Я** всі завдання домашньої роботи?
- ✓ Чи розв'язував/розв'язувала **Я** домашні завдання самостійно?
- ✓ Чи пробував/пробувала **Я** перевіряти свої вміння хоч після одного уроку?
- ✓ Чи вів/вела **Я** облік: «знаю», «хочу дізнатися», «дізнався (дізналася)»?
- ✓ Чи запланував (запланувала) **Я** навчатися краще, ніж це було вчора?

**ІІ. Запитання для самоконтролю власної діяльності**

1) Чи розумію **Я**, що таке система лінійних рівнянь з двома змінними?
2) Чи вирізняю **Я**, яким способом розв'язати систему?
3) Чи знаю **Я**, що система лінійних рівнянь може мати один розв'язок, безліч або не мати жодного?
4) Чи вирізняю **Я** ситуацію, коли система лінійних рівнянь з двома змінними не має розв'язків?
5) Чи знаю **Я**, як розв'язати систему лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом?
6) Чи знаю **Я**, як розв'язати систему лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки?
7) Чи вмію **Я** розв'язувати систему лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання?
8) Чи вмію **Я** правильно виконувати перетворення у рівняннях системи?

9) Чи вмію **Я** розв'язувати систему лінійних рівнянь з двома змінними, які зводяться до найпростіших?

10) Чи вмію **Я** моделювати найпростіші текстові задачі система лінійних рівнянь з двома змінними?

11) Чи розумію **Я**, що навчальні задачі складають основу для формування вміння розв'язувати компетентнісно орієнтовані задачі?

12) Чи розумію **Я** дослідження та розв'язування систем лінійних рівнянь із параметром?

Зроби висновок: «Як Ти?». Чи можеш собі сказати: « Тепер Я усвідомлюю, що можу, хочу і буду вчитися!».

Похвали себе, якщо ти «Молодець!»

**Завдання 2. Розглянь інтелектуальну карту з теми «Системи лінійних рівнянь із двома змінними» та схему створення математичної моделі до задачі та склади власні.**

**ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА КАРТА**
**«СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ»**
**СХЕМА СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДО ЗАДАЧІ**




Схема створення математичної моделі

## *Тренувальні вправи*

**6.122°°.** Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ способом підстановки та вказати відповідь.

а) $(1; -5)$; б) $(1; 5)$; в) $(-1; 5)$; г) $(5; 1)$.

**6.123°°.** Розв'язати систему лінійних рівнянь з двома змінними графічно.

а) $\begin{cases} y = 4, \\ 2x + y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - y = 5. \end{cases}$

**6.124°°.** Розв'язати систему лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання.

а) $\begin{cases} 4x - 3y = -2, \\ 5x + 3y = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + 3y = 7. \end{cases}$

**6.125°°.** У супермаркеті 5 пачок печива дорожчі, ніж 4 плитки шоколаду на 100 грн, а 7 пачок такого печива і 6 плиток шоколаду коштують 546 грн.

а) Визначити систему рівнянь, що відповідає умові задачі як її математична модель.

а) $\begin{cases} 5x + 4y = 100, \\ 7x - 6y = 546; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x - 4y = 100, \\ 7x - 6y = 546; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x - 4y = 100, \\ 7x + 6y = 546; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x + 4y = 100, \\ 6x + 7y = 546. \end{cases}$

б) Обчислити, скільки коштуватимуть 5 пачок печива і 5 плиток шоколаду зі знижкою в розмірі 2 %.

**6.126°°.** За 5 шоколадних батончиків і 2 плитки шоколаду заплатили 114 грн. Скільки коштує батончик і скільки – плитка шоколаду, якщо відомо, що три батончики дорожчі за одну плитку шоколаду на 20 грн?

**6.127•.** Дано прямокутник, ширина якого – $x$ см, а довжина – $y$ см, причому його довжина на 5 см більша, ніж його ширина, а периметр – 26 см.

а) Визначити систему рівнянь, яка є математичною моделлю цієї задачі.

а) $\begin{cases} (x + y) : 2 = 26, \\ y - x = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x + y) : 2 = 26, \\ x - y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x + y) \cdot 2 = 26, \\ x - y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (x + y) \cdot 2 = 26, \\ y - x = 5. \end{cases}$

б) Обчислити вартість кольорової стрічки сантиметрової ширини для заклеювання цього прямокутника, якщо ціна 1 м такої стрічки – 12 грн 50 коп.

**6.128•.** За 3 год автобусом і 2 год потягом турист подолав 300 км. Знайти швидкість автобуса і швидкість потяга, якщо швидкість потяга на 10 км/год більша за швидкість автобуса.

**6.129•.** Розв'язати систему рівнянь указаним способом.

*Графічний*

а) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x + 3y = 6; \end{cases}$

*Підстановки*

б) $\begin{cases} x + 2y = 11, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$

*Додавання*

в) $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 4x - 2y = 8. \end{cases}$

**6.130••.** Розв'язати систему рівнянь.

а) $\begin{cases} 3(x - y) - 2(x + y) = 4, \\ 4x - 3(x + 2y) = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - 2(2y + 1) = 16 = 2x, \\ 2(x - 3) - 4y = -2(x + y). \end{cases}$

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**6.131••.** Визначити, при якому значенні коефіцієнта $a$ система лінійних рівнянь $\begin{cases} x + 3y = 4, \\ 2x + ay = 8; \end{cases}$ має безліч розв'язків.

**6.132••.** В асортименті приватного виробника молочної продукції є молоко жирністю 2% та 5%.

а) Визначити, скільки молока кожного виду потрібно взяти, щоб отримати 240 л молока жирністю 3%, якщо умовно вважати, що 1 літр молока важить 1 кілограм.

б) Визначити, скільки буде коштувати 1 л цього молока в магазині, якщо в його ціну включено закупівельну вартість молока (1 л жирністю 2% коштує 4 грн, а жирністю 5% – 10 грн), переробку продукту (4 грн за 1 літр), ПДВ – 20% від загальної вартості та 10% – магазинна націнка.

**6.133••.** Узагальнити отриману інформацію з теми «Системи лінійних рівнянь із двома змінними» у формі вірша – «Сенкан» за такими правилами:

1. Перший рядок – тема (іменник).
2. Другий – опис теми (два прикметники).
3. Третій – називає дію, пов'язану з темою, складається з трьох дієслів.
4. Четвертий рядок – фраза, переважно з 4-х слів, висловлює ставлення до теми, почуття.
5. П'ятий рядок – одне слово – синонім до слова (теми), ніби висновок вірша.

(«Сенкан» – це неримований вірш, що складається з п'яти рядків (слово «сенкан» походить від французького слова «п'ять»), які формулюють складне і об'ємне декількома словами за допомогою певних правил).

Приклад сенкану

*Математика — це велична споруда,*
*створена уявою людини,*
*для пізнання Всесвіту.*
(Ле Корбюз'є)

# ТЕМА 7. | Елементи стохастики

У цій темі ти **ознайомишся** із такими розділами математики як математична статистика, елементи теорії ймовірностей та комбінаторика;

**навчишся** використовувати відсоткові розрахунки для розв'язування задач, зокрема прикладного змісту.

Також ти **вивчиш** формули для знаходження розмаху, моди, медіани і середнього значення варіаційного ряду, а також для обчислення ймовірності настання події.

Будеш **розв'язувати** вправи на знаходження кількості можливих комбінацій та навчишся використовувати правила суми і добутку.



# §7.1 Способи отримання даних. Читання та аналіз даних. Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Недостатньо лише мати добрий розум, головне – це раціонально його застосовувати»*** (Рене Декарт).

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про утворення виразів за допомогою дій додавання і віднімання.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** кілька відомих тобі способів графічного представлення інформації.

**ПОЯСНИ,** чому 3,5 є середнім арифметичним чисел 5; 6; 0; 3.

**ЧОМУ** середнє арифметичне чисел 3, −7, 8, −6, 7, −5 дорівнює 0?

**ПРИДУМАЙ,** як знайти невідоме четверте число, якщо відомо три числа: 6, 4, 7, а середнє арифметичне всіх чотирьох чисел дорівнює 5.

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями побудувати графік до даних середньодобової температури за тиждень:

| Дні тижня | понеділок | вівторок | середа | четвер | п'ятниця | субота | неділя |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t°C | $-1^\circ$ | $-2^\circ$ | $3^\circ$ | $1^\circ$ | $-1^\circ$ | $2^\circ$ | $0^\circ$ |

**ЗАПРОПОНУЙ** зручний спосіб графічного подання інформації, що записана в таблиці спостереження за погодою у вересні:

| Погодні умови | Сонячні дні | Похмуро з проясненням | Опади |
|---|---|---|---|
| К-сть днів | 8 | 15 | 7 |

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Обчислити** середнє арифметичне чисел:

а) 12; 40; 32; 18;

б) 3,5; 7,4; 8,6; 2,3; 7,2;

в) −4; 0; 7; 8; −3; 10;

г) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$.

**2) Знайти** невідоме число $x$, якщо відоме середнє арифметичне всіх чисел (а–в):

а) 2; 8; 3; 5; $x$, якщо їх середнє арифметичне дорівнює 4;

б) 1,2; 5,3; 3,8; $x$, якщо їх середнє арифметичне дорівнює 4,7;

в) −4,5; 2,7; 3,6; −5,1; $x$, якщо їх середнє арифметичне дорівнює 0,4.

**3) Обчислити** (а–г):

а) скільки відсотків становить 28 від 140;

б) скільки відсотків становить 3,5 від 14;

в) скільки відсотків становить 2,7 від 0,45;

г) скільки відсотків становить $\frac{1}{25}$ від $\frac{1}{2}$.

## *Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** Щоб знайти $a\,\%$ від деякого числа, треба це число помножити на відсотки, записані у вигляді десяткового дробу.

**2** Середнім арифметичним кількох чисел є результат ділення суми цих чисел на їхню кількість.

### *Зауваж!*

**1** Метою збору даних є знання про об'єкт дослідження – виявлення корисної інформації, знайдення висновків, прийняття рішень. Вивчення зібраної інформації може мати багато підходів, реалізовуватися за допомогою різних інструментів – в тому числі математичних, статистичних, за допомогою різноманітних способів візуалізації, але головне завдання його – аналіз зібраних даних. Цим питанням присвячений розділ математики, що носить назву статистика.

**2** Статистика (від латинського status – стан) – це наука про отримання, оброблення й аналіз кількісних даних, які характеризують масові явища в житті. Математична статистика – розділ математики, який вивчає математичні методи

обробки статистичних даних та їх використання для наукових і практичних спостережень.

**3** Статистичні дані – сукупність чисел, які дають кількісну характеристику ознак певних об'єктів та явищ, що нас цікавлять. Кількість об'єктів сукупності називають обсягом сукупності.

**4** Числа, що є значеннями ознак кожної групи, на які можна поділити вибірку, називають варіантами; послідовність варіант називають варіаційним рядом. Зібрану інформацію (сукупність даних) зручно подавати у вигляді таблиць, графіків, діаграм (гістограм).

***Зауваж!***

**Частоти** – числа, які показують, скільки разів повторювалось кожне значення ознаки сукупності. Відношення частоти до обсягу вибірки називають відносною частотою.

Наприклад. Дано вибірку: 2; 2; 3; 3; 3; 4; 5; 5; 5; 5. Скласти таблицю частот за даними вибірки та знайти відносну частоту варіанти

$x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 4$; $x_4 = 5$ – варіанти вибірки;

2; 3; 4; 5 варіаційний ряд.

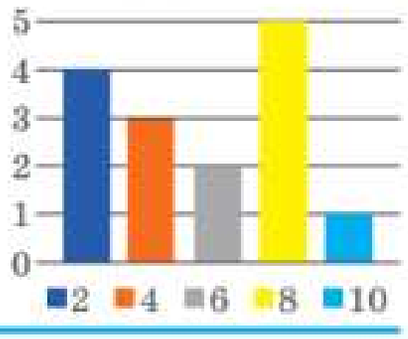
Частота варіанти $x_1$ дорівнює 2; варіанти $x_2$ — 3; варіанти $x_3$ — 1; варіанти $x_4$ — 4.

| Число | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| Частота | 2 | 3 | 1 | 4 |

Відносна частота є відношенням частоти до загальної кількості, отже частота варіанти $x_1$ дорівнює $\frac{2}{10} = 0,2 = 20\%$; варіанти $x_2$ дорівнює $\frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$, аналогічно відносна частота $x_3$ дорівнює $40\%$, а $x_4$ — $50\%$.

***Зауваж!***

Для того щоб подати отримані дані наочно, побудуємо на координатній площині стовпчасту діаграму. В статистиці цю діаграму називають гістограмою.




Наприклад. Побудуй гістограму за даними таблиці:

| Число | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| Кількість | 4 | 3 | 2 | 5 | 1 |

***Зауваж! Це важливо!***

У статистиці для характеристики розподілу одиниць сукупності за певною ознакою використовують структурні (позиційні) середні: середнє арифметичне значення, моду та медіану. Середнім значенням $n$ даних $x_1, x_2, \ldots x_n$ вибірки (або середнім арифметичним даних вибірки) є число

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$$

де $x$ – значення варіанти, $n$ – число одиниць сукупності.

**Мода** вибірки ($Mo$) – це значення елемента вибірки, яке зустрічається частіше за інші.

**Медіана** ($Me$) – це так зване серединне значення впорядкованого ряду значень випадкової величини: – якщо кількість чисел у ряді непарна, то медіана – це число, записане посередині; – якщо кількість чисел у ряді парна, то медіана – це середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.

**Розмахом** $R$ вибірки значень випадкової величини є різниця між найбільшим і найменшим значеннями величин.

Наприклад. Дано вибірку: 2; 2; 3; 3; 3; 4; 5; 5; 5; 5. Знайти середнє значення, моду, медіану, розмах вибірки. Середнє значення:

$$\overline{x} = \frac{2\cdot2 + 3\cdot3 + 4\cdot1 + 5\cdot4}{10} = \frac{37}{10} = 3{,}7.$$

$Mo = 5$; $Me = (3+4):2 = 3{,}5$; $R = 5-2 = 3$.

## *Тренувальні вправи*

**7.1°.** Заповнити частотну таблицю даних вибірки вимірювання температури повітря (t, °C) у першу декаду жовтня: 6; 5; 4; 6; 4; 5; 6; 2; 3; 4.

| Температура повітря (t , °C) | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Частота | | | | | |

**7.2°.** Скласти частотну таблицю за даними вибірки:

а) 2; 4; 3; 5; 7; 3; 4; 5; 7; 6; 2; 5; 7; 5; 2;

б) 4; 8; 8; 6; 4; 0; 2; 2; 8; 6; 6; 0; 4; 8; 8; 6; 2; 0;

в) 0,3; 0,2; 0,1; 0,3; 0,4; 0,5; 0,1;0,3; 0,4; 0,5; 0,3; 0,4.

**7.3°.** Заповнити порожній рядок таблиці, обчисливши відносну частоту для кожної варіанти:

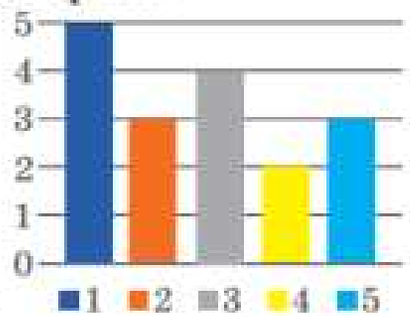
| Число | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 15 | 21 | 11 | 14 | 22 | 31 | 18 | 39 | 7 | 22 |
| Відносна частота | | | | | | | | | | |

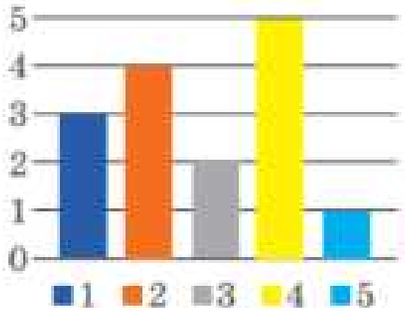
**7.4°.** Протягом восьмигодинного робочого дня робітник погодинно виготовляв 10; 8; 11; 12; 11; 9; 8; 5 деталей. Побудувати гістограму за цими даними.

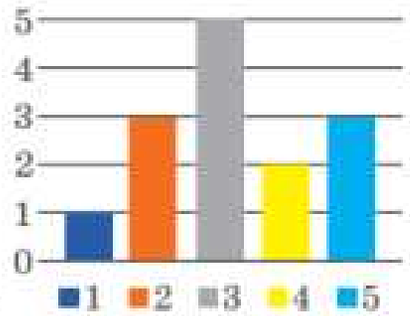
**7.5°.** Двоє учнів / учениць за контрольну з математики одержали 5 балів, один – 6, троє – 7, п'ятеро – 8, восьмеро – 9, шестеро – 10, троє – 11 та двоє – 12. Скласти за цими результатами частотну таблицю і побудувати відповідну гістограму.

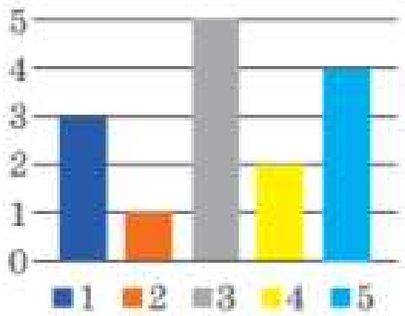
**7.6°°.** Упорядкувати парами гістограму (1–4) та відповідну їй таблицю частот (А–Е).

Гістограма

1.



2.



3.



4.



Таблиця частот

А.

| Число | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Кількість | 3 | 4 | 2 | 5 | 1 |

Б.

| Число | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Кількість | 2 | 5 | 3 | 5 | 4 |

В.

| Число | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Кількість | 3 | 1 | 5 | 2 | 4 |

Г.

| Число | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Кількість | 5 | 3 | 4 | 2 | 3 |

Д.

| Число | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Кількість | 4 | 2 | 3 | 5 | 1 |

Е.

| Число | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Кількість | 1 | 3 | 5 | 2 | 3 |

**7.7°°.** Поставити у відповідність кожній вибірці (1–4) її середнє значення (а–е).

| | |
|---|---|
| 1. | 4; 10; 6; 7; 7; 3; 10; 5; 5; 5; 10; 3; 4; 4; 7. |
| 2. | 23,4; 18,7; 19,6; 20,8; 7,5. |
| 3. | 10; 8; −7; 1; −5; −4. |
| 4. | 32,15; 31,46; 29,85; 34,54. |

Середнє значення

| а) | б) | в) | г) | д) | е) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,5 | 31,5 | 6 | 32 | 18 | 12 |

**7.8°°.** Поставити у відповідність кожній вибірці (1–4) її розмах (а–е).

| | |
|---|---|
| 1. | −3; 17; 0; 4; 18; 12; −5; 6. |
| 2. | 4; 8; 9; 3; 2; 3; 2; 11. |
| 3. | 21,6; 12,3; 37,3; 16,4; 12,7. |
| 4. | 100; 150; 60; 80; 120. |

Розмах

| а) | б) | в) | г) | д) | е) |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 24 | 12 | 25 | 90 | 23 |

**7.9°°.** Знайти моду, медіану та середнє значення вибірки.

а) 4; 5; 6; 7; 1; 0; 2; 7; 5; 6; 1; 4; 0; 1; 2; 5;

б) 14; 18; 22; 24; 18; 14; 22; 14; 24; 22; 24;

в) 0,6; 1,1; 0,5; 0,8; 0,5; 1,1; 0,8; 0,9; 1,1; 0,8; 0,9; 1,1;

г) 47; 50; 52; 47; 52; 49; 45; 43; 53; 53; 47; 52.

**7.10•.** Критично оцінити процес обчислення моди, медіани та середнього значення вибірки 30; 32; 37; 30; 32; 31; 32; 35; 30; 32; 35; 37.

Мода: $Mo = 30$;

Медіана: $Me = (31 + 32) : 2 = 31{,}5$;

Середнє значення:

$$\bar{x} = \frac{30 + 31 + 32 + 35 + 37}{5} = 33.$$

**7.11•.** Протягом тижня було продано 25 чоловічих сорочок таких розмірів: 39; 41; 42; 41; 40; 44; 41; 41; 42; 40; 41; 42; 43;

39; 40; 40; 40; 40; 41; 42; 40; 41; 43; 41; 41. Скласти варіаційний ряд, зробити статистичний розподіл цих даних. Побудувати гістограму.

**7.12*.** Знайти середнє значення за даними таблиці:

| Число | 0 | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| Частота | 13 | 9 | 16 | 12 |

**7.13*.** Знайти моду та медіану за даними таблиці:

| Розмір взуття | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Кількість проданих пар | 2 | 6 | 14 | 24 | 18 | 7 | 3 | 1 |

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**7.14**.** Середнє значення вибірки дорівнює 6,5. Відомо, що у вибірці 12 елементів, один з яких невідомий: 7; 12; 5; 9; 7; 6; 9; 5; 4; 12; 7; $x$. Знайти $x$.

**7.15**.** Визначити, що показує мода в поданому випадку. Стаж роботи десяти робітників становить: 6; 5; 8; 6; 8; 11; 4; 9; 6; 5 років. Знайти медіану цієї вибірки.

**7.16**.** Знайти розмах, моду, медіану та середнє значення вибірки, розташування якої за частотами представлено в таблиці:

| Число | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 21 | 33 | 34 | 40 | 32 | 25 |

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**7.17.** Скласти запитання до умов задач.

а) задача *«Участь у гуртках»*. Класний керівник запитала у всіх учнів та учениць 7А класу, в яких гуртках вони займаються після уроків, та за цими даними склала таблицю:

| Назва | Спортивні секції | Хореографічні студії | Комп'ютерні гуртки | Гуртки образотворчого мистецтва |
|---|---|---|---|---|
| Кількість учасників та учасниць | 18 | 10 | 12 | 8 |

б) задача *«Трудове навчання»*. На уроці трудового навчання учні виготовляли заготовки для садового знаряддя та вимірювали діаметр одержаної деталі і отримали такі дані вимірів в сантиметрах: 3,5; 3,7; 3,2; 3,5; 3,1; 3,4; 3,6; 3,2; 3,7; 3,8.

в) задача *«Фермерське господарство»*. Фермер засіяв п'ять полів пшеницею та зібрав врожай і заніс дані про отриману врожайність у таблицю:

| Поле | 1 поле | 2 поле | 3 поле | 4 поле | 5 поле |
|---|---|---|---|---|---|
| Врожайність (ц/га) | 38 | 41 | 39 | 43 | 40 |

г) задача *«Окопні свічки»*. Під час осінніх канікул учні й учениці 6 та 7 класів школи виготовляли окопні свічки для ЗСУ. Дані кількості виробів занесли в таблицю:

| Клас | 6А | 6Б | 6В | 7А | 7Б | 7В |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Кількість | 65 | 62 | 64 | 67 | 72 | 70 |

Перевір себе «Як ти?»

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

**Аркуш «§7.1. Способи отримання даних. Читання та аналіз даних. Вибіркові характеристики: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення».**

# §7.2 Навчальні задачі на знаходження дробу (відсотка) від числа та числа за його дробом (відсотком) та складання дробового і відсоткового відношень




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Де думка сильна – там діло повне сили»*** (Вільям Шекспір).

Сьогодні Кубик Блума знову тобі допоможе продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування задач на відношення і відсотки – «чи ти можеш?» та розширимо знання про відсотки.

**Отже, шість завдань від Кубика Блума:**

**НАЗВИ**, що називають відсотком.

**ПОЯСНИ**, як записати десятковим дробом 175 %.

**ЧОМУ** число, $\frac{2}{3}$ якого дорівнює 342, становить 513?

**ПРИДУМАЙ** два різні способи знаходження 35 % від 240.

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями обчислювати 50 %, 25 %, 10 %, 1 %.

**ЗАПРОПОНУЙ** зручний для тебе спосіб обчислення числа, 25 % якого дорівнюють 3,7.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** значення $x\,\%$ від 250, якщо:

а) $x=50$; в) $x=5$; д) $x=150$;

б) $x=1$; г) $x=75$; е) $x=0{,}5$.

**2) Обчислити** значення $\frac{3}{5}$ від числа $n$, якщо:

а) $n=30$; б) $n=90$; в) $n=4{,}5$; г) $n=4{,}5$.

**3) Знайти** число:

а) 3 % якого становить 57;

б) 125 % якого становить 67,5;

в) $\frac{2}{7}$ якого становить 98;

г) $\frac{3}{11}$ якого становить 6,6.

***Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!***

**ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:**

1. Щоби помножити десятковий дріб на 10, 100, 1000 і т. д., потрібно кому перенести відповідно на 1, 2, 3, ... цифри вправо.
2. Щоби поділити десятковий дріб на 10, 100, 1000 і т. д., потрібно кому перенести відповідно на 1, 2, 3, ... цифри вліво.
3. Щоби помножити десятковий дріб на 0,1, 0,01, 0,001 і т. д., потрібно кому перенести відповідно на 1, 2, 3, ... цифри вліво.
4. Щоби поділити десятковий дріб на 0,1, 0,01, 0,001 і т. д., потрібно кому перенести відповідно на 1, 2, 3, ... цифри вправо.
5. Одну соту частину будь-якого числа або числового значення величини називають відсотком.
6. Щоб перетворити відсотки на десятковий дріб, треба поділити число відсотків на 100. Наприклад: $5\,\% = 5 : 100 = 0{,}05$.
7. Щоб перетворити десятковий дріб на відсотки, треба помножити десятковий дріб на 100 %. Наприклад: $0{,}08 = 0{,}08 \cdot 100\,\% = 8\,\%$.

***Зауваж!***

Знаходження дробу від числа.

I спосіб. Щоб знайти дріб від числа, потрібно це число поділити на знаменник і помножити на чисельник. Наприклад, знайти $\frac{3}{7}$ від 14. Розв'язання: $14 : 7 \cdot 3 = 6$.

II спосіб. Щоб знайти дріб від числа, потрібно це число помножити на дріб. Наприклад, знайти $\frac{3}{5}$ від 15. Розв'язання:

$14 \cdot \frac{3}{7} = 6$.

Знаходження числа за його дробом.

I спосіб. Щоб знайти число за заданим значенням його дробу, потрібно задане значення поділити на чисельник і помножити на знаменник.

Наприклад: знайти число, якщо $\frac{2}{3}$ цього числа дорівнюють 12.

Розв'язання: $12:2\cdot3=18$.

II спосіб. Щоб знайти число за заданим значенням його дробу, потрібно задане значення поділити на дріб.

Наприклад: знайти число, якщо $\frac{2}{3}$ цього числа дорівнюють 12.

Розв'язання: $12:\frac{2}{3}=12\cdot\frac{3}{2}=18$.

***Зауваж! Це важливо!***

**Знаходження відсотка від числа.**

Щоб знайти відсоток від числа, треба перетворити відсоток на десятковий дріб та помножити подане число на цей дріб.

Наприклад: знайти 5 % від 84.

*Розв'язання:* $5\,\% = 0{,}05$; $84\cdot0{,}05=42$.

Отже, $p\,\%$ від $a$ дорівнює $\frac{a\cdot p}{100}$.

**Знаходження числа за його відсотком.**

Щоб знайти число за його відсотком, треба перетворити відсоток на десятковий дріб і поділити значення відсотка на цей дріб.

Наприклад, знайдемо число, 12 % якого дорівнюють 72.

*Розв'язання.* $12\,\% = 0{,}12$; $72:0{,}12=600$ – шукане число.

Отже, для знаходження числа, p % якого дорівнюють $a$, потрібно $\frac{a\cdot100}{p}$.

***Зауваж! Це важливо!***

**Знаходження відсоткового відношення чисел.**

Щоб знайти відсоткове відношення числа $a$ до числа $b$, потрібно $a$ поділити на $b$ і результат помножити на 100 %: $\frac{a}{b}\cdot100\%$.

Наприклад, знайдемо, скільки відсотків становить:

а) 12 від 15; б) 15 від 12.

*Розв'язання.*

а) $12:15\cdot100\,\%=80\,\%$. Отже, число 12 – це 80 % від числа 15.

б) $15:12\cdot100\,\%=125\,\%$. Отже, 15 – це 125 % від 12.

## *Тренувальні вправи*

**7.18°.** Знайти дріб від числа.

а) $\frac{1}{2}$ від 584; в) $\frac{3}{7}$ від 147; д) $\frac{9}{10}$ від 16;

б) $\frac{2}{5}$ від 160; г) $\frac{5}{8}$ від 1200; е) $\frac{5}{12}$ від 7,2.

**7.19°.** Знайти:

а) число, $\frac{1}{2}$ якого дорівнює 37;

б) число, $\frac{2}{3}$ якого дорівнює 45;

в) число, $\frac{4}{11}$ якого дорівнює 8,8;

г) число, $\frac{7}{5}$ якого дорівнює 105;

д) число, $\frac{9}{10}$ якого дорівнює 0,18.

**7.20°.** Заповнити в зошиті таблицю.

| Відсотки | 10% | 20% | 25% | 50% | 75% | 100% |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Десятковий дріб | | | | | | |
| Звичайний дріб | | | | | | |

**7.21°.** Записати звичайні дроби у вигляді відсотків.

а) $\frac{1}{10}$; в) $\frac{1}{4}$; д) $\frac{1}{20}$; є) 1; з) $\frac{11}{10}$;

б) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{5}$; е) $\frac{3}{4}$; ж) $\frac{5}{4}$; и) $1\frac{1}{2}$.

**7.22°.** Знайти:

а) 1% від 740; в) 25% від 212; д) 20% від 40,5;

б) 50% від 126; г) 10% від 19; е) 75% від 268.

**7.23°.** Увідповіднити відсоток (1–4) та його запис у вигляді десяткового дробу (А–Д).

| *Відсоток* | *Десятковий дріб* |
|---|---|
| 1. 10 % | А. 0,01 |
| 2. 0,1 % | Б. 0,00001 |
| 3. 1 % | В. 0,0001 |
| 4. 0,01 % | Г. 0,1 |
| | Д. 0,001 |

**7.24°.** Знайти:

а) число, 50 % якого дорівнюють 109;

б) число, 25 % якого дорівнюють 53;

в) число, 10 % якого дорівнюють 0,4;

г) число, 1 % якого дорівнює 16;

д) число, 20 % якого дорівнюють 2,4.

**7.25°.** Повного заряду батареї вистачає на 36 год роботи телефону. Знайти, скільки часу працюватиме телефон з 35 % заряду батареї.

**7.26°.** У книзі – 245 сторінок. Вікторія прочитала 40 % книги. Обчислити, скільки сторінок їй залишилося прочитати.

**7.27°.** Спортсмен витратив на розминку 15 хвилин, що становить 12 % загального часу тренування. Знайти час тренування спортсмена.

**7.28°.** У 7-В класі навчається 14 дівчат, що становить 40 % від загальної кількості учнів й учениць класу. Знайти, скільки хлопчиків навчається в цьому класі.

**7.29°.** Вміст цукру в яблуках становить 9,6 %. Знайти, скільки кілограмів цукру міститься у 25 кг яблук.

**7.30°°.** Знайти:

а) 14 % від 2,5; в) 0,5 % від 5132; д) 54 % від $\frac{3}{4}$;

б) 5 % від 1,83; г) 120 % від 3,4; е) 2,3 % від $5\frac{2}{9}$.

**7.31°°.** Знайти:

а) число, 5 % якого дорівнює 6,25;

б) число, 0,3 % якого дорівнює 4,8;

в) число, 120 % якого дорівнює 6;

г) число, 0,01 % якого дорівнює 10;

д) число, 15 % якого дорівнює 2/5 .

**7.32°°.** Знайти, скільки відсотків становить число $a$ від числа $b$, якщо:

а) $a=15$, $b=60$; в) $a=120$, $b=4$;

б) $a=2{,}1$, $b=105$; г) $a=45$, $b=9$.

**7.33°°.** Знайти, скільки відсотків розгорнутого кута становлять:

а) 90°; б) 30°; в) 60°; г) 120°.

**7.34•.** У магазині діє знижка 15 % на всі спортивні товари. Початкова ціна футбольного м'яча становила 340 грн, волейбольного – 275 грн, а баскетбольного – 290 грн. Обчислити загальну вартість покупки трьох різних м'ячів.

**7.35•.** У піцерії акція, яка дає 5 % знижки по чеку при замовленні на суму понад 500 грн. Учні замовили дві піци вартістю 220 грн кожна та три десерти, вартість яких становить 40 % від вартості піци. Знайти вартість усього замовлення.

**7.36•.** Ціна книжки після дворазового зниження на 25 % становить 120 грн. Знайти, якою була початкова її ціна.

**7.37•.** Обчислити, на скільки відсотків збільшиться площа квадрата, якщо його сторону збільшити на 25 % .

**7.38•.** Визначити ціну товару до переоцінки, якщо після підвищення ціни на 20 % а потім – ще на 12 % цей товар став коштувати 4200 грн.

**7.39•.** Зимова куртка коштувала 2500 грн. Із настанням весни на куртку знизили ціну на 10 %, але продали лише тоді, коли нову ціну зменшили ще на 15 % . На скільки відсотків ціна, за якою продали куртку, менша від початкової?

**7.40•.** Пішохід перейшов проїзну частину в недозволеному місці та має у встановлений термін сплатити штраф у розмірі 600 грн. За кожний прострочений день нараховується додатково 2 % від суми штрафу. Знайти, скільки доведеться заплатити пішоходу, якщо він прострочив оплату штрафу на 10 днів.

### *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**7.41••.** Довести, що $\frac{4}{3}$ від 36 дорівнюють числу, $\frac{3}{4}$ якого дорівнюють 36.

**7.42****. Вартість ноутбука – $a$ грн. В магазині діє акція: при покупці двох ноутбуків – знижка на другий 12 %. Скласти вираз для визначення вартості покупки двох ноутбуків.

**7.43****. Ціна телевізора в магазині електротоварів спочатку збільшилася на 20 %, а під час акції знизилася на 20 %. Обчислити, як і на скільки відсотків змінилася початкова ціна телевізора.

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**7.44.** Скласти запитання до умов задач.

а) задача *«Банківська справа»*. Молодий спеціаліст отримав пільговий іпотечний кредит на суму 2 млн грн для придбання житла. За умовами іпотеки він має сплатити одразу 20 % зазначеної суми.

б) задача *«Податкова справа»*. Підприємство виділяє на виплату заробітної плати працівнику 16 000 грн щомісяця. При цьому працедавець сплачує за кожного працівника єдиний соціальний внесок у розмірі 22 %, а податок на прибуток становить 18 %.

в) задача *«Фітнес»*. На підприємстві працює 280 робітників. 25 % з них відвідують спортивний клуб «Спортлайв», 10 % займаються йогою, 8 % займаються на домашніх тренажерах.

г) задача *«Фермерське господарство»*. Середня врожайність пшениці минулого року становила 38 центнерів з гектара. Унаслідок несприятливих погодних умов у цьому році прогнозується зниження врожаю на 5 %.

д) задача *«Рух автомобіля»*. Під час руху автомобіля в межах міста витрати пального складають 9,6 л на 100 кілометрів. За межами міста витрати пального на 100 км зменшуються на 30 %.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§ 7.2. Навчальні задачі на знаходження дробу (відсотка) від числа та числа за його дробом (відсотком) та складання дробового і відсоткового відношень».**

# § 7.3 Випадкова подія та її ймовірність. Класичне та статистичне означення ймовірності події для обчислення ймовірностей подій




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Година роботи навчить більше, ніж день пояснень!»***.

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про ймовірності події та обчислення ймовірностей подій.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** приклади випадкових подій.

**ПОЯСНИ,** що таке частота випадкової події.

**ЧОМУ** дорівнює ймовірність випадкової події?

**ПРИДУМАЙ** приклад рівноможливих подій.

**ПОДІЛИСЯ,** за яких умов частота випадкової події може оцінювати ймовірність випадкової події.

**ЗАПРОПОНУЙ** ситуацію, до якої не можна застосувати класичне означення випадкової події.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Подати** звичайний дріб у вигляді десяткового.

а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{6}{10}$; в) $\frac{2}{8}$; г) $\frac{4}{5}$.

**2) Обчислити** значення виразів.

а) $1-\frac{7}{11}$; $1-\frac{15}{23}$; $1-\frac{9}{38}$; $1-\frac{27}{41}$;

б) 1–0,24; 1–0,01; 1–0,78; 1–0,324.

**3) Записати:** а) усі непарні числа, не більші за 25;

б) усі парні числа, менші за 18.

**4) Порівняти** вирази:

а) $\frac{5}{6}$ та $\frac{6}{7}$; б) $\frac{16}{23}$ та 1; в) $\frac{9}{11}$ та $\frac{15}{19}$.

***Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!***

**ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:**

**1** $\frac{1}{2}=0,5$; $\frac{1}{4}=0,25$; $\frac{3}{4}=0,75$; $\frac{1}{5}=0,2$; $\frac{1}{8}=0,125$.

**2** У гральному кубику 6 граней, які позначені числами 1, 2, 3, 4, 5, 6.

***Зауваж!***

Основними поняттями теорії ймовірностей є **подія** та **випробування.**

***Подію*** визначають як результат спостереження, досліду, експерименту. Під **випробуванням** (або дослідом) розуміють ті умови, у результаті яких відбувається подія.

Наприклад, підкидання грального кубика – випробування, поява трьох очок на верхній грані кубика – подія; запитання вчителя – випробування, правильна відповідь учня – подія.

Події позначають буквами A, B, C, ... .

***Зауваж! Це важливо!***

Усі події (явища), за якими ми спостерігаємо, можна поділити на три види: *вірогідні*, *неможливі* та *випадкові*.

Подію, яка в результаті випробування обов'язково відбудеться, називають ***вірогідною.***

Наприклад, вірогідними є події: 1) після четверга настане п'ятниця; 2) при підкиданні грального кубика випаде число очок, менше за сім.

Подію, яка в результаті випробування не відбудеться ніколи, називають ***неможливою.***

Наприклад, неможливими є події: 1) вода в річці замерзла за температури +25 °С; 2) при підкиданні грального кубика з'явилося 7 очок.

Подію, яка в результаті випробування може відбутися або не відбутися, називають ***випадковою.***

Наприклад, випадковими є події: 1) абонент виявиться зайнятим, коли йому зателефонують; 2) при підкиданні грального кубика випаде 2 очки.

**Зауваж! Це важливо!**

Дві події, які в конкретних умовах можуть відбуватися одночасно, називають ***сумісними***, а ті, які не можуть відбуватися одночасно, – ***несумісними***.

Наприклад, події «пішов дощ» та «настав ранок» є сумісними, а події «настав ранок» та «настала ніч» – несумісні.

Якщо при випробуванні може відбутися кілька подій, і немає підстав вважати, що одна з них може відбутися переважніше за будь-яку іншу, то такі події називають ***рівноможливими***.

**Зауваж! Це важливо!**

Імовірності випадкових подій можна порівнювати. Підставою для такої числової оцінки можуть бути результати численних спостережень або експериментів. Практика свідчить, що багато подій відбувається з тією чи іншою частотою.

$$\text{Частота} = \frac{\text{Кількість появ події, яка цікавить}}{\text{Кількість всіх випробувань (спостережень)}}.$$

***Імовірністю події*** $A$ є відношення кількості випадків, які сприяють події $A$, до кількості всіх можливих випадків. Імовірність події $A$ позначають так: $P(A)$.

$P(A) = \frac{m}{n}$, де $m$ – кількість елементарних подій, які сприяють події $A$, $n$ – загальна кількість попарно несумісних і рівноможливих подій.

Таке означення ймовірності називають ***класичним***.

**Зауваж! Це важливо!**

***Імовірність вірогідної події*** **дорівнює 1,** бо такій події сприяють усі можливі випадки ($m = n$).

***Імовірність неможливої події*** **дорівнює нулю,** бо неможливій події не сприяє жоден із можливих випадків ($m = 0$).

***Імовірність випадкової події*** **A** задовольняє подвійну нерівність:

$0 < P(A) < 1$.

**Імовірність будь-якої події E** задовольняє таку умову:

$0 \le P(E) \le 1$.

**Зауваж! Це важливо!**

*Статистичною ймовірністю* називають число, близько якого коливається відносна частота події за умови великої кількості дослідів.

## *Тренувальні вправи*

**7.45°.** Серед зазначених подій знайти вірогідні, неможливі й випадкові.

а) подія $A$ – сьогодні о 23 годині сонце зайде за обрій;

б) подія $B$ – у серпні занять у школі не буде;

в) подія $C$ – учень накреслить трикутник, сума внутрішніх кутів якого дорівнює 189°;

г) подія $D$ – сьогодні о 22 годині сонце буде в зеніті;

д) подія $E$ – учень опише навколо трикутника коло;

е) подія $K$ – учень розв'яже усі завдання контрольної роботи.

**7.46°.** Визначити, чи сумісні події $A$ і $B$, якщо:

а) при одному підкиданні монети відбувається: подія $A$ – випадає герб,
подія $B$ – випадає решка;

б) при підкиданні кубика відбувається: подія $A$ – випадає 3 очки;
подія $B$ – випадає непарна кількість очок;

в) стрілець зробив постріл у мішень: подія $A$ – стрілець влучив; подія $B$ – стрілець не влучив.

**7.47°°.** У скриньці лежать 24 кульки, з них 15 зелених та 9 червоних. Виймають одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька синя?

**7.48°°.** У ящику – 8 червоних кульок та 5 зелених. Навмання виймають одну кульку. Яка ймовірність того, що вона зелена?

**7.49°.** Знайти імовірність того, що при одному підкиданні грального кубика випаде непарне число.

**7.50°.** В урні пронумеровано 50 жетонів (від 1 до 50 ). Яка ймовірність того, що номер жетона, взятого навмання з урни, не містить цифри 3?

**7.51°.** Яка ймовірність того, що при одному підкиданні грального кубика випаде кількість очок, що ділиться на 4?

**7.52°.** Випадковим чином обрали двоцифрове число. Знайти ймовірність того, що це число:

а) закінчується на 5;

б) більше за 42, але менше від 73;

в) закінчується на 1, 3 або 8.

**7.53°.** На дошці розміром 8×8 клітинок 16 клітинок пофарбовано в білий колір, 32 клітинки – в чорний колір, а решта – в червоний. Знайти ймовірність того, що випадково обрана клітинка:

а) біла; б) не червона; в) чорна або червона; г) зелена?

**7.54°°.** Установити відповідність між результатом підкидання грального кубика (1–4) та ймовірністю такого результату.

| Результат підкидання грального кубика | Ймовірність результата |
|---|---|
| 1. Випало 4 очки; | А. $\frac{5}{6}$; |
| 2. Випала непарна кількість очок; | Б. $\frac{1}{3}$; |
| 3. Випало число очок, менше за 6; | В. $\frac{1}{2}$; |
| 4. Випало число очок, більше від 6; | Г. $\frac{1}{6}$; |
| | Д. 0; |
| | Е. 1. |

**7.55°°.** У коробці – 4 сині та кілька зелених кульок. Скільки зелених кульок у коробці, якщо ймовірність того, що навмання взята кулька буде зеленою, дорівнює $\frac{3}{5}$?

**7.56•.** Учень випадковим чином називає натуральне число, що не перевищує 100. Яка ймовірність того, що це число ділиться на 5, але не ділиться на 2?

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**7.57••.** Навмання називають натуральне число від 1 до 25 включно. Знайти ймовірність того, що назване число:

а) 9; в) менше від 5; д) непарне;

б) 29; г) кратне 7; е) просте.

**7.58••.** Навмання називають натуральне число від 11 до 30 включно. Знайти ймовірність того, що назване число:

а) 5; в) більше за 27; д) непарне;

б) 15; г) кратне 6; е) складене.

**7.59****. У шухляді лежить 2 білі та 4 чорні кульки. Навмання виймають 2 кульки. Знайти ймовірність того, що вони різного кольору.

## *Спробуй сформувати запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**7.60.** Скласти запитання до умов задач.

а) задача *«Книжна полиця»*. На полиці учня стоять підручники і посібники в однакових непрозорих обкладинках – кілька з алгебри і геометрії та 12 книжок з інших предметів. Кількість книжок з алгебри відноситься до кількості книжок з геометрії як 2:1. Після того як на полицю поставили ще 2 посібники з геометрії, ймовірність з першого разу взяти книжку з алгебри стала дорівнювати $\frac{1}{5}$.

б) задача *«Корисні яблука»*. У непрозорому пакеті лежали яблука. Зелених яблук було вдвічі більше, ніж червоних, а жовтих – на 4 більше, ніж червоних. Коли в пакет поклали 3 червоних яблука, ймовірність витягнути з першої спроби жовте яблуко стала дорівнювати $\frac{5}{11}$.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§7.3. Випадкова подія та її ймовірність. Класичне та статистичне означення ймовірності події для обчислення ймовірностей подій».**

# §7.4 Застосування комбінаторних правил суми і добутку для обчислення ймовірностей подій




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Година роботи навчить більше, ніж день пояснень!»***.

Сьогодні Кубик Блума допоможе тобі продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування вправ – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про комбінаторні правила додавання і множення для обчислення ймовірностей подій.

**Отже, Кубик Блума тобі пропонує:**

**НАЗВИ** правила, за допомогою яких розв'язують більшість комбінаторних задач.

**ПОЯСНИ,** що таке комбінаторні задачі.

**ЧОМУ** кількість способів вибрати 2 різні книги з 5 книг дорівнює не $5 \cdot 4$, а $\frac{5 \cdot 4}{2}$?

**ПРИДУМАЙ** задачу на комбінаторне правило суми.

**ПОДІЛИСЯ,** коли потрібно використовувати правило суми, а коли правило добутку.

**ЗАПРОПОНУЙ** задачу на комбінаторне правило добутку.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Подати** у вигляді десяткового дробу звичайний:

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{8}{10}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{3}{4}$.

**2) Обчислити** значення виразів:

$9 + \frac{7 \cdot 8}{2}$; $13 + \frac{15 \cdot 16}{2}$; $\frac{10 \cdot 11}{2} + \frac{8 \cdot 9}{6}$; $\frac{12 \cdot 13}{6} + \frac{27 \cdot 28}{2}$

**3) Записати:** а) числа, кратні числу 30; б) дільники числа 18.

## *Аналізуй та роби висновки – формуй індивідуальну траєкторію учіння!*

### ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

1. Задачі, в яких умова йде про підрахунок певної кількості варіантів називають **комбінаторними**. У них підраховують різні комбінації заданих об'єктів.
2. Розділ математики, у якому розглядають розв'язування комбінаторних задач, називають **комбінаторикою**.
3. Більшість комбінаторних задач розв'язують за допомогою двох правил — **правила суми** та **правила добутку**.

### *Зауваж!*

**Правило суми:** якщо об'єкт $A$ можна вибрати $n$ способами, а об'єкт $B$ — $m$ способами, то об'єкт $A$ **або** $B$ можна вибрати $(n+m)$ способами.

Наприклад, на тарілці лежить 5 яблук і 6 груш. Тоді один фрукт – яблуко або грушу можна вибрати $5+6=11$ (способами).

### *Зауваж! Це важливо!*

**Правило добутку:** якщо об'єкт $A$ можна вибрати $t$ способами, а після цього об'єкт $B$ – $k$ способами, то **пару** $A$ **та** $B$ можна вибрати $(t\cdot k)$ способами.

Наприклад, на тарілці лежать 5 яблук і 6 груш. Тоді пару фруктів – яблуко та грушу можна вибрати $5\cdot 6=30$ (способами).

### *Тренувальні вправи*

**7.61°.** У ящику лежить 9 зелених і 5 червоних кульок. Скількома способами можна вибрати одну кульку?

**7.62°.** У їдальні є вибір з 3 перших і 4 других страв. Скількома способами можна обрати обід з першої та другої страв?

**7.63°.** Скільки всього різних двоцифрових чисел можна утворити з цифр 1, 5, 8 і 9 так, щоб у кожному числі цифри не повторювались?

**7.64°.** У коробці лежать 7 червоних і 3 зелених олівці. Скільки існує способів вибору з коробки одного червоного або зеленого олівця?

**7.65°.** На столі лежать три коробки з фруктами. У першій коробці є 7 яблук, у другій – 10 груш, у третій – 3 банани.

Навмання беруть один фрукт із будь-якої коробки. Скількома різними способами можна це зробити?

**7.66°.** У буфеті пропонують 3 види булочок та 4 види напоїв. Скільки є способів вибору сніданку, що скаладається з булочки та напою?

**7.67°.** У розіграші на першість місця з футболу беруть участь команди із 10 шкіл міста. Скільки є варіантів посісти командам перше та друге місця?

**7.68°.** Кафе пропонує меню з 3 перших страв, 6 других і 5 третіх. Скільки є варіантів вибрати обід із трьох страв?

**7.69°.** На вершину гори Говерла прокладено 6 маршрутів.

а) Скількома способами альпініст може піднятися на гору та спуститися з неї?

б) Скількома способами альпініст може піднятися на гору та спуститися з неї, якщо підйом і спуск мають відбуватися різними маршрутами.

**7.70°.** До міста ведуть 8 доріг. Скількома способами Дмитро може дістатися міста і повернутися назад різними дорогами?

**7.71°.** З міста $A$ до міста $B$ ведуть 5 доріг, а з міста $B$ до міста $C$ – 3 дороги. Скількома способами можна проїхати з міста $A$ до міста $C$?

**7.72°°.** Скільки чотирицифрових парних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо жодна цифра в числі не має повторюватися?

**7.73°°.** На полиці є книги: 3 наукової літератури, 5 художньої літератури і 6 довідникової літератури.

а) Скільки існує способів вибрати 2 книги: наукової та художньої літератури?

б) Скільки існує способів вибрати 2 книги: наукової та довідникової література?

в) Скільки існує способів вибрати 2 книги: художньої та довідникової літератури?

г) Скільки існує способів вибрати 2 книги різного виду?

**7.74°°.** Увідповіднити задачу (1–4) та відповідь до неї (А–Е).

| *Задача* | *Відповідь* |
|---|---|
| 1) У кошику 7 слив та 6 абрикос. Скількома способами можна вибрати один фрукт? | А. 27 |
| 2) У кошику 7 слив та 6 абрикос. Скількома способами можна вибрати 1 сливу та 1 абрикос? | Б. 105 |
| 3) У кошику 7 слив та 6 абрикос. Скількома способами можна вибрати 2 сливи або 1 абрикос? | В. 48 |
| 4) У кошику 7 слив та 6 абрикос. Скількома способами можна вибрати 2 сливи та 1 абрикос? | Г. 42 |
| | Д. 126 |
| | Е. 13 |

**7.75°°.** Кафе пропонує меню з 4 салатів, 8 м'ясних страв і 7 десертів. Скільки є варіантів вибрати обід із двох різних страв?

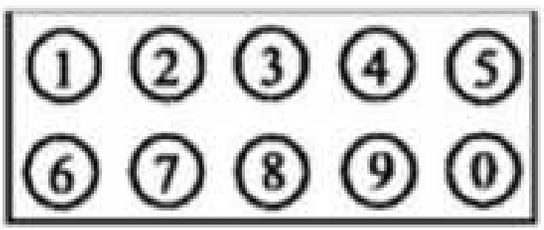
**7.76°°.** У коробці 4 синіх та кілька зелених кульок. Скільки зелених кульок у коробці, якщо ймовірність навмання взяти зелену кульку дорівнює $\frac{3}{5}$?

**7.77°.** З міста $A$ до міста B ведуть $4$ дороги, а з міста $B$ до міста $C$ ведуть 2 дороги. Скількома способами можна проїхати з міста $A$ до міста $C$?

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**7.78°°.** П'ять юнаків та четверо дівчат з одного спортивного клубу за результатами підготовки можуть виступити на чемпіонаті України з плавання. Однак від цього клубу на чемпіонат можуть поїхати або 1 дівчина, або 1 юнак, або пара з 1 юнака та 1 дівчини. Скількома способами тренер може відправити представників клубу на чемпіонат?

**7.79°°.** Кодовий замок на дверях має десять кнопок, на яких нанесено десять різних цифр (див. мал.). Щоб відчинити двері, треба одночасно натиснути дві кнопки, цифри на яких складають код замка. Скільки є варіантів коду замка? Уважати, що коди замка, утворені перестановкою цифр (наприклад, 1–2 і 2–1), є однаковими.



## *Спробуй сформувати запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**7.80.** Скласти запитання до умов задач.

а) задача *«Позакласна зайнятість»*. Учню пропонується для факультативного вивчення одна з трьох іноземних мов та одна з п'яти спортивних секцій.

б) задача *«Вибір смаколиків»*. У магазині в наявності є 10 видів тортів та 15 видів пачок печива.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§7.4. Застосування комбінаторних правил додавання та множення для обчислення ймовірностей подій».**

# §7.5 Компетентнісно орієнтовані задачі, що моделюються елементами стохастики




Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Не кажи: «не вмію», а кажи «навчуся!»»***. Сьогодні Кубик Блума знову тобі допоможе продіагностувати, «чи ти знаєш?» і «чи ти вмієш?», а відтак – перейдемо до розв'язування рівнянь – «чи ти можеш?» та здобудемо нових знань про те, що компетентнісно орієнтовані задачі можуть моделюватися елементами стохастики.

**Отже, шість завдань від Кубика Блума:**

**НАЗВИ**, що розуміють під ймовірністю події.

**ПОЯСНИ**, як знайти відносну частоту, якщо частота появи певного елемента у вибірці 12, а загальна кількість елементів 50.

**ЧОМУ** число $\frac{1}{6}$ є ймовірністю появи «6» на кубику?

**ПРИДУМАЙ** два різні способи знаходження 35 % від 240.

**ПОДІЛИСЯ** своїми вміннями, як знайти моду і медіану варіаційного ряду 5, 7, 3; 5; 7; 6; 3; 5; 3; 7.

**ЗАПРОПОНУЙ** кілька способів для обчислення кількості трицифрових чисел, які можна утворити з цифр 1; 2 і 3.

Відповіді на запитання Кубика Блума коротко:

Відповіді на запитання Кубика Блума широко:

## *Досліди в партнерстві: «Чи вмієш ти?»*

**1) Знайти** ймовірність події A, якщо у скринці лежить 5 червоних, 6 жовтих, 8 зелених кульок:

а) A – поява кульки червоного кольору;

б) A – поява кульки жовтого кольору;

в) A – поява кульки зеленого кольору;

г) A – поява кульки синього кольору.

**2) Обчислити** середнє значення варіаційного ряду:

а) 2; 3; 1; 3; 2; 3; 1; 2; 1; 3; 2; 1;

б) 4,2; 5,6; 2,4; 3,2; 2,4; 3,2.

**3) Знайти** скількома способами можна вибрати телефон та чохол до нього, якщо у магазині є вибір з 7 телефонів і 4 чохлів.

*Аналізуй та роби висновки – формуй стратегію учіння!*

## ЦЕ ВАРТО ЗНАТИ Й ВМІТИ ЗАСТОСОВУВАТИ:

**1** У статистиці частотою називають числа, які показують, скільки разів повторювалось кожне значення ознаки сукупності. Відношення частоти до обсягу вибірки називають **відносною частотою**

**2** **Середнім значенням** $n$ даних $x_1, x_2, \dots x_n$ вибірки є середнє арифметичне даних вибірки.

**3** **Мода** вибірки *(Mo)* – це значення елемента вибірки, яке зустрічається частіше за інші.

**4** **Медіана** *(Me)* — це так зване серединне значення впорядкованого ряду значень випадкової величини: – якщо кількість чисел у ряді непарна, то медіана – це число, записане посередині; – якщо кількість чисел у ряді парна, то медіана – це середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.

**5** **Розмахом** $R$ вибірки значень випадкової величини є різниця між найбільшим і найменшим значеннями величин.

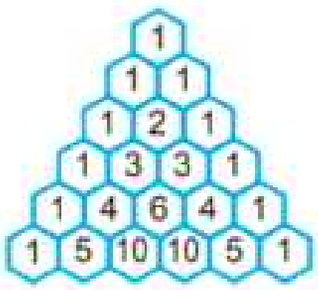
**6** **Імовірністю події** $A$ є відношення кількості випадків, які сприяють події $A$, до кількості всіх можливих випадків.

Імовірність події $A$ позначають так: $P(A)$ і обчислюють за формулою $\boldsymbol{P(A) = \frac{m}{n}}$, де $m$ — кількість елементарних подій, які сприяють події $A$, $n$ — загальна кількість попарно несумісних і рівноможливих подій.

**Комбінаторні правила**

| | |
|---|---|
| **Правило суми:** якщо об'єкт $A$ можна вибрати n способами, а об'єкт $B$ – $m$ способами, то об'єкт $A$ **або** $B$ можна вибрати $(n + m)$ способами. | **Правило добутку:** якщо об'єкт A можна вибрати $t$ способами, а після цього об'єкт $B$ – $k$ способами, то **пару** $A$ **та** $B$ можна вибрати $(t \cdot k)$ способами. |

**7** За допомогою **трикутника Паскаля** можна розв'язувати **комбінаторні задачі.**



*Зауваж!*

**Пригадай!** Математичною моделлю задачі може бути формула, рівняння, нерівність, система рівнянь або нерівностей, функція, таблиця, схема, графік тощо.

Алгоритм розв'язування прикладної задачі:

1. Формулювання проблеми (задачі).
2. Створення математичної моделі задачі.
3. Розв'язування відповідної математичної моделі.
4. Аналіз відповіді.

## *Тренувальні вправи*

**7.81°.** Маємо результати вимірювання середньодобової температури повітря у західному регіоні України ($t$, °C) протягом квітня: 5; 6; 4; 3; 4; 5; 6; 2; 4; 6; 0; 1; 2; 3; 5; 4; 1; 4; 0; 7; 5; 4; 3; 7; 4; 5; 6; 7; 5; 6. Скласти частотну таблицю, порахувати для кожного значення таблиці відносну частоту, знайти середнє значення вибірки.

**7.82°.** Графічний дизайнер фіксував час у годинах, який витрачав на розробку різних проєктів протягом кварталу: 15 год, 12 год, 17 год, 14 год, 15 год, 13 год, 18 год, 12 год, 14 год, 15 год. Обчислити середнє значення, моду та медіану цієї вибірки.

**7.83°.** У вазі лежить 4 яблука і 3 груші. Скількома способами можна обрати один фрукт?

**7.84°.** Скількома способами можна вибрати голосну та приголосну літери зі слова «перемога»?

**7.85°.** У класі 10 дівчаток і 8 хлопчиків. Скількома способами можна вибрати пару (хлопчика та дівчинку) для танців?

**7.86°.** Скількома способами з 9 учнів можна вибрати 4 чергових?

**7.87°°.** Океанографи, які вивчають кліматичні зміни, виміряли глибину океану в десяти різних точках і отримали 3200, 3500, 3100, 3300, 3400, 3200, 3300, 3000, 3100, 3400 (у метрах). Скласти таблицю за цими даними, побудувати гістограму, обчислити частоту, відносну частоту та середню глибину океану в цьому регіоні.

**7.88°°.** Футбольний тренер вимірював швидкість удару гравців у км/год і отримав 90, 89, 92, 88, 95, 91, 87, 95; 93, 89, 90; 94, 92, 95, 90. Скласти таблицю частот, знайти відносну частоту кожного значення та середню швидкість удару.

**7.89°°.** За контрольну роботу з алгебри учні 7Б класу отримали такі оцінки: 6 балів – 2 учні, 7 балів – 4 учні, 8 балів – 6 учнів, 9 балів – 5 учнів, 10 балів – 7 учнів, 11 балів – 3 учні, 12 балів – 2 учні. Скласти таблицю частот, за даними таблиці побудувати гістограму та знайти середнє значення, моду і медіану.

**7.90°°.** Маємо таблицю даних середньої врожайності озимої пшениці в кількох фермерських господарствах у 2021 році.

| Фермерське господарство | «Прогрес» | «Надія» | «Сокіл» | «Калина» | «Промінь» | «Долина» |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Середня урожайність озимої пшениці, ц/га | 25,5 | 22,1 | 28,8 | 34,6 | 22,7 | 23,5 |

За даними таблиці скласти гістограму та знайти середню врожайність серед фермерських господарств цієї громади.

**7.91°°.** Швейне підприємство виготовляє светри, на ярлику яких вказано склад сировини: 60 % – поліамід, 40 % – вовна. Скільки вовни потрібно закупити, щоб виготовити партію з 50 светрів, якщо маса одного светра 600 г?

**7.92°°.** У відділі працює певна кількість чоловіків та жінок. Для анкетування навмання вибрали одного зі співробітників. Ймовірність того, що це чоловік, дорівнює $\frac{2}{7}$. Знайти відношення кількості жінок до кількості чоловіків, які працюють у цьому відділі.

**7.93°°.** Пасічник зберігає мед в однакових закритих бідонах. Їх у нього 12: у трьох бідонах міститься квітковий мед, у чотирьох – мед із липи, у п'яти – мед із гречки. Знайти ймовірність того, що перший навмання відкритий бідон буде містити мед із гречки.

**7.94°°.** У кіоску є 10 видів вітальних листівок. Скільки різних наборів з трьох листівок можна утворити?

**7.95•.** Квиток до музею коштує 150 гривень. Дітям шкільного віку надається знижка 50 %. Обчислити, скільки коштує відвідання музею групою, яка складається з 3 дорослих та 24 школярів / школярок, якщо для груп більше 20 осіб надається додаткова знижка в розмірі 5 %.

**7.96•.** Кров становить 7 % маси тіла людини, 54 % загального її об'єму знаходиться в кровоносних судинах, 20 % містить-

ся в печінці, 16 % – у селезінці та 10 % – у підшкірних судинах. Скільки крові міститься в кровоносних судинах, у печінці, селезінці та у підшкірних судинах людини, маса якої 84 кг?

**7.97•.** Банк пропонує 12 % річних на депозитний внесок. Клієнт вніс на свій рахунок 15 000 грн. Обчислити, яка сума буде в нього на депозитному рахунку через рік. Якою буде загальна сума на депозитному рахунку через 2 роки, якщо клієнт продовжить строк договору та додасть отриманий прибуток за перший рік до початкової суми внеску?

**7.98•.** Робітнику на підприємстві нарахували заробітну плату в розмірі 18 250 грн. Обчислити утримання з заробітної плати:

а) податок на доходи для фізичних осіб – 18 %;

б) військовий збір – 1,5 %;

в) профспілкові відрахування – 0,5 %;

г) загальну суму утримань.

**7.99•.** У коробці є 80 цукерок, з яких 44 – з чорного шоколаду, а решта – з білого. Визначити ймовірність того, що навмання взята цукерка з коробки буде з білого шоколаду.

**7.100•.** Марійка зірвала на клумбі 8 нарцисів та 7 тюльпанів. Скільки всього способів вибору із цих квітів 3 нарцисів та 2 тюльпанів для букету?

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**7.101••.** Ціна товару в магазині спочатку збільшилася на $x$ %, а під час акції знизилася на $y$ %. Скласти вираз для обчислення, на скільки відсотків змінилася початкова ціна товару.

**7.102••.** Спортсмен робить один постріл у мішень. Імовірність того, що він влучить, у 7 разів більша за ймовірність промахнутися. Обчислити ймовірність того, що спортсмен не влучить у мішень.

**7.103••.** У Матвія є 9 різних фотографій із його зображенням та 7 різних фотографій його класу. Скільки всього способів вибрати з них 3 фотографії із своїм зображенням для персональної сторінки в соціальній мережі та 2 фотографії з класом для сайту школи в нього є?

## *Сформулюй запитання до задач, працюючи в класному кооперативі: «Чи можеш ти?»*

**7.104**••. Скласти запитання до умов задач.

а) задача *«Вміст води»*. Всі тварини і рослини містять певну кількість води в організмі, зокрема: тварини – 75%, риби – 75%, медузи – 99%, картопля – 76%, яблука – 85%, помідори – 90%, огірки – 95%, кавуни – 96%.

б) задача *«Продаж автомобіля»*. Вартість автомобіля становить 300 000 грн. Після 6 місяців користування вартість авто становить 80% від початкової.

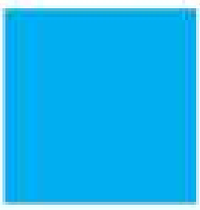
в) задача *«Вміст шухляди»*. У шухляді лежать лише олівці та ручки. Відомо, що олівців на 12 менше, ніж ручок. Ймовірність навмання вибрати з шухляди одну ручку становить $\frac{5}{8}$.

г) задача *«Оформлення салону»*. Для оформлення салону краси вирішили замовити 2 орхідеї та 5 кущів хризантем різного кольору. У продажу є орхідеї 10 кольорів та хризантеми 8 кольорів.

## *ПЕРЕВІР СЕБЕ «Як ти?»*

Перевір себе «Як ти?»

**Аркуш «§7.5. Компетентнісно орієнтовані задачі, що моделюються елементами стохастики»**



# Узагальнення та систематизація набутих компетентностей з теми: «ЕЛЕМЕНТИ СТОХАСТИКИ»

*Коли вже почав – перемагай!*
(Ернест Гемінгвей)

Привіт! Ти як?

Пропоную девіз для навчання: ***«Я знаю, що успіх приходить до того, хто його прагне!».***

Сьогодні не Кубик Блума буде тобі допомагати діагностувати, «чи ти знаєш?», «чи ти вмієш?» і «чи ти можеш?», а ти сам/сама формуватимеш свою «Я – особистість!» шляхом самостійної перевірки своєї доброчесності та власної діяльності.

**Завдання 1. Вправа: «Постав собі «*», якщо так».**

**1). Перевір свою доброчесність:**

- ✓ Чи виконував/виконувала **Я** всі завдання домашньої роботи?
- ✓ Чи розв'язав/розв'язала **Я** домашні завдання самостійно?
- ✓ Чи пробував/пробувала **Я** перевіряти свої вміння хоч після одного уроку?
- ✓ Чи вів/вела **Я** облік: «знаю», «хочу дізнатися», «дізнався/дізналася»?
- ✓ Чи запланував/запланувала **Я** навчатися краще, ніж це було вчора?

**2). Запитання для самоконтролю власної діяльності**

1) Чи знаю **Я**, які питання вивчає математична статистика?
2) Чи розумію **Я**, що таке частота і відносна частота елементів варіаційного ряду?
3) Чи знаю **Я**, як знайти розмах вибірки?
4) Чи вмію **Я** складати частотну таблицю та будувати гістограму?
5) Чи знаю **Я**, як знайти середнє значення, моду і медіану вибірки?
6) Чи вмію **Я** обчислювати дріб від числа та число за його дробом?
7) Чи вмію **Я** знаходити відсотки від числа?
8) Чи знаю **Я**, як знайти число за його відсотками?
9) Чи вмію **Я** обчислювати відсоткове відношення двох чисел?
10) Чи вирізняю **Я** завдання, в яких треба знайти відсотки від числа або число за його відсотками?
11) Чи знаю **Я**, які події в теорії ймовірностей називають вірогідними, неможливими, випадковими?

12) Чи знаю **Я**, які дві події можна назвати сумісними і несумісними?

13) Чи знаю **Я**, які події називають рівноможливими?

14) Чи знаю **Я** формулу, яку використовують для обчислення ймовірності події A?

15) Чи знаю **Я**, чому дорівнює ймовірність вірогідної події, неможливої події?

16) Чи знаю **Я**, як називається розділ математики, у якому розглядають розв'язування комбінаторних задач?

17) Чи розумію **Я**, як використовувати правила суми та добутку для розв'язування комбінаторних задач?

Зроби висновок: «Як Ти?». Чи можеш собі сказати: « Тепер Я усвідомлюю, що можу, хочу і буду вчитися!».

Похвали себе, якщо ти «Молодець!»

**Завдання 2. Розглянь інтелектуальну карту з тем: «Вступ до статистики», «Відсоткові розрахунки», «Подія. Ймовірність події» та «Комбінаторика».**

## ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА КАРТА «ВСТУП ДО СТАТИСТИКИ»

**Частоти** – числа, які показують, скільки разів повторювалось кожне значення ознаки сукупності

**Відносна частота** – відношення частоти до обсягу вибірки

**Середнім значенням** $n$ даних $x_1, x_2, \dots x_n$ вибірки є число

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}$$

де $x$ – значення варіанти, $n$ — число одиниць сукупності.

**СТАТИСТИКА**

**Медіана** *(Me)* – це серединне значення впорядкованого ряду значень випадкових величин: – якщо кількість чисел у ряді непарна, то медіана – це число, записане посередині; – якщо кількість чисел у ряді парна, то медіана — це середнє арифметичне двох чисел, що стоять по середині

**Розмахом** $R$ вибірки значень випадкової величини є різниця між найбільшим і найменшим значеннями величин

**Мода** вибірки *(Mo)* – це значення елемента вибірки, яке зустрічається частіше за інші

Інтелектуальна карта

## ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА КАРТА «ВІДСОТКОВІ РОЗРАХУНКИ»

**ВІДСОТКИ**

**Перетворення десяткового дробу** на відсотки: помножити дріб на 100 %. Наприклад:
$0{,}08 = 0{,}08 \cdot 100\ \% = 8\ \%$

**Перетворення відсотків на десятковий дріб:** поділити число відсотків на 100 %. Наприклад:
$8\ \% = 8\ \% : 100\ \% = 0{,}08.$

**Знаходження відсотка від заданого числа**
1. Перетвори відсоток на десятковий дріб.
2. Помнож задане число на цей дріб.
Наприклад: знайти 5 % від 120.
$5\ \% = 0{,}05;$
$120 \cdot 0{,}05 = 6$

**Знаходження числа за його відсотком**
1. Перетвори відсоток на десятковий дріб.
2. Поділи число на цей дріб.
Наприклад: знайти число, 14 % якого дорівнюють 42.
$14\ \% = 0{,}14;$
$42 : 0{,}14 = 300$

**Знаходження відсоткового відношення двох чисел**
Щоб знайти відсоткове відношення числа $a$ до числа $b$, потрібно $a/b \cdot 100\ \%$;
Наприклад: знайди відсоткове відношення 35 до 28.
$35 : 28 \cdot 100\ \% = 125\ \%$

## ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА КАРТА «ВИДИ ПОДІЙ. ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЙ»

**ВИДИ ПОДІЙ. ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЙ**

**ВИПАДКОВА**

Ймовірність випадкової події:
$$P(A) = \frac{m}{n},$$
де $m$ – кількість випадків, що сприяють появі події $A$, $n$ – кількість всіх можливих випадків

**ВІРОГІДНА**

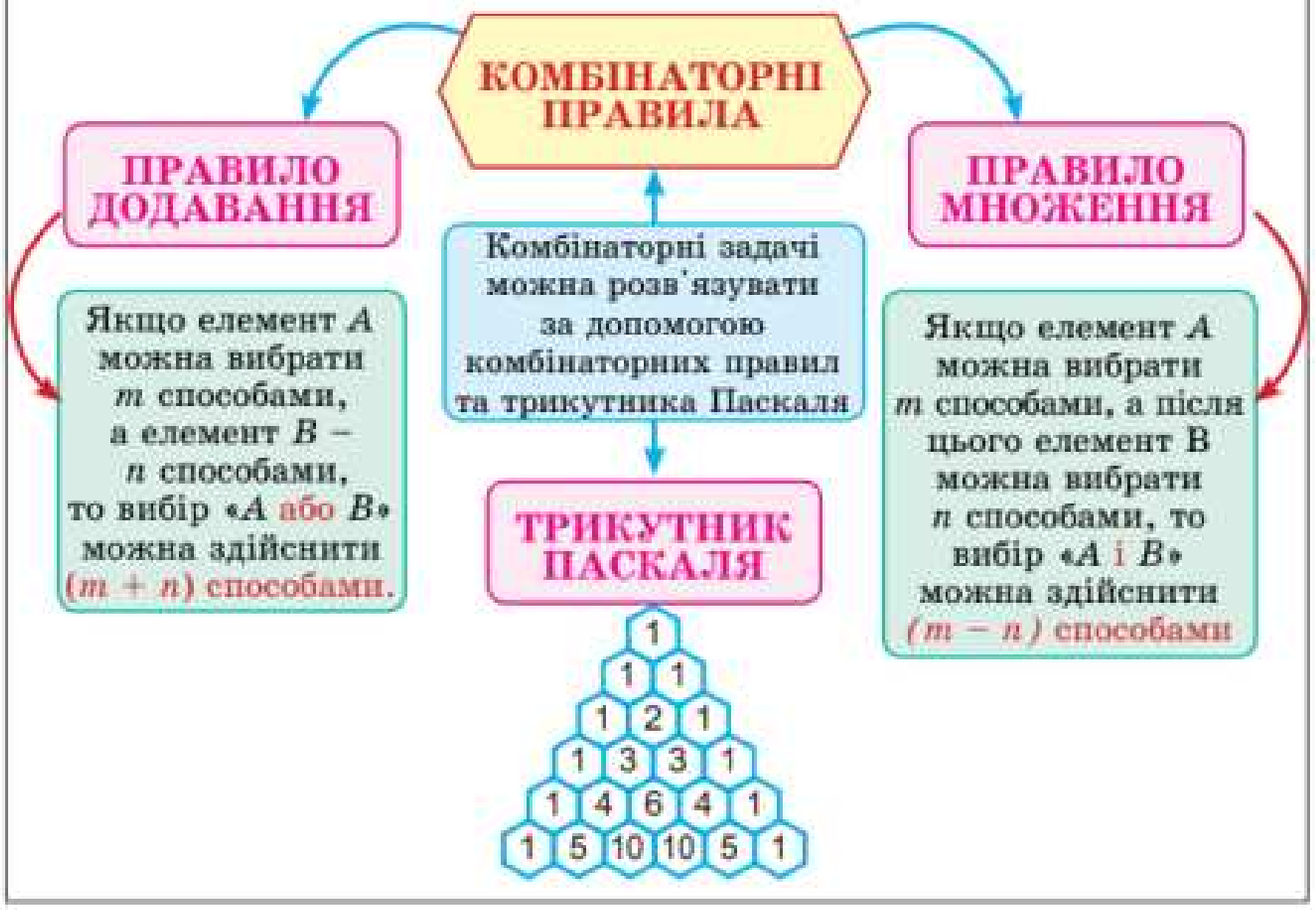
Ймовірність вірогідної події дорівнює 1

**НЕМОЖЛИВА**

Ймовірність неможливої події дорівнює 0

Інтелектуальна карта

**ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА КАРТА «КОМБІНАТОРНІ ПРАВИЛА ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ»**




## *Тренувальні вправи*

**7.107°.** Наведено таблицю кількості опадів (в мм) протягом першого півріччя в Чернівецькій області:

| Місяць | Січень | Лютий | Березень | Квітень | Травень | Червень |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Кількість опадів, мм | 14 | 55 | 32 | 16 | 73 | 35 |

Побудувати гістограму за даними цієї таблиці.

**7.108°.** Види номерів в готелі «Карпати» представлені в таблиці:

| Види номерів | Економ | Стандарт | Напівлюкс | Люкс | Еліт |
|---|---|---|---|---|---|
| Кількість | 10 | 25 | 15 | 8 | 2 |

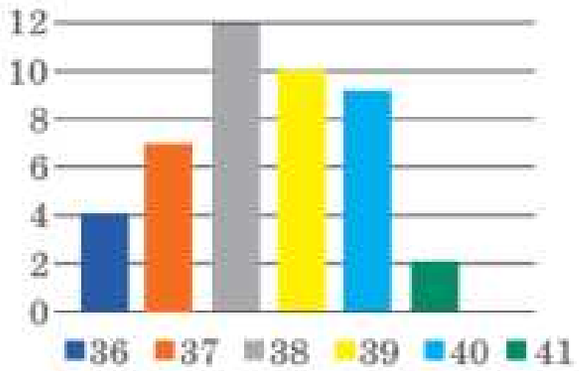
Знайти моду та медіану вибірки за даними таблиці.

**7.109°.** Учні виміряли площі класних кімнат (у метрах квадратних) на третьому поверсі своєї школи і одержали таку вибірку: 48, 56, 54, 50, 48, 54, 50, 48, 56, 48. Знайти розмах та середнє значення вибірки.

**7.110°.** Заповнити порожній рядок таблиці, обчисливши відносну частоту для кожної варіанти:

| Число | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 41 | 54 | 27 | 35 | 19 | 52 | 40 | 32 |
| Відносна частота | | | | | | | | |

**7.111°.** У гістограмі наведено дані продажу жіночого взуття в магазині «Черевичок» протягом тижня. За даними гістограми скласти таблицю частот, знайти моду, медіану і середнє значення вибірки.




**7.112°.** З кожної тони залізної руди можна видобути 560 кг заліза. Знайти відсотковий вміст заліза в руді.

**7.113°.** Ціна виробу спочатку зросла на 20 %, а потім знизилась на 10 %. Знайти, на скільки відсотків змінилась ціна внаслідок цих двох переоцінок.

**7.114°.** Ціну на товар знизили на спочатку на 4 %, а потім – ще на 10 %, тоді він став коштувати 432 грн. Знайти початкову ціну товару.

**7.115°.** Під час сушіння яблука втрачають 85 % своєї маси. Обчислити, скільки кілограмів свіжих яблук треба взяти, щоб одержати 3 кг сушених.

**7.116°.** В результаті акції ціну на шоколадне печиво знизили на 20 %. Знайти, на скільки більше печива можна придбати під час акції на ту саму суму.

**7.117°.** Дати відповідь на запитання, користуючись малюнком:

а) Яка ймовірність того, що стрілка під час обертання зупиниться на 7?

б) Яка ймовірність того, що стрілка під час обертання зупиниться на парному числі?



в) Яка ймовірність того, що стрілка під час обертання зупиниться на числі, яке не більше 8?

г) Яка ймовірність того, що стрілка під час обертання зупиниться на числі, яке не менше 7?

**7.118°.** В урні лежить 20 жовтих, 12 синіх і 8 білих кульок, які рівні за розміром і однакові на дотик. Дати відповіді на запитання:

1) Скількома способами можна обрати будь-яку кульку?
2) Яка ймовірність того, що навмання вибрана кулька жовта?
3) Яка ймовірність того, що навмання вибрана кулька синя?
4) Яка ймовірність того, що навмання вибрана кулька біла?
5) Яка ймовірність того, що навмання вибрані 2 кульки білі?
6) Яка ймовірність того, що навмання вибрані 2 кульки жовті?
7) Яка ймовірність того, що навмання вибрані 4 кульки сині?

**7.119°.** У коробці лежить 20 карток, пронумерованих від 1 до 20. Із коробки навмання беруть одну картку. Дати відповіді на запитання:

1) Яка ймовірність того, що на ній записано число, кратне 3?
2) Яка ймовірність того, що на ній записано парне (непарне) число?
3) Яка ймовірність того, що на ній записано просте число?
4) Яка ймовірність того, що на ній записано число, кратне 4?
5) Яка ймовірність того, що на ній записано число, кратне 5?
6) Яка ймовірність того, що на ній записано число, кратне 10?

**7.120°.** Вікторія повинна вибрати лише один десерт із 7 видів коктейлю, 4 видів морозива і 3 видів йогурту. Скількома способами вона може вибрати десерт?

**7.121°.** У вазі лежать 7 яблук, 3 груші та 7 мандаринів. Скільки існує способів взяти один фрукт із вази?

**7.122°.** У спортивному магазині пропонують 3 види рюкзаків та світловідбиваючі браслети 7 кольорів. Скількома способами турист може сформувати собі комплект із рюкзака та світловідбиваючого браслета?

**7.123°°.** Після того як Петро витратив 40 % своїх грошей на купівлю лижного знаряддя та 75 % решти — на купівлю зимової куртки, в нього залишилося 500 грн. Знайти, скільки грошей було у хлопця спочатку.

**7.124°°.** Знайти ймовірність того, що навмання вибране число від 1 до 50 включно містить у своєму записі цифру 4; 7; 8; 9.

**7.125°°.** Яка ймовірність того, що навмання вибране натуральне число від 1 до 32 включно є дільником числа 32?

**7.126°°.** Із 25 карток, що пронумеровані числами від 1 до 30, навмання обирають одну. Яка ймовірність того, що номер витягнутої картки є число, що кратне дев'яти?

**7.127°°.** У театрі 7 дверей. Скількома способами можна зайти до театру і вийти з нього, якщо входити і виходити через різні двері?

**7.128°°.** Підкидають дві монети. Яка ймовірність того, що випадуть або два «числа», або два «герби»?

**7.129°°.** Установити відповідність між випадковими подіями (1–4) і ймовірностями цих подій (А–Е).

| *Подія* | *Ймовірність події* |
|---|---|
| 1. Перша вийнята навмання карта з колоди в 36 карт буде «тузом»; | А. $\frac{1}{8}$; |
| 2. Перша вийнята навмання кісточка з 28 кісточок доміно буде містити одиницю, але не буде дублем; | Б. $\frac{1}{10}$; |
| 3. При підкиданні трьох монет на всіх випаде «герб»; | В. $\frac{1}{9}$; |
| 4. При викладанні в ряд узятих навмання одна за одною трьох перегорнутих карток із буквами «м», «к», «о» одержали слово «ком»; | Г. $\frac{1}{6}$; |
| | Д. 1; |
| | Е. $\frac{3}{14}$. |

**7.130°°.** Із множини натуральних чисел, які належать проміжку [30; 54], навмання вибирають число. Яка ймовірність того, що воно буде парним?

**7.131°°.** Одне з чисел на 60% більше за друге. Обчислити, на скільки відсотків друге число менше за перше.

**7.132•.** Підкидають 2 гральних кубики. Яка ймовірність того, що сума очок, які випадуть, дорівнює 5 або 6?

## *Досліди ситуацію, працюючи в групі: «Чи маєш ти ідеї?»*

**7.133**••. На уроці алгебри десятеро семикласників отримали такі оцінки: 9, 8, 10, 8, 7, 6, 11, 12, 8, $x$. Знайти $x$, якщо медіана цієї вибірки дорівнює 8,5.

**7.134**••. Перше число становить 120 % від другого, а відношення першого до третього дорівнює $\frac{12}{15}$. Знайти всі три числа, якщо різниця між третім і другим на 20 менша від числа, що становить 30 % від суми першого і другого чисел.

**7.135**••. Маючи певну кількість грошей, можна купити 1 курку і 1 качан капусти або 1 коропа і 1 пиріг. Скількома способами можна здійснити покупку, якщо запропонували 10 курей, 15 качанів капусти, 8 коропів і 6 пирогів?

**7.136**••. На полиці стоять підручники і посібники в однакових непрозорих обкладинках – декілька з історії і фізики та 10 книжок з інших предметів. Кількість книжок з історії відноситься до кількості книжок з фізики як 3 : 1. Після того як на полицю поставили ще 5 посібників з фізики, ймовірність з першого разу взяти книжку з історії стала дорівнювати $\frac{1}{3}$. Скільки всього книжок було на полиці спочатку?

**7.137**••. Узагальнити отриману інформацію з теми «Цілі вирази. Многочлени» у формі вірша – «Сенкан» за такими правилами:

1. Перший рядок – тема (іменник).
2. Другий – опис теми (два прикметники).
3. Третій – називає дію, пов'язану з темою, складається з трьох дієслів.
4. Четвертий рядок – фраза, переважно з 4-х слів, висловлює ставлення до теми, почуття.
5. П'ятий рядок – одне слово – синонім до слова (теми), ніби висновок вірша.

Приклад сенкану

